Fourier 分析：课程介绍

邱才颙

2023 年 1 月 12 日

Fourier 分析以法国数学家 Jean-Baptiste Joseph Fourier 命名，因为 Fourier 分析起源于 Fourier 对一种重要的偏微分方程：热方程的研究。热方程描述了温度在介质中的时演化模式，简而言之，热量倾向于分布得更加均匀，而某点处热量流失的速度正比于此点温度与周围温度的差值。Fourier 引入了分离变量法来求解热方程，这使得 Fourier 将该问题转化为一个更直观的新问题：

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$$

可以表示哪些函数？如果我们允许 $N = \infty$，这种三角级数又可以表示哪些函数？可以逼近哪些函数？

Fourier 研究的这种级数，称作 Fourier 级数，而使用 Fourier 级数来分解函数的过程就是 Fourier 变换。直观来说，Fourier 变换将一个函数分解成若干个纯简谐振动，这个过程恰好就是人耳分析声波的过程：我们的人耳通过 Fourier 变换，将声压函数实时地解析为不同强度不同音高的声音的合成。因此你在听歌的时候可以同时听到人声、伴奏、鼓点等多个因素：它们并没有因为被混合，就无法分离开。

这种技巧显然可以处理除声波之外的其他信号，包括电信号，甚至图像和视频。当我们把图像作为一个函数进行 Fourier 变换之后，我们得到了这个图像的频谱，正如同声音的频谱。而视觉和听觉的一个差异就是，频谱中的高频部份对应了图像的细微变化，因此就算舍弃，图像的大体形状仍然不变。这就是为什么 jpeg 格式可以将图像压缩到原来的百分之一，但是仍然看起来没有什么区别。我们只需要简单地丢掉图像的高频谱，再做 Fourier 逆变换即可。

Fourier 分析可以使用在（而且常常是**必须**使用在）所有涉及信息处理的方面。例如 CT 扫描、B 超成像，分子结构扫描等等方面。在这个时代，

Fourier 分析用在了所有和科技有关的方面。只要涉及到数据的分析，通常就要使用 Fourier 分析。当然，在不同的情况下，有多种变换可以使用，这包括比 Fourier 变换的适用范围更广泛的 Laplace 变换。当然，Fourier 分析本身作为数学的一个分支，在数学和物理的所有方面都有应用。它可以用来证明许多数学结果，例如：

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

可以从 $f(x)=x^2$ 的 Fourier 系数直接得到。

课程大纲

- Fourier 分析的起源
  - 物理学中经典的偏微分方程（热方程，波动方程，Laplace 方程，它们分别描述扩散过程，振动模式，稳态）
  - 偏微分方程的分类和适定性
  - 一维波动方程和热方程的求解，D'Alembert 公式，Fourier 的分离变量法
- 发散级数的 Cesaro 求和法，我们在分析 Fourier 级数的收敛性的时候需要它
- 正和核，它们在卷积运算中可以认为是恒等元的逼近
- Riemann-Lebesgue 引理
- 分布（广义函数），Dirac 函数
- Laplace 变换和 Z 变换
  - 运算法则
  - 卷积，控制理论，稳定性
  - 使用 Laplace 变换求解微分方程
  - 使用 Z 变换求解数列
  - 分布的 Laplace 变换

- Fourier 级数理论
  - Fourier 级数的概念
  - Dirichlet 核与 Fejer 核，我们将用它们来说明 Fourier 级数的收敛性质和唯一性
  - 连续函数和可微函数的 Fourier 级数
  - 著名的各种求和
  - Gibbs 现象：当我们用 Fourier 系数来表示阶跃函数的时候，似乎总是有 0.1789797 的高度跳跃，这就是 Gibbs 现象
  - 分布的 Fourier 级数
- L^2 空间理论，我们将函数视为向量，并将积分视为向量的数量积，还可以定义函数的 L^p 模长，这将给我们许多新的发现
  - （复）内积空间的理论，Gram-Schmidt 正交化，正交投影与最小二乘法，Bessel 不等式
  - Fourier 级数的新视角
  - Fourier 系的完备性，这说明确实可以用 Fourier 级数来逼近函数
  - 使用多项式逼近函数，Weierstrass 逼近定理，各类正交多项式（Legendre 多项式，Laguerre 多项式，Hermite 多项式，Chebyshev 多项式）
- 偏微分方程，使用 Fourier 分析的技巧，一些偏微分方程现在从高等数学的难度降为了初等数学的难度
  - 完成 Fourier 对热方程的研究
  - 使用 Fourier 分析研究波动方程，驻波
  - 基础音乐理论，泛音，十二平均律
  - 单位圆盘上的 Dirichlet 问题，这是 Laplace 方程的特殊情况，其中边界值是已知的
  - Strum-Liouville 理论，这可以解决所有齐次二阶线性常微分方程
- Fourier 变换，这是我们分析定义在有限区间上的函数的典范方法
  - Fourier 变换的定义和运算性质

- Fourier 逆变换，反演定理
- 卷积定理
- Parseval 公式和 Plancherel 公式，这说明 Fourier 变换在 L^2 空间的视角下是等距变换
- 使用 Fourier 变换解决热方程，热方程的瞬间敏感性
- 使用 Fourier 变换解决 Laplace 方程
- Shannon 采样定理，这个定理保证了以两倍频率采样的时候，不会丧失信息，这也是为什么如今的音乐格式使用 44.1kHz 的频率对声音进行采样，因为人类的听觉极限大约是 22.05kHz
- Laplace 变换和 Fourier 变换的联系
- 分布的 Fourier 变换

课程信息

本课程面对高二学生，容量为 50 人，每周两课时

评价方法为平时作业 100 分

学生需要在寒假期间预习最简单的微积分，包括：导数和偏导数的计算方法，链式法制，最简单的积分法，反常积分的概念，微积分基本定理

本课程有课程群 23FA，请进群获得最新消息，文件《数列的 Z 变换》可作为预习作业（见课程群），这个初等工具包含了 Fourier 分析的大部份思想，如果你可以解决里面的问题，本课程应该对你而言不算难

面向对象

本课程的内容非常偏向工程领域，数学系学生学习的 Fourier 分析的内容和本课程的会有许多差别，其中最重要的差别就是从一开始就会使用 Lebesgue 积分的语言来讲述整个理论。我们这门课不需要 Lebesgue 积分，我们忽略大多数数学方面的技术细节问题，专注于使用 Fourier 分析来解决尽可能多的问题。

但是，这门课也很适合未来选择数学系的学生选择，因为对 Fourier 分析的大概内容和起源做足了解，对于未来学习是很有好处的。Fourier 分析用在数学的所有领域中（包括数论），实际上 Tate 的工作表明，Riemann-ζ 函数的函数方程就应该放在 Fourier 分析的语境下理解