23LA Linear and Abstract Algebra

邱才颙

2023 年 3 月 2 日

前言

本讲义为作者 2023 年春夏学期在深圳中学开设的代数课程配套讲义，出于教学法方面的考虑，本讲义中第一个被研究的代数结构是域上的线性空间。线性空间中的运算律最符合高中生目前的运算直觉，线性代数本身也是高校考察高中生代数水平的主要方面。群论等其他抽象代数中的主题也会逐步引入，但是目前我们的首要任务是**快速让高中生**熟悉代数思维，也就是抽象地思考，抽象地推理，并证明关于抽象概念的结论。**因此，本讲义会比一般的线性代数教材更加形式、甚至看起来使用了过于不自然的语言，并且包含作者临时自创的术语**。本次课程高一学生占大多数，因此这会是作者讲授的最为详细的一次代数课。但是考虑到学生的学习目标，这也会是知识曲线最为陡峭的一次代数课。阅读讲义的时候务必记住，本讲义不能、不想、不应、或许也不需要代替任何现成的优秀教材。

阅读本讲义的时候请务必注意封面上的日期，以便确保自己阅读的是最新版本。如有建议和意见，请联系本人：邱才颙，+86 167 5387 2357。

本课程和张鹏老师开设的线性代数学互为补充，故本讲义中不会涉及太多线性方程组和矩阵的变形技巧，复旦大学姚慕生的高等代数学可以作为本课程的主要参考书。本课程意图尽可能和黄文祥老师开设的数学分析呼应，故我们不加证明地自由地使用来自分析学和拓扑学的简单结论。

请注意，值域这个词的意义和高中课本的不一样，高中课本中的值域，我们将其称作像。除此之外，我们自由地使用朴素集合论的语言，我们接受并自由使用 Zorn 引理，因为它虽然等价于更容易接受的选择公理，却更适合用来证明代数学中的定理。

最后，纵然作者才华有限，能力未满，仍希望劝告此课程的学生：不要因为本讲义的存在，就放弃做笔记或者不听课。本讲义力求自给自足，然讲义的厚度永远无法替代主动思考的深度。

希腊字母表

alpha	α, A	nu	ν, N
beta	β, B	xi	ξ, Ξ
gamma	γ, Γ	omicron	o, O
delta	δ, Δ	pi	π, ϖ, Π
epsilon	$\epsilon, \varepsilon, \mathrm{E}$	rho	$\rho, \varrho, \mathrm{P}$
zeta	ζ, Z	sigma	$\sigma, \varsigma, \Sigma$
eta	η, H	tau	τ, T
theta	$\theta, \vartheta, \Theta$	upsilon	υ, Υ
iota	ι, I	phi	ϕ, φ, Φ
kappa	$\kappa, \varkappa, \mathrm{K}$	chi	χ, X
lambda	λ, Λ	psi	ψ, Ψ
mu	μ, M	omega	ω, Ω

拉丁字母表

Aa $\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbb{A}, \mathcal{A}, \mathscr{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{a}$

Bb $\mathbf{B}, \mathbf{b}, \mathbb{B}, \mathcal{B}, \mathscr{B}, \mathfrak{B}, \mathfrak{b}$

Cc $\mathbf{C}, \mathbf{c}, \mathbb{C}, \mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathfrak{C}, \mathfrak{c}$

Dd $\mathbf{D}, \mathbf{d}, \mathbb{D}, \mathcal{D}, \mathscr{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{d}$

Ee $\mathbf{E}, \mathbf{e}, \mathbb{E}, \mathcal{E}, \mathscr{E}, \mathfrak{E}, \mathfrak{e}$

Ff $\mathbf{F}, \mathbf{f}, \mathbb{F}, \mathcal{F}, \mathscr{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{f}$

Gg $\mathbf{G}, \mathbf{g}, \mathbb{G}, \mathcal{G}, \mathscr{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{g}$

Hh $\mathbf{H}, \mathbf{h}, \mathbb{H}, \mathcal{H}, \mathscr{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{h}$

Ii $\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbb{I}, \mathcal{I}, \mathscr{I}, \mathfrak{I}, \mathfrak{i}$

Jj $\mathbf{J}, \mathbf{j}, \mathbb{J}, \mathcal{J}, \mathscr{J}, \mathfrak{J}, \mathfrak{j}$

Kk $\mathbf{K}, \mathbf{k}, \mathbb{K}, \mathcal{K}, \mathscr{K}, \mathfrak{K}, \mathfrak{k}$

Ll $\mathbf{L}, \mathbf{l}, \mathbb{L}, \mathcal{L}, \mathscr{L}, \mathfrak{L}, \mathfrak{l}$

Mm $\mathbf{M}, \mathbf{m}, \mathbb{M}, \mathcal{M}, \mathscr{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{m}$

Nn $\mathbf{N}, \mathbf{n}, \mathbb{N}, \mathcal{N}, \mathscr{N}, \mathfrak{N}, \mathfrak{n}$

Oo $\mathbf{O}, \mathbf{o}, \mathbb{O}, \mathcal{O}, \mathscr{O}, \mathfrak{O}, \mathfrak{o}$

Pp $\mathbf{P}, \mathbf{p}, \mathbb{P}, \mathcal{P}, \mathscr{P}, \mathfrak{P}, \mathfrak{p}$

Qq $\mathbf{Q}, \mathbf{q}, \mathbb{Q}, \mathcal{Q}, \mathscr{Q}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{q}$

Rr $\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathscr{R}, \mathfrak{R}, \mathfrak{r}$

Ss $\mathbf{S}, \mathbf{s}, \mathbb{S}, \mathcal{S}, \mathscr{S}, \mathfrak{S}, \mathfrak{s}$

Tt $\mathbf{T}, \mathbf{t}, \mathbb{T}, \mathcal{T}, \mathscr{T}, \mathfrak{T}, \mathfrak{t}$

Uu $\mathbf{U}, \mathbf{u}, \mathbb{U}, \mathcal{U}, \mathscr{U}, \mathfrak{U}, \mathfrak{u}$

Vv $\mathbf{V}, \mathbf{v}, \mathbb{V}, \mathcal{V}, \mathscr{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{v}$

Ww $\mathbf{W}, \mathbf{w}, \mathbb{W}, \mathcal{W}, \mathscr{W}, \mathfrak{W}, \mathfrak{w}$

Xx $\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbb{X}, \mathcal{X}, \mathscr{X}, \mathfrak{X}, \mathfrak{x}$

Yy $\mathbf{Y}, \mathbf{y}, \mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \mathscr{Y}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{y}$

Zz $\mathbf{Z}, \mathbf{z}, \mathbb{Z}, \mathcal{Z}, \mathscr{Z}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{z}$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的含义和高中课本一致，我们不使用 $\mathbb{N}, \mathbb{N}_+, \mathbb{N}^*$，我们使用

$$\mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{Z}_{<0}, \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

符号 $\subset$ 的含义是“是子集”，符号 $\subsetneq$ 的含义是“是真子集”，符号 $\mapsto$ 的含义是“被映射至”，符号 $:=$ 的含义是“被定义为”，符号 $\Rightarrow$ 的含义是“可推导出”

目录

Chapter 1

线性空间

线性空间的概念脱胎于对向量这个数学对象的研究，除了平面向量、空间向量之外，数学的各个领域中都有着非常类似向量的对象。最简单的例子就是实值函数：它和向量一样可以相加，可以乘上某个常数，我们还会看到实值函数的上述运算满足和平面向量几乎一致的诸多性质。为此，贯彻抽象代数学的精神，有必要创造一个专门的代数结构，也就是线性空间。线性空间的引入带来至少两个好处：它拓宽了我们对向量这个概念的理解，也给予了我们一种不依赖坐标（不需要建系）地研究向量的语境。 **Lecture.1** (Feb.23)↓

线性空间的重要性，可能说上一百页都不算少，相关资料可以自行搜索“线性空间/向量空间的应用”，我们现在就开始研究线性空间。

1.1 线性空间的定义

在数学中，最有用的线性空间实际上有两种：实线性空间和复线性空间，它们的理论虽然有区别，但是绝大部分理论是完全一致的。因此为了避免将同样的定理一字不差地证明两次，我们约定字母 $\mathbb{F}$ 代表实数 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，也就是说下面的讨论之中无论 $\mathbb{F}$ 代表的是 $\mathbb{R}$ 还是 $\mathbb{C}$，都不会影响理论的构建和定理的证明。如果我们需要明确 $\mathbb{F}$ 的含义，我们将避免使用 $\mathbb{F}$ 这个字母并且注明我们所在的情况。

定义 1.1.1 (线性空间，向量空间)
所谓的 $\mathbb{F}$-线性空间（或者叫做 $\mathbb{F}$-向量空间），包含下面的三部分数据

- 一个集合 E，这个集合叫做这个线性空间的底集合，其中的元素我们通常称作“向量”
- 一个运算，被称作“向量加法”，它将两个 E 中的元素变为一个 E 中的元素。使用映射的语言，向量加法是一个从 $E\times E$ 到 E 的映射

$$+_E : E\times E\to E$$

- 一个运算，被称作“数乘”，它将一个 $\mathbb{F}$ 中的元素（通常叫做一个“标量”）和一个 E 中的元素（一个“向量”）变成一个 E 中的元素。使用映射的语言，数乘是一个从 $\mathbb{F}\times E$ 到 E 的映射

$$\cdot_E : \mathbb{F}\times E\to E$$

为了使得上面提到的运算能够刻画我们对向量这一概念的直觉，上面的三部分信息要满足下面的八条公理（线性空间八公理）：

VS1，向量加法的结合律 对于任何 $v_1, v_2, v_3 \in E$，都成立

$$(v_1 +_E v_2) +_E v_3 = v_1 +_E (v_2 +_E v_3)$$

这个公式有些让人眼花缭乱，因为下标 E 的存在。我们之所以要使用下标，是因为之后我们还会涉及到 $\mathbb{F}$ 中的标量的加法，因此我们不希望读者搞混两种运算，进而搞混进行运算的对象。但是实际上，这种混淆是不会发生的，只要细心地考察进行运算的对象到底是向量还是标量即可，因此从现在开始，我们将使用 $+$ 代替 $+_E$，除非确实有混淆的可能。

VS2，向量加法的交换律 对于任何 $v_1, v_2 \in E$，都成立

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

向量加法的结合律和交换律一起保证了我们计算多个向量的和的时候，顺序是无关紧要的，请注意 VS1 和 VS2 之间不存在互推关系。

VS3，零向量的存在性 若 $\theta \in E$ 满足 $v + \theta = \theta + v = v$ 对于一切 $v \in E$ 都成立，那么我们就说 θ 是一个零向量。我们要求 E 中至少存在一个零向量。实际上仅仅使用零向量的定义，我们就可以证明：零向量若存在，则一定是唯一的。这使得我们从此提到零向量的时候，谈论的是一个无歧义的对象。

VS4，相反向量的存在性 对于任何 $v \in E$，都存在至少一个 $w \in E$ 使得

$$v + w = 0$$

这里的 0 代表 VS3 中所说的那个唯一的零向量，下同

VS5，数乘的结合律 对于任意的标量 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$，以及任意的 $v \in E$，都成立

$$\lambda \cdot_E (\mu \cdot_E v) = (\lambda\mu) \cdot_E v$$

这个公式有些让人眼花缭乱，因为下标 E 的存在。我们之所以要使用下标，是因为我们希望区分标量之间的乘法（也就是实数和复数的乘法）以及标量与向量之间的乘法。但是实际上，这种混淆是不会发生的，只要细心地考察进行运算的对象到底是向量还是标量即可，因此从现在开始，我们使用空符号来代替 $\cdot_E$，除非确实有混淆的可能。因此，VS5 中的公式可以写作

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$$

VS6，数乘的分配律，1 对于任意的标量 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$，以及任意的 $v \in E$，都成立

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

注意，等式两边的加号并不是同一个运算

VS7，数乘的分配律，2 对于任意的标量 $\lambda \in \mathbb{F}$，以及任意的 $v_1, v_2 \in E$，都成立

$$\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

注意，等式两边的加号是同一个运算

VS8，数乘的幺性 $1 \in \mathbb{F}$（实数 1，当然也就是复数 1）拥有下面的性质：对于任何 $v \in E$，都有 $1v = v$，这里的 $1v$ 应该理解为对 1 和 v 使用数乘 $\cdot_E$ 之后得到的结果。请注意这一条公理虽然看似多余，实则不可或缺。

定义中的 $\mathbb{F}$ 被称作这个线性空间的系数域，如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，我们定义的是实线性空间，如果 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，我们定义的是复线性空间。

我们现在来证明许多"显然"的，或者"自然"的事实。证明这些事实的动机有两个：熟悉利用代数结构公理证明定理的常见方法，并且为我们之后依照数学直觉进行计算提供安全的环境。必须指出：代数学中存在着无穷无尽种类的代数结构，其中一些代数结构拥有相当异域风情的运算规则，因此下面的结果视觉上的"平凡性"恰恰是教学法上线性空间的优越性。

1.2 线性空间的基本性质

纵然上述定义中，一个线性空间 $(E, +_E, \cdot_E)$ 包含三部分数据，但是习俗上我们常常使用 E 来代表这个线性空间。这并不是说 E 这个集合知道自己余下的数据，而是为了语言上的简洁。

命题 1.2.1 (零向量的唯一性)
在任何线性空间 E 中，零向量的数量恰好是一个。

证明. 假设 $\theta_1, \theta_2 \in E$ 都满足 VS3 中零向量的性质，那么

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$$

□

特别地，空集不是任何线性空间的底集合。

命题 1.2.2 (相反向量的唯一性)
设 $v \in E$ 为线性空间中的一个向量，则 v 的相反向量恰有一个。

证明. 假设 w_1, w_2 都是 v 的相反向量，根据相反向量的定义，我们有

$$w_1 + v = v + w_2 = 0$$

根据 VS1 和零向量的定义，我们有

$$w_1 = w_1 + 0 = w_1 + v + w_2 = 0 + w_2 = w_2$$

□

正是由于相反向量的唯一性，我们可以将 v 的相反向量记作 $-v$。注意目前负号的意义并不是一种二目运算，而仅仅是“取相反向量”。容易验证对于零向量而言，我们有 $-0 = 0$。我们补充定义 $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$。此后负号可以理解为减法，但是我们着重指出：根据我们的逻辑链条，减法并不是一种需要单独定义的运算，而是加性结构的产物。

命题 1.2.3 (有限分配律)
通过使用有限次分配律，若 $\lambda, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{F}, v, v_1, \ldots, v_m \in E$，则有

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)v = \lambda_1 v + \cdots + \lambda_n v$$

$$\lambda(v_1 + \cdots + v_m) = \lambda v_1 + \cdots + \lambda v_m$$

证明. 不证自明。 □

我们甚至可以给出更加一般的约定：若 $F \subset \mathbb{F}, E_0 \subset E$ 都是有限子集（注：无穷求和、无穷求积等等操作隶属于分析学，在代数学中我们不具备讨论它们的理论框架，如果非要讨论，合适的方法是借助拓扑学，并且在所谓的"线性拓扑空间"中去研究），则下面的式子的理解不会出现歧义：

$$\left(\sum_{\lambda\in F}\lambda\right)\left(\sum_{v\in E_0}v\right)=\sum_{\lambda\in F,v\in E_0}\lambda v$$

命题 1.2.4 (乘法的非退化性)
下面的定理虽然合乎直觉，但是证明方法必须掌握

- 若 $\lambda \in \mathbb{F}, 0 \in E$，则有 $\lambda 0 = 0$ 为零向量
- 若 $v \in E, 0 \in \mathbb{F}$，则有 $0v = 0$ 为零向量

VS8' 若 $\lambda \in \mathbb{F}, v \in E$ 且 $\lambda v = 0$ 为零向量，则 $\lambda = 0$ 和 $v = 0$ 二者之中至少成立一个

证明. 读者需要非常认真地注意 0 的意义。

- 利用分配律和零向量的性质，我们有

  $$\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$$

  在等式两边同时加上 $\lambda 0$ 的相反向量即可

- 利用分配律和零标量的性质，我们有

  $$0v = (0+0)v = 0v + 0v$$

  在等式两边同时加上 $0v$ 的相反向量即可

- 假设 $\lambda \neq 0$，我们需要证明 $v = 0$，注意到 $\frac{1}{\lambda}$ 是有意义的，我们得到

  $$0 = \frac{1}{\lambda}\cdot_E 0 = \frac{1}{\lambda}\cdot_E(\lambda v) = (\frac{1}{\lambda}\lambda)\cdot_E v = 1\cdot_E v = v$$

  其中第一个等号是本命题的第一部分，第二个等号是等量代换，第三个等号是 VS5，第四个等号来自标量 $\frac{1}{\lambda}$ 的性质，第五个等号是 VS8

□

命题 1.2.5
若 $\lambda \in \mathbb{F}, v \in V$，则有

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$$

注意其中第一个负号代表“相反数”，而后面两个负号代表“取相反向量”。

证明. 注意到

$$(-\lambda)v + \lambda v = (\lambda + (-\lambda))v = 0v = 0$$
$$\lambda(-v) + \lambda v = \lambda(v + (-v)) = \lambda 0 = 0$$

根据相反向量的唯一性即证。特别地，$(-1)v = -(1v) = -v$。 □

根据相反向量的定义，我们还知道 $-(-v) = v$。

1.3 关于线性空间八公理

一个有趣的问题是：线性空间八公理是如何选择出来的？是否可以有其他选择？是否有冗余？这个问题很有趣，我们回答其中一部分：

命题 1.3.1
VS8 可以换成 VS8'

证明. VS1-8 可以推出 VS8' 已经得到了证明（命题 1.2.4），我们还需要证明 VS1-7 和 VS8' 可以推出 VS8，也就是 $1v = v$。首先我们考虑

$$1(v + 1(-v)) = 1v + 1^2(-v) = 1v + 1(-v) = 1(v + (-v)) = 0$$

注意这里的最后一步并不是因为 $1w = w$，而是因为 $\lambda 0 = 0$。根据 VS8'，我们有 $v + 1(-v) = 0$，两边同时加上 $1v$，得到

$$v + 1(-v) + 1v = 1v$$

然而我们已经知道了 $1v + 1(-v) = 0$，故 $v = 1v$。读者必须非常认真地阅读这个证明，该证明没有以任何形式使用 VS8，因此不含循环论证。 □

令人惊讶的是 Bryant 在 1971 年发现的：

命题 1.3.2
向量加法的交换律 VS2 是冗余的，可以从余下七条公理推得。

1.4 线性空间的例子

例 1.4.1 ($\mathbb{F}^n$)
设 n 为某正整数，考虑全体长度为 n 的数组构成的集合 $\mathbb{F}^n$：

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}\}$$

那么若我们按下方式定义其中元素的向量加法

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

按下方式定义 $\lambda \in \mathbb{F}$ 对其中元素的数乘

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

则容易验证（留作习题）$\mathbb{F}^n$ 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间。此后我们使用 $\mathbb{F}^n$ 这个记号的时候，$\mathbb{F}^n$ 永远理解为该线性空间。

特别地，$\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$-线性空间（向量加法和数乘继承自 $\mathbb{F}$ 的结构）。

例 1.4.2 ($\mathrm{Map}(X, E)$)
设 X 为非空集合，而 E 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间。那么全体定义域为 X 而值域为 E 的映射所构成的集合

$$\mathrm{Map}(X, E) = \{f : X \to E\}$$

可以被赋予一个 $\mathbb{F}$-线性空间结构，具体如下：

- 若 $f, g \in \mathrm{Map}(X, E)$，我们根据下面的公式定义 $f + g$

$$(f + g)(x) := f(x) +_E g(x)$$

- 若 $f \in \mathrm{Map}(X, E), \lambda \in \mathbb{F}$，我们根据下面的公式定义 λf

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot_E (f(x))$$

则容易验证（留作习题）$\mathrm{Map}(X, E)$ 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间。此后我们使用 $\mathrm{Map}(X, E)$ 这个记号的时候，$\mathrm{Map}(X, E)$ 永远理解为该线性空间。

根据该例子，某固定集合上的实值函数全体构成实线性空间。高中数学中，函数和向量是完全不同的概念，不过我们现在已经知道：这个线性空间中的元素虽然是实值函数，但是将其当作向量来进行研究是不仅可行的，甚至实际上是必要的。也就是说，“什么是向量”这个问题是无意义的，重要的是，“对向量的研究可以适用到什么数学对象上？”。

例 1.4.3 ($\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,E)$，$X$ 生成的自由空间)

设 X 为某非空集合，E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间。若 $f\in\mathrm{Map}(X,E)$，我们说 f 是有限支撑的，若 **Lecture.2** (Mar.2)↓

$$\mathrm{Supp}(f)=\{x\in X: f(x)\neq 0\in E\}$$

是有限集。全体从 X 到 E 的有限支撑映射构成 $\mathrm{Map}(X,E)$ 的一个子集，我们将这个集合记作 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,E)$，如果我们仿照例 1.4.2 中的定义来赋予 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,E)$ 一个 $\mathbb{F}$-线性空间结构，那么我们需要下面的事实：

- 若 $\mathrm{Supp}(f),\mathrm{Supp}(g)$ 都是有限集合，则 $\mathrm{Supp}(f+g)$ 也是有限集合
- 若 $\mathrm{Supp}(f)$ 是有限集合，$\lambda\in\mathbb{F}$，则 $\mathrm{Supp}(\lambda f)$ 也是有限集合

总而言之，容易验证 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,E)$ 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间。此后我们使用 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,E)$ 这个记号的时候，$\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,E)$ 永远理解为该线性空间。

如果我们取 $E=\mathbb{F}$，那么 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,\mathbb{F})$ 也被叫做 X 生成的自由空间，它有另一种更紧凑的记号：$\mathbb{F}^{\oplus X}$。我们解释一下，为什么 $\mathbb{F}^{\oplus X}$ 也被叫做 X 生成的自由空间。

想象一下今天有一个集合 X，它非常渴望成为一个线性空间，但是这种愿望未必能够达到：如果 X 是有限集合，注意到 $\mathbb{F}$ 是无限集合，因此 X 不可能是任何 $\mathbb{F}$-线性空间的底集合。但是集合 X 中的元素做出了一个决定，对于 $a\in X$，我们定义一个函数 $\chi_a: X\to\mathbb{F}$ 如下：

$$\chi_a(x)=\begin{cases}1, & x=a\\ 0, & x\neq a\end{cases}$$

这就使得 X 中的每个元素 a 都与 $\mathrm{Map}(X,\mathbb{F})$ 中的一个函数 χ_a 配对，也就是说，我们得到了一个双射

$$X\leftrightarrow\{\chi_a: a\in X\}$$

某种意义上来说，集合 X 和集合 $\{\chi_a: a\in X\}$ 在数学中能够承载完全一致的功能。而 $\{\chi_a: a\in X\}$ 又是 $\mathbb{F}$-线性空间 $\mathrm{Map}(X,E)$ 的子集，因此 $\mathrm{Map}(X,E)$ 就能够间接地满足“X 想要变成某个线性空间的底集合”的愿望。但是任何自由都是有限度的，集合 X 目前有些过于贪心了：更小的 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,\mathbb{F})$ 就能够做到包含 $\{\chi_a: a\in X\}$，在我们引入“子空间”的概念之后，我们会看到 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,\mathbb{F})$ 实际上是**最小的**。作者希望读者借此机会理解“自由”一词的深刻内涵：随意的自由是注定失去典范性的自由。

1.5 关于系数域 $\mathbb{F}$ 的注记

目前为止，符号 $\mathbb{F}$ 代表的是 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，然而细心的读者会发现即便取 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$，上面的所有讨论都仍然成立。这里我们引入“数域”的概念：

定义 1.5.1 (数域)
复数集 $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{F}$ 被称作数域，如果 $0,1\in\mathbb{F}$，并且 $\mathbb{F}$ 中任何两个元素的和、差、积、商（若有定义）仍然在 $\mathbb{F}$ 内。

根据定义，有理数集 $\mathbb{Q}$ 是任何数域的子集。

例 1.5.2 (一个数域的例子)

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Q}\}$$

本讲义的绝大多数结果只需要 $\mathbb{F}$ 是一个数域。然而 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 的情况最为符合我们的几何直观，$\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情况下定理的叙述最为简洁（因为复数域是代数完备的，参见**代数学基本定理**），从本行文字开始，$\mathbb{F}$ 代表某个数域。

例 1.5.3 (子域，域扩张，扩域作为子域上的线性空间)
若 $\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2$ 都是数域，并且 $\mathbb{F}_1\subset\mathbb{F}_2$，我们说 $\mathbb{F}_1$ 是 $\mathbb{F}_2$ 的子域，而 $\mathbb{F}_2$ 是 $\mathbb{F}_1$ 的域扩张。直接使用 $\mathbb{F}_2$ 中元素的加法和乘法，则 $\mathbb{F}_2$ 是 $\mathbb{F}_1$-线性空间。

例 1.5.4 (作为 $\mathbb{R}$-线性空间的 $\mathbb{C}$)
读者已经非常熟悉将复数 $\mathbb{C}$ 视作实系数向量空间的视角。

数域的概念可以进一步抽象为**域**，这是一种代数结构，它捕捉到了我们对于数这个概念的认知。线性代数完全可以在抽象的域的语境下研究，但是每一个域都拥有一个叫做“特征”的非负整数数，这个数如果不是 0，例如说是 2，那么会产生比较反直觉的现象（上面定义的数域都是特征为 0 的域）。例如，当特征不为 0 的时候，有限个低维空间的并可以是高维空间（该事实并不是因为特征不为 0，而是因为一般的域可以是有限集）。

本讲义中不考虑一般的域上的线性代数学，因为对线性空间这个概念的推广可以是无穷无尽的：$\mathbb{F}$ 可以是 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，也可以推广到数域，也可以只是一般的域，甚至可以是乘法不满足交换律的“斜域”（例如四元数 $\mathbb{H}$），甚至可以是对除法不封闭的代数结构（环，例如 $\mathbb{Z}$），甚至可以是乘法不交换的环……每一次推广线性空间的定义，都意味着失去线性代数的一部分定理。但是重要的永远不是最广博的定义，而是最深刻的定理。

命题 1.5.5 (系数域的遗忘)
若 $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ 都是数域，并且 $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$，通过忘记一部分数乘的方式，每个 $\mathbb{F}_2$-线性空间都以典范的方式成为 $\mathbb{F}_1$-线性空间。

相反方向的操作通常是不可行的，不过我们介绍下面的结果：

定理 1.5.6 (实线性空间的复化)
设 E 是实线性空间，那么集合

$$E \times E = \{(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in E\}$$

在下面的结构数据之下成为复线性空间：

向量加法 $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

数乘 $(a + b\mathrm{i})(v_1, v_2) := (av_1 - bv_2, av_2 + bv_1)$

集合 $E \times E$ 以及上面的数据合在一起所构成的复线性空间记作 $E_{\mathbb{C}}$。注意，$E_{\mathbb{C}}$ 的底集合和 E 是不同的！

1.6 线性组合与线性包

从此行开始，$\mathbb{F}$ 代表某个数域，如果你觉得理解起来有些抽象，那么就当作 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$，或者干脆想象 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$。下文所说的向量组，只是向量空间的子集的另一种更常用的说法。

定义 1.6.1 (线性组合)
设 E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间，S 为 E 的子集。设 $v \in E$ 是某个向量，我们说向量 v 是向量组 S 的线性组合，若存在有限个向量 $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ 以及有限个标量 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

S 的线性组合的全体是 E 的一个子集，被称作 S 的**线性包**，记作 $\mathrm{Span}(S)$。换言之，$v \in \mathrm{Span}(S)$ 当且仅当 v 是 S 的线性组合。

显然 $S \subset \mathrm{Span}(S) \subset E$，除此之外，我们规定 $\mathrm{Span}(\varnothing) = \{0\}$ 为仅仅由零向量构成的集合。根据定义，若 $S_1 \subset S_2$，则 $\mathrm{Span}(S_1) \subset \mathrm{Span}(S_2)$。最后这个性质被称作线性包的保序性。

冒着被嫌弃啰嗦的风险，作者再次强调：线性组合是有限和，即便这里的 S 可以是无穷集。精确的叙述参见下面的命题 1.6.3。

例 1.6.2 (示性函数全体的线性包)
考虑线性空间 $\mathrm{Map}(X,\mathbb{F})$ 的子集 $\chi=\{\chi_a : a\in X\}$，那么

$$\mathrm{Span}(\chi)=\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,\mathbb{F})$$

命题 1.6.3
设 E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间，S 为 E 的子集，$v\in\mathrm{Span}(S)$，那么存在有限集合 $S_0\subset S$，使得 $v\in\mathrm{Span}(S_0)$。

证明. 根据线性组合的定义直接可得，但是一般而言 $\mathrm{Span}(S_0)\neq\mathrm{Span}(S)$。 □

命题 1.6.4
设 E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间，假设给定向量 $v_\alpha\in E$ 和集合 $S_\alpha\subset E$ 使得 $v_\alpha\in\mathrm{Span}(S_\alpha)$ 对一切指标 $\alpha\in\mathrm{A}$ 都成立，若我们定义 $S=\{v_\alpha:\alpha\in\mathrm{A}\}$，那么

$$\mathrm{Span}(S)\subset\mathrm{Span}(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}}S_\alpha)$$

证明. 证明留作习题，作者希望强调，$v_\alpha\in\mathrm{Span}(S_\alpha)$ 并不代表 $v_\alpha\in S_\alpha$。 □

作为应用，我们给出下面的重要结果，虽然这个结果的证明未必一定要使用命题 1.6.4。读者应联想到拓扑学中“闭包”也拥有下面的性质。

推论 1.6.5
设 E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间，S 为 E 的子集，则有

$$\mathrm{Span}(\mathrm{Span}(S))=\mathrm{Span}(S)$$

证明. 只需要证明 $\mathrm{Span}(T)\subset\mathrm{Span}(S)$，其中 $T=\mathrm{Span}(S)$。

对于任何 $v\in T=\mathrm{Span}(S)$，我们都有 $v\in\mathrm{Span}(S_v)$，这是因为我们可以为 v 量身定做 $S_v=S$。因此根据上面的命题，我们有

$$\mathrm{Span}(T)\subset\mathrm{Span}(\bigcup_{v\in T}S_v)=\mathrm{Span}(S)$$

□

定义 1.6.6 (线性空间的生成组)
设 E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间，若 $S \subset E$ 使得 $E = \mathrm{Span}(S)$，则称 S 是线性空间 E 的生成组。显然 E 永远是 E 的生成组。

命题 1.6.7 (扩大生成组)
设 S_0 是 E 的生成组，并且 $S_0 \subset S \subset E$，那么 S 也是 E 的生成组。

命题 1.6.8 (缩小生成组)
设 S 是 E 的生成组，并且 $S_0 \subset S$ 使得 $S \subset \mathrm{Span}(S_0)$，那么 S_0 也是 E 的生成组。

证明. 由于 $S \subset \mathrm{Span}(S_0)$，两边同时取 Span 得到

$$E = \mathrm{Span}(S) \subset \mathrm{Span}(\mathrm{Span}(S_0)) = \mathrm{Span}(S_0)$$

作者注：该命题的逆命题虽然也成立，但是是平凡的。 □

Lecture.3 (Mar.16)↓

一般而言，S 和 $\mathrm{Span}(S)$ 并不会相等，如果 $S = \mathrm{Span}(S)$，我们就说 S 是 E 的**子空间**。显然，$\mathrm{Span}(S), E$ 永远是 E 的子空间，这里的 S 是 E 的任何子集。如果我们取 $S = \varnothing, E$ 就得到 $\{0\}, E$ 永远是 E 的子空间。

关于子空间的更多性质，见第二章。

1.7 平凡组合和非平凡组合

为了语言的简洁，每当我们写出一个“线性组合式”

$$v = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha v_\alpha$$

的时候，我们默认这里 λ_α 只有有限个是非零的，而这里的求和也就是这有限项，即便 A 是无限集（回忆到：代数学中不存在无穷求和）。

我们引入一个术语：平凡组合与非平凡组合

定义 1.7.1 (平凡组合，非平凡组合)
设 E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间，$S = \{v_\alpha : \alpha \in A\} \subset E$ 是一个向量组，设 $\lambda : S \to \mathbb{F}$ 是一个有限支撑的映射（即 $\lambda \in \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S, \mathbb{F})$）。

为了记号的简洁，下面我们用 λ_α 来代替 $\lambda(v_\alpha)$：

- 如果 λ 恒为零，我们说表达式

$$\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha v_\alpha$$

是向量组 S 的一个平凡组合

- 如果 λ 不恒为零，我们说表达式

$$\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha v_\alpha$$

是向量组 S 的一个非平凡组合

注意到我们并不是说表达式所计算出的结果向量是平凡组合或者非平凡组合，我们说的是这个表达式是平凡的或者非平凡的。当然，"表达式"一词目前还没被定义，平凡组合或者非平凡组合仅仅是系数映射 λ 的性质。

注记
作者认为上面的定义，纵然出现在几乎所有高等代数教材中，但是实际上是多此一举。因为非平凡组合的结果也可以是零向量，见下一节。

1.8　线性相关组与线性独立组

贯穿本节，E 为一个固定的 $\mathbb{F}$-线性空间，而 $S\subset E$ 是一个向量组。

设 $\lambda\in \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S,\mathbb{F})$，我们可以考虑向量

$$\sum_{v\in S}\lambda(v)\cdot_E v\in \mathrm{Span}(S)$$

如果将上面的向量记作 $\kappa^S(\lambda)$，那么我们就得到了一个映射

$$\kappa^S:\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S,\mathbb{F})\to \mathrm{Span}(S)$$

根据定义，映射 κ^S 永远是满射，一个有趣的问题是：κ^S 是否是双射?

定理 1.8.1 (线性独立组)
下列事实是等价的

1. κ^S 是双射
2. κ^S 是单射

3. 对于每个 $v \in E$，至多存在一个 $\lambda \in \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S, \mathbb{F})$ 使得 $v = \kappa^S(\lambda)$

4. 对于每个 $v \in E$，至多存在一种方式将其表达为 E 的线性组合

5. 对于每个 $v \in \mathrm{Span}(E)$，恰好存在一种方式将其表达为 E 的线性组合

6. 零向量只存在一种方式将其表达为 E 的组合，也就是取 $\lambda = 0$

7. 若 $\kappa^S(\lambda) = 0$，那么 $\lambda = 0$

证明. $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7$ 都是自动的，我们只证明 $7 \Rightarrow 2$：

使用反证法，若 κ^S 不是单射，那么存在 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S, \mathbb{F})$ 使得

$$\sum_{v \in S} \lambda_1(v) v = \sum_{v \in S} \lambda_2(v) v$$

但是这意味着

$$\sum_{v \in S} [\lambda_1(v) - \lambda_2(v)] v = 0$$

考虑到 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，故 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ 而 $\kappa^S(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$，矛盾。 □

如果 S 满足上述等价条件中的任何一条，我们说 S 是线性独立的（或线性无关的）向量组。根据定义，空集 $\varnothing$ 是线性独立组。

我们补充一个术语，若 $f : X \to Y$ 是映射，$X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$ 是两个子集，而 $f_0 : X_0 \to Y_0$ 是另一个映射，满足：

$$f_0(x) = f(x), \quad \forall x \in X_0$$

那么我们就说 f 是 f_0 的延拓。显然若 f 是单射，那么 f_0 也是单射。

更一般地，若 $f : X \to Y$ 是映射，$X_0 \xrightarrow{i} X, Y_0 \xrightarrow{j} Y$ 是两个单射，而 $f_0 : X_0 \to Y_0$ 是另一个映射，满足：

$$j(f_0(x)) = f(i(x)), \quad \forall x \in X_0$$

那么我们就说 f 是 f_0 的 (i, j)-延拓。显然若 f 是单射，那么 f_0 也是单射。

注记

作者在此强调一个代数学中的思想：子对象永远可以替换为单态射。

接下来的这个命题也叫做"独立遗传性"：

命题 1.8.2 (线性独立组的子集仍然线性独立)
设 $S_0 \subset S \subset E$，那么若 S 是线性独立的，则 S_0 也是线性独立的。

证明. 定义 $i : \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S_0, \mathbb{F}) \to \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S, \mathbb{F})$ 如下：

$$(i\lambda)(v) = \begin{cases} \lambda(v), & v \in S_0 \\ 0, & v \neq S_0 \end{cases}$$

定义 $j : \mathrm{Span}(S_0) \to \mathrm{Span}(S)$ 为包含映射，容易验证 i, j 都是单射。

那么 κ^S 是 κ^{S_0} 的 (i,j)-延拓，从而若 κ^S 是单的，则 κ^{S_0} 也是单的。 $\square$

例 1.8.3 (单个向量构成的向量组)
设 $\{v\}$ 是由单个向量构成的向量组，那么 $\{v\}$ 是线性独立的当且仅当 $v \neq 0$。因此零空间（仅仅由零向量构成的线性空间）的线性独立向量组只能是 $\varnothing$。

根据上面的例子，我们知道，若向量组 S 包含零向量，则 S 一定不是线性独立组。这样的向量组也有一个名称：

定义 1.8.4 (线性相关组)
向量组 $S \subset E$ 被称作线性相关的，若其不是线性独立的。

例 1.8.5 (单个向量构成的向量组)
设 $\{v\}$ 是由单个向量构成的向量组，那么 $\{v\}$ 是线性相关的当且仅当 $v = 0$。

定理 1.8.6
下面的定理是定理 1.8.1 的等价版本。

下列事实是等价的：

1. S 是线性相关组
2. κ^S 不是双射
3. κ^S 不是单射
4. 存在 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 使得 $\kappa^S(\lambda_1) = \kappa^S(\lambda_2)$
5. 存在至少一个 $0 \neq \lambda \in \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(S, \mathbb{F})$ 使得 $\kappa^S(\lambda) = 0$

命题 1.8.7 (线性相关组的母集仍然线性相关)
设 $S_0 \subset S \subset E$，那么若 S_0 是线性相关的，则 S 也是线性相关的。

接下来我们介绍一个重要的概念，那就是“线性相关组在合适的意义下是有冗余的”，我们可以从中丢掉一个向量而不改变其线性包：

定理 1.8.8
设 $S \subset E$ 是一个线性相关组（特别地，S 非空），那么一定存在 $v_0 \in S$ 使得

$$\operatorname{Span}(S - \{v_0\}) = \operatorname{Span}(S)$$

反之，若 $S_0 \subsetneq S$ 是真子集并且 $\operatorname{Span}(S_0) = \operatorname{Span}(S)$，则 S 是线性相关组。

证明. 留作习题。 $\square$

例 1.8.9 (两个向量构成的向量组)
设 $S = \{v_1, v_2\}$ 是恰好由两个向量构成的向量组，则 S 是线性相关组当且仅当存在 $i \in \{1,2\}, \lambda \in \mathbb{F}$ 使得 $v_i = \lambda v_{3-i}$。

命题 1.8.10 (线性相关组一定存在有限的线性相关子集)
假设 $\kappa^S(\lambda) = 0$ 但是 $\lambda \neq 0$，那么 $\operatorname{Supp}(\lambda) \subset S$ 是线性相关组。

特别地，假设 S 是线性相关组，那么存在 $S_0 \subset S$ 是有限集合，并且 S_0 仍然是线性相关组。

读者应该将下面的推论与命题 1.8.2 作比较。

推论 1.8.11
设 $S \subset E$ 是向量组，使得其任何有限子集都是线性独立的，那么 S 也是线性独立的。

我们最后补充说明一件事情，在一些教材中，“向量组”这个概念并不是向量空间 E 的子集，而是可以允许元素重复的子集。这会带来一些问题，例如若 $v \neq 0$，则向量组 (v, v) 按照我们定义是线性独立的（因为这个向量组恰好由一个非零向量构成），而在一些教材中，由于这个向量组包含两个相等的向量，因此是线性相关的。有兴趣的读者若是需要一个最广泛的框架，应该区别“向量组”和“向量序列”这两种概念。并据此定义对上面的定理做出合适的修改。

注记
实际上，甚至存在一种代数结构，它不是线性空间，但是仍然可以研究线性独立性与线性相关性。这种代数结构叫做“拟阵 (Matroid)”，在组合数学中很有用。

1.9 线性空间的基及其存在性

线性空间的基，是所谓"坐标轴"的概念的精确描述:

定义 1.9.1 (基)
设 E 为某 $\mathbb{F}$-线性空间，向量组 $B \subset E$ 被称作 E 的基，若 B 是 E 的一个线性独立的生成组。

回忆到 B 是生成组当且仅当 $\mathrm{Span}(B) = E$，而 B 是线性独立组意味着 κ^B 是双射，故此时

$$\kappa^B : \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(B, \mathbb{F}) \to E$$

是双射。这种观点完全可以作为基的等价定义。

若 B 是 E 的一组基，按照定义，任何 $v \in E$ 都能写成下面的线性组合

$$v = \sum_{e_\alpha \in B} \xi_\alpha e_\alpha$$

并且这种组合方式是唯一的，也就是说，所有 ξ_α 被 v 唯一确定。这些标量叫做向量 v 在基 B 之下的坐标分量。

如果我们希望用数学的语言来刻画"每个向量都可以写成唯一的线性组合"，那么一旦 B 是 E 的一组基，就存在双射

$$[B] : E \to \mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(B, \mathbb{F})$$

（映射 $[B]$ 的动机是"取坐标分量"）该映射 $[B]$ 按照

$$([B]v)(e_\alpha) = \xi_\alpha, \quad v = \sum_{e_\alpha \in B} \xi_\alpha e_\alpha$$

的规则被定义。读者必须仔细思考，基的定义中"线性独立组"与"生成组"两个条件是如何保证了 $[B]$ 这个映射的"可定义性"的。

定理 1.9.2
设 B 是 E 的一组基，那么 κ^B 和 $[B]$ 是互逆的两个映射

证明. 不证自明。作者希望指出：基的作用就体现在此：将 E 和 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(B, \mathbb{F})$ 这两个线性空间"等同"起来，这里等同的意思是"线性同构"（见后续章节）。因此线性空间的代数结构完全地被自由线性空间的代数结构所反映。 □

注记 (Erdös-Kaplansky 定理)
一般来说，$\mathrm{Map}(X,\mathbb{F})$ 是一个比 $\mathrm{Map}_{\mathrm{fini}}(X,\mathbb{F})$ 大得多的线性空间。试图描述 $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_{>0},\mathbb{F})$ 的基几乎是不可能的。

例 1.9.3 ($\mathbb{F}^n$ 的典范基)
$\mathbb{F}^n$ 的一组基是 $B=\{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$。这组基是如此之自然，我们将其称作 $\mathbb{F}^n$ 的典范基。

我们已经知道，当 X 是无穷集的时候，$\chi=\{\chi_a : a\in X\}$ 并不是 $\mathrm{Map}(X,\mathbb{F})$ 的一组基，人们也不能够描述出 $\mathrm{Map}(X,\mathbb{F})$ 的一组基（没有人具体地写下来过它的一组基），自然要问：空间 $\mathrm{Map}(X,\mathbb{F})$ 是否有基?

定理 1.9.4 (基的存在性)
设 E 是一个非零线性空间（含有非零向量），S 是 E 的一个生成组，$R\subset S$ 是 E 的一个无关组，则存在 $R\subset B\subset S$ 使得 B 是 E 的一组基。

证明. 该定理等价于 Zorn 引理，故严格来说该定理不能够被证明，只能够接受其作为整个数学学科的公理基础之一。 □

上面的定理或许让人非常不舒服，不过一个特殊情况是可证的：如果线性空间 E 存在有限集合作为生成组，则 E 至少拥有一组由有限个向量构成的基。我们将存在有限集合作为生成组的线性空间称作**有限生成线性空间**。

命题 1.9.5
线性空间 E 是有限生成的，当且仅当存在有限向量组 B 作为 E 的一组基。

根据《线性代数应该这样学》的作者 Axler 的观点，线性代数研究的对象是有限生成的线性空间。因为仅仅依赖代数工具似乎无法将所有关于有限生成线性空间的结论以令人满意的方式推广到一般的线性空间。

1.10 一个技术性定理：Steinitz 置换定理

定理 1.10.1 (Steinitz)
设 B 是 E 的一组基，而有限集 B_0 是 E 的一个线性独立组。设 B_0 有 n 个元素，那么可以从 B 中丢弃 n 个向量，再将 B_0 添加进 B 中，使得得到的结果仍然是 E 的一组基。即：存在 B 的 n 元子集 B'，使得 $(B-B')\cup B_0$ 仍然是 E 的一组基。

证明. 留作习题（提示：不妨 $n=1$，并使用定理 1.8.8）。 □

1.11 线性映射与线性变换

为了语言的简洁，我们用 $E \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ 来代表 E 是一个 $\mathbb{F}$-线性空间。

定义 1.11.1 (线性映射)
若 $E, F \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$，映射 $\varphi : E \to F$ 被称作是 $\mathbb{F}$-线性的，如果:

加性 $\varphi(x +_E y) = \varphi(x) +_F \varphi(y)$ 对于任何 $x, y \in E$ 都成立

齐性 $\varphi(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F \varphi(x)$ 对于任何 $x \in E, \lambda \in \mathbb{F}$ 都成立

全体从 E 到 F 的 $\mathbb{F}$-线性映射构成的集合被记作 $\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(E, F)$。这里我们解释一下为什么记号之中包含了字母 $\mathbb{F}$，因为复线性空间本身也是实线性空间，但是复线性空间之间的 $\mathbb{R}$-线性映射通常不是 $\mathbb{C}$-线性映射。

（例: 考虑作为实线性空间的 $\mathbb{C}$, 那么"取共轭复数"就是 $\mathbb{R}$-线性映射, 但是不是 $\mathbb{C}$-线性映射。读者务必搞清楚原因!）

如果 $E = F$，从 E 到 E 的 $\mathbb{F}$-线性映射被叫做 E 上的 $\mathbb{F}$-线性变换，我们也简记 $\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(E) = \mathscr{L}_{\mathbb{F}}(E, E)$。之后我们会看到，线性变换和矩阵有着非常紧密的联系。

显然，$\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(E, F)$ 是 $\mathbb{F}$-线性空间 $\mathrm{Map}(E, F)$ 的子集，并且有:

命题 1.11.2

$$\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(E, F) = \mathrm{Span}(\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(E, F))$$

1.12 线性同构与线性自同构

1.13 对映射进行线性延拓

1.14 使用基来研究线性映射的单满性

1.15 自由空间的泛性质

1.16 习题

1.16.1 连续函数构成的线性空间

本题中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$

继承例 1.4.2 的精神，证明若 X 是拓扑空间，则全体从 X 到 $\mathbb{F}$ 的连续映射所构成的集合 $\mathrm{Map}_{\mathrm{cont}}(X, \mathbb{F})$ 构成线性空间。如果读者不熟悉拓扑空间，可以假设这里的 X 是区间。

1.16.2 可微函数构成的线性空间

本题中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

继承上一题的精神，证明若 I 是开区间，则全体从 I 到 $\mathbb{R}$ 的 k 次可微函数所构成的集合 $\mathrm{C}^k(I)$ 构成线性空间，这里 $k \in \{1, 2, 3, \ldots, \infty, \omega\}$。（请咨询你的分析学老师上述记号的意义）

Chapter 2

子空间、商空间、维数理论

Chapter 3

核空间、像空间、正合序列

Chapter 4

对偶空间与对偶映射

Chapter 5

矩阵论

Chapter 6

多重线性代数

Chapter 7

域上的代数与多项式代数

Chapter 8

线性变换的结构，作为 $\mathbb{F}[\varphi]$-模的线性空间

后记及声明

任何人**都可以**因任何用途以任何形式使用本讲义，因为里面的一切知识都并非作者原创，作者相信即便代数学不是整个宇宙的财产，代数学也一定是整个人类心智的财产。如果使用者认为确实有必要，当然可以注明引用自本讲义，但是作者相信，任何一个无论多么微小的无私行为，都是对未来的后人的善良。而比起目前世界上人类的数量（约等于 10^{10}），“未来的后人”的数量可以认为是无限大的。

作者在此感谢所有前辈数学家，并对他们追求真理的精神、无私的传承与教学行为、辛勤努力而付出的时光，表示由衷的尊敬。

作者感谢自己的学生郭博扬、张语倢，他们仔细阅读了该讲义并协助了讲义的编写。

索引