



1917—2017

100th Anniversary  
Shanghai University of Finance and Economics  
上海财经大学 100周年校庆

# 常微分方程模型



董程栋 上海财经大学数学学院  
2020年 7月26日

# 1996年全国大学生数学建模竞赛A题 最优捕鱼策略



为了保护人类赖以生存的自然环境，可再生资源(如渔业、林业资源)的开发必须适度。一种合理、简化的策略是，在实现可持续收获的前提下，追求最大产量或最佳效益。

考虑对某种鱼的最优捕捞策略：

假设这种鱼分4个年龄组，称1龄鱼，…，4龄鱼。各年龄组每条鱼的平均重量分别为5.07, 11.55, 17.86, 22.99(克)，各年龄组鱼的**自然死亡率**均为0.8(1/年)，这种鱼为季节性集中产卵繁殖，平均每条4龄鱼的产卵量为 $1.109 \times 10^5$ 个，3龄鱼的产卵量为这个数的一半，2龄鱼和1龄鱼不产卵，**产卵和孵化期为每年的最后4个月**，卵孵化并成活为1龄鱼，成活率(1龄鱼条数与产卵总量 $n$ 之比)为 $1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$ 。

渔业管理部门规定，**每年只允许在产卵孵化期前的8个月内进行捕捞作业**。如果每年投入的捕捞能力(如渔船数、下网次数等)固定不变，这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群数量成正比，比例系数不妨称**捕捞强度系数**。通常使用13mm网眼的拉网，这种网只能捕捞3龄鱼和4龄鱼，其两个捕捞强度系数之比为0.42 : 1。渔业上称这种方式为固定努力量捕捞。

建立数学模型分析如何实现可持续捕获(即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群条数不变)，并且在此前提下得到最高的年收获量(捕捞总重)。

思路：以捕捞强度系数为自变量的优化模型

## 捕捞强度系数

捕捞强度系数：单位时间的捕捞量与鱼群数量的比例系数

$$\frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{\Delta t} = qN(t) \quad \frac{dN}{dt} = -qN$$

自然死亡率：单位时间的死亡量与鱼群数量的比例系数

$$\frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{\Delta t} = rN(t) \quad \frac{dN}{dt} = -rN$$

初值条件  $N(0) = N_0$

无捕捞时

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-rt}$$

有捕捞时

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-(q+r)t}$$

- 虽然没有一个数模竞赛题是用常微分方程完全解决的
- 但是用常微分方程能解决很多问题

## 常微分方程

微分方程：联系着自变量，未知函数及它的导数（或微分）的关系式。

常微分方程：自变量只有一个的微分方程

例：物体冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中，在时刻  $t = 0$  时，测得它的温度为  $u_0 = 150^\circ\text{C}$ ，10分钟后测量得温度为  $u_1 = 100^\circ\text{C}$ ，而空气的温度保持在  $u_a = 24^\circ\text{C}$

要求确定此物体的温度  $u$  和时间  $t$  的关系。

物理规律：

热力学第二定律： 热量总是从温度高的物体向温度低的物体转移；

牛顿冷却定律： 在一定的温度范围内，一个物体的温度变化速度与这一物体和其所在介质温度的差值成正比。

$$\frac{du}{dt} = -k(u - u_a) \quad u(0) = u_0$$

$$u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt}$$

# 动态模型



- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

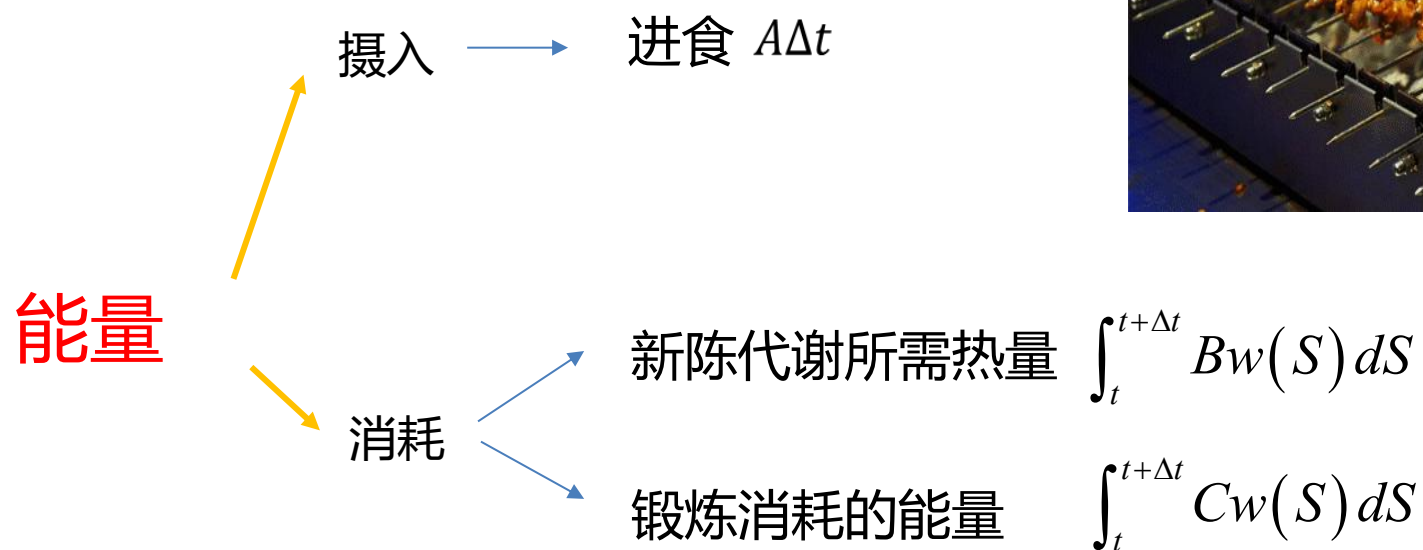
## 常微分方程模型 建模过程

- 根据建模目的和问题分析作出合理的简化假设
- **根据实际情况确定函数及其相关变化率**
- 按照内在规律建立模型

# 减肥模型



思路：能量守恒



$$D(w(t + \Delta t) - w(t)) = \left[ A\Delta t - (B + C) \int_t^{t+\Delta t} w(S) dS \right]$$



## 减肥微分方程

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = a - bw & t > 0 \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

解

$$w(t) = \frac{a}{b} + \left( w_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bt}$$



Only when science succeeds in using mathematics can it be truly perfected.

## 模型改进

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = a(t) - b(t)w & t > 0 \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

## 举重运动员减体重模型

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = a_1 - b_1 w_1 & t_0 \geq t > 0 \\ \frac{dw_2}{dt} = a_2 - b_2 w_2 & t > t_0 \\ w_1(0) = w_0 \\ w_2(t_0) = w_1(t_0) \end{cases}$$

要求  $w_2(t_0 + \bar{t}) < \bar{w}$

# 2001 Interdisciplinary Contest in Modeling



斑马贻贝 (*Dreissena polymorpha*) 是只有指甲大小的软体动物，通过远洋船无意中引入北美。自20世纪80年代中期以来，它们已经传遍了所有的大湖及越来越多的内陆水道。斑马贻贝在各种表面上繁殖，如码头，船体，鱼网，进水管和阀门，软体动物，甚至其他斑马贻贝上。其捕食者，一些潜水鸭，鲤鱼和鲟鱼，并不足以对他们产生重大影响。斑马贻贝大大影响了大湖生态系统和经济。许多地方正试图控制或消除这些水害。



# 2001 Interdisciplinary Contest in Modeling



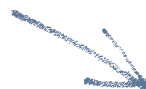
研究人员试图确定北美水域中与斑马贻贝相关的环境变量。可能限制或防止斑马贻贝传播的相关因素是不确定的。您可以从参考数据中找出可能影响斑马贻贝在水域中传播的几种化学物质。

要求A：讨论可能影响斑马贻贝传播的环境因素。

要求B：利用以下化学数据：http：

[//www.comap/undergraduate/contests/icm/imagesdata/LakeAChem1.xls](http://www.comap/undergraduate/contests/icm/imagesdata/LakeAChem1.xls)，以及提供的贻贝数量数据：http：

[//www.comap/undergraduate/contests/icm / imagesdata / LakeAPopulation1.xls](http://www.comap/undergraduate/contests/icm/imagesdata/LakeAPopulation1.xls)模拟A湖斑马贻贝的数量增长情况。请务必查看有关斑马贻贝数据的信息。



**描述对象特征随时间(空间)的演变过程**

要求A：讨论可能影响斑马贻贝传播的环境因素。

$$\max \text{ growth rate} = 2338[\text{Ca}^{2+}] + 39202\text{pH} - 334089$$

要求B：利用提供的贻贝数量数据，模拟A湖斑马贻贝的数量增长情况。

思路：阻滞增长模型（Logistic模型）

假设：

1. 数量增长率和数量成正比;
2. 环境的承载能力是常数;
3. 数量不受迁移, 遗传因素, 年龄结构的影响;
4. 不考虑捕食;
5. 湖里的不同地点可看成是不同的湖。

# Logistic模型



$$\frac{dy}{dt} = ry \left( 1 - \frac{y}{K} \right)$$

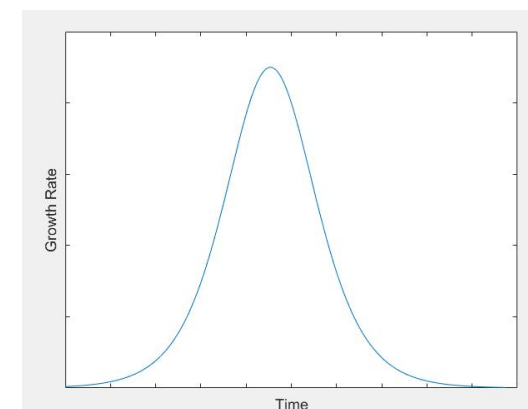
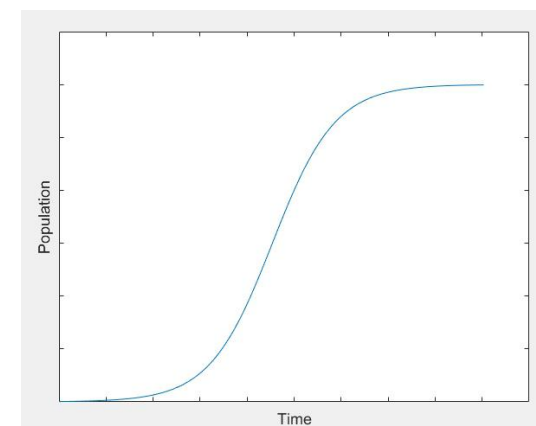
令  $a = r, b = r/K$

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

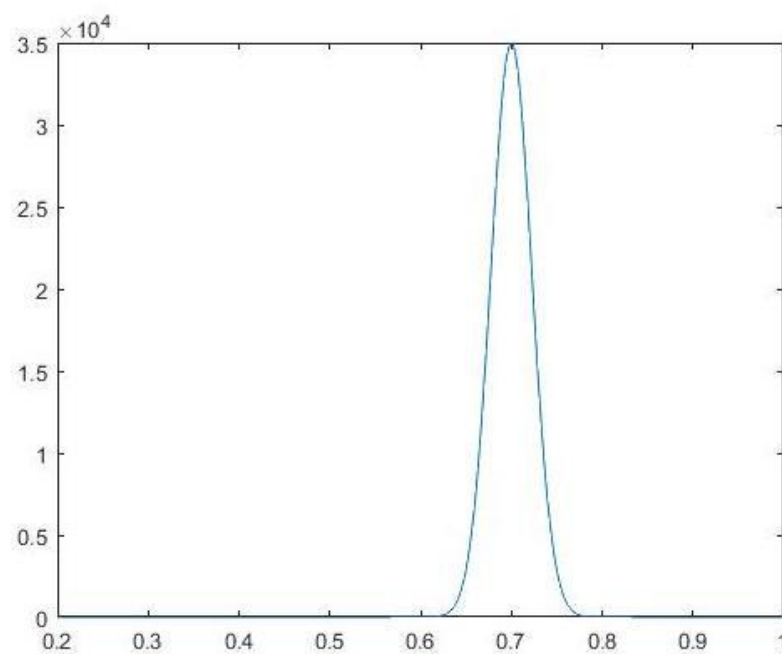
设  $y(0) = y_0$

$$y(t) = \frac{ae^{at} y_0}{a - by_0 + be^{at} y_0}$$

$$y'(t) = \frac{a^2 e^{at} y_0 (a - by_0)}{\left( a + b(-1 + e^{at}) y_0 \right)^2}$$







The derivative of the population growth model



## 2018年美赛B题 基于语言变迁的办公室选址模型

### Problem B: How Many Languages?

Background: There are currently about 6,900 languages spoken on Earth. About half the world's population claim one of the following ten languages (in order of most speakers) as a native language: Mandarin (incl. Standard Chinese), Spanish, English, Hindi, Arabic, Bengali, Portuguese, Russian, Punjabi, and Japanese. However, much of the world's population also speaks a second language. When considering total numbers of speakers of a particular language (native speakers plus second or third, etc. language speakers), the languages and their order change from the native language list provided. The total number of speakers of a language may increase or decrease over time because of a variety of influences to include, but not limited to, the language(s) used and/or promoted by the government in a country, the language(s) used in schools, social pressures, migration and assimilation of cultural groups, and immigration and emigration with countries that speak other languages. Moreover, in our globalized, interconnected world there are additional factors that allow languages that are geographically distant to interact. These factors include international business relations, increased global tourism, the use of electronic communication and social media, and the use of technology to assist in quick and easy language translation.

背景：目前地球上大约有**6,900**种语言。世界上大约一半的人口使用下列十种语言：普通话(包括标准汉语)、西班牙语、英语、印地语、阿拉伯语、孟加拉语、葡萄牙语、俄语、旁遮普语和日语之一作为他们的母语(按人数顺序排列)。但是世界上许多人也会说第二语言、第三语言甚至更多，当考虑到这个因素的时候，这些语言的排名会发生变化。随着时间的推移，由于有各种影响，使得使用一种语言的总人数可能会增加或减少，包括以下情况：某一个的国家政府使用或推广的语言、学校使用的语言、社会压力、文化群体的迁徙和同化、移民以及移民到使用其他语言的国家。除此之外，在我们这个全球化、相互关联的世界里，还有其他因素使得不同语言能够相互作用。这些因素包括国际商务、日益增长的全球旅游业、电子通讯和社交媒体的使用，以及快速简单的语言翻译技术。



## 2018年美赛B题 基于语言变迁的办公室选址模型

母语排名	母语	语系	使用人数 (百万)	第二(三、等) 语言使用人数 (百万)	第二语言排名	总计 (百万)
1	普通话	汉藏语系, 汉语系	897	193	4	1090
2	西班牙语	印欧语系, 罗马语系	436	91	8	527
3	英语	印欧语系, 德语系	371	611	1	983
4	印地语	印欧语系, 印度雅利安语系	329	216	2	544
5	阿拉伯语	亚非语系, 闪米特语系	290 (2017 年)	132	6	422
6	孟加拉语	印欧语系, 印度雅利安语系	242	19 (2011 年于 孟加拉国)	13	261
7	葡萄牙语	印欧语系, 罗马语系	218	11	15	229
8	俄语	印欧语系, 斯拉夫语系	153	113 (2010 年)	7	267
9	旁遮普语	印欧语系, 印度雅利安语系	148	?	?	148
10	日语	日语系	128	1 (2010 年)	19	129

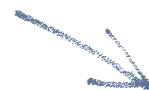
出自 [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_languages\\_by\\_total\\_number\\_of\\_speakers](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_languages_by_total_number_of_speakers) 2018.1.27

问题：一家在美国纽约和中国上海设有办事处的大型跨国公司正在不断拓展，想成为真正的国际化公司。该公司正在开设更多的国际办事处，并希望每个办事处的员工都能使用英语和一种或多种其他语言进行交流。该公司的首席运营官已经聘请了你的团队来调查全球语言的发展趋势以及新办事处的地点选择。

# 2018年美赛B题 基于语言变迁的办公室选址模型



1.考虑以上背景段落中所述的影响和因素，以及可能的其他影响和因素，根据时间的推移，对各种语言使用者的分布情况进行建模。



**描述对象特征随时间(空间)的演变过程**

思路：logesitic模型

2.使用你的模型来预测未来50年内，以英语为母语的人数和英语使用者的总人数的数量会发生什么变化。你是否能预测当前十大语言名单中的任何一种语言(某种母语的人数或者某种语言的使用者的总数)将被另一种语言所取代？请说明。



**预报对象特征的未来性态**

# 对于某种语言

## 母语使用者数量模型

$$\frac{dx_l(t)}{dt} = r_l x_l(t)(1 + c_l) \left( 1 - \frac{x_l(t)(1 + c_l)}{N_l} \right)$$

其中  $N_l = x_l(2017) + \frac{\sum S_i}{S} (N_m - P(2017))$

## 非母语使用者比例模型

$$Q_l(t) = \sigma \left( w \sum_{l' \neq l} (A_{l',l}(t) - A_{l,l'}(t)) + b \right)$$

其中  $A_{l',l}(t) = k_3 \cdot R_l \left( \frac{M_{l,t-1}}{P_{l,t-1}} \right)^{a_{l,t-1}}$

$$a_{l,t} = -\frac{T_{l,t}}{P_t} k_1 - \frac{V_{l,t}}{G_t} k_2 - \beta t + \bar{a} \quad T_{l,t} = \sum_{i=1}^N T_{t,i} \cdot \omega_{l,i} \quad V_{l,t} = \sum_{i=1}^N V_{t,i} \cdot \omega_{l,i}$$

## 对于某个国家

母语使用者数量模型

$$\frac{dx_{l,i}(t)}{dt} = r_{l,i} x_{l,i}(t) (1 + c_{l,i}) \left( 1 - \frac{x_{l,i}(t) (1 + c_{l,i})}{N_{l,i}} \right)$$

非母语使用者比例模型

$$Q_{l,i}(t) = \sigma \left( w \sum_{l' \neq l} (A_{l',l,i}(t) - A_{l,l',i}(t)) + b \right)$$

其中  $A_{l',l,i}(t) = k_3 \cdot R_l(Q_{l,i}(t-1))^{a_{l,t-1,i}}$

$$a_{l,t,i} = -\frac{T_{l,t,i}}{P_{t,i}} k_1 - \frac{V_{l,t,i}}{G_{t,i}} k_2 - \beta t + \bar{a}$$

$$T_{l,t,i} = T_{t,i} \omega_{l,i} \quad V_{l,t,i} = V_{t,i} \omega_{l,i}$$

# 计算结果

排名	语言	母语使用者数量（亿）
1	普通话	9.69
2	西班牙语	5.09
3	英语	4.55
4	印地语	3.86
5	阿拉伯语	3.74
6	孟加拉语	2.81
7	葡萄牙语	2.48
8	俄语	1.79
9	旁遮普语	1.52
10	日语	1.24

50年后母语使用者数量  
排名前10的语言表

排名	语言	非母语使用者数量（亿）
1	英语	7.56
2	印地语	3.69
3	法语	2.10
4	普通话	2.10
5	马来语	2.02
6	阿拉伯语	1.37
7	俄语	1.09
8	斯瓦西里语	0.83
9	西班牙语	0.75
10	德语	5.53

50年后非母语使用者数量  
排名前10的语言表



# 2005年A题 长江水质综合评价与预测



- 水是人类赖以生存的资源，保护水资源就是保护我们自己，对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重。专家们呼吁：“以人为本，建设文明和谐社会，改善人与自然环境，减少污染。”
- 长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。2004年10月，由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考察团，从长江上游宜宾到下游上海，对沿线21个重点城市做了实地考察，揭示了一幅长江污染的真实画面，其污染程度让人触目惊心。为此，专家们提出“若不及时拯救，长江生态10年内将濒临崩溃”（附件1），并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤（附件2）。
- 附件3给出了长江沿线17个观测站（地区）近两年多主要水质指标的检测数据，以及干流上7个观测站近一年多的基本数据（站点距离、水流量和水流速）。通常认为一个观测站（地区）的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。一般说来，江河自身对污染物都有一定的自然净化能力，即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等使水中污染物的浓度降低。反映江河自然净化能力的指标称为降解系数。事实上，长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的，根据检测可知，主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降解系数通常介于0.1~0.5之间，比如可以考虑取0.2（单位：1/天）。附件4是“1995~2004年长江流域水质报告”给出的主要统计数据。

# 2005年A题 长江水质综合评价与预测



请你们研究下列问题：

**分析对象特征的变化规律**

- （1）对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况。
- （2）研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区？
- （3）假如不采取更有效的治理措施，依照过去10年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来10年的情况。
- （4）根据你的预测分析，如果未来10年内每年都要求长江干流的IV类和V类水的比例控制在20%以内，且没有劣V类水,那么每年需要处理多少污水？
- （5）你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见。

**预报对象特征的未来性态**

**研究控制对象特征的手段**

# 《地表水环境质量标准》中4个主要项目标准限值



下面的附表是国标(GB3838-2002)给出的，其中 I、II、III类为可饮用水。

序号	项 目	分类	I 类	II类	III类	IV类	V类	劣V类
		标准值						
1	溶解氧(DO) ≥	7.5 (或饱和率90%)	6	5	3	2	0	
2	高锰酸盐指数(CODMn) ≤	2	4	6	10	15	∞	
3	氨氮（NH3-N） ≤	0.15	0.5	1.0	1.5	2.0	∞	
4	PH值（无量纲）	6---9						



# 第一问（1）对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况。



发布日期:2003-06

序号	点位名称	断面情况	主要监测项目(单位:mg/L)				水质类别		主要污染指标
			pH*	DO	CODMn	NH3-N	本月	上月	
1	四川攀枝花	干流	7.6	6.8	0.2	0.1	II	II	
2	重庆朱沱	干流（川-渝省界）	7.63	8.41	2.8	0.34	II	II	
3	湖北宜昌南津关	干流（三峡水库出口）	7.07	7.81	5.8	0.55	III	III	
4	湖南岳阳城陵矶	干流	7.58	6.47	2.9	0.34	II	II	
5	江西九江江西水厂	干流（鄂-赣省界）	7.34	6.19	1.7	0.13	II	II	
6	安徽安庆皖河口	干流	7.52	6.54	3.2	0.22	II	II	
7	江苏南京林山	干流（皖-苏省界）	7.78	6.9	3.1	0.11	II	II	
8	四川乐山岷江大桥	岷江（与大渡河汇合前）	7.66	4.2	5.8	0.53	IV	IV	溶解氧
9	四川宜宾凉姜沟	岷江（入长江前）	8.01	7.63	2.4	0.25	II	II	
10	四川泸州沱江二桥	沱江（入长江前）	7.63	4.02	3.6	1.06	IV	IV	溶解氧、氨氮
11	湖北丹江口胡家岭	丹江口水库（库体）	8.63	10.2	1.8	0.1	I	I	
12	湖南长沙新港	湘江（洞庭湖入口）	7.42	6.45	4.3	0.99	III	III	
13	湖南岳阳岳阳楼	洞庭湖出口	7.73	6.26	1.4	0.21	II	III	
14	湖北武汉宗关	汉江（入长江前）	8	6.43	2.4	0.17	II	II	
15	江西南昌滁槎	赣江（鄱阳湖入口）	6.64	5.18	1.1	0.92	III	III	
16	江西九江蛤蟆石	鄱阳湖出口	7.28	6.87	2.7	0.15	II	II	
17	江苏扬州三江营	夹江（南水北调取水口）	7.29	6.9	1.6	0.15	II	II	

分析：对水质污染最重要的四项，共六个级别，每一个类别对每一项指标都有相应的标准值（区间），只要有一项指标达到高类别的标准就算是高类别的水质，所以实际中不同类别的水质有很大的差别，甚至同一类别的水质在污染物的含量上也有较大的差别。

# 数据的标准化处理

PH值的谷形处理

$$p_{ik} = \frac{|P_{ik} - 7.0|}{9 - 6}$$

DO值的归一化处理

$$d_{ik} = \begin{cases} -0.1348D_{ik} + 1, & 0 \leq D_{ik} \leq 7.5 \\ 0, & D_{ik} > 7.5 \end{cases}$$

NH3—N值的归一化处理

$$n_{ik} = \frac{N_{ik} - \min\{N_{ik}\}}{\max\{N_{ik}\} - \min\{N_{ik}\}}$$

CODMn值的归一化处理

$$c_{ik} = \frac{C_{ik} - \min\{C_{ik}\}}{\max\{C_{ik}\} - \min\{C_{ik}\}}$$

## 综合评价指标的确定

考虑到一个地区的污染指标的变化不仅与其所属类型有关，而且即便是同属于一个类型也有一定的数值差异。为此，在确定综合评价指标时，既要能体现同类型的指标数量差异，也要能体现不同类型指标之间的差异，而且更要能体现不同类型等级差的差异。

可以采用动态加权法来确定相应的综合评价指标

$$\omega_i(x) = \begin{cases} 0 & , x < \alpha_i \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-\alpha_i}{\sigma_i}\right)^2} & , x \geq \alpha_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

某地区某一时间的水质综合评价指标定义为

$$X = 0.8 \sum_{i=1}^3 \omega_i(x_i) x_i + 0.2 x_4$$

# 各地区水质的综合排序与评价

由17个观测点28个月的水质综合评价指标  $X_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, 17; j = 1, 2, \dots, 28$ )

根据其大小进行排序，数值越大水质越差，由此可得反映17个观测点的水质污染程度的28个排序结果，利用决策论中的**Borda数法**来确定综合排序方案。

记第j个月的排序方案中排在第i个站点  $S_i$  后面的站点数为  $B_j(S_i)$ ，则站点  $S_i$  的Borda数为

$$B(S_i) = \sum_{j=1}^{28} B_j(S_i), \quad (i = 1, 2, \dots, 17)$$

各观测点的Borda数及水污染情况总排序

观测站点	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17
Borda数	203	136	143	234	106	139	138	378	232	271	60	357	277	264	438	214	217
总排序	11	15	12	7	16	13	14	2	8	5	17	3	4	6	1	10	9

## 第二问（2）研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区？



根据长江干流上的七个主要观测站点，将其分为六段，逐段分析其排污情况，即可以找出主要污染物的污染源所在的区域。

由于一个江段的水质污染，主要来自于本地区的污水和上游扩散下来的污水两个部分合成。

思路：降解模型

## 一维降解模型

假设长江干流中的污染物的分布浓度为 $C(\text{mg/L})$ ，各河段断面为均匀的，平均流速记为 $u(\text{m/s})$ ，只考虑降解，不考虑扩散，且污染物的浓度不随时间变化，只与距离有关。则 $C$ 满足一维水质模型

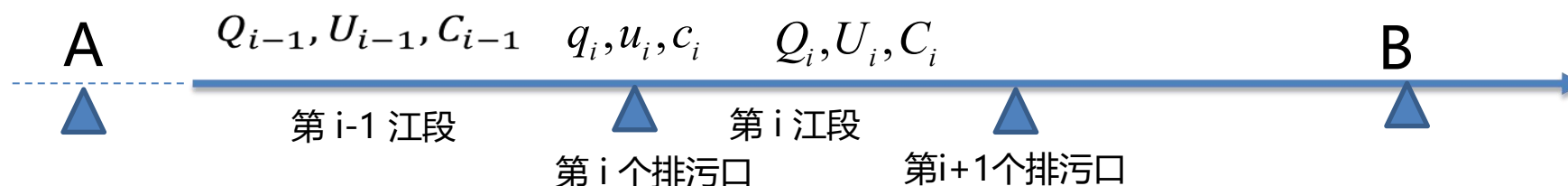
$$\begin{cases} u \frac{dC}{dx} + kC = 0 \\ C(0) = C_0 \end{cases}$$

得

$$C = C_0 e^{-\frac{k}{u}x}$$

# 一维降解模型

对于长江干流上任一江段AB，距离为d，不妨设段内有n个排污口（包括支流入口和直排口），第i个排污口的流量、平均流速、污染物的浓度分别为  $q_i, u_i, c_i$ ，而用  $Q_i, U_i, C_i$  分别表示该江段干流的水流量、流速和污染物浓度。则



$$C_i = \frac{q_i c_i + Q_{i-1} f(C_{i-1})}{Q_i}, \quad Q_i = Q_{i-1} + q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

其中

$$f(C_{i-1}) = C_{i-1} e^{-\frac{k}{U_{i-1}} x_{i-1}}$$

## 污染物排放量的确定方法

江段AB内的总排污量为  $w_i = \sum_{i=1}^n c_i q_i$



### 排污量的上界值

假设江段AB内的所有排污都集中在A点，加上上游的污染物一起，经过AB段内的降解到B点，则

$$(C_A Q_A + c_1 q_1) e^{-\frac{k}{U_B} x} = C_B Q_B$$

因此

$$w_{\max} = q_1 c_1 = Q_B C_B e^{\frac{k}{U_B} x} - Q_A C_A$$

### 排污量的下界值

假设江段AB内的所有排污都集中在B点，加上上游经过降解的的污染物一起，则

$$C_A Q_A e^{-\frac{k}{U_B} x} + c_1 q_1 = C_B Q_B$$

因此

$$w_{\min} = q_1 c_1 = Q_B C_B - Q_A C_A e^{-\frac{k}{U_B} x}$$



## 平均相对排污量

根据所给数据，对于每一个月每一江段都可以确定一个排污量变化区间，对上下界按月份取均值，就可以得到每一江段排污量的区间。取中值，则视作每一江段的平均排污量。除以江段长度，则称其为平均相对排污量。这是一个可比性的指标，由此指标的大小可以确定长江干流排污量最大的区段，即可确定主要污染源。

### 高锰酸盐、氨氮排放量及排序结果

江段	S1~S2	S2~S3	S3~S4	S4~S5	S5~S6	S6~S7
区间	[31.32,49.03]	[30.07,68.07]	[39.12,78.72]	[20.29,49.04]	[14.15,18.58]	[23.16,40.15]
相对排污量	0.04229	0.06307	0.15	0.0693	0.0998	0.0682
排序	6	5	1	3	2	4

江段	S1~S2	S2~S3	S3~S4	S4~S5	S5~S6	S6~S7
区间	[28.11,63.12]	[30.47,83.58]	[42.52,113.09]	[22.52,60.78]	[15.79,22.05]	[8.47,28.1]
相对排污量	0.048	0.0733	0.197	0.0833	0.1154	0.0393
排序	5	4	1	3	2	6

## 2003 国赛A题 SARS的传播

- SARS (Severe Acute Respiratory Syndrome, 严重急性呼吸道综合症, 俗称: 非典型肺炎) 是21世纪第一个在世界范围内传播的传染病。SARS的爆发和蔓延给我国的经济发展和人民生活带来了很大影响, 我们从中得到了许多重要的经验和教训, 认识到定量地研究传染病的传播规律、为预测和控制传染病蔓延创造条件的重要性。请你们对SARS 的传播建立数学模型, 具体要求如下:
  - (1) 对附件1所提供的一个早期的模型, 评价其合理性和实用性。
  - (2) 建立你们自己的模型, 说明为什么优于附件1中的模型; 特别要说明怎样才能建立一个真正能够预测以及能为预防和控制提供可靠、足够的信息的模型, 这样做的困难在哪里? 对于卫生部门所采取的措施做出评论, 如: 提前或延后5天采取严格的隔离措施, 对疫情传播所造成的影响做出估计。附件2提供的数据供参考。
  - (3) 收集SARS对经济某个方面影响的数据, 建立相应的数学模型并进行预测。附件3提供的数据供参考。
  - (4) 给当地报刊写一篇通俗短文, 说明建立传染病数学模型的重要性。

# 传染病模型回顾

## 模型1 指数增长模型

已感染人数 (病人)  $i(t)$

每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为 $\lambda$

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda i(t) \Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \lambda i \\ i(0) &= i_0 \end{aligned}$$



$$i(t) = i_0 e^{\lambda t}$$

# 传染病模型回顾

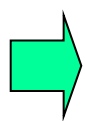
## 模型2 阻滞增长模型

区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

1) 总人数 $N$ 不变, 病人和健康人的比例分别为  $i(t), s(t)$ ;

2) 每个病人每天有效接触人数为 $\lambda$ , 且使接触的健康人致病。

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda N s(t) i(t) \Delta t$$



$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i (1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

# 传染病模型回顾

## 模型3 SIS模型

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，  
健康人可再次被感染

3) 病人每天治愈的比例为 $\mu$

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

# 传染病模型回顾

## 模型4 SIR模型

传染病有免疫性

总人数 $N$ 不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t)$ ,  $s(t)$ ,  $r(t)$

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t$$

$$N[s(t + \Delta t) - s(t)] = -\lambda N s(t) i(t) \Delta t$$

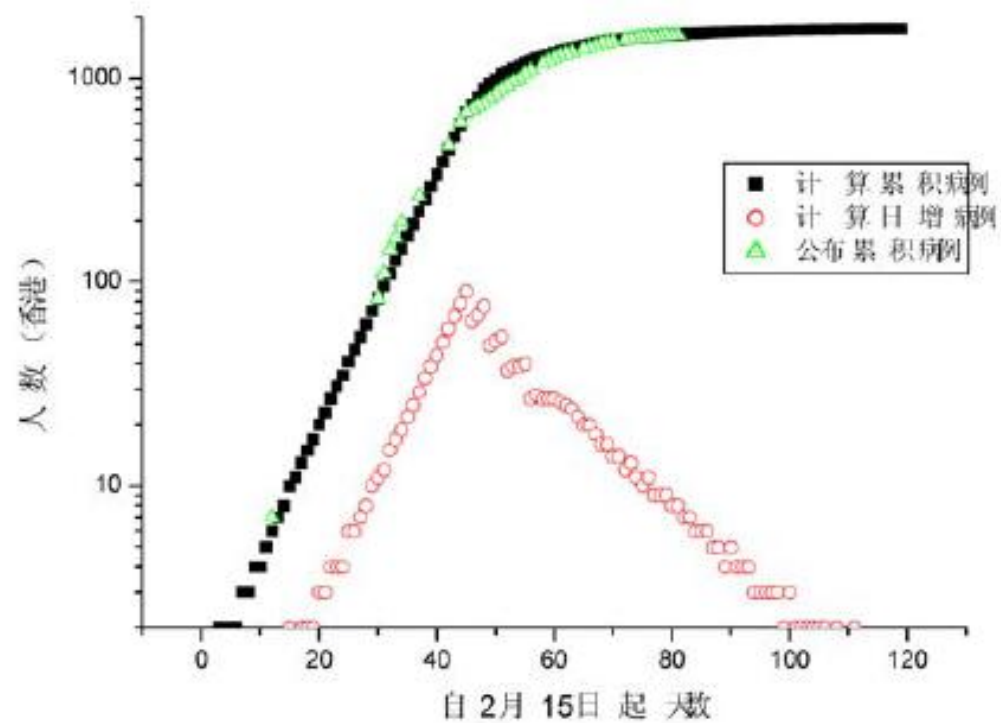
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

## 第一问（1）对附件1所提供的一个早期的模型，评价其合理性和实用性。



- 假定初始时刻的病例数为 $N_0$ ，平均每病人每天可传染 $K$ 个人（ $K$ 一般为小数），平均每个病人可以直接感染他人的时间为 $L$ 天。则在 $L$ 天之内，病例数目的增长随时间 $t$ (单位天)的关系是：
- $N(t) = N_0(1+K)^t$
- 如果不考虑对传染期的限制，则病例数将按照指数规律增长。考虑传染期限 $L$ 的作用后，变化将显著偏离指数律，增长速度会放慢。我们采用半模拟循环计算的办法，把到达 $L$ 天的病例从可以引发直接传染的基数中去掉。

# 对香港疫情的拟合





# 评价

## 一、优点

- 对北京、广东与香港的疫情进行了分析比较，预测值与实际统计较接近；
- 简单明了地反映了疾病的传播过程，抓住了SARS传播过程中两个主要特征：传染期 $L$ 和传染率 $K$ ；
- 模型特别简单、计算量小，容易理解和使用；
- 模型的灵活性在于可以对参数进行挑选。

## 二、缺点

- 指数变化的趋势作为长期预测不合理。
- 如何确定参数值缺乏一般的原则或算法；

**第二问** 建立你们自己的模型，说明为什么优于附件1中的模型；特别要说明怎样才能建立一个真正能够预测以及能为预防和控制提供可靠、足够的信息的模型，这样做的困难在哪里？对于卫生部门所采取的措施做出评论，如：提前或延后5天采取严格的隔离措施，对疫情传播所造成的影响做出估计。

**思路：在SIR模型的基础上进行改进**

**假设：**

1. 单位时间内感染的人数与现有的感染者成比例；
2. 单位时间内治愈人数与现有感染者成比例；
3. 单位时间内死亡人数与现有感染者成比例；
4. SARS患者治愈恢复后不再被感染；
5. 各类人口的自然死亡可以忽略；
6. 忽略迁移的影响。

## 改进

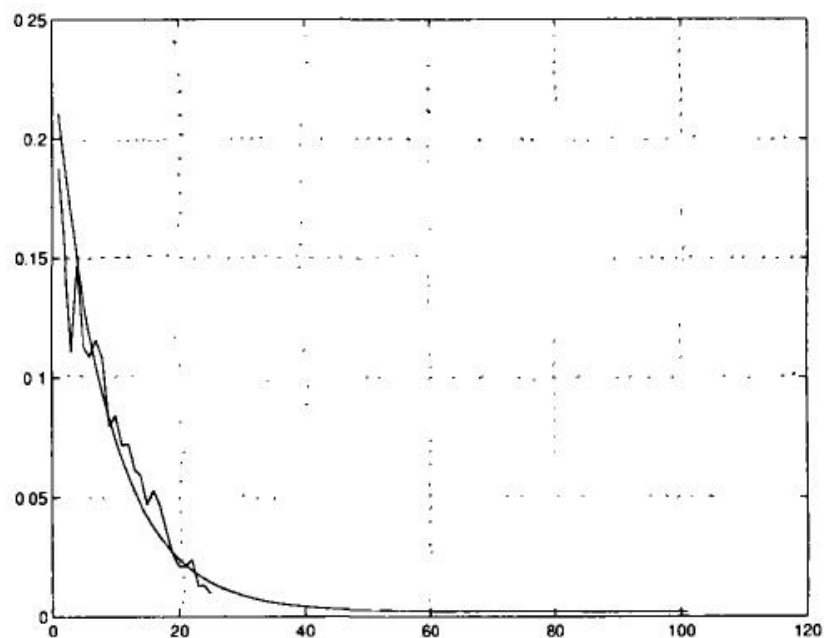


$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \lambda s(t)i(t) - (\mu + \nu)i(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\lambda s(t)i(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = \mu i(t) \end{cases}$$

$$i(t+1) = i(t) + \lambda(t)i(t) - (\mu(t) + \nu(t))i(t), \quad i(0) > 0$$

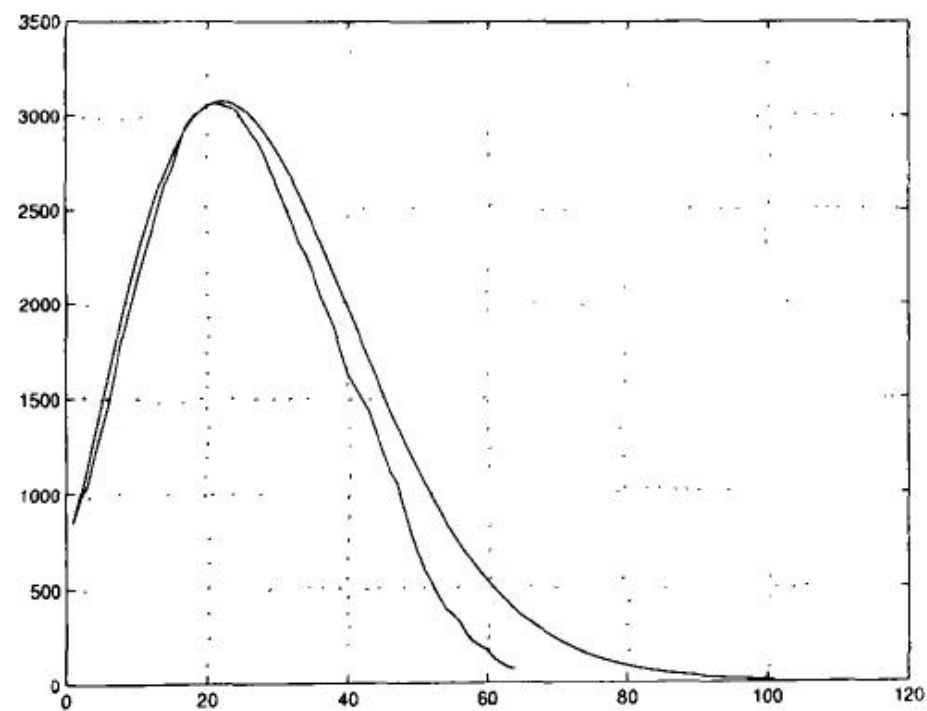
## 传染率函数的计算

含义是每天每个SARS感染者传染的人数，其确定的原则是：  
当天新增病人数除以当天病人数，再进行曲线拟合即可。



用指数曲线  $\lambda(t) = ae^{-bt}$  对其进行回归拟合得到表达式

# 感染者人数随时间变化的关系



# 常微分方程的MATLAB解法



- dsolve 求解析解
- ODE函数求数值解



1917-2017

100th Anniversary  
Shanghai University of Finance and Economics  
上海财经大学 100周年校庆

谢谢!  
Thank You

