23LA Linear and Abstract Algebra

邱才颙

2023 年 2 月 23 日

前言

本讲义为作者 2023 年春夏学期在深圳中学开设的代数课程配套讲义，出于教学法方面的考虑，本讲义中第一个被研究的代数结构是域上的线性空间。线性空间中的运算律最符合高中生目前的运算直觉，线性代数本身也是高校考察高中生代数水平的主要方面。群论等其他抽象代数中的主题也会逐步引入，但是目前我们的首要任务是熟悉代数思维，也就是抽象地思考，抽象地推理，并证明关于抽象概念的结论。

本次课程高一学生占大多数，因此这会是作者讲授的最为详细的一次代数课。但是考虑到学生的学习目标，这也会是知识曲线最为陡峭的一次代数课。阅读讲义的时候务必记住，本讲义不能、不想、不应、或许也不需要代替任何现成的优秀教材。

本课程和张鹏老师开设的线性代数学互为补充，故本讲义中不会涉及太多线性方程组和矩阵的变形技巧，复旦大学姚慕生的高等代数学可以作为本课程的主要参考书。本课程意图尽可能和黄文祥老师开设的数学分析呼应，故我们不加证明地自由地使用来自分析学和拓扑学的简单结论。

阅读本讲义的时候请务必注意封面上的日期，以便确保自己阅读的是最新版本。如有建议和意见，请联系本人：邱才颙，+86 167 5387 2357。

从教学法的角度考虑，本书中并非所有术语都和其他文献完全一致。

请注意，值域这个词的意义和高中课本的不一样，高中课本中的值域，我们将其称作像。除此之外，我们自由地使用朴素集合论的语言，我们接受并自由使用 Zorn 引理，因为它虽然等价于更容易接受的选择公理，却更适合用来证明代数学中的定理。

最后，纵然作者才华有限，能力未满，仍希望劝告此课程的学生：不要因为本讲义的存在，就放弃做笔记或者不听课。本讲义力求自给自足，然讲义的厚度永远无法替代主动思考的深度。

目录

Chapter 1

线性空间

线性空间的概念脱胎于对向量这个数学对象的研究，除了平面向量、空间向量之外，数学的各个领域中都有着非常类似向量的对象。最简单的例子就是实值函数：它和向量一样可以相加，可以乘上某个常数，我们还会看到实值函数的上述运算满足和平面向量几乎一致的诸多性质。为此，贯彻抽象代数学的精神，有必要创造一个专门的代数结构，也就是线性空间。线性空间的引入带来至少两个好处：它拓宽了我们对向量这个概念的理解，也给予了我们一种不依赖坐标（不需要建系）地研究向量的语境。

线性空间的重要性，可能说上一百页都不算少，相关资料可以自行搜索"线性空间/向量空间的应用"，我们现在就开始研究线性空间。

1.1 线性空间的定义

在数学中，最有用的线性空间实际上有两种：实线性空间和复线性空间，它们的理论虽然有区别，但是绝大部分理论是完全一致的。因此为了避免将同样的定理一字不差地证明两次，我们约定字母 $\mathbb{F}$ 代表实数 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，也就是说下面的讨论之中无论 $\mathbb{F}$ 代表的是 $\mathbb{R}$ 还是 $\mathbb{C}$，都不会影响理论的构建和定理的证明。如果我们需要明确 $\mathbb{F}$ 的含义，我们将避免使用 $\mathbb{F}$ 这个字母并且注明我们所在的情况。

定义 1.1.1 (线性空间，向量空间)
所谓的 $\mathbb{F}$-线性空间（或者叫做 $\mathbb{F}$-向量空间），包含下面的三部分数据

- 一个集合 E，这个集合叫做这个线性空间的底集合，其中的元素我们通常称作“向量”
- 一个运算，被称作“向量加法”，它将两个 E 中的元素变为一个 E 中的元素。使用映射的语言，向量加法是一个从 $E\times E$ 到 E 的映射

$$+_E : E\times E\to E$$

- 一个运算，被称作“数乘”，它将一个 $\mathbb{F}$ 中的元素（通常叫做一个“标量”）和一个 E 中的元素（一个“向量”）变成一个 E 中的元素。使用映射的语言，数乘是一个从 $\mathbb{F}\times E$ 到 E 的映射

$$\cdot_E : \mathbb{F}\times E\to E$$

为了使得上面提到的运算能够刻画我们对向量这一概念的直觉，上面的三部分信息要满足下面的八条公理（线性空间八公理）：

VS1，向量加法的结合律 对于任何 $v_1, v_2, v_3\in E$，都成立

$$(v_1 +_E v_2) +_E v_3 = v_1 +_E (v_2 +_E v_3)$$

这个公式有些让人眼花缭乱，因为下标 E 的存在。我们之所以要使用下标，是因为之后我们还会涉及到 $\mathbb{F}$ 中的标量的加法，因此我们不希望读者搞混两种运算，进而搞混进行运算的对象。但是实际上，这种混淆是不会发生的，只要细心地考察进行运算的对象到底是向量还是标量即可，因此从现在开始，我们将使用 $+$ 代替 $+_E$，除非确实有混淆的可能。

VS2，向量加法的交换律 对于任何 $v_1, v_2\in E$，都成立

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

向量加法的结合律和交换律一起保证了我们计算多个向量的和的时候，顺序是无关紧要的，请注意 VS1 和 VS2 之间不存在互推关系。

VS3，零向量的存在性 若 $\theta\in E$ 满足 $v+\theta=\theta+v=v$ 对于一切 $v\in E$ 都成立，那么我们就说 θ 是一个零向量。我们要求 E 中至少存在一个零向量。实际上仅仅使用零向量的定义，我们就可以证明：零向量若存在，则一定是唯一的。这使得我们从此提到零向量的时候，谈论的是一个无歧义的对象。

VS4，相反向量的存在性 对于任何 $v \in E$，都存在至少一个 $w \in E$ 使得

$$v + w = 0$$

这里的 0 代表 VS3 中所说的那个唯一的零向量，下同

VS5，数乘的结合律 对于任意的标量 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$，以及任意的 $v \in E$，都成立

$$\lambda \cdot_E (\mu \cdot_E v) = (\lambda\mu) \cdot_E v$$

这个公式有些让人眼花缭乱，因为下标 E 的存在。我们之所以要使用下标，是因为我们希望区分标量之间的乘法（也就是实数和复数的乘法）以及标量与向量之间的乘法。但是实际上，这种混淆是不会发生的，只要细心地考察进行运算的对象到底是向量还是标量即可，因此从现在开始，我们使用空符号来代替 $\cdot_E$，除非确实有混淆的可能。因此，VS5 中的公式可以写作

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$$

VS6，数乘的分配律，1 对于任意的标量 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$，以及任意的 $v \in E$，都成立

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

注意，等式两边的加号并不是同一个运算

VS7，数乘的分配律，2 对于任意的标量 $\lambda \in \mathbb{F}$，以及任意的 $v_1, v_2 \in E$，都成立

$$\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

注意，等式两边的加号是同一个运算

VS8，数乘的幺性 $1 \in \mathbb{F}$（实数 1，当然也就是复数 1）拥有下面的性质：对于任何 $v \in E$，都有 $1v = v$，这里的 $1v$ 应该理解为对 1 和 v 使用数乘 $\cdot_E$ 之后得到的结果。请注意这一条公理虽然看似多余，实则不可或缺。

定义中的 $\mathbb{F}$ 被称作这个线性空间的系数域，如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，我们定义的是实线性空间，如果 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，我们定义的是复线性空间。

我们现在来证明许多“显然”的，或者“自然”的事实。证明这些事实的动机有两个：熟悉利用代数结构公理证明定理的常见方法，并且为我们之后依照数学直觉进行计算提供安全的环境。必须指出：代数学中存在着无穷无尽种类的代数结构，其中一些代数结构拥有相当异域风情的运算规则，因此下面的结果视觉上的“平凡性”恰恰是教学法上线性空间的优越性。

1.2 线性空间的基本性质

纵然上述定义中，一个线性空间 $(E, +_E, \cdot_E)$ 包含三部分数据，但是习俗上我们常常使用 E 来代表这个线性空间。这并不是说 E 这个集合知道自己余下的数据，而是为了语言上的简洁。

命题 1.2.1 (零向量的唯一性)
在任何线性空间 E 中，零向量的数量恰好是一个。

证明. 假设 $\theta_1, \theta_2 \in E$ 都满足 VS3 中零向量的性质，那么

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$$

□

特别地，空集不是任何线性空间的底集合。

命题 1.2.2 (相反向量的唯一性)
设 $v \in E$ 为线性空间中的一个向量，则 v 的相反向量恰有一个。

证明. 假设 w_1, w_2 都是 v 的相反向量，根据相反向量的定义，我们有

$$w_1 + v = v + w_2 = 0$$

根据 VS1 和零向量的定义，我们有

$$w_1 = w_1 + 0 = w_1 + v + w_2 = 0 + w_2 = w_2$$

□

正是由于相反向量的唯一性，我们可以将 v 的相反向量记作 $-v$。注意目前负号的意义并不是一种二目运算，而仅仅是“取相反向量”。容易验证对于零向量而言，我们有 $-0 = 0$。我们补充定义 $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$。此后负号可以理解为减法，但是我们着重指出：根据我们的逻辑链条，减法并不是一种需要单独定义的运算，而是加性结构的产物。

命题 1.2.3 (有限分配律)
通过使用有限次分配律，若 $\lambda, \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{F}, v, v_1, \dots, v_m \in E$，则有

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)v = \lambda_1 v + \cdots + \lambda_n v$$

$$\lambda(v_1 + \cdots + v_m) = \lambda v_1 + \cdots + \lambda v_m$$

证明. 不证自明。 $\square$

如果考虑到加法的交换律，我们甚至可以给出更加一般的结果：若 $F \subset \mathbb{F}, E_0 \subset E$ 都是有限子集（注：无穷求和、无穷求积等等操作隶属于分析学，在代数学中我们不具备讨论它们的理论框架，如果非要讨论，合适的方法是借助拓扑学，并且在所谓的"线性拓扑空间"中去研究），则有：

$$\left(\sum_{\lambda \in F} \lambda\right)\left(\sum_{v \in E_0} v\right) = \sum_{\lambda \in F, v \in E_0} \lambda v$$

命题 1.2.4 (乘法的非退化性)
下面的定理虽然合乎直觉，但是证明方法必须掌握

- 若 $\lambda \in \mathbb{F}, 0 \in E$，则有 $\lambda 0 = 0$ 为零向量
- 若 $v \in E, 0 \in \mathbb{F}$，则有 $0v = 0$ 为零向量

VS8' 若 $\lambda \in \mathbb{F}, v \in E$ 且 $\lambda v = 0$ 为零向量，则 $\lambda = 0$ 和 $v = 0$ 二者之中至少成立一个

证明. 读者需要非常认真地注意 0 的意义。

- 利用分配律和零向量的性质，我们有

  $$\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$$

  在等式两边同时加上 $\lambda 0$ 的相反向量即可

- 利用分配律和零标量的性质，我们有

  $$0v = (0+0)v = 0v + 0v$$

  在等式两边同时加上 $0v$ 的相反向量即可

- 假设 $\lambda \neq 0$，我们需要证明 $v = 0$，注意到 $\frac{1}{\lambda}$ 是有意义的，我们得到

  $$0 = \frac{1}{\lambda} \cdot_E 0 = \frac{1}{\lambda} \cdot_E (\lambda v) = (\frac{1}{\lambda}\lambda) \cdot_E v = 1 \cdot_E v = v$$

  其中第一个等号是本命题的第一部分，第二个等号是等量代换，第三个等号是 VS5，第四个等号来自标量 $\frac{1}{\lambda}$ 的性质，第五个等号是 VS8

$\square$

命题 1.2.5
若 $\lambda \in \mathbb{F}, v \in V$，则有

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$$

注意其中第一个负号代表“相反数”，而后面两个负号代表“取相反向量”。

证明. 注意到

$$(-\lambda)v + \lambda v = (\lambda + (-\lambda))v = 0v = 0$$
$$\lambda(-v) + \lambda v = \lambda(v + (-v)) = \lambda 0 = 0$$

根据相反向量的唯一性即证。特别地，$(-1)v = -(1v) = -v$。 □

根据相反向量的定义，我们还知道 $-(-v) = v$。

1.3 关于线性空间八公理

一个有趣的问题是：线性空间八公理是如何选择出来的？是否可以有其他选择？是否有冗余？这个问题很有趣，我们回答其中一部分：

命题 1.3.1
VS8 可以换成 VS8'

证明. VS1-8 可以推出 VS8' 已经得到了证明（命题 1.2.4），我们还需要证明 VS1-7 和 VS8' 可以推出 VS8，也就是 $1v = v$。首先我们考虑

$$1(v + 1(-v)) = 1v + 1^2(-v) = 1v + 1(-v) = 1(v + (-v)) = 0$$

注意这里的最后一步并不是因为 $1w = w$，而是因为 $\lambda 0 = 0$。根据 VS8'，我们有 $v + 1(-v) = 0$，两边同时加上 $1v$，得到

$$v + 1(-v) + 1v = 1v$$

然而我们已经知道了 $1v + 1(-v) = 0$，故 $v = 1v$。读者必须非常认真地阅读这个证明，该证明没有以任何形式使用 VS8，因此不含循环论证。 □

令人惊讶的是 Bryant 在 1971 年发现的：

命题 1.3.2
向量加法的交换律 VS2 是冗余的，可以从余下七条公理推得。

1.4 线性空间的例子

例 1.4.1 ($\mathbb{F}^n$)

例 1.4.2 ($\mathrm{Map}(X, E)$)

例 1.4.3 ($\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X, E)$，$X$ 生成的自由空间)

1.5 关于系数域 $\mathbb{F}$ 的注记

1.6 线性组合与线性包

1.7 线性相关组与线性独立组

1.8 线性空间的基及其存在性

1.9 一个技术性定理：Steinitz 置换定理

后记

索引