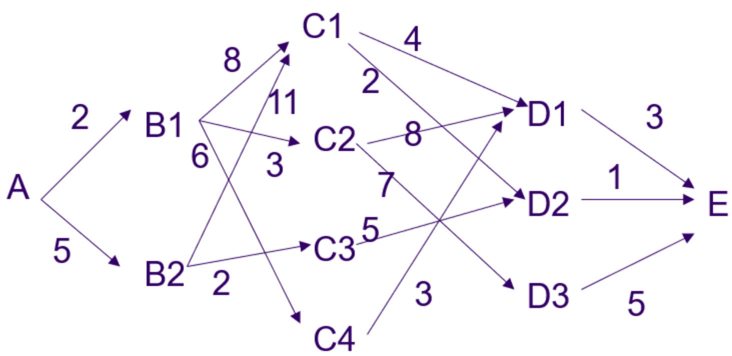
Chapter3 动态规划

动态规划的基本思想

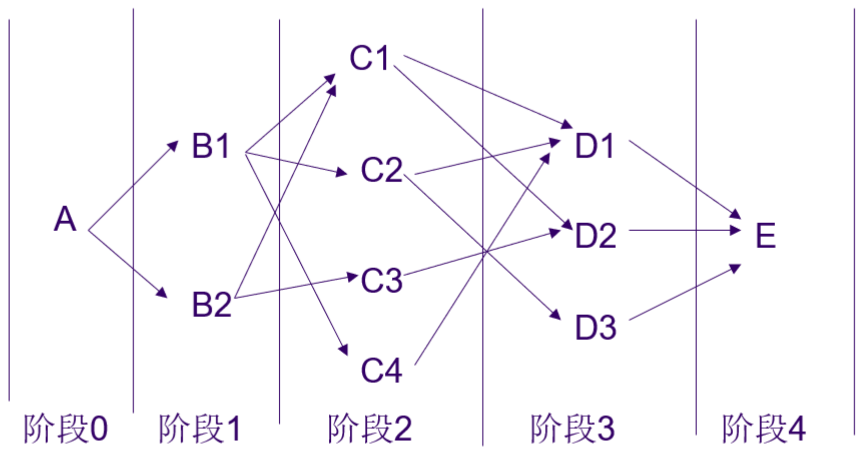
动态规划算法与分治法类似，其基本思想也是将待求解问题分解成若干个子问题，先求解子问题，然后从这些子问题的解得到原问题的解。与分治法不同的是，适合用动态规划法求解的问题，经分解得到的子问题往往不是互相独立的。

- $e.g.$多阶段图最短路问题

下图表示城市之间的交通路网，线段上的数字表示费用，单向通行由$A \to E$。求$A \to E$的最省费用。



此图有明显的次序，可以划分为5阶段。故此问题的要求是：在各个阶段选取一个恰当的决策，使由这些决策组成的一个决策序列所决定的一条路线，其总路程最短。



分析：如果$B_1 \to E$的最短路已知，$B_2 \to E$的最短路已知$\Longrightarrow$知道了最短路

所以，动态规划有以下两个特点

- 原问题的最优解包含了子问题的最优解$\longrightarrow$最优子结构
- 求解B问题时
  - B_1问题依赖C_1, C_2, C_4的最优解
  - B_2问题依赖C_1, C_3的最优解

可以看出，C_1的解被B_1, B_2重复使用，子问题的解被多次使用$\longrightarrow$子问题重叠$\longrightarrow$重复计算

设计问题的步骤

- 找出最优解的性质，刻画其结构特征
- 递归的定义最优值
- 以自底向上的方式计算它
- 根据计算最优值时得到的信息，构造最优解

定义递归函数注意要点

- 传的参数，以及它的范围条件
- 递归的边界条件，通常在记忆化搜索中，以记录的元素存在为边界条件

```
if(Memorized[i][j]) return Memorized[i][j];
```

- 剪枝的条件

矩阵连乘问题

$Question$:给定n个矩阵：$A_1, A_2, \ldots, A_n$，其中A_i与A_{i+1}是可乘的。确定一种连乘的顺序，使得矩阵连乘的计算量为最小。

- 如果直接顺序相乘，矩阵连乘的基本乘法数是

$(p \times r) \times [(p \times q) \times q]$

可以发现，在矩阵很多时，乘法的数目是很庞大的，因此，我们需要最小化乘法的次数来减少计算的时间。

- 不同计算顺序的差别

矩阵连乘积 $A_1A_2A_3A_4$ 的不同的加括号方式及其对应计算量分别如下：

$A_1 = 10 \times 100$ $A_2 = 100 \times 5$ $A_3 = 5 \times 50$ $A_4 = 50 \times 30$

(1) $(A_1(A_2(A_3A_4)))$: $5\times50\times30+100\times5\times30+10\times100\times30 = 52500$

(2) $(A_1((A_2A_3)A_4))$: $100\times5\times50+100\times50\times30+10\times100\times30 = 205000$

(3) $((A_1A_2)(A_3A_4))$: $10\times100\times5+5\times50\times30+10\times5\times30 = 14000$

(4) $((A_1(A_2A_3))A_4)$: $100\times5\times50+10\times100\times50+10\times50\times30 = 90000$

(5) $(((A_1A_2)A_3)A_4)$: $10\times100\times5+10\times5\times50+10\times50\times30 = 22500$

可以发现：求多个矩阵的连乘积时，计算的结合顺序是十分重要的。

- 考虑一种四个矩阵相乘的特殊情况

设矩阵为A_1, A_2, A_3, A_4 ，A_1的行列为p_0, p_1 A_2的行列为$p_1, p_2 \ldots$以此类推.

这样，四个矩阵的行列值，可以通过一个一维数组存放.

```
int p[5] = {p0,p1,p2,p3,p4};
```

根据上表的计算顺序对于乘法次数的影响我们可以发现，**乘法次数的大小取决于加的括号的位置**，于是，我们可以对A_1, A_2, A_3, A_4这四个矩阵的乘法顺序进行划分，有以下三种情况

1. $A_1, |A_2, A_3, A_4$
2. $A_1, A_2, |A_3, A_4$
3. $A_1, A_2, A_3, |A_4$

现在要做的工作就是，如果求出了A_2, A_3, A_4，A_1, A_2，A_3, A_4，A_1, A_2, A_3这四个子问题的乘法次数的最小值，再把它们三种情况进行比较，就求得了整个问题的最小值.

如果设$m[i][j]$是矩阵$\Pi_{k=i}^{j} A_i$的值，那么，上述三个的乘法次数如下

1. $m[2][4] + (m[1][1] = 0) + p_0p_1p_4$
2. $m[1][2] + m[3][4] + p_0p_2p_4$
3. $m[1][3] + (m[4][4] = 0) + p_0p_3p_4$

通过观察，我们可以归纳出从A_i到A_j的通用方程

- 从A_i到A_j的通用方程

  设矩阵$A_iA_{i+1}\dots A_j$,k是划分的位置

  - $m[i][j] = min(\Pi_{k=i}^{j} A_i) = min_{i \le k < j}(m[i][k] + m[k+1][j] + p_{i-1}p_kp_j)(i < j)$
  - $0(i = j)$

备忘录

使用$m[i][j]$记录已经求过的子问题，避免了相同子问题的重复计算

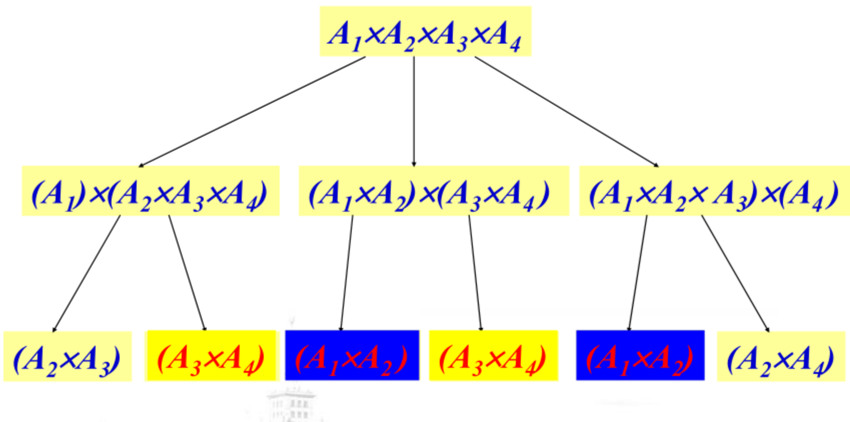
递归求解

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
#define ll long long
#define mod 1000000007
const ll maxn = 2e6 + 7;
ll p[maxn];
ll m[1000][1000];

ll recursiveMatrixChain(ll i, ll j) {
    if (i == j) return  m[i][j]=0;
    if (m[i][j] > 0) return m[i][j];
    ll minVal = recursiveMatrixChain(i, i) + recursiveMatrixChain(i + 1, j) + p[i - 1] * p[i] * p[j];
    m[i][j] = minVal;
    for (long long k = i ; k < j; ++k) {
        ll tmp = recursiveMatrixChain(i, k) + recursiveMatrixChain(k + 1, j) + p[i - 1] * p[k] * p[j];
        if (tmp < minVal) {
            minVal = tmp;
        }
    }
    m[i][j] = minVal;
    return minVal;
}


int main() {
    ll n;
    cin >> n;
    for (long long i = 0; i <= n; ++i) {
```

```
        cin >> p[i];
    }
    int ans=recursiveMatrixChain(1, n);//注意范围，因为题目给定的n是矩阵数目-1所以是n
    //如果题目了n个矩阵，那么递归的范围是[1,n-1]
//    RecurMatrixChain(1,n);
//    for (long long i = 0; i <= n; ++i) {
//        for (long long j = 0; j <= n; ++j) {
//            cout << m[i][j] << setw(5) << " ";
//        }
//        cout << '\n';
//    }
    cout<<ans;

    return 0;
}
```

循环求解

如何避免递归?



可以发现，递归是自顶向下的求解过程，如果我们换一种思路，从树底求解最小子问题（两个矩阵连乘的问题），再用求解好的子问题求解更上层的问题，最终达到求解1-n整个问题答案的目的

时间复杂度为：$O(n^3)$

空间复杂度为：$O(n^2)$

- Code

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
#define ll long long
#define mod 1000000007
const ll maxn = 2e6 + 7;
int m[2000][2000];
int p[2000];
int s[2000][2000];
int n;

int matrixChain() {
    for (long long i = 0; i <= n; ++i) {
        //对角线上的元素置0
        m[i][i] = 0;
```

```
    }
    for (long long i = n; i >= 1; --i) {
        for (long long j = i + 1; j <= n; ++j) {
            //找出每一个的初值
            m[i][j] = m[i][j] + m[i + 1][j] + p[i - 1] * p[i] * p[j];
            s[i][j] = i;
            for (long long k = i + 2; k < j; ++k) {//i+1已经比过
                //找到最小值
                int tmp = m[i][k] + m[k + 1][j] + p[i - 1] * p[k] * p[j];
                if (tmp < m[i][j]) {
                    m[i][j] = tmp;
                    s[i][j] = k;
                }
            }
        }
    }
    return m[1][n];
}

void trace(int i, int j) {
    if (i == j) {
        cout << 'A' << i;
        return;
    }
    cout << "(";
    int k = s[i][j];
    trace(i, k);
    trace(k + 1, j);
    cout << ")";
    return;
}


int main() {

    cin >> n;
    for (long long i = 0; i <= n; ++i) {
        cin >> p[i];
    }
    cout << matrixChain() << endl;
    trace(1, n);
    cout << endl;
    for (long long i = 0; i <= n; ++i) {
        for (long long j = 0; j <= n; ++j) {
            cout << m[i][j] << ' ';
        }
        cout << '\n';
    }
    return 0;
}
```

路径问题

问题集

- 数字三角形

https://www.luogu.com.cn/problem/P1216

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
#define ll long long
#define mod 1000000007
const ll maxn = 2e6 + 7;
int dp[1001][1001];

int main() {
    ll n;
    cin >> n;
    for (long long i = 0; i <= n; ++i) {
        for (long long j = 0; j <= n; ++j) {
            dp[i][j] = -1000000;
        }
    }
    for (long long i = 1; i <= n; ++i) {
        for (long long j = 1; j <= i; ++j) {
            cin >> dp[i][j];
        }
    }
    for (long long i = n - 1; i >= 1; --i) {
        for (long long j = 1; j <= i; ++j) {
            dp[i][j] += max(dp[i + 1][j], dp[i + 1][j + 1]);
        }
    }
//    for (long long i = 0; i <= n; ++i) {
//        for (long long j = 0; j <= n; ++j) {
//            cout << dp[i][j] << ' ';
//        }
//        cout << endl;
//    }
    cout << dp[1][1];


    return 0;
}
```

- 滑雪

https://www.luogu.com.cn/problem/P1434

记忆化DFS

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
#define ll long long
#define mod 1000000007
const ll maxn = 2e6 + 7;
ll dx[4] = {1, -1, 0, 0};
```

```
ll dy[4] = {0, 0, 1, -1};
ll a[1001][1001];
ll s[1001][1001];
ll r, c;

ll dfs(ll x, ll y) {
    if (s[x][y]) return s[x][y];
    s[x][y] = 1;
    for (long long i = 0; i < 4; ++i) {
        ll xi = x + dx[i];
        ll yi = y + dy[i];
        if (xi > 0 && yi > 0 && xi <= r && yi <= c && a[x][y] > a[xi][yi]) {
            //这里的边界有效条件除了考虑xi,yi的不能超范围，还要保证已经搜过的不能再搜的边界条件，也就是a[x][y] > a[xi][yi]
            dfs(xi, yi);
            s[x][y] = max(s[x][y], s[xi][yi] + 1);
        }
    }
    return s[x][y];
}

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(0);
    cin >> r >> c;
    for (long long i = 1; i <= r; ++i) {
        for (long long j = 1; j <= c; ++j) {
            cin >> a[i][j];
        }
    }
    ll ans = -1;
    for (long long i = 1; i <= r; ++i) {
        for (long long j = 1; j <= c; ++j) {
            ans = max(ans, dfs(i, j));
        }
    }
    cout << ans << endl;
//    for (long long i = 0; i <= r; ++i) {
//        for (long long j = 0; j <= c; ++j) {
//            cout << s[i][j] << ' ';
//        }
//        cout << endl;
//    }
    return 0;
}
```

最长公共子序列（LCS）

$Question$

若给定序列$X = x_1, x_2, \ldots, x_m$，则另一序列$Z = z_1, z_2, \ldots, z_k$，是$X$的子序列是指存在一个严格递增下标序列$i_1, i_2, \ldots, i_k$使得对于所有$j = 1, 2, \ldots, k$有：$z_j = x_{ij}$。

例如，序列$Z = B，C，D，B$是序列$X = A，B，C，B，D，A，B$的子序列，相应的递增下标序列为$2，3，5，7$。

给定2个序列X和Y，当另一序列Z既是X的子序列又是Y的子序列时，称Z是序列X和Y的公共子序列。

给定2个序列$X = x_1, x_2, \ldots, x_m$和$Y = y_1, y_2, \ldots, y_n$，找出$X$和$Y$的最长公共子序列。

- LCS的结构分析

设序列$X = x_1, x_2, \ldots, x_m$和的$Y = y_1, y_2, \ldots, y_n$最长公共子序列为$Z = z_1, z_2, \ldots, z_k$，则
(1)若$x_m = y_n$，则$z_k = x_m = y_n$，且Z_{k-1}是X_{m-1}和Y_{n-1}的最长公共子序列。
(2)若$x_m \neq y_n$且$z_k \neq x_m$，则Z是X_{m-1}和Y的最长公共子序列。
(3)若$x_m \neq y_n$且$z_k \neq y_n$，则Z是X和Y_{n-1}的最长公共子序列。

由此可见，2个序列的最长公共子序列包含了这2个序列的**前缀**的最长公共子序列。因此，最长公共子序列具有**最优子结构性质**（2，3条件下总有一个最优解）。

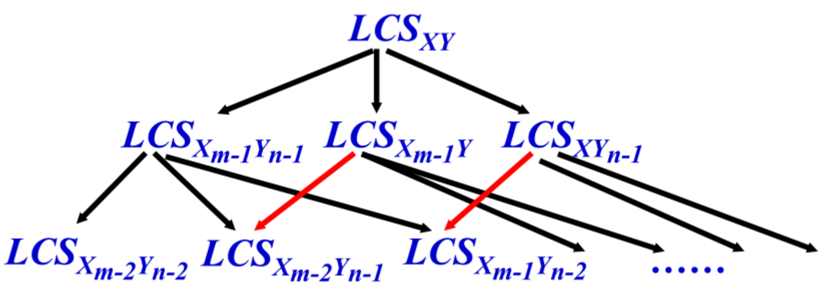
由LCS 的最优子结构性质建立子问题最优值的递归关系。用$c[i][j]$记录序列X_i和Y_j的最长公共子序列的长度。其中，$X_i = x_1, x_2, \ldots, x_i$；$Y_j = y_1, y_2, \ldots, y_j$。当$i = 0$或$j = 0$时，空序列是$X_i$和$Y_j$的最长公共子序列。故此时$c[i][j] = 0$。其它情况下，由最优子结构性质可建立递归关系如下：

$$c[i][j] = \begin{cases} 0 & i = 0, j = 0 \\ c[i-1][j-1]+1 & i, j > 0; x_i = y_j \\ \max\{c[i][j-1], c[i-1][j]\} & i, j > 0; x_i \neq y_j \end{cases}$$

可以发现

- 这是一个二维表
- 填表顺序从左上角到右下角
- 时间复杂度和空间复杂度都为$O(n^2)$

同时LCS还具有子问题的重叠性



- 算法思路

自左而右自上而下建立表格$matrix$[][]。
(1)如果$str1[i] = str2[j]$则将左上角元素值加1赋值给$matrix[i][j]$，如果本身是最左上角元素就为1。
(2)如果$str1[i]$不等于$str2[j]$则该点元素值取$matrix[i-1][j]$和$matrix[i][j-1]$中较大的一个。如果$i = 0$且$j = 0$（最左上角）则取0。

		a	b	c	f	b	c
	0	0	0	0	0	0	0
a	0	1	1	1	1	1	1
b	0	1	2	2	2	2	2
f	0	1	2	2	3	3	3
c	0	1	2	3	3	3	3
a	0	1	2	3	3	3	3
b	0	1	2	3	3	4	4

- Code

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
#define ll long long
#define mod 1000000007
const ll maxn = 2e6 + 7;
int c[2000][2000];

void LCSLength(char x[], char y[]) {  //调用该函数前，先将c数组置初值为0
    int i, j;
    for (i = 1; i <= strlen(x); i++) //自上而下
        for (j = 1; j <= strlen(y); j++) { //每行自左向右
            if (x[i - 1] == y[j - 1])//下标从0开始
                c[i][j] = c[i - 1][j - 1] + 1;
            else if (c[i - 1][j] >= c[i][j - 1]) {
                c[i][j] = c[i - 1][j];
            } else c[i][j] = c[i][j - 1];
        }
}

void LCS(int i, int j, char x[], char y[]) {
    if (i == 0 || j == 0) {
        return;
    }
    if (x[i - 1] == y[j - 1]) {//下标从0开始
        LCS(i - 1, j - 1, x, y);
        cout << x[i - 1];//下标从0开始
    } else if (c[i - 1][j] >= c[i][j - 1]) {
        LCS(i - 1, j, x, y);
    } else LCS(i, j - 1, x, y);
}


char x[12000];
char y[12000];

int main() {
    cin >> x >> y;
```

```
    LCSLength(x, y);
    int lenx = strlen(x);
    int leny = strlen(y);

    cout << c[lenx][leny] << endl;

    for (long long i = 0; i <= max(lenx, leny); ++i) {
        for (long long j = 0; j <= max(lenx, leny); ++j) {
            cout << c[i][j] << ' ';
        }
        cout << endl;
    }

    LCS(lenx, leny, x, y);

    return 0;
}
/*
dabcfbc  eabfcab
 */
```