寒假拓展作业

在本作业中，我们约定“数列”都是从第 0 项开始的，我们允许数列在复数中取值。数列用单个字母表示，例如 a，而数列的第 n 项则记作 a_n。

1　数列的母函数

对于数列 a，我们定义该数列的母函数 $Z[a]$ 为

$$Z[a](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

一般来说，对于某个复数 z，无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ 并非总是收敛的。因此数列 a 的母函数 $Z[a]$ 的定义域就被规定为，全体“使得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ 收敛的复数 z”构成的集合。$Z[a]$ 的定义域也被记作 $\mathrm{ROC}[a]$，这是 $\mathbb{C}$ 的一个子集。

例 1.1 (常数数列的母函数)
若 $a_n = \alpha$ 是常数数列，那么

$$Z[a] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{z^n}$$

上面的级数的收敛域为 $\mathrm{ROC}[a] = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$，并且此数列的母函数 $Z[a]$ 在其定义域 $\mathrm{ROC}[a]$ 上恰好等于

$$Z[a](z) = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{\alpha z}{z - 1}$$

习题 1.2 (等比数列的母函数)
若 $a_n = \lambda^n$，计算 $Z[a]$。

（答案：$\mathrm{ROC}[a] = \{|z| > |\lambda|\}$，$Z[a](z) = \frac{z}{z-\lambda}$）

关于 $\mathrm{ROC}[a]$ 的研究我们放在最后，从现在开始，暂时忽略母函数的定义域有关的问题。我们感兴趣的仅仅是母函数的表达式。

2 线性递推数列的求解

习题 2.1
设 $a_0 = 1, a_1 = 2$，并且数列 a 满足递推关系 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$。

1. 设数列 a 的母函数为 $Z[a]$，利用 a 的递推关系证明函数方程：
$$z^2\left(Z[a](z) - 1 - \frac{2}{z}\right) = 3z\left(Z[a](z) - 1\right) - 2Z[a](z)$$
2. 说明 $Z[a](z) = \frac{z}{z-2}$，从而说明 $a_n = 2^n$。

习题 2.2 (斐波那契数列)
设 $f_0 = f_1 = 1$ 为斐波那契的最初两项

1. 证明函数方程：$z^2Z[f] - z^2 - z = (zZ[f] - z) + Z[f]$
2. 求系数 A, B, α, β 使得
$$\frac{Z[f]}{z} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}$$
3. 利用 $Z[f]$ 的表达式，求斐波那契数列的通项公式。（提示：母函数具有如下性质：$Z[a_1] + Z[a_2] = Z[a_1 + a_2]$）

在上面两个习题中，我们已经发现了母函数的一个重要性质：

定理 2.3 (数列的前推)
设 k 为正整数，若 $b_n = a_{n+k}$ 恒成立，则
$$z^kZ[a](z) - Z[b](z) = a_0z^k + a_1z^{k-1} + \cdots + a_{k-1}z$$

定理 2.4 (数列的后推)
设 k 为正整数，若 $b_n = a_{n-k}$ 恒成立（这里我们约定当 $n < 0$ 时 $a_n = 0$），则有 $Z[b](z) = z^{-k}Z[a](z)$。

习题 2.5
证明上面的两个定理。

习题 2.6
若 γ_1, γ_2 为给定常数，写出 $b_n = a_{n+2} + \gamma_1a_{n+1} + \gamma_2a_n$ 的母函数 $Z[b]$。

习题 2.7
利用习题 2.6，解释习题 2.1 和 2.2 中的函数方程的由来。

3 母函数的若干性质

定理 3.1
将数列变为其母函数的 Z 变换具有下面的性质

1. 线性性，也即，若 λ 为常数，a, b 为数列，则有

$$Z[a+\lambda b]=Z[a]+\lambda Z[b]$$

2. 若 λ 为常数并且 $b_n=\lambda^n a_n$ 恒成立，则有

$$Z[b](z)=Z[a](z/\lambda)$$

3. 若 $b_n=na_n$ 恒成立，则有

$$Z[b](z)=-z\frac{\mathrm{d}Z[a]}{\mathrm{d}z}$$

   其中 $\frac{\mathrm{d}Z[a]}{\mathrm{d}z}$ 代表函数 $Z[a](z)$ 对自变量 z 的导数。

4. 数列 $a_n=\frac{1}{n!}$ 的母函数为 $Z[a](z)=e^{1/z}$。

习题 3.2
证明上述定理，忽略有关收敛域 ROC 的因素。

习题 3.3
证明下列数列的母函数：

$$\begin{aligned}
a_n=1 &\quad Z[a](z)=\frac{z}{z-1}\\
a_n=n &\quad Z[a](z)=\frac{z}{(z-1)^2}\\
a_n=n^2 &\quad Z[a](z)=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}\\
a_n=\lambda^n &\quad Z[a](z)=\frac{z}{z-\lambda}\\
a_n=n\lambda^n &\quad Z[a](z)=\frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}\\
a_n=n^2\lambda^n &\quad Z[a](z)=\frac{\lambda z(z+\lambda)}{(z-\lambda)^3}\\
a_n=\frac{\lambda^n}{n!} &\quad Z[a](z)=e^{\lambda/z}
\end{aligned}$$

4 数列的卷积

给定两个数列 a, b，我们定义它们的卷积 c，为按下面方式定义的数列

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

我们也记 $c = a * b$，那么我们有下面的卷积公式:

定理 4.1 (卷积)
两个数列的卷积的母函数等于它们母函数的乘积:

$$Z[a * b] = Z[a]Z[b]$$

特别地，若数列 a 的前 $n+1$ 项和构成一个数列 $A_n = a_0 + \cdots + a_n$，我们可以认为数列 A 就是数列 a 和常数数列 1 的卷积，因此

$$Z[A](z) = Z[1]Z[a] = \frac{z}{z-1} Z[a](z)$$

如果我们希望求出数列 a 的前 n 项和 $B_n = a_0 + \cdots + a_{n-1}$ 的母函数，注意到 $B_n = A_{n-1}$，使用后推定理就有

$$Z[B](z) = \frac{1}{z} Z[A](z) = \frac{1}{z-1} Z[a](z)$$

习题 4.2
假设数列 x 满足

$$\frac{x_0}{3^n} + \frac{x_1}{3^{n-1}} + \cdots + x_n = \frac{1}{2^n}$$

1. 利用卷积的概念，证明

$$\frac{z}{z - \frac{1}{3}} Z[x](z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

2. 求适当的系数 α, β, γ 使得

$$Z[x](z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \gamma}$$

3. 求 x 的通项公式。

习题 4.3
已知 $x_n + 2x_{n-1} + 4x_{n-2} + 2(n-1)x_1 + 2nx_0 = 2^n$ 恒成立，求数列 x_n
（提示：$a_n = \cos\frac{n\pi}{2}, b_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ 的母函数为 $Z[a](z) = \frac{z^2}{z^2+1}, Z[b](z) = \frac{z}{z^2+1}$）

5 利用母函数解决数列问题

解决了习题 4.3 之后，你也许会好奇，什么数列的母函数是 $\frac{1}{z^2+1}$ 呢？这里我们介绍一个技巧：

定理 5.1
若定义数列

$$b_n = \begin{cases} a_{n/k}, & n\text{是}k\text{的倍数} \\ 0, & n\text{不是}k\text{的倍数} \end{cases}$$

那么 $Z[b](z) = Z[a](z^k)$

我们对二项式系数的定义进行合理的扩充：

定义 5.2
设 p 为某自然数，我们定义

$$\mathrm{C}_n^p = \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}, & n \geq p \\ 0, & n < p \end{cases}$$

习题 5.3
定义数列 $a_n = \mathrm{C}_n^k, b_n = \mathrm{C}_k^n$，证明

$$Z[a](z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}, Z[b](z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^k$$

前面我们已经见过求前 n 项和会给母函数带来怎样的影响，自然地，我们希望考察"求前 n 项和"的逆操作：差分

习题 5.4
我们约定 $a_{-1} = 0$，定义 $d_n = a_n - a_{n-1}, \delta_n = a_{n+1} - a_n$，证明：

$$Z[d](z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) Z[a](z)$$

$$Z[\delta](z) = (z-1)Z[a](z) - za_0$$

并从母函数的角度解释为何差分是求和的逆运算（注意，我们研究了两种求和和两种差分）。

我们会频繁使用到习题 2.6 的结论。若 $b_n = a_{n+2} + \gamma_1 a_{n+1} + \gamma_2 a_n$，则

$$Z[b] = z^2 Z[a] - a_0 z^2 - a_1 z + \gamma_1 (z Z[a] - a_0 z) + \gamma_2 Z[a]$$

除此之外，你需要做合理的变换，将母函数改写为可以识别的母函数的和。

习题 5.5

求解数列 $a_0 = a_1 = 0, a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = (-1)^n n$。

（提示：两边同时求母函数，解得 $Z[a](-z) = \frac{z}{(z-1)^4}$，这说明 $(-1)^n a_n = \mathrm{C}_n^3$）

习题 5.6

求解数列 $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} + a_n = 2n + 4$。

（提示：解得 $Z[a](z) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{z^2}{(z-1)^2}$）

习题 5.7

求解数列 $a_0 = a_1 = 0, a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 1 - 2n$。

习题 5.8

求解下面的双递推数列：$a_0 = 0, b_0 = 1$，并且 $\begin{cases} a_{n+1} + b_n = -2n \\ a_n + b_{n+1} = 1 \end{cases}$

（提示：题目可变为关于 $Z[a], Z[b]$ 的方程组）

习题 5.9

求解数列 y，满足

$$\sum_{k=0}^{t} (t-k) 3^{t-k} y_k = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

（提示：右侧的母函数为 $\frac{z}{z-1} - 1$）

习题 5.10

求解数列 a，满足 $a_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} k a_{n-k} - a_{n+1} = 2^n$$

习题 5.11

求解数列 x，满足

$$x_n + 2\sum_{k=0}^{n} (n-k) x_k = 2^n$$

习题 5.12

给出 ROC$[a]$ 非空的充要条件（提示：参见柯西-阿达玛定理）