第七章 微分方程

邹秋云
软件与物联网工程学院

第七章 重积分

7.1 微分方程的基本概念

- 微分方程的基本概念

微分方程的基本概念

例1 一曲线通过点 $(1,2)$，且在该曲线上任一点 M(x,y) 处的切线的斜率为 $2x$ ，求这曲线的方程。

解：设所求曲线的方程为 $y=\varphi(x)$。根据导数的几何意义，可知未知函数 $y=\varphi(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$

此外，未知函数 $y=\varphi(x)$ 还应满足 $2=\varphi(1)$ 。对上式积分可得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y=x^2+C \qquad \text{（通解）}$$

代入点 $(1,2)$，可得 $C=1$，于是

$$y=x^2+1 \qquad \text{（特解）}$$

例2 列车在平直线路上以 20 m/s（相当于 72 km/h）的速度行驶；当制动时列车获得加速度 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$。问开始制动后多少时间列车才能停住以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解：设列车在开始制动后 t s 性质了 s m。根据题意，反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应该满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$$

此外还需满足 $t=0$ 时，$s=0$，$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20$。于是

$$v=\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t=-0.4t+C_1$$

再次积分可得

$$s=\int v\mathrm{d}t=-0.2t^2+C_1 t+C_2$$

当 $t=0$ 时，有 $s=0$，$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20$，代入可得

$$C_1=20,\ C_2=0$$

于是

$$\begin{aligned} v &= -0.4t+20 \\ s &= -0.2t^2+20t \end{aligned}$$

微分方程的定义

定义1　含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为**微分方程**（differential equation），其中出现的导数的**最高阶** n，称为微分方程的**阶**（order）。

练习1：判别下列微分方程的阶数

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x$　　(2) $x\mathrm{d}x - y^2\mathrm{d}y = 0$　　(3) $y'' + y' = e^x$

微分方程的通解与特解

定义1　若函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上具有 n 阶偏导数，若在区间 I 上恒有

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

则称 $y=\varphi(x)$ 为微分方程在区间 I 的解：

- 若微分方程的解含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称这样的解为微分方程的通解。
- 确定了通解中的任意常数后，所得的解称为微分方程的特解。

例3 验证：函数

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{R$_1$}$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$$

的解。

解：求出所给函数 (R_1) 的导数

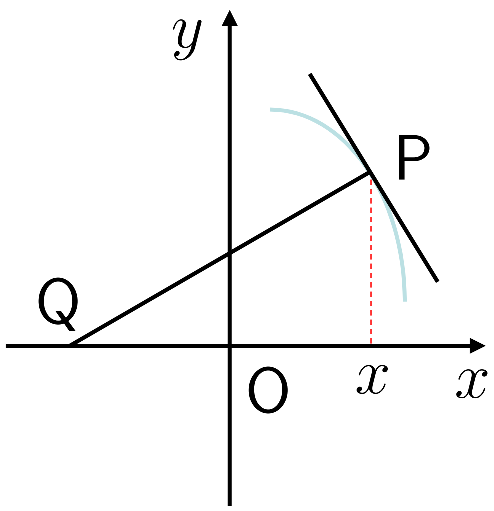
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt \\
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt \\
&= -k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt)
\end{aligned}$$

复习与提高

题1：已知曲线上点 P(x,y) 处法线与 x 轴的交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分，求满足的微分方程。

解：如图所示，点 P(x,y) 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$



令 $Y=0$，得 Q 的横坐标

$$X=x+yy'$$

故

$$x+yy'=-x \quad \Rightarrow \quad yy'+2x=0$$

作业

7-1节：第 2题(4)，第3题(2)，第4题(3)，第6题

7.2 可分离变量的微分方程

- 可分离变量的微分方程

一阶微分方程

定义1 一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0$$

对应初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$。

在这一章中，我们将研究 3 种一阶微分方程

- 可分离变量微分方程
- 齐次微分方程
- 一阶线性微分方程

可分离变量微分方程

定义2　形如

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \qquad ①$$

的方程称可分离变量微分方程。

设 $y=\varphi(x)$ 是上述方程的解，则有 $\mathrm{d}y=\varphi'(x)\mathrm{d}x$，即

$$g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$$

上式两端积分可得 $\underbrace{\int g(y)\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\mathrm{d}x}_{F(x)}$

则有 $G(y)=F(x)+C$ 　　②

当 $G(y)$ 和 $F(x)$ 可微且 $G'(y)=g(y)\neq 0$ 时，上述过程可逆，说明 ② 确定的函数 $y=\Phi(x)$ 是 ① 的解。

同样，当 $F'(x)=f(x)\neq 0$ 时，由 ② 确定的函数 $x=\varphi(y)$，也是的解。

例1 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$$

的通解。

解：方程分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x$$

两端分别积分

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int 2x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ \ln|y| = x^2 + C_1$$

故 $y = \pm e^{x^2+C_1} = \pm e^{C_1}e^{x^2}$，又 $y \equiv 0$ 也是方程的解，故可得通解为

$$y = Ce^{x^2}$$

练习1 求微分方程 $(1+y)\mathrm{d}x-(1-x)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

解：

$$(1+y)\mathrm{d}x=(1-x)\mathrm{d}y$$

若 $y\neq -1, x=1$ 有

$$\frac{1}{1+y}\mathrm{d}y=\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$\ln|1+y|=-\ln|1-x|+C_1$$

$$e^{|(1+y)(1-x)|}=e^{C_1}$$

$$(1+y)(1-x)=C$$

例2 求微分方程

$$y' = -\frac{x}{y}$$

在初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 下的特解。

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x \\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \\
\Rightarrow\quad & x^2 + y^2 = 2C
\end{aligned}$$

代入初值条件得 $C = \frac{1}{2}$，故

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{或} \qquad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

练习2 求微分方程

$$\frac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\frac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 下的特解。

解：

$$\frac{x}{1+y}\mathrm{d}x=\frac{y}{1+x}\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\quad x(1+x)\mathrm{d}x=y(1+y)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+C$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{5}{6}$$

复习与提高

题1： 求方程

$$xy\mathrm{d}x + \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y = 0$$

的通解。

解：

$$\begin{aligned}
& xy\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y \\
\Rightarrow\quad & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{y}\mathrm{d}y \\
\Rightarrow\quad & -\sqrt{1-x^2} + C_1 = -\ln|y| + C_2 \\
\Rightarrow\quad & \ln|y| = \sqrt{1-x^2} + C \\
\Rightarrow\quad & y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

作业

7-2节： 第1题(5)， 第2题(4)， 第4题， 第6题

7.3 齐次微分方程

- 齐次方程

齐次方程

定义1 如果一阶微分方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式，那么称这个方程为齐次（homogeneous）方程。

Example:

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-2y}{x+y} \qquad (2)\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy-x^2}$$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\dfrac{y}{x})$；

2 换元：令 $v = \dfrac{y}{x}$，则 $y = xv$，从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v$$

代入原方程得到

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$$

3 分离变量：得到 $\dfrac{\mathrm{d}v}{f(v) - v} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$；

4 两边积分：得到通解，然后将 v 代回。

例1 求 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解。

解：原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$$

因此该方程为齐次方程。令 $u=y/x$，则

$$y=xu,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1}\quad\Rightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1}$$

分离变量得

$$(1-\frac{1}{u})\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两端积分可得

$$u-\ln|u|+C_1=\ln|x|$$

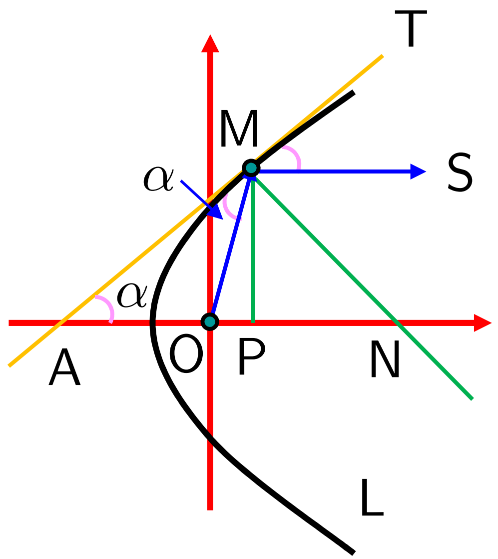
或写为

$$\ln|xu|=u+C_1$$

以 $\dfrac{y}{x}$ 代入上式中的 u，便得到所给方程的通解为

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C_1 \quad \text{或} \quad y=Ce^{\frac{y}{x}}\ (C=\pm e^{C_1})$$

例2 探照灯的聚光镜的镜面是一张旋转曲面，它的形状由 $x\text{O}y$ 坐标面上的一条曲线 L 绕 x 轴旋转而成。按聚光镜性能的要求，在其旋转轴（x 轴）上一点O处发出的一切光线，经它反射后都与旋转轴平行。求曲线 L 的方程。



解：将光源所在点取为坐标原点，且曲线 L 位于 $y \geqslant 0$ 范围内。

由于光的反射定律：

$$\angle \text{AMO} = \angle \text{TMS} = \alpha$$

从而 $\text{AO} = \text{OM}$。而

$$\text{AO} = \text{AP} - \text{OP} = \text{PM} \cot \alpha - \text{OP} = \frac{y}{y'} - x$$

而$\text{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$，于是得微分方程

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

利用曲线的对称性，不凡假设 $y > 0$ 于是方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$$

令 $\dfrac{x}{y} = v$，则 $x = yv$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = v + y\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$，代入上式可得

$$v + y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = v + \sqrt{v^2 + 1}$$

即 $y\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \sqrt{v^2+1}$。分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+1}} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$。积分得

$$\ln(v + \sqrt{v^2+1}) = \ln y - \ln C \quad 或 \quad v + \sqrt{v^2+1} = \frac{y}{C}$$

于是 $\dfrac{y^2}{C^2} - \dfrac{2yv}{C} = 1$，代入 $yv = x$，得

$$y^2 = 2C(x + \frac{C}{2})$$

复习与提高

题1：设有连接点 O$(0,0)$ 和 A$(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{\mathrm{OA}}$，对于 $\overset{\frown}{\mathrm{OA}}$ 上任一点 P(x,y)，曲线弧 $\overset{\frown}{\mathrm{OP}}$ 与直线段 $\overline{\mathrm{OP}}$ 所围的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{\mathrm{OA}}$ 的方程。

解：设曲线弧的方程为 $y=y(x)$。依题意，有

$$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy(x)=x^2$$

上式两端求导可得：

$$y(x)-\frac{1}{2}y(x)-\frac{1}{2}xy'(x)=2x$$

即微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}-4$ 。

令 $u=\dfrac{y}{x}$，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则微分方程为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{4}{x}$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{4}{x}$$

上式两端积分可得

$$u = -4\ln x + C$$

又因为曲线过点 A$(1,1)$，故 $1 = C$，于是的曲线弧的方程

$$y = x(1 - 4\ln x)$$

作业

7-3节： 第1题(6)， 第2题(3)

7.4 一阶线性微分方程

- 线性方程

一阶线性微分方程

定义1　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

称为**一阶线性微分方程**，因为它对未知函数 y 及其导数是一次方程。若 $Q(x)=0$，则方程是**齐次的**，若 $Q(x)\neq 0$ ，则方程是**非齐次的**。

Example:

（1）　$y'+xy=x^2$　　✓

（2）　$y'+y^2=\sin x$　　×

（3）　$yy'+xy=1$　　×

一阶线性齐次微分方程

➢ 先求齐次方程的解

$$y' + P(x)y = 0$$

分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$$

两端同时积分，得到

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_0$$

消去对数，得到通解为（其中 $C = \pm e^{C_0}$ ）

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

➢ 常数变易法求非齐次方程的解

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \xrightarrow{u(x)=C} y = ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - uP(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

将上两式代入 $y' + P(x)y = Q(x)$，可得

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - uP(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

即 $u' = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$。 两端积分可得

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = \underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次特解}}$$

例1 求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解。

解：先求对应的齐次方程的通解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x+1}y=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}x}{x+1}$$

$$\Rightarrow\ \ln|y|=2\ln|x+1|+C_1$$

$$\Rightarrow\ y=C(x+1)^2\quad(C=\pm e^{C_1})$$

用常数变易法，把 C 换成 u ，即令

$$y=u(x+1)^2$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'(x+1)^2+2u(x+1)$$

代入非齐次方程，得

$$u' = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

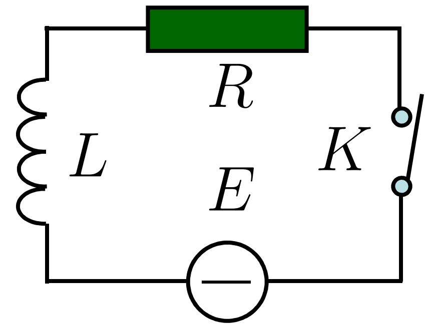
两端积分得

$$u = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

于是

$$y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right]$$

例2 有一电路如图所示，其中电源电动势为 $E=E_m\sin\omega t$，电阻 R 和电感 L 都是常量，求电流 $i(t)$。



解：（1）列方程。由回路电压定律

在闭合回路中，所有支路上的电压降为 0。

已知经过电阻 R 的压降为 $R\cdot i$，经过电感的压降为 $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，因此

$$E-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-Ri=0$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{R}{L}i=\dfrac{E_m\sin\omega t}{L}$。初始条件为 $i|_{t=0}=0$。

（2）解方程组

$$\begin{aligned}i(t)&=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int\frac{E_m}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin wt\mathrm{d}t+C\right)\\&=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+Ce^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}$$

$$i(t)=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

代入初值条件 $i|_{t=0}=0$，得：$C=\dfrac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}$

因此所求电流函数

$$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

令 $\varphi=\arctan\dfrac{\omega L}{R}$，则

$$i(t)=\underbrace{\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{暂态电流}}+\underbrace{\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)}_{\text{稳态电流}}$$

例3 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$。

解：将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+y$$

采用一阶线性方程的解法，有 $P(y)=-1,Q(y)=y$，则

$$\begin{aligned}x&=Ce^{\int \mathrm{d}y}+e^{\int \mathrm{d}y}\int ye^{-\int \mathrm{d}y}\mathrm{d}y\\&=Ce^{y}+e^{y}\int ye^{-y}\mathrm{d}y\\&=Ce^{y}-y-1\end{aligned}$$

复习与提高

题1：求一连续可导函数 $f(x)$，使其满足下列方程

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$$

解：令 $u=x-t$，则

$$f(x)=\sin x+\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=\sin x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

则有

$$\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$$

利用公式可得

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$

题2：设有微分方程 $y' + y = f(x)$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

试求次方程满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的连续解。

解：（1）先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式，可得

$$y = e^{-\int \mathrm{d}x} \left(\int 2e^{\int \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_1 \right) = e^{-x} \left(2e^{x} + C_1 \right)$$
$$= 2 + C_1 e^{-x}$$

利用 $y|_{x=0} = 0$，得 $C_1 = -2$。故有

$$y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

（2）再解定问题 $\begin{cases} y' + y = 0,\ y > 1 \\ y|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2 e^{-x}\ (x \geqslant 1)$ 。

利用初始条件得 $C_2 = 2(e-1)$。

因此有 $y = 2(e-1)e^{-x}\ (x \geqslant 1)$ 。

（3）原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1-e^{-x}) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2(e-1)e^{-x} & x \geqslant 1 \end{cases}$$

作业

7-4节： 第1题(9)， 第2题(5)， 第6题， 第7题(5)

7.5 可降阶的高阶微分方程

- $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程
- $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程
- $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

$$y^{(n)} = f(x)$$

逐次积分：

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1 \\
\Rightarrow \quad & y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)\mathrm{d}x + C_1 \right] + C_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\Rightarrow \quad & y = \int \cdots \int \left[\int f(x)\mathrm{d}x + C_1 \right] \cdots + C_n
\end{aligned}$$

例1 求微分方程

$$y''' = e^{2x} - \cos x$$

的通解。

解：对所给方程逐次积分

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C$$

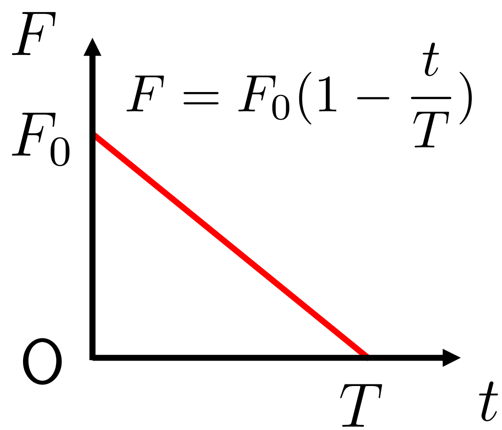
$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + Cx + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{C}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

例2 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 x 轴做直线运动，设力 $F=F(t)$ 在开始时刻 $t=0$ 时 $F(0)=F_0$ ，随着时间 t 的增大，力 F 均匀地减小，直到 $t=T$ 时，$F(T)=0$ 。如果开始时质点位于原点，且初速度为零，求质点运动规律。

解：依题意有

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F(t)=F_0(1-\frac{t}{T}) \\ x\big|_{t=0}=0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$



对方程两边积分得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})+C_1$$

利用初始条件 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}=0$，得 $C_1=0$，于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}(t-\frac{t^2}{2T})$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{m}(t - \frac{t^2}{2T})$$

两边再积分得

$$x = \frac{F_0}{m}(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{6T}) + C_2$$

再利用 $x|_{t=0} = 0$，得 $C_2 = 0$，故所求质点运动规律为

$$x = \frac{F_0}{2m}(t^2 - \frac{t^3}{3T})$$

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$。原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$，则 $y' = \varphi(x, C_1)$。再一次积分，得

$$y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

例3 求微分方程

$$(1+x^2)y''=2xy'$$

满足初值条件 $y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解：设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$，即 $p=C_1(1+x^2)$。

利用 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$。 于是有 $y'=3(1+x^2)$。

两端积分得

$$y=x^3+3x+C_2$$

利用 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$。因此所求特解为

$$y=x^3+3x+1$$

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p(y)$，则 $y'' = p'$，则

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

故方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$，即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分，得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例4 求微分方程

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

的通解。

解：设 $y' = p(y)$，则

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

代入方程得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + C_1$，即 $p = C_1 y$。

$$\therefore \quad y' = C_1 y \qquad \text{（一阶线性齐次方程）}$$

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$ 。

复习与提高

练习： 求 $y''=3\sqrt{y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$ 的特解。

解： 令 $p=y'$，则 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，即

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=3\sqrt{y}$$

分离变量可得 $p\mathrm{d}p=3\sqrt{y}\mathrm{d}y$，两边积分可得

$$\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+C$$

代入初始条件 $y=1, p=y'=2$，可得 $C=0$。

$$p^2=4y^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y^{\frac{3}{4}}$$

分离变量并代入初值可得

$$y^{\frac{1}{4}} = \frac{x}{2} + 1$$

作业

7-5节： 第1题(10)， 第3题(6)， 第4题， 第5题

7.6 高阶线性微分方程

- 二阶线性微分方程举例
- 线性微分方程的解的结构

二阶线性微分方程举例

定义1　形如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

- 若 $f(x) = 0$，称为二阶齐次线性微分方程。
- 若 $f(x) \neq 0$，称为二阶非齐次线性微分方程。

二阶线性微分方程举例

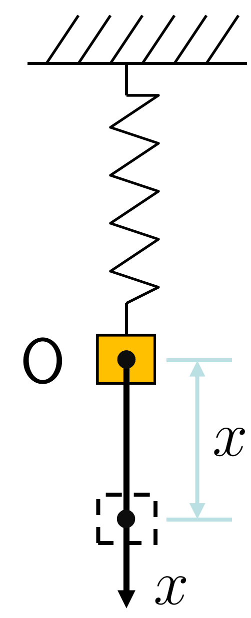
例1 质量为m的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上，当重力与弹力抵消时，物体处于平衡状态。若用手向下拉物体使它离开平衡位置后放开，物体在弹性力与阻力作用下往复运动，阻力的大小与运动速度成正比，方向相反。建立唯一满足的微分方程。

解：取平衡时物体的位置为坐标原点，建立坐标系。设时刻 t 物体位移为 $x(t)$

（1）自由振动情况，物体所受的力有

弹性恢复力：$f=-cx$ （胡克定律）

阻力：$R=-\mu\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$



根据牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-cx-\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

令 $2n=\dfrac{\mu}{m}$，$k^2=\dfrac{c}{m}$，则得阻尼自由振动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$$

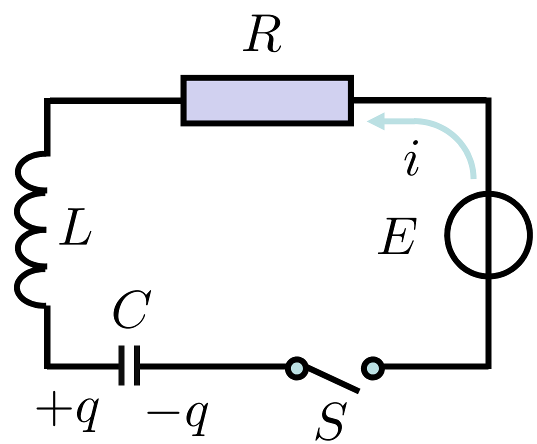
（2）强迫振动情况。

若物体在运动过程中还受铅直外力 $F=H\sin pt$ 作用，令 $h=H/m$，则得强迫振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=h\sin pt$$

二阶线性微分方程举例

例2 设有一个电阻 R，自感 L，电容 C 和电源 E 串联组成得电路，其中 R, L, C 为常数，$E = E_m \sin \omega t$ ，求电容器两极板间电压 u_C 所满足的微分方程。



解： 设电路中的电流为 $i(t)$，电容器极板上的电荷量为 $q(t)$ ，自感电动势为 E_L ，由电学可知

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \quad u_C = \frac{q}{C}, \quad E_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

根据回路电压定律，得

$$E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} - Ri = 0$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E_m \sin \omega t$$

$$LC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=E_m\sin\omega t$$

令 $\beta=\frac{R}{2L}$, $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，故有

$$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u_C=\frac{E_m}{LC}\sin\omega t$$

如果电容充电后撤去电源（ $E=0$ ），则得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u_C=0$$

线性微分方程的解的结构

✓ 齐次方程

定理1　若函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解，则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ （C_1, C_2 为任意常数 ）也是该方程的解。（叠加原理）

证：将 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 代入方程，有

$$\begin{aligned}&[C_1y_1'' + C_2y_2''] + P(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] + Q(x)[C_1y_1 + C_2y_2]\\ =\ & C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]\\ =\ & 0\end{aligned}$$

标注：

若函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 不一定是该方程的通解。

Example: $y_2(x) = 2y_1(x)$

$$y = (C_1 + 2)y_1(x) = Cy_1(x)$$

为解决通解的判别问题，下面引入函数的线性相关与线性无关概念。

线性相关与线性无关

定义1　设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上线性相关，否则称为线性无关。

Example: $1,\ \cos^2 x,\ \sin^2 x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有

$$1 - \cos x - \sin x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都线性相关。

Example: $1,\ x,\ x^2$ 在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$ 。根据二次多项式至多有两个零点，可见 k_1, k_2, k_3 必须全为 0，故它们在任何区间 I 上都线性无关。

定理2 如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个特解，那么 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ （C_1, C_2 是任意常数）就是方程的通解。

推论 如果 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解，那么齐次方程的通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

定理3　设 $y^*(x)$是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

的一个特解。$Y(x)$是其齐次方程的通解，则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是该二阶非齐次线性方程的通解。

证：将通解代入原方程

$$\begin{aligned}
&[Y''(x) + (y^*(x))''] + P(x)[Y'(x) + (y^*(x))'] \\
&\quad + Q(x)[Y(x) + y^*(x)] \\
&= [Y''(x) + P(x)Y' + Q(x)Y] \\
&\quad +[(y^*(x))'' + P(x)(y^*(x))' + Q(x)y^*] \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

定理4（叠加原理） 假设 $f_1^*(x), f_2^*(x)$ 分别是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $f_1^*(x) + f_2^*(x)$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解。

证： 将 $y = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 代入方程有

$$(y_1^* + y_2^*)'' + P(x)(y_1^* + y_2^*)' + Q(x)(y_1^* + y_2^*)$$

$$= [y_1^{*\prime\prime} + P(x)y_1^{*\prime} + Q(x)y_1^*] + [y_2^{*\prime\prime} + P(x)y_2^{*\prime} + Q(x)y_2^*]$$

$$= f_1(x) + f_2(x)$$

题1：设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解为（ B ）

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

题2：设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解，C_1, C_2 为任意常数，则该方程的通解为（ D ）

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$

(B) $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

作业

7-6节：第1题(7)，第3题，第4题(5)

7.7 常系数齐次线性微分方程

- 常系数齐次线性微分方程

常系数齐次线性微分方程

定义1　在二阶齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

中，如果 y', y 的常数 $P(x), Q(x)$ 均为常数，即

$$y'' + py' + qy = 0$$

其中 p, q 是常数，那么称上述方程二阶常系数齐次线性微分方程。若 p, q 不全为常数，则称该方程为二阶变系数齐次线性微分方程。

二阶常系数齐次线性微分方程解法

求二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

的通解的步骤如下：

1. 写出微分方程的特征方程：$r^2 + pr + q = 0$；
2. 求出特征方程的两个根 r_1, r_2；
3. 根据特征方程的两个根的不同情况，按照表格列出通解。

特征方程两根 r_1, r_2	微分方程的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

推导过程

$$y'' + py' + qy = 0$$

由于当 r 为常数时，函数 e^{rx} 和它的导数之相差常数因子，故令该齐次方程的解为 $y = e^{rx}$（ r 为待定常数），则

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + pr + q = 0 \qquad \text{（特征方程）}$$

特征方程的根称为特征根：

（1）当 $p^2 - 4q > 0$时。特征方程有两个相异的实根 r_1, r_2，则微分方程有两个线性无关的特解：$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$。因此方程的通解为：$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$。

（2）当 $p^2-4q=0$ 时。特征方程有两个相等的实根 $r_1=r_2$

则微分方程有一个特解：$y_1=e^{r_1x}$。

设另一特解：$y_2=y_1u(x)=e^{r_1x}u(x)$，代入方程

$$y''+py'+qy=0$$

$$\Big\downarrow \quad y_2=e^{r_1x}u(x)$$

$$e^{r_1x}[(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu]=0$$

$$u''+\underbrace{(2r_1+p)}_{=0}u'+\underbrace{(r_1^2+pr_1+q)}_{=0}u=0$$

$$\Big\downarrow$$

$$u''=0$$

取 $u=x$，则得 $y_2=xe^{r_1x}$，因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$$

（3）当 $p^2-4q<0$ 时。特征方程有一对共轭的复根

$$r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$$

此时原方程有两个复数解：

$$y_1=e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x)$$
$$y_2=e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理，得原方程的线性无关特解：

$$y_1^*=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2^*=\frac{1}{2}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

例1 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解

解：所给微分方程的特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

其根 $r_1 = -1, r_2 = 3$ 是两个不相等的实根，因此所求通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

例2 求方程 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s=0$，满足初值条件 $s|_{t=0}=4$，$s'|_{t=0}=-2$ 的特解。

解：所给方程的特征方程为

$$r^2+2r+1=0$$

其根 $r_1=r_2=-1$ 是两个相等的实根，因此所求微分方程的通解为

$$s=(C_1+C_2 t)e^{-t}$$

将条件 $s|_{t=0}=4$ 代入通解，得 $C_1=4$，从而

$$s=(4+C_2 t)e^{-t}$$

将上式对 t 求导，得

$$s'=(C_2-4-C_2 t)e^{-t}$$

在把条件 $s'|_{t=0}=-2$ 代入上式，于是所求特解为

$$s=(4+2t)e^{-t}$$

例3 求微分方程 $y'' - 2y' + 5 = 0$ 的通解。

解：所给方程的特征方程为

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

其根 $r_{1,2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$ 为一对共轭复根，因此所求通解为

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

多阶常系数齐次线性微分方程

推广：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad （ a_k \text{ 均为常数}）$$

特征方程：$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$ 。

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$	$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k 重实根 r	$e^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathrm{i}$	$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x$ $+(D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

例6 求微分方程 $y^{(4)}-2y^{(3)}+5y^{(2)}=0$ 的通解。

解：这里的特征方程为

$$r^4-2r^3+5r^2=0$$

即

$$r^3(r^2-2r+5)=0$$

它的根是 $r_1=r_2=0$ 和 $r_{3,4}=1\pm 2\mathrm{i}$ 。因此所给微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

例7 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}+\beta^4 w=0$ 的通解，其中 $\beta>0$ 。

解：这里的特征方程为

$$r^4+\beta^4=0$$

由于

$$\begin{aligned} r^4+\beta^4 &= r^4+2r^2\beta^2+\beta^4-2r^2\beta^2 \\ &= (r^2-\sqrt{2}\beta r+\beta^2)(r^2+\sqrt{2}\beta r+\beta^2) \end{aligned}$$

所以特征方程可以写为

$$(r^2-\sqrt{2}\beta r+\beta^2)(r^2+\sqrt{2}\beta r+\beta^2)=0$$

它的根为 $r_{1,2}=\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm \mathrm{i})$，$r_{3,4}=\dfrac{-\beta}{\sqrt{2}}(1\pm \mathrm{i})$，因此所给方程的通解为

$$\begin{aligned} w = {} & e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right) \\ & +e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right) \end{aligned}$$

复习与提高

题1：求微分方程 $y'' + ay = 0$ 的通解

解：该方程的特征方程为 $r^2 + a = 0$。

- 当 $a > 0$ 时，$r = \pm \mathrm{i}\sqrt{a}$，此时微分方程的通解为

$$y = C_1 \cos \sqrt{a} x + C_2 \sin \sqrt{a} x$$

- 当 $a = 0$ 时，$r = 0$ 为重根，此时通解为

$$y = C_1 + C_2 x$$

- 当 $a < 0$ 时，$r = \pm\sqrt{a}$，此时通解为

$$y = C_1 e^{\sqrt{a} x} + C_2 e^{-\sqrt{a} x}$$

题2：求一个以 $y_1=e^x$，$y_2=2xe^x$，$y_3=\cos 2x$，$y_4=3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数齐次线性微分方程，并求其通解。

解：根据解的结构可知：$y_1=e^x$，$y_2=2xe^x$ 是对应两个相等的实根 $r_1=r_2=1$。$y_3=\cos 2x$，$y_4=3\sin 2x$ 对应一对共轭复根 $r_{3,4}=\pm 2\mathrm{i}$，故其特征方程为

$$(r-1)^2(r^2+4)=0$$

故方程的通解为

$$(C_1+C_2x)e^x+(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

作业

7-7节：第2题(10)，第3题(3)(6)，第4题

7.8 常系数非齐次线性微分方程

- $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型
- $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_m(x)\sin\omega x]$ 型

$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad （p, q \text{ 均为常数}）$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = \underbrace{Y}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{y^*}_{\text{非齐次方程特解}}$$

求特解的方法：待定系数法。

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 特定形式

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数。

函数$f(x)$的类型：

1 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$

λ 为常数，$P_m(x)$是 x 的 m 次多项式。

2 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda, \omega(\omega \neq 0)$ 为常数，$P_l(x), Q_n(x)$ 分别是 x 的 l 次和 n 次多项式，且仅有一个可为零。

$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型的特解

设特解为 $y^* = e^{\lambda x} Q(x)$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式

$$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda Q(x) + Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)]$$

代入原方程，得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

（1）若 λ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$，则取 $Q(x)$ 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解的形式 $y^* = e^{\lambda x} Q_m(x)$。

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

（2）若 λ 是特征方程的单根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0$$

则 $Q'(x)$ 为 m 次多项式，故特解形式为

$$y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$$

（3）若 λ 是特征方程的重根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0$$

则 $Q''(x)$ 是 m 次多项式，故特解形式为

$$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$$

Summary 如果 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$，那么二阶常系数非齐次线性微分方程的特解为：$y=x^kR_m(x)e^{\lambda x}$，其中 k 按 λ 是不是特征方程的根，或重根，取值 0、1、2。

例1 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解。

解：该方程属于 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型（$\lambda=0, P_m(x)=3x+1$）

该方程的齐次方程为 $y''-2y'-3y=0$，对应的特征方程为

$$r^2-2r-3=0$$

由于 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=b_0x+b_1$$

代入原方程可得

$$-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1$$

解上述方程可得：$\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases}$。

于是得特解：$y^*=-x+\dfrac{1}{3}$。

例2 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解。

解：所给方程也是二阶常系数非齐次线性微分方程，且 $f(x)$ 呈 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 型（其中 $\lambda=2, P_m(x)=x$ ）。

与所给方程对应的齐次方程为

$$y''-5y'+6y=0$$

其特征方程为：$r^2-5r+6=0$ 。

有两个实根 $r_1=2, r_2=3$ 。于是原方程的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

由于 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，所以特解为

$$y*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$$

把它代入所给方程得：$-2b_0x+2b_0-b_1=x$ 。故特解为

$y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$ 通解为：$y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}$

$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$ 型

$$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$$

$$\cos\theta = (e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta})/2$$
$$\sin\theta = (e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta})/(2\mathrm{i})$$

$$f(x) = e^{\lambda x}\left(P_l(x)\frac{e^{\mathrm{i}wx} + e^{-\mathrm{i}wx}}{2} + Q_n(x)\frac{e^{\mathrm{i}wx} - e^{-\mathrm{i}wx}}{2\mathrm{i}}\right)$$

$$= \left(\frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2\mathrm{i}}\right)e^{(\lambda+\mathrm{i}w)x} + \left(\frac{P_l}{2} - \frac{Q_n}{2\mathrm{i}}\right)e^{(\lambda-\mathrm{i}w)x}$$

$$= \underbrace{P(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}w)x}}_{P(x) = \frac{P_l}{2} - \frac{Q_n}{2}\mathrm{i}} \quad + \quad \underbrace{\overline{P}(x)e^{(\lambda-\mathrm{i}w)x}}_{\overline{P}(x) = \frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2}\mathrm{i}}$$

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$ 型

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$$

$$f_1(x)=P(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}w)x} \qquad\qquad f_2(x)=\overline{P}(x)e^{(\lambda-\mathrm{i}w)x}$$

对于方程 $y''+py'+qy=f_1(x)$，设其特解为

$$y_1^*=x^kR_m(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}w)x}, \qquad m=\max\{n,l\}$$

对于方程 $y''+py'+qy=f_2(x)$，设其特解为

$$y^*=x^k\overline{R_m}(x)e^{(\lambda-\mathrm{i}w)x} \qquad m=\max\{n,l\}$$

于是 $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解为

$$y^*=x^kR_m(x)e^{(\lambda+\mathrm{i}w)x}+x^k\overline{R_m}(x)e^{(\lambda-\mathrm{i}w)x}$$

$$y^* = x^k R_m(x) e^{(\lambda+\mathrm{i}w)x} + x^k \overline{R}_m(x) e^{(\lambda-\mathrm{i}w)x}$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left(R_m e^{\mathrm{i}wx} + \overline{R}_m e^{-\mathrm{i}wx}\right)$$

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$
$$e^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m(\cos wx + \mathrm{i}\sin wx) + \overline{R}_m(\cos wx - \mathrm{i}\sin wx)\right]$$

$$R_m = \frac{1}{2}R_m^{(1)}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{i}R_m^{(2)}(x)$$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos wx + R_m^{(2)}(x)\sin wx]$$

其中 k 按照 $\lambda+\mathrm{i}w$ （或 $\lambda-\mathrm{i}w$ ）不是特征根，或是特征方程的单根依次取 0 或 1 。

例3 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解

解：所给方程是二阶常系数非齐次线性方程，且 $f(x)$ 属于 $e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx+Q_n(x)\sin wx]$，其中$\lambda=0, w=2, P_l(x)=x$ $Q_n(x)=0$ 。

该方程对应的齐次方程为

$$y''+y=0$$

其特征方程为

$$r^2+1=0$$

由于 $\lambda+\mathrm{i}w=2i$ 不是特征方程的根，故设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$$

代入原方程可得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a=1 \\ -3b+4c=0 \\ -3c=0 \\ -3d-4a=0 \end{cases}$$

于是求得一个特解为

$$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

例4 求微分方程 $y''-y=e^x\cos 2x$ 的一个特解

解：所给方程是二阶常系数非齐次线性方程，且 $f(x)$ 属于 $e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx+Q_n(x)\sin wx]$，其中 $\lambda=1, w=2, P_l(x)=1$ $Q_n(x)=0$ 。

特征方程为 $r^2-1=0$，由于 $\lambda+\mathrm{i}w=1+2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=e^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

求导得

$$y^{*\prime}=e^x[(a+2b)\cos 2x+(-2a+b)\sin 2x]$$
$$y^{*\prime\prime}=e^x[(-3a+4b)\cos 2x+(-4a-3b)\sin 2x]$$

代入所给方程，得

$$4e^x[(-a+b)\cos 2x-(a+b)\sin 2x]=e^x\cos 2x$$

$$4e^x[(-a+b)\cos 2x-(a+b)\sin 2x]=e^x\cos 2x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a+b=\frac{1}{4}\\ a+b=0\end{cases}$$

解得：$a=-\dfrac{1}{8}$，$b=\dfrac{1}{8}$。故原方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{8}e^x(\sin 2x-\cos 2x)$$

复习与提高

题1：微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$

题2：已知常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y^* = e^{-x}(1 + xe^{2x})$，则（　　）

(A) $a = 0,\ b = 1,\ c = 2$　　(B) $a = 0,\ b = 1,\ c = -2$

(C) $a = 0,\ b = -1,\ c = 2$　　(D) $a = 0,\ b = -1,\ c = -2$

作业

7-8节：第1题(6)，第2题(4)，第3题，第6题

第八章 向量代数与空间解析几何

邹秋云

软件与物联网工程学院

第八章 向量代数与空间解析几何

8.1 向量及其线性运算

8.2 数量积、向量积

8.3 平面及其方程

8.4 空间直线及其方程

8.5 曲面及其方程

8.6 空间曲线及其方程

8.1 向量及其线性运算

- 向量的概念
- 向量的线性运算
- 空间直角坐标系
- 利用坐标作向量的线性运算
- 向量的模、方向角、投影

向量的概念

定义1 既有大小、又有方向的量称为向量

- 向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$；
- 向量的相等：若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小和方向都相等，则称两者相等，记为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$。

定义2 向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$

- 单位向量：模为 1 的向量，常记为 $\boldsymbol{e}$；
- 零向量：模为 0 的向量，记为 $\boldsymbol{0}$。

定义3 若向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}$的方向相同或相反，则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记为$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，或$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$。

- 规定零向量与任何向量都平行

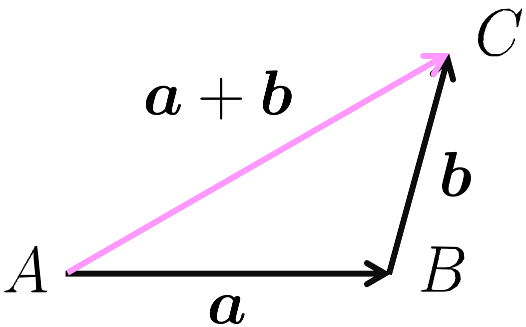
定义4 若两个向量可平移到一条直线上，则称它们共线。

- 两向量平行等于两向量共线。

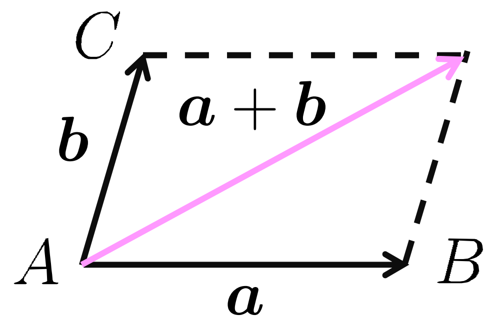
定义5 若三个或更多个向量可平移到一个平面上，则称它们共面。

向量的线性运算

向量的加法



三角形法则



平行四边形法则

性质1 向量的加法满足下列运算定律

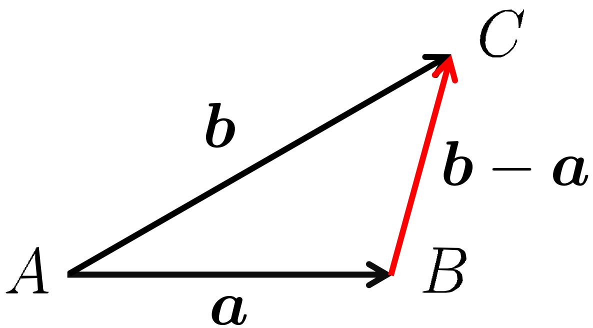
(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （交换律）

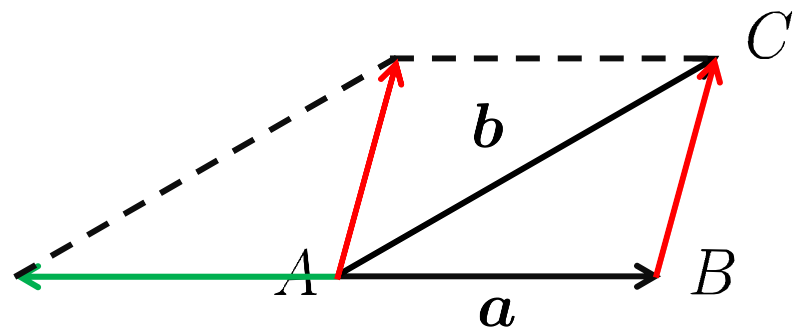
(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （结合律）

向量的减法

与 $\boldsymbol{a}$ 大小相同且方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$

三角形法则：$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$





$$(1) \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$(2) \quad |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$$

$$(3) \quad |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$$

向量的数乘

定义6 数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个新向量，它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$，并且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 。

性质2 向量的数乘满足下列性质

(1) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \mu(\lambda\boldsymbol{a})$ （结合律）

(3) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$（分配律）

定理1 设向量$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是：存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ 。

证：充分性：若存在唯一的实数 λ，使得$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，可知 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同或相反，即使两向量平行。

必要性：设$\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a}$，取$|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时λ取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时λ取负值，即$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$。

再证唯一性，设存在λ, μ，使得

$$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$$

两式相减有

$$\mathbf{0} = (\lambda - \mu)\boldsymbol{a} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \mu$$

例1：在平行四边形$ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$。试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$，其中$M$为平行四边形对角线的交点。

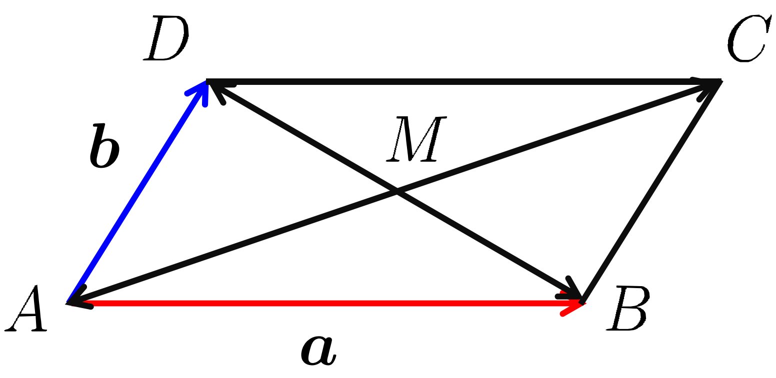
解：

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

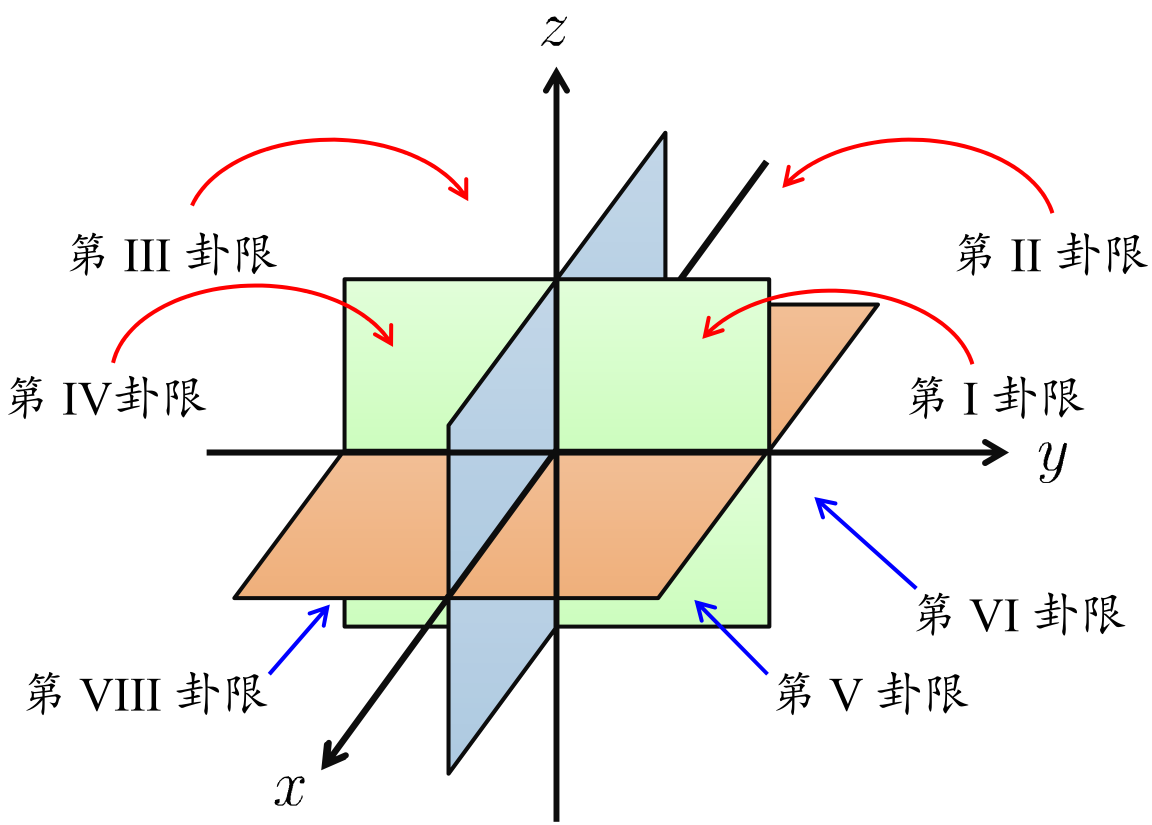
$$\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

$$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$



空间直角坐标系

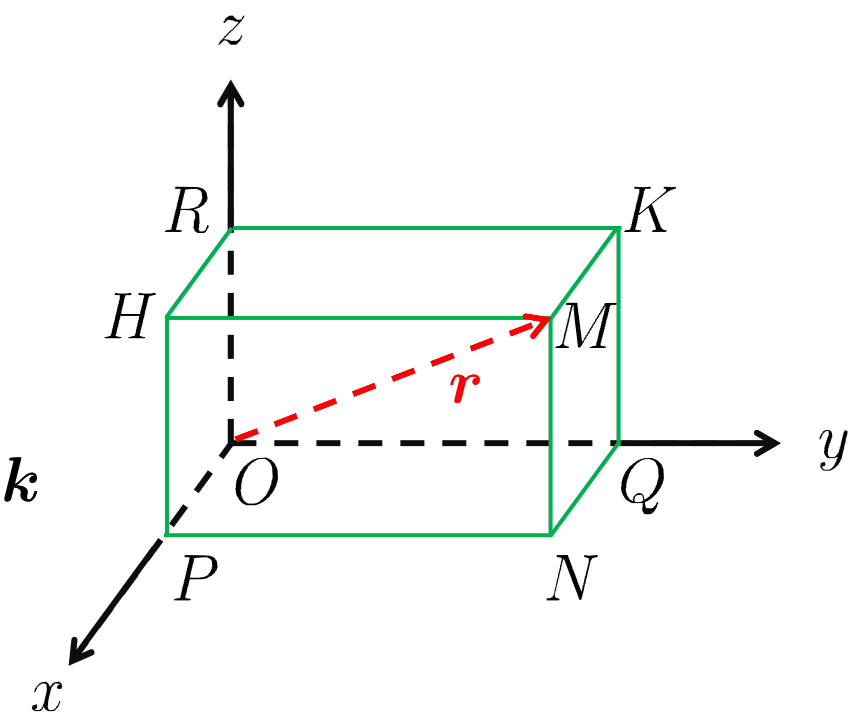
- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



规定三个坐标轴的正方向满足右手规则

任给向量 $\boldsymbol{r}$，有对应点M使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，以$OM$为对角线三条坐标轴为棱做长方体

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$
$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$



设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$

则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$M\longleftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\longleftrightarrow(x,y,z)$$

定义7 有序数x,y,z称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ ，也称点M 的坐标，记作$M(x,y,z)$。

向量的坐标运算

设$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，$\lambda$ 为实数，由向量的坐标分解可得

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

当$\boldsymbol{a} \neq 0$

$$\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a} \;\Leftrightarrow\; \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

两向量平行，它们坐标成比例。

例2：求解以向量为元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \\ 3\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (2,1,2), \boldsymbol{b} = (-1,1,-2)$。

解：如同解以实数为元的线性方程组一样，可解得

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$$

将 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的坐标表达式代入，可得

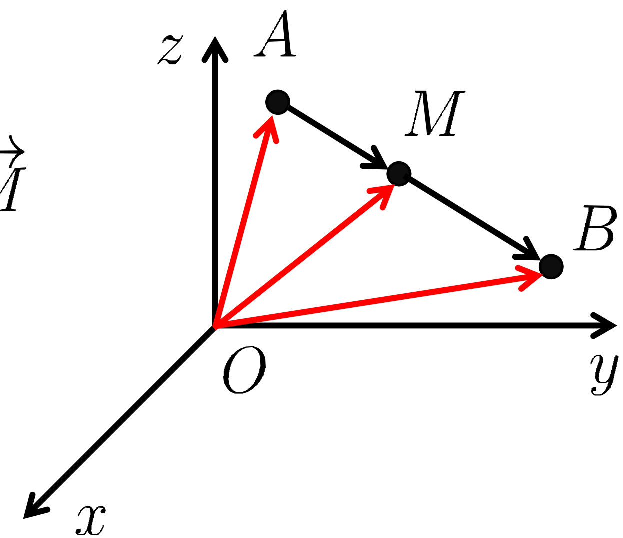
$$\boldsymbol{x} = 2(2,1,2) - 3(-1,1,-2) = (7,-1,10)$$

$$\boldsymbol{y} = 3(2,1,2) - 5(-1,1,-2) = (11,-2,16)$$

例3：已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq 1$，在直线 AB 上求点 M 使得

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$$

解：如图所示



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

因此

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

从而

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB})$$

代入可得

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

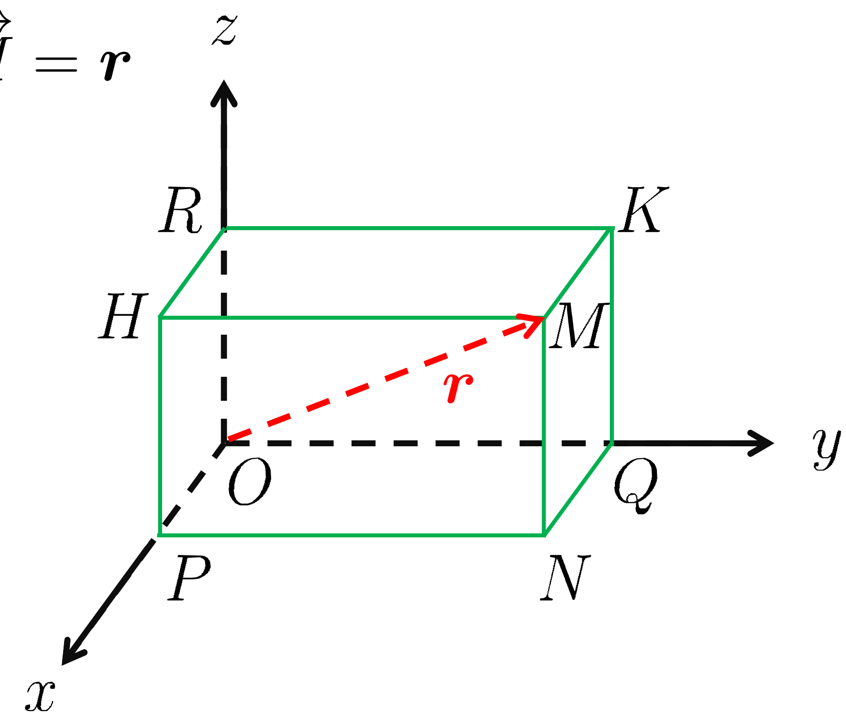
向量的模、方向角、投影

给定向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，假设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

按照勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



定理2 给定点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $|\overrightarrow{AB}|$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例5：求证以 $M_1(4,3,1), M_2(7,1,2), M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形。

解：因为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|M_3M_1| = \sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{6}$$

所以 $|M_2M_2| = |M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形。

例6：已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}$ 。

解：因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2)$$

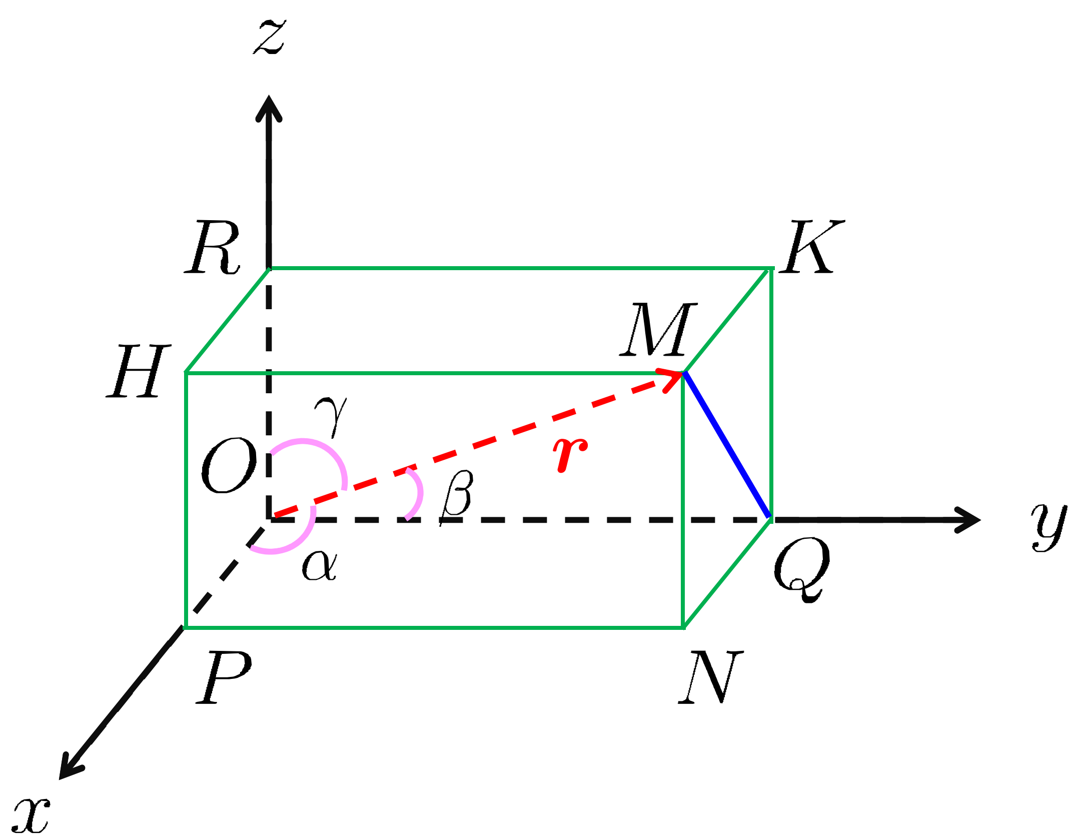
其模值为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

于是

$$\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

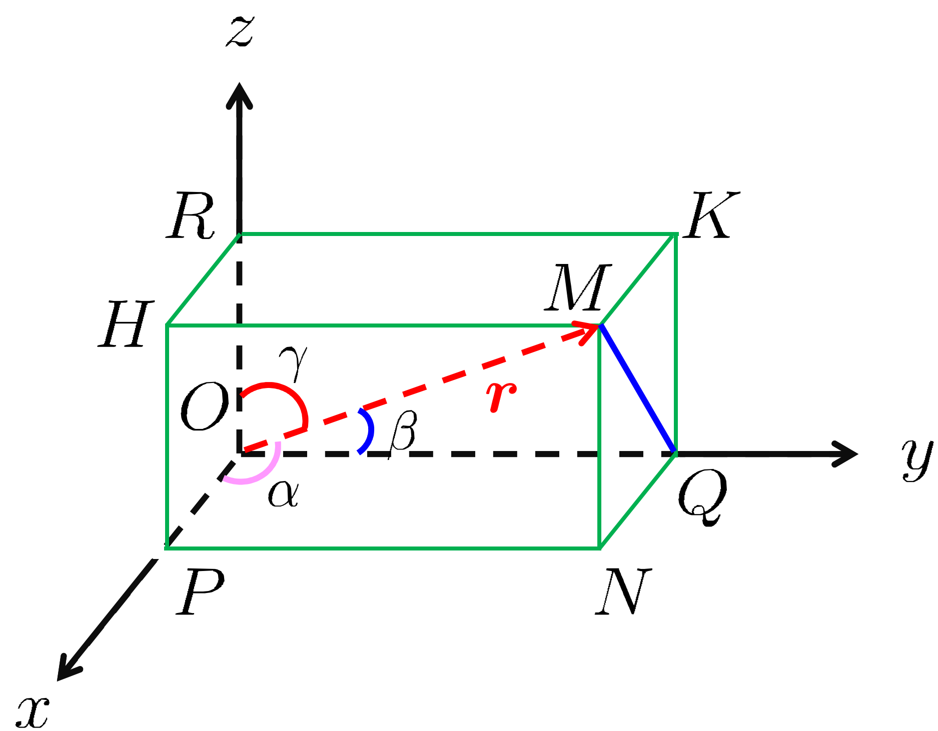
方向角与方向余弦



$$\cos\beta = \frac{y}{|OM|} = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|}$$

同理： $\cos\alpha = \dfrac{x}{|OM|} = \dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|}$ $\quad \cos\gamma = \dfrac{z}{|OM|} = \dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}$

方向余弦的性质



性质1 方向余弦满足一下性质

- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$

例7：已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

解：

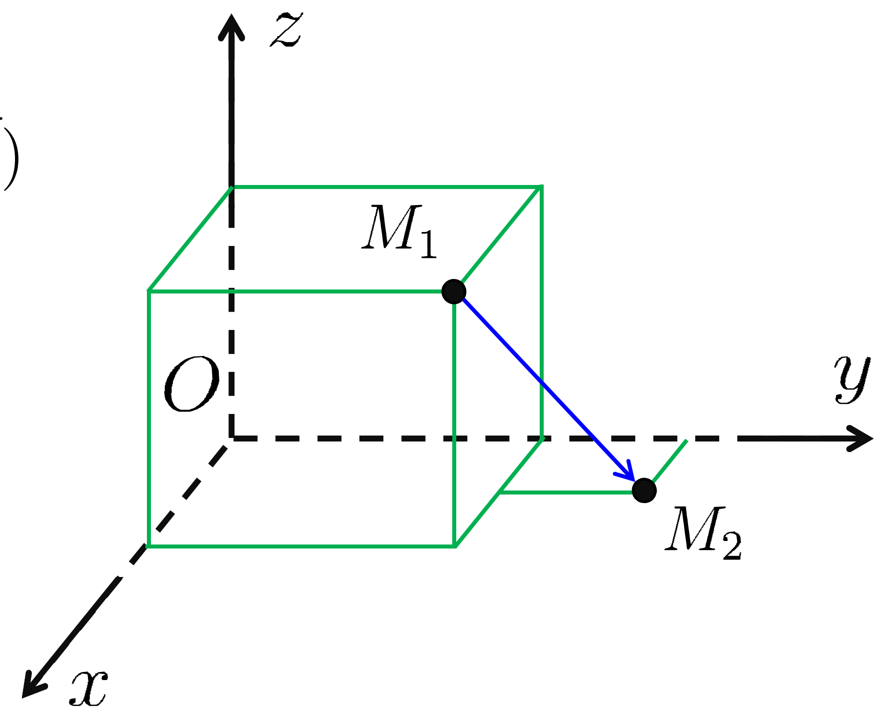
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = 2$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{3\pi}{4}$$



例8：已知点A位于第 I 封限，向量$\overrightarrow{OA}$与x轴、y轴的夹角依次为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$，且$|\overrightarrow{OA}|=6$，求点 A 的坐标。

解：$\alpha=\dfrac{\pi}{3}, \beta=\dfrac{\pi}{4}$。根据关系式 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 得

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$$

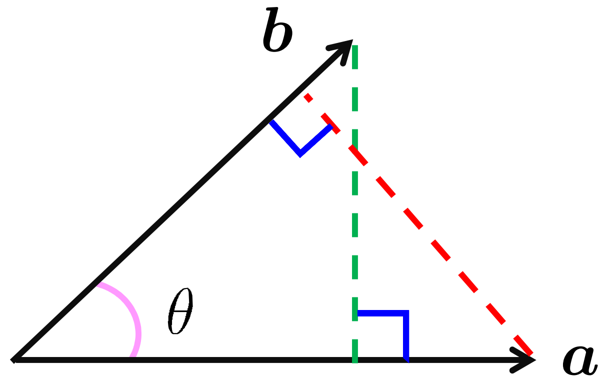
由于位于第 I 封限，故 $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$

$$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\vec{e}_{\overrightarrow{OA}}=6(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(3,3\sqrt{2},3)$$

向量的投影

若 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \theta$ ，记 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos\theta$$



同理，若 $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\theta$$

性质2 向量投影具有与坐标相同的性质

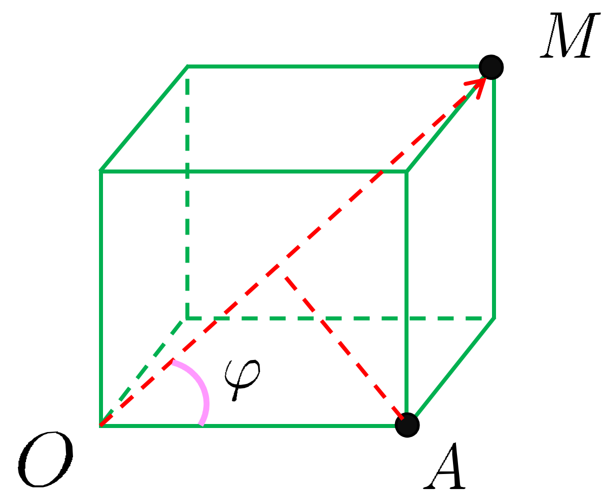
- $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\, (\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{a}$
- $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\, \boldsymbol{b}$

例9：设正方体的一条对角线为OM，一条棱为OA, $|OA|=a$,
求$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$ 。

解：如图所示，记 $\angle MOA=\varphi$

$$\cos\varphi=\frac{|OA|}{|OM|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}$$



练习1：设三角形$\triangle ABC$的边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边中点依次为$D,E,F$，证明：

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$$

练习2：下列哪组角可作为空间向量的方向角（　　）

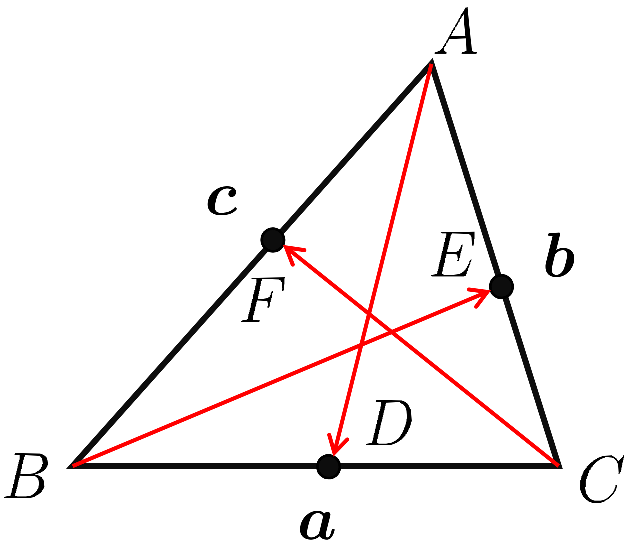
(A) $30^\circ,45^\circ,60^\circ$　　(B) $45^\circ,60^\circ,90^\circ$

(C) $60^\circ,90^\circ,120^\circ$　　(D) $45^\circ,90^\circ,135^\circ$

练习1：设三角形$\triangle ABC$的边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边中点依次为$D,E,F$，证明：

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$$

解：如图所示



$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{c})$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-(-\boldsymbol{a})$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-(-\boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\mathbf{0}$$

作业

P13 第5题、第13题、第15题、第18题

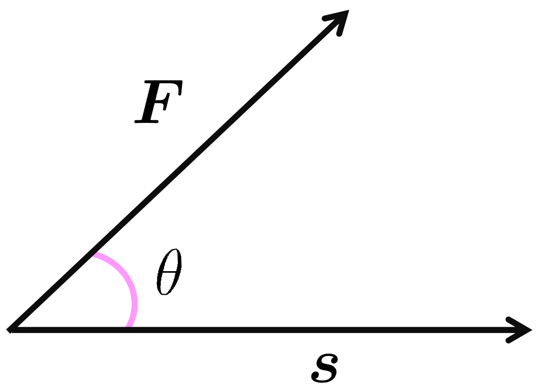
8.2 数量积 向量积

- 两向量的数量积
- 两向量的向量积

数量积

例：设一物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿与力夹角为 θ 直线移动，位移 $\boldsymbol{s}$ ，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cos\theta = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$$



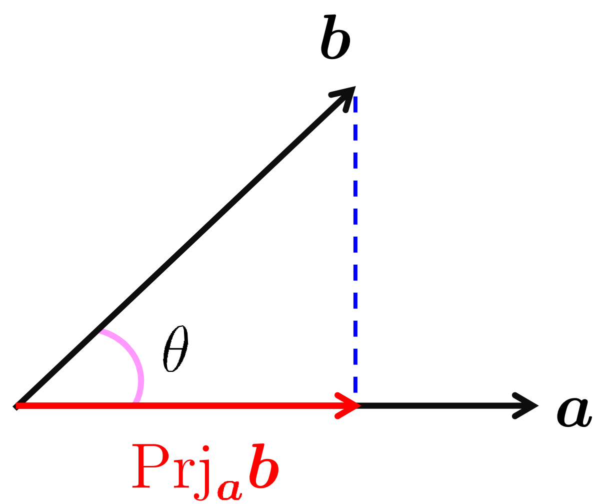
定义1 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，称

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（点乘）。

数量积与投影

数量积与投影的关系如下



$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\ \boldsymbol{b}$$

同理，我们有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\theta = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\ \boldsymbol{a}$$

两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上投影的乘积。

数量积的性质

性质1 由数量积的定义可以推得

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
- 规定零向量与任何向量都垂直，则有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

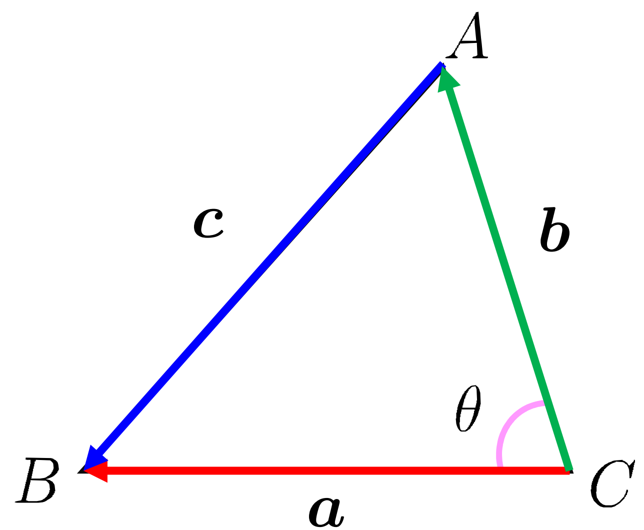
性质2 向量得数量积符合下列运算定律

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ （交换律）
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ （分配律）
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ （数乘结合律）

例1：试用向量证明三角形的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

解：如图所示，设 $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$ ，则有



$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

从而

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{c}|^2 &= (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \end{aligned}$$

数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$， 则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$
$$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为非零向量时，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$， 可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+b_x^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

此式为两向量的夹角公式。

例2：已知三个点$M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$和$B(2,1,2)$，求$\angle AMB$

解：作向量$\overrightarrow{MA}$和向量$\overrightarrow{MB}$，则$\angle AMB$为两向量的夹角

$$\overrightarrow{MA}=(2,2,1)-(1,1,1)=(1,1,0)$$

$$\overrightarrow{MB}=(2,1,2)-(1,1,1)=(1,0,1)$$

计算两向量模值为

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{2},\ |\overrightarrow{MB}|=\sqrt{2}$$

根据两向量的夹角公式，得

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \angle AMB=\frac{\pi}{3}$$

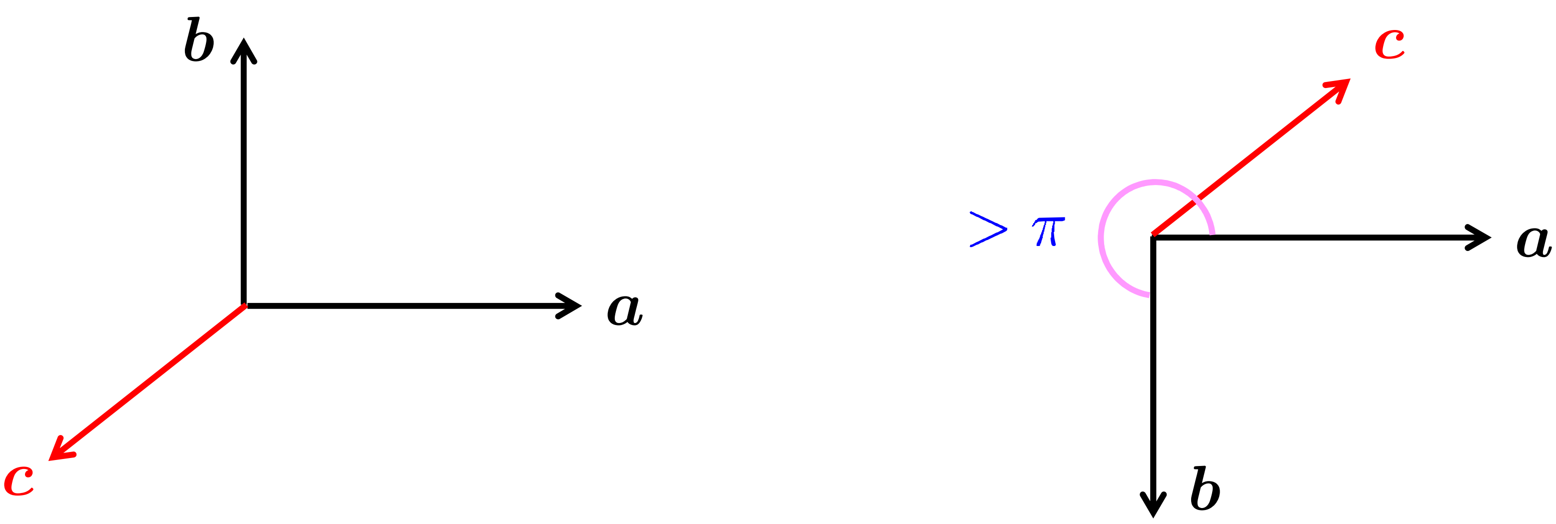
两向量的向量积

定义2 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，定义向量 $\boldsymbol{c}$

- 大小：$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$
- 方向：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 符合右手定则

称 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积（叉乘），记为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$



向量积的性质

性质3 规定零向量与任何向量都平行，则有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$$

性质4 向量的向量积符合下列运算定律

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

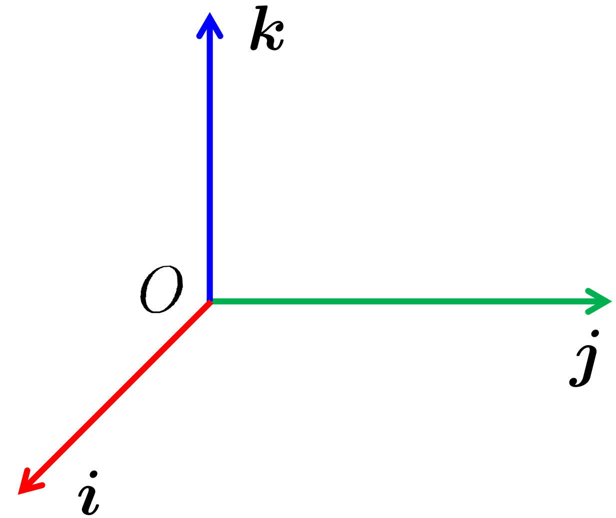
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$$



$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

例5：已知三角形 ABC 的顶点分别为

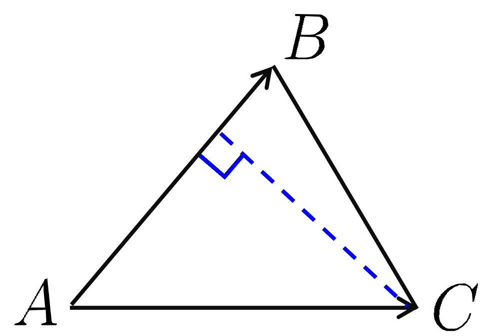
$$A(1,2,3),\ B(3,4,5),\ C(2,4,7)$$

求三角形 ABC 的面积。

解：根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此



$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$$

复习与提高

习题1：已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 夹角 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$，且 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}| = 3$，求 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ 。

习题2：证明三角形的正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

习题3：在顶点为 $A(1,-1,2), B(1,1,0), C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 AC 边上的高 BD 的长度

复习与提高

习题4：下列关系式错误的是（　　）

(A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　　(B) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$　　(D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$

习题5：设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量，且满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则有

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　(B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　　(D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

作业

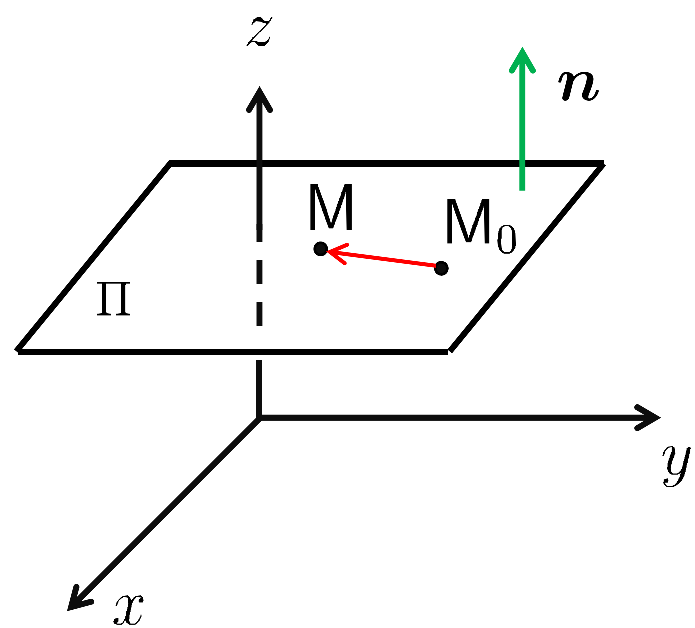
P22：第4题；第6题；第9题(2)；第10题

8.3 平面及其方程

- 平面的点法式方程
- 平面的一般方程
- 两平面的夹角

平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $\mathsf{M}_0(x_0, y_0, z_0)$，且垂直于非零向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$，求该平面 Π 的方程。



任取点 $\mathsf{M}(x, y, z) \in \Pi$，则有

$$\overrightarrow{\mathsf{M}_0\mathsf{M}} \perp \boldsymbol{n}$$

即

$$\overrightarrow{\mathsf{M}_0\mathsf{M}} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

故

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

上式被称为平面 Π 的点法式方程，$\boldsymbol{n}$ 为平面法向量。

例1：求过点 A$(2,-3,0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ 为法向量的平面的方程

解：根据平面的点法式方程，得所求平面的方程为

$$(x-2)-2(y+3)+3z=0$$

整理得

$$x-2y+3z-8=0$$

例2：求过三点 $\mathrm{M}_1(2,-1,4),\mathrm{M}_2(-1,3,-2),\mathrm{M}_3(0,2,3)$ 的平面的方程。

解：先找到平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，其垂直于 $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ 和 $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3}$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}=(-3,4,-6)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3}=(-2,3,-1)$$

取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\times\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

根据平面的点法式方程，有

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad 14x+9y-z-15=0$$

代入其他点所得方程是否一样？？

平面的一般方程

空间中任意平面都可以通过三元一次方程来表示

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

取空间中任意点 M(x_0, y_0, z_0)，可得平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为平面法向量。

- $D = 0$ 表示平面过原点
- $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
- $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
- $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A = B = 0$ 表示平面平行于 xy 面
- $A = C = 0$ 表示平面平行于 xz 面
- $B = C = 0$ 表示平面平行于 yz 面

例3：求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程

解：由于平面通过 x 轴，从而它的法向量垂直于 x 轴，即

$$(A,B,C)\cdot(1,0,0)=0 \quad \Rightarrow A=0$$

又由于平面通过 x 轴，则它必通过原点，即 $D=0$，故平面方程为

$$By+Cz=0$$

将点 $(4,-3,-1)$ 代入方程

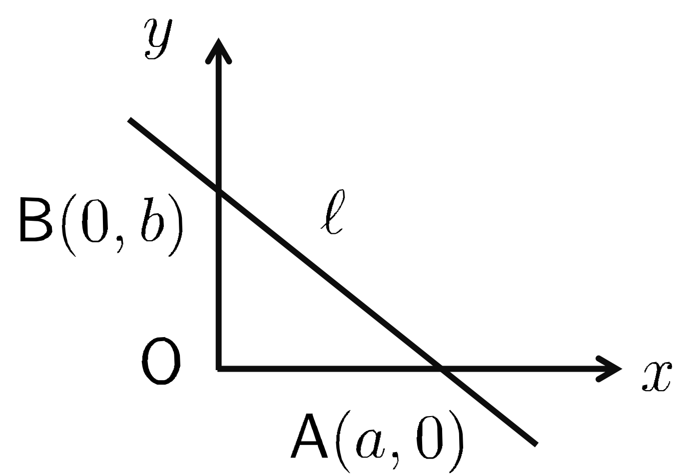
$$-3B-C=0 \quad \Rightarrow \quad C=-3B$$

故平面方程为

$$y-3z=0 \quad (B\neq 0)$$

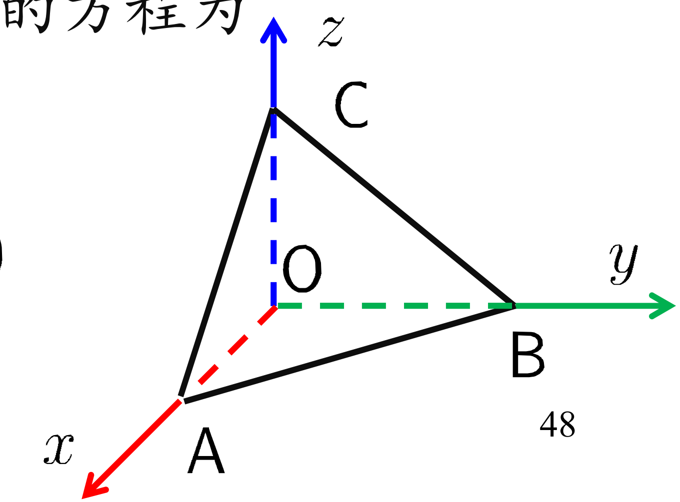
平面的截距式方程

回顾：二维坐标中，已知线 ℓ 与 x 轴和 y 轴分别相交于 A$(a,0)$ B$(0,b)$，则线 ℓ 的方程为



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a\neq 0, b\neq 0)$$

扩展：空间坐标中，已知面 Π 与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点分别为 A$(a,0,0)$, B$(0,b,0)$, C$(0,0,c)$，则面 Π 的方程为



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad (a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$$

例4：设一平面与x轴、y轴、z轴的交点依次为P$(a,0,0)$，Q$(0,b,0)$，R$(0,0,c)$，求平面方程

解：设所求平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

将平面三点坐标代入方程，可得

$$\begin{cases} aA+D=0 \\ bB+D=0 \\ cC+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{D}{a} \\ B=-\frac{D}{b} \\ C=-\frac{D}{c} \end{cases}$$

代入平面方程，并除以D可得截距式方程：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

两平面的夹角

设平面 Π_1 和平面 Π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$和 $\boldsymbol{n}_2$，两平面法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角 $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$，称为两平面的夹角。

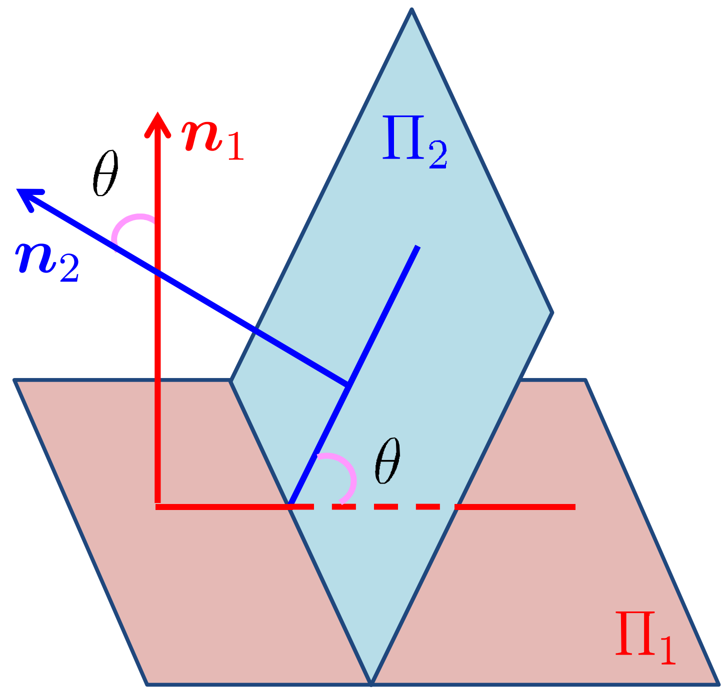
两平面夹角的余弦值为

$$\cos\theta = \left|\frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|$$

若 $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

则有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



$$\Pi_1: \ \boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

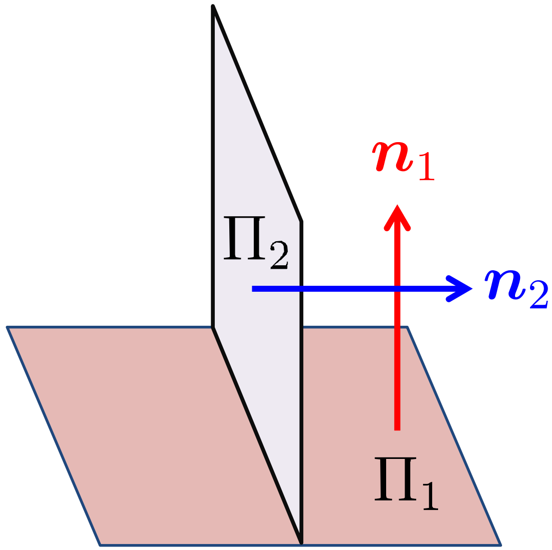
$$\Pi_2: \ \boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos\theta = \left|\frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|$$

特殊情况下：

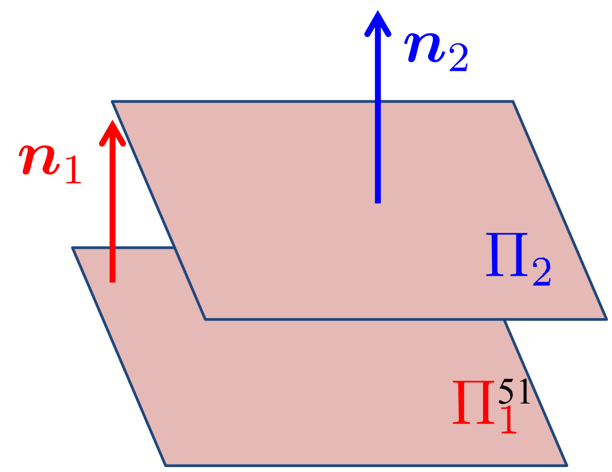
(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$

$$\iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$



(2) $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \iff \boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2$

$$\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



例5：求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角。

解：两平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2) \qquad \boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$$

则两平面的夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|1\times 2+(-1)\times 1+2\times 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

因此，可得夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$。

例6：一平面通过两点 $\mathsf{M}_1(1,1,1)$ 和 $\mathsf{M}_2(0,1,-1)$，且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程。

解：设所求平面的一个法向量为

$$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$$

由于该平面垂直于平面 $x+y+z=0$，则有

$$(A,B,C)\cdot(1,1,1)=0 \quad\Rightarrow\quad A+B+C=0$$

由于 $\overrightarrow{\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2}=(-1,0,-2)$ 位于该平面，则有 $\overrightarrow{\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即

$$-A-2C=0$$

联立方程组

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-2C=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=-2C \\ B=C \end{cases}$$

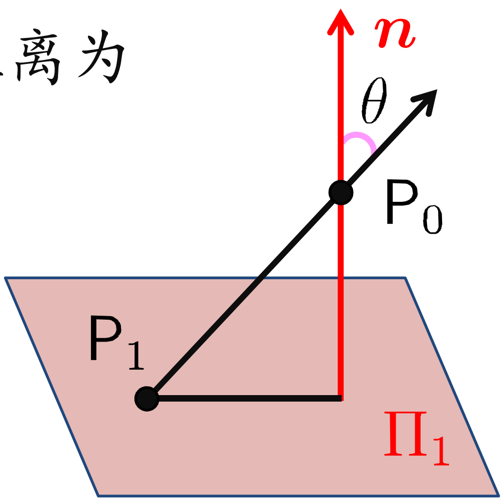
可得平面点法式方程：$-2C(x-1)+C(y-1)+C(z-1)=0$

整理得：$2x-y-z=0$。

定理1 空间中点 $\mathsf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

证： 任取平面上一点 $\mathsf{P}_1(x_1, y_1, z_1)$，则所求距离为



$$d = |\overrightarrow{\mathsf{P}_1\mathsf{P}_0}||\cos\theta| = |\overrightarrow{\mathsf{P}_1\mathsf{P}_0}|\frac{|\overrightarrow{\mathsf{P}_1\mathsf{P}_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{\mathsf{P}_1\mathsf{P}_0}||\boldsymbol{n}|}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{\mathsf{P}_1\mathsf{P}_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$= \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

复习与提高

平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$与平面$2x+3y-4z=1$的位置关系是（ ）

(A) 相交但不垂直　　(B) 互相垂直

(C) 平行但不重合　　(D) 互相重合

作业

P29：第2题、第6题、第7题、第9题

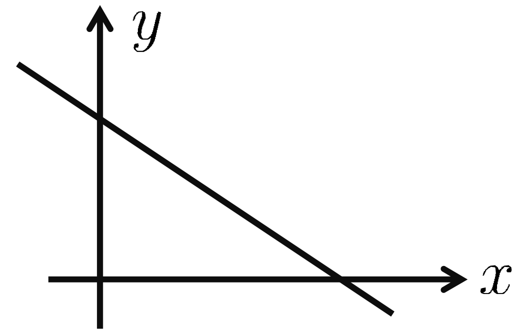
8.4 空间直线及其方程

- 空间直线的一般方程
- 空间直线的对称式方程与参数方程
- 两直线的夹角
- 直线与平面的夹角
- 杂例

空间直线的一般方程

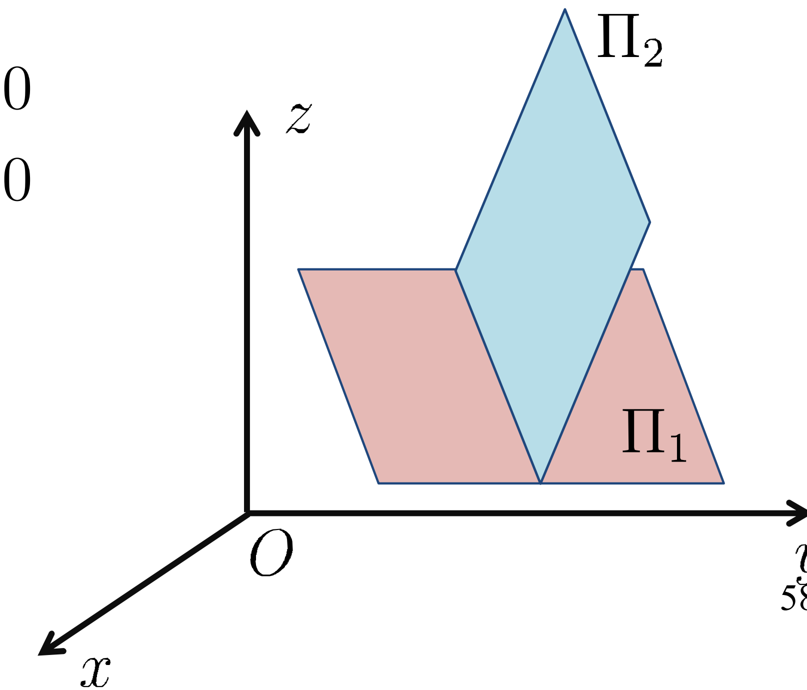
回顾：平面坐标系直线方程

$$Ax + By + C = 0$$



扩展：空间直线可视为两平面的交线，其一般方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



空间直线的对称式方程

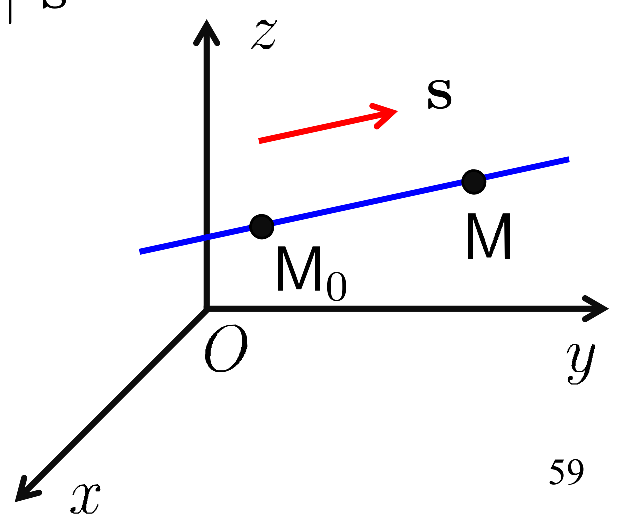
定义1 已知直线上一点$\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$和其方向向量$\mathbf{s} = (m, n, p)$则它的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

该方程称为直线的**对称式方程**或**点向式方程**

取直线上任意点 $\mathrm{M}(x, y, z)$，则有 $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} \parallel \mathbf{s}$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$



空间直线的参数方程

定义2 在空间直线的对称式方程中，令

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

得到直线的参数式方程:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

例1：用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解：先找到直线一点(x_0,y_0,z_0)，不妨取$x_0=1$，则有

$$\begin{cases} y_0+z_0=-2 \\ y_0-3z_0=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0=0 \\ z_0=-2 \end{cases}$$

直线的方向向量与两平面法向量垂直，可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

于是得到直线的对称式方程：$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$

及参数方程：$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$

两直线的夹角

定义3 两直线方向向量的夹角（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）叫做两直线的夹角。

设直线 ℓ_1 和直线 ℓ_2 的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_1 = (m_1, n_1, p_1),\ \mathbf{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

则有 $\cos\theta = \dfrac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|} = \dfrac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

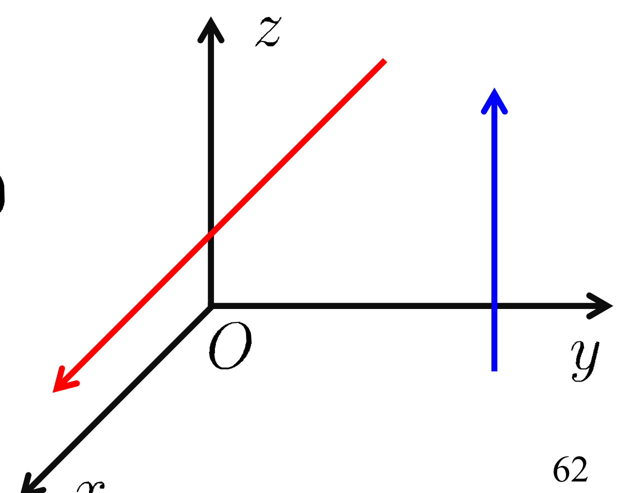
特殊情况下：

(1) $\ell_1 \perp \ell_2 \iff \mathbf{s}_1 \perp \mathbf{s}_2$

$\iff m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$

(2) $\ell_1 \parallel \ell_2 \iff \mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2$

$\iff \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$



空间中，两条直线垂直时未必相交。

例2：求直线 $\ell_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和 $\ell_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角。

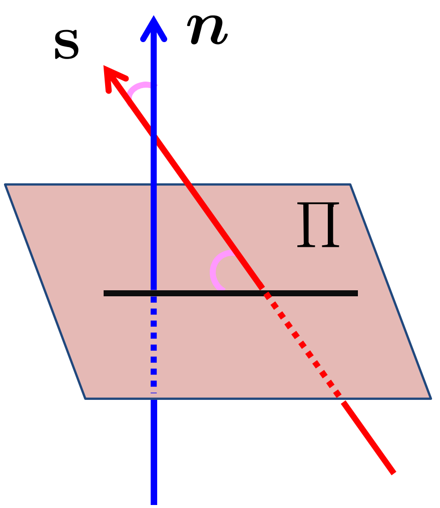
解：两直线的方向向量为 $\mathbf{s}_1=(1,-4,1)$，$\mathbf{s}_2=(2,-2,-1)$。由空间直线夹角的余弦公式，可得

$$\cos\theta=\frac{|\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}=\frac{|2+8-1|}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

直线与平面的夹角

定义4 设直线 ℓ 的方向向量为 $\mathbf{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则平面与直线的夹角满足

$$\sin\theta=\frac{|\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\mathbf{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$



特殊情况下：

(1) $\ell\perp\Pi \iff \mathbf{s}\parallel\boldsymbol{n} \iff \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

(2) $\ell\parallel\Pi \iff \mathbf{s}\perp\boldsymbol{n} \iff Am+Bn+Cp=0$

例3：求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程。

解：由于直线与平面垂直，可得其方向向量 $\boldsymbol{s}=(2,-3,1)$ 。又已知直线上一点，可得直线点向式方程

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$$

杂例

例4：求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线的方程。

解：解法一。由于所求直线与两平面的交线平行，因此其方向向量同时与两平面法向量垂直。因此，可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=-(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

因此所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$$

解法二。过点$(-3,2,5)$且与平面 $x-4z=3$平行的平面的方程为

$$x-4z=-23$$

过点 $(-3,2,5)$ 且与平面 $2x-y-5z=1$ 平行的平面的方程为

$$2x-y-5z=-33$$

所求直线为上述两平面的交线，故其方程为

$$\begin{cases} x-4z=-23 \\ 2x-y-5z=-33 \end{cases}$$

例5：求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点。

解：所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=4+2t \end{cases}$$

代入平面方程中，得

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$$

解得 $t=-1$。将其代入直线的参数方程，可得

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

例6：求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程。

解：先作一平面过点 $(2,1,3)$ 且垂直于已知直线，那么这平面的方程应为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与这平面的交点，已知直线的参数方程为

$$x=-1+3t,\ y=1+2t,\ z=-t$$

将参数方程代入平面方程，可得 $t=\dfrac{3}{7}$，及交点 $(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7})$。已知道直线两点，可得其方向向量

$$\boldsymbol{s}=(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3)=-\frac{6}{7}(2,-1,4)$$

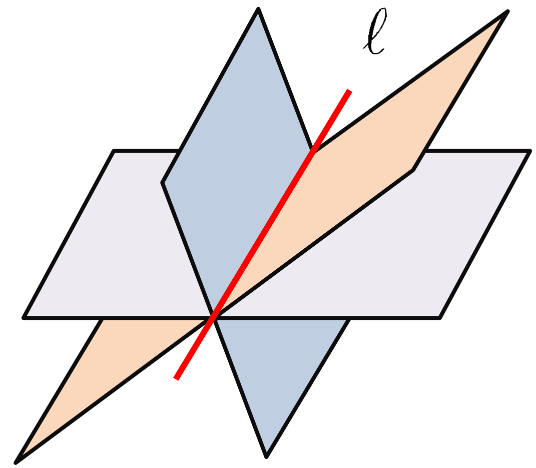
故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

平面束的方程

过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



的平面束的方程为

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) \\ +\lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中λ_1, λ_2不全为零。

通常固定$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$，得到简写公式

$$A_2x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

例7：求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程。

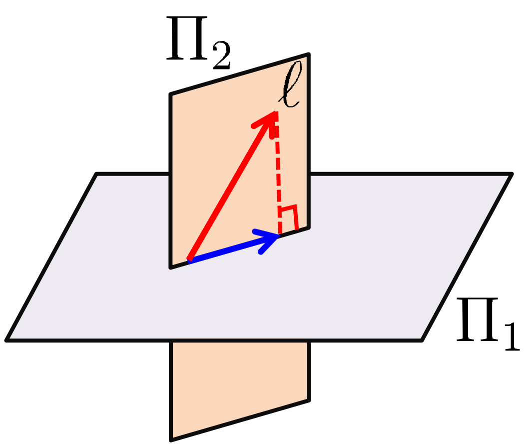
解：过直线的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$

平面束中，与 $x+y+z=0$ 垂直的平面满足

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$



解得 $\lambda=-1$。

于是，得到投影平面的方程为

$$2y-2z-2=0 \;\Rightarrow\; y-z-1=0$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

复习与提高

题1：一直线过点 A$(1,2,1)$，且垂直于直线

$$\ell_1:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$$

又和直线 $\ell_2:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 相交，求此直线方程。

解：设此直线的点向式方程为 $\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y-2}{n}=\dfrac{z-1}{p}$。于是可得参数方程

$$\begin{cases} x=mt+1 \\ y=nt+2 \\ z=pt+1 \end{cases}$$

由于该直线垂直于 ℓ_1，因此

$$3m+2n+p=0$$

设直线 ℓ 与直线 ℓ_2： $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 相交于点

$$(mt_0+1,\ nt_0+2,\ pt_0+1)$$

其满足 $\dfrac{mt_0+1}{2}=\dfrac{nt_0+2}{1}=\dfrac{pt_0+1}{-1}$

联立方程组

$$\begin{cases}\frac{mt_0+1}{2}=\frac{nt_0+2}{1}=\frac{pt_0+1}{-1}\\ 3m+2n+p=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}m=\frac{9}{7}\\ n=-\frac{6}{7}\\ p=-\frac{15}{7}\\ t_0=1\end{cases}$$

于是得直线方程

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-5}$$

另解： 设直线所在平面为

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-1)=0$$

由于直线垂直于 ℓ_1 ，则必有 ℓ_1 垂直平面，即

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{2}=\frac{C}{1}$$

令直线与 ℓ_2 的交点为 $(2t_0, t_0, -t_0)$，代入平面方程有

$$A(2t_0-1)+B(t_0-2)+C(-t_0-1)=0$$

联立方程组，可得 $t_0=\frac{8}{7}$。故交点为 $\mathrm{B}(\frac{16}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{8}{7})$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{15}{7})=\frac{3}{7}(3,-2,-5)$$

故得直线方程

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-5}$$

题2：求过点 $\mathsf{M}_0(1,1,1)$ 且与两直线 $\ell_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$ 和 $\ell_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 ℓ 。

解：利用参数方程，设 ℓ 与 ℓ_1,ℓ_2 的交点分别 $\mathsf{M}_1(t_1,2t_1,t_1-1)$ 和 $\mathsf{M}_2(t_2,3t_2-4,2t_2-1)$ 。

由于 $\mathsf{M}_0,\mathsf{M}_1,\mathsf{M}_2$ 均在直线 ℓ 上，因此 $\overrightarrow{\mathsf{M}_0\mathsf{M}_1} \parallel \overrightarrow{\mathsf{M}_0\mathsf{M}_2}$ ，从而

$$\frac{t_1-1}{t_2-1}=\frac{2t_1-1}{3t_2-5}=\frac{t_1-2}{2t_2-2}$$

解得 $t_1=0, t_2=2$ 。即交点分别为 $\mathsf{M}_1(0,0,-1)$ ，$\mathsf{M}_2(2,2,3)$ 。

所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

题3：求过直线 $\ell:\begin{cases}x+5y+z=0\\x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\pi/4$ 角的平面方程。

解：过直线 ℓ 的平面束的方程为

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

由两个平面夹角为 $\pi/4$，得

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|(1+\lambda,5,1-\lambda)\cdot(1,-4,-8)|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}$$

$$=\frac{|9\lambda-27|}{\sqrt{81}\sqrt{2\lambda^2+27}}=\frac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

上式平方得 $4(\lambda-3)^2-2(2\lambda^2+27)=0$

$$\Rightarrow\quad 24\lambda+18=0\qquad\Rightarrow\quad\lambda=-\frac{3}{4}$$

由于平面束方面未考虑 $\lambda_1 = 0$ 的情况，当 $\lambda_1 = 0$ 时，平面 $x - z + 4 = 0$ 与平面 $x - 4y - 8z + 12 = 0$ 的夹角为

$$\cos\theta = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-8)|}{\sqrt{2}\sqrt{81}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，平面 $x - z + 4 = 0$，同样也满足方程。

作业

P35：第3题、第5题、第7题、第9题

8.5 曲面及其方程

- 曲面研究的基本问题
- 旋转曲面
- 柱面
- 二次曲面

曲面研究的基本问题

在空间解析几何中，关于曲面研究的两个基本问题

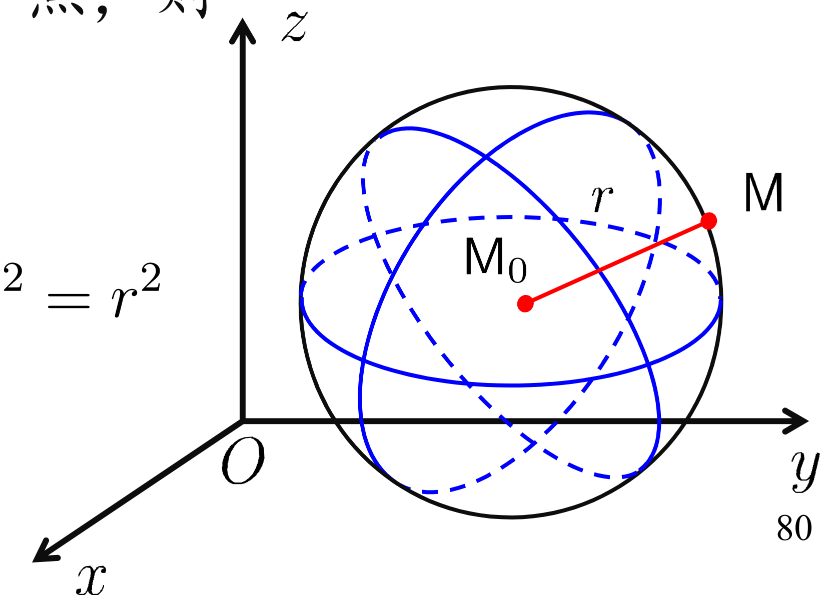
- 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；
- 已知方程，研究曲面形状。

例1：建立球心在点 $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 r 的球面方程。

解：设 $\mathrm{M}(x, y, z)$是球面上的任一点，则

$$|\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}| = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$



例2：方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解：通过配方法，原方程可以写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$$

球心为 $(1,-2,0)$，半径为 $\sqrt{5}$ 的球面。

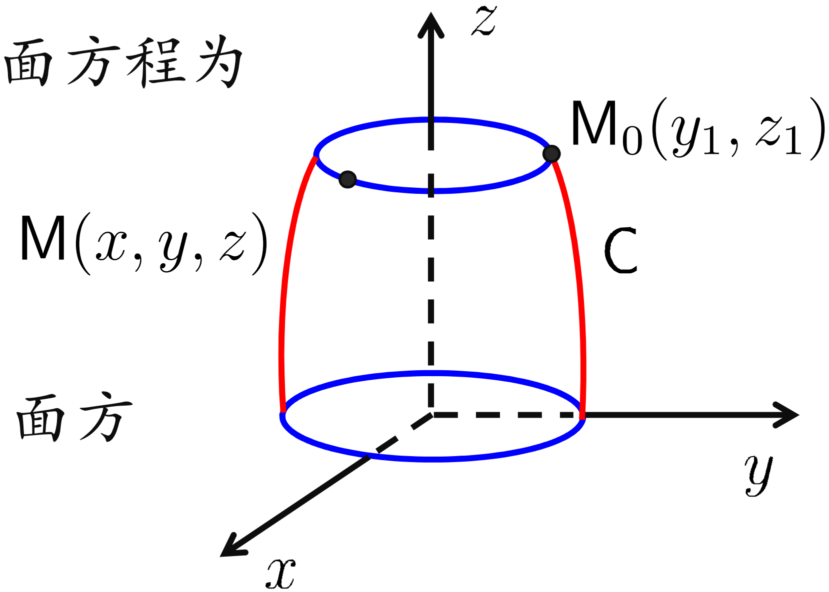
旋转曲面

定义1 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲线叫做旋转曲面，旋转曲线和特定直线依次叫做旋转曲的母线和轴。

设在 $y\mathrm{O}z$ 面上的曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0$。

它绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$



曲线 C 称为旋转曲面的母线。

它绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例3：直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫做圆锥面。两直线的交点叫做圆锥面的顶点，两直线的夹角 α $(0 < \alpha < \pi/2)$ 叫作圆锥面的半顶角。试建立顶点在坐标原点O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程。

解：在 yOz 坐标面上，直线 L 的方程为

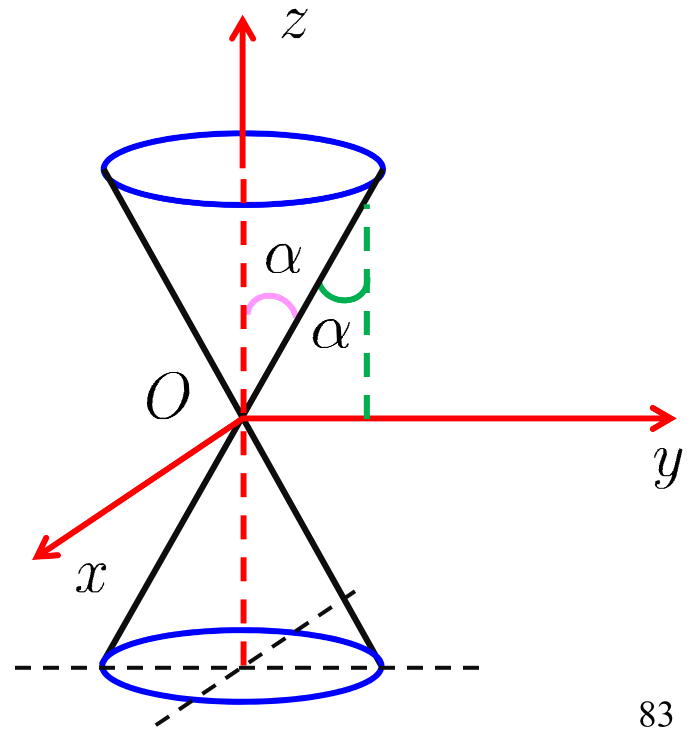
$$z = y\cot\alpha$$

因为旋转轴为 z 轴，故圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

或

$$z^2 = (x^2+y^2)\cot^2\alpha$$



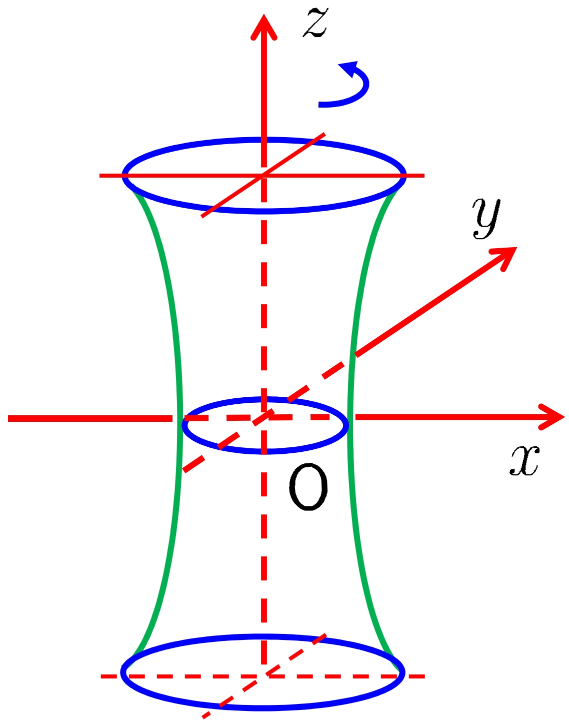
例4：将 xOz 坐标面上的双曲线

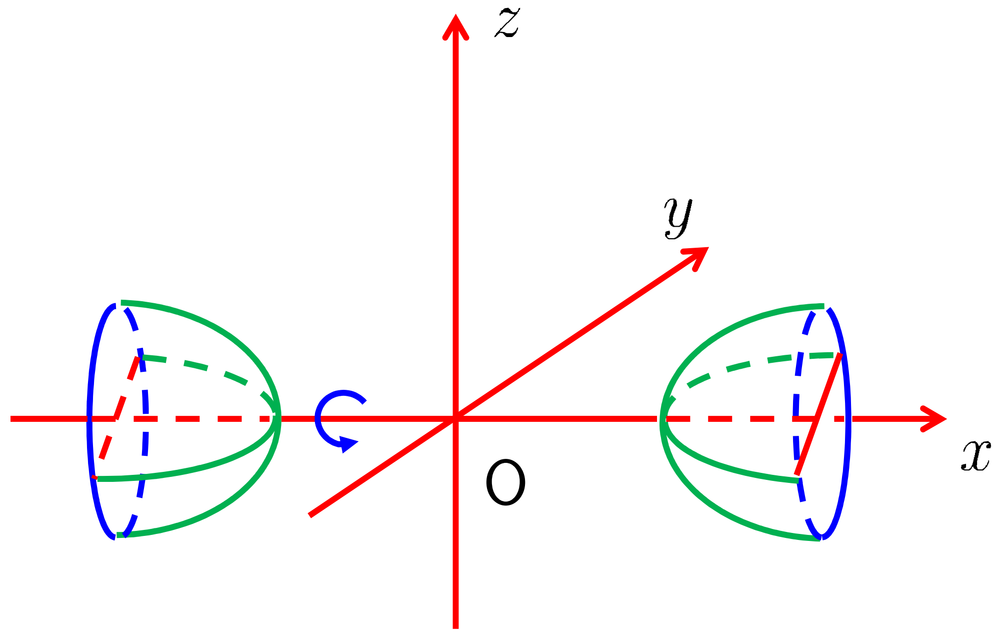
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

解：

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

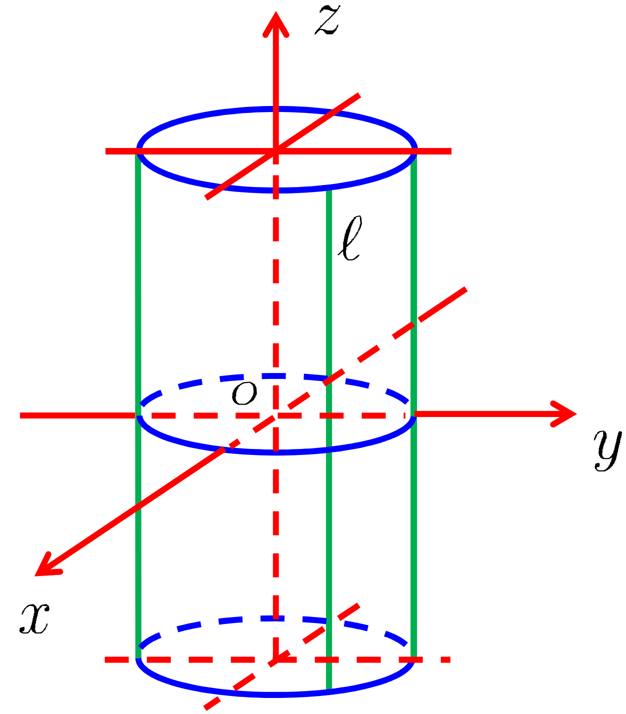




柱面

例5：方程 $x^2+y^2=r^2$ 表示怎样的曲面？

解：该方程表示的是由平行于 z 轴的直线 ℓ 沿 $x\mathrm{O}y$ 面的圆 $x^2+y^2=r^2$ 移动而得



准线：$x\mathrm{O}y$ 面的圆 $x^2+y^2=r^2$

母线：平行于 z 轴的直线

柱面：直线 ℓ 移动的轨迹

抛物柱面

方程 $y = x^2$ 表示母线平行于 z 轴的柱面。

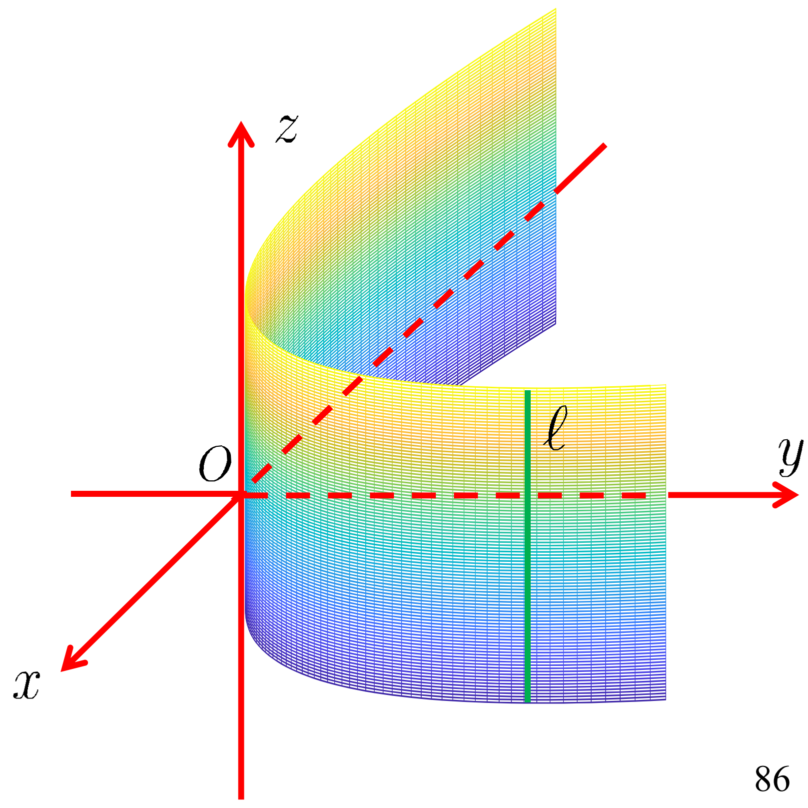
由于它的准线是 $x\mathrm{O}y$ 面的 $y = x^2$，该柱面叫做抛物柱面。

一般地：

方程 $F(x, y) = 0$ 表示空间中母线平行于 z 轴的柱面。

方程 $G(x, z) = 0$ 表示空间中母线平行于 y 轴的柱面。

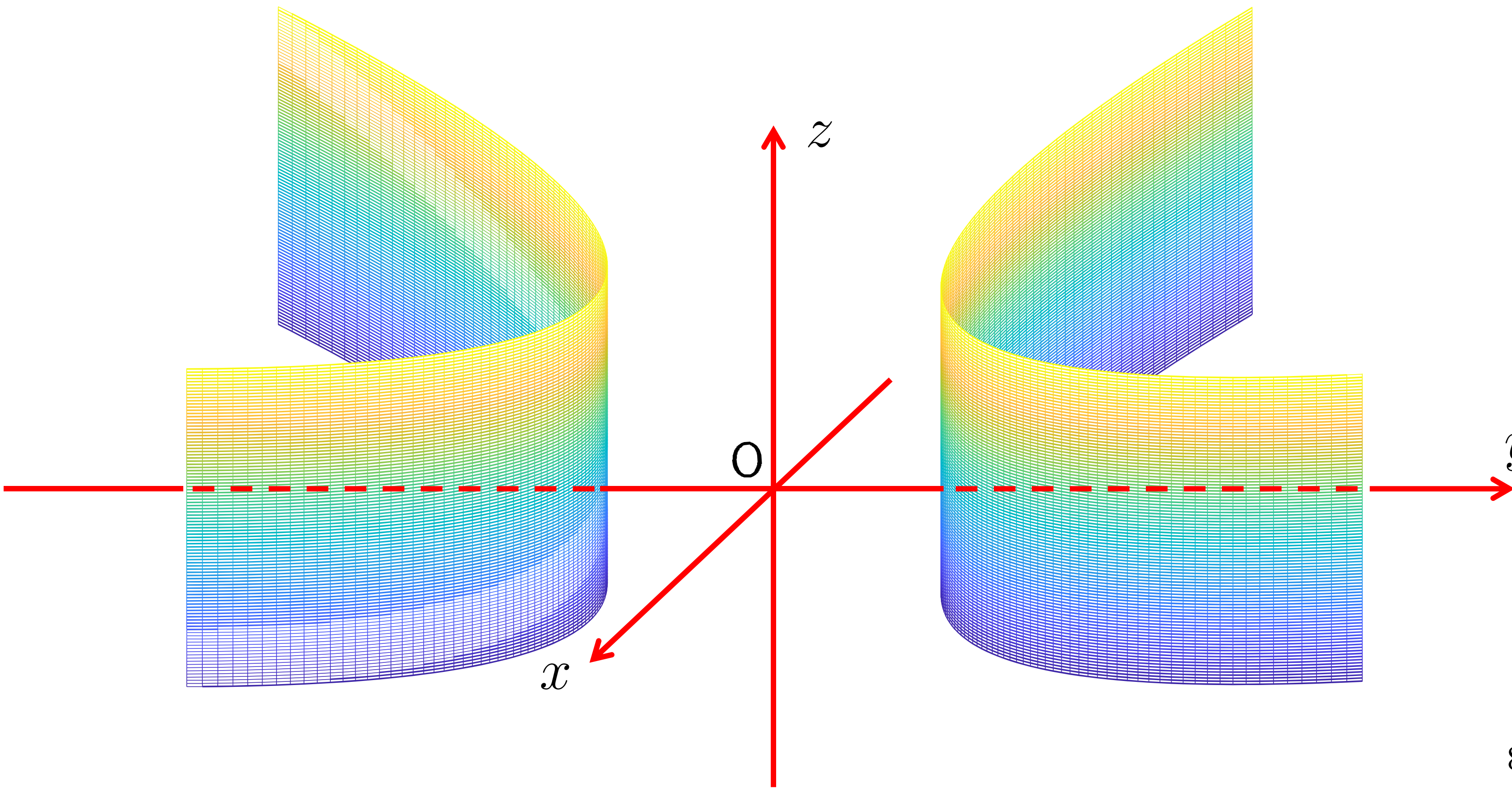
方程 $H(y, z) = 0$ 表示空间中母线平行于 x 轴的柱面。



双曲柱面

方程 $y^2 - x^2 = 1$ 表示平行于 z 轴的双曲柱面

准线是 xOy 面上的双曲线，母线是平行于 z 轴的直线

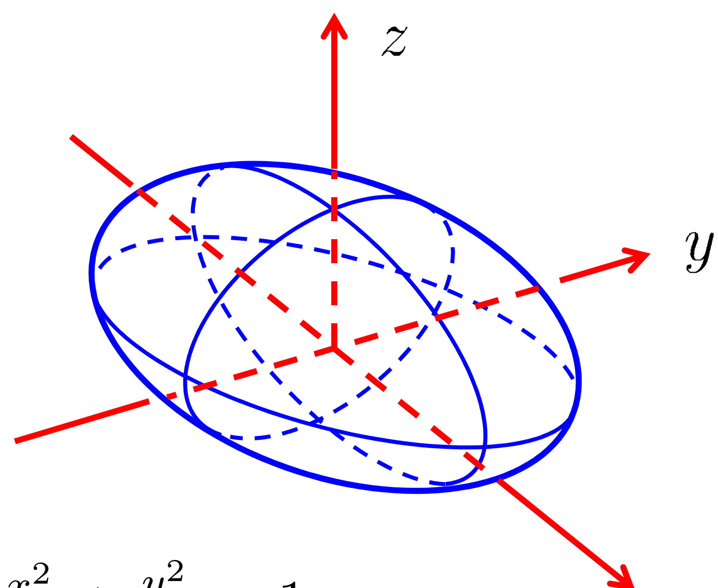


二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线类似，我们把三元二次方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示的曲面称为二次曲面，把平面称之为一次曲面。

其基本的类型有：椭球面、抛物面、双曲面、锥面。

研究二次曲面的基本方法是截痕法。



1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a. 范围： $|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b,\ |z| \leqslant c$

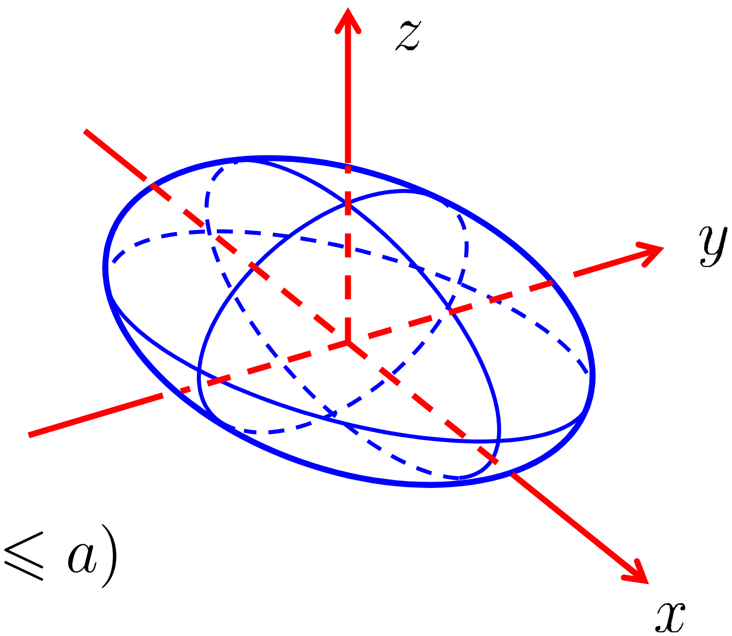
b. 与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

c. 截痕：与 $z = t,\ |t| \leqslant c$ 的交线为椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2(1-\frac{t^2}{c^2})} + \dfrac{y^2}{b^2(1-\frac{t^2}{c^2})} = 1 \\ z = t \end{cases}$$



同样与 $y = y_1(|y_1| \leqslant b),\ x = x_1(|x_1| \leqslant a)$ 的交线也为椭圆。

d. 当 $a = b = c$ 时，椭球面退化为球面。

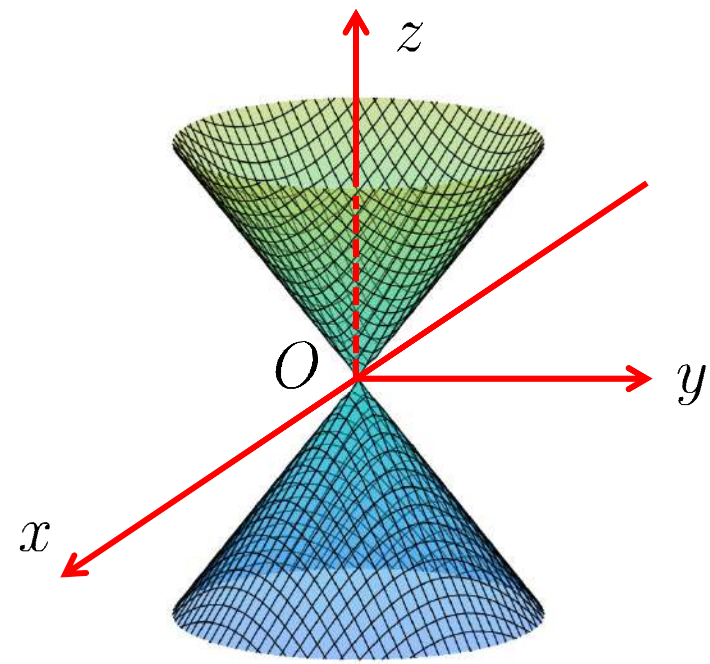
椭圆锥面

曲面方程： $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

在平面 $z=t$ 的截面为椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1$$

当 $a=b$时，椭圆锥面变为圆锥面。



双曲面

1. 单叶双曲面

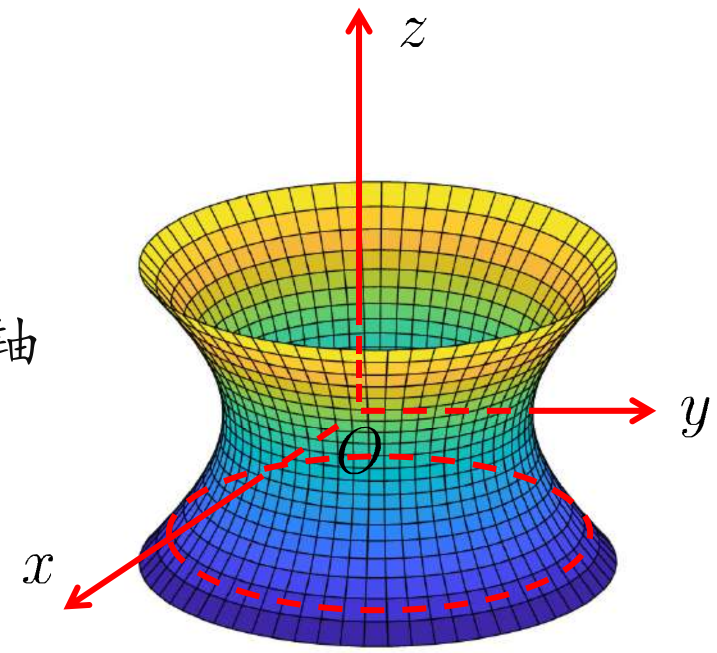
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

将 zOx 面双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，绕 z 轴旋转得到旋转单叶双曲面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

将此曲面沿 y 轴伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，得单叶双曲面。

在 $z=t$ 截面的交线为椭圆

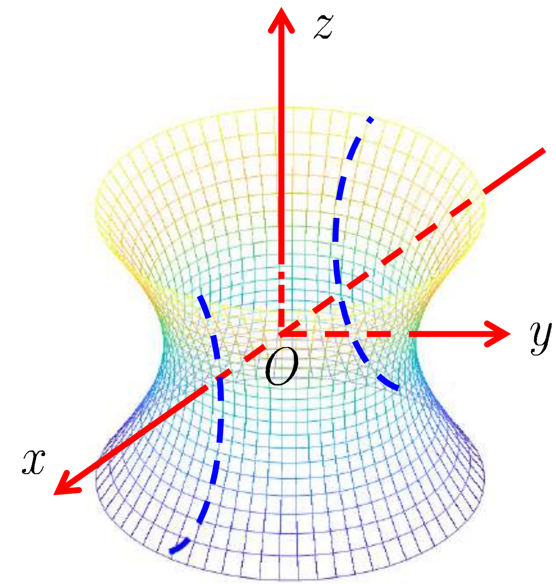


单叶双曲面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

在 $y=y_1$ 截面的交线情况

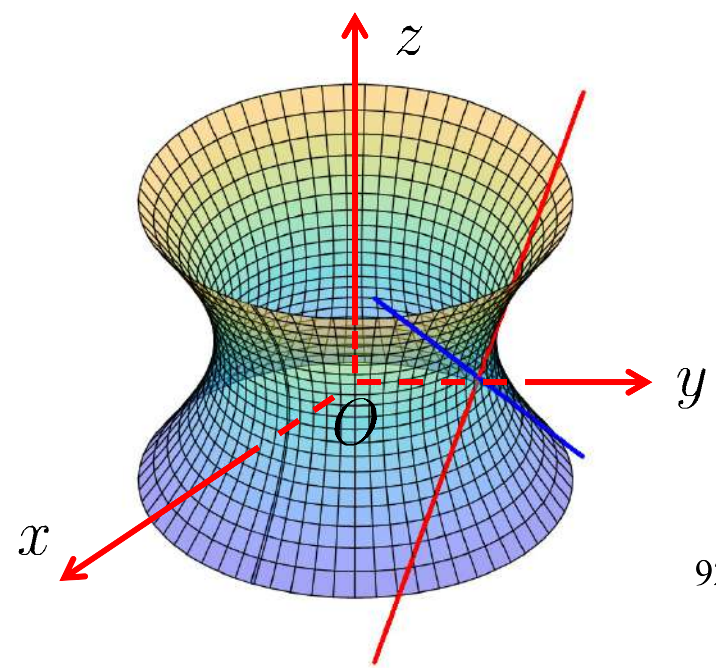
(1) $|y_1|<b$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2(1-\frac{y^2}{b^2})}-\dfrac{z^2}{c^2(1-\frac{y^2}{b^2})}=1\\ y=y_1\end{cases}$$



(2) $|y_1|=b$

$$\begin{cases}\frac{x}{a}\pm\frac{z}{c}=0\\ y=\pm b\end{cases}$$

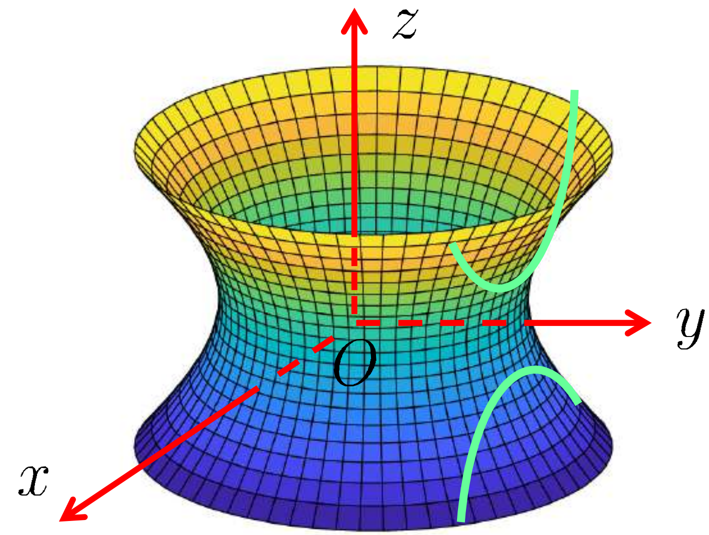


单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（3）$|y_1| > b$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2(1-\frac{y^2}{b^2})}-\dfrac{z^2}{c^2(1-\frac{y^2}{b^2})}=1 \\ y=y_1 \end{cases}$$

< 0



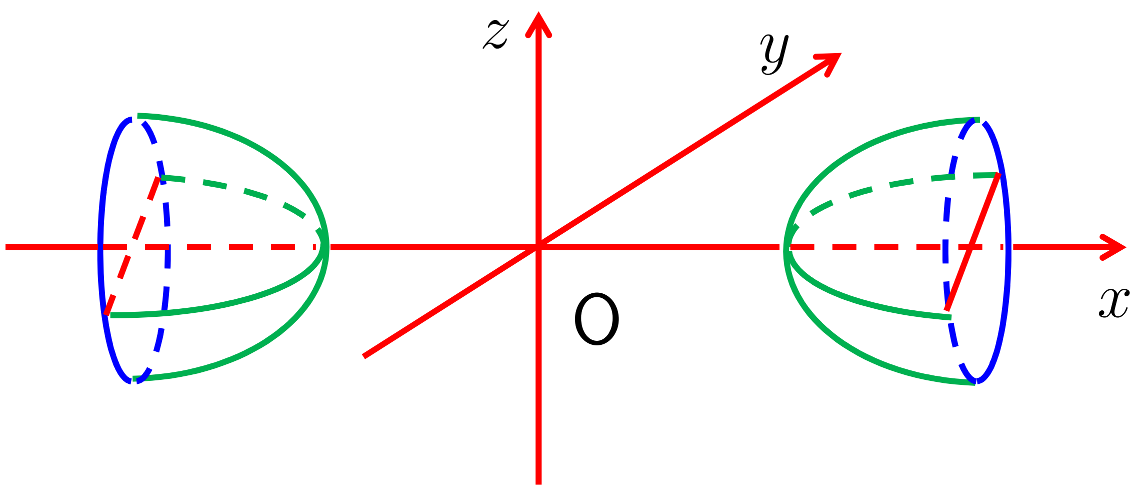
双叶双曲面

$$\text{曲面方程：}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

将$x\mathrm{O}z$面双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，绕$z$轴旋转得到旋转双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

将此曲面沿 y 轴伸缩 $\dfrac{b}{c}$ 倍，得双叶双曲面。

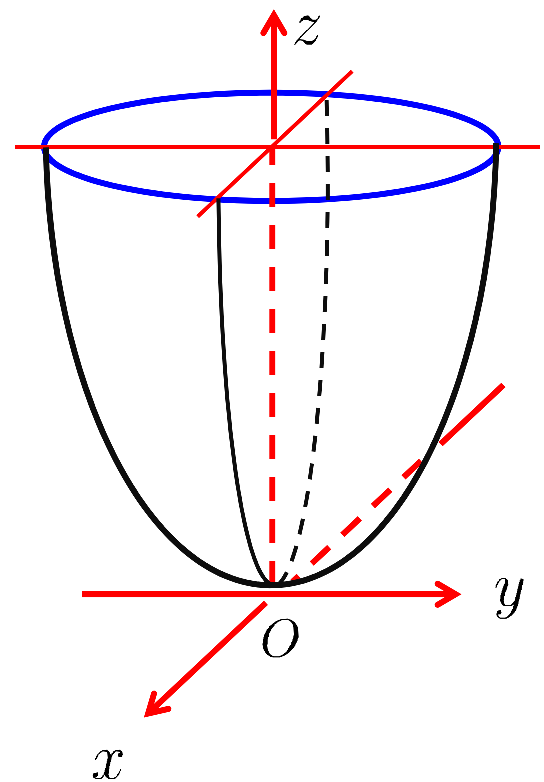


椭圆抛物面

1. 抛物面

抛物面分椭圆抛物面和双曲抛物面。

椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$



a. 将 $\dfrac{x^2}{a^2}=z$ 沿 z 轴旋转，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=z$$

b. 将上述曲面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，得

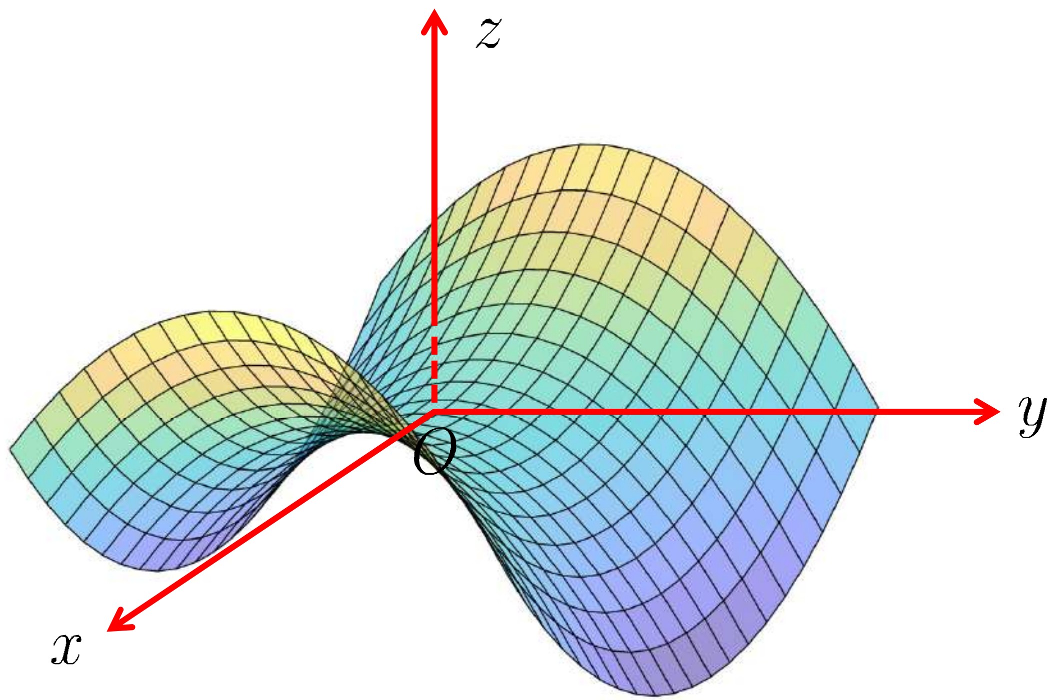
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

当 $a=b$ 时，为旋转抛物面。

双曲抛物面

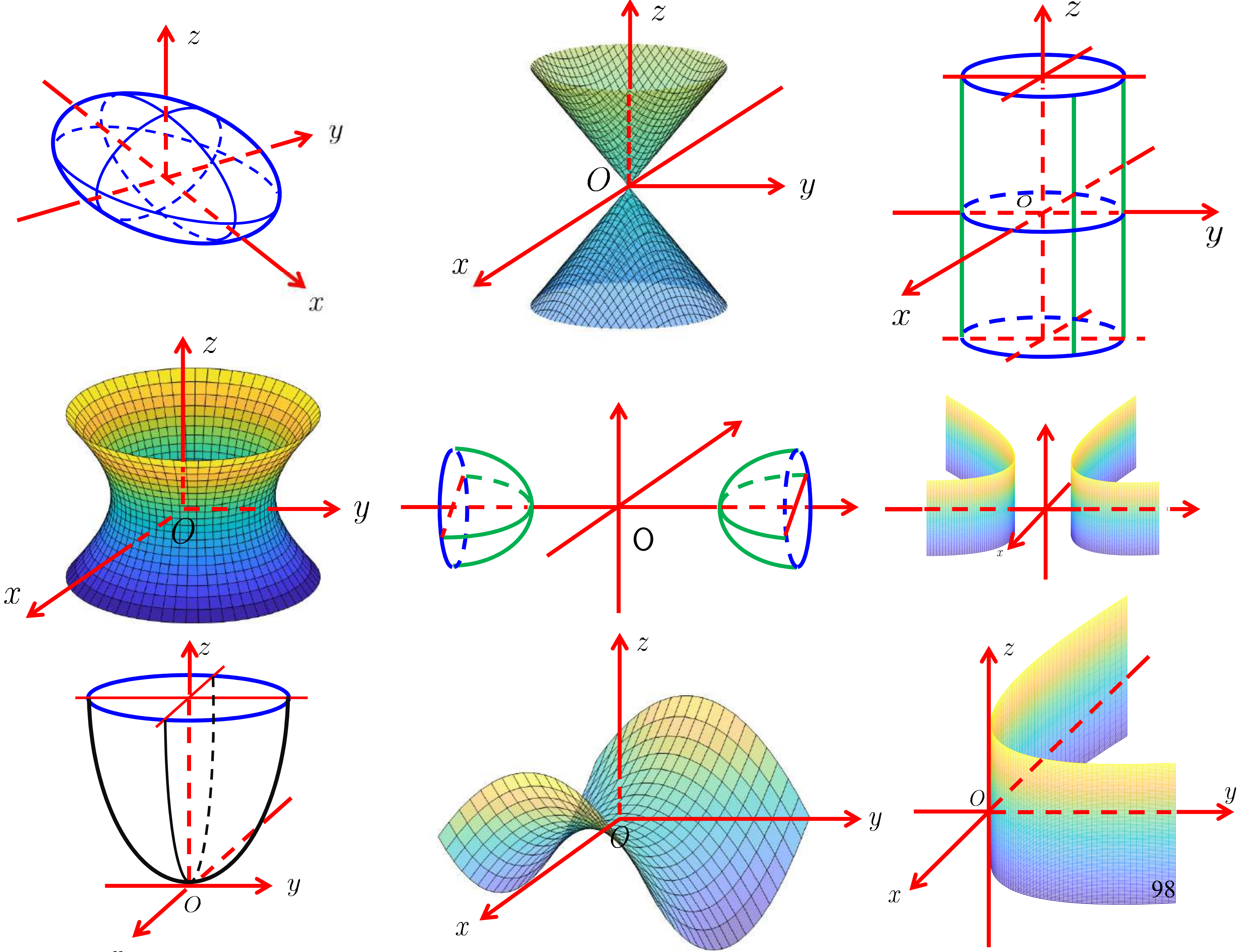
1. 双曲抛物面（马鞍面）

曲线方程： $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



二次曲面的分类

椭圆型	椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$	椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
双曲型	单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	双曲柱面 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
抛物型	椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$	双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$	抛物柱面 $x=ay^2$


z
y
x
z
O
y
x
z
O
y
x
z
O
y
x
O
z
y
O
x
z
O
y
x
z
O
y
x

复习与提高

题1：求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程（Hint: 四面体内切球半径公式）

$$r=\frac{3V}{S}=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}$$

解：三个做表面的面积为 $S=3/2$，平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成面积为 $\sqrt{3}/2$，故总面积为 $(3+\sqrt{3})/2$ 。三棱锥体积为 $V=1/6$ ，故内切球半径为

$$r=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

设球心坐标为 O(x_0,y_0,z_0)，由于四面体关于 $x=y=z$ 对称，故 $x_0=y_0=z_0$ ，故圆心坐标为 $(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6})$ 。

故内切球面方程为

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

复习与提高

习题2：下列结论中错误的是（　　）

A. $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

B. $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

C. $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

D. $y^2=5x$ 表示抛物柱面

作业

P44：第4题、第7题、第8题（5）、第11题

8.6 空间曲线及其方程

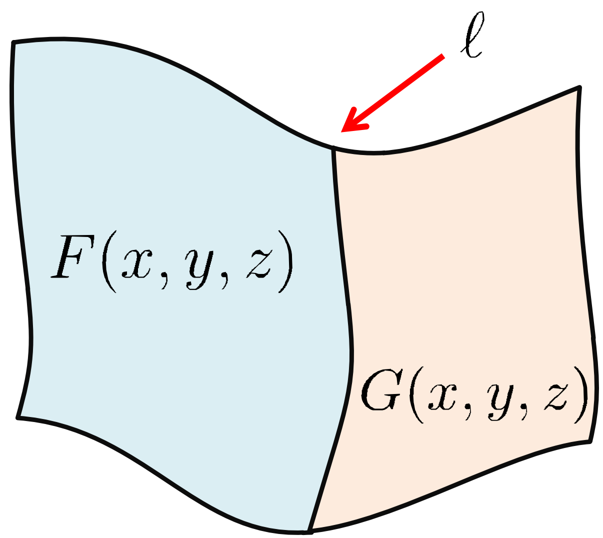
- 空间曲线的一般方程
- 空间曲线的参数方程
- 空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两个曲面的交线

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

该方程也叫做空间曲线的一般方程。



例1：方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 表示怎么样的曲线？

解：$x^2+y^2=1$ 表示母线平行于 z 轴，

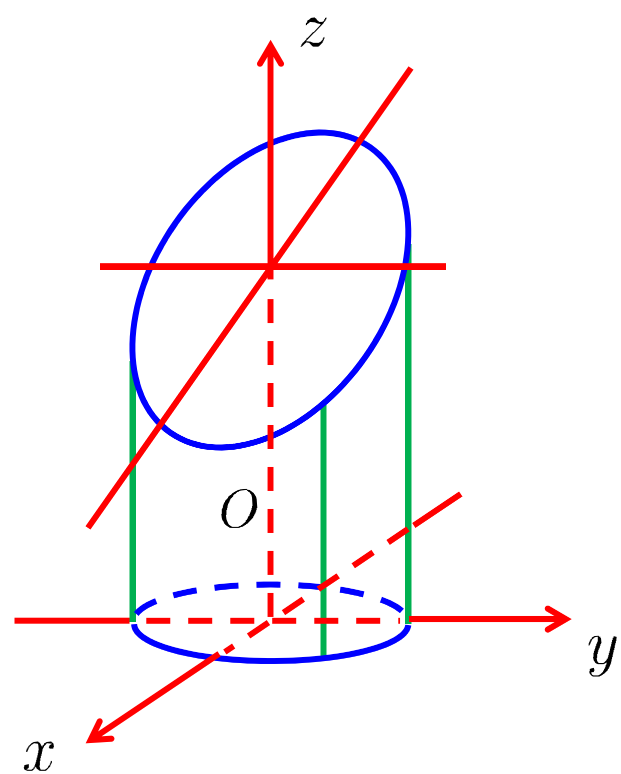
准线是 xOy 面的圆，圆心在原点，

半径为 1。

$2x+3z=6$ 表示母线平行于 y 轴，

准线是 xOz 面上的直线。

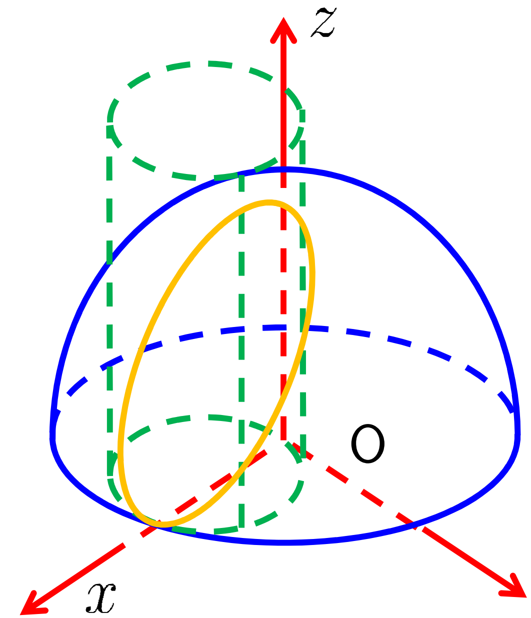
故曲面表示平面与圆柱面的交线。



例2：方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 \end{cases}$ 表示怎么样的曲线？

解：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 表示球心在原点，半径为 1 的上半球面。

$(x-\dfrac{a}{2})^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ 表示母线平行于 z 轴，其准线是 $x\text{O}y$ 的圆，圆心为 $(a/2,0)$，半径为 $a/2$ 的圆柱面。



空间曲线的参数方程

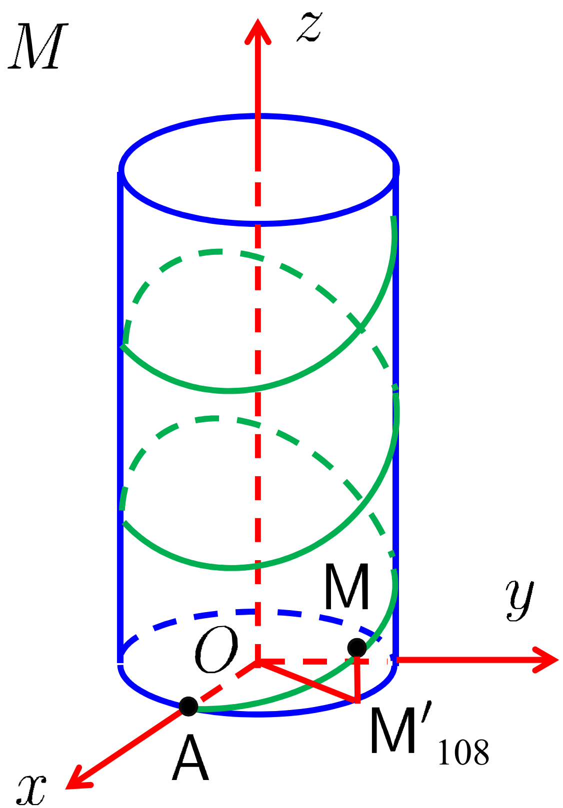
将曲线 C 上动点的坐标 x, y, z 表示为参数 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线 C 上的点 $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ ，随着 t 的变化可得到曲线 C 上的全部点。该方程组称为空间曲线的参数方程。

例3：如果空间中一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴转动，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴正方向上升（其中 ω 和 v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做螺旋线，试建立其方程。

解：取时间 t 为参数，设当 $t=0$ 时，动点位于 A$(a,0,0)$ 处，经过时间 t 后，动点运动到点 M 处，则 $\angle \mathrm{AOM}'=\omega t$



$$\begin{cases} x=|\mathrm{OM}'|\cos\angle \mathrm{AOM}' \\ y=|\mathrm{OM}'|\sin\angle \mathrm{AOM}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \end{cases}$$

此外动点以速度 v 沿着 z 轴上升，即 $z=vt$

$$\theta \triangleq \omega t \quad b \triangleq \frac{v}{\omega} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$$

练习： 将下列曲线化为参数方程。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$

解：（1）根据第一方程引入参数，得所求为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\frac{1}{3}(6-2\cos t) \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

（1）将第二方程变形为$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$，故所求为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

空间曲面的参数方程

空间曲面的参数方程通常是含有两个参数的方程

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

例如空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \\ z = w(t) \end{cases}$

绕 z 轴旋转，所得曲面的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{(\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{(\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2}\sin\theta \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ z = w(t) \end{cases}$$

例：求直线

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

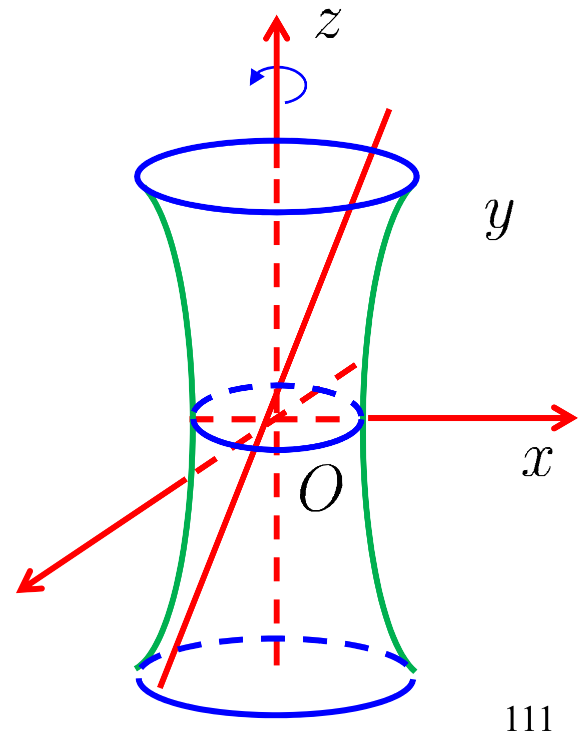
绕 z 轴旋转所得曲面的方程。

解：该直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{1+t^2}\sin\theta \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x^2 + y^2 = (1+t^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1 + \frac{z^2}{4}$$

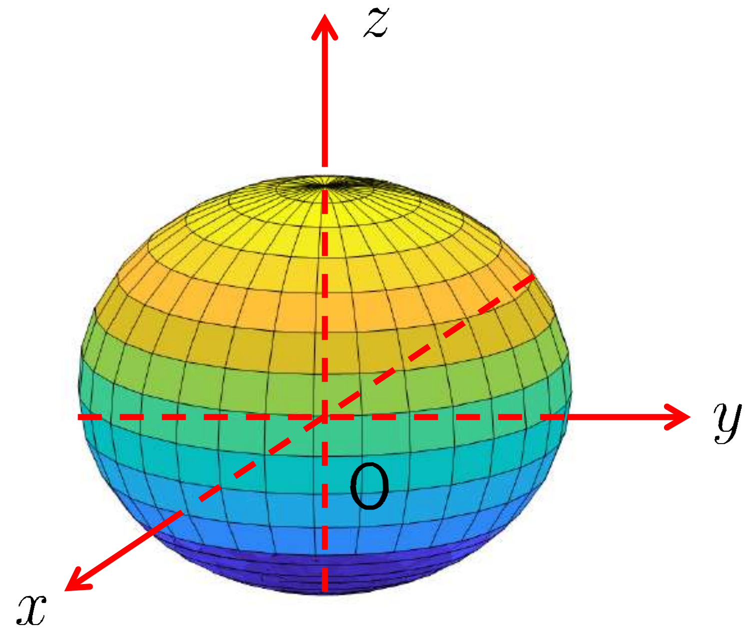


又如球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 可以看成 $x\mathrm{O}z$ 面上的半圆周

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi \\ y=0 \\ z=a\cos\varphi \end{cases} \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$$

绕 z 轴旋转所得，故球面方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=a\sin\varphi\sin\theta \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$$



空间曲线在坐标面上的投影

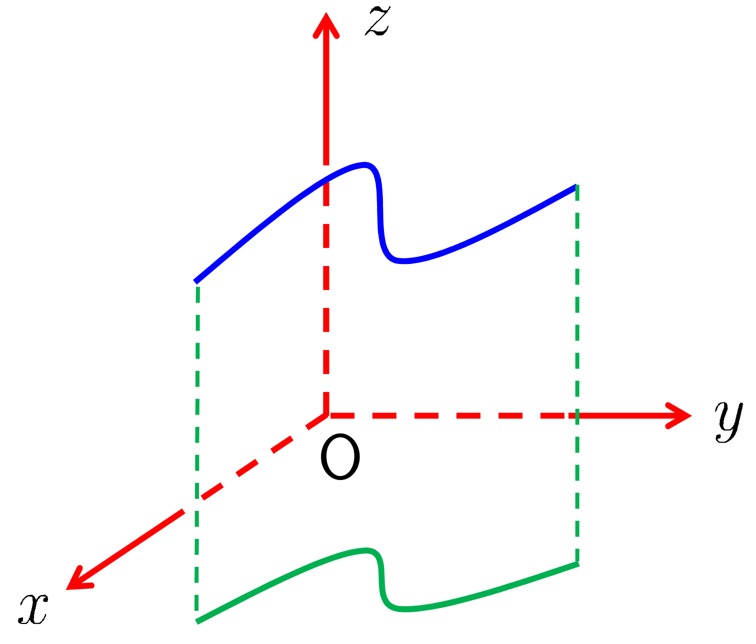
设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去 z 得到的投影柱面 $H(x,y)=0$

则 C 在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



空间曲线的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 x 得到的投影柱面 $R(y,z)=0$ 则 C 在 $y\mathrm{O}z$ 上的投影曲线为

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去 y 得到的投影柱面 $T(x,z)=0$ 则 C 在 $x\mathrm{O}z$ 上的投影曲线为

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

例4：已知两球面的方程分别为

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad 和 \quad x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

求它们的交线 C 在 xOy 面的投影曲线方程。

解：先消去 z，联立方程组

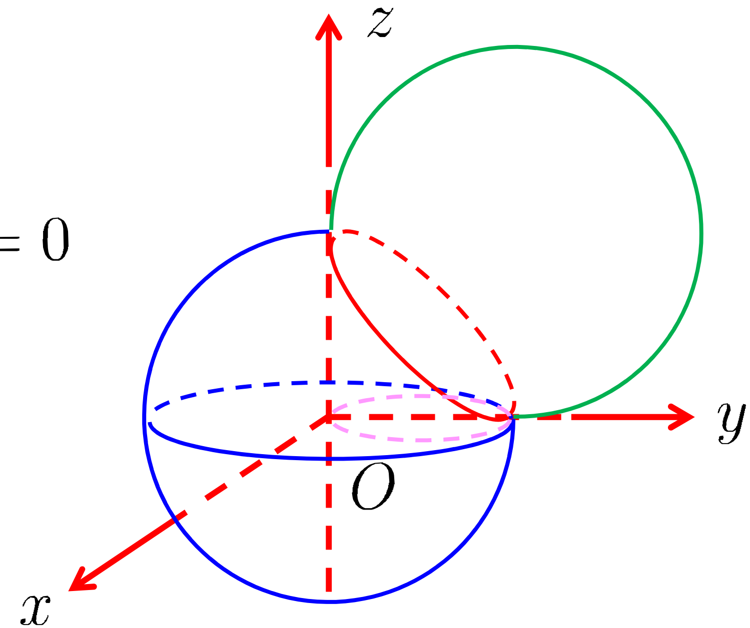
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2-(y-1)^2+z^2-(z-1)^2=0$$

$$\Rightarrow y+z=1$$

将 $z=1-y$，代入方程组，得

$$\begin{cases} x^2+y^2+(1-y)^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+y^2=1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x^2+2y^2-2y=0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

例5：设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影。

解：先消去 z，联立方程组

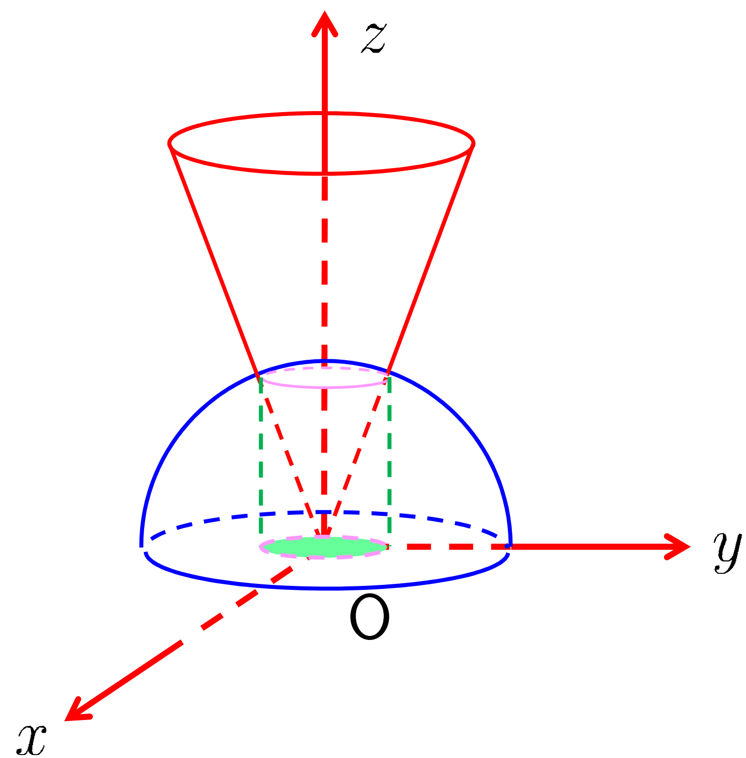
$$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4-x^2-y^2=3x^2+3y^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=1$$

故投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$



复习与提高

题1：求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的曲面与平面 $x+y+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线方程。

解：旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$，故曲面与平面交线为

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$$

消去 z 可得 $x^2+x+y^2+y=1$，故投影曲线方程为

$$\begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

作业

P49：第3题、第5题、第6题、第8题

第九章 多元函数微分法及其应用

邹秋云

软件与物联网工程学院

第九章 多元函数微分法及其应用

9.1 多元函数的基本概念

- 平面点集
- n 维空间
- 多元函数的概念
- 多元函数的极限
- 多元函数的连续性

平面点集

将一元函数从 $\mathbb{R}$ 推广到 $\mathbb{R}^2$中，然后引入 2 维平面的概念。

二维平面中，平面上的点 P 与有序二元实数组 (x, y) 之间存在一一对应关系。二元有序实数组的全体

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$$

表示坐标平面。

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记作

$$\mathsf{E} = \{(x, y)|(x, y) \text{ 具有性质 P}\}$$

eg: 平面上以原点为中心，r 为半径的圆内所有点的集

$$C = \{(x, y)|x^2 + y^2 < r^2\}$$

邻域

定义（一元函数邻域）： 设 δ 是一个正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$$

定义（二元函数邻域）： 设 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ 是 $x\mathrm{O}y$ 平面上的一个点，δ 是某一正数。与点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $\mathrm{P}(x,y)$ 的全体，称为 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(\mathrm{P}_0,\delta)$，即（圆邻域）

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(\mathrm{P}_0,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(\mathrm{P}_0,\delta)=\{\mathrm{P}|0<|\mathrm{PP}_0|<\delta\}$$

邻域

定义（三元函数邻域）： 设 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ 是三维空间上的一个点，δ 是某一正数。与点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ 距离小于 δ 的点的全体，称为 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(\mathrm{P}_0,\delta)$，即（球邻域）

$$U(\mathrm{P}_0,\delta)=\{(x,y,z)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

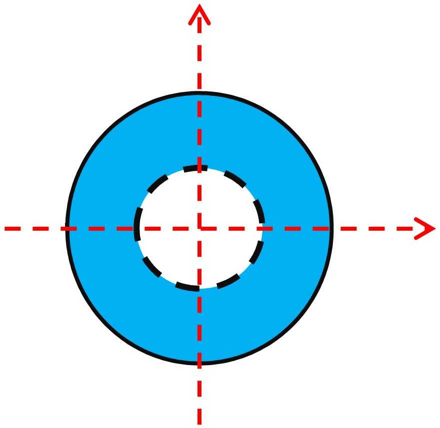
点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(\mathrm{P}_0,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(\mathrm{P}_0,\delta)=\{\mathrm{P}|\ 0<|\mathrm{PP}_0|<\delta\ \}$$

区域

任意一点 $\mathsf{P} \in \mathbb{R}^2$ 与任意一点集 $\mathsf{E} \subset \mathbb{R}^2$ 存在以下四种关系

$1 < x^2 + y^2 \le 2$



内点： 如果存在点 P 的某个邻域 $U(\mathsf{P})$ 使得 $U(\mathsf{P}) \subset \mathsf{E}$，那么称 P 为 E 的内点。

外点： 如果存在点 P 的某个邻域 $U(\mathsf{P})$ 使得 $U(\mathsf{P}) \cap \mathsf{E} = \varnothing$，那么称 P 为 E 的外点。

聚点： 如果对于任意给定的 $\delta > 0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(\mathsf{P}, \delta)$ 内总有 E 中的点，那么称 P 是 E 的聚点。

边界点：如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，那么称 P 为 E 的边界点。

边界： E 的边界点的全体，称为 E 的边界，记作 $\partial\mathsf{E}$。

开区域与闭区域

根据点集所属点的特征，定义一些重要的平面点集

开集： 如果点集 E 的点都是 E 的内点，那么称 E 为开集。
闭集： 如果点集 E 的边界$\partial E \subset E$，那么称 E 为闭集。

连通集： 如果点集 E 内任何两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于E，那么称 E 为连通集。
开区域： 连通的开集称为区域或者开区域。
闭区域： 开区域连同它的边界一起构成的点集称为闭区域。

有界集： 对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E \subset U(O, r)$$

其中 O 为坐标原点，那么称E 为有界集。
无界集： 一个集合如果不是有界集，就称这个集合为无界集。

n 维空间

设 n 为取定的一个正整数，用 $\mathbb{R}^n$表示 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体所构成的集合，即

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{ 个}} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

设$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda \in \mathbb{R}$ ，规定

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

这样定义了线性运算的集合 $\mathbb{R}^n$称为 n 维空间。

n 维空间中两点的距离

$\mathbb{R}^n$中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离，记作$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，定义

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

定义向量 $\boldsymbol{x}$ 的 p 范数（norm）

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

$\mathbb{R}^n$中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到原点的距离为

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

$\mathbb{R}^n$中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$距离为

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

$\mathbb{R}^n$中变元极限与邻域

一元函数极限

设 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $x,a\in\mathbb{R}$, $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的极限为

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

n 元函数极限

设 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时的极限为

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_2\to 0} f(x) = f(a)$$

$$\overbrace{x_1\to a_1, x_2\to a_2,\cdots, x_n\to a_n}$$

邻域

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,;\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, δ 为某一正数，则

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}$$

为点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 邻域。

多元函数的概念

定义1　设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个非子集，称映射 $f:\mathsf{D}\mapsto\mathbb{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in\mathsf{D}\quad \text{或}\quad z=f(\mathsf{P}),\quad \mathsf{P}\in\mathsf{D}$$

其中点集 D 称为函数的定义域，x 和 y 称为自变量，z 为应变量。

$$f(\mathsf{D})=\{z|z=f(x,y),\ (x,y)\in\mathsf{D}\}$$

为函数 $f(x,y)$ 的值域。

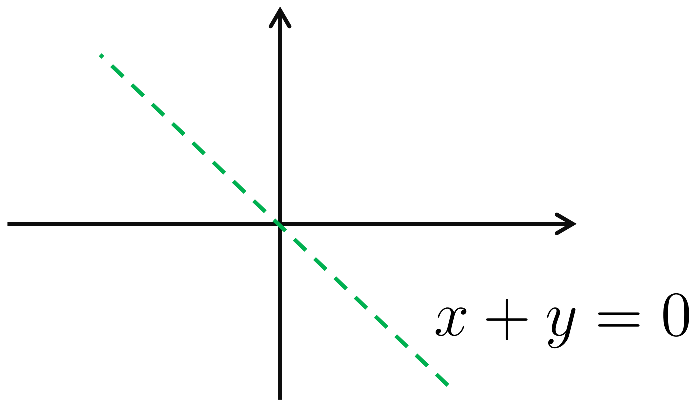
同理可以定义多元函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathsf{D}$$

使得 $f(\boldsymbol{x})$ 有意义的所有 $\boldsymbol{x}$ 组成的集合，称为这个多元函数的自然定义域。

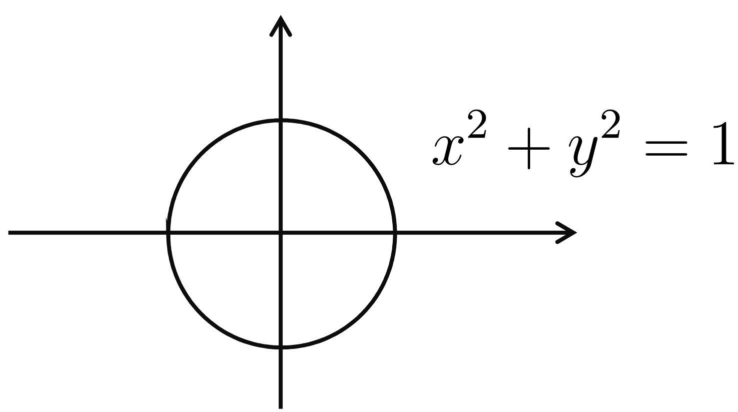
例1　$z = \ln(x+y)$ 的定义域为

$$D = \{(x, y) |\ x + y > 0\ \}$$ （无界开区域）



例2　$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域为

$$D = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \le 1\ \}$$ （有界闭区域）



练习1 求二元函数的定义域并画出该区域

(1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2}}$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-|x|-|y|}$

多元函数的极限

回顾： 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某一去心邻域有定义。如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$。则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

定义2 设二元函数 $f(\mathsf{P}) = f(x, y)$ 的定义域为 D，$\mathsf{P}_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点。如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ 使得当点 $\mathsf{P}(x, y) \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ 时，都有

$$|f(\mathsf{P}) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad 或 \quad \lim_{\mathsf{P} \to \mathsf{P}_0} f(\mathsf{P}) = A$$

例4　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，求证

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

证：这里函数 $f(x,y)$ 的定义域 $\mathrm{D}=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$，点 $\mathrm{O}(0,0)$ 为 D 的聚点。因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2$$

可见，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

即 $\mathrm{P}(x,y)\in \mathrm{D}\cap \mathring{U}(0,\delta)$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

证毕。

二元函数的极限：解释

注：函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 存在，等价于当 (x,y) 以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋于 A。

换言之：当 (x,y) 以不同的方式趋于 (x_0,y_0) 时，所得值不同时，这个二元函数的极限不存在。

例　证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

证：当 $f(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

当 $f(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

当 $f(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

故极限不存在，证毕。

例5 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

解：函数 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域 $\mathrm{D}=\{(x,y)|x\neq 0, y\in\mathbb{R}\}$，

$\mathrm{P}_0(0,2)$ 为 D 的聚点。

由积的极限运算法则，得

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right] \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \left[\frac{\sin(xy)}{xy}\right]\cdot \lim_{y\to 2} y \\
&= 2
\end{aligned}
$$

多元函数的连续性

定义3 设二元函数 $f(\mathrm{P}) = f(x, y)$ 的定义域为 D，$\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点，且 $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{D}$。如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

那么称函数 $f(x, y)$ 在点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ 处连续。

若函数 $f(x, y)$ 在 D 的每一点都连续，则称函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数。

【注】

- 多元初等函数在其定义域内总是连续的。
- 多元初等函数由一元初等函数，经过有限次四则运算和复合运算得到，例如：$\dfrac{x + x^2 - y}{1 + y^2}$，$\sin(x + y)$，$e^{x^2+y^2+z^2}$。

二元函数的间断点

定义4 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点。如果函数 $f(x,y)$ 在 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ 不连续，那么称 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点。（不连续点为间断点）

例7 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$

解：函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数，它的定义域为

$$\mathsf{D}=\{(x,y)|x\neq 0, y\neq 0\}$$

$\mathsf{P}_0(1,2)$ 是为 D 的内点，故存在 P_0 的某一邻域 $U_0(\mathsf{P}_0)\subset \mathsf{D}$，而任何邻域都是区域，所以 $U_0(\mathsf{P}_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个定义域，因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}$$

注： 若 $f(\mathsf{P})$ 是初等函数，且 P_0 是 $f(\mathsf{P})$ 的定义域的内点，那么 $f(\mathsf{P})$ 在点 P_0 处连续，即 $\lim\limits_{\mathsf{P}\to\mathsf{P}_0} f(\mathsf{P})=f(\mathsf{P}_0)$。

例8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$

解：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

练习：求下列极限

(1) $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}$$

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

(3) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\tan(xy)}{y}$$

二元函数的性质

性质1（有界性与最大最小值定理） 在有界闭区域D上的多元连续函数，必定在D上有界，且能取得它的最大值和最小值。

性质2（介值定理） 在有界闭区域D上的多元连续函数必定在取得最大值和最小值之间的任何值。

习题1 求二元函数的定义域

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$

(2) $f(x,y)=\ln(x-y+2)+\ln(2x+y-2)$

复习与提高

习题2 设$f(x+y,x-y)=xy$，求 $f(x,y)$ 。

解：令 $\xi=x+y,\ \zeta=x-y$ ，则有

$$\begin{cases}\xi=x+y\\ \zeta=x-y\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\frac{\xi+\zeta}{2}\\ y=\frac{\xi-\zeta}{2}\end{cases}$$

故

$$f(\xi,\zeta)=\frac{\xi^2-\zeta^2}{4}$$

变量替换可得

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{4}$$

复习与提高

习题3 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 。

解：将直角坐标系转换到极坐标系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

故原极限为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = 0$$

采用路径检验法，也可验证上述极限为 0。

复习与提高

习题4 找出下面函数的所有间断点

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y} & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

解：当 $y\neq 0$ 时，由于 $x\sin\dfrac{1}{y}$ 为多元初等函数，故无间断点

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，由于

$$x\sin\frac{1}{y}\leqslant \left|x\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant |x|\to 0$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。

当 $x\neq 0, y\to 0$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}\sin\dfrac{1}{y}$ 震荡，故极限不存在。

故间断点为 $\mathrm{D}=\{(x,y)|\ x\neq 0, y=0\}$。

习题5 下列函数，有且只有一个间断点的是（ C ）

(A) $\dfrac{x}{y}$

(B) $\dfrac{x}{x+y}$

(C) $e^{-x}\ln(x^2+y^2)$

(D) $\arctan(|xy|+1)$

作业

P62：　第 5 题（2）（4）（6）

　　　第 6 题（2）（4）（6）

9.2 偏导数

- 偏导数的定义及其计算方法
- 高阶偏导数

偏导数的定义及其计算方法

定义1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 固定在 x_0 处有增量 $\triangle x$ 时，相应的函数有增量 $f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$

存在，那么称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\qquad \text{或}\quad f_x(x_0,y_0)$$

同理，定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 y 的**偏导数**为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\qquad \text{或}\quad f_y(x_0,y_0)$$

定义2 如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 (x,y) 的函数，称其为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad 或 \quad f_x(x,y)$$

类似定义 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad 或 \quad f_y(x,y)$$

注：通常将偏导函数简称偏导数。

例1 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在 $(1,2)$ 处的偏导数。

解：把 y 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$$

把 x 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$$

将点 $(1,2)$ 代入上面的结果，得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=2\times1+3\times2=8$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=3\times1+2\times2=7$$

例2 求 $z = x^2 \sin 2y$ 的偏导数

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos 2y$$

例3 求 $z=x^y\ (x>0, x\neq 1)$，求证：$\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$

证：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$。所以

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z$$

例4 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 偏导数。

解：把 y 和 z 都看作常量，得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

同理可得

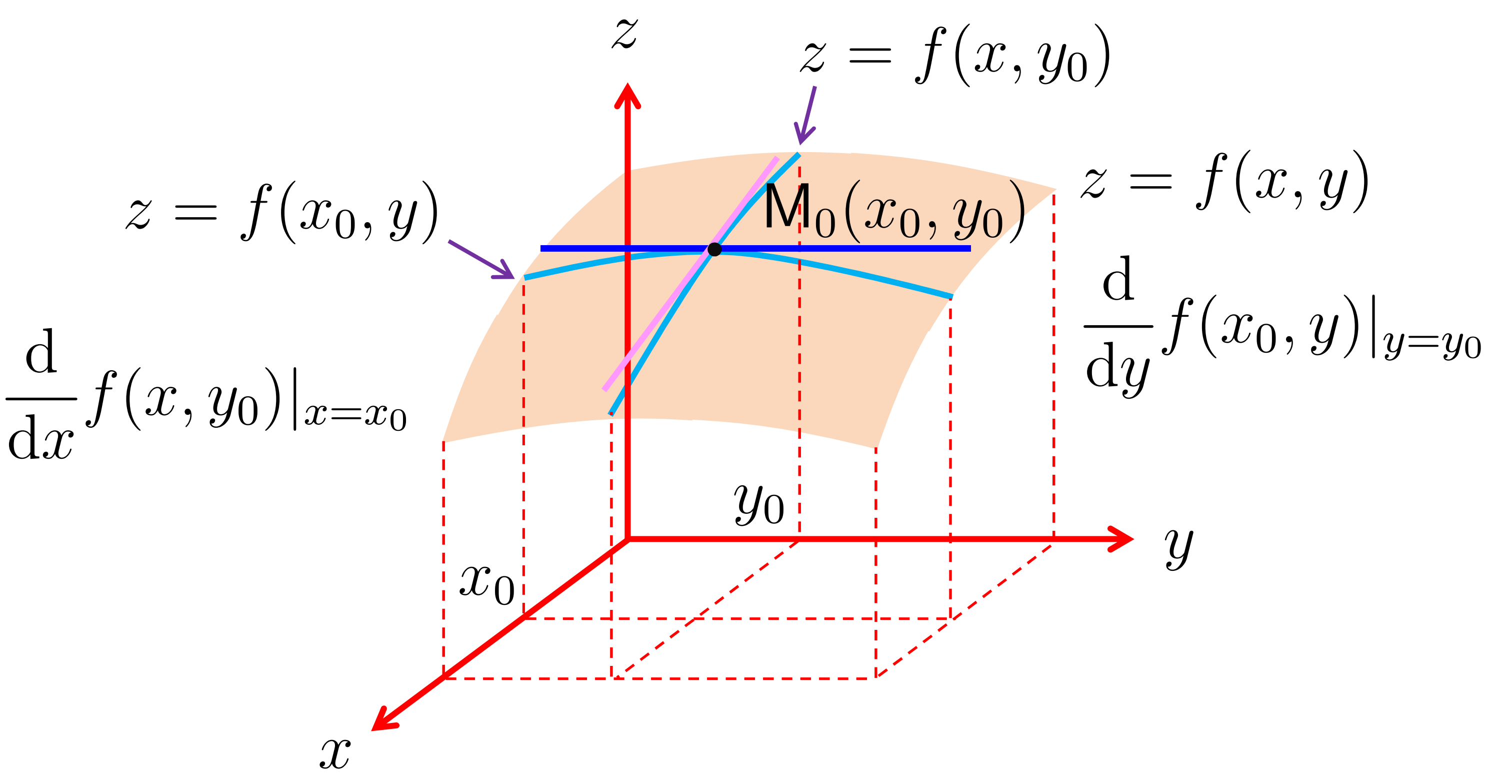
$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

练习 求下列函数的偏导数

(1) $z = 2x^3 - 5xy^2 + x^2y$

(2) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$

偏导数的几何意义


z
$z = f(x, y_0)$
$z = f(x, y)$
$z = f(x_0, y)$
$\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)|_{y=y_0}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)|_{x=x_0}$
y_0
y
x_0
x

偏导数与连续性

性质 $f(\mathsf{P})$ 在 P_0 处偏导数存在，但 $f(\mathsf{P})$ 在 P_0 处不一定连续。

例： 说明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 两个偏导数存在，但在点 $(0,0)$ 处不连续，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(0+\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}0=0$$

三元函数及多元函数的偏导数

类似地，对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，可以定义三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$。

对于多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，可以定义 n 个偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}$$

例　求下列函数的偏导数

(1) $u=xy^2z^3$

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

高阶偏导数

对二元函数 $u = f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 再求偏导数，就会得到四个二阶偏导数：

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

混合偏导

例6 设 $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求

$$\frac{\partial z^2}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2$$

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等，即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关。

例7 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

解：因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

复习与提高

习题1 设 $z=\displaystyle\int_x^y f(t)\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

习题2 求满足条件$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2+2y$, $f(x,x^2)=1$的二元函数$f(x,y)$。

解：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2y \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=x^2y^2+y^2+g(x)$$

$$f(x,x^2)=1 \quad\Rightarrow\quad g(x)=-2x^4+1$$

故

$$f(x,y)=x^2y^2+y^2-2x^4+1$$

习题3 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

说明混合偏导数 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$ 不相等。

解： $$f_y(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,0)=\frac{x^5}{x^4}=x$$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f_y(0+\triangle x,0)-f_y(0,0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle x}=1$$

同理得：$f_{xy}(0,0)=-1$ ，故不相等。

作业

P69：　第 4 题；第 6 题；第 7 题（3）；第9题

9.3 全微分

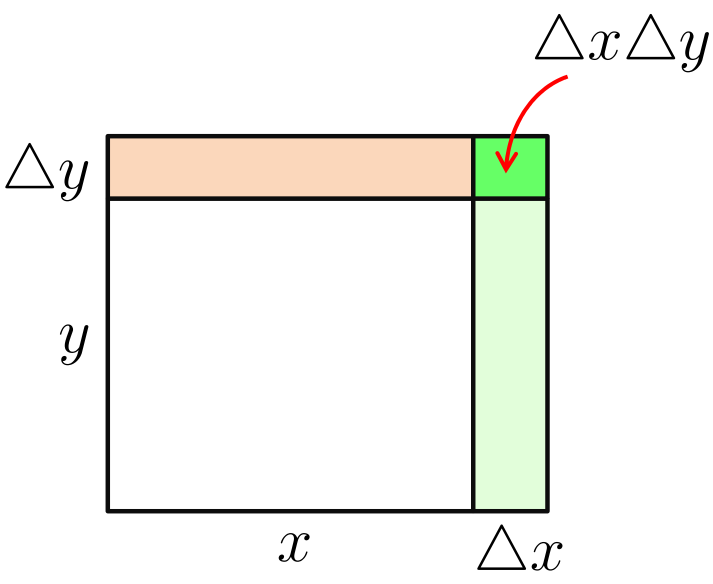
- 全微分的定义

全微分的定义

例　用 S 表示边长分别为 x 与 y 的矩形的面积，则 $\mathsf{S} = xy$ 。如果边长 x 与 y 分别取得改变量 $\triangle x$ 与 $\triangle y$，则面积 S 相应地有一个改变量

$$\begin{aligned}\triangle \mathsf{S} &= (x+\triangle x)(y+\triangle y) - xy \\ &= y\triangle x + x\triangle y + \triangle x\triangle y \\ &= y\triangle x + x\triangle y + o(\rho)\end{aligned}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$ 。



全微分的定义

定义1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某一邻域内有定义，如果函数在点(x,y)的全增量

$$\triangle z=f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\triangle z=A\triangle x+B\triangle y+o(\rho)$$

其中 A 和 B 都是不依赖于 $\triangle x$ 和 $\triangle y$ 而仅与 x 和 y 有关，$\rho=\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}$ ，那么称函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微分，而 $A\triangle x+B\triangle y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处得全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\triangle x+B\triangle y$$

可微分与连续

由微分的定义：

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \triangle z = \lim_{\rho\to 0}[A\triangle x + B\triangle y + o(\rho)] = 0$$

可知

$$\begin{aligned}\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} f(x+\triangle x, y+\triangle y) &= \lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\triangle z] \\ &= f(x,y)\end{aligned}$$

性质： 函数在点 (x,y)处可微分 $\Rightarrow$ 函数在点 (x,y)处连续

可微分与偏导数

定理1（必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，那么该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\triangle x+\frac{\partial z}{\partial y}\triangle y$$

证：由全增量公式 $\triangle z=A\triangle x+B\triangle y+o(\rho)$，令 $\triangle y=0$，得到对 x 的偏增量

$$\triangle_x z=f(x+\triangle x,y)-f(x,y)=A\triangle x+o(\triangle x)$$

$$A=\lim_{\triangle x\to 0}=\frac{f(x+\triangle x,y)-f(x,y)}{\triangle x}=\frac{\partial z}{\partial x}$$

同理有 $B=\dfrac{\partial z}{\partial y}$， 因此有 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\triangle x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\triangle y$。

可微分与偏导数

可微分 $\Longrightarrow$ 偏导数存在

偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 可微分

例 函数 $z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数为 $f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$。

易知

$$\frac{\triangle z - f_x(0,0)\triangle x - f_y(0,0)\triangle y}{\rho} = \frac{\triangle x \triangle y}{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} \neq 0$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微。

可微分与偏导数

定理2（充分条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，那么函数在该点可微分。

证：

$$\begin{aligned}\triangle z &= f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x,y)\\ &= \underbrace{[f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x, y+\triangle y)]}_{\triangleq \xi} \\ &\quad + \underbrace{[f(x, y+\triangle y) - f(x,y)]}_{\triangleq \zeta}\end{aligned}$$

根据拉格朗日中值定理

$$\xi = f_x(x+\theta_1\triangle x, y+\triangle y)\triangle x$$

由于函数 $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，故

$$\xi = f_x(x+\theta_1\triangle x, y+\triangle y)\triangle x = f_x(x,y)\triangle x + \varepsilon_1\triangle x$$

其中 ε_1 是 $\triangle x$ 和 $\triangle y$ 的函数。

同理，可得

$$\zeta = f_y(x,y)\triangle y + \varepsilon_2\triangle y$$

故在偏导数连续情况下，全增量为

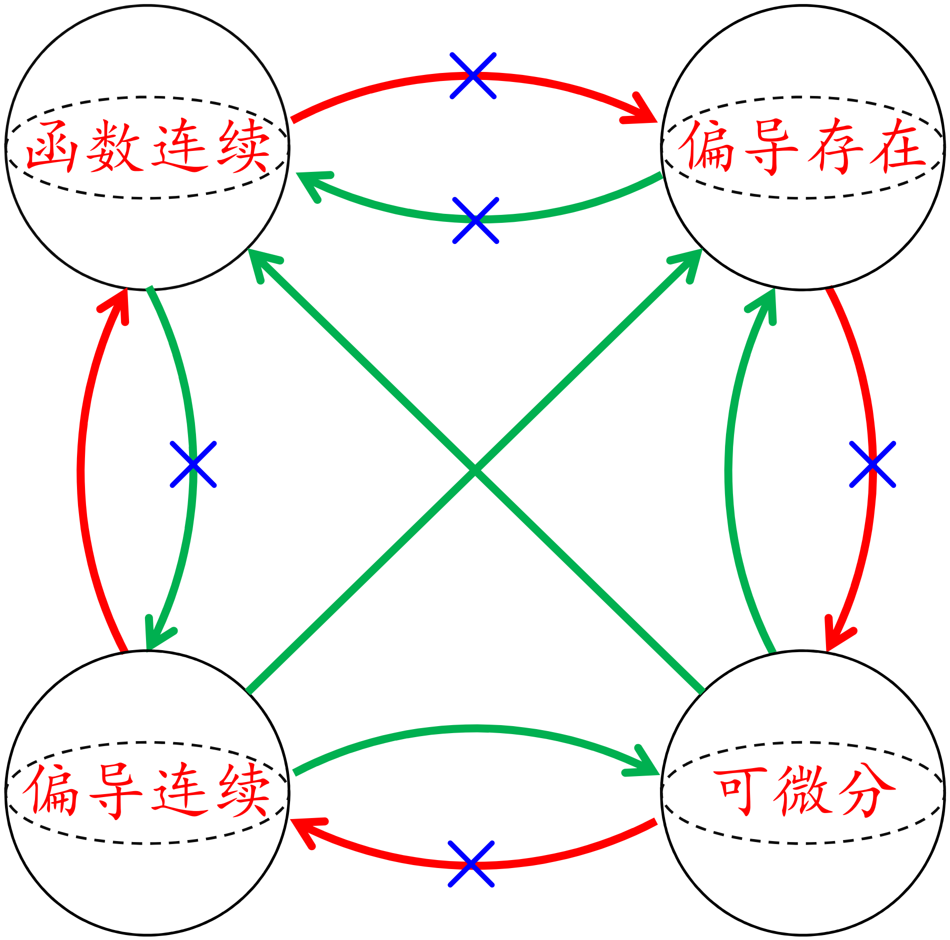
$$\triangle z = \xi + \zeta = f_x(x,y)\triangle x + f_y(x,y)\triangle y + \varepsilon_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y$$

仍需证明 $\xi_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y$ 为 ρ 的高阶无穷小

$$\left|\frac{\varepsilon_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}\right| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

当 $\triangle_x, \triangle y \to 0$ 时，有 $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0$，故 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微分。

可微分与偏导数



练习 证明

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处可微分，但偏导数不连续。

证：根据可微分定义，需证明全增量

$$\begin{aligned}\triangle z&=f(\triangle x,\triangle y)-f(0,0)\\&=((\triangle x)^2+(\triangle y)^2)\sin\frac{1}{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}\end{aligned}$$

是否满足

$$\triangle z=f_x(0,0)\triangle x+f_y(0,0)\triangle y+o(\rho)$$

计算

$$f_x(0,0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(0+\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=0$$

同理

$$f_y(0,0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0, 0+\triangle y) - f(0,0)}{\triangle y} = 0$$

故误差项为

$$\begin{aligned} &\triangle z - f_x(0,0)\triangle x - f_y(0,0)\triangle y \\ =&((\triangle x)^2 + (\triangle y)^2) \sin \frac{1}{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{((\triangle x)^2 + (\triangle y)^2) \sin \frac{1}{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}} &\le \frac{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}} \\ &= \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} \end{aligned}$$

故函数在 $(0,0)$ 可微。

计算

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

当 $x,y \to 0$ 时，$\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 产生震荡，故极限不存在。

故偏导数不连续。

例1 计算函数 $z = x^2y + y^2$ 的全微分

解：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$，所以

$$\mathrm{d}z = 2xy\mathrm{d}x + (x^2 + 2y)\mathrm{d}y$$

例2 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处得全微分

解：计算

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2$$

所以

$$\mathrm{d}z\big|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2\mathrm{d}x+2e^2\mathrm{d}y$$

例3 计算函数 $u = x + \sin\dfrac{y}{2} + e^{yz}$。

解：因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{y}{2} + ze^{yz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$，所以

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)\mathrm{d}y + ye^{yz}\mathrm{d}z$$

作业

P75：　第 1 题（1）（3）

第 3 题

第 5 题

9.4 多元函数的求导法则

- 多元函数的求导法则

一元函数与多元函数复合

定理1 如果函数 $u=\varphi(t)$ 和 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ 在点 t 可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

证： 设 t 获得增量 $\triangle t$，这时 $u=\varphi(t),v=\psi(t)$ 对应的增量为 $\triangle u,\triangle v$，由此，函数 $z=f(u,v)$ 相应获得增量为 $\triangle z$

$$\triangle z=\frac{\partial z}{\partial u}\triangle u+\frac{\partial z}{\partial v}\triangle v+\epsilon_1\triangle u+\epsilon_2\triangle v$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\triangle z}{\triangle t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\triangle u}{\triangle t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\triangle v}{\triangle t}+\epsilon_1\frac{\triangle u}{\triangle t}+\epsilon_2\frac{\triangle v}{\triangle t}$$

由于 $\triangle u,\triangle v\to 0$ 有 $\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$。

例1 设 $z = xy,\ x = e^t,\ y = \sin t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

解：由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x,\quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$ ，因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= ye^t + x\cos t\end{aligned}$$

多元函数与多元函数复合

定理2 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在 (x,y) 处的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

例2 设 $z = uv$, $u = 3x^2 + y^2$, $v = 2x + y$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 6vx + 2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2vy + u$$

例3 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 以及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$。

解：令 $\begin{cases} u=x+y+z \\ v=xyz \end{cases}$，根据复合函数的求导法则，有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_u+yz\cdot f_v$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f_u+yzf_v)=\frac{\partial f_u}{\partial z}+yf_v+yz\frac{\partial f_v}{\partial z}$$

由于 u, v 为中间变量，根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial f_u}{\partial z}=\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f_{uu}+xyf_{uv}$$

$$\frac{\partial f_v}{\partial z}=\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f_{vu}+xyf_{vv}$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = f_{uv} + xyf_{uv} + yf_v + yzf_{uv} + xy^2zf_{vv}$$

$$= f_{uu} + y(x+z)f_{uv} + xy^2zf_{vv} + yf_v$$

例4 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，把下列表达式转换为极坐标中的形式

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$　　(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

解：（1）直角坐标和极坐标的转换关系为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

计算

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\rho}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{y}{\rho^2}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\theta}\frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{x}{\rho^2}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

代入得 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$。

其他情形

定理3 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $v=\psi(y)$ 在点 y 处可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(y))$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

全微分不变性

性质　设有 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数，u,v 为自变量，则全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

若 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 为中间变量，且也具有连续偏导数，则全微分为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\
&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

例6 利用全微分的不变性，求二元函数 $z=(x^2-y^2)e^{xy}$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解：令 $u=(x^2-y^2)$，$v=e^{xy}$，有 $z=uv$

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}(x^2-y^2)=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}(e^{xy})=ye^{xy}\mathrm{d}x+xe^{xy}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=e^{xy}(2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)+(x^2-y^2)(ye^{xy}\mathrm{d}x+xe^{xy}\mathrm{d}y)\\&=\underbrace{[2xe^{xy}+(x^2-y^2)ye^{xy}]}_{\frac{\partial z}{\partial x}}\mathrm{d}x+\underbrace{[(x^2-y^2)xe^{xy}-2ye^{xy}]}_{\frac{\partial z}{\partial y}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

复习与提高

习题1 设 $z=e^{x-2y}$，$x=\sin t$，$y=\cos t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$。

复习与提高

习题2 设 $z=f(u,v,t)=uv+\sin t$，其中 $u=e^t, v=\cos t$，求全导数 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$。

作业

P82：　第 6 题；第 9 题；第 13 题（4）；第 14 题

9.5 隐函数的求导公式

- 一个方程的情形
- 方程组的情形

隐函数的导数

定义1 不经过显化，直接由方程 $F(x,y)=0$ 表示的函数称**隐函数**，如方程 $x-y^3-1=0$ 。直接显化的函数称为**显函数**，如 $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 。

定理1 设函数 $F(x,y)$ 在点 $\mathsf{P}(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

例1 验证方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点 $(0,1)$ 的某个邻域内能唯一确定一个有连续导数，当 $x=0, y=1$ 时隐函数 $y=f(x)$，并求这个函数的一阶和二阶导数在 $x=0$ 的值。

解：设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，计算 $F_x=2x$，$F_y=2y$ 。于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2}=\frac{y+\frac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1$$

隐函数的导数

定理2 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $\mathsf{P}(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例2 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，计算

$$F_x=2x,\ F_z=2z-4$$

当 $z\neq 2$ 时有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x}{2-z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)}=\frac{(2-z)+x\frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

方程组确定的隐函数及其导数

隐函数的存在定理还可推广到方程组的情形

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u=f(x,y) \\ v=g(x,y) \end{cases}$$

由 F 和 G 组成的偏导数，称为雅可比（Jacobi）行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

定理3 设函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 满足

（1）在点 $\mathsf{P}(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数；

（2）$F(\mathsf{P})=0, G(\mathsf{P})=0$

（3）$J|_{\mathsf{P}} = \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{\mathsf{P}} \neq 0$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0, G(x,y,u,v)=0$ 在点 P的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数

$$\begin{cases} u = f(x,y) \\ v = g(x,y) \end{cases} \quad \text{且满足} \quad \begin{cases} u_0 = f(x_0,y_0) \\ v_0 = g(x_0,y_0) \end{cases}$$

并有行列式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

推导：假设 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 有隐函数组 $\begin{cases} u=f(x,y) \\ v=g(x,y) \end{cases}$

则方程组两端对 x 求偏导有

$$\begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

解该方程组可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}$$

例3　设 $xu - yv = 0,\ yu + xv = 1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$。

解：根据定理 3 计算

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = -\frac{\begin{vmatrix} u & -y \\ v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{ux + yv}{x^2 + y^2}$$

同理可得

$$\frac{\partial v}{x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$$

例4　设函数 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在点 (u,v) 的某一邻域内连续且有连续偏导数，又 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

（1）证明方程组 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 在点 (x,y,u,v) 的某一邻域内唯一确定一组连续且具有连续偏导数的反函数，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$。

（2）求反函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 对 x,y 偏导数。

解：（1）将方程组改写成

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)\equiv x-x(u,v)=0\\ G(x,y,u,v)\equiv y-y(u,v)=0\end{cases}$$

则按假设 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，由隐函数存在定理 3，即可获证。

例4　设函数 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在点 (u,v) 的某一邻域内连续且有连续偏导数，又 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

（2）求反函数 $u=u(v,y)$，$v=v(x,y)$ 对 x,y 偏导数。

解：（2）将反函数 $u=u(v,y)$，$v=v(x,y)$代入原方程组中

$$\begin{cases} x\equiv x(u(x,y),v(x,y)) \\ y\equiv y(u(x,y),v(x,y)) \end{cases}$$

将上述恒等式两端分别对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases} 1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

由于$J\neq 0$，故解得：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial v}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial u}$。

同理可得：$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial v}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial u}$。

习题1 设方程 $xy+\ln y-\ln x=0$，确定函数 $y=f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

复习与提高

习题2 设 $F(u,v)$ 有连续偏导数，由方程 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ 求全微分 $\mathrm{d}z$ 。

解：令 $u=\frac{x}{z}$, $v=\frac{y}{z}$，则有

$$\mathrm{d}F=F_u\mathrm{d}u+F_v\mathrm{d}v=0$$

其中

$$\mathrm{d}u=\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}\qquad\qquad \mathrm{d}v=\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}$$

将上式代入，可得

$$\mathrm{d}z=\frac{z(F_u\mathrm{d}x+F_v\mathrm{d}y)}{F_ux+F_vy}$$

作业

P88：　第 6 题

第10题

第 11 题（3）

第 12 题

9.6 多元函数微分学的几何应用

- 一元向量值函数及其导数
- 空间曲线的切线与法平面
- 曲面的切平面与法线

一元向量值函数及其导数

定义1 设数集 D $\subset \mathbb{R}$ ，则称映射 $\boldsymbol{f}: \mathrm{D} \mapsto \mathbb{R}^n$ 为一元向量值函数，通常记为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), \qquad t \in \mathrm{D}$$

其中数集 D 称为函数的定义域，t 为自变量，$\boldsymbol{r}$ 为应变量。

例：空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}, \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

令 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{f}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \omega(t)\boldsymbol{k}$，可得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$$

定义2 设向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在点 t_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在一个常向量 $\boldsymbol{r}_0$，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $\boldsymbol{f}(t)$ 都满足不等式

$$|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{r}_0|<\varepsilon$$

那么常向量 $\boldsymbol{r}_0$ 称为向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 当 $t\to t_0$ 的**极限**，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{或} \qquad \boldsymbol{f}(t)\to\boldsymbol{r}_0, t\to t_0$$

向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的**极限存在**的充要条件是：$\boldsymbol{f}(t)$ 的三个分量函数 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 当 $t\to t_0$ 时极限都存在，即

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}f_1(t), \lim_{t\to t_0}f_2(t), \lim_{t\to t_0}f_3(t)\right)$$

例1　设 $\boldsymbol{f}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ 求 $\lim\limits_{t\to\pi/4}\boldsymbol{f}(t)$ 。

解：

$$\lim_{t\to\pi/4}\boldsymbol{f}(t)=\left(\lim_{t\to\pi/4}\cos t\right)\boldsymbol{i}+\left(\lim_{t\to\pi/4}\sin t\right)\boldsymbol{j}+\left(\lim_{t\to\pi/4}t\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}$$

定义3 设向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在点 t_0 的某一邻域内有定义，若

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}(t_0)$$

则称向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 连续。

定义4 若对于 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 D 的每一点都连续，则称 $\boldsymbol{f}(t)$ 是 D 的连续函数。

定义5 设向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 在点 t_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle \boldsymbol{r}}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\triangle t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\triangle t}$$

存在，那么就称这个极限向量为向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 处的导数和导向量，记作 $\boldsymbol{f}'(t_0)$ 或 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}$ 。

向量值函数的物理意义

设向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 是沿空间光滑曲线运动的质点 M 的位置向量，则向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 的导向量有以下的物理意义：

$\boldsymbol{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 是质点 M 的速度向量，其方向与曲线相切；

$\boldsymbol{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ 是质点 M 的加速度向量。

例2 设空间曲线 Γ 的向量方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t^2+1, 4t-3, 2t^2-6t), \quad t\in\mathbb{R}$$

求曲线 Γ 在与 $t=2$ 相应的点处的单位切向量。

解：

$$\boldsymbol{f}'(t)=(2t, 4, 4t-6)$$

$$\boldsymbol{f}'(2)=(4, 4, 2)$$

故所求单位切向量为

$$\frac{\boldsymbol{f}'(2)}{|\boldsymbol{f}'(2)|}=\frac{(4,4,2)}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

例3　一个人在悬挂式滑翔机上由于快速上升气流而沿向量

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(3\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$$

的路径上螺旋式向上，求：

（1）滑翔机在任意时刻 t 的速度向量和加速度向量；

（2）滑翔机在任意时刻 t 的速率；

（3）滑翔机的加速度与速度正交的时刻。

解：（1）
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(-3\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=(-3\cos t)\boldsymbol{i}-(3\sin t)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

（2）
$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+(2t)^2}=\sqrt{9+4t^2}$$

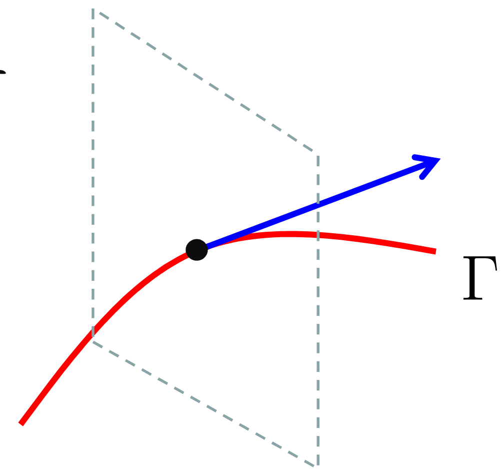
（3）
$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=9\sin t\cos t-9\sin t\cos t+4t=0$$

$$\Rightarrow\ t=0$$

空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ ，$t\in[\alpha,\beta]$ 。则曲线

在点 $(x_0,y_0,z_0)=(\phi(t_0),\psi(t_0),\omega(t_0))$ 处有



切向量： $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线： $\dfrac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

法平面： $\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

例4　求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程

解：曲线 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 $(1,1,1)$ 所对应参数为 $t_0=1$，所以切向量为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(1,2,3)$$

切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

法平面方程为

$$x+2y+3z=6$$

空间曲线另外两种形式

设空间曲线 Γ 的显式方程为 $\begin{cases} y=\psi(x) \\ z=\omega(x) \end{cases}$, $x\in[\alpha,\beta]$ 。则曲线

在点 $(x_0,y_0,z_0)=(x_0,\psi(x_0),\omega(x_0))$ 处有

切向量： $\boldsymbol{T}=(1,\psi'(x_0),\omega'(x_0))$

切线： $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\psi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(x_0)}$$

法平面： $(x-x_0)+\psi'(x_0)(y-y_0)+\omega'(x_0)(z-z_0)=0$

空间曲线另外两种形式

设空间曲线 Γ 的隐式方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$。则曲线

在点 $(x_0,y_0,z_0)=(x_0,\psi(x_0),\omega(x_0))$ 处有

切向量： $\boldsymbol{T}=(T_1,T_2,T_3)$

$$=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

切线： $$\frac{x-x_0}{T_1}=\frac{y-y_0}{T_2}=\frac{z-z_0}{T_3}$$

法平面： $T_1(x-x_0)+T_2(y-y_0)+T_3(z-z_0)=0$

例5　求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程

解：令

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6 \\ G(x,y,z)=x+y+z \end{cases}$$

则空间曲线在点 $(1,-2,1)$ 的切向量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right) \Bigg|_{(1,-2,1)} \\ &= \left(\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \Bigg|_{(1,-2,1)} \\ &= (-6,0,6) \end{aligned}$$

取切向量为 $\boldsymbol{T}=(1,0,-1)$。

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面方程为

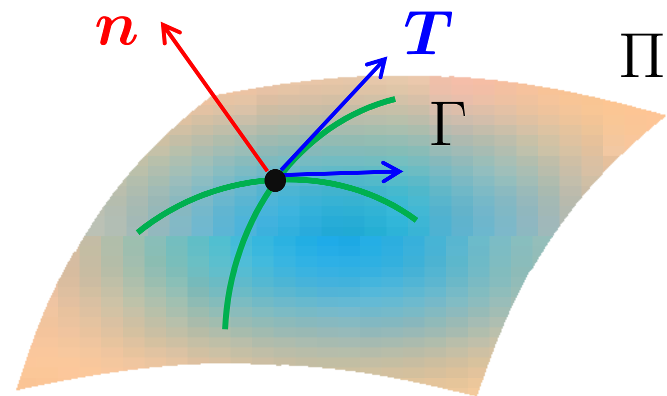
$$(x-1)-(z-1)=0$$

$$\Rightarrow\ x-z=0$$

空间曲面的切平面

空间曲面 Π 的隐式方程为 $F(x,y,z)=0$。通过点 $\mathsf{M}(x_0,y_0,z_0)$

取任意一条曲线 Γ



$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

得曲线切线方程

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

由于 $F(x,y,z)=0$ 在 $\mathsf{M}(x_0,y_0,z_0)$ 有连续偏导数

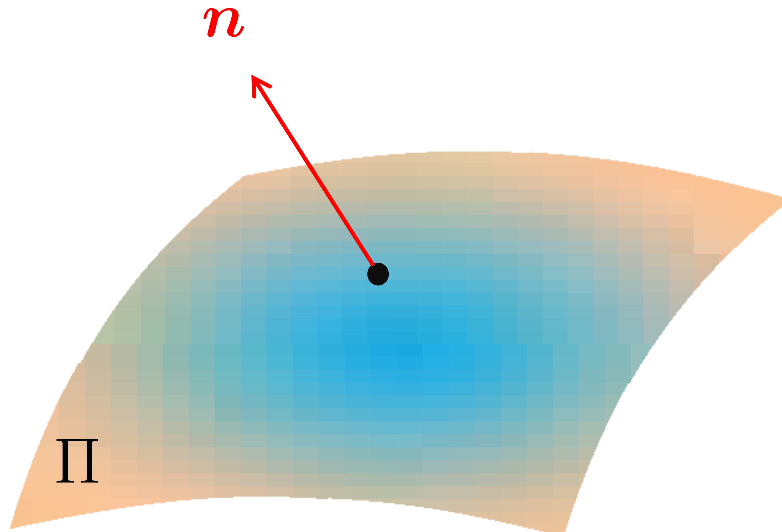
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))|_{t=t_0}=0$$

则有

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0$$

$$\Rightarrow (F_x,F_y,F_z)|_{(x_0,y_0,z_0)} \perp (\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

定义6 曲面 Π 上所有经过点 M 的曲线在点 M 的切线所组成的平面称为曲面 Π 的在点 M 处的切平面



切平面方程为

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

切平面的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

例6　求球面 $x^2+y^2+z^2=14$，在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程。

解：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z),\quad \boldsymbol{n}|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$$

所以在点 $(1,2,3)$ 处，此球面的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$$

整理得

$$x+2y+3z-14=0$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

由此可见，法线经过原点。

例7 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程。

解： $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 1$

$$\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, -1),\ \boldsymbol{n}\big|_{(2,1,4)} = (4, 2, -1)$$

所以在点 $(2,1,4)$ 处，此旋转抛物面的切平面方程为

$$4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0$$

整理得

$$4x + 2y - z - 6 = 0$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

复习与提高

习题1 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切，求 λ。

解：设切点为 $\mathsf{M}(x_0, y_0, z_0)$，则椭球面在该点的法向量为

$$\boldsymbol{T}=(6x_0, 2y_0, 2z_0)$$

则有

$$\begin{cases} \frac{6x_0}{3}=\frac{2y_0}{\lambda}=\frac{2z_0}{-3} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 \end{cases}$$

解得 $\lambda=\pm 2$。

习题2 设 $f(u)$ 可微，证明曲面 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 上任一点处的切平面都通过原点。

解：在曲面上任取一点 $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$，构造

$$F(x, y, z) = z - xf\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

计算

$$F_x|_{\mathrm{M}} = -\frac{\partial z}{\partial x}|_{\mathrm{M}},\quad F_y|_{\mathrm{M}} = -\frac{\partial z}{\partial x}|_{\mathrm{M}},\ F_z|_{\mathrm{M}} = 1$$

该曲面在点 $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面为

$$-\frac{\partial z}{\partial x}|_{\mathrm{M}}(x - x_0) - \frac{\partial z}{\partial y}|_{\mathrm{M}}(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

即证：$\frac{\partial z}{\partial x}|_{\mathrm{M}} x_0 + \frac{\partial z}{\partial y}|_{\mathrm{M}} y_0 - z_0 = 0$。

习题3 求螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos\phi \\ y = a\sin\phi \\ z = b\phi \end{cases}$

在 $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程。

习题4 设 $F(u,v)$ 可微，证明曲面

$$F(x-my,z-ny)=0$$

的所有切平面与定直线平行。

解：令 $u=x-my,\ v=z-ny$ 。计算

$$F_x=F_u,\ F_y=-mF_u-nF_v,\ F_z=F_v$$

可得任一点法向量 $\boldsymbol{n}=(F_u,-mF_u-nF_v,F_v)$。

令直线方向向量为 $\boldsymbol{\ell}=(x,y,z)$，则

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\ell}=0 \qquad \Rightarrow \qquad xF_u-myF_u-nyF_v+zFv=0$$

可得$\begin{cases} x=my \\ z=ny \end{cases}$，令 $y=1$，得 $x=m,z=n$，故 $\boldsymbol{\ell}=(m,1,n)$

作业

P99： 第 3 题

第 5 题

第 8 题

第 10 题

9.7 方向导数与梯度

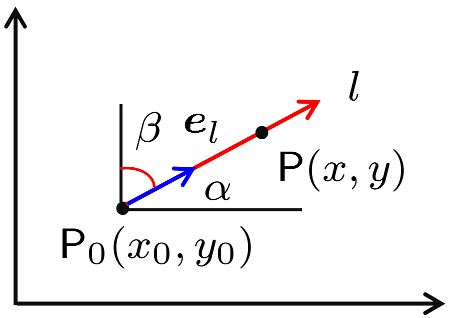
- 方向导数
- 梯度

方向导数

设 l 是 $x\mathsf{O}y$ 平面上以 $\mathsf{P}_0(x_0,y_0)$ 为始点的一条射线，

$\boldsymbol{e}_\ell=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与 l 同方向的单位向量，射线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\cos\beta \end{cases}$$



设函数 $z=f(x,y)$ 在 $\mathsf{P}_0(x_0,y_0)$ 的某个定义域有定义，则称

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数。

方向导数与偏导数

若函数 $f(x,y)$在 (x_0,y_0)处偏导数存在

- 当$\alpha=0$，$\boldsymbol{e}_l=(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)$$

- 当$\beta=0$，$\boldsymbol{e}_l=(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}=f_y(x_0,y_0)$$

反之，若$\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{i}$，方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|(x_0,y_0)$存在，则偏导数未必存在。

定理1 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $\mathsf{P}_0(x_0,y_0)$ 处可微分，那么函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

其中 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的**方向余弦**。

证： 由可微有

$$\begin{aligned} f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - f(x_0,y_0) &= f_x(x_0,y_0)\triangle x \\ &\quad + f_y(x_0,y_0)\triangle y + o(\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}) \end{aligned}$$

点 $(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y)$ 在射线 l 上，故有

$$\triangle x = t\cos\alpha,\ \triangle y = t\cos\beta,\ \sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2} = t$$

所以

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta) - f(x_0,y_0)}{t}$$

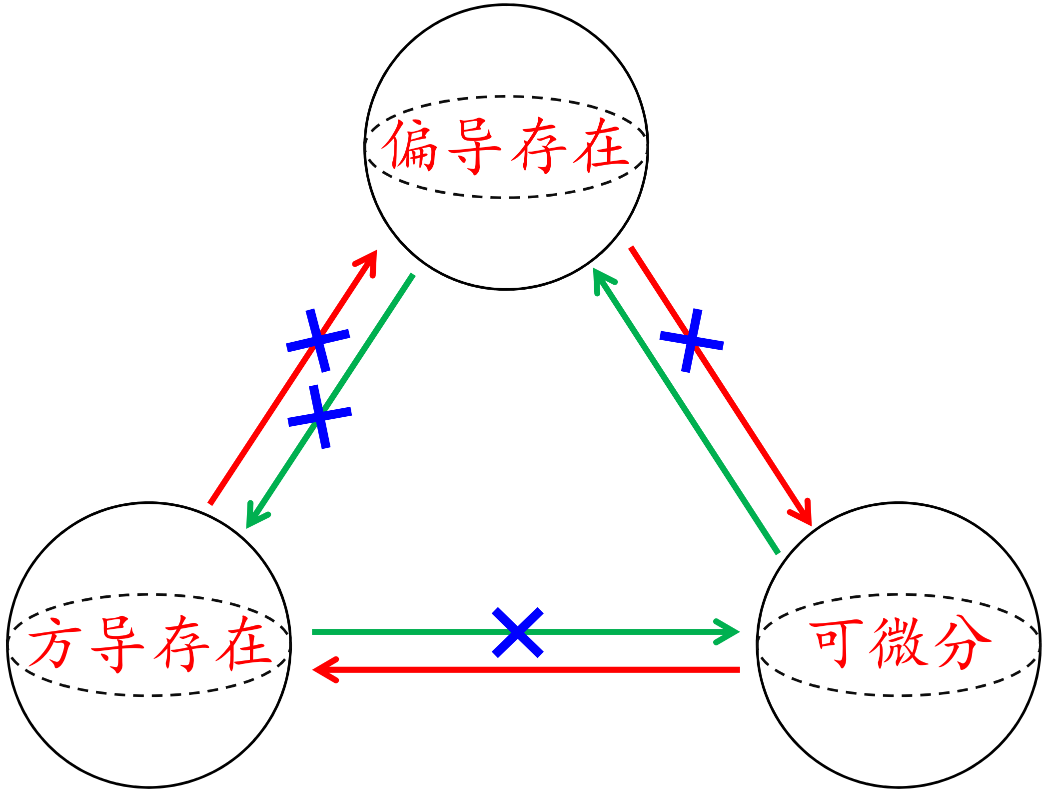
$$= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

定理2 如果函数 $f(x,y,z)$ 在点$\mathsf{P}_0(x_0,y_0,z_0)$处可微分，那么函在该点沿 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} =&f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha\\&+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是方向 l 的**方向余弦**。

可微、方向导数与偏导数关系



例1　求函数 $z=xe^{2y}$ 在 $\mathrm{P}(1,0)$ 处沿从点 $\mathrm{P}(1,0)$ 到点 $\mathrm{Q}(2,-1)$ 的方向的方向导数。

解：向量 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,-1)$ 的单位向量为 $\boldsymbol{e}_l=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

由于函数可微分，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=e^{2y}|_{(1,0)}=1,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,0)}=2xe^{2y}|_{(1,0)}=2$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,0)}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}+2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例2　求函数 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,2)$ 沿方向 l 的的方向导数，其中 l 的方向角为 $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$。

解：与 l 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_l=(\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ)=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$$

因为函数可微分，且

$$f_x(1,1,2)=(y+z)\big|_{(1,1,2)}=3$$

$$f_y(1,1,2)=(x+z)\big|_{(1,1,2)}=3$$

$$f_z(1,1,2)=(y+x)\big|_{(1,1,2)}=2$$

故方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,1,2)}=3\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(5+3\sqrt{2})$$

梯度

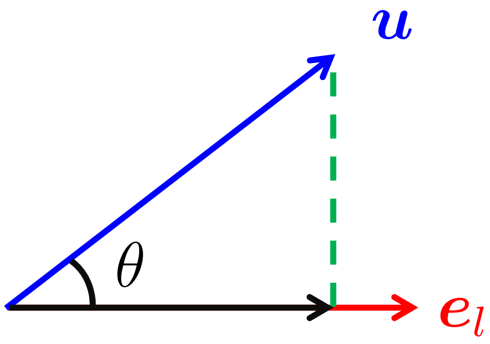
函数 $z = f(x, y)$ 在点 $\mathsf{P}(x_0, y_0)$ 在方向 $\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数为

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{e}_l} \\
&= |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{e}_l| \cos\theta
\end{aligned}$$

其中 θ 是向量 $\boldsymbol{u}$ 和向量 $\boldsymbol{e}_l$ 的夹角。

梯度

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{e}_l| \cos\theta$$



- 当 $\theta = 0$ 时，方向导数最大

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = |\boldsymbol{u}|$$

- 当 $\theta = \pi$ 时，方向导数最小

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = -|\boldsymbol{u}|$$

- 当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，方向导数为 0

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = 0$$

梯度

定义1 设函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有连续一阶偏导数，则对于每一点 $P_0(x_0,y_0)\in D$，定义

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$处的梯度（gradient），记作 $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$。称

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

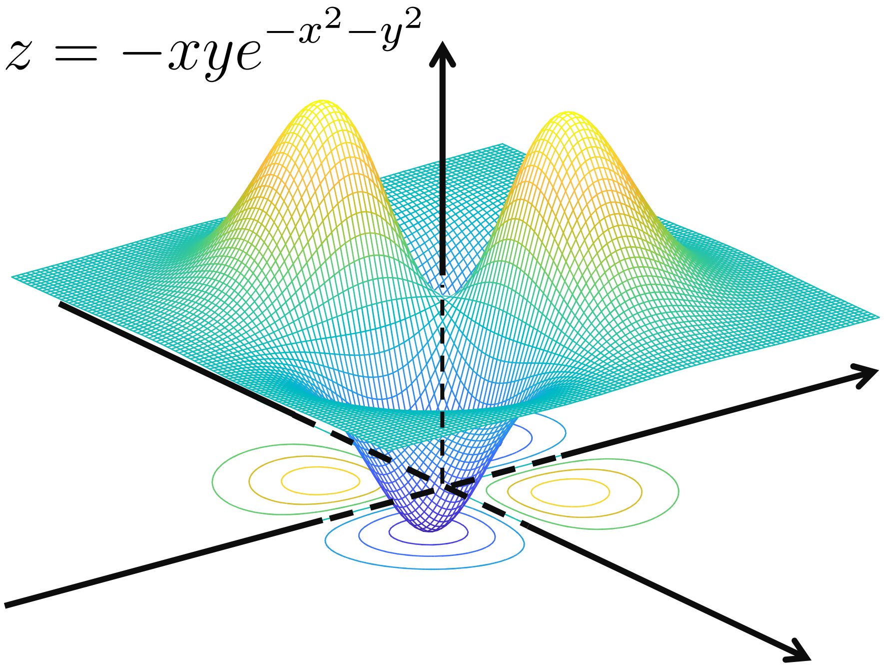
向量微分算子（operator），如 $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$。

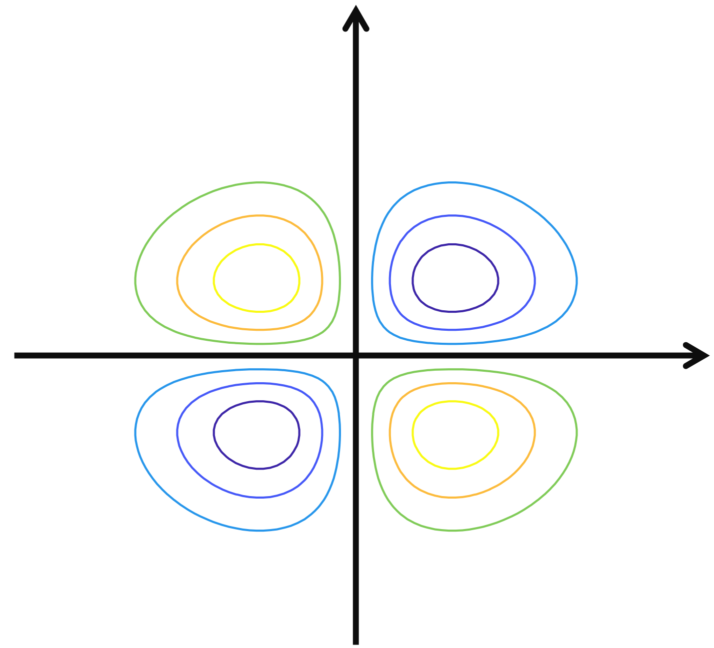
定义2 设函数 $f(x,y,z)$ 在空间区域 G 内具有连续一阶偏导数，则对于每一点 $\mathsf{P}_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathsf{G}$，定义

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0) &= \nabla f(x_0,y_0,z_0)\\ &= f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}\\ &\quad + f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

为函数 $f(x,y,z)$ 在点 $\mathsf{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度（gradient），记作 $\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ 。

梯度与等值线





定义3 二元函数 $z=f(x,y)$ 与平面 $z=c$ 所截曲线，在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影曲线，即 $f(x,y)=c$，称为函数 $z=f(x,y)$ 的等值线。

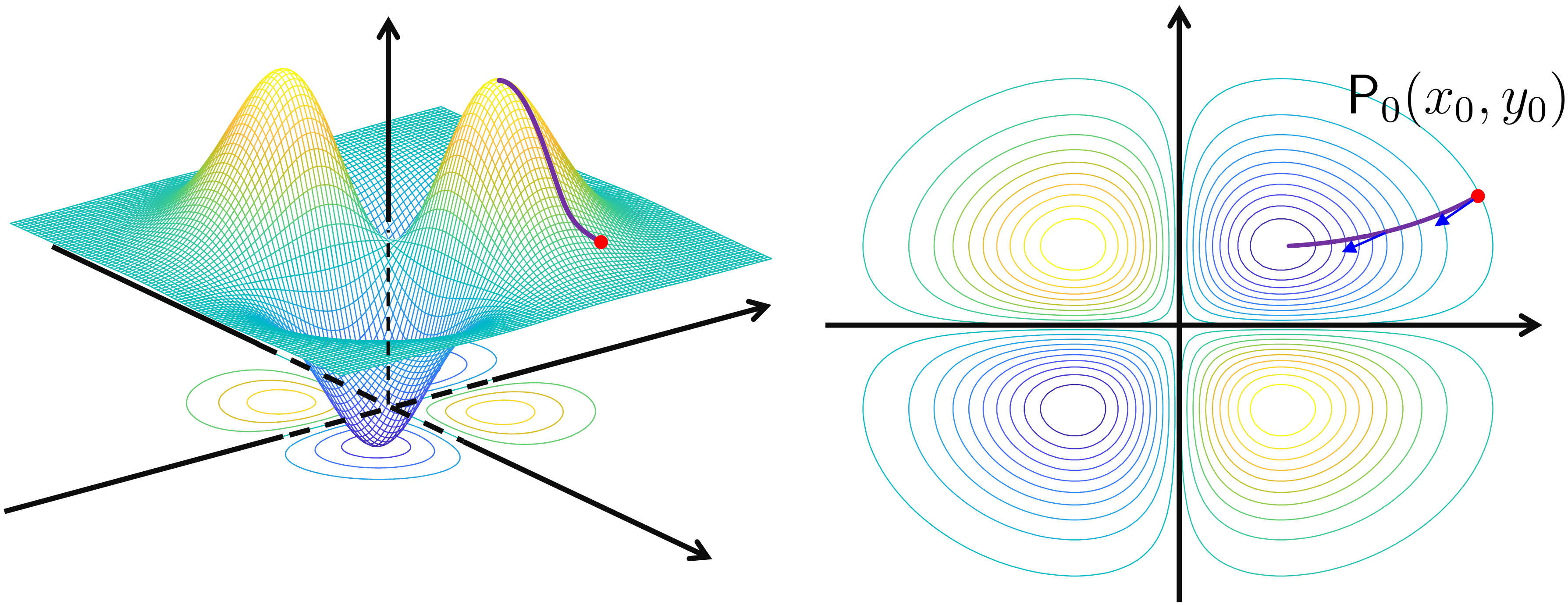
若 f_x, f_y 不同时为零，则等值线 $f(x,y)=c$ 上任一点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ 处的一个单位法向量为（Hint：曲面法向量去掉 z 轴）

$$\boldsymbol{n}=\frac{(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}=\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$ 的方向就是等值线 $f(x,y)=c$ 在这点的法线方向 $\boldsymbol{n}$，而梯度的模 $|\nabla f(x_0,y_0)|$ 就是沿这个法线方向的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$，即

$$\nabla f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}$$

注：等值线是空间曲线。在 $x\mathrm{O}y$ 面所展示的曲线为等值线在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影。


$P_0(x_0, y_0)$

例3　求 $\mathrm{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

解：令 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，计算偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$$

故

$$\mathrm{grad}\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)}\boldsymbol{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{j}$$

例4 设$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，点 $P_0(1,1)$，求：

（1）$f(x,y)$ 在点 P_0 处增加最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数；

（2）$f(x,y)$ 在点 P_0 处减少最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数；

（3）$f(x,y)$ 在点 P_0 处变化率为零的方向。

解：（1）$f(x,y)$ 在点 P_0 处沿 $\nabla f(1,1)$ 增长最快

$$\nabla f(1,1)=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})|_{(1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

故所求方向可取为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

沿该方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}|_{(1,1)}=|\nabla f(1,1)|=\sqrt{2}$$

（2）$f(x,y)$ 在点 P_0 处沿 $-\nabla f(1,1)$ 的方向减少最快，可取

$$\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial n_1}|_{(1,1)} = -|\nabla f(1,1)| = -\sqrt{2}$$

（3）$f(x,y)$ 在点 P_0 处沿垂直于 $\nabla f(1,1)$ 的方向变化率为零

$$\boldsymbol{n}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

例5 设 $f(x,y)=x^3-xy^2-z$ ，点 $\mathrm{P}_0(1,1,0)$ 。问 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 沿什么方向变化最快，在这个方向的变化率是多少？

解：计算

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z)|_{(1,1,0)} &= ((3x^2-y^2)\boldsymbol{i}-(2xy^2)\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})|_{(1,1,0)} \\ &= 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

故 $f(x,y,z)$ 在 P_0 处沿 $\nabla f(1,1,0)$ 增加最快，沿 $-\nabla f(1,1,0)$ 减小最快。在这两个方向的变化率分别为

$$|\nabla f(1,1,0)| = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2} = 3$$

$$-|\nabla f(1,1,0)| = -\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2} = -3$$

例6　求曲面 $x^2+y^2+z=9$ 在点 $\mathsf{P}_0(1,2,4)$ 的切平面和法线方程。

解：设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z$。由梯度与等值面的关系可知

$$\nabla f|_{\mathsf{P}_0}=(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})|_{(1,2,4)}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

的方向是等值面 $f(x,y,z)=9$ 在点 P_0 的法线方向，因此切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$$

$$\Rightarrow \qquad 2x+4y+z=14$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-4}{1}$$

梯度下降

Problem: 求函数 $y = f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 上的最小值

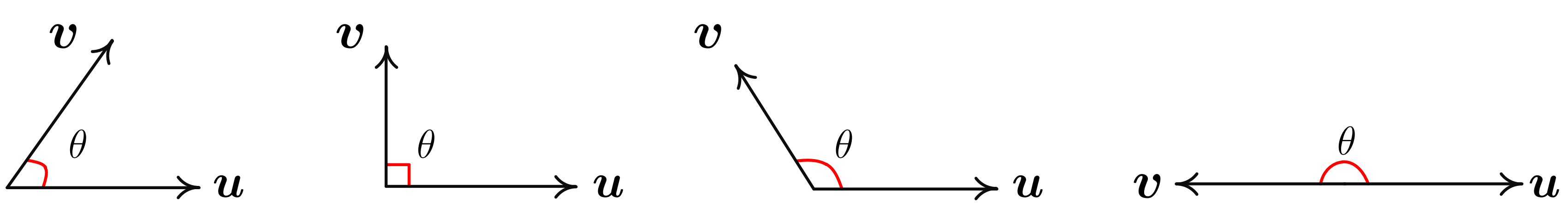
推导：函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的一阶泰勒展开为

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)$$

我们希望 $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0)$，定义 $\boldsymbol{u} \triangleq \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{v} \triangleq \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \lambda \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$$

其中 λ 为学习率（learning rate），θ 为两向量夹角。



显然，当 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 反向时，下降最快，此时 $\cos\theta = -1$，即

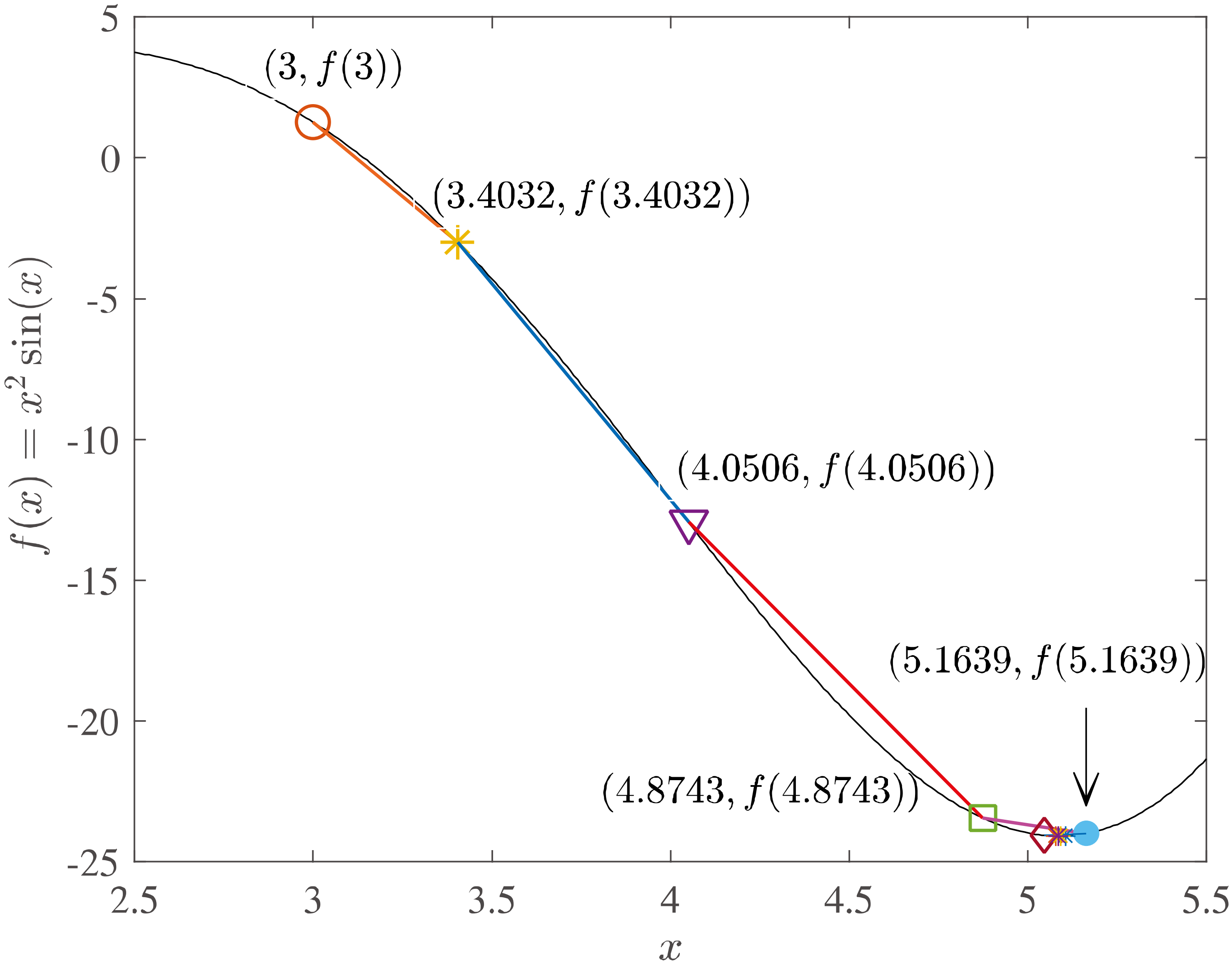
$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = -\nabla f(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 - \lambda \nabla f(\boldsymbol{x}_0)$$

第 t 迭代时，有

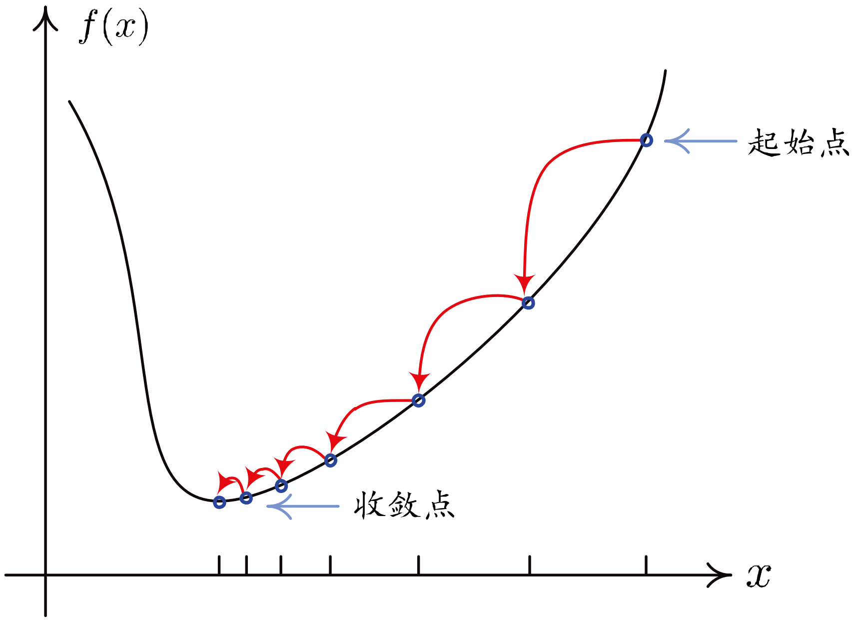
$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} - \lambda \nabla f(\boldsymbol{x}_{t-1}) \qquad \checkmark$$

练习1　利用梯度下降算法求函数 $f(x)=x^2\sin x$ 在 $[2,10]$ 内的最小值，要求误差小于10^{-3}(Hint：初始化 $x_0=3$ ，步长为 $\lambda=0.05$)

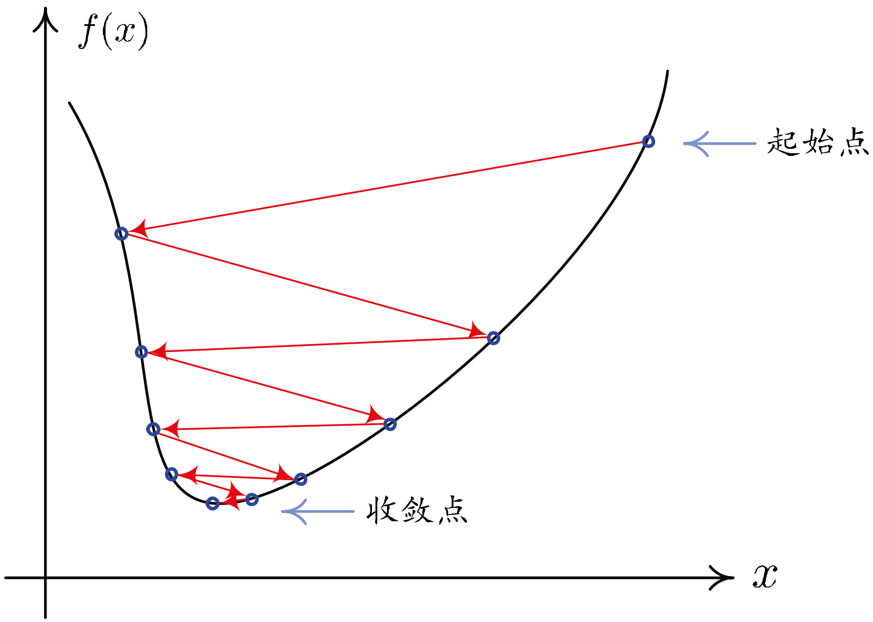
- $x_1=3-0.05f'(3)=3.4032,\ f(3)=1.2701,\ f(x_1)=-2.9954$
- $x_2=3.4032-0.05f'(3.4032)=4.0506,\ f(x_2)=-12.9437$
- $x_3=4.0506-0.05f'(4.0506)=4.8743,\ f(x_3)=-23.4481$
- $x_4=4.8743-0.05f'(4.8743)=5.1639,\ f(x_4)=-23.9936$
- $x_5=5.1639-0.05f'(5.1639)=5.0468,\ f(x_5)=-24.0592$
- $x_6=5.0468-0.05f'(5.0468)=5.1055,\ f(x_6)=-24.0779$
- $x_7=5.1055-0.05f'(5.1055)=5.0778,\ f(x_7)=-24.0817$



$(3, f(3))$
$(3.4032, f(3.4032))$
$(4.0506, f(4.0506))$
$(5.1639, f(5.1639))$
$(4.8743, f(4.8743))$
$f(x) = x^2 \sin(x)$
x
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5



合适步长



过大步长

复习与提高

习题1 求函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 A$(1, 0, 1)$ 处，沿着点 A 指向点 B$(3, -2, 2)$ 方向的方向导数。

习题2 求函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 M$(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u|_{\mathrm{M}}$。

习题3 求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $\mathsf{M}_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数。

习题4 判定下列函数在 $(0,0)$ 的偏导数和方向导数是否存在

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $g(x,y)=\sqrt[3]{xy}$

作业

P107： 第 3 题

第 6 题

第 8 题

第 10 题

9.8 多元函数的极值与其求法

- 多元函数的极值及最大值与最小值
- 条件极值与拉格朗日乘数法

多元函数的极值及最大值与最小值

定义1 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 内点。

- 若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0) \subset D$，使得对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x,y)，都有

$$f(x,y) < f(x_0,y_0)$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为极大值，点 P_0 为函数 $f(x,y)$ 的极大值点。

- 若对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x,y)，都有

$$f(x,y) > f(x_0,y_0)$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为极小值，点 P_0 为函数 $f(x,y)$ 的极小值点。

- 极大值点和极小值点统称为极值点。
- 极大值和极小值统称为极值。

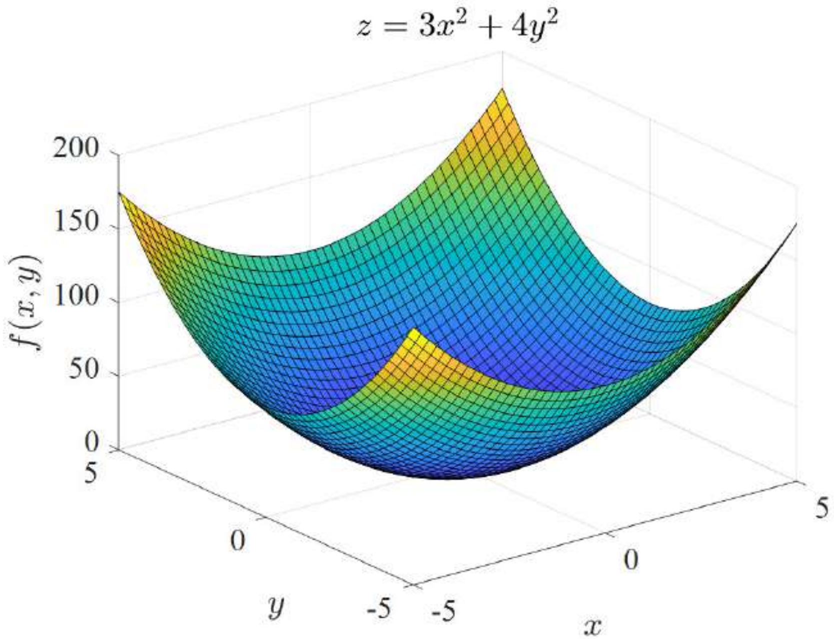
例1 求下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=3x^2+4y^2$

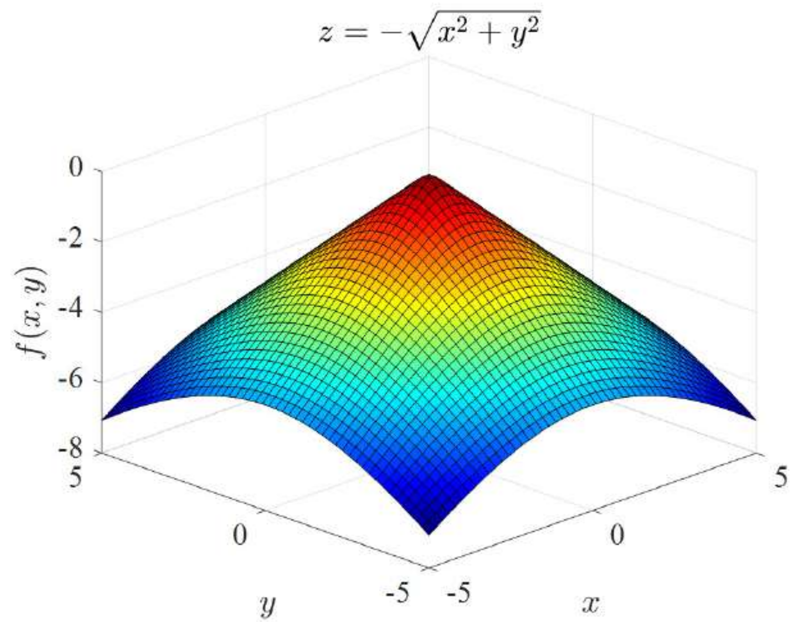
(2) $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=xy$

（1）



（2）



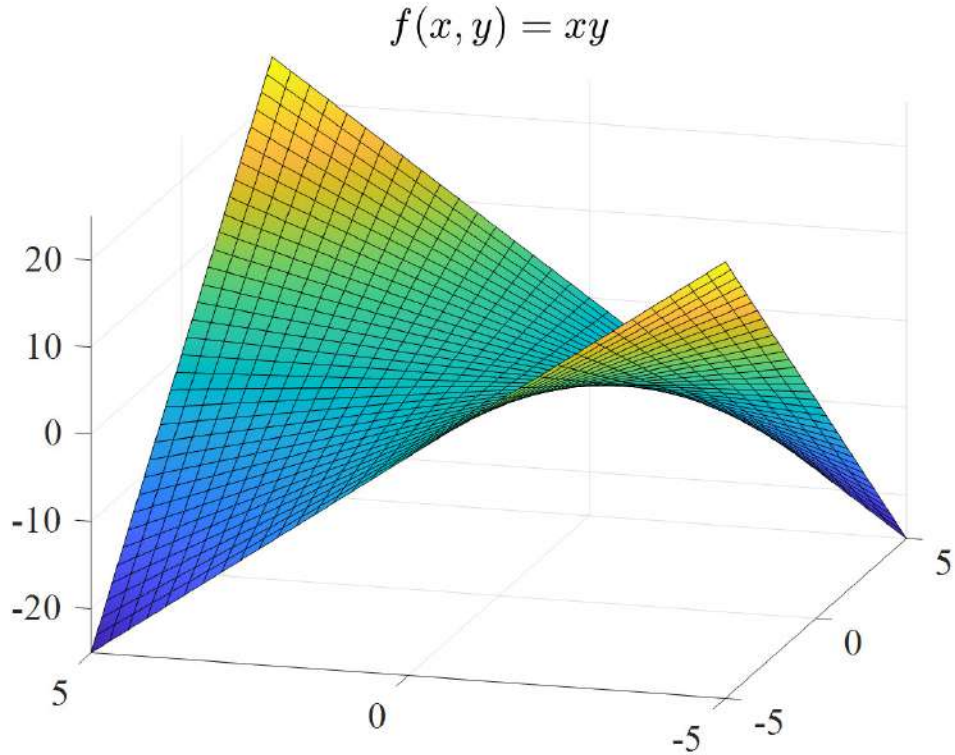
例1 求下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=3x^2+4y^2$

(2) $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y)=xy$

（3）



极值的必要条件

定理1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$$

证： 先证 $f_x(x_0,y_0)=0$。不妨设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有极大值，则在点 (x_0,y_0) 的某邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 均有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)$$

固定 $y=y_0$，均有

$$f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$$

即一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处有极大值，因而

$$f_x(x_0,y_0)=0$$

同理可证 $f_y(x_0,y_0)=0$。

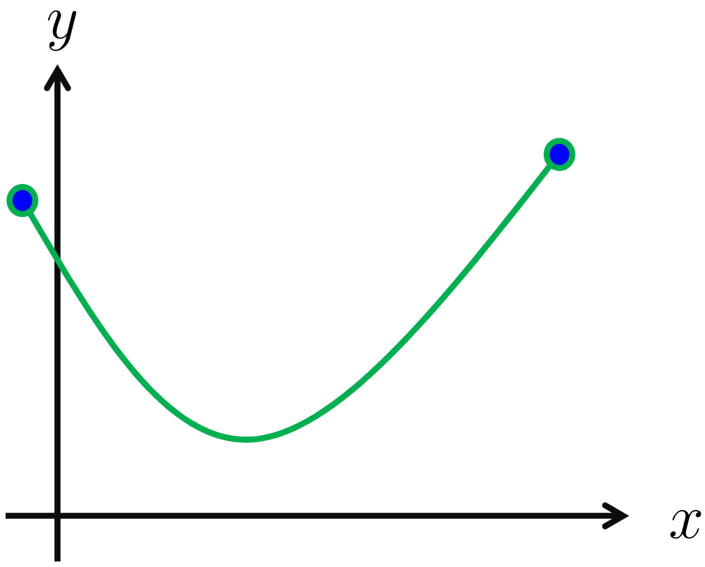
极值的充分条件

定理2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个领域内连续且有连续一阶二阶偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，定义海森（Hessian）矩阵

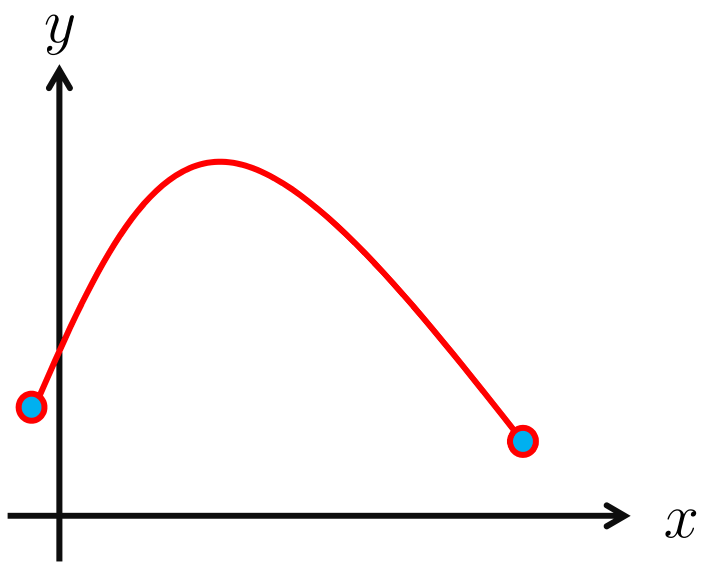
$$\boldsymbol{H}=\frac{\partial^2 z}{\partial(x,y)^2}=\frac{\partial}{\partial(x,y)}\left(\frac{\partial z}{\partial(x,y)}\right)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处

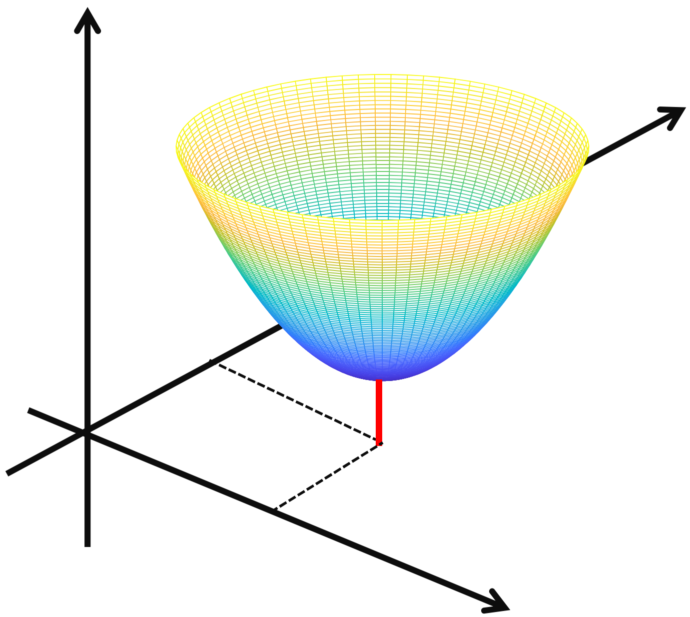
- $|\boldsymbol{H}|_{(x_0,y_0)}>0$ 时具有极值，且当 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ 时有极大值，当 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ 时有极小值。
- $|\boldsymbol{H}|_{(x_0,y_0)}<0$ 时没有极值
- $|\boldsymbol{H}|_{(x_0,y_0)}=0$ 时可能有极值，也可能没有极值。



$f''(x) > 0$ 函数 $f(x)$ 是凹的

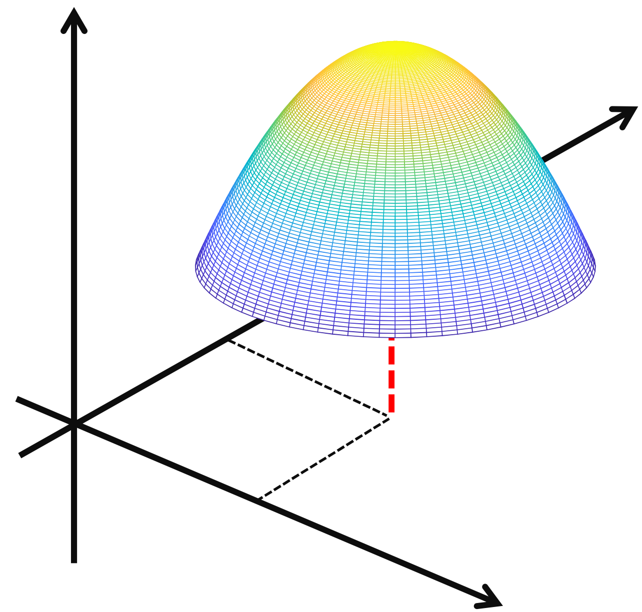


$f''(x) < 0$ 函数 $f(x)$ 是凸的



$f_{xx} > 0$ 且 $|\boldsymbol{H}| > 0$ 时

$f(x, y)$ 是凹的



$f_{xx} < 0$ 且 $|\boldsymbol{H}| > 0$ 时

$f(x, y)$ 是凸的

例4　求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解：计算偏导数，并令偏导数为零，解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$

得驻点：$(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$ 。

再求二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6x+6 \quad f_{xy}(x,y)=0 \quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

- 在点 $(1,0)$ 处，由于 $AC-B^2=12\times 6>0$，又 $A>0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 有极小值 $f(1,0)=-5$。
- 在点 $(1,-2)$ 处，由于 $AC-B^2=-12\times 6<0$ ，所以 $f(x,y)$ 在 $(1,-2)$ 没有极值。

- 在点 $(-3,0)$ 处，由于 $AC-B^2=-12\times 6<0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(-3,0)$ 没有极值。
- 在点 $(-3,2)$ 处，由于 $AC-B^2=-12\times(-6)>0$，又 $A<0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(-3,2)$ 有极大值 $f(-3,2)=31$。

最小值与最大值

定理3 与一元函数类似，$f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，那么 $f(x, y)$ 在 D 上必定能取得最小值和最大值。函数最小值和最大值在 D 内驻点和边界点中取得。

注：实际问题中，可能求解边界点的函数值较为复杂。此时可根据问题的性质，知函数 $f(x, y)$ 可在 D 内取得最大值（最小值），而函数在 D 只有一个驻点，那么肯定该驻点即为所求最大值（最小值）。

例5 某厂要用铁板做成一个体积为 $2\mathrm{m}^3$ 的有盖长方体水箱。问当长、宽、和高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省。

解：设水箱的长为 x m，宽为 y m，其高为 $\dfrac{2}{xy}$。该问题的目标函数为

$$f(x,y) = 2\left(xy + y\frac{2}{xy} + x\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right)\ (x, y > 0)$$

计算偏导数并令其为0，有

$$f_x(x,y) = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \qquad f_y(x,y) = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0$$

解上述方程可得 $x = y = 2^{\frac{1}{3}}$ 。

$$f_{xx}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = 4 \qquad f_{xy}(\sqrt[2]{3}, \sqrt[2]{3}) = 2 \qquad f_{yy}(\sqrt[2]{3}, \sqrt[2]{3}) = 4$$

故 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ 为极小值点。

例6 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽。问怎样折法才能使得断面面积最大？

解：如图所示，等腰梯形的面积为

$$f(x,\alpha)=\frac{1}{2}(24-2x+24-2x+2(x\cos\alpha))x\sin\alpha$$
$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$0<x<12$$
$$0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$$

计算偏导数

$$\begin{cases} f_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0 \\ f_\alpha=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2\cos^2\alpha-x^2\sin^2\alpha=0 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} f_x=24-4x+2x\cos\alpha=0 \\ f_\alpha=24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x\cos^2\alpha-x\sin^2\alpha=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = 24 - 4x + 2x\cos\alpha = 0 \\ f_\alpha = 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x\cos^2\alpha - x\sin^2\alpha = 0 \end{cases}$$

解方程组

$$\begin{cases} x = 8 \\ \cos\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

根据题意可知：断面面积得最大值一定存在，并且在

$$\mathsf{D} = \left\{(x,\alpha) \mid 0 < x < 12,\ 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

内取得。通过计算可知 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 时，函数值比 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $x = 8$ 时的函数值小。又函数在 D 内只有一个驻点。因此可知此时断面面积最大。

条件极值与拉格朗日乘数法

定义2

极值问题
- 无条件极值　对自变量自由定义域限制
- 条件极值　要求自变量满足某些方程

Example： 求 $z=xy$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 的极值。

条件极值的求法
- 代入法　消去变量化为无条件极值
- 拉格朗日乘子法　直接求解方程组

拉格朗日乘数法

Problem: 求函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值。

Solution: 令 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$。由

$$\begin{cases} L_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 λ ，解得的 (x, y) 即为极值可疑点。

例7 求 $f(x,y)=xy^2$ 在条件 $x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0$ 的最大值。

解：作拉格朗日函数

$$L(x,y)=xy^2+\lambda(x^2+y^2-1)$$

解如下方程组

$$\begin{cases} L_x(x,y)=y^2+2\lambda x=0 \\ L_y(x,y)=2xy+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \lambda=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 。

由问题本身知最大值一定存在，最大值在极值点取得：

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

练习 求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+y=1$，$x\geq 0, y\geq 0$ 的最大值。

拉格朗日乘数法 II

Problem: 求函数 $z=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值。

Solution: 令 $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$ 。由

$$\begin{cases} L_x(x,y,z)=0 \\ L_y(x,y,z)=0 \\ L_z(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去 λ ，解得的 (x,y,z) 即为极值可疑点。

例8　求表面积为 a^2 而体积最大的长方体的体积

解：设长方体长宽高为 x, y, z，原问题规范化为

$$\begin{aligned} &\max \ \ xyz \\ &\text{s.t.} \quad 2(xy + xz + yz) = a^2 \end{aligned}$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda(2xy + 2xz + 2yz - a^2)$$

得方程组

$$\begin{cases} L_x(x, y, z) = yz + 2\lambda y + 2\lambda z = 0 \\ L_y(x, y, z) = xz + 2\lambda x + 2\lambda z = 0 \\ L_z(x, y, z) = xy + 2\lambda x + 2\lambda y = 0 \\ xy + xz + yz = \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

解得 $x = y = z$，故最大长方体体积为 $\dfrac{a^3}{6\sqrt{6}}$。

内容小结

1. 函数的极值

步骤1：利用必要条件在定义域内找驻点

如对二元函数 $z=f(x,y)$，解方程组

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

步骤2：利用海森矩阵判别驻点是否为极值点

2. 函数的条件极值问题

（1）简单问题用代入法

（2）一般问题用拉格朗日乘数法

内容小结

- 计算二元函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值

步骤1：作拉格朗日函数 $L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

步骤2：解方程组，求出驻点

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

3. 最值问题

步骤1：确定目标问题，确定定义域

步骤2：判别

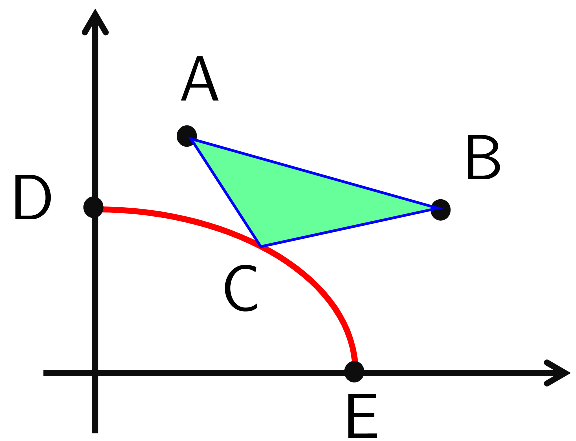
- 找到驻点，判别极值点与边界点。
- 根据实际问题判别最值。

复习与提高

习题1 已知平面上两顶点 A$(1,3)$，B$(4,2)$。试在椭圆

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad (x\geq 0, y\geq 0)$$

找到一点 C，使得 ABC 所构成的三角形面积最大。



解：设 C(x,y)，则

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,-1) \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x-1,y-3)$$

$$\mathrm{S}_{\triangle}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ x-1 & y-3 & 0 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|3(y-3)+(x-1)|=\frac{1}{2}|x+3y-10|$$

作拉格朗日函数

$$L(x,y) = (x+3y-10)^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1\right)$$

解如下方程组

$$\begin{cases} L_x(x,y) = 2(x+3y-10) + \frac{2}{9}\lambda x = 0 \\ L_y(x,y) = 6(x+3y-10) + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

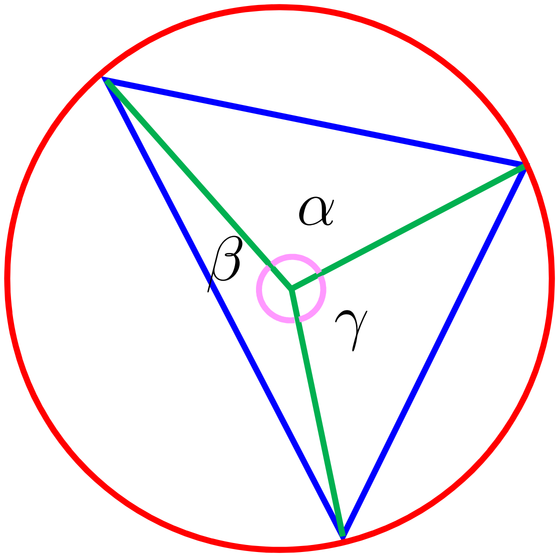
对应面积 $\mathsf{S}_\triangle = \dfrac{1}{2}(10 - \dfrac{15}{\sqrt{5}})$ 为面积最小值。

当 C 为端点时，面积分别为 $\mathsf{S}_\mathsf{D} = 2, \mathsf{S}_\mathsf{E} = 3.5$，故面积最大值为 $\mathsf{S}_\triangle = 3.5$ 。

习题2 求半径为 r 的内接三角形的面积最大值。

解：设各边所对应的圆心角为 α, β, γ，其满足

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$$



圆内接三角形面积为

$$\mathsf{S}_{\triangle}=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

作拉格朗日函数

$$L(\alpha,\beta,\gamma)=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\lambda(\alpha+\beta+\gamma-2\pi)$$

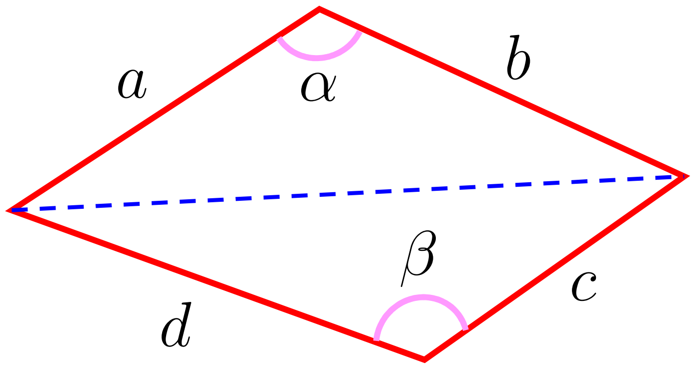
解方程组 $\begin{cases} L_\alpha=\cos\alpha+\lambda=0 \\ L_\beta=\cos\beta+\lambda=0 \\ L_\gamma=\cos\gamma+\lambda=0 \\ \alpha+\beta+\gamma-2\pi=0 \end{cases} \Rightarrow\ x=y=z=\dfrac{2}{3\pi}$

习题3 求平面上以 a, b, c, d 为边的四边形什么时候面积最大。

解：

$$\mathsf{S} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta$$

$$(0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi)$$



由于上下两三角形共边，有

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

作拉格朗日函数

$$L(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta + \lambda(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha - c^2 - d^2 + 2cd\cos\beta)$$

解方程组

$$\begin{cases} L_\alpha = \frac{1}{2}ab\cos\alpha + 2ab\lambda\sin\alpha = 0 \\ L_\beta = \frac{1}{2}cd\cos\beta - 2cd\lambda\sin\beta = 0 \\ a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \cos\alpha + 4\sin\alpha = 0 \\ \cos\beta - 4\sin\beta = 0 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= -\frac{1}{4}\cos\alpha\cos\beta + \frac{1}{4}\cos\alpha\cos\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

结合 $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$ ，有 $\alpha+\beta=\pi$ 。即四边形内接于圆时，面积最大

作业

P117： 第 3 题

第 4 题

第 8 题

第 9 题

第 10 题

第十章 重积分

邹秋云

软件与物联网工程学院

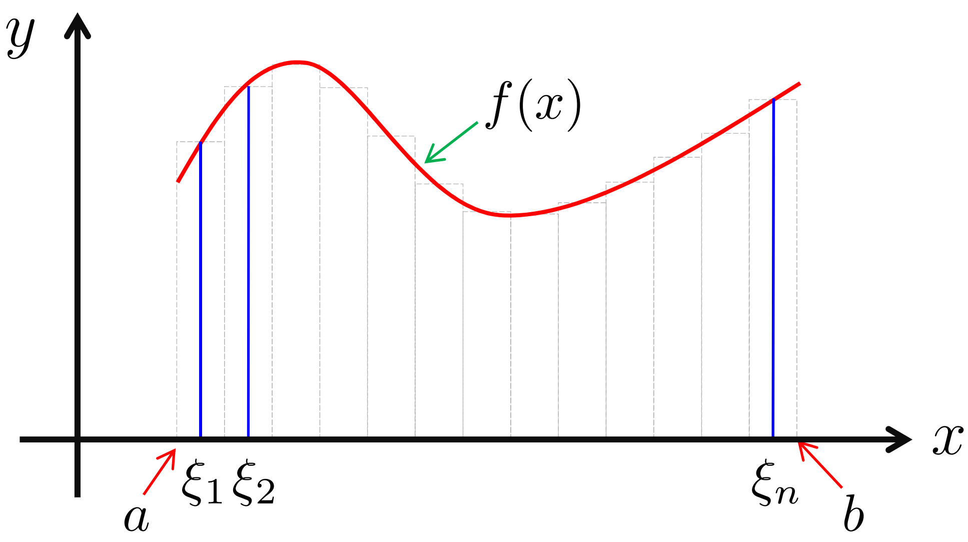
第十章 重积分

10.1 二重积分的概念和性质

- 二重积分的概念
- 二重积分的性质

二重积分的基本概念

回顾： 计算曲边梯形的面积

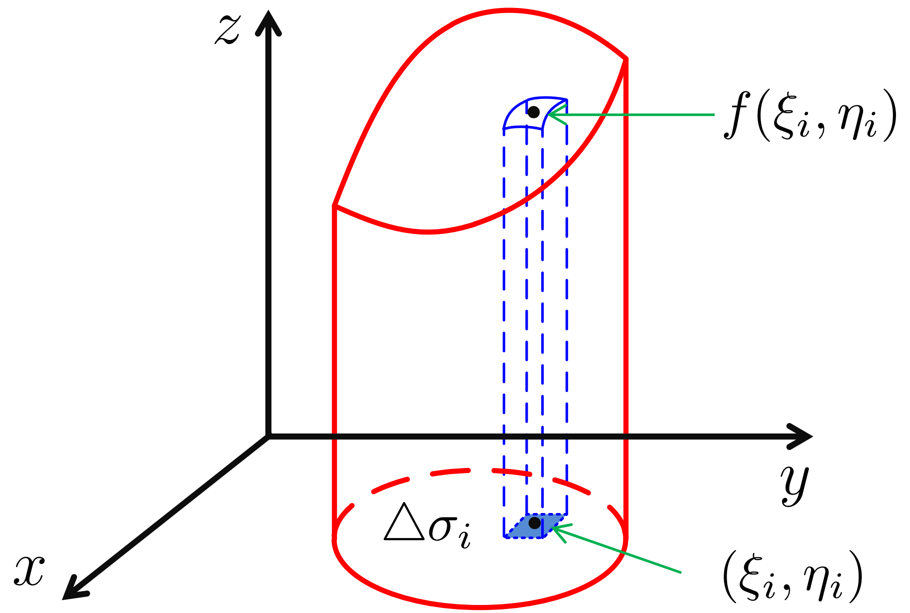


$$\mathsf{S} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$\lambda = \max\{\triangle x_1, \cdots, \triangle x_n\},\ \triangle x_i = x_i - x_{i-1}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

二重积分的基本概念

扩展：曲顶柱体的体积



$$\mathrm{V} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i, \eta_i) \triangle\sigma_i = \iint_{\mathrm{D}} f(x, y) \mathrm{d}\sigma$$

$\lambda = \max\{\triangle\sigma_1, \cdots, \triangle\sigma_n\}$

二重积分的定义

定义1: 定义 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数。将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\{\triangle\sigma_1, \triangle\sigma_2, \cdots, \triangle\sigma_n\}$，在每个小闭区域上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积并作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle_i = f(\xi_1, \eta_1)\triangle\sigma_1 + \cdots + f(\xi_n, \eta_n)\triangle\sigma_n$$

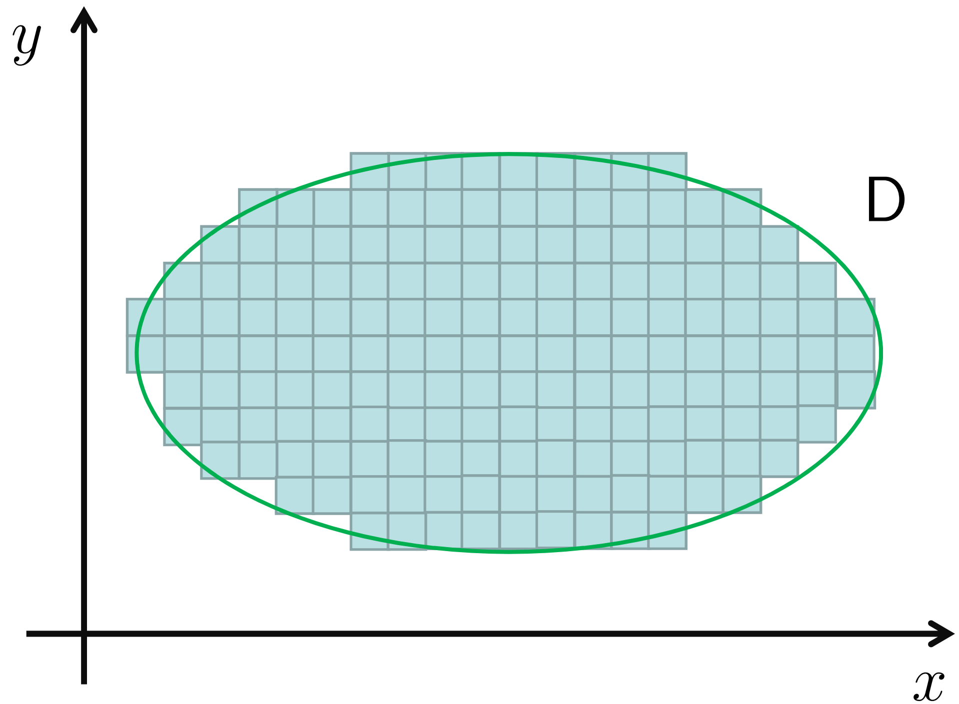
如果当每个小闭区域的直径中的最大值 $\lambda \to 0$ 时，上述和的极限总存在，且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关，则称此极限为 $f(x,y)$ 在闭区域 D 的二重积分，记作

$$\iint_{\mathsf{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\triangle\sigma_i$$

$$\iint_{\mathrm{D}} \underbrace{\overbrace{f(x,y)\mathrm{d}\sigma}^{\text{被积表达式}}}_{\text{被积函数}\ \text{面积元素}} = \lim_{\lambda\to 0} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\triangle\sigma_i}^{\text{积分和}}$$

二重积分的几何意义：

底为 D，曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。



在二重积分的定义中，若对闭区域 D 按照直角坐标系中用平行于坐标轴的直线网格来划分 D 。设矩形区域 $\triangle\sigma_i$ 的边长分别为 $\triangle x_j, \triangle y_k$ ，则有 $\triangle\sigma_i = \triangle x_j \cdot \triangle y_k$ ，记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，记二重积分为

$$\iint_{\mathsf{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathsf{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二重积分的性质

性质1（函数可加性）

$$\iint_{\mathrm{D}} [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_{\mathrm{D}} g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

α,β 为常数。

性质2（区域可加性） 若 $\mathrm{D}=\mathrm{D}_1+\mathrm{D}_2$ ，则有

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathrm{D}_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{\mathrm{D}_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

性质3 若在 D 上，$f(x,y)=1$，A 为 D 的面积，则

$$A=\iint_{\mathrm{D}} 1\cdot \mathrm{d}\sigma=\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{d}\sigma$$

性质4 若在 D 上恒有 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_{\mathrm{D}} g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

如

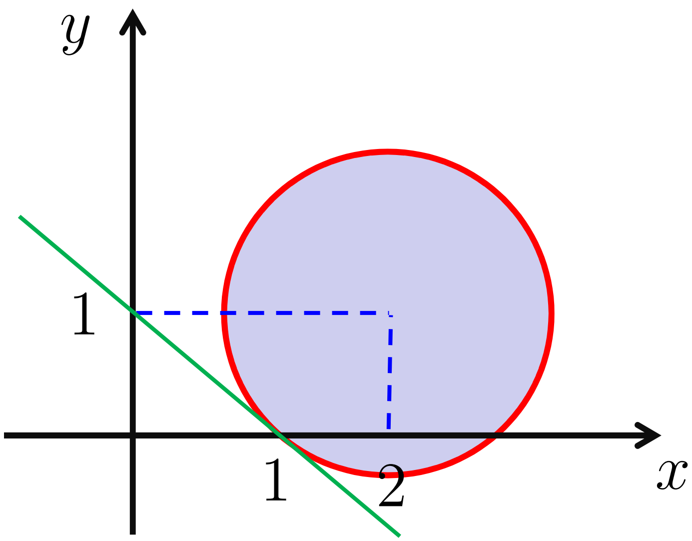
$$\left|\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_{\mathrm{D}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

例1 比较下列积分的大小

$$I_1 = \iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$$

其中 D : $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2$。

解：如图所示，由于积分区域位于 $x+y=1$ 上方，因此在 D 上恒有



$$(x+y)^2 \leqslant (x+y)^3$$

根据性质4，有 $I_1 \leqslant I_2$ 。

二重积分的性质

性质5 设 M 和 m 分别为 $f(x,y)$ 在闭区域 D上的最大值和最小值，A为 D 的面积，则有

$$mA \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq MA$$

证：由不等式 $m \leq f(x,y) \leq M$，根据性质 4 可知

$$\iint_D m\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D M\mathrm{d}\sigma$$

根据性质 1 和性质 3 ，可得原结论。

Example: 设 D $= \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$, 估计 $\iint_D x\mathrm{d}\sigma$ 。

例2 估计二重积分 $I=\iint_{D}(x+y+10)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2\le 2\}$。

解：题设积分区域为圆心为 $(2,1)$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆及圆内部区域。区域 D 的面积为 2π。

由于被积函数 $f(x,y)=x+y+10$ 为一平面，易知它在 D 上的最大值、最小值均在 D 的边界上取得。

D 的边界 $L=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-1)^2=2\}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=2+\sqrt{2}\cos t \\ y=1+\sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

代入函数可得

$$f(x,y)=\sqrt{2}(\cos t+\sin t)+13=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+13$$

使得

$$11 \leq f(x, y) \leq 15$$

根据性质 5 可知

$$22\pi \leq I \leq 30\pi$$

二重积分的性质

性质6（二重积分中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，A 是 D 的面积，则 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A$$

证：将性质 5 左右两端同时除 A，可得

$$m \le \frac{1}{A}\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M$$

由于函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 $f(x,y) \in [m,M]$，则 $f(x,y)$ 必取得 $[m,M]$ 的所有值，故存在至少一点 (ξ,η)，有

$$\frac{1}{A}\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)$$

例3 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的连续，D 关于 x 轴和 y 轴均对称，记 $\text{D}_1=\{(x,y)|(x,y)\in\text{D},x\geq 0,y\geq 0\}$，则二重积分

$$I=\iint_{\text{D}}f(x,y)\text{d}\sigma=4\iint_{\text{D}_1}f(x,y)\text{d}\sigma$$

成立的条件是下列条件中的哪一个

（1）$f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，关于 y 是偶函数；

（2）$f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，关于 y 是偶函数；

（3）$f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，关于 y 是奇函数；

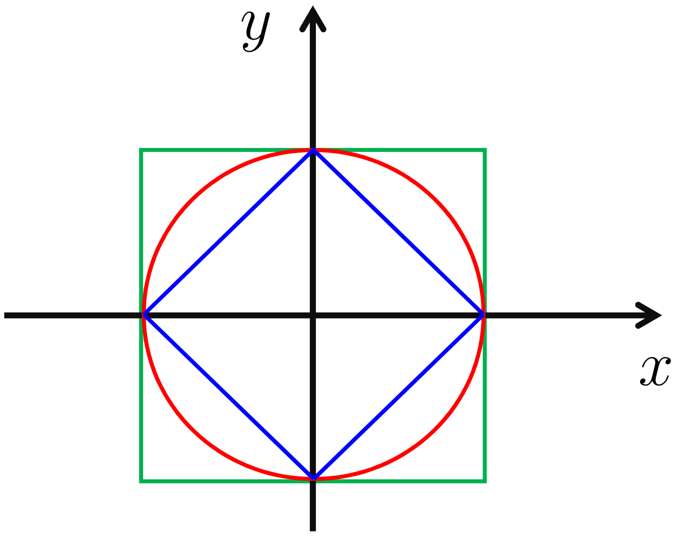
（4）$f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，关于 y 是奇函数。

复习与提高

习题1 比较下列积分的大小

$$I_1=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}|xy|\mathrm{d}\sigma,\qquad I_2=\iint_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1}}|xy|\mathrm{d}\sigma$$

$$I_3=\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}|xy|\mathrm{d}\sigma$$



习题2 设 D 是第二象限的有界闭区域，且 $0 < y < 1$，则

$$I_1 = \iint_D yx^3 \mathrm{d}\sigma,\ I_2 = \iint_D y^2x^3 \mathrm{d}\sigma,\ I_3 = \iint_D y^{\frac{1}{2}}x^3 \mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为（　　）

(A) $I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3$　　(B) $I_2 \leqslant I_1 \leqslant I_3$

(C) $I_3 \leqslant I_2 \leqslant I_1$　　(D) $I_3 \leqslant I_1 \leqslant I_2$

作业

P135： 第 2 题；第 4 题；第5题（3）、第7题（4）

10.2 二重积分的计算法

- 利用直角坐标计算二重积分
- 利用极坐标计算二重积分

利用直角坐标计算二重积分

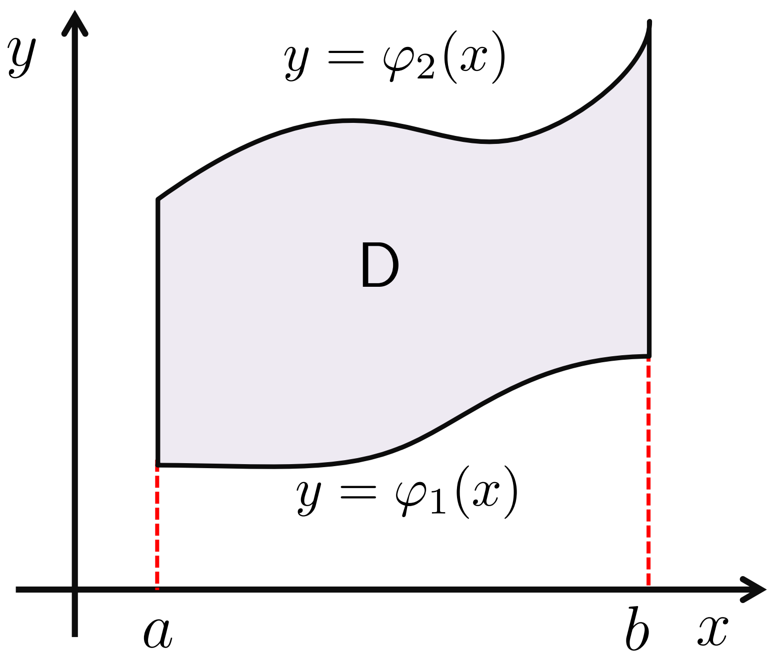
在二重积分中，采用平行于坐标轴的直线网格划分积分区域 D，可得直角坐标系二重积分

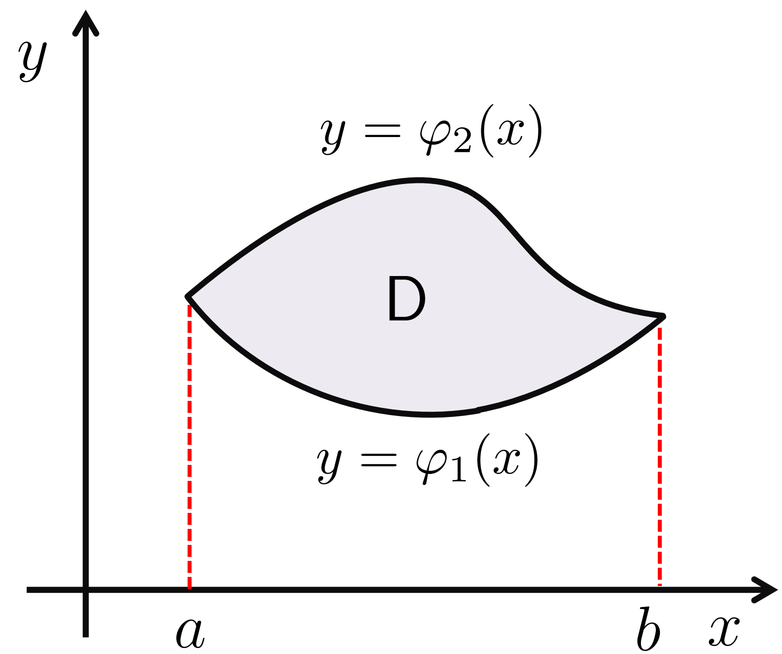
$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定义1: 如果区域 D 由直线 $x=a$, $y=b$，以及曲线 $y=\varphi_1(x)$ 和曲线 $y=\varphi_2(x)$ 围成，称 D 为 X 型区域，即

$$\mathrm{D} = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

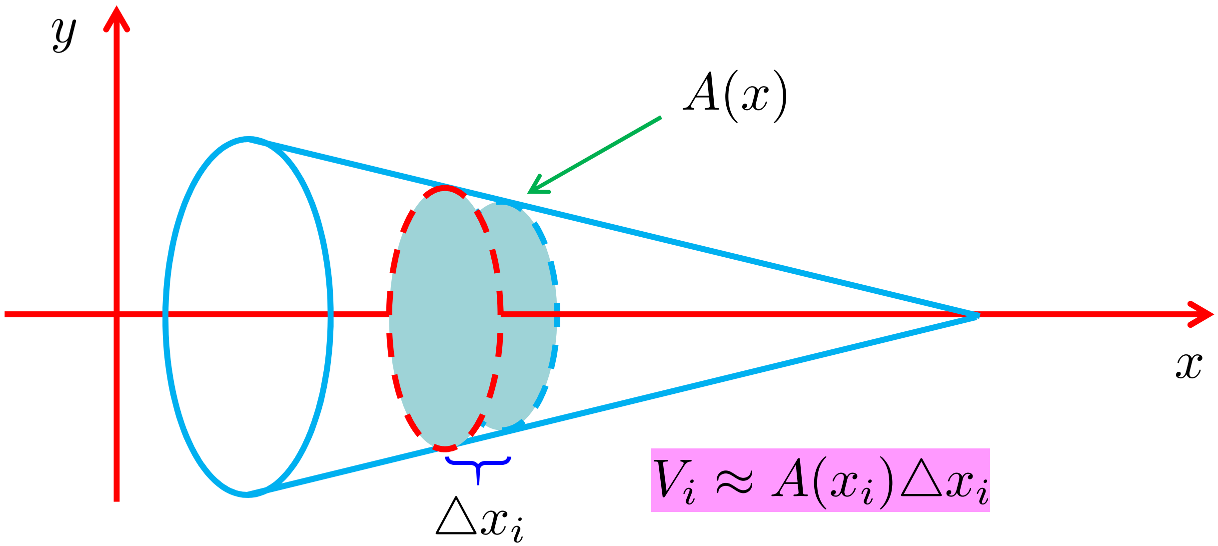
X 型区域





穿过 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点。

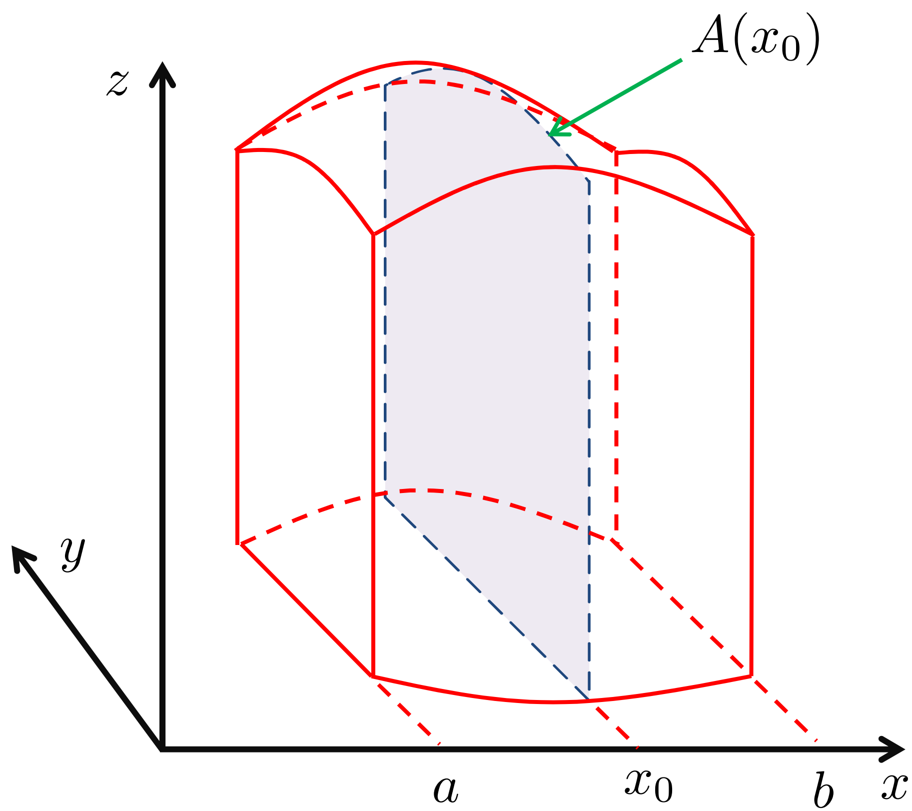
截面面积已知的立体图形的体积

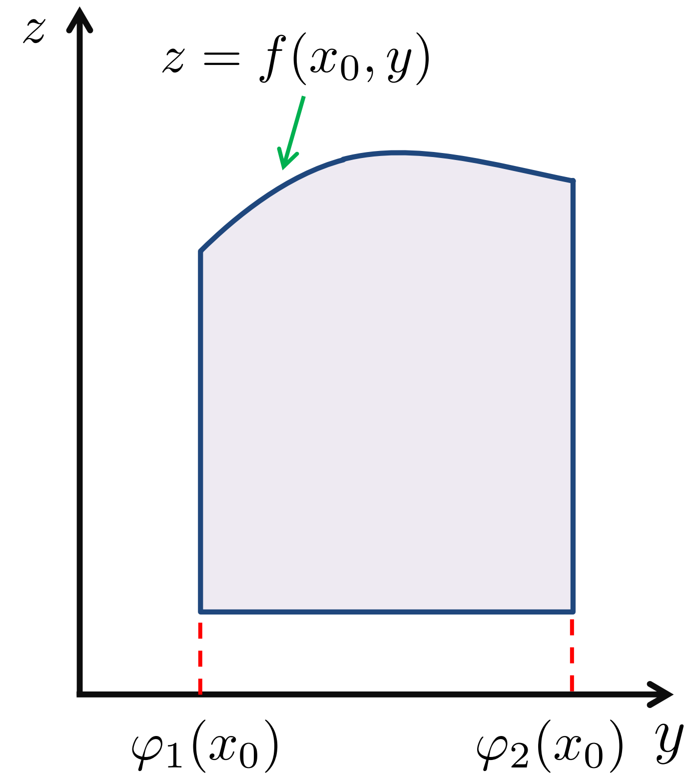


定义2: 若某立体图形在区间 $[a,b]$ 上的截面面积为连续函数 $A(x)$，则定义该立体图形在区间 $[a,b]$ 上的体积为

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\triangle x_i = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

二次积分





曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

二次积分

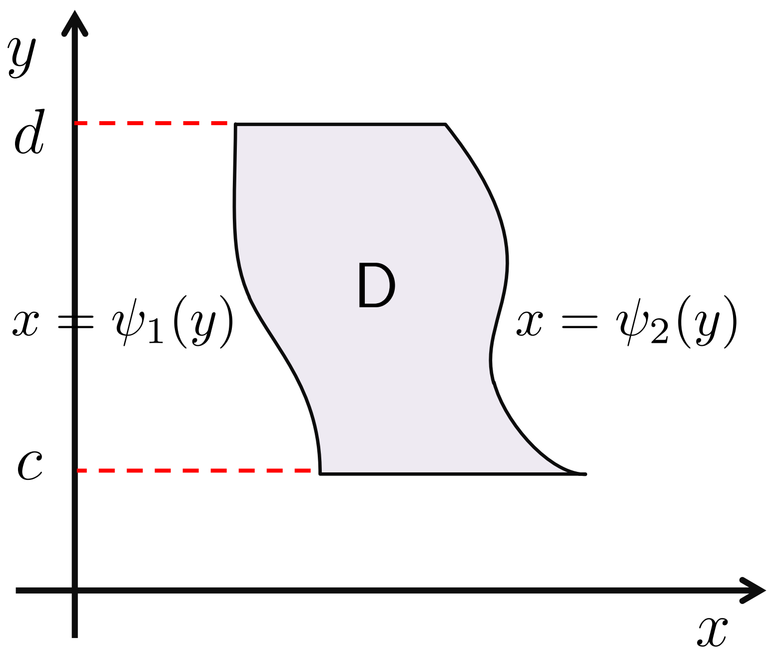
定义3: 若二重积分区域为 X 型区域

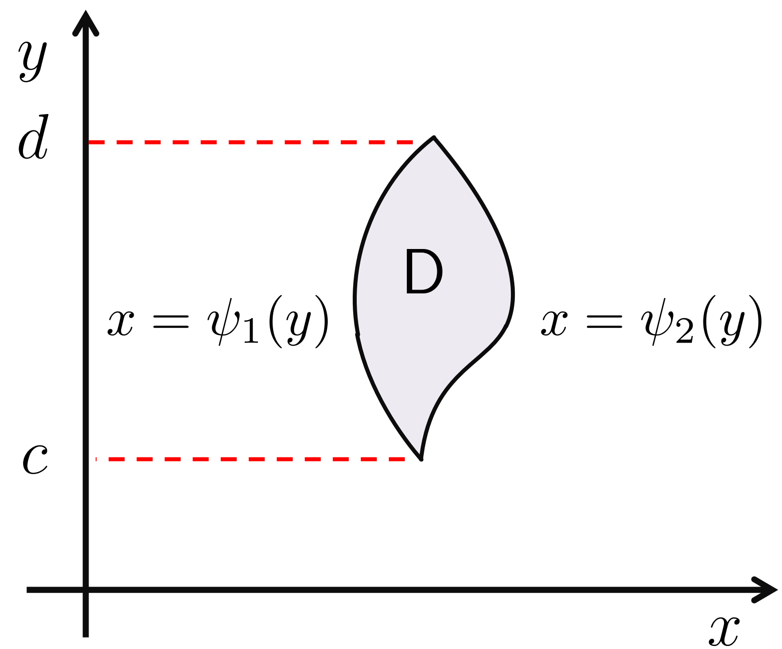
$$\mathsf{D} = \{(x, y)|\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$

则二重积分可通过二次积分计算

$$\iint_{\mathsf{D}} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

Y 型区域





$$\mathrm{D} = \{(x, y) | c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$$

穿过 D 内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点。

二次积分

定义4: 若二重积分区域为 Y 型区域

$$\mathrm{D} = \{(x, y)|\ c \leqslant y \leqslant d,\ \ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$$

则二重积分可通过二次积分计算

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}x$$

注意事项

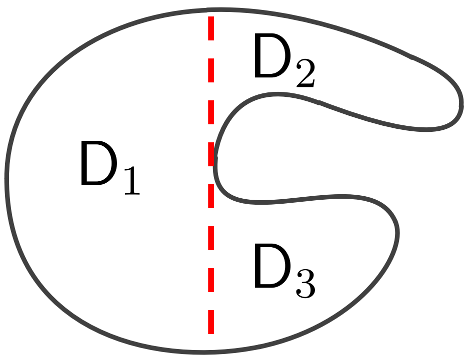
✓ 若积分区域既是 X 型又是 Y 型，则有

$$\iint_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

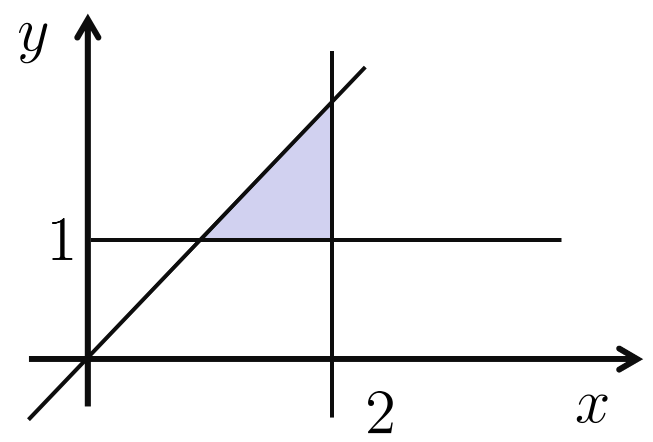
必要时可交换积分次序，简化计算。

✓ 若积分区域较为复杂，可将积分区域拆分为多个 X 型区域和 Y 型区域。



例1 计算 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由直线 $y=1,\ x=2,\ y=x$ 所围成的闭区域。

解：如图所示，阴影部分为积分区域



解法一：积分区域为 X 型

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2\left[\int_1^x xy\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x\mathrm{d}x = \int_1^2\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{8}$$

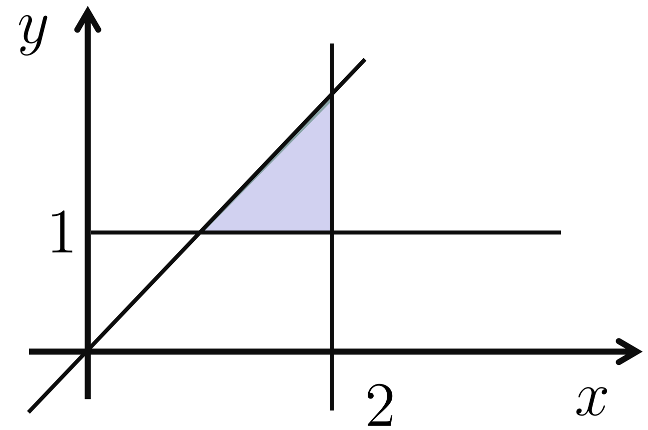
解法二：积分区域为Y型

$$\iint_{\mathrm{D}} xy\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \left[\int_y^2 xy\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

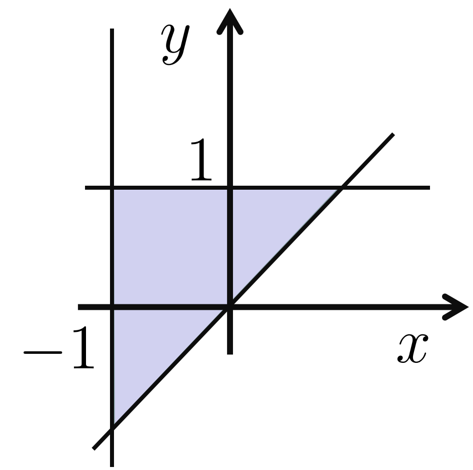
$$= \int_1^2 \left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_y^2 \mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \left(2y - \frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \left[y^2 - \frac{y^4}{8}\right]_1^2 = \frac{9}{8}$$



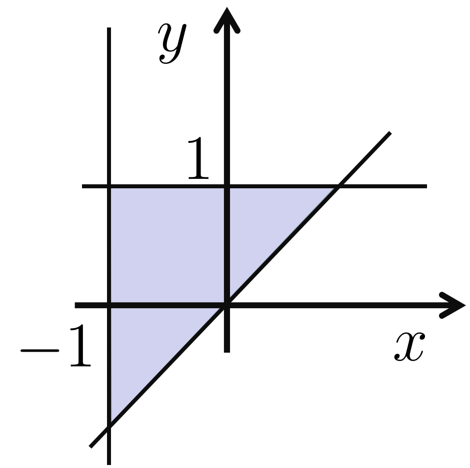
例2 计算 $\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x, x=-1, y=1$ 所围成的闭区域。



解：如图所示，阴影部分为积分区域

若选用 X 型计算公式

$$
\begin{aligned}
\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left[(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_x^1 \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{3}\int_{0}^{1}(|x|^3-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$



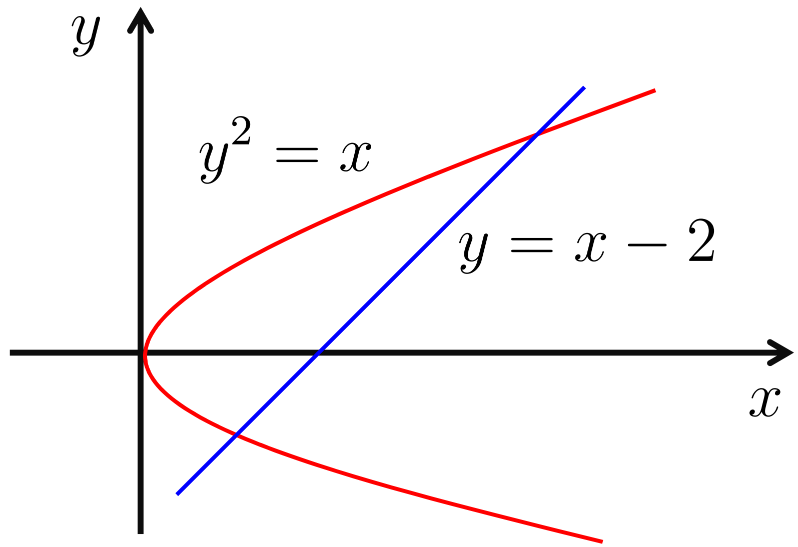
若选用 Y 型计算公式

$$\iint_{\mathsf{D}} y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1} y\mathrm{d}y \int_{-1}^{y} \sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}x$$

其中关于 x 的积分较为繁琐。故应采用 X 型区域计算公式。

例3 计算 $\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的区域。

解：如图所示，抛物线与直线交线的内部区域为积分区域



该积分区域为 Y 型区域

$$D=\{(x,y)|\ -1\leqslant y\leqslant 2, y^2\leqslant x\leqslant y+2\}$$

$$\mathsf{D} = \left\{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 2, y^2 \leqslant x \leqslant y + 2\right\}$$

$$\iint_{\mathsf{D}} xy\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2} \left[\int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} \left[\frac{yx^2}{2}\right]_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} [y(y+2)^2 - y^5]\mathrm{d}y$$

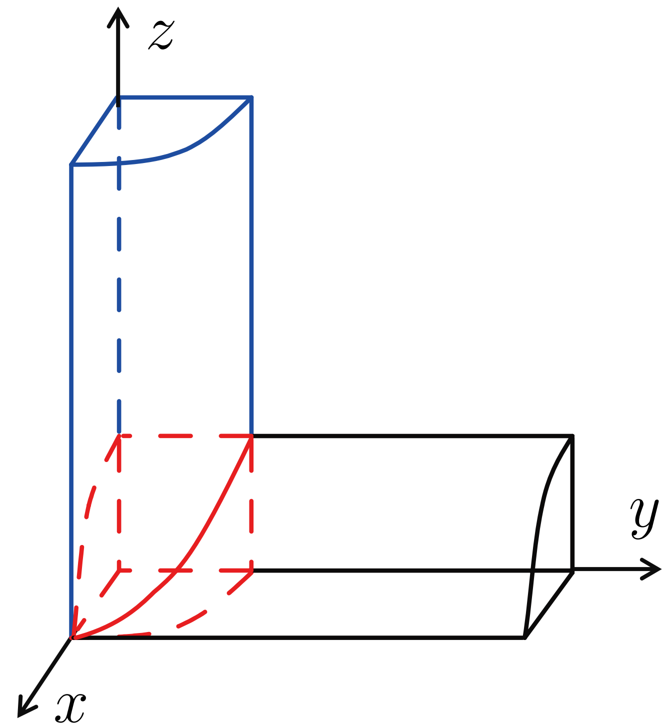
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{45}{8}$$

例4 求两个底圆半径都等于 R 的直交圆柱面所围成的体积。

解：两圆柱的方程分别为

$$x^2+y^2=R^2 \text{ 及 } x^2+z^2=R^2$$



利用圆柱的对称性，仅需计算第一卦限的体积即可。

两圆柱在第一卦限的体积可通过积分区域为

$$\mathrm{D}=\{0\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\}$$

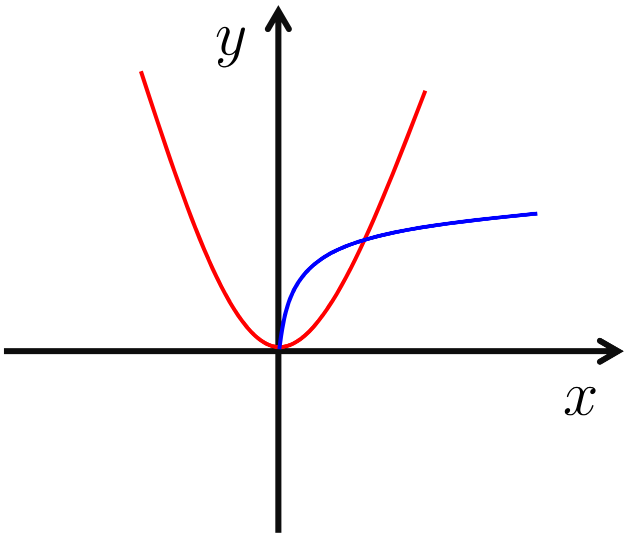
被积函数为 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2}$ 的二重积分

$$V=\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y=\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3$$

故所求立体体积为：$V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3$

练习1 计算二重积分 $\iint_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$ ，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x},\ y=x^2$ 所围成的闭区域。

解：



$$\iint_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}xy^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^{\frac{7}{4}} - x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{6}{55}$$

练习2　交换下列积分的次序

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解：积分区域为

$$\mathrm{D} = \{(x,y)|\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 2-x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}\}$$

其为直线 $y = 2 - x$ 与圆心为 $(1,0)$ 半径为 1 的上半圆所围成区域，交点坐标为 $(1,1)$，$(2,0)$。

采用 Y型积分区域有

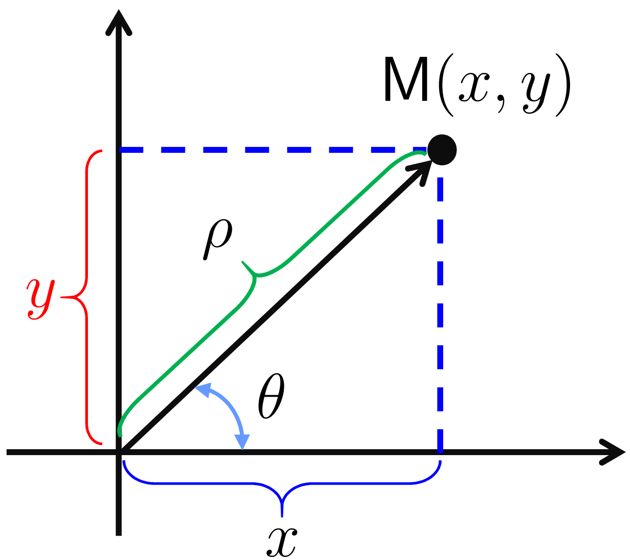
$$\mathrm{D} = \{(x,y)|\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 2-y \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{1-y^2}\}$$

故交换积分次序为

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

利用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



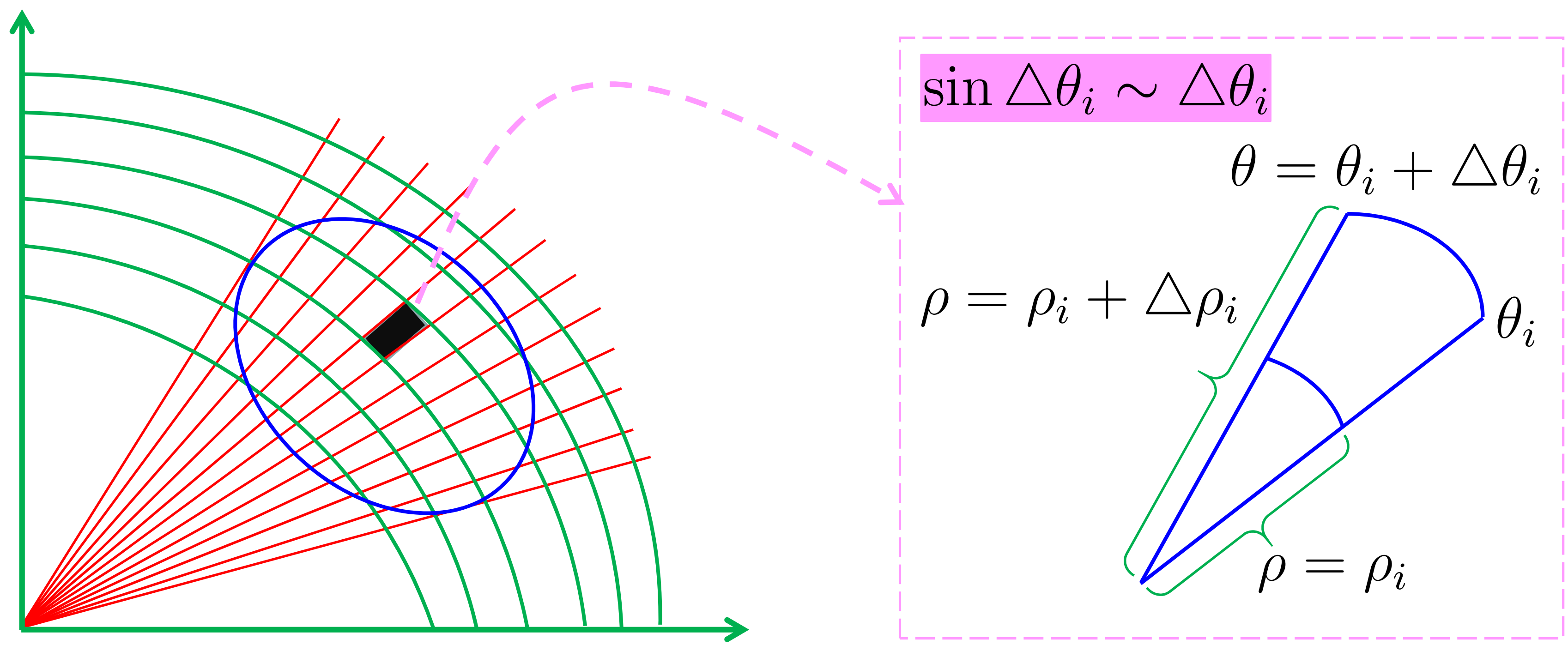
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

如果积分区域是圆或者圆的一部分，用极坐标计算更为容易，此时

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

极坐标的微观解释

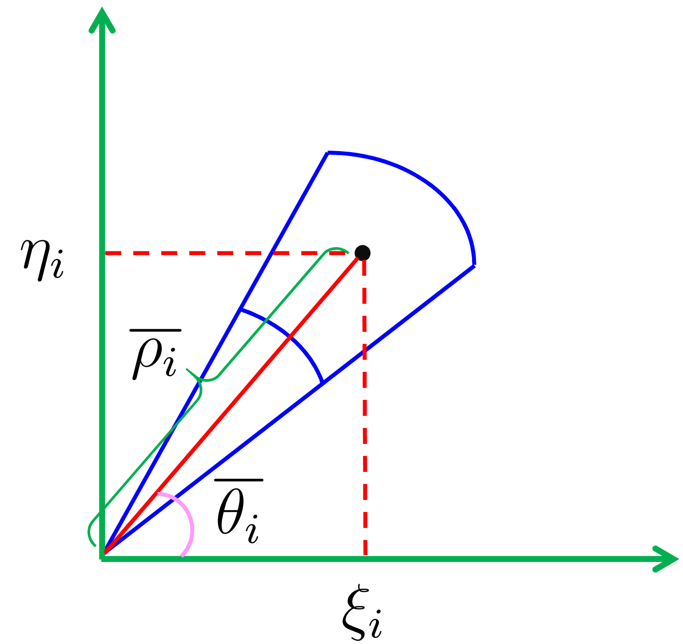
$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\triangle\sigma_i$$



$$\begin{aligned}\triangle\sigma_i &= \frac{1}{2}(\rho_i + \triangle\rho_i)^2\triangle\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i^2\triangle\theta_i \\ &= \frac{\rho_i + (\rho_i + \triangle\rho_i)}{2}\cdot\triangle\rho_i\cdot\triangle\theta_i\end{aligned}$$

极坐标的微观解释

$$\triangle\sigma_i = \frac{\rho_i + (\rho_i + \triangle\rho_i)}{2} \cdot \triangle\rho_i \cdot \triangle\theta_i$$
$$= \overline{\rho_i} \cdot \triangle\rho_i \cdot \triangle\theta_i$$



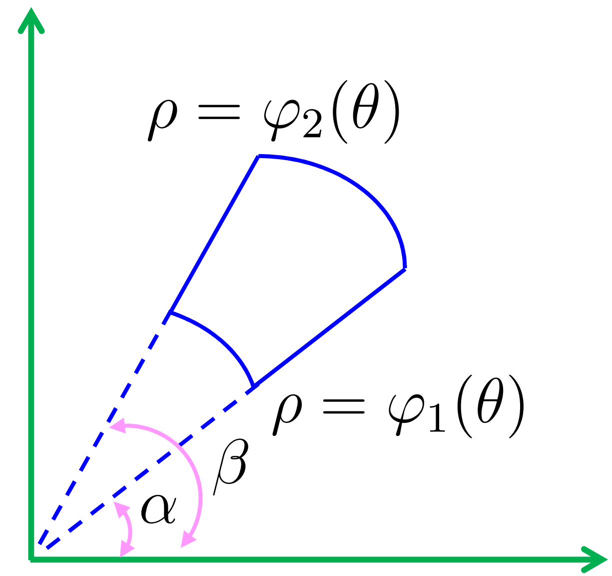
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\triangle\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{\rho_i}\cos\overline{\theta}_i, \overline{\rho}\sin\overline{\theta}_i)\overline{\rho_i}\cdot\triangle\rho_i\cdot\triangle\theta_i$$
$$= \iint_{\mathrm{D}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

极坐标的二次积分

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(\theta) \leqslant \rho \leqslant \varphi_2(\theta), \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$$

来表示，其中 $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续。



$$\iint_{\mathrm{D}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho$$

例5 计算 $\iint_{D} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中D是由圆心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域。

解：在极坐标系中，闭区域

$$0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

则

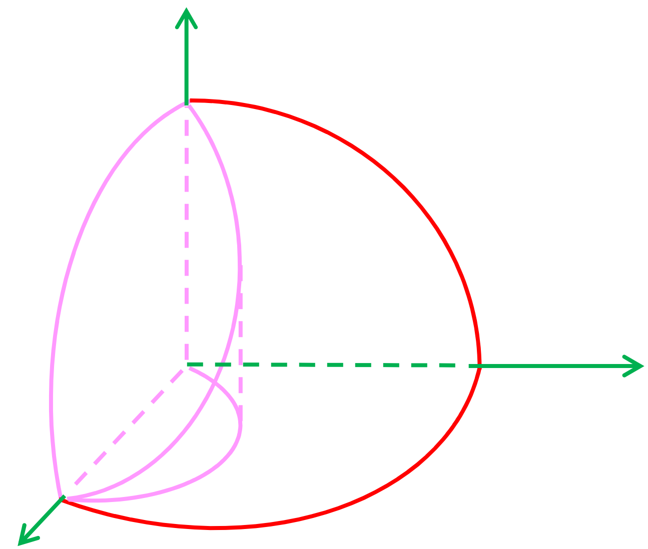
$$\iint_{D} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= \pi(1-e^{-a^2})$$

例6 计算 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax\ \ (a>0)$ 所截得的（含在圆柱面内的部分）立体的体积

解：$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$ 为球心 $(0,0,0)$ 半径为 $2a$ 的球。



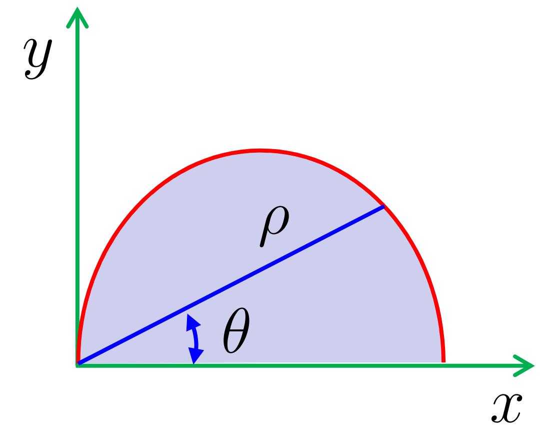
球体与柱面 $x^2+y^2=2ax$ 在第一卦限交线在 $x\mathrm{O}y$ 上投影区域为

$$\mathrm{D}=\{(x,y)|\ (x-a)^2+y^2\leq a^2,\ x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$$

由对称性

$$V=4\iint_{\mathrm{D}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

按极坐标系，积分区域为



$$\mathrm{D}:\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

故体积为

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{4}{3}(4a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a\cos\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

练习2 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$。

解：由于

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

复习与提高

题1：计算二重积分$\iint_{\mathsf{D}} x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$所围成的图形。

解：积分区域为

$$\mathsf{D}: 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$$

故

$$\begin{aligned}\iint_{\mathsf{D}} x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{y}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}x^3)\mathrm{d}x = \frac{6}{55}\end{aligned}$$

复习与提高

题2：交换下列二次积分的次序

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x$　　　　(2) $\displaystyle\int_1^e \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$

复习与提高

题3：设闭区域D由圆周 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 以及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成，求积分

$$\iint_{\mathrm{D}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解：将积分区域用极坐标表示为

$$\mathrm{D}=\left\{(\rho,\theta)\middle|\ \frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\ 2\sin\theta\leqslant\rho\leqslant 4\sin\theta\right\}$$

求积分等于 $\dfrac{15}{8}\left(2\pi-\sqrt{3}\right)$。

复习与提高

题4： 设 $f(x,y)$ 连续，求下面函数的导数

$$F(t)=\iint_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (t>0)$$

题5：设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$（ B ）

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0

作业

P151：第 5 题；第 6 题（4）；第11题（4）；第 14 题（3）

10.3 三重积分

- 三重积分的概念
- 三重积分的计算

三重积分的概念

范例：求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体的质量。

定义1：设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界

- 任意划分 $\Omega = \cup_i \triangle v_i$
- 任意取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \triangle v_i$

定义 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分

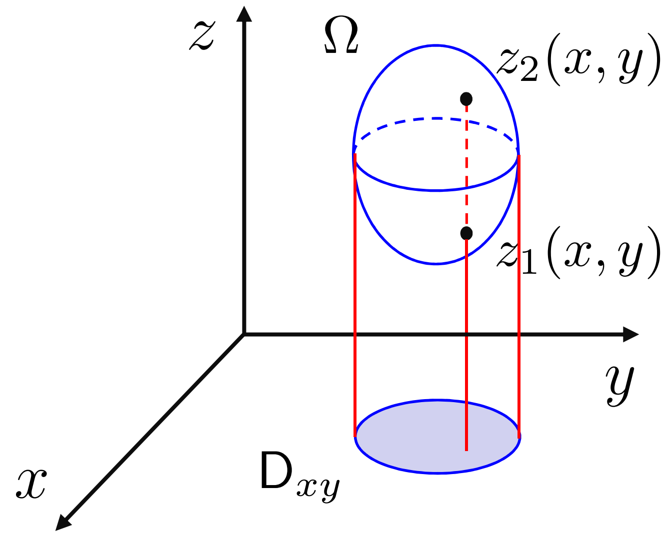
$$\iiint_{\mathrm{D}} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle v_i$$

其中 $\mathrm{d}v$ 称为体积元素，$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 。

三重积分的计算：投影法（先一后二）

- 先将闭区域 Ω 投影到 $x\mathrm{O}y$ 平面得到 D_{xy}。
- 以 D_{xy} 的边界作为准线，作母线平行于 z 轴的柱面
- 柱面与闭区域 Ω 的交线，将 Ω 的边界曲面分为上下两部分

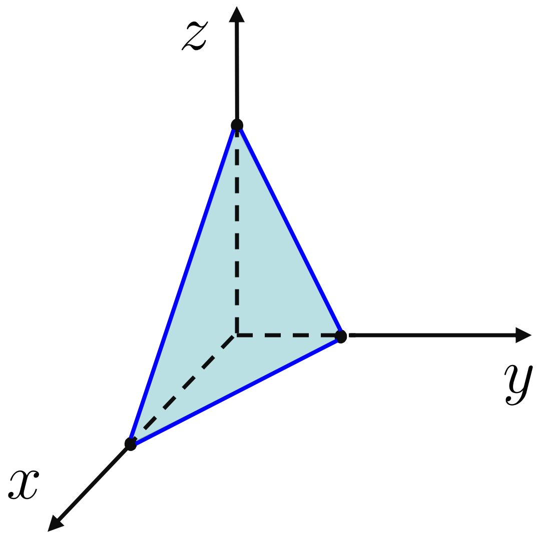
$$z = z_1(x, y), \quad z = z_2(x, y)$$



则三重积分为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)]\mathrm{d}v = \iint_{\mathrm{D}_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例1 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为三个坐标面及平 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域。



解：闭区域在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影为 D_{xy}

$$\mathrm{D}_{xy}=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{2}\right\}$$

计算

$$I=\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z\cdot x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\mathrm{D}_{xy}}(1-x-2y)x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

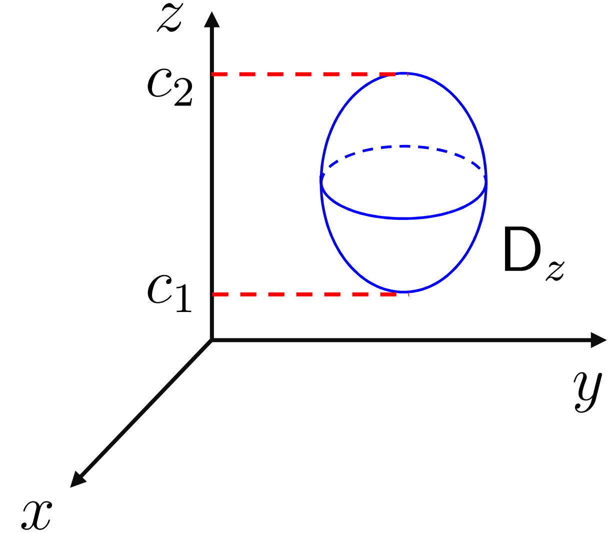
$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)\mathrm{d}y=\frac{1}{48}$$

三重积分的计算：截面法（先二后一）

设空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) |\ (x, y) \in \mathsf{D}_z, c_1 \leqslant z \leqslant c_2\}$$

其中 D_z 为 Ω 与 $z = z$ 的截面。



则有三重积分计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint_{\mathsf{D}_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2 计算三重积分$\iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的闭区域。

解：空间闭区域可表示为

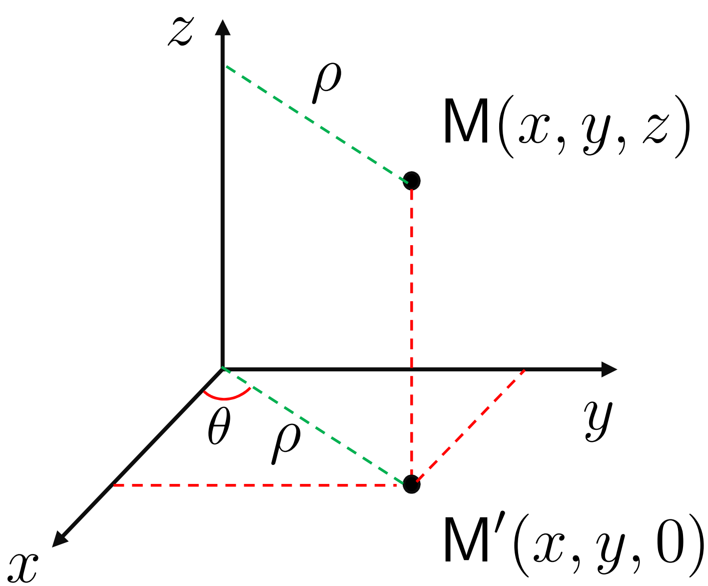
$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2},-c\leqslant z\leqslant c\right\}$$

计算三重积分

$$\begin{aligned}I&=\int_{-c}^{c} z^2\mathrm{d}z\iint_{\mathrm{D}_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2\mathrm{d}z\\&=\frac{4}{15}\pi abc^3\end{aligned}$$

练习 利用直角坐标计算 $\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面 $z=x^2+y^2$ 以及平面 $z=4$ 所围成区域。

柱面坐标计算三重积分



M点的柱面坐标为(ρ, θ, z)

- $0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$
- $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
- $-\infty < z < +\infty$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{dV} = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

例3 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成。

解：把闭区域投影到 $x\mathrm{O}y$ 面，得到

$$\mathrm{D}_{xy}=\{(\rho,\theta)|\ 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$$

在 D_{xy} 内任取一点 (ρ,θ)，过此点平行于 z 轴的直线。

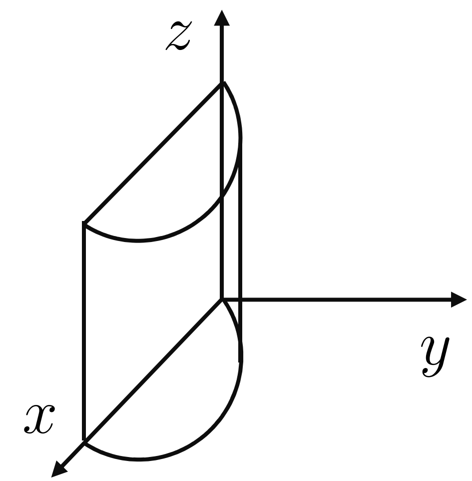
在柱面坐标下 $\Omega:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant 2\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ \rho^2\leq z\leq 4\end{cases}$，计算三重积分

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4 z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{64}{3}\pi$$

练习　计算三重积分$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为柱面$x^2+y^2=2x$以及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0)$所围成半圆柱体。

解：在柱面坐标下



$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta\\0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant z\leqslant a\end{cases}$$

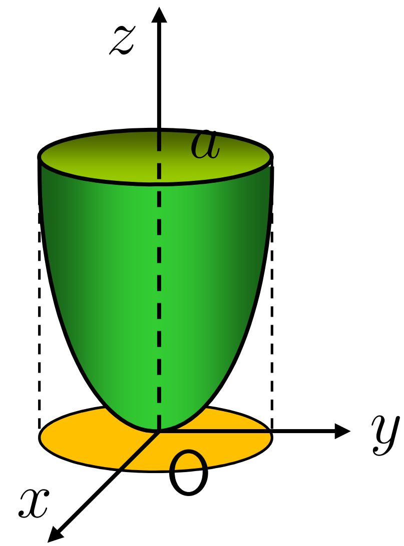
计算三重积分

$$I=\iiint_{\Omega} z\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^a z\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

练习　计算三重积分$\iiint_\Omega \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中Ω为抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=a(a>0)$ 所围成。

解：在柱面坐标下



$$\Omega:\begin{cases}\frac{\rho^2}{4}\leqslant z\leqslant a\\ 0\leqslant\rho\leqslant 2\sqrt{a}\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

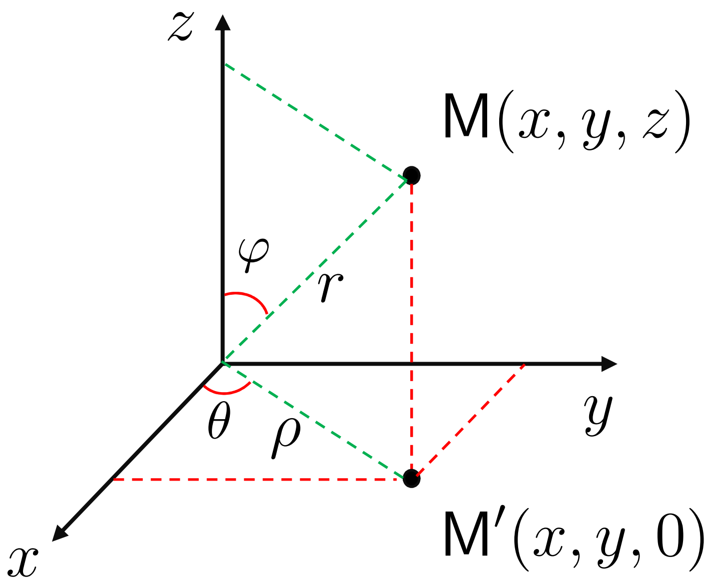
计算三重积分

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{a}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{a}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{a}}\frac{\rho}{1+\rho^2}(a-\frac{\rho^2}{4})\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4a)\ln(1+4a)-4a]$$

球面坐标计算三重积分



M点的球面坐标为(r,φ,θ)

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

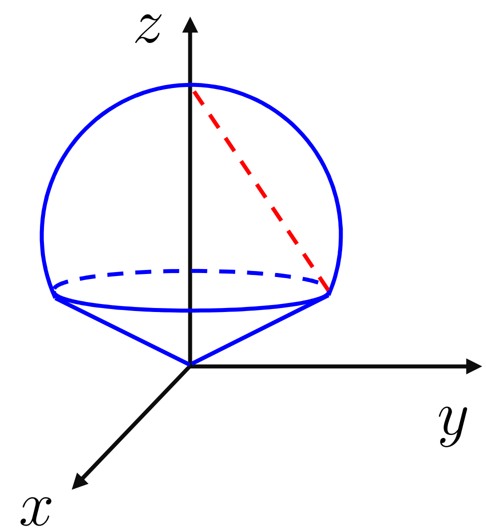
- $0 \leqslant r \leqslant +\infty$
- $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
- $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

其中$F(r,\varphi,\theta) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$。

例4 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积

解：设球面通过原点，又内接锥面的顶点于原点，其轴与 z 轴重合，在球面坐标系中



$$\Omega : \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\varphi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\Omega} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

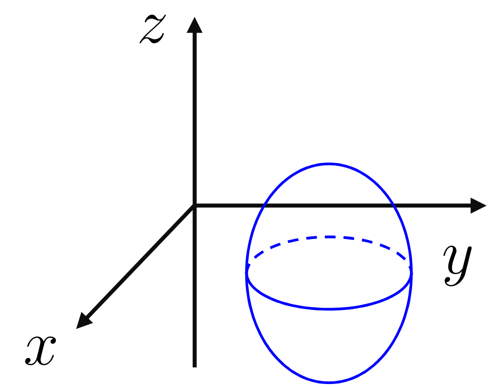
$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \mathrm{d}r = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{a} \cos^3\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}(1 - \cos^4\alpha)$$

三重积分的对称性

➢ 性质（奇偶对称性）

设空间中三维闭区域 Ω 关于 $x\mathrm{O}y$ 坐标面对称



■ 若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的奇函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = 0$$

■ 若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的偶函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

例5 设 Ω 球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ 计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$$

解：利用对称性

奇函数

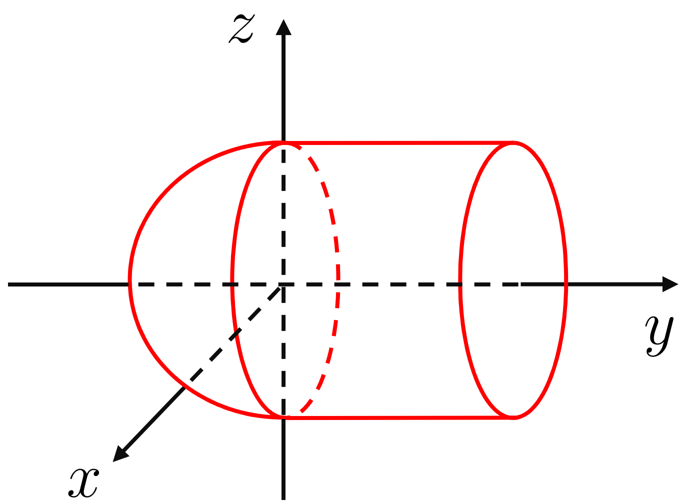
$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z$$

$$=0$$

复习与提高

题1：计算 $I=\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 所围成。

解：采用投影法，投影到 $x\mathrm{O}z$ 平面



$$\mathrm{D}_{xz}=\left\{(x,z)\middle|\ x^2+z^2\leqslant 1\right\}$$

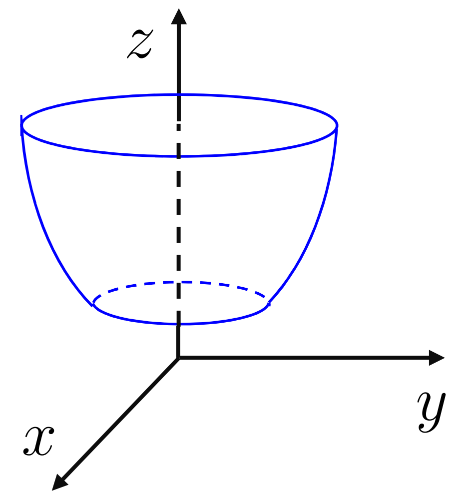
计算

$$I=\iint_{\mathrm{D}_{xz}}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\mathrm{D}_{xz}}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{x^2+z^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{28}{45}$$

题2：计算 $\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$z=1$，$z=4$ 所围成。

解：



$$I=\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iiint_\Omega 5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

利用对称性

$$I=\frac{1}{2}\iiint_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_1^4\mathrm{d}z\iint_{\mathrm{D}_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}z=21\pi$$

复习与提高

题3：设有空间闭区域

$$\Omega_1 = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2, z \geqslant 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

则有（ C ）

(A) $\iiint_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$

作业

P160： 第 4 题；第 5 题；第 8 题；第 11 题（5）

10.4 重积分的应用

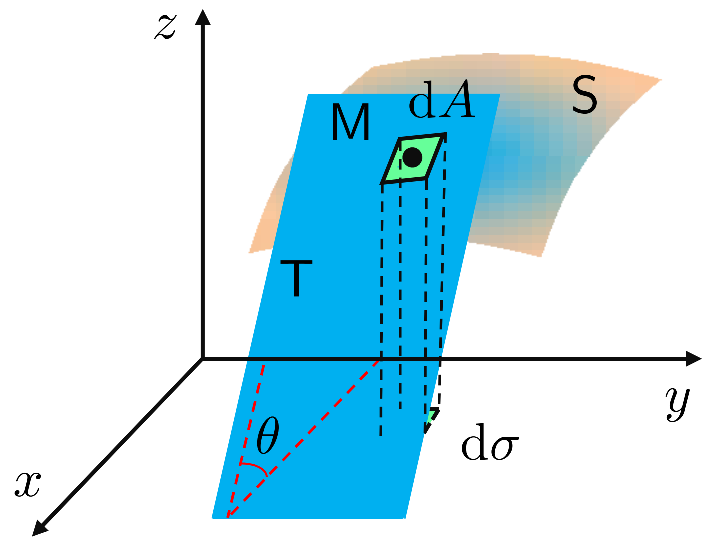
- 曲面的面积
- 质心
- 转动惯量
- 引力

曲面积分

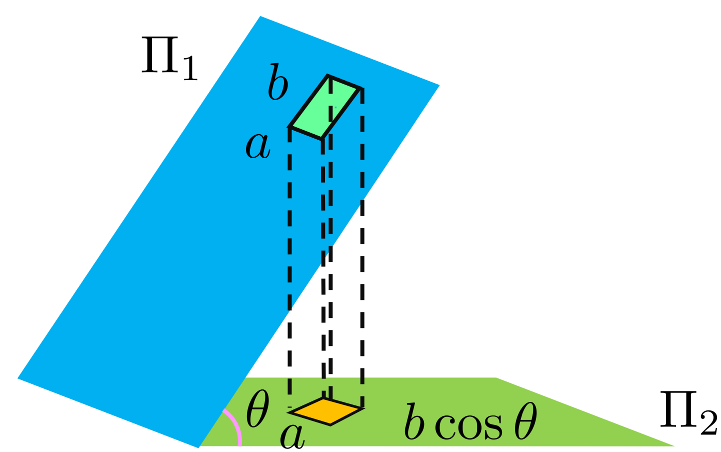
设曲面 S 由方程

$$z = f(x, y)$$

给出，D 为曲面在 xOy 面上的投影区域，函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上具有连续偏导数，计算曲面 S 的面积 A。



$$\begin{cases} \mathrm{d}A = ab \\ \mathrm{d}\sigma = ab\cos\theta \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}A = \frac{1}{\cos\theta}\mathrm{d}\sigma$$

曲面积分

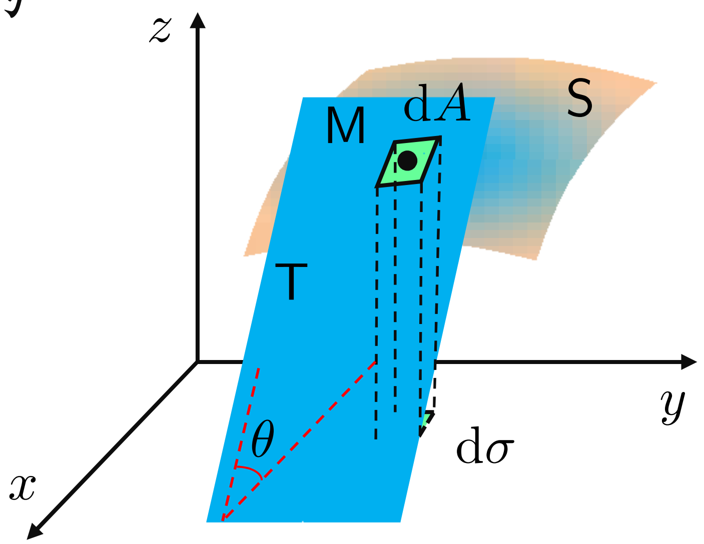
曲面 S 上点 M(x_0, y_0, z_0) 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x,y), f_y(x,y), -1)$$

由点法式方程可得切平面

$$\boldsymbol{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 1$$

该平面与 xOy 面夹角余弦值为

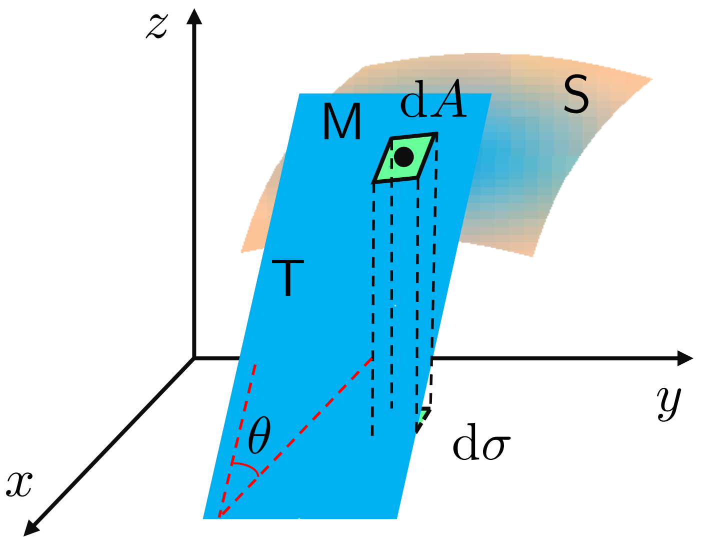


$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x_0,y_0) + f_y^2(x_0,y_0)}}$$

对于任意点 M(x,y,z) 有

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma$$

曲面积分



曲面 S 的面积为

$$A = \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

曲面积分

设曲面的方程为 $x = g(y,z)$ 或 $y = h(z,x)$ 可分别把曲面投影到 $y\mathsf{O}z$ 面上（投影区域记为 D_{yz}）或 $x\mathsf{O}z$ 面上（投影区域记为 D_{xz}），类似可得

$$A = \iint_{\mathsf{D}_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

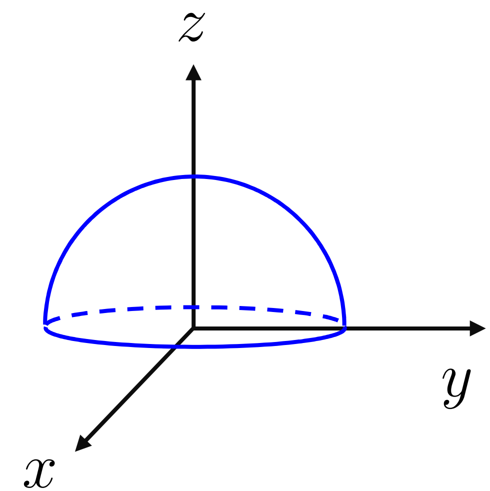
或

$$A = \iint_{\mathsf{D}_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

例1 求半径为 a 的球的表面积。

解：取上半球面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

则它在 xOy 面上的投影区域D : $x^2+y^2\leqslant a^2$



计算

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

于是

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

取积分区域 $\mathrm{D}_1: x^2+y^2\leqslant b^2$，计算

$$A_1=\iint_{\mathrm{D}_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

转极坐标得

$$A_1 = \iint_{\mathsf{D}_1} \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^b \frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$
$$= 2\pi a \int_0^b \frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho = 2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})$$

于是

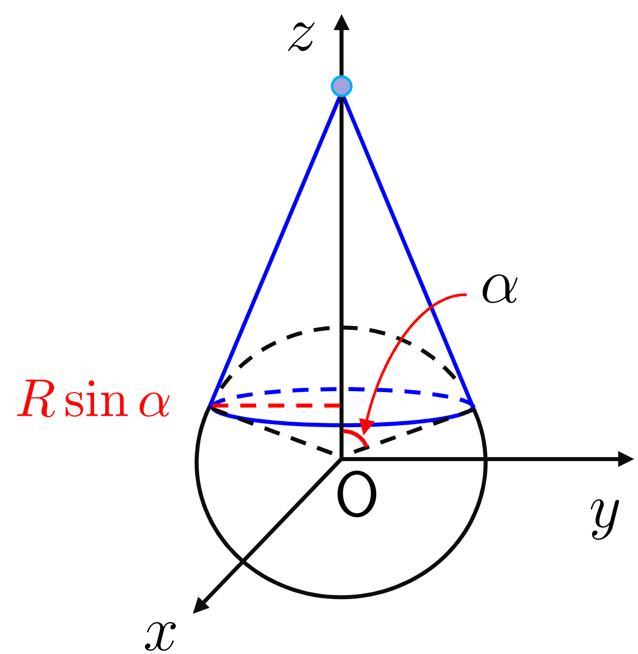
$$\lim_{b\to a} A_1 = \lim_{b\to a} 2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2}) = 2\pi a$$

因此整个球面的面积为

$$A = 4\pi a^2$$

例2 设有一颗地球同步轨道通信卫星，距地面高度36000 km 运行的角速度与地球自转的角速度相同。试计算覆盖面积与地球表面积的比值（地球半径为 $R = 6400$ km ）。

解：取地心为坐标原点，地心到通信卫星钟信的连线为 z 轴，建立坐标系



通信卫星覆盖的曲面 S 是上半球面被半顶角为 α 的圆锥面所截的部分，即

$$\begin{cases} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \leqslant R^2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

于是通信卫星得覆盖面积为

$$A = \iint_{\mathrm{D}_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$A=\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D_{xy}： $x^2+y^2\leqslant R^2\sin^2\alpha$ 是曲面 S 在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影区域。

利用极坐标，可得

$$A=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\alpha}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=2\pi R\int_0^{R\sin\alpha}\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi R^2(1-\cos\alpha)$$

由于 $\cos\alpha=\dfrac{R}{R+h}$，因此

$$A=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{R+h}\right)=2\pi R^2\frac{h}{R+h}$$

由此得这颗通信卫星的覆盖面积与地球表面积之比为

$$\frac{A}{4\pi R^2}=\frac{h}{2(R+h)}=\frac{36\times10^3}{2(36+6.4)\times10^3}\approx42.5\%$$

质心

设在 xOy 平面上有 n 个质点，它们分别位于点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ $\cdots,(x_n,y_n)$ 处，质量分别为 m_1，$m_2,\cdots,m_n$，该质点系的质心坐标为

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

其中 $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ 为该质点系的总质量，

$$M_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i,\quad M_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$$

分别为该质点系对 y 轴和 x 轴的静矩。

问题描述：设有一平面薄片，占有 $x\mathrm{O}y$ 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu(x,y)$，假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，找出薄片质心的坐标

该薄片 x 轴静距和 y 轴静距分别为

$$M_y=\iint_{\mathrm{D}}x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad M_x=\iint_{\mathrm{D}}y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

薄片质量为 $M=\displaystyle\iint_{\mathrm{D}}\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 。

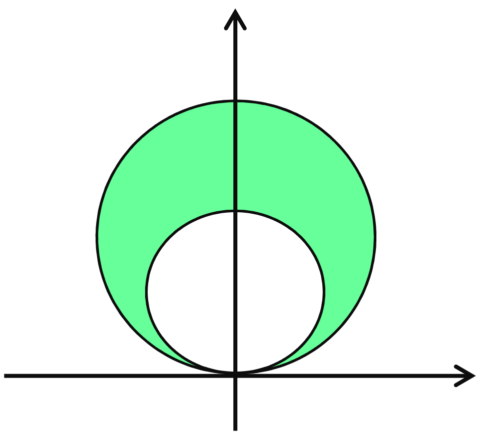
故薄片质心坐标为

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_{\mathrm{D}}x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_{\mathrm{D}}\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \overline{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_{\mathrm{D}}y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_{\mathrm{D}}\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}$$

若为均匀薄片，则质心坐标为

$$(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{\iint_{\mathrm{D}}x\mathrm{d}\sigma}{\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{d}\sigma},\frac{\iint_{\mathrm{D}}y\mathrm{d}\sigma}{\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{d}\sigma}\right)$$

例3 求位于两圆 $\rho=2\sin\theta$ 和 $\rho=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的质心。



解：如图所示，由于闭区域关于 y 轴对称所以质心必然位于 y 轴上，于是 $\overline{x}=0$ 。

质心 y 轴坐标为

$$\overline{y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mathrm{d}\sigma}$$

其中 $\iint_D \mathrm{d}\sigma=4\pi-\pi=3\pi$ ，

$$\iint_D y\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=7\pi$$

故所求质心坐标为 $(0,\frac{7}{3})$ 。

转动惯量

设在 $x\mathsf{O}y$ 平面上有 n 个质点，它们分别位于点

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$$

质量分别为 $m_1,m_2,\cdots m_n$。由力学可知，该质点系对于 x 轴和对于 y 轴的转动惯量依次为

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}y_i^2m_i,\quad I_y=\sum_{i=1}^{n}x_i^2m_i$$

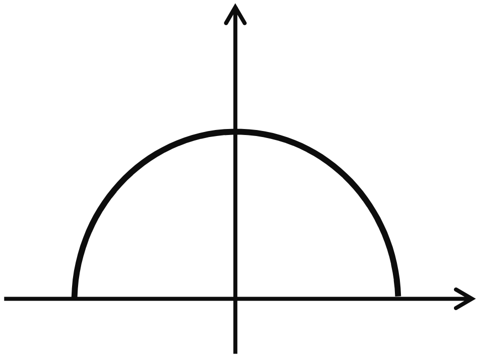
设有一薄片，占有 $x\mathsf{O}y$ 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu(x,y)$，若 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$I_x=\iint_{\mathsf{D}}y^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\ I_y=\iint_{\mathsf{D}}x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

例5 求半径为 a 的均匀半圆薄片（面密度为常量 μ ）对于其直径的转动惯量。

解：取坐标系如图所示，则薄片所占区域

$$\mathrm{D}=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0\}$$



而所求转动惯量即半圆薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x

$$I_x=\iint_{\mathrm{D}}\mu y^2\mathrm{d}\sigma=\mu\iint_{\mathrm{D}}\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=\mu\cdot\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot\frac{\pi}{2}$$

引力

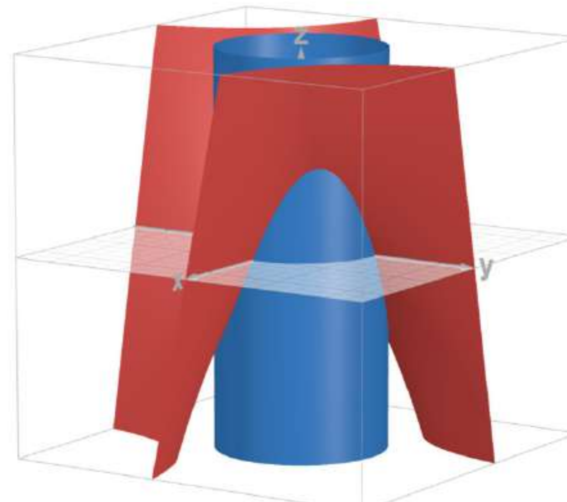
设物体占有空间有界闭区域 Ω，它在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$，并假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续。该物体对位于点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的质点，引力近似为

$$
\begin{aligned}
F &= (F_x, F_y, F_z) \\
&= \Big(\iiint_\Omega \tfrac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3} \mathrm{d}V, \iiint_\Omega \tfrac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3} \mathrm{d}V, \\
&\qquad \iiint_\Omega \tfrac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3} \mathrm{d}V \Big)
\end{aligned}
$$

其中 G 为引力常量。

题1：计算曲面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积。

解：如图所示，所截区域为



$$\Pi: \quad z = xy, \quad x^2 + y^2 \leqslant R^2$$

该曲面在 xOy 面的投影为

$$\mathrm{D}_{xy}: x^2 + y^2 \leqslant R^2$$

于是所截面积为

$$\iint_{\mathrm{D}_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}_{xy}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + \rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \quad = 2\pi \left[\frac{1}{3}(1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

作业

P170： 第 3 题；第 7题；第 12 题；第 14 题

第十一章 曲线积分与曲面积分

邹秋云

软件与物联网工程学院

第十一章 曲线积分与曲面积分

11.1 对弧长的积分

- 对弧长的曲线积分的概念与性质
- 对弧长的曲线积分的计算法

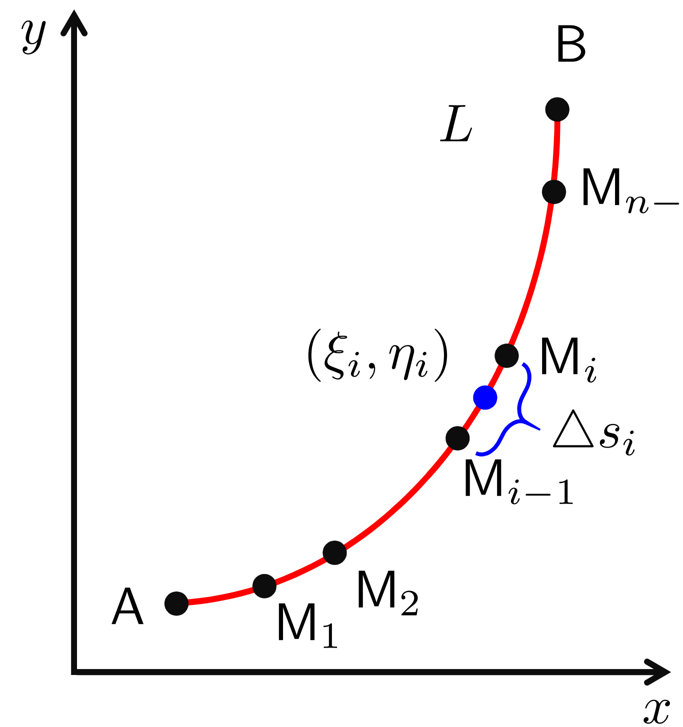
对弧长的曲线积分的概念与性质

➢ 引例：曲线形构件的质量

假设曲线形细长构件在空间所占弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 为其线密度为 $\rho(x,y,z)$，计算此构件质量。

将线 L 按点 $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_{n-1}$ 分成 n 段，对于小段构件 $\overset{\frown}{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i}$，当小段构件长度足够短时，其质量近似为

$$\mu(\xi_i, \eta_i)\triangle s_i$$

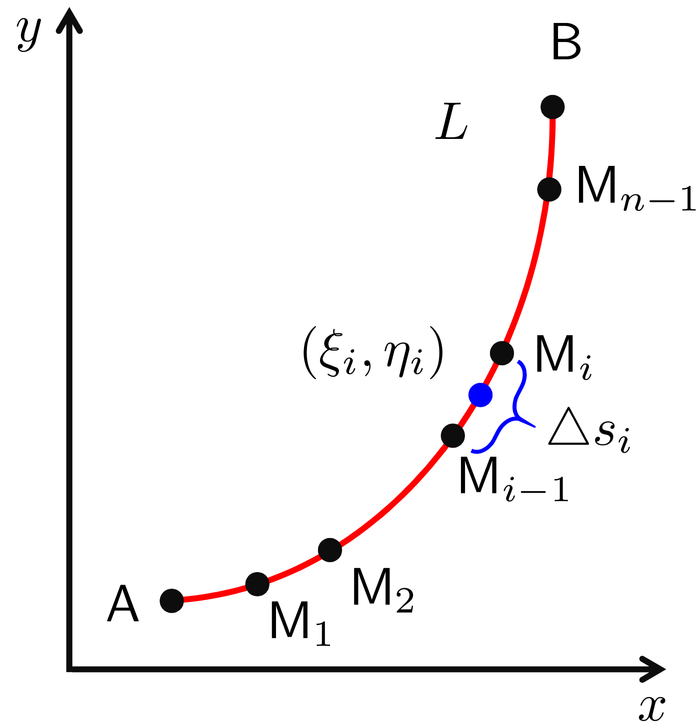


于是整个曲线形构件的质量为

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i)\triangle s_i$$

对弧长的曲线积分

- L 在平面上分段光滑
- $f(x,y)$ 在 L 有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任意取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$



定义1　定义 $f(x,y)$ 在 L 上的对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\triangle s_i$$

其中 L 为积分弧段，$\mathrm{d}s$ 为弧长元素，$\lambda \triangleq \max\{\triangle s_1, \cdots, \triangle s_n\}$

第一类曲线积分

标注1：对弧长的曲线积分又称为第一类曲线积分

标注2：对闭曲线 L，记

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

标注3：若 L 是分段光滑曲线，$f(x,y)$ 在 L 上连续，则

$\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在。

标注4：$\displaystyle\int_L \mathrm{d}s = \mathrm{Length}(L)$，即曲线 L 的长度。

第一类曲线积分的性质

性质1（线性和） 设 α 和 β 为常数，则

$$\int_L (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\mathrm{d}s = \alpha \int_L f(x,y)\mathrm{d}s + \beta \int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

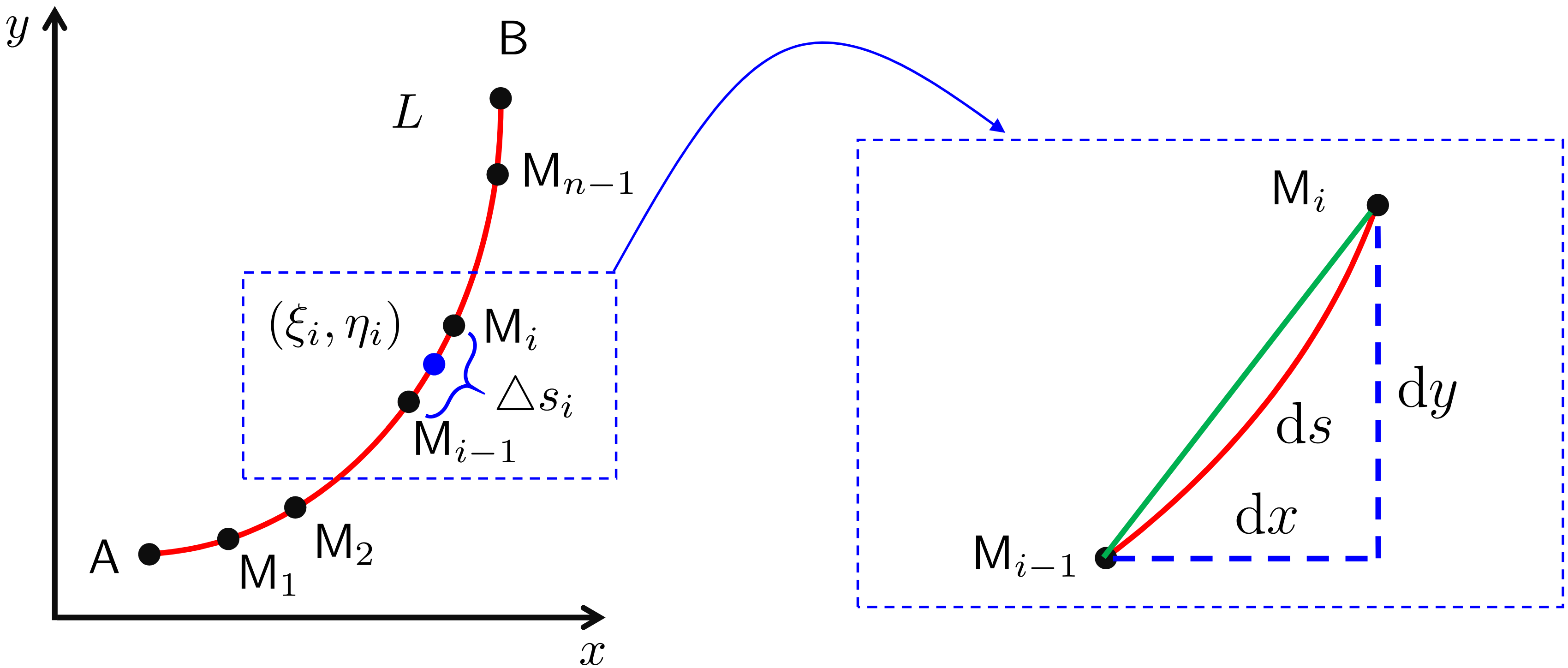
性质2（分段和） 将积分弧段 L 分成 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

性质3（保号性） 若在 L 上 $f(x,y) \geqslant g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \geqslant \int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

第一类曲线积分计算方法



当 $\lambda \to 0$ 时，有

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

平面曲线的参数方程

设平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，其中 $t \in [\alpha, \beta]$，则

弧长元素

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\mathrm{d}t$$

定理1 设 $f(x, y)$ 在曲线 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $x = \phi(t), y = \psi(t), (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$，若 $\phi'(t), \psi'(t)$ 连续，且 $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \neq 0$，则曲线积分存在，且

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\mathrm{d}t$$

注：下限 α 一定小于 β。

平面曲线积分

定理2　若曲线弧 L 由方程 $y=\phi(x),(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(\phi'(x))^2}\mathrm{d}x$$

从而得到曲线积分公式

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\phi(x))\sqrt{1+(\phi'(x))^2}\mathrm{d}x$$

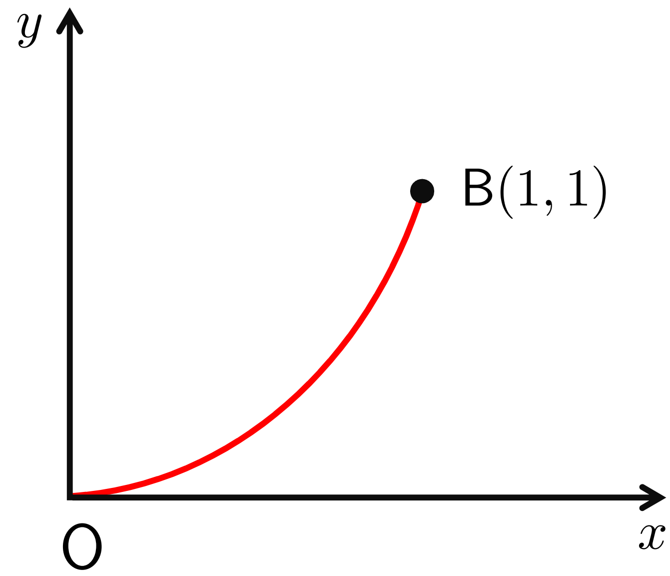
若曲线弧 L 由方程 $x=\psi(y)$, $(a\leqslant y\leqslant b)$ 给出，则有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(\psi(y),y)\sqrt{1+(\psi'(y))^2}\mathrm{d}y$$

例1 计算$\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$上点 O$(0,0)$ 到点 B$(1,1)$ 之间的弧。

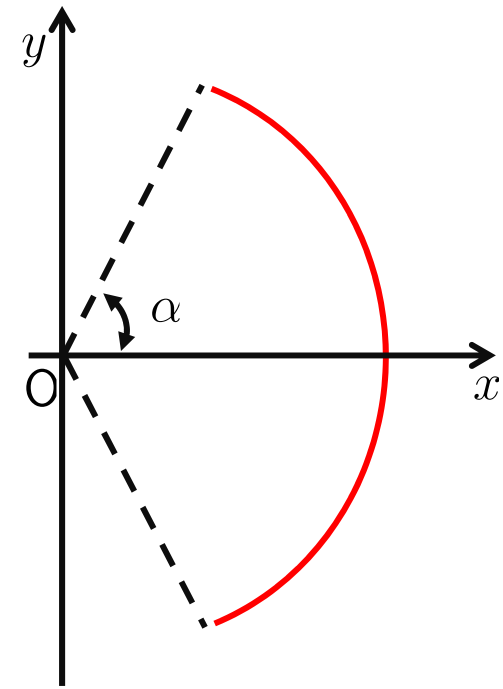
解：

$$\begin{aligned}\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s &= \int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$



例2 计算半径为 R、中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I（设线密度为1）。

解：利用参数方程



$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha)$$

于是

$$I = \int_L y^2 \mathrm{d}s$$

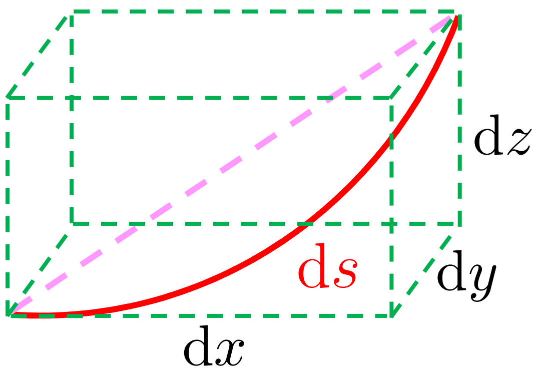
$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2} \mathrm{d}\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{R^3}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R^3}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

空间曲线积分

若为空间曲线，则小弧段可近似为

$$\lim_{\lambda\to 0} \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$



定理3 空间曲线弧 Γ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

给出，则有

$$\int_L f(x, y, z)\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\omega'(t))^2}\mathrm{d}t$$

例3 计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$ 上相应于 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的一段弧。

解：

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$
$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$$

曲线积分的对称性

若平面曲线 ℓ 关于 x 轴对称

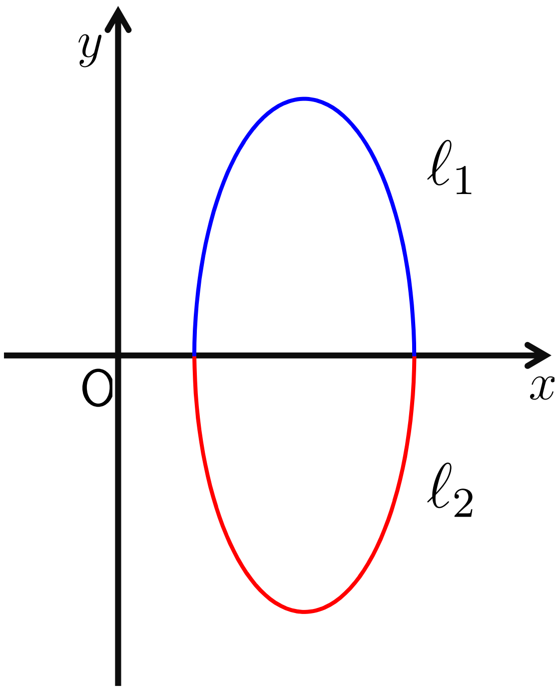
- 若 $f(x,y)$ 为关于 y 的奇函数，则

$$\int_{\ell} f(x,y)\mathrm{d}s = 0$$

- 若 $f(x,y)$ 为关于 y 的偶函数，则

$$\int_{\ell} f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{\ell_1} f(x,y)\mathrm{d}s$$

其中 ℓ_1 为 ℓ 以 x 轴分割的上半部分。



曲线积分的对称性

若平面曲线 ℓ 关于 y 轴对称

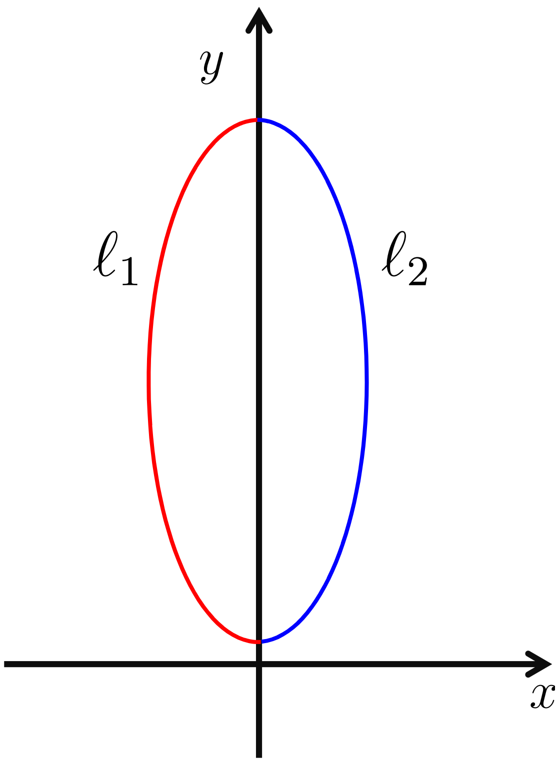
- 若 $f(x,y)$ 为关于 x 的奇函数，则

$$\int_\ell f(x,y)\mathrm{d}s = 0$$

- 若 $f(x,y)$ 为关于 x 的偶函数，则

$$\int_\ell f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{\ell_1} f(x,y)\mathrm{d}s$$

其中 ℓ_1 为 ℓ 以 y 轴分割的左半部分。



复习与提高

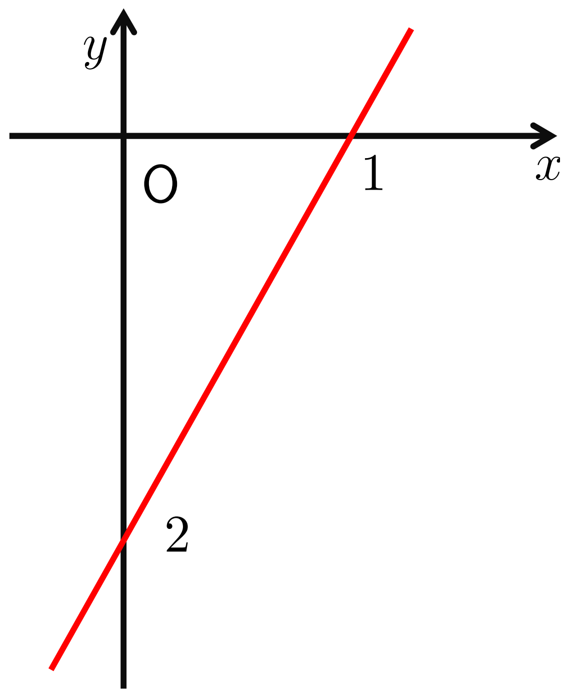
习题1：计算 $\int_L e^{x+y}\mathrm{d}s$，其中 L 是直线 $2x-y=2$ 在第四象限部分。

解：

$$\int_L e^{x+y}\mathrm{d}s = \int_L e^{3x-2}\sqrt{1+4}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{5}\left[\frac{1}{3}e^{3x-2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}(e-e^{-2})$$



习题2：已知椭圆 $L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长是 C，计算

$$\int_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$$

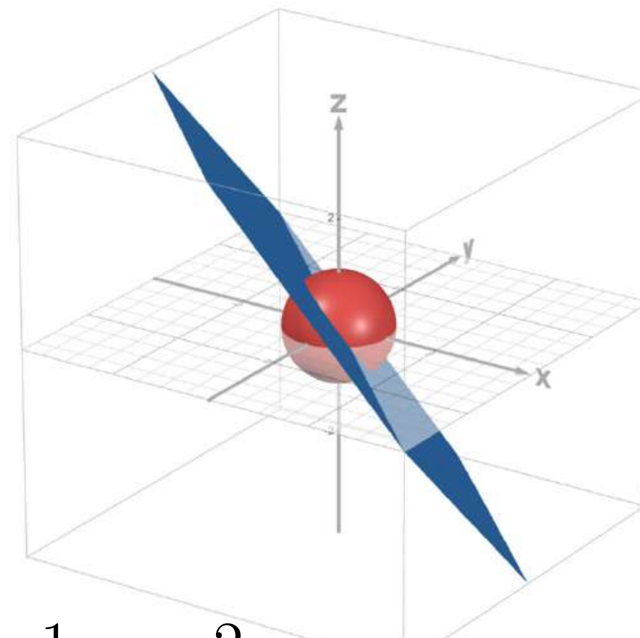
解：

$$\begin{aligned} I &= \int_L 2xy\mathrm{d}s + 12\int_L \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s \\ &= 0+\int_L 12\mathrm{d}s \\ &= 12C \end{aligned}$$

习题3：计算$\oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周。

解：解法一：参数方程

- 步骤一：构造正交基底。取平面内单位向量



$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

取平面内 u 的正交向量 v

$$v = n \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

归一化得

$$v = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

- 步骤二：用基地表示圆。则平面 $x+y+z=1$ 上半径为 1 的圆表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{u}\cos\theta+\boldsymbol{v}\sin\theta \quad \theta\in[0,2\pi]$$

平面与球交点的参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ y(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ z(\theta)=-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta \end{cases} \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

- 步骤三：计算 $\mathrm{d}s$ 。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

- 步骤四：计算积分

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{6}\sin^2\theta + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

解法二：利用对称性。

由对称性有

$$\oint_\Gamma x^2 \mathrm{d}s = \oint_\Gamma y^2 \mathrm{d}s = \oint_\Gamma z^2 \mathrm{d}s$$

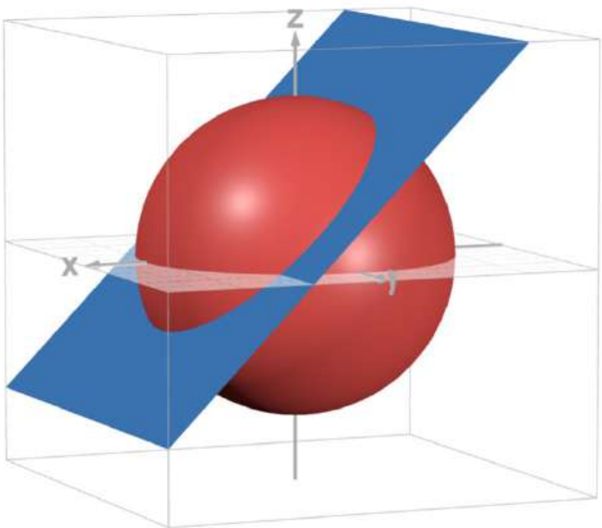
所以

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma x^2 \mathrm{d}s &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\oint_\Gamma 1\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\cdot 2\pi\end{aligned}$$

习题4：计算 $\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$ ，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9/2$ 被平面 $x+z=1$ 所截得的曲线。

解：

$$I=\frac{9}{2}\oint_{\Gamma}\mathrm{d}s$$



原点到平面 $x+z=1$ 的距离为

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

根据勾股定律，所截曲线的半径为 $R=\sqrt{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}=2$ 。故

$$I=\frac{9}{2}\cdot(2\pi R)=18\pi$$

作业

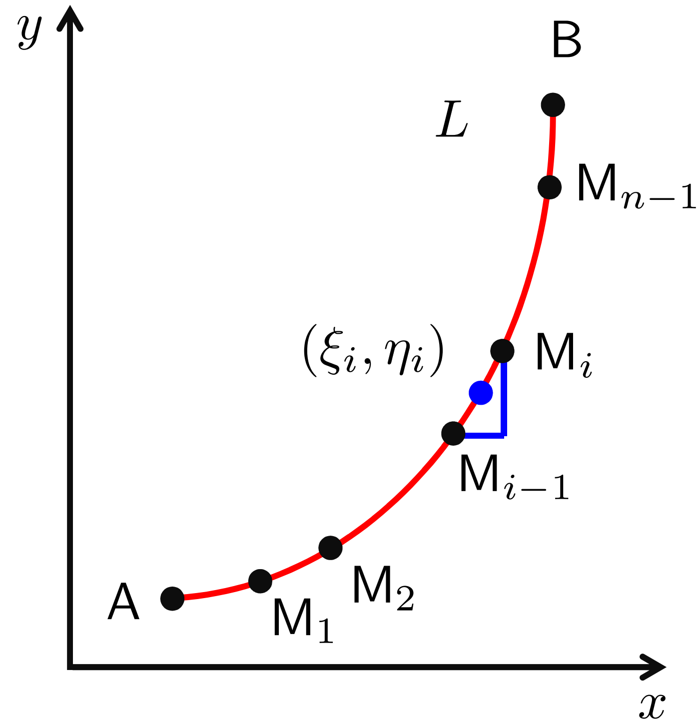
11-1节：第3题(3)(4)(6)(7)，第5题

11.2 对坐标的曲线积分

- 概念与性质
- 计算方法

对坐标的曲线积分的概念与性质

➢ 引例：变力沿曲线所作的功



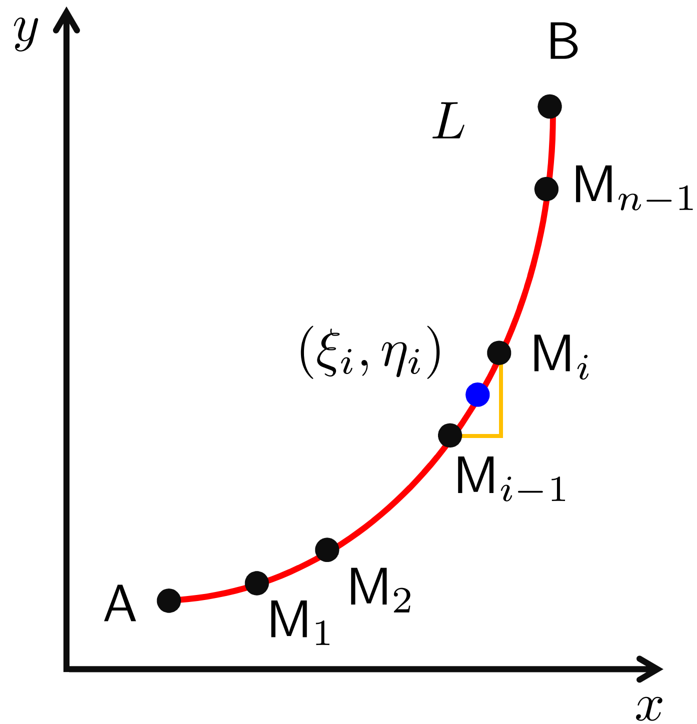
设一质点在 xOy 面内受到力

$$\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

的作用，从点 A 沿着光滑线弧 L 移动到 B。计算在此过程中变力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功。

将曲线 L 分成 n 段，当小段弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 足够短时，$\boldsymbol{F}$ 沿有向弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 可近似为恒力 $\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)$ 沿 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 所做的功

$$\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_{i-i}M_i} = P(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\triangle y_i$$



对于小段弧 $\overset{\frown}{\mathrm{M}_{i-1}\mathrm{M}_i}$，变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 所做的功可近似为

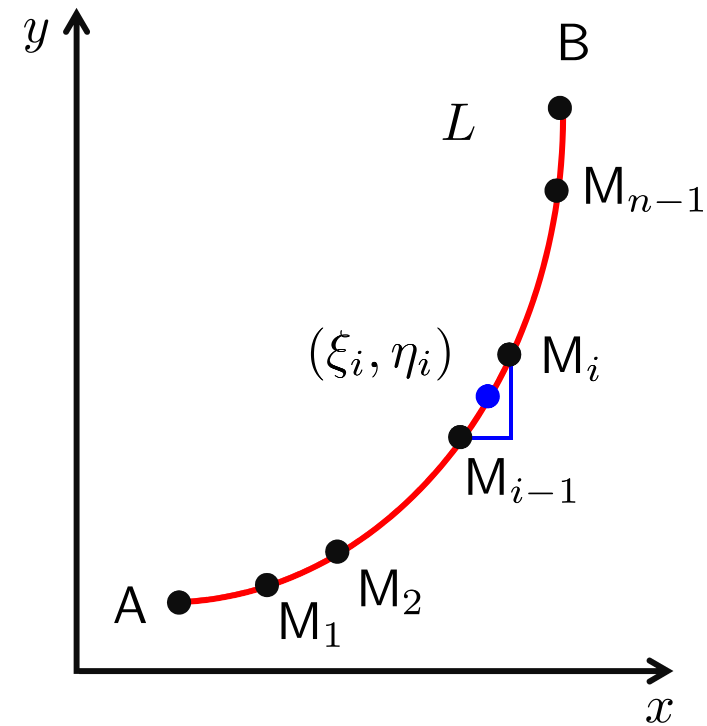
$$\triangle W_i = P(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\triangle y_i$$

当 n 段小弧段最大长度 $\lambda \to 0$ 时，$\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿 L 所做的功为

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\triangle y_i]$$

对坐标 X 轴的曲线积分

- 有向曲线弧 L 光滑
- $P(x,y)$ 在 L 有界
- 任意划分 $L=\bigcup_i L_i$
- 任意取点 $(\xi_i,\eta_i)\in L_i$



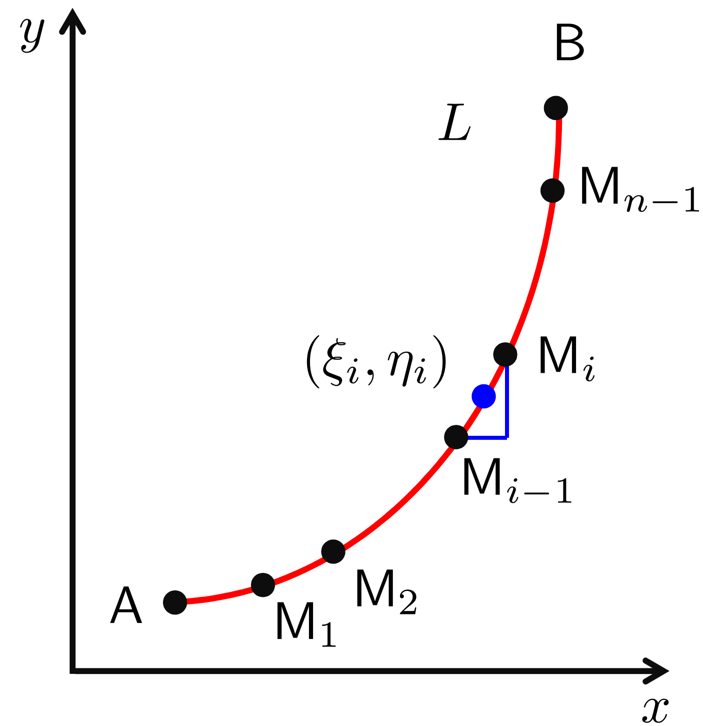
定义1　定义 $P(x,y)$ 在 L 上的对坐标 x 的曲线积分

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i$$

其中 L 为积分弧段，$\lambda\triangleq\max\{\triangle x_1,\cdots,\triangle x_n\}$。

对坐标 Y 轴的曲线积分

- 有向曲线弧 L 光滑
- $Q(x,y)$ 在 L 有界
- 任意划分 $L=\bigcup_i L_i$
- 任意取点 $(\xi_i,\eta_i)\in L_i$



定义2　定义 $Q(x,y)$ 在 L 上的对坐标 y 的曲线积分

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\triangle y_i$$

其中 L 为积分弧段，$\lambda\triangleq\max\{\triangle y_1,\cdots,\triangle y_n\}$。

第二类曲线积分

标注1： 对坐标的曲线积分又称为第二类曲线积分

标注2： 规定

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L P(x,y) + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

标注3： 若 L 是分段光滑曲线，$P(x,y), Q(x,y)$ 在 L 上连续，

则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$ 和 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在。

标注4： 设有向曲线弧 L 的起点为 $\mathsf{A}(x_{\mathsf{A}}, y_{\mathsf{A}})$，终点为 $\mathsf{B}(x_{\mathsf{B}}, y_{\mathsf{B}})$，则

$$\int_L \mathrm{d}x = x_{\mathsf{B}} - x_{\mathsf{A}}, \quad \int_L \mathrm{d}y = y_{\mathsf{B}} - y_{\mathsf{A}}$$

第二类曲线积分的性质

性质1（线性和） 设 α 和 β 为常数，则

$$\int_L (\alpha P_1(x,y) + \beta P_2(x,y))\mathrm{d}x = \alpha \int_L P_1(x,y)\mathrm{d}x + \beta \int_L P_2(x,y)\mathrm{d}x$$

性质2（分段和） 将积分弧段 L 分成 L_1 和 L_2，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x$$

性质3（方向性） 记 L^- 为 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$$

第二类曲线积分计算方法

设平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，其中 t 从 α 单调变化到 β，则

$$\mathrm{d}x=\phi'(t)\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y=\psi'(t)\mathrm{d}t$$

定理1　设 $f(x,y)$ 在曲线 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $x=\phi(t), y=\psi(t)$，其中 t 从 α 单调变化到 β，$\phi'(t),\psi'(t)$ 连续，且 $(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2\neq 0$，则曲线积分存在，且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \left[P(\phi(t),\psi(t))\phi'(t)+Q(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]\mathrm{d}t$$

注：下限 α 不一定小于 β。

第二类曲线积分计算方法

定理2 若曲线弧 L 由方程 $y=\phi(x)$,$(x:\alpha\to\beta)$，则有

$$\mathrm{d}y=\phi'(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta[P(x,\phi(x))+Q(x,\phi(x))\phi'(x)]\mathrm{d}x$$

若曲线弧 L 由方程 $x=\psi(y)(y:\alpha\to\beta)$，则有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\left[P(\psi(y),y)\psi'(y)+Q(\psi(y),y)\right]\mathrm{d}y$$

例1 计算$\int_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 如右图所示。

解：解法一

$$I = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\mathrm{d}x$$

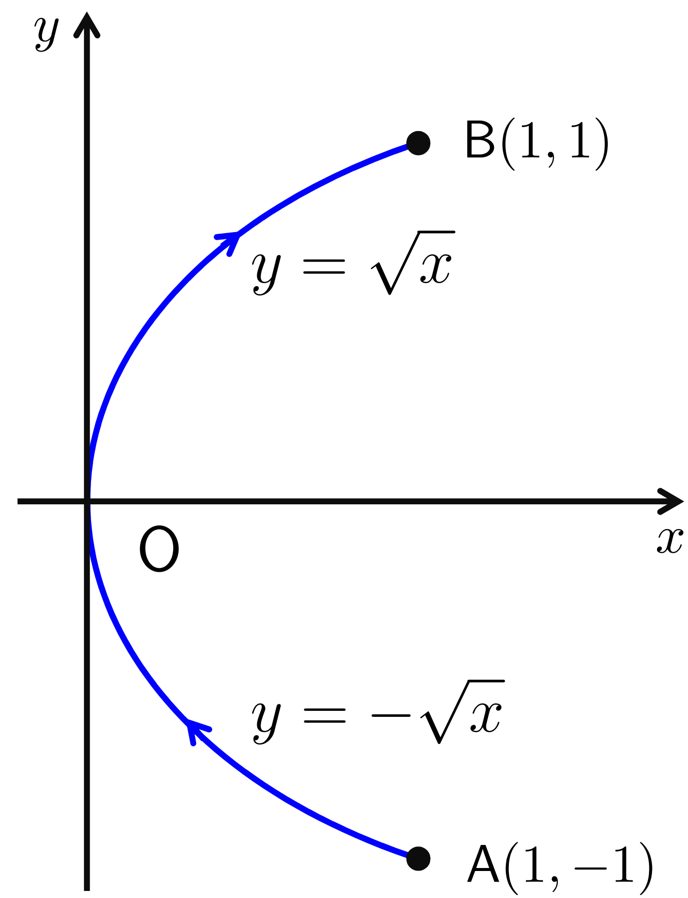
$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

解法二

$$I = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y \cdot (y^2)'\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_{-1}^1 y^4\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$



注：对比 $\int_L xy\mathrm{d}s$ 有何区别？

例2 计算 $\int_L y^2 \mathrm{d}x$ ，其中 L 为

（1）半径为 a，圆心为原点、按照逆时针方向的上半圆周；

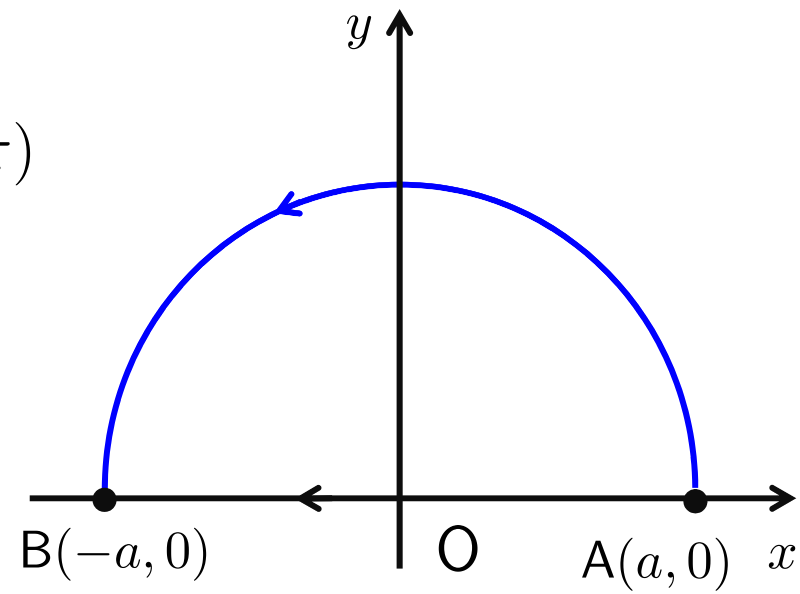
（2）从点 A$(a,0)$ 到 B$(-a,0)$ 的直线段。

解：（1）L 的参数方程为

$$x = a\cos\theta,\ \ y = a\sin\theta,\ \ (\theta : 0 \rightarrowtail \pi)$$

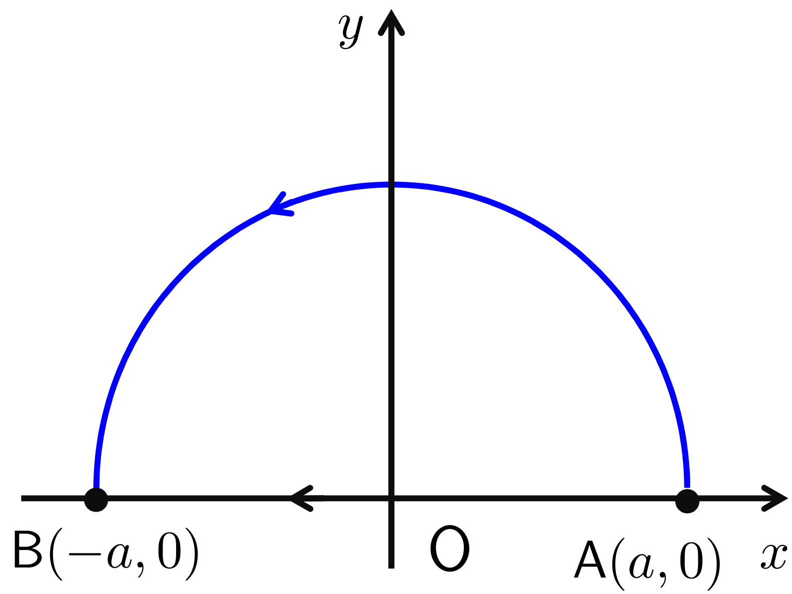
计算

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= a^3 \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta \\ &= a^3\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^{-1} = -\frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$



（2）

$$I = \int_a^{-a} y^2 \mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0 \mathrm{d}x = 0$$



例3 计算$\int_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$，其中 L 为

（1）抛物线 $y = x^2$ 从 O$(0,0)$ 到 B$(1,1)$ 的一段弧；

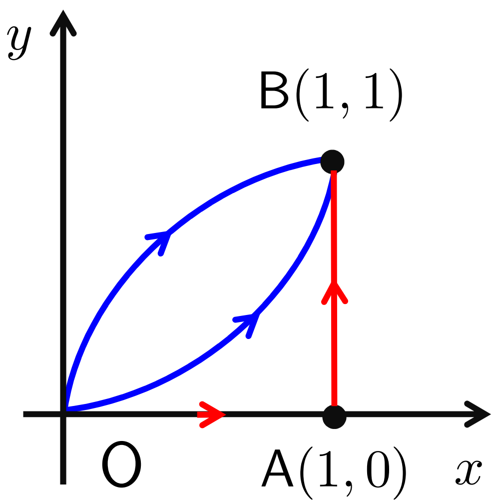
（2）抛物线 $x = y^2$ 从 O$(0,0)$ 到 B$(1,1)$ 的一段弧；

（3）有向折线 OAB，其中 O$(0,0)$, A$(1,0)$, B$(1,1)$。

解：（1）化为对 x 的定积分，

$$I = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = 1$$



（2）化为对 y 的定积分

$$I = \int_0^1 2 \cdot (y^2) \cdot y \cdot (2y) + y^4\mathrm{d}y$$

$$= 5\int_0^1 y^4\mathrm{d}y = 1$$

例3 计算$\int_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$，其中 L 为

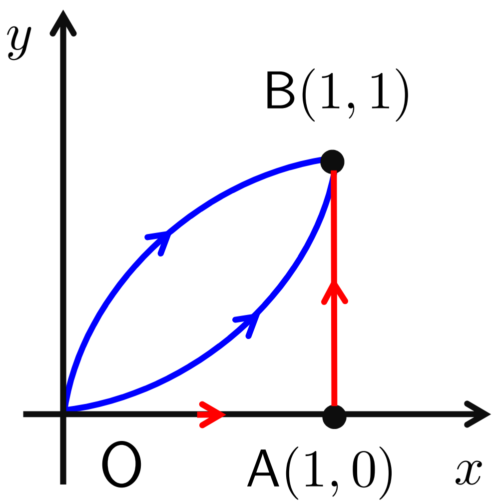
（1）抛物线 $y = x^2$ 从 O$(0,0)$ 到 B$(1,1)$ 的一段弧；

（2）抛物线 $x = y^2$ 从 O$(0,0)$ 到 B$(1,1)$ 的一段弧；

（3）有向折线 OAB，其中 O$(0,0)$, A$(1,0)$, B$(1,1)$。

（3）在 OA 上

$$\int_{\mathrm{OA}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)\mathrm{d}x = 0$$



在 AB 上

$$\int_{\mathrm{AB}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)\mathrm{d}y = 1$$

从而

$$I = \int_{\mathrm{OA}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y + \int_{\mathrm{AB}} 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 1$$

第二类曲线积分：空间曲线

定理3 设空间有向曲线弧 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (t : a \rightarrowtail b)$$

则有

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b [P(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\phi'(t) + Q(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\psi'(t)$$

$$+R(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\omega'(t)]\,\mathrm{d}t$$

例4 计算 $\int_{\Gamma} x^3 \mathrm{d}x + 3zy^2 \mathrm{d}y - x^2 y \mathrm{d}z$ ，其中 Γ 是从点 A$(3,2,1)$ 到点 B$(0,0,0)$ 的直线段 AB。

解：直线段 AB 的方程是

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

化为参数方程得

$$x = 3t,\ y = 2t,\ z = t, \qquad t : 1 \rightarrowtail 0$$

根据定理3，计算

$$I = \int_1^0 \left[(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t\right] \mathrm{d}t$$

$$= 87 \int_1^0 t^3 \mathrm{d}t = -\frac{87}{4}$$

例5 设一个质点在点 M(x,y) 处受到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，$\boldsymbol{F}$ 的大小与点 M 到原点 O 的距离成正比，$\boldsymbol{F}$ 的方向恒指向原点。此质点由点 A$(a,0)$ 沿椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 按逆时针方向移动到点 B$(0,b)$ ，求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W。

解：

$$\overrightarrow{\text{OM}} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\ \ |\overrightarrow{\text{OM}}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

由假设有 $\boldsymbol{F}=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$，其中 k 为比例常数。于是

$$\boldsymbol{W} = \int_{\overset{\frown}{\text{AB}}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\overset{\frown}{\text{AB}}} -kx\mathrm{d}x - ky\mathrm{d}y$$

$$= -k\int_{\overset{\frown}{\text{AB}}} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$$

利用椭圆的参数方程 $x=a\cos t, y=b\sin t$，A, B分别对应参数 $t=0, t=\pi/2$ 。于是

$$
\begin{aligned}
W &= -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos t)\mathrm{d}t \\
&= k(a^2 - b^2) \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \mathrm{d}t \\
&= \frac{k}{2}(a^2 - b^2)
\end{aligned}
$$

两类曲线积分的联系

定理4 设有向曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t : a \rightarrowtail b \ \& \ a < b)$$

则有

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为有向曲线弧 L 在点 (x, y) 处切向量的方向角余弦值。

证： $$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b [P\phi'(t) + Q\psi'(t)]\,\mathrm{d}t$$

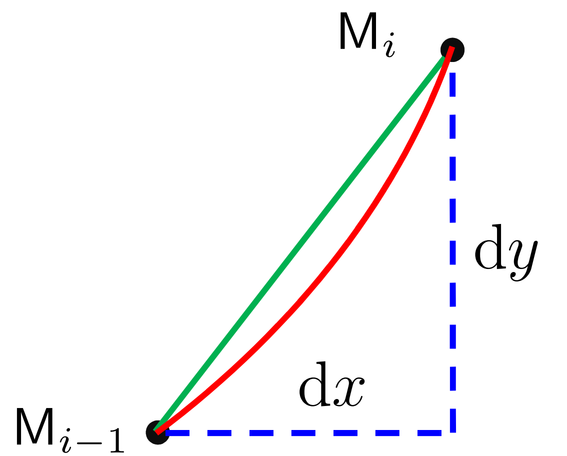
$$= \int_a^b \left[\frac{P \cdot \phi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}} + \frac{Q \cdot \psi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}}\right] \cdot \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

有向弧的切向量 $\boldsymbol{\tau} = \phi'(t)\boldsymbol{i} + \psi'(t)\boldsymbol{j}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{\phi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}}, \quad \cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

又

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} \\ &= \sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$



故

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$

复习与提高

习题1：求 $I=\int_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 和平面 $x-y+z=2$ 的交线，从 z 轴正方向看为顺时针方向。

解：Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=2-\cos t+\sin t \end{cases} \qquad (t:2\pi \rightarrowtail 0)$$

计算可得 $I=-2\pi$。

习题2：将积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 O$(0,0)$ 到 B$(2,0)$ 。

习题3：设 $f(x,y)$ 有连续偏导数，曲线 C : $f(x,y)=1$ 过第二象限点 M 和第四象限点 N，L 为 C 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是（　　）

(A) $\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\displaystyle\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$　　(D) $\displaystyle\int_L f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$

作业

11-2节：第3题(7)，第4题(4)，第5题，第7题(2)，第8题

11.3 格林公式及其应用

- 格林公式
- 平面上曲线积分与路径无关的条件
- 二元函数的全微分求积

格林公式

引言（牛顿莱布尼茨公式）如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$f(x)$在闭区间的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个闭区间的边界（即两个端点）的值来表达。

思考　上述公式在二重积分中是否类似存在?

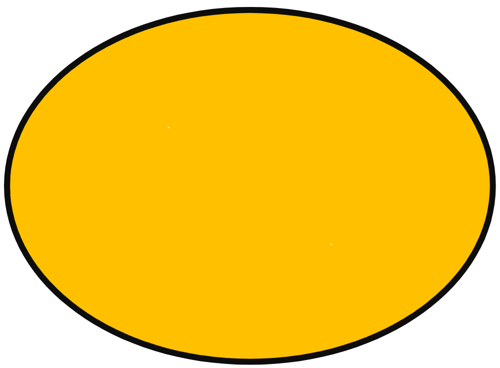
格林公式: $$\iint_{\mathsf{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

在平面闭区域 D 上的二重积分可以通过沿闭区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表达。

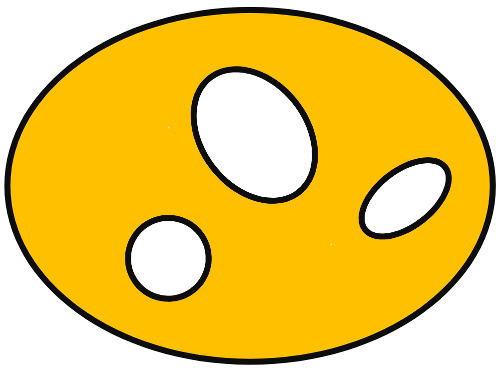
单连通区域与多连通区域

定义1 设D为平面区域。若D内任一条闭曲线所围部分都属于D，则称D为单连通区域，否则称D为多连通区域。

Example 如图所示



D_1

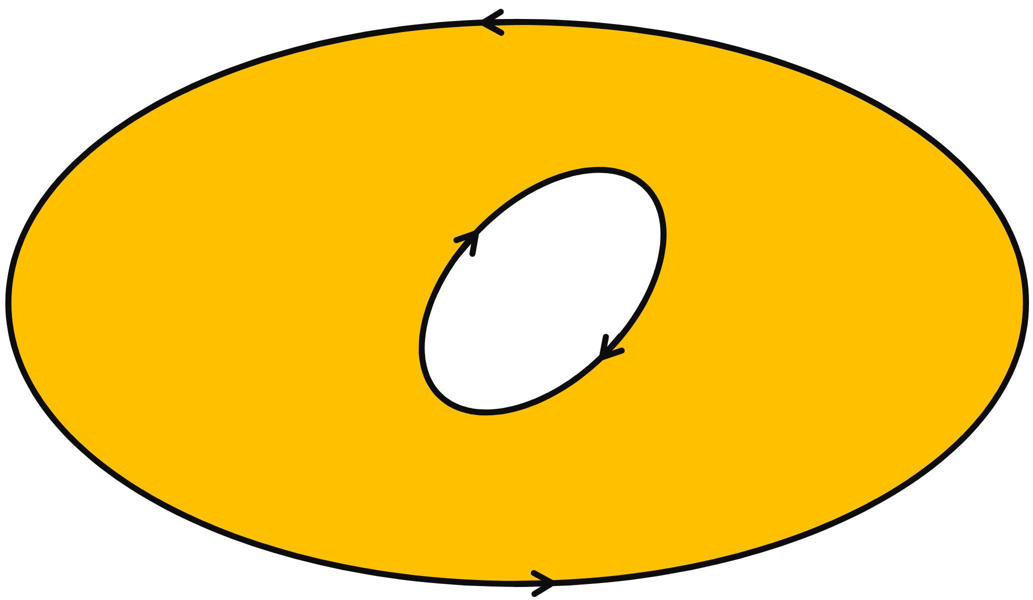


D_2

Remarks 直观上，单连通区域是指不含有“洞”的区域。

区域边界的定向

定义2 对平面区域D的边界曲线 L，规定 L 的正向如下：当观察者沿 L 的这个方向行走时，他的左侧区域在D内部。



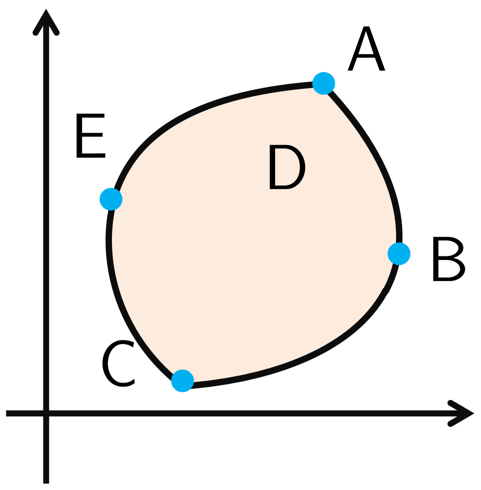
格林公式

定理1（格林公式） 设闭区域由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。

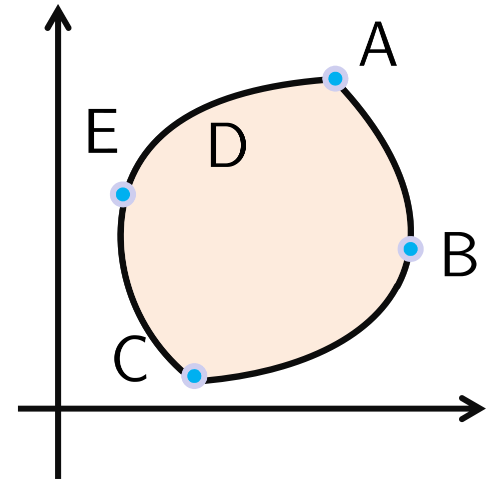
证：（1）假设闭区域 D 既是 X 型也是 Y 型



$$\mathrm{D}:\begin{cases}\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\\ a\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

$$\mathrm{D}:\begin{cases}\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$$

则有



$$\iint_{\mathsf{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)\mathrm{d}y - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overset{\frown}{\mathsf{CBA}}} Q(x, y)\mathrm{d}y - \int_{\overset{\frown}{\mathsf{CEA}}} Q(x, y)\mathrm{d}y$$

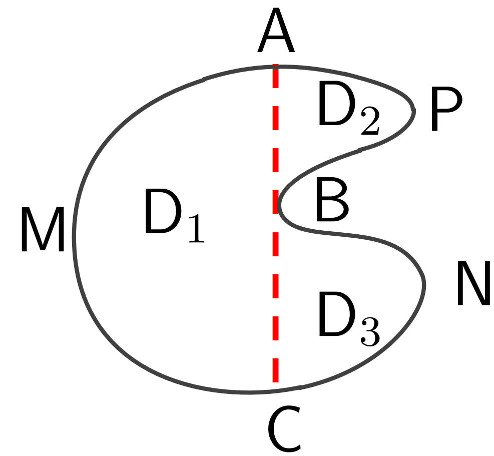
$$= \int_{\overset{\frown}{\mathsf{CBA}}} Q(x, y)\mathrm{d}y + \int_{\overset{\frown}{\mathsf{AEC}}} Q(x, y)\mathrm{d}y$$

即 $\displaystyle\iint_{\mathsf{D}} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L Q(x, y)\mathrm{d}y$ 。同理可证

$$\iint_{\mathsf{D}} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P(x, y)\mathrm{d}x$$

联立方程，可得格林公式。

（2）考虑 D 是一般单连通区域的情形，此时可以将 D 分解成若干个（1）中的简单区域。



$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\mathrm{MC\overset{\frown}{B}AM}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

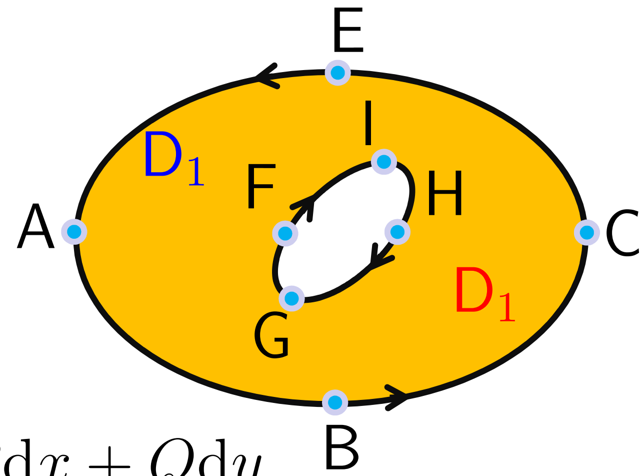
$$\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\mathrm{A\overset{\frown}{B}PA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\mathrm{B\overset{\frown}{C}NB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

三式相加可得

$$\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

（3）考虑 D 为复连通区域，此时可以将D 切分成多个一般单连通区域。



$$\iint_{\mathrm{D}_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\mathrm{AFI}\overset{\frown}{\mathrm{H}}\mathrm{CEA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{\mathrm{AF}}}+\int_{\overset{\frown}{\mathrm{FIH}}}+\int_{\overset{\frown}{\mathrm{HC}}}+\int_{\overset{\frown}{\mathrm{CEA}}}$$

$$\iint_{\mathrm{D}_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\mathrm{FAB}\overset{\frown}{\mathrm{C}}\mathrm{HGF}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{\mathrm{FA}}}+\int_{\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}}+\int_{\overset{\frown}{\mathrm{CH}}}+\int_{\overset{\frown}{\mathrm{HGF}}}$$

联立可得

$$\iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\mathsf{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

在格林公式中，取 $P = -y, Q = x$ ，可得

$$A = \iint_{\mathsf{D}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

也就是说，可以用此公式来计算闭区域 D 的面积。

例1 计算$\oint_L x^2y\mathrm{d}x - xy^2\mathrm{d}y$，其中$L$ 为正向圆周$x^2 + y^2 = a^2$。

解：令 $P = x^2y$，$Q = -x^2y^2$，则

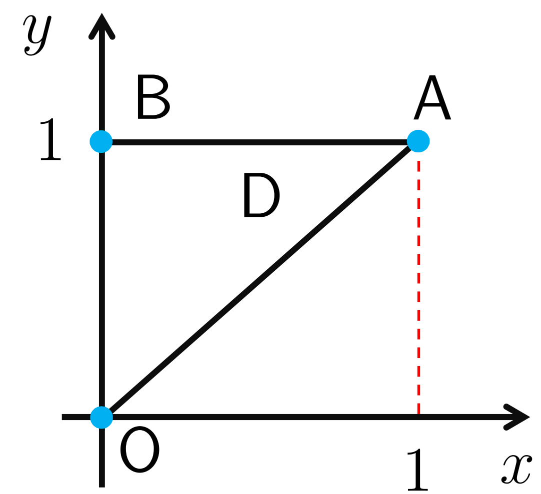
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y^2 - x^2$$

由格林公式有

$$\begin{aligned} I &= -\iint_{\mathrm{D}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \rho^3 \mathrm{d}\rho \\ &= -\frac{\pi}{2}a^4 \end{aligned}$$

例2 计算 $\iint_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中D是以O$(0,0)$，A$(1,1)$，B$(0,1)$为顶点的三角形闭区域。

解：令 $P=0, Q=xe^{-y^2}$，则



$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$$

因此

$$\iint_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{OA+AB+BO} xe^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA} xe^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 xe^{-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

例3 设 L 一段分段光滑的闭曲线，证明：

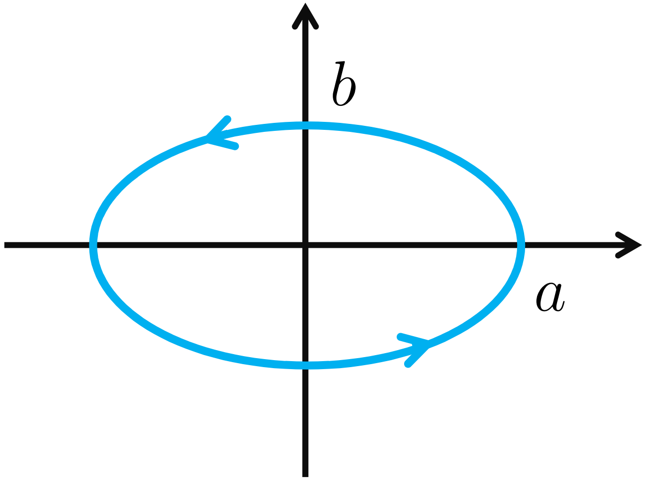
$$\oint_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$$

解：根据格林公式

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \iint_{\mathsf{D}} (2x - 2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

例4 求椭圆 $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ 的面积 A。

解：



$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(a\cos\theta)(b\sin\theta)' - (b\sin\theta)(a\cos\theta)'\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

例5 计算$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$为一条不自相交、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L的方向为逆时针方向。

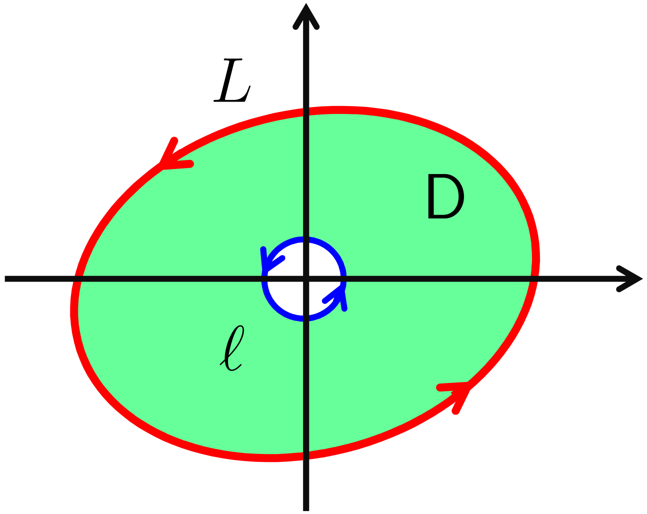
解：令$P = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}$，则当$x^2+y^2 \neq 0$时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

记L所围成的闭区域为D。当$(0,0) \notin$ D时，由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$

若 $(0,0)\in$ D ，则选取适当小的 $r>0$ 作位于 D 内的圆周 ℓ：$x^2+y^2=r^2$，记 L 和 ℓ 所围成的区域为 D$_1$ ，对复连通区域应用格林公式，得



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_\ell \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$$

其中 ℓ 的方向取逆时针方向。于是

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}&=\oint_\ell \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta\\&=2\pi\end{aligned}$$

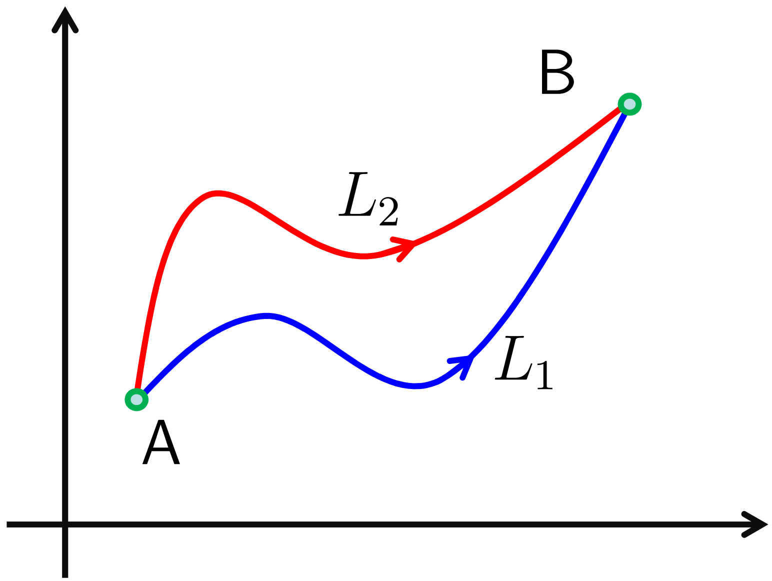
平面曲线积分与路径无关的条件

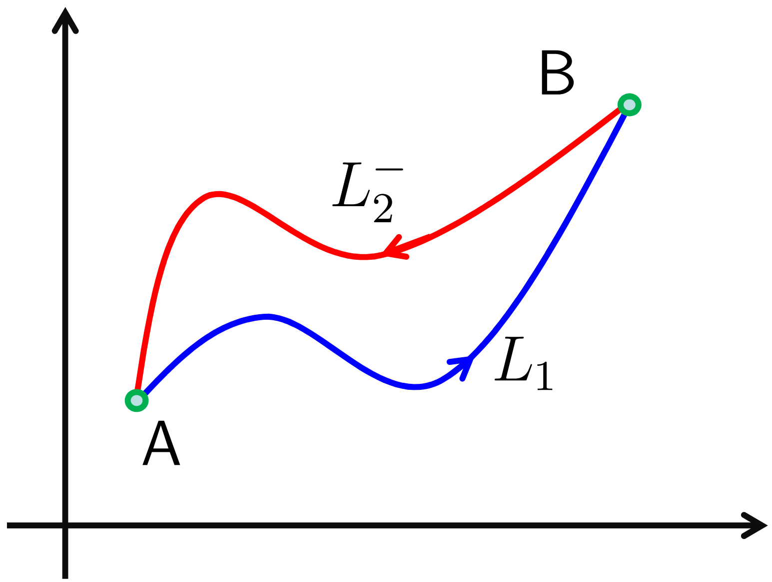
定义3 设G 是一个区域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数。如果对于 G 内任意指定的两个点 A 和 B 以及G 内从 A 到 B 的任意两条曲线 L_1 和 L_2，等式

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

恒成立，则称曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关，否则称与路径有关。

平面曲线积分与路径无关的理解





$$\int_{L_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\int_{L_2^-} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

定理2 设闭区域 G 是一个单连通区域，若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关的充要条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内恒成立。

证：先证充分性。在 G 内任取一条闭曲线 C，由于 G 为单连通区域，应用格林公式

$$\iint_{\mathrm{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

上式左端为零，从而右端曲线积分也等于零。

再证必要性。反证法。

若沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 成立。

$\xrightarrow{\text{逆命题}}$ G 内至少存在一点 M_0，使得 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$。

G 内至少存在一点 M_0，使得 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

不妨假设存在点 M_0 使得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{\mathsf{M}_0} = \eta > 0$$

在 G 内取以 M_0 为圆心，半径足够小的圆形闭区域 E，则在 E 内恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geqslant \frac{\eta}{2}$$

于是由格林公式及二重积分的性质有

$$\oint_{\gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\mathsf{E}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{\eta}{2}\sigma > 0$$

这与结论沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零矛盾，故假设错误，原结论正确。

二元函数的全微分求积

定理3　设闭区域 G 是一个单连通区域，若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 G 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立。

证：先证必要性。由于 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

再证充分性。由于积分与路径无关，记 A(x_0,y_0) 到 M(x,y) 的曲线积分为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

计算 $u(x,y)$ 关于 x 的偏增量

$$\begin{aligned}\triangle u_x &= u(x+\triangle x,y)-u(x,y)\\ &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\triangle x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{(x,y)}^{(x+\triangle x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \int_{(x,y)}^{(x+\triangle x,y)} P\mathrm{d}x\\ &= P(x+\theta\triangle x)\triangle x\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{\triangle u_x}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}P(x+\theta\triangle x)=P(x,y)$，同理可得 $\lim\limits_{\triangle y\to 0}\dfrac{\triangle u_y}{\triangle y}=Q(x,y)$，故 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$。

曲线积分与路径无关的等价条件

设闭区域 D 是一个单连通区域，若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

（1）对 D 内任一分段光滑曲线 L，有曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起点终点有关。

（2）对 D 内任一光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$。

（3）D 内存在函数 $u(x,y)$，有 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$。

（4）D 内任意点恒有 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$

例6 验证 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内是个函数的全微分，并求出一个这样的函数。

解：令 $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$，则当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时，有

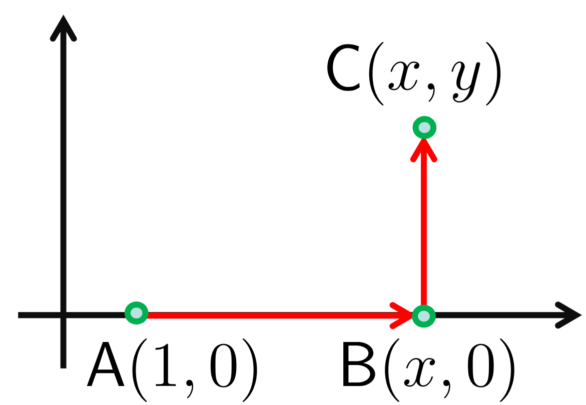
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

在 D 的右半平面内恒成立，因此在右半平面内，$\dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 是某个函数的全微分。取 $u(x,y)$ 为

$$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \int_{\mathrm{AB}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \int_{\mathrm{BC}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= 0 + \int_0^y \frac{x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$$



例7 验证：在整个 xOy 面内，$xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数。

解：令 $P = xy^2$，$Q = x^2y$ ，则

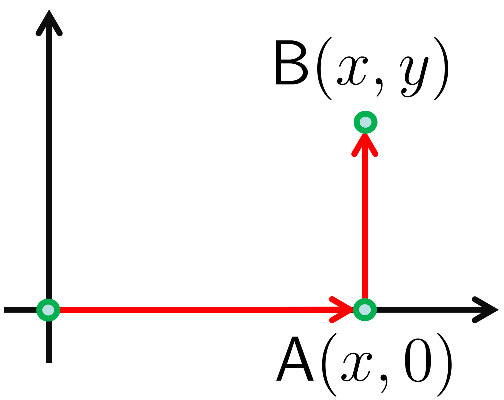
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在整个 xOy 平面均成立，因此在整个 xOy平面，$xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分。取积分路线如图所示

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\mathrm{OA}} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y + \int_{\mathrm{AB}} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \int_0^y x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}y = x^2\int_0^y y\mathrm{d}y = \frac{x^2y^2}{2}$$

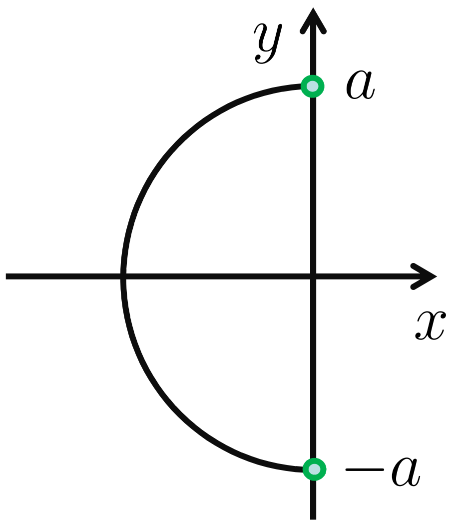


复习与提高

习题1：假设C 为沿 $x^2+y^2=a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆，计算

$$\int_{C}\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x+\left[ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]\mathrm{d}y$$

解：如图所示。取 $C_1:(0,-a)\rightarrowtail(a,0)$ 直线段，记C 和 C_1 所围区域为 D，则



$$I=\oint_{C+C_1}-\int_{C_1}$$

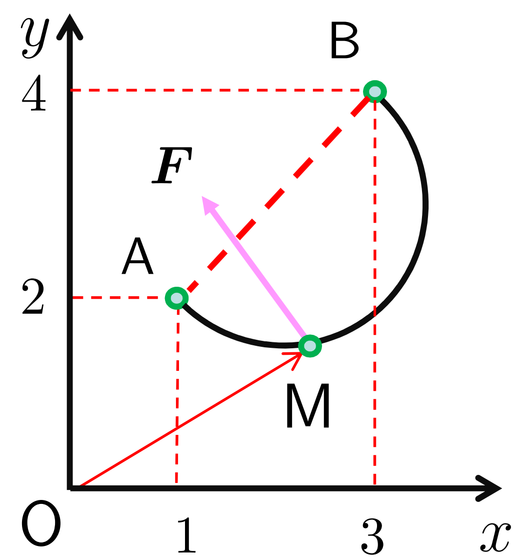
$$=\iint_{D}\left[a+\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\int_{-a}^{a}2y\ln a\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^3$$

习题2：质点M沿着AB为直径的半圆，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$，在此过程中受力 $\boldsymbol{F}$ 作用，$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 M 到原点的距离，其方向垂直于OM，且与 y 轴的正向夹角为锐角，求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 M 所做的功。（90考研）

解：如图所示。知 $\boldsymbol{F}=(-y,x)$。



$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot ds=\int_{\overset{\frown}{AB}}-ydx+xdy$$

$$=\oint_{\overset{\frown}{AB}+\overline{BA}}-ydx+xdy$$

$$-\int_{\overline{AB}}-ydx+xdy$$

$$=2\iint_{D}dxdy+\int_{1}^{3}[-(x+1)+x]dx$$

$$=2\pi-2$$

习题3：确定正向闭曲线 L，使得曲线积分

$$\oint_L \left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$$

达到最大值。

解：设 L 所围成闭区域为 D。根据格林公式有

$$I=\iint_{\mathrm{D}}\left(1-2x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为使得该积分最大，应包含所有使得 $1-2x^2-y^2\geq 0$ 的点，故正向闭曲线为 $L:2x^2+y^2=1$。

习题4：设 L 为从 O$(0,0)$ 到 A$(4,0)$ 的上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ ，计算曲线积分。

$$I=\int_L (x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

解：为了使用格林公式，添加辅助线段 AO，则有

$$\int_{L+\mathrm{AO}} (x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y=4\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{d}\sigma=8\pi$$

$$\int_{\mathrm{AO}} (x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y=\int_{\mathrm{AO}} x^2\mathrm{d}x=-\frac{64}{3}$$

故

$$I=8\pi+\frac{64}{3}$$

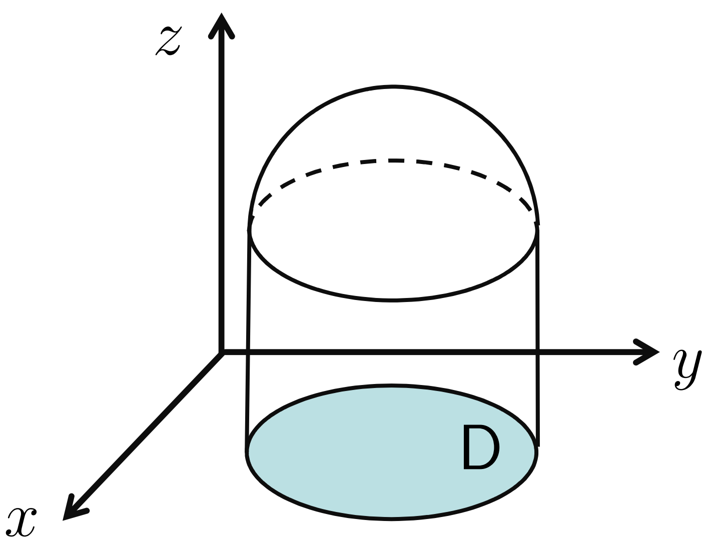
作业

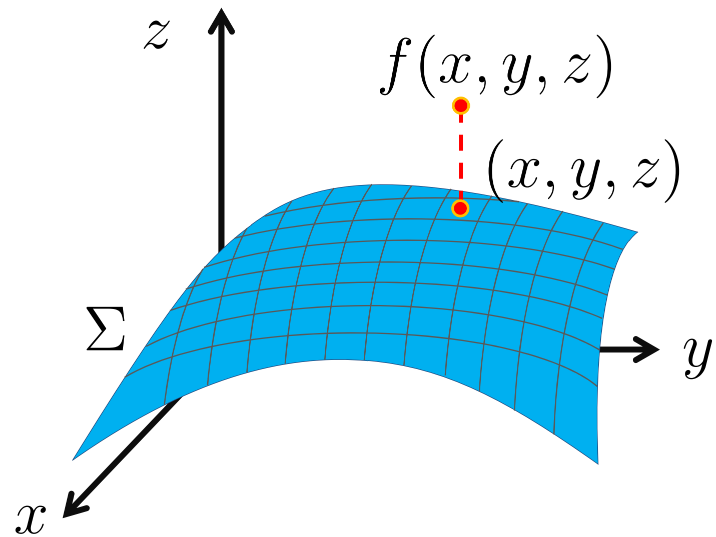
11-3节：第 2题(1)，第3题，第4题，第6题(3)，第12题

11.4 对面积的曲面积分

- 对面积的曲面积分的概念与性质
- 对面积的曲面积分的计算法

对面积的曲面积分概念





对平面的二重积分

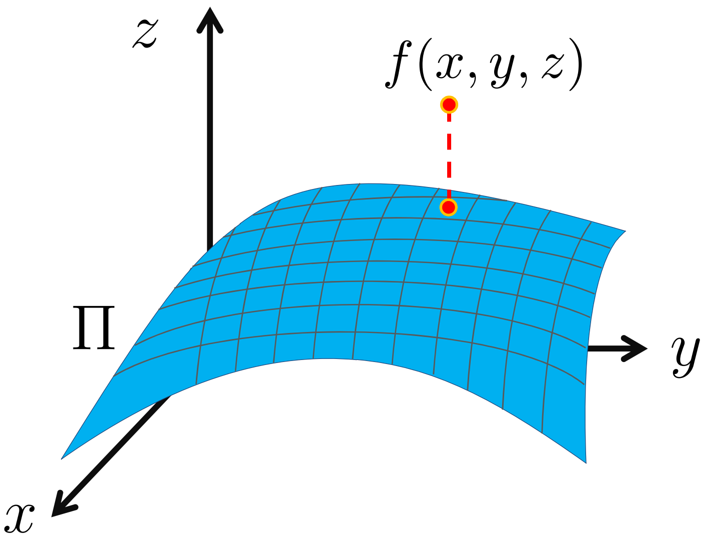
$$\iint_{D} f(x, y)\mathrm{d}\sigma$$

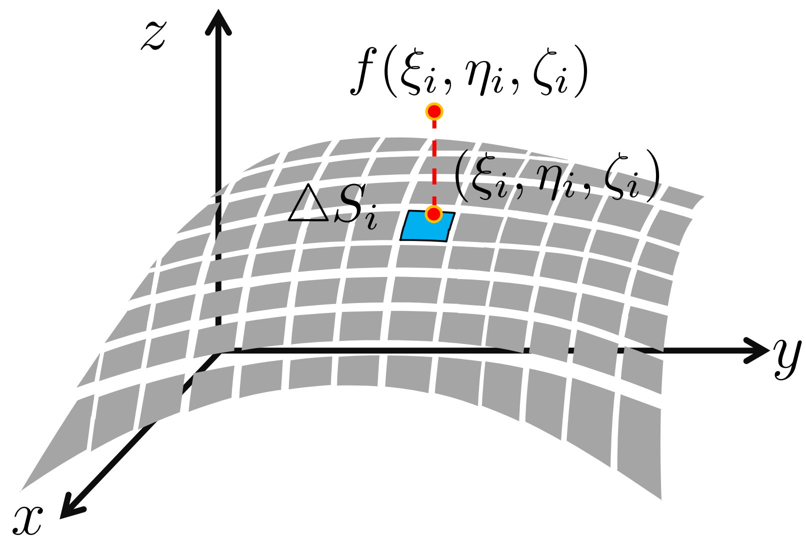
推广

对曲面的二重积分

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$$

对面积的曲面积分概念





定义1 设曲面Σ是光滑的，函数$f(x,y,z)$在Σ上有界，任意划分$\Sigma=\cup_i\triangle S_i$ $(i=1,\cdots,n)$，任意取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\triangle S_i$，定义$f(x,y,z)$在$\Sigma$上对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle S_i$$

其中Σ称为积分曲面，$\mathrm{d}S$为面积元素。

对曲面的曲面积分的性质

性质1（线性和） 设 α 和 β 为常数，则

$$\iint_{\Sigma}(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}S=\alpha\iint_{\Sigma}f\mathrm{d}S+\beta\iint_{\Sigma}g\mathrm{d}S$$

性质2（分段和）将积分曲面 Σ 分成互斥的 Σ_1 和 Σ_2，则有

$$\iint_{\Sigma}f\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}f\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}f\mathrm{d}S$$

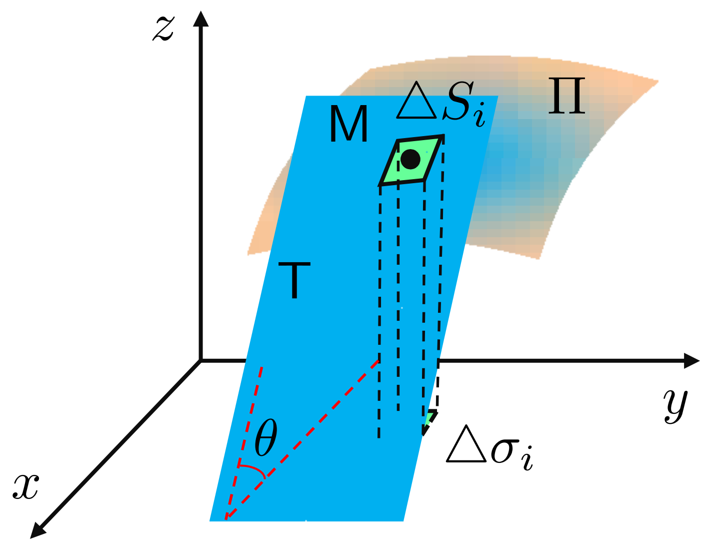
性质3（保号性）若在 Σ 上 $f(x,y,z)\geqslant g(x,y,z)$，则有

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S\geqslant\iint_{\Sigma}g(x,y,z)\mathrm{d}S$$

对面积的曲面积分的计算法

$$\begin{cases} \mathrm{d}S = ab \\ \mathrm{d}\sigma = ab\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}S = \frac{1}{\cos\theta}\mathrm{d}\sigma$$

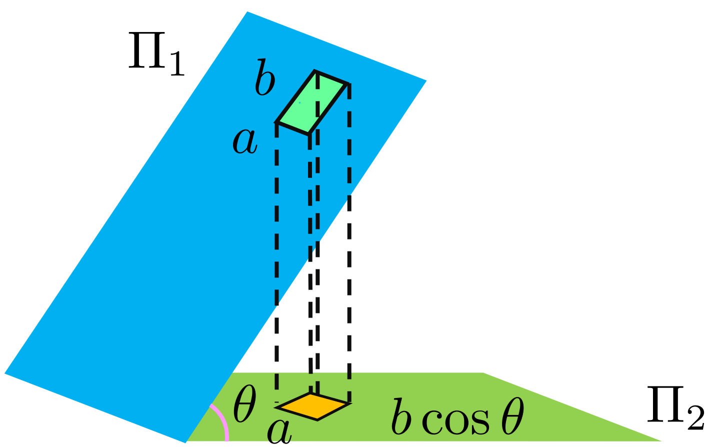


曲面$\Pi: z = z(x,y)$在点$\mathrm{M}(x_0,y_0,z_0)$的法向量为

$$\boldsymbol{n} = (z_x(x,y), z_y(x,y), -1)$$

故切平面为

$$\boldsymbol{n}\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$



切平面与$x\mathrm{O}y$的夹角为

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}}$$

对面积的曲面积分的计算法

由于

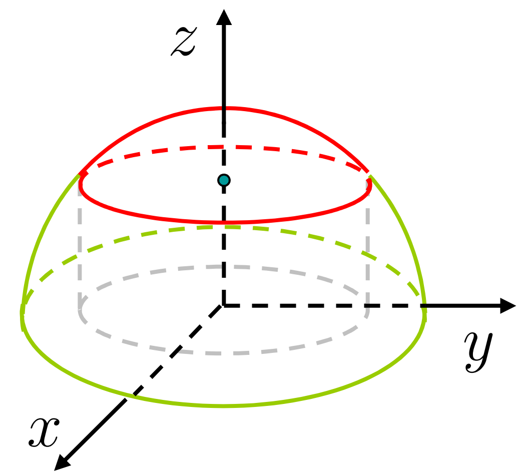
$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S \\ &= \iint_{\mathsf{D}_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 D_{xy} 为曲面 Σ 在 $x\mathsf{O}y$ 面上的投影。

例1 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部。



解：如图所示 Σ 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad (z>h)$$

Σ 在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影区域为

$$\mathrm{D}_{xy}=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le a^2-h^2\}$$

又 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，因此

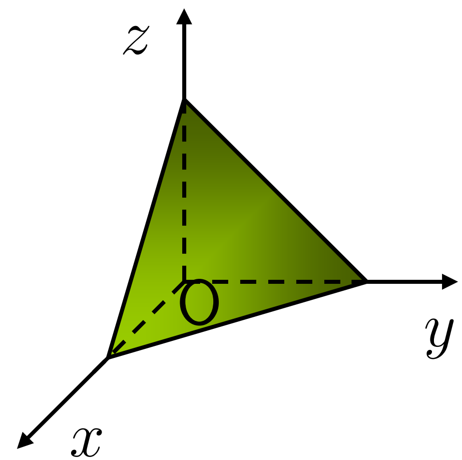
$$I=\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

利用极坐标有

$$I=\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\frac{a\rho}{a^2-\rho^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{a^2-\rho^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

例2 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S$，其中 Σ 是由平面 $x+y+z=1$ 以及 $x=0, y=0, z=0$ 所围成的四面体的整个边界曲面。

解：整个边界曲面 Σ 在平面 $x=0, y=0,$ $z=0$ 以及 $x+y+z=1$ 上的部分依次记为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$，于是



$$\oiint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}$$

由于在 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 上，$xyz=0$，故

$$\oiint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_4} xyz\mathrm{d}S$$

记 Σ_4 在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影为 D_{xy}：$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x$。

$$I = \iint_{\mathrm{D}_{xy}} xy(1-x-y) \cdot \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases} I = \displaystyle\iint_{\mathsf{D}_{xy}} \sqrt{3}xy(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \mathsf{D}_{xy}:\ 0 \leqslant x \leqslant 1\,, 0 \leqslant y \leqslant 1-x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 x\frac{(1-x)^3}{6}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 (x-2x^2+3x^3-x^4)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{120} \end{aligned}$$

对面积的曲面积分的性质

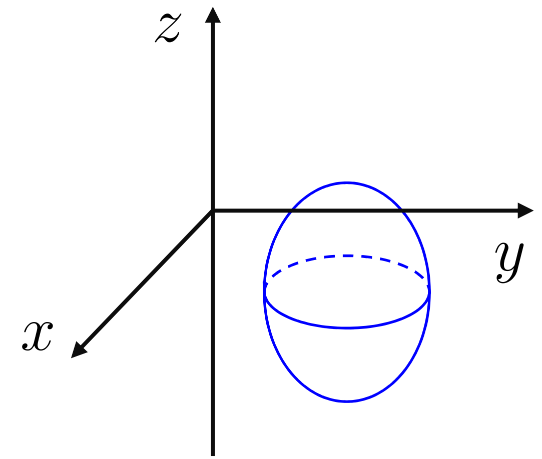
性质（奇偶对称性） 设曲面 Σ 关于 xOy 面对称

（1）若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 0$$

（2）若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$



复习与提高

习题1：假设Σ为上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geqslant 0)$，而 Σ_1 为Σ的第一卦限的部分，则有（ C ）

(A) $\displaystyle\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$ (B) $\displaystyle\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$

(C) $\displaystyle\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$ (D) $\displaystyle\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$

习题2：设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，求曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma} x^2+y^2\mathrm{d}S$$

解：由对称性有

$$\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\oiint_{\Sigma} x^2+y^2\mathrm{d}S=2\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S\\&=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma} x^2+y^2+z^2\mathrm{d}S\\&=\frac{2}{3}R^2\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{8}{3}\pi R^4\end{aligned}$$

习题3：计算曲面积分$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 和 $x+y+z=1$所围成四面体的整个边界曲面。

作业

11-4节：第4题(3)，第5题(2)，第6题(1)(4)，第8题

11.5 对坐标的曲面积分

- 对坐标的曲面积分的概念与性质
- 坐标的曲面积分的计算法
- 两类曲面积分的联系

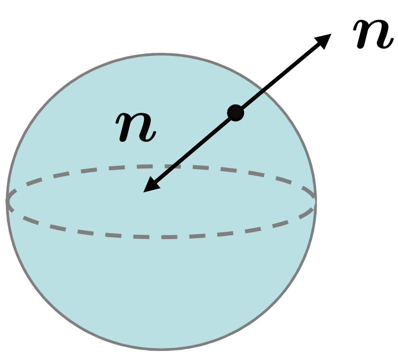
概念与性质

定义1 若曲面在整体上具有双侧，则称它为**可定向的**。我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧。指定了法向量亦即选定了侧的曲面，称为**有向曲面**。

球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$

外侧　法向量指向朝外

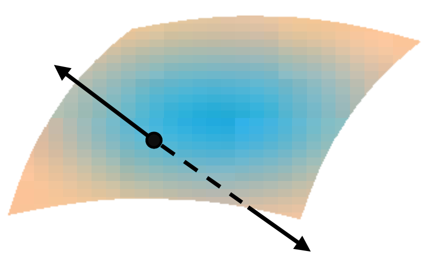
内侧　法向量指向朝内



曲面 $z=f(x,y)$ 可定向

上侧　法向量指向朝上

下侧　法向量指向朝下



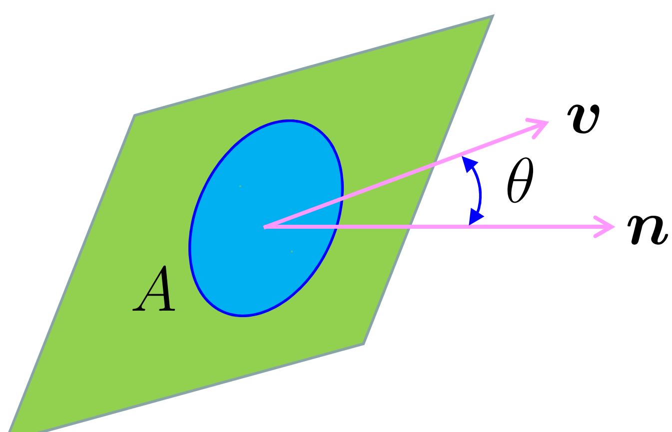
问题引入

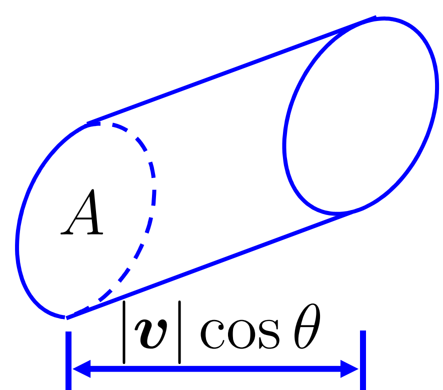
Problem: 设稳定流体（假设密度为1）的速度场为

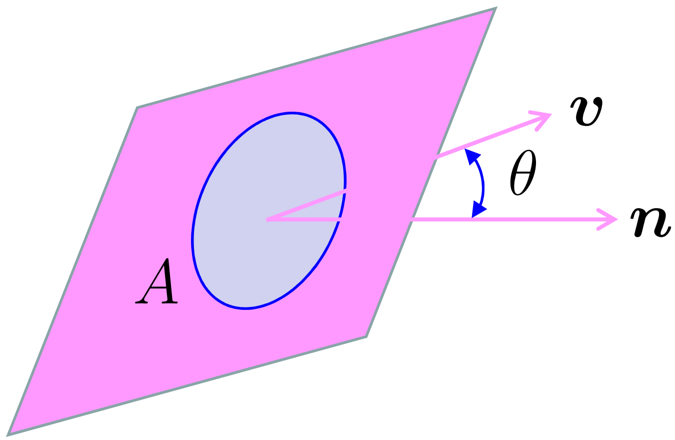
$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

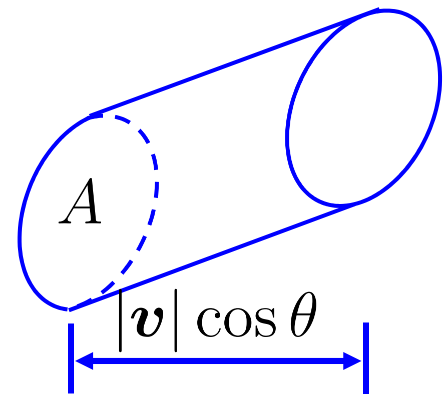
Σ是速度场中的一片有向曲面，求单位时间内流向Σ指定侧（单位法向量为 $\boldsymbol{n}$）的流体的质量，即流量 Φ。

如果流体流过平面上面积为A的闭区域，且流体在这闭区域上流速为 $\boldsymbol{v}$，那么单位时间内，流过闭区域的流体组成了一个底面积为A，斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的体积。



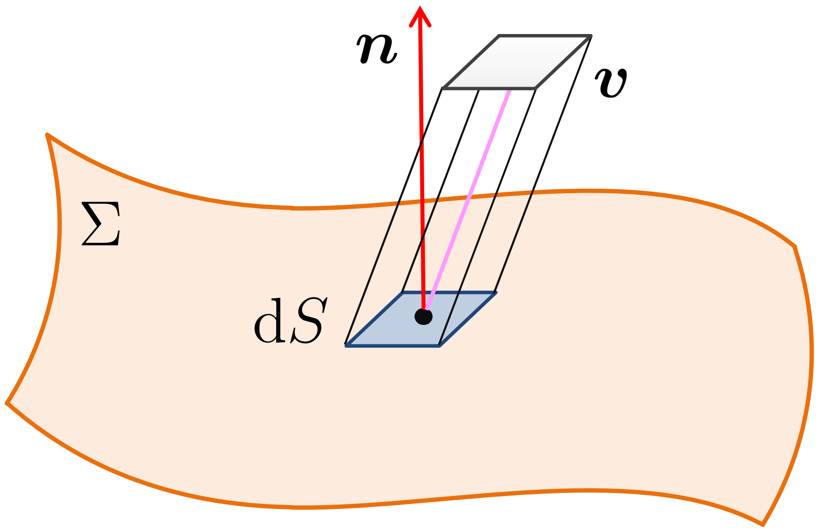






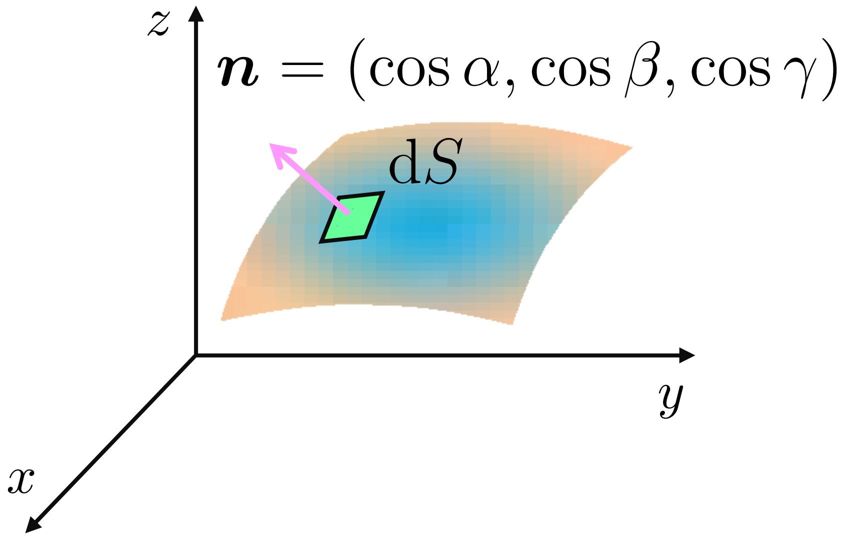
定义两向量夹角$(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})=\theta$，斜柱体的体积为

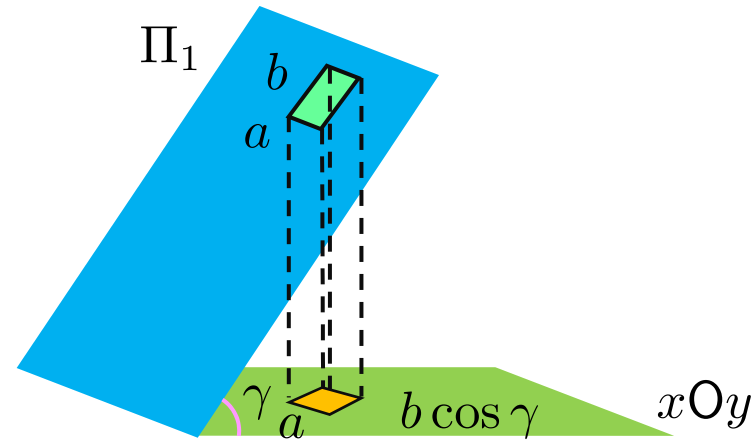
$$V=A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$$



$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$





$$\mathrm{d}S = \frac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理可得

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{\cos\alpha}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad , \mathrm{d}S = \frac{1}{\cos\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}s$$

故

$$\Phi = \iint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_\Sigma P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\mathrm{d}S$$

$$= \iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_\Sigma Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对坐标 X, Y 轴的曲面积分

- 有向曲面 Σ 光滑
- $R(x, y, z)$ 在 Σ 有界
- 任意划分 $S = \bigcup_i \triangle S_i$
- 任意取点 $(\xi_i, \eta_i) \in \triangle S_i$
- $\triangle S_i$ 在 xOy 面的投影 $(\triangle S_i)_{xy}$

定义2　定义 $R(x, y, z)$ 在 S 上的对坐标 x, y 的曲面积分

$$\iint_\Sigma R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\triangle S_i)_{xy}$$

其中 λ 为各小块曲面的直径最大值。

类似定义函数 $P(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 y,z 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\triangle S_i)_{yz}$$

以及 $Q(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x,z 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\triangle S_i)_{zx}$$

三者结合可得

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对坐标的曲面积分的计算法

定理1 设光滑曲面$\Sigma: z=z(x,y), (x,y)\in \mathrm{D}_{xy}$ 取上侧，$R(x,y,z)$ 是Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathrm{D}_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证： 有向曲面在(x,y,z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}(-z_x',-z_y',1)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\mathrm{D}_{xy}} R(x,y,z(x,y))\frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\mathrm{D}_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意，当取下侧时，$\cos\gamma < 0$，此时单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}(z_x', z_y', -1) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

同理，若 Σ 由 $x = x(y,z)$ 给出，则有（前侧正号，后侧负号）

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{\mathsf{D}_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

若 Σ 由 $y = y(z,x)$ 给出，则有（右侧正号，左侧负号）

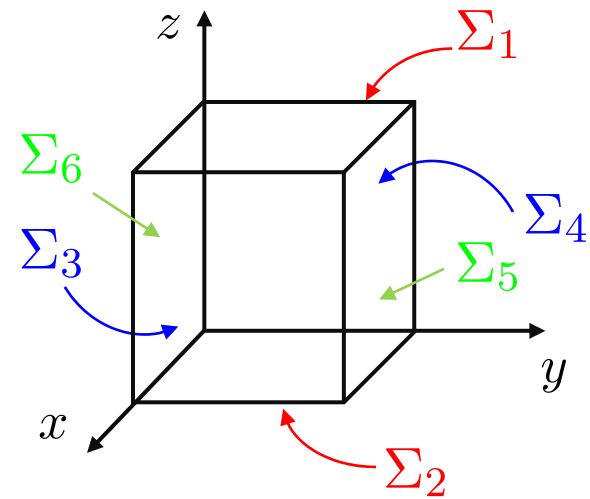
$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{\mathsf{D}_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

例1 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Σ是长方体$\Omega = \{(x,y,z)|0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c\}$整个表面的外侧。

解：如图所示，把有向曲面Σ分成以下六个部分



$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma_3} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_4} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\mathrm{D}_{yz}} a^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\mathrm{D}_{yz}} 0^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = a^2bc$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = b^2ac, \ \iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c^2ab$$

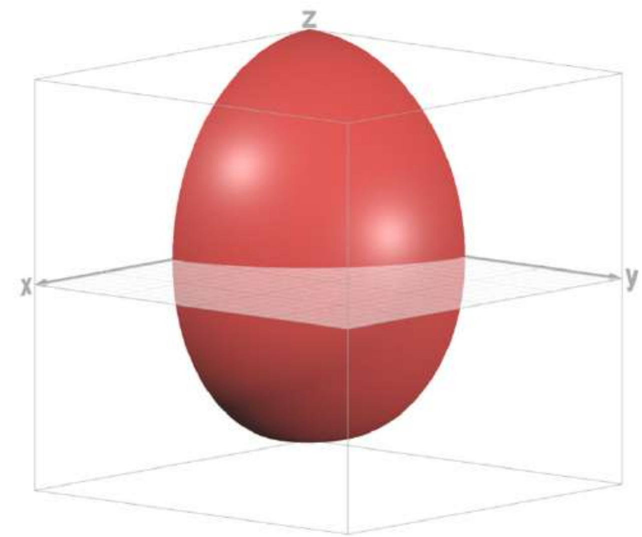
故$I = (a+b+c)abc$。

例2 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 的部分。

解：将 Σ 分为 Σ_1 和 Σ_2 两部分

$$\Sigma_1: \quad z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\Sigma_2: \quad z_2=\sqrt{1-x^2-y^2}$$



$$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}$$

$$=\iint_{\mathrm{D}_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\mathrm{D}_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{\mathrm{D}_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\mathrm{D}_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$，为 Σ_1 和 Σ_2 在 $x\mathrm{O}y$ 上投影。

$$\begin{cases} I = 2\iint_{\mathsf{D}_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \mathsf{D}_{xy} : x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$I = 2\iint_{\mathsf{D}_{xy}} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\mathrm{d}\theta \underbrace{\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho}_{\text{(Hint: } t=1-\rho^2\text{)}}$$

$$= \frac{2}{15}$$

两类曲面积分之间的联系

定理1 设积分曲面 Σ 由 $z=z(x,y)$ 给出，P,Q,R 在 Σ 连续单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则有两类曲面积分的转换公式

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\qquad=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\\
&\qquad=\iint_\Sigma[P(-z'_x)+Q(-z'_y)+R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

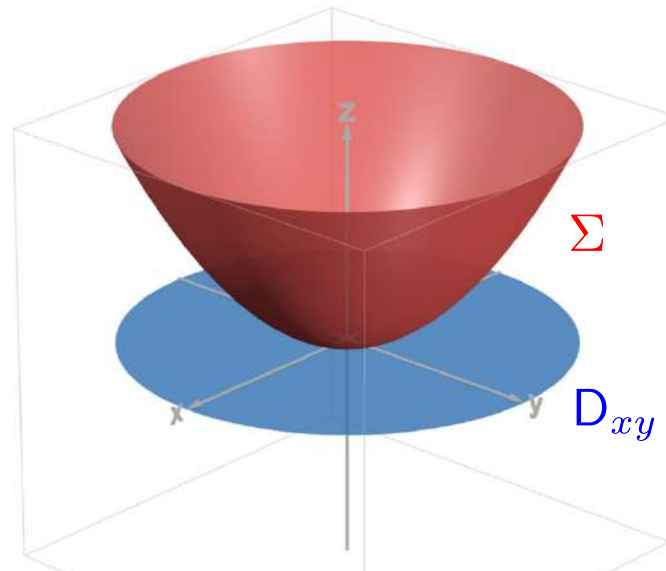
证： $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}}\left(-z_x',-z_y',1\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)(-z_x')\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)(-z_y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

例3 设有向曲面Σ是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于$z=0$及$z=2$ 之间的部分的下侧，求$I=\displaystyle\iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解：解法一（直接计算）。需将 Σ 分成前侧 $\Sigma_1: x=\sqrt{2z-y^2}$ 和后侧 $\Sigma_2: x=-\sqrt{2z-y^2}$，它们在 $y\mathrm{O}z$ 面上的投影为 D_{yz}



$$\iint_\Sigma (z^2+x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\mathrm{D}_{yz}}(z^2+\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\mathrm{D}_{yz}}(z^2-\sqrt{2z-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iint_{\mathrm{D}_{yz}}\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\sqrt{2z-y^2}\mathrm{d}z=4\pi$$

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\mathsf{D}_{xy}} \frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \frac{1}{2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$
$$= -4\pi$$

解法二。

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}(z^2+x)(-z'_x) - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{\Sigma} -x(z^2+x) - z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\iint_{\mathsf{D}_{xy}} -x(\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= -\iint_{\mathsf{D}_{xy}} \frac{-x(x^2+y^2)^2}{4} - x^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{\mathsf{D}_{xy}} x^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性可知

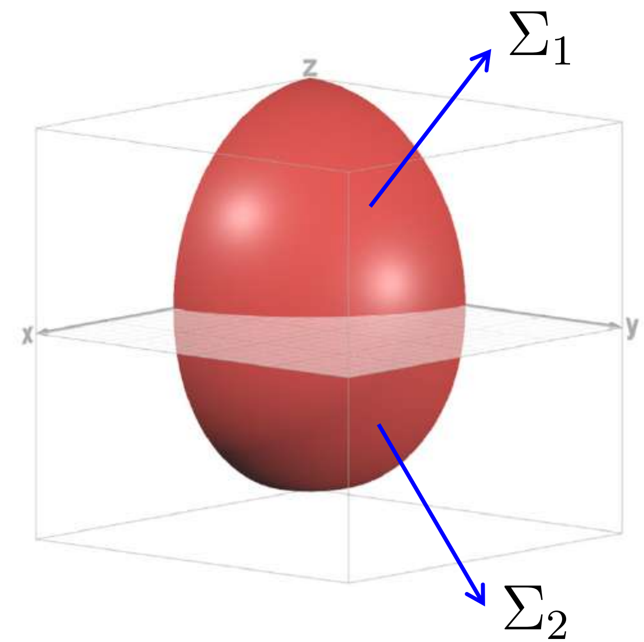
$$\iint_{\mathsf{D}_{xy}} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathsf{D}_{xy}} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\begin{aligned}\iint_{\mathsf{D}_{xy}} x^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\mathsf{D}_{xy}} x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \rho^2\rho\mathrm{d}\rho \\ &= 8\pi\end{aligned}$$

复习与提高

习题1：设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 的部分，此时 Σ 关于 $x\mathrm{O}y$ 面对称，且被积函数关于 z 是奇函数，能否得出 $\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 。



习题2：设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧。计算

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解：由轮换对称性有

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将球面分为$\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 的上侧，以及 $\Sigma_2 : x^2+y^2+z^2=1, z\leqslant 0$ 的下侧，Σ_1 和 Σ_2 在 $x\mathrm{O}y$ 面上的投影为 D_{xy}： $x^2+y^2\leqslant 1$。

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (1+z+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathsf{D}_{xy}} \left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}+(1-x^2-y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad - \iint_{\mathsf{D}_{xy}} (1-\sqrt{1-x^2-y^2}+(1-x^2-y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I = & \iint_{\mathsf{D}_{xy}} \left(1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} + (1 - x^2 - y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& - \iint_{\mathsf{D}_{xy}} (1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} + (1 - x^2 - y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= 2 \iint_{\mathsf{D}_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\rho\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

习题3：设 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 位于 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的外侧，计算

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解：$z'_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z'_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则由奇偶对称性有

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{\Sigma}\left[\frac{-(x-y)x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{-(y-z)y}{\sqrt{x^2+y^2}}+(z-x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\left[\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=0
\end{aligned}$$

作业

11-5节： 第3题(1)、(4)， 第4题(1)、(2)

11.6 高斯公式

- 高斯公式

格林公式

平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系

高斯公式

空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系

高斯（Gauss）1777-1855

德国数学家、天文学家和物理学家，是与阿基米德，牛顿并列的伟大数学家，被誉为“数学王子”。他的数学成就遍及各个领域，在数论、代数、非欧几何、微分几何、超几何级数、复变函数及椭圆函数论等方面均有一系列开创性的贡献，他还十分重视数学的应用，地测量学和磁学的研究中发明和发展了最小二乘法、曲面论和位势论等。他在学术上十分严谨，恪守这样的原则：“在思想上没有弄通之前决不动笔”。

定理1 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，若函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

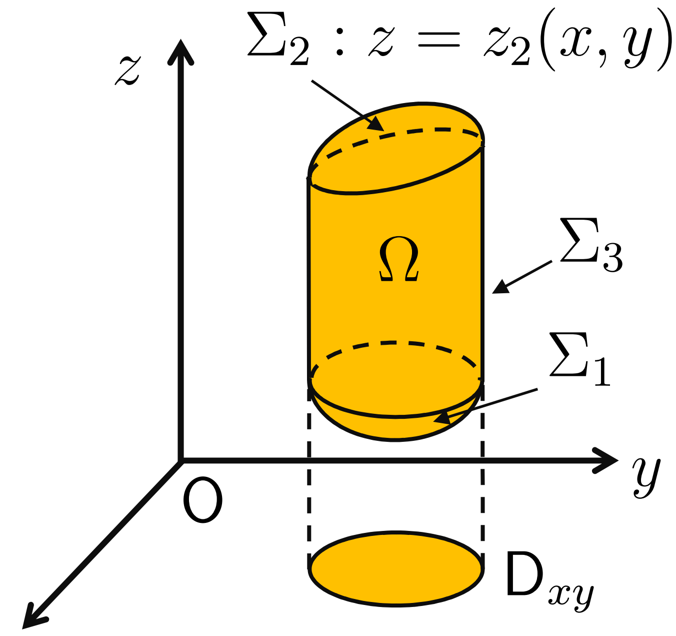
$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\Sigma}P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦。

证：设闭区域 Ω 在 xOy 面上的投影为 D_{xy}。闭区域表面可分为 Σ_1, Σ_2 以及 Σ_3，其中 $\Sigma_1 : z = z_1(x, y)$，$\Sigma_2 : z = z_2(x, y)$。则有



$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}V$$

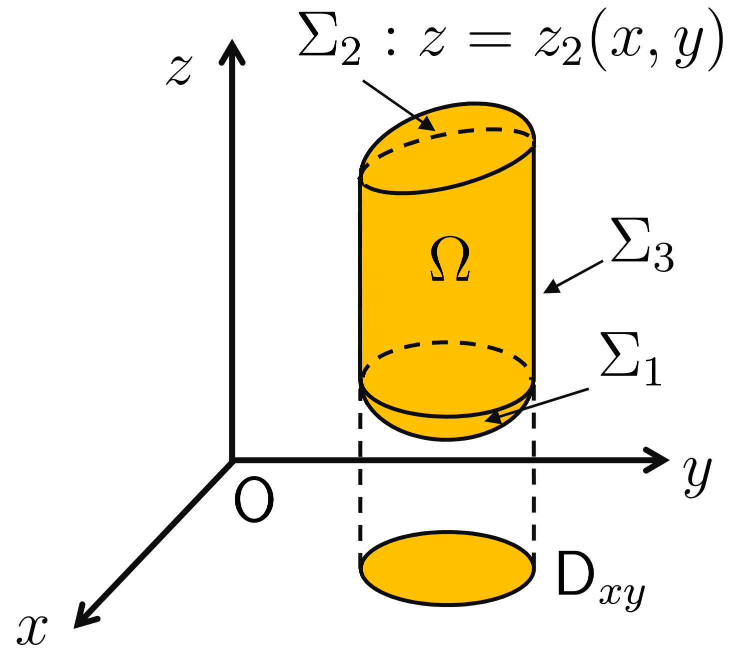
$$= \iint_{\mathrm{D}_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\mathrm{D}_{xy}} \left[R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而

$$\iint_{\Sigma_1} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\mathrm{D}_{xy}} R(x, y, z_1(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma_2} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}_{xy}} R(x, y, z_2(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$\iint_{\Sigma_3} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

三式叠加有

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V = \oiint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理可得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}V = \oiint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}V = \oiint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

例1 利用高斯公式计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧。

解：因 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$

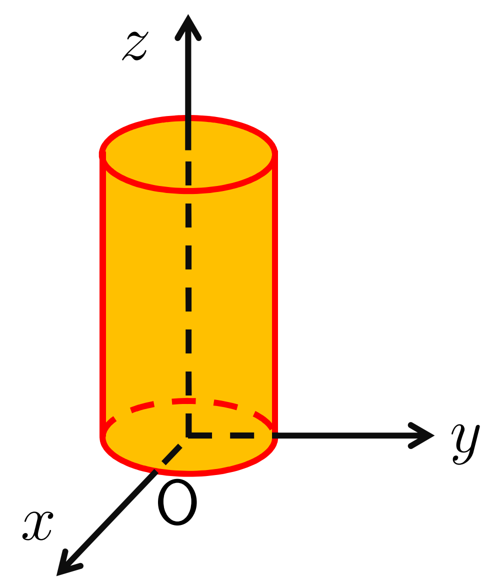
$$\frac{\partial P}{\partial x}=y-z,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\ \frac{\partial R}{\partial z}=0$$

利用高斯公式把所给曲面面积化为三重积分

$$\oiint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega}(y-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0-\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{9\pi}{2}$$

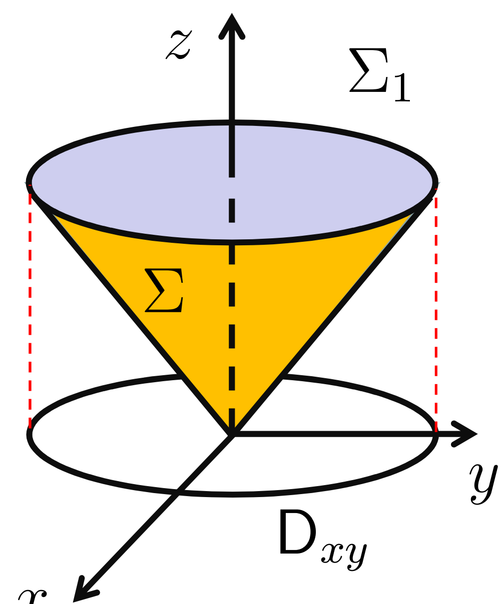


例2 利用高斯公式计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0,\ z=h\ (h>0)$ 之间的下侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦。

解：因曲面 Σ 不是封闭曲面，故不能直接利用高斯公式。取



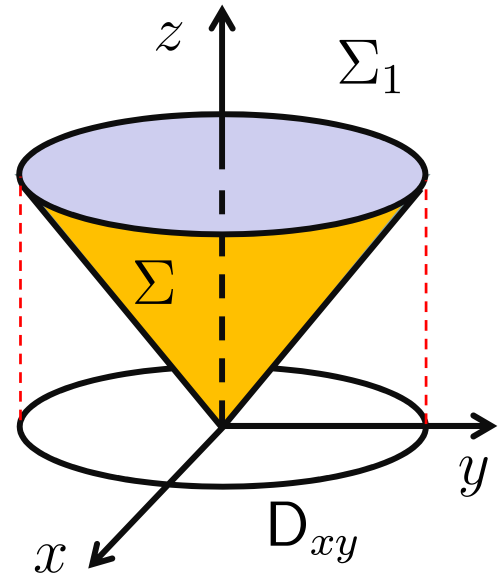
$$\Sigma_1:\begin{cases} z=h \\ x^2+y^2\leqslant h^2 \end{cases}$$

的上侧，则 Σ 与 Σ_1 构成一个封闭曲面。

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V=2\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} (x+y)\mathrm{d}z = 0$$



故

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$= \iint_{D_{xy}} (h^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\pi h^4$$

而

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}S = \pi h^4$$

因此

$$\iint_{\Sigma} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4$$

例3 设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数，证明

$$\iiint_\Omega u\triangle v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S$$
$$-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中Σ为闭区域Ω的整个边界曲面，$\frac{\partial v}{\partial n}$为函数$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法向量的方向导数，符号$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。

解：因为方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$$

于是

$$\oiint u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma\left[u\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+u\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+u\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$\oiint u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + u\frac{\partial v}{y}\cos\beta + u\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

利用高斯公式，即得

$$\oiint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} u\triangle v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial v}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

复习与提高

习题1：设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧，Ω 为 Σ 所围立体，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 判断下列演算是否正确？

$$
\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma} \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\overset{\checkmark}{=} \frac{1}{R^3}\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\overset{\checkmark}{=} \frac{1}{R^3}\iiint_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v \overset{\times}{=} \frac{3}{R}\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v \\
&= 4\pi R^2
\end{aligned}
$$

习题2：设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧，Ω 为 Σ 所围立体，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 判断下列演算是否正确?

$$\oiint_{\Sigma} \frac{x^3}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\times}{=}\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}v$$

习题3：设Σ是一光滑闭曲面，所围立体 Ω 的体积为V，θ 是Σ外法线向量与点 (x,y,z) 的向径 $\boldsymbol{r}$ 的夹角，$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，试证

$$\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}|\boldsymbol{r}|\cos\theta\mathrm{d}S=V$$

证：设 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位外法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

向径 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{r}_0=(x,y,z)/|\boldsymbol{r}|$，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{r}_0|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}\cos\alpha+\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}\cos\beta+\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\cos\gamma$$

于是

$$I=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}V=V$$

作业

11-6节： 第 1 题(1)、(5)，第 4 题

11.7 斯托克斯公式

- 斯托克斯公式

斯托克斯公式

格林公式

平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系

斯托克斯公式

曲面Σ上的曲面积分与沿着Σ的边界曲线的曲线积分之间的关系

斯托克斯公式

定理1 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分段光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则, 若 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在曲面 Σ（连同边界 Γ）上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

简记为

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

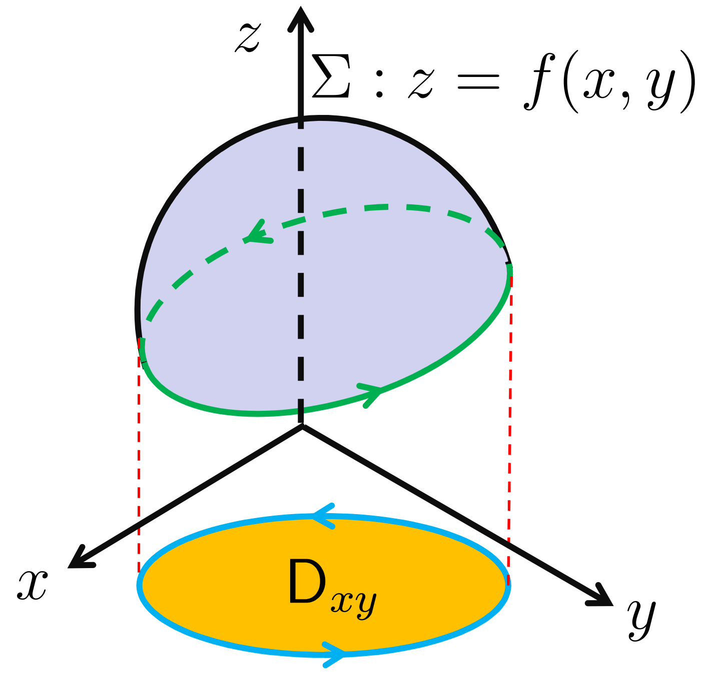
或

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

证： 设$\Sigma: z=f(x,y)$，其正向边界曲线Γ在$x\mathrm{O}y$面上的投影为平面有向曲线C

以下先证

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x$$



根据对面积和对坐标的曲面积分关系有

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\mathrm{d}S=-\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}f_y'+\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\mathrm{d}S$$

而

$$\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y'$$

故

$$\iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\mathsf{D}_{xy}}\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\oint_C P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x$$

由于 $P(x,y,z(x,y))$ 在曲线 C 和曲线 Γ 的值一样，并且小弧段在 x 轴的投影也是一样，因此

$$\iint_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_\Gamma P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x$$

同理可得

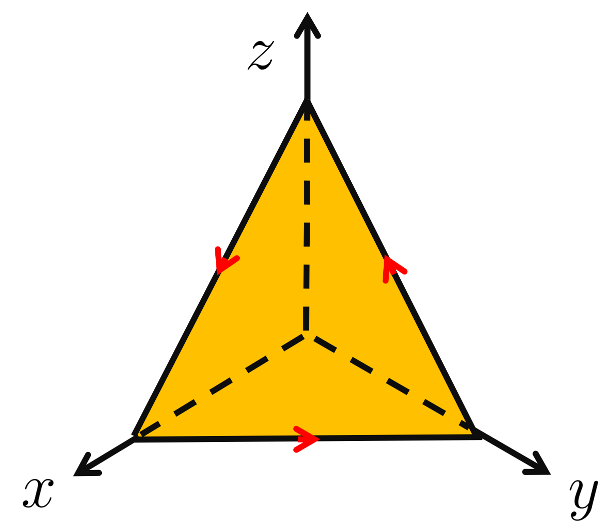
$$\iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oint_\Gamma Q\mathrm{d}y$$

$$\iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\oint_\Gamma R\mathrm{d}z$$

例1 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$$

其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，其正向与这个平面三角形上侧的法向量符合右手定则。



解：斯托克斯公式，有

$$\oint_{\Gamma} z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}$

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{D_{zx}} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} \qquad \iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}$$

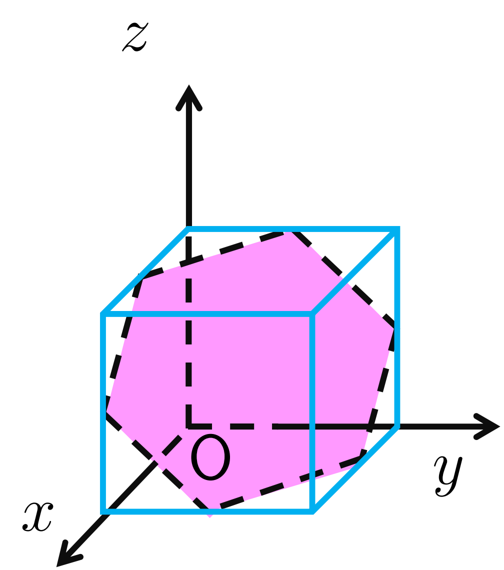
例2 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

其中 Γ 是用平面$x+y+z=3/2$ 截立方体 $\{(x,y,z)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$ 的表面所得的截痕若从 x 轴的正向看去，取逆时针方向。

解：取Σ 为平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的上侧被 Γ 所围的部分，Σ 的单位法向量

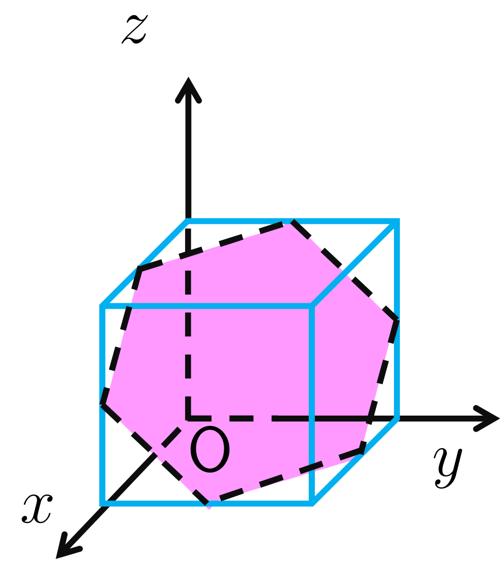
$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$



根据斯托克斯公式

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$$

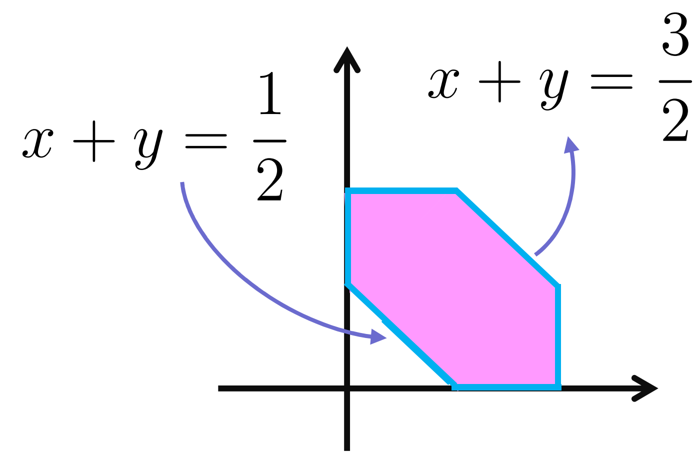


因为Σ在$x+y+z=\dfrac{3}{2}$平面上，故

$$I=-\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-6\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中D_{xy}如右图所示



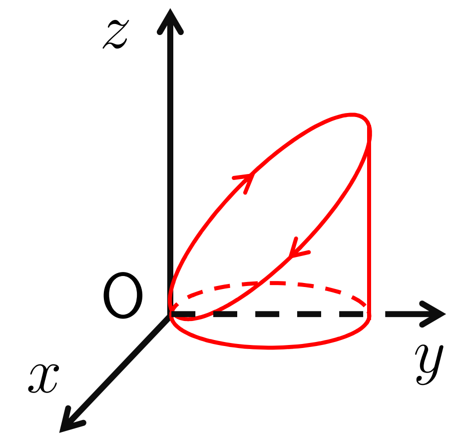
$$\iint_{\mathrm{D}_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

因此：$I=-\dfrac{9}{2}$。

复习与提高

习题1：设Γ为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面$y=z$的交线，从z轴正向看为顺时针，用斯托克斯公式求

$$I=\oint_{\Gamma} y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$$



解：设Σ为Γ所围 $x^2+y^2=2y$ 的椭圆域，且取下侧，则其法线方向余弦为

$$\cos\alpha=0,\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

利用斯托克斯公式

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}S=0$$

作业

11-7节： 第 1 题

第十二章 无穷级数

邹秋云

软件与物联网工程学院

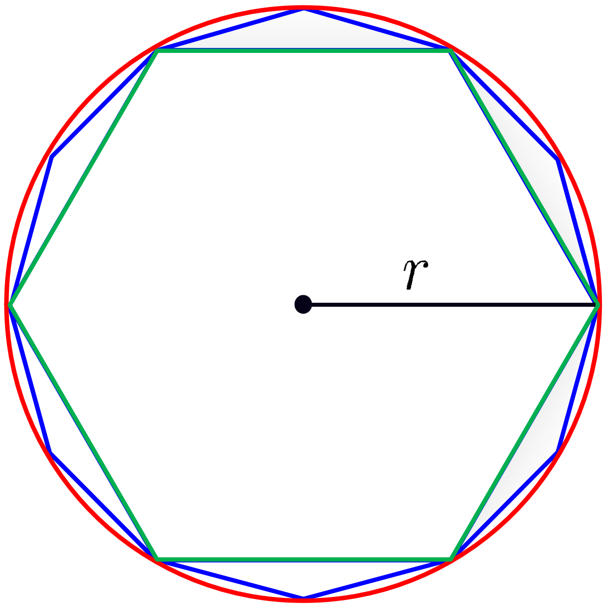
第十二章 无穷级数

12.1 常数项级数的概念和性质

- 常数项级数的概念
- 收敛级数的基本性质
- *柯西审敛原理

引言：割组圆术

计算半径为 r 的圆面积 A。具体做法：作圆的内接正六边形，算出这正六边形的面积a_1，同时以正六边形边为底，分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，记这六个等腰三角形面积为 a_2



分别以这六个等腰三角形两边为底，作顶点在圆上的等腰三角形，记其面积为a_3，如此继续下去，逐渐逼近圆面积。

$$A \approx a_1,\ A \approx a_1 + a_2,\ \cdots,\ A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

无穷级数的概念

定义1 给定数列：$u_1, u_2,\ u_3,\ \cdots, u_n, \cdots$， 式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第 n 项 u_n 称为级数的通项（一般项）。

级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的前 n 项的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

称为第 n 次部分和，各个部分 s_1，s_2，$\cdots$，s_n，$\cdots$ 构成一个数列。

定义2 如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

那么称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，

- 称 s 为级数的和
- 称 $r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数余项

如果 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 发散，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散。

例1 讨论几何级数（或称等比级数）

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \cdots$$

的收敛性，其中$a \neq 0$，q 为级数的公比。

解：1) 若$q \neq 1$，那么部分和

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

- 当$|q| < 1$时，由于$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$，从而$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，级数收敛
- 当$|q| > 1$时，由于$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$，从而$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$，级数发散

2) 若 $|q| = 1$

- 当 $q = 1$ 时，由于 $s_n = na \to \infty$，级数发散
- 当 $q = -1$ 时，

$$s_n = a - a + a - a + \cdots$$

此时 n 为偶数时，$s_n = 0$；n 为奇数时，$s_n = a$，从而 s_n 的极限不存在，故级数发散。

综合1）2）可知： $|q| < 1$ 时，级数收敛；

$|q| \geq 1$ 时，级数发散。

例2 证明级数$1+2+3+\cdots+n+\cdots$是发散的。

证：这级数的部分和为

$$s_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$，因此级数发散。

例3 判断级数$\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$的收敛性。

解：由于$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

因此

$$s_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$，级数收敛。

练习1 讨论级数 $\sum_{i=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$ 的敛散性。

解：

$$\because\quad \ln(1-\frac{1}{n^2})=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad s_n&=\sum_{i=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})\\&=(\ln 3+\ln 1-2\ln 2)+(\ln 4+\ln 2-2\ln 3)\\&\quad+(\ln 5+\ln 3-2\ln 4)+(\ln 6+\ln 4-2\ln 5)\\&\quad+\cdots+(\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n)\\&=-\ln 2+\ln(n+1)-\ln n\\&=-\ln 2+\ln(1-\frac{1}{n})\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}s_n=-\ln 2$，级数收敛。

收敛级数的基本性质

性质1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且和为 ks。

证：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$的部分和分别为 s_n 和 σ_n，则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = ks_n$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = ks$$

结论：级数的每一项乘一个不为零的常数后，它的收敛性不改变。

性质2　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于s和σ，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛，且其和为$s \pm \sigma$。

证：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$的部分和分别为s_n和σ_n，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$的部分和

$$\begin{aligned}\tau_n &= (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= s_n \pm \sigma_n\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty}(s_n \pm \sigma_n) = s \pm \sigma$$

两个级数逐项相加或者相减，不改变级数的收敛性。

性质2相关结论

性质2.1 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 一个收敛一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散。

性质2.2 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散。

性质3　在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性。

证：我们仅需证明“在级数的前面部分去掉或加上有限项，不会改变级数的收敛性”，因为其他情况（即在级数中任意去掉、加上或改变有限项的情形）都可以看成在级数前面部分先去掉有限项，再加上有限项的结果。

将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的前 k 项去掉，得到新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$，于是新得的级数得部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} = s_{k+n} - s_k$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{k+n} = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad \text{常数}$$

故 σ_n 和 s_{k+n} 同时收敛或者同时发散。

同理可证，在级数前面加上有限项，不会改变级数的收敛性。

性质4 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，那么对这级数的项任意加括号后所成的级数

$$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})+$$
$$\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

仍收敛，且其和不变。

证：设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列为$\{s_n\}$，加括号后所成的级数的部分和数列为$\{A_k\}$，则

$$\begin{aligned}
A_1 &= u_1+u_2+\cdots+u_{n_1} = s_{n_1}\\
A_2 &= (u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2}) = s_{n_2}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots\\
A_k &= (u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}) = s_{n_k}
\end{aligned}$$

可见，数列$\{A_k\}$是数列$\{s_n\}$的一个子数列，因此数列$\{A_k\}$必定收敛，且$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} s_n$。

推论：若加括弧后的级数发散，则原级数必发散。反之，收敛级数去掉括弧后，不一定收敛。

例：已知几何级数 $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2$$

加括号之后得到新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=2$$

性质5 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么它的一般项 u_n 趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

证：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 s_n，且 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

注1：若通项不趋于零，则级数一定发散。

例：　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于1，因此它发散。

注2：若通项趋于零，则级数未必收敛。

例：　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$ 的通项趋于零，但它是发散的。

练习2 判断级数的收敛性，如果级数收敛，求出它的和

（1） $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2n}+\cdots$

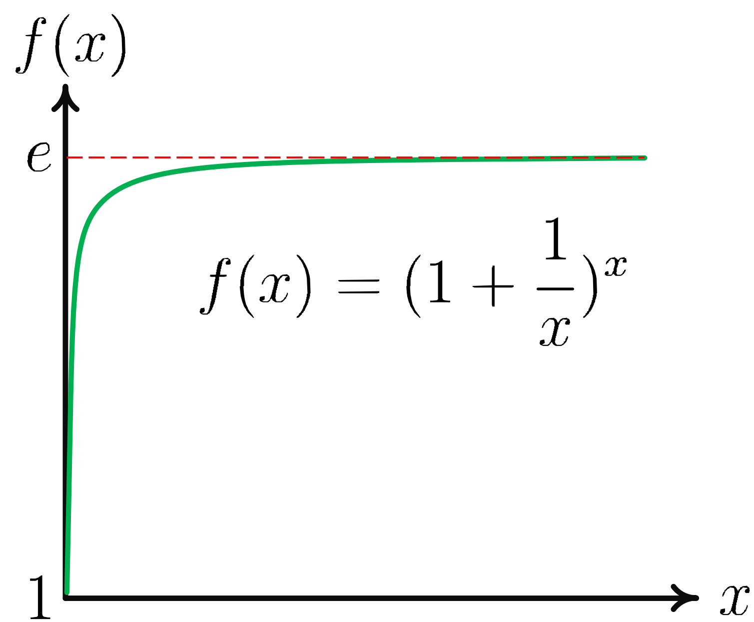
（2） $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{27}\right)+\cdots$

例5：判断下列级数的敛散性，若收敛，求其和

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$ （3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$

解：（1）令 $u_n=\frac{e^n n!}{n^n}$，则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{e^{n+1}(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}}{\frac{e^n n!}{n^n}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$$



$$\Rightarrow u_{n+1}>u_n>\cdots>u_2>u_1=e$$

故 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，级数发散。

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$s_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4})+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{4}$ ，级数收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$

分子相差2，分母翻一倍

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}\times s_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{等比数列求和}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}s_n=3$$

课后作业

P248：第 2 题（3）（4）

第 3 题

第 4 题（1）（5）

12.2 常数项级数的审敛法

- 正项级数及其审敛法
- 交错级数及其审敛法
- 绝对收敛与条件收敛

正项级数及其审敛法

定义1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geq 0$（对所有 n），则称它为正项级数。

性质： 正项级数的部分和数列 $\{s_n\}$是单调递增数列。

定理1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界。

证： 充分性

由于正项级数收敛，即 $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$，又$\{s_n\}$为单调递增数列，故$\{s_n\}$有界。

必要性

由于正项级数为单调递增数列，又因为部分和数列$\{s_n\}$有界，故$\{s_n\}$收敛。

定理2（比较审敛法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n$ ($n = 1, 2, 3 \cdots$)。

- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

证： 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于和 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leqslant \sigma \ (n = 1, 2, \cdots)$$

则部分和数列 $\{s_n\}$ 有界，根据定理 1 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

反之，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i = \infty \quad \xRightarrow{u_i \leqslant v_i} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i = \infty$$

定理2推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，且存在 $N \in \mathbb{N}_+$，使得当 $n \geqslant N$ 时有 $u_n \leqslant k v_n \ (k > 0)$ 成立，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，且当 $n \geqslant N$ 时有 $u_n \geqslant k v_n \ (k > 0)$ 成立，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注： 调和级数和 p 级数是常用的比较级数。

例：讨论调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性。

解：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots\right. \\
&\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots\right. \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \qquad\qquad \mathcal{O}(\log_2 n) \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

故调和级数发散。

例1：讨论 p 级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的收敛性，其中常数 $p>0$。

解：当 $0<p\le 1$时，有 $\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$，由于调和级数发散，根据比较审敛法，知级数发散。

当 $p>1$ 时，考虑 $k-1\leqslant x\leqslant k$ 时，有 $\frac{1}{k^p}\le\frac{1}{x^p}$

$$\frac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (k=2,3,\cdots)$$

从而级数部分和

$$s_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\le 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$$

$$=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}$$

数列 $\{s_n\}$ 有界，故级数收敛。

例：判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 的敛散性。

解：由于

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1^1} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{3^3} & + & \frac{1}{4^4} & + & \cdots & + & \frac{1}{n^n} \\
\leqslant & & \leqslant & & \leqslant & & \leqslant & & & & \leqslant \\
\frac{1}{1^2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{3^2} & + & \frac{1}{4^2} & + & \cdots & + & \frac{1}{n^2}
\end{array}$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数收敛。

例2：证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的。

证：由于 $n(n+1)<(n+1)^2$，故 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$。而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

由于调和级数发散，同时根据删去有限项不改变级数敛散性，知级数发散。

定理3(比较审敛法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数

- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l\ (0 \leqslant l < +\infty)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l > 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

证：(1)由极限定义可知，对 $\varepsilon = 1$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$，当 $n > N$ 时，有

$$\frac{u_n}{v_n} < l + 1$$

即 $u_n < (l+1)v_n$。而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，根据比较审敛法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(2)（反证法）按已知条件知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{u_n}$ 存在，假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则根据结论 1 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 必收敛。但已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 不可能收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$ 情况略。

例3：判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$的收敛性

解：由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，根据定理 3 知此级数发散。

例：判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$的敛散性。

解：由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=1>0$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，根据定理 3 知此级数收敛。

定理4(比值审敛法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则有

- 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
- 若 $\rho > 1$，则级数发散；
- 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散；

证： (1)当$\rho < 1$时。取一个适当小的正数ε，使得$\rho + \varepsilon = r < 1$，根据极限定义，存在正整数$m$，当$n \geqslant m$时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r$$

因此

$$u_{m+1} < ru_m,\ u_{m+2} < ru_{m+1} < r^2 u_m, \cdots, u_{m+k} < r^k u_m$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_m$ 收敛（公比 $r < 1$），根据定理 2 的推论，知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(2) 当 $\rho > 1$时。取一个适当小的正数 ε，使得 $\rho - \varepsilon > 1$，根据极限定义，存在正整数m，当$n \geqslant m$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1$$

即 $u_{n+1} > u_n$。所以，当$n \geqslant m$时，级数的一般项 u_n 逐渐增大，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，根据级数收敛的必要条件知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

类似地，可以证明当$\rho = \infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

(3) 当$\rho = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散，如调和级数

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

例4：证明级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$$

是收敛的，并估计以级数的部分和 s_n 近似替代 s 所产生的误差。

证：$\because \quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$

$\therefore$ 根据比值审敛法，知该级数收敛。

以部分和代替极限所产生的误差为

$$\begin{aligned}
r_n &= \lim_{i\to\infty} s_i - s_n \\
&= \frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots \\
&= \frac{1}{n!}(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots) \\
&\leqslant \frac{1}{n!}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots) \\
&= \frac{1}{n!}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{(n-1)(n-1)!}
\end{aligned}$$

例5：判定下列级数的敛散性

$$\frac{1}{10}+\frac{1\times 2}{10^2}+\frac{1\times 2\times 3}{10^3}+\cdots+\frac{n!}{10^n}$$

解：由于

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\times\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$$

根据比值审敛法，知该级数发散。

定理5(根植判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

- 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
- 若 $\rho > 1$，则级数发散；
- 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散；

证：定理 5 的证明与定理 4 证明相仿，以下只证明结论（1）

当 $\rho < 1$ 时，取一适当小的正数，使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$，根据定义，存在 $m \in \mathbb{N}_+$，当 $n \geqslant m$ 有不等式

$$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = r \quad \Rightarrow \quad u_n < r^n$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛，根据比较审敛法，知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

例6：判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性

解：

有界

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{n}\ln[2+(-1)^n]}$$

由于 $\ln[2+(-1)^n]$ 有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[2+(-1)^n]=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}$$

根据根值审敛法，知该级数收敛。

定理6(极限审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数

- 若 $\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$ (或 $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$) ，则级数发散；
- 若 $p > 1$，且 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l$ （$0 \leqslant l < +\infty$），则级数收敛；

证： （1）在极限形式的比较审敛法中，取 $v_n = \dfrac{1}{n}$，由于调和级数发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

（2）在极限形式的比较审敛法中，取$v_n = \dfrac{1}{n^p}$。当 $p > 1$时，p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

例7：判定级数$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$的敛散性

解：由于$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}\ (n \to \infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \times \frac{1}{n^2} = 1$$

根据极限审敛法，知该级数收敛。

例8：判定级数$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性

解：

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} u_n = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi^2$$

根据极限审敛法，知该级数收敛。

交错级数及其审敛法

定义2 正负项交替的级数称为交错级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

或 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots$$

其中 $u_n > 0,\ n = 1, 2, 3, \cdots$。

定理7(莱布尼茨定理) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足条件

(1) $u_{n+1} \leqslant u_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

则级数收敛，且其和 $s \leqslant u_1$，余项满足 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$。

证： $s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geqslant 0$

$$\Rightarrow s_{2n} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geqslant 0} - \cdots - \underbrace{(u_{2n-2} - u_{2n-1})}_{\geqslant 0} - u_{2n} \leqslant u_1$$

$\{s_{2n}\}$ 是单调递增有界的数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \leqslant u_1$。

又 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s \leq u_1$。即级数的前偶数项和奇数项和趋于同一极限分布。

$$r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots)$$

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots$$

$$|r_n| = u_{n+1} - (u_{n-2} - u_{n-3}) - \cdots \leqslant u_{n+1}$$

练习：用莱布尼茨定理判断下列级数的敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n}$$

绝对收敛与条件收敛

定义3 对于任意级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中 u_n 为任意项实数

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。
- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。

绝对收敛与条件收敛的关联

定理8 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$必定收敛。

证： 令 $v_n = \dfrac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$

显然有$v_n \geqslant 0$，且 $v_n \leqslant |u_n|$，又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，根据正项级数的比较审敛法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2v_n$收敛。

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

根据收敛级数的基本性质，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

定理9 对于任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则有

- 若$\rho < 1$时，级数绝对收敛；
- 若$\rho > 1$时，级数发散。

证： 证明略。

例9：判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的敛散性

解：由于 $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛，根据定理 8 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛。

例10：判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性

解：记 $u_n = \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$，有

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{2}e \quad (n \to \infty)$$

根据定理 9 知级数发散。

练习1：判定下列级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}$

知识归纳

- 利用部分和数列判断级数的敛散性。
- 正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 级数发散

满足 ↓

比值审敛法：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho > 1$ ↓ 级数发散

$\rho < 1$ ↓ 级数收敛

$\rho = 1$ →

- 比较审敛法
- 部分和极限
- 积分判别法

知识归纳

- 交错级数审敛法

  莱布尼茨定理

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &\le u_n \\ \lim_{n\to\infty} u_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{级数收敛}$$

- 任意项级数审敛法

  绝对收敛与条件收敛

  - 级数绝对收敛，则级数收敛
  - 比值审敛法
  - 根植审敛法

作业

P260： 第 1 题（2）

第 2 题（1）

第 3 题（2）

第 4 题（1）

第 5 题（1）（2）

12.3 幂级数

- 函数项级数的概念
- 幂级数及其收敛性
- 幂级数的运算

函数项级数的概念

定义1 给定区间 I 上的函数列 $\{u_n(x)\}$ ，由这函数列构成的表达式

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为定义在区间 I 上的函数项无穷级数，简称函数项级数。

- 使得该函数项级数收敛的点称为收敛点；
- 使得该函数项级数发散的点称为发散点；
- 区间 I 上全体收敛点的集合称为收敛域；
- 区间 I 上全体发散点的集合称为发散域。

定义2 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和定义为

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

定义3 对于收敛域内任意一个数 x ，函数项级数将成为一个收敛的常数项级数，因而有一确定的和 s。在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) = s(x)$$

称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数。

例：写出下列函数项级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

幂级数及其收敛性

定义2 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数，即

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数。

特别地，当 $x_0 = 0$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，即

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$

称为 x 的幂级数。幂级数是函数项级数的特例。

定理1（阿贝尔定理） 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$ $(x \neq 0)$ 处收敛，那么集合$\{x| \ |x| < |x_0|\}$内的任意点，均可使得这幂级数绝对收敛。反之，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散，那么集合$\{x| \ |x| > |x_0|\}$内的任意点，均可使得这幂级数发散。

证： 先设x_0是幂级数的收敛点，即级数$\sum_{n=1}^{n} a_n x_0^n$收敛，则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

于是存在一个常数M，使得

$$|a_n x_0^n| \leqslant M \quad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

幂级数一般项的绝对值

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

当$|x| < |x_0|$时，等比数列$\sum\limits_{n=0}^{\infty} M|\dfrac{x}{x_0}|^n$收敛，故$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$收敛。

定理第二部分：反证法。

假设幂级数在 $x = x_0$ 处发散，存在一点 x_i $(|x_i| > |x_0|)$ 使得幂级数收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_i^n$ 收敛。

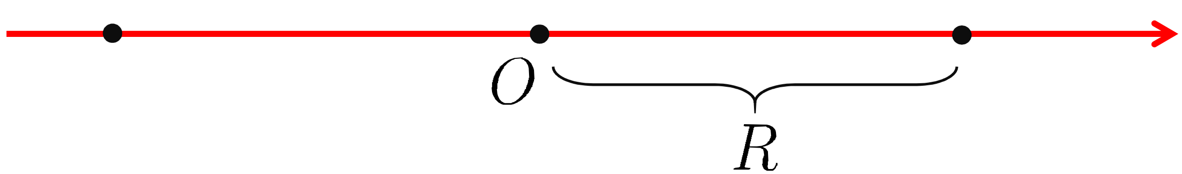
$$|a_n x_0^n| = \left|a_n x_i^n \cdot \frac{x_0^n}{x_i^n}\right| = |a_n x_i^n| \cdot \left|\frac{x_0^n}{x_i}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x_0}{x_i}\right|^n$$

推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n x_0^n|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，与题设矛盾。

定义4 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，那么必然有一个确定的正数 R，使得

- 当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；
- 当 $|x|>R$ 时，幂级数发散；
- 当 $x=R$ 与 $x=-R$，幂级数可能收敛也可能发散。

称这个正数 R 为幂级数的**收敛半径**。



定理2 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

其中a_n, a_{n+1}是幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的相邻两项的系数，那么这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

证： 幂级数各项的绝对值构成的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$$

该级数相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|$$

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\ (\rho\neq 0)$。对于$|x| < \dfrac{1}{\rho}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| < 1$$

根据比值审敛法，知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛。

对于$|x| > \dfrac{1}{\rho}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > 1$，知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散。于是收敛半径 $R = 1/\rho$。

（2） $\rho = 0$ 。那么对于任意的 $x\neq 0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| \to 0 \ \Rightarrow\ R = +\infty$$

（3） $\rho = +\infty$。那么对于任意的 $x\neq 0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = +\infty \quad \Rightarrow \quad R = 0$$

例1：求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径与收敛域

解：由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$$

所以该幂级数的收敛半径为 $R=1/\rho=1$。

当 $x=-1$时，级数成为

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots$$

此级数为调和级数，故发散。

当 $x=1$ 时，成为交错级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

此级数收敛，故收敛域为 $(-1,1]$。

练习：写出下列函数项级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + x^{-n}}{n^2} \quad (x \neq 0)$$

例2：求幂级数 $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$ 的收敛域

解：由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

所以收敛半径 $R=+\infty$，从而收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。

例3：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ 的收敛半径（规定 $0!=1$ ）

解：由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty$$

所以收敛半径 $R=0$，即级数仅在 $x=0$ 处收敛。

例5：求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$ 的收敛域

解：令 $t=x-1$，则上述级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n2^n}$。

由于

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

故该幂级数的收敛半径为 $R=2$，收敛区间为

$$|t|<2 \;\;\Rightarrow\;\; -1<x<3$$

当 $x=-1$，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，级数收敛。当 $x=3$时，级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，级数发散。故原级数的收敛域为 $[-1,3)$。

练习：求下列幂级数的收敛域

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$$

幂级数的运算

定义5 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1, R_2$则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \pm \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

在$(-R, R)$中成立，其中$R = \min\{R_1, R_2\}$，$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$。

定义6 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2 则有

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

在 $(-R, R)$ 的某个子区间内成立。

例：
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 0x + \cdots + 0x^n + \cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x + 0x^2 \cdots + 0x^n + \cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

幂级数的和函数

性质1：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上连续。

性质2：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上可积，并有逐积分公式

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{n} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

逐项积分后得到的幂级数和原幂级数有相同的收敛半径。

性质2：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间$(-R, R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

逐项求导后得到的幂级数和原幂级数有相同的收敛半径。

注：幂级数的和函数在其收敛区间$(-R, R)$ 内具有任意阶导数。

例6：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解：先求收敛域。由

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$$

故收敛半径为 $R=1$。

当 $x=-1$时，幂级数变为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$，收敛。

当 $x=1$ 时，幂级数变为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，发散。

故收敛域为 $I=[-1,1)$。

设该幂级数函数的和函数为 $s(x)$，即

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},\quad x\in[-1,1)$$

于是

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$$

对上式从 0 到 x 积分，得到

$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x) \qquad (-1 \leqslant x < 1)$$

于是当 $x \neq 0$ 时，有 $s(x) = -\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$，而

$$s(0) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\right]_{x=0} = 1$$

也可由和函数的连续性得到

$$s(0) = \lim_{x\to 0} s(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{\ln(1-x)}{x}\right] = 1$$

故

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x), & x \in [-1,0)\cup(0,1) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

练习：求下列幂级数的和函数

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$

作业

P270： 第 2 题（3）（5）（7）

第 3 题（1）（3）

12.4 函数展开成幂级数

$$\begin{tikzcd} \text{幂级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \arrow[r, bend left, "\text{收敛}"] & s(x) = f(x) \arrow[l, bend left, "\text{展开}"] \end{tikzcd}$$

泰勒公式与泰勒级数

定理1 如果函数$f(x)$在包含 x_0 的区间 (a,b) 内具有直到$n+1$阶的连续导数，则当$x\in(a,b)$时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\quad\text{（泰勒公式）}$$

其中余项$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于x_0和x 之间。

定义1 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当$n\to\infty$时$R_n(x)\to 0$，则有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\qquad\text{（泰勒级数）}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ （泰勒级数）

特别地，当 $x_0=0$ 时，上式变成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ （麦克劳林级数）

将函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数：

- 计算 $f(x)$ 在 $x=0$ 的各阶导数 $f^{(n)}(0)$, $n=1,2,\cdots$,
- 写出幂级数，并计算收敛半径 R

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- 计算余项的极限

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

例1：将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数。

解：所给函数的各阶导数为 $f^{(n)}(x)=e^x \quad (n=1,2,\cdots)$，于是得到麦克劳林级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

计算 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!}=0$，得到收敛半径 $R=+\infty$

计算余项的绝对值

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ \to 0$$

即当 $n\to\infty$ 时，$|R_n(x)|\to 0$。于是

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例2：将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数。

解：所给函数的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(n=1,2,\cdots)$$

$f^{(n)}(0)$按照顺序循环地取$0,1,0,-1,\cdots,(n=0,1,2,\cdots)$，于是得到级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

该级数的收敛半径为$R=+\infty$。

对于任何有限的数 x 与 ξ（ξ在 0 与 ξ 之间），余项的绝对值当$n\to\infty$时的极限为零

$$R_n(x)=\left|\frac{\sin(\xi+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$$

因此上述级数，即为所求。

常见函数的幂级数展开式之一

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty)$

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty)$

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty)$

(4) $a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty)$

常见函数的幂级数展开式之二

(5) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

(6) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

(7) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

(8) $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1)$$

(9) $$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

例3：将函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解：由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (-1<x\leqslant 1)$ 得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n-1}x^{n} \\
&= x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{n(n-1)}x^n \quad (-1<x\leqslant 1)
\end{aligned}
$$

例4：将函数 $\sin x$ 展开成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数。

解：因为

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

并且有

$$
\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}
$$

$$
(-\infty<x<+\infty)
$$

$$
\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-
$$

$$
\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)
$$

所以

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \cdots + \right.$$

$$\left.\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x + \infty)$$

例5：将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$展开成$(x-1)$的幂级数。

解：因为

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$$
$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

而

$$\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n \qquad (-1<x<3)$$

$$\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n \qquad (-3<x<5)$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \quad (-1<x<3)$$

练习：将下列函数展开成 x 的幂级数

(1) $e^{-\frac{x}{3}}$　　(2) $\cos^2 x$　　(3) $\ln(1-x^2)$

例6：将函数$f(x)=(1+x)^m$展开成x的幂级数，其中m为任意实数。

解：$f(x)$的各阶导数为

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$$
$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

所以

$$f(0)=1 \qquad f'(0)=m \qquad f''(0)=m(m-1)$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

于是得到级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

上述级数相邻两项的系数之比的绝对值

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{m-n}{n+1}\right|\to 1 \quad (n\to\infty)$$，故收敛区间$(-1,1)$。

对应于 $m=\dfrac{1}{2}$ 或 $m=-\dfrac{1}{2}$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\times4}x^2+\frac{1\times3}{2\times4\times6}x^3$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}x^n+\cdots$$
$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times3}{2\times4}x^2-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}x^3+\cdots$$
$$+\cdots+(-1)^{n}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots 2n}x^n+\cdots$$
$$(-1< x\le 1)$$

复习与提高

函数展成幂级数

- 直接法——利用泰勒级数（需要验证余项趋于0）
- 间接法——利用幂级数的性质以及已有简单函数的幂级数展开公式

作业

P277： 第 2 题（6）

第 3 题（2）

第 4 题

第 6 题

12.5 函数的幂级数展开式的应用

- 近似计算
- 欧拉公式

近似计算

例1：计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值，要求误差不超过0.0001。

解：因为

$$\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3\left(1-\frac{1}{3^4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

在 $f(x)=(1+x)^m$ 的幂级数展开式中

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

取 $m=\frac{1}{5}$, $x=-\frac{1}{3^4}$，可得

$$\sqrt[5]{240}=3\left(1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^4}-\frac{1\times4}{5^2\times2!}\times\frac{1}{3^8}-\frac{1\times4\times9}{5^3\times3!}\times\frac{1}{3^{12}}\right.$$
$$\left.-\cdots-\frac{1\times4\times9\times\cdots\times(5n-6)}{5^n\times n!}\times\frac{1}{3^{4n}}-\cdots\right)$$

取前两项之和作为 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值，其误差为

$$
\begin{aligned}
|r_2| &= 3\left(\frac{1\times 4}{5^2\times 2!}\times\frac{1}{3^8}+\frac{1\times 4\times 9}{5^3\times 3!}\times\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\times 4\times 9\times 14}{5^4\times 4!}\times\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)\\
&\leqslant 3\times\frac{1\times 4}{5^2\times 2!}\times\frac{1}{3^8}\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right]\\
&= \frac{26}{5}\times\frac{1}{3^8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{81}}=\frac{1}{25\times 27\times 40}<\frac{1}{20000}
\end{aligned}
$$

于是取近似式

$$\sqrt[5]{240}\approx 3\left(1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^4}\right)$$

为了保证误差不超过 10^{-4}，计算时保留 5 位小数，最后得

$$\sqrt[5]{240}\approx 2.9926$$

例2：计算 $\ln 2$ 的近似值，要求误差不超过 0.0001。

解：已知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

令 $x = 1$ 可得交错级数

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

且其误差$|r_n| = |\ln 2 - s_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$，为了保证误差，需要前 10^4 项。

用 $-x$ 替换 x 可得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leqslant x < 1)$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots\right) \end{aligned}$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right)$$

令 $\dfrac{1+x}{1-x}=2$，解出 $x=\dfrac{1}{3}$，于是

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}+\cdots\right)$$

取前 4 项作为 $\ln 2$ 的近似值，其误差为

$$\begin{aligned}|r_4|&=2\left(\frac{1}{9}\times\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\times\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\times\frac{1}{3^{13}}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\times\frac{1}{3^{2n+1}}+\cdots\right)\\&<\frac{2}{3^{11}}\left[1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots\right]\\&=\frac{2}{3^{11}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\times 3^9}<\frac{1}{70000}<0.0001\end{aligned}$$

于是取

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931$$

已知

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right)$$

令 $x=\dfrac{1}{2n+1}$

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow\quad \ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{(2n+1)}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\right]$$

根据上式可以求出任意正整数的对数。

$$\ln 5=2\ln 2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{9^5}+\cdots\right)\approx 1.6094$$

例4：计算定积分$\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$的近似值，要求误差不超过0.0001（取$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\approx 0.56419$）

解：已知 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$。

将 x 替换为 $-x^2$，可得被积函数的幂级数展开式

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} \quad (-\infty < x + \infty)$$

于是幂级数在收敛区间内逐项可积，得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2^2\times 3} + \frac{1}{2^4\times 5\times 2!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^{2n}(2n+1)n!}\right]$$

取前四项作为近似值，其误差为

$$|r_4| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^8 \times 9 \times 4!} < \frac{1}{90000}$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2^2 \times 3} + \frac{1}{2^4 \times 5 \times 2!} - \frac{1}{2^6 \times 7 \times 3!}\right)$$

算得

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \approx 0.5205$$

欧拉公式

定义1 对于复数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+\mathrm{i}v_n)$：

若 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=u$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}v_n=v$，则称该级数**收敛**，且其和为 $u+\mathrm{i}v$ 。

若 $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n+\mathrm{i}v_n|=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{u_n^2+v_n^2}$ 收敛，则称该级数**绝对收敛**。

$$|u_n|\leqslant\sqrt{u_n^2+v_n^2}$$
$$|v_n|\leqslant\sqrt{u_n^2+v_n^2}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+\mathrm{i}v_n)$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+\mathrm{i}v_n)$ 收敛

定义2 复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的指数函数定义为

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \quad (|z| < \infty)$$

当 $x=0$ 时

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}y} &= 1 + \mathrm{i}y + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}y)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}y)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(\mathrm{i}y)^n + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} + \cdots\right) \\ &\quad + \mathrm{i}\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1} + \cdots\right) \\ &= \cos y + \mathrm{i}\sin y \end{aligned}$$

替换变量，称 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ 为**欧拉公式**。

作业

P286：第 1 题（2）（4）

第 2 题（2）

第 3 题（2）

12.7 傅里叶级数

- 三角级数及三角函数系的正交性
- 函数展成傅里叶级数
- 正弦级数和余弦级数

认识声波信号

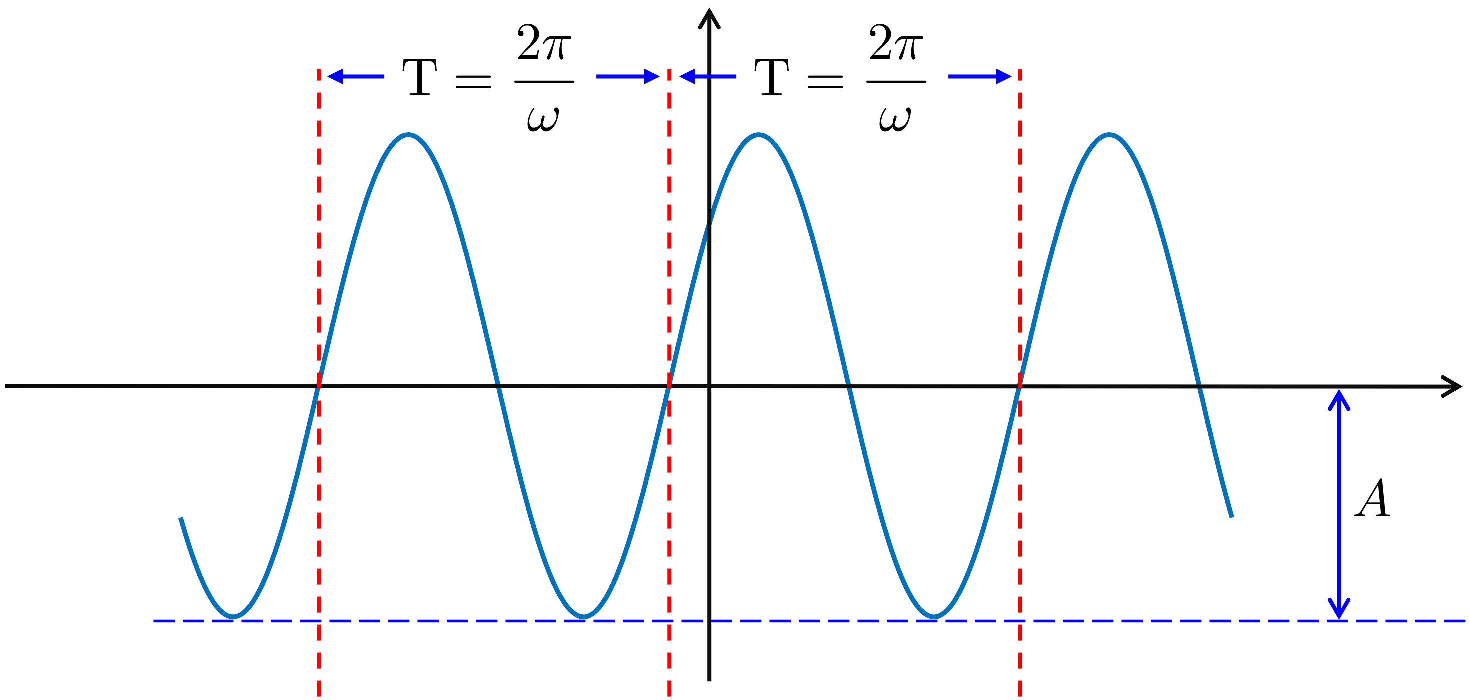
声音由物体的振动产生，如乐器演奏、声带振动等。

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 角频率 ω 反映声音的音调（ $\omega = 2\pi f$ ）
- 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成
  - 正弦波 $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$
  - 各频率正弦波的比例反映了声音的音色

正弦信号

正弦函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 具有周期 $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$，即

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega(t + \mathrm{T}) + \varphi)$$



三角级数

定义1：将周期为T的周期信号以一系列以T为周期的正弦函数 $A_n \sin(nwt+\varphi_n)$ 组成的级数来表示，记为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}$$

A_0 ——直流分量

$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ ——一次谐波

$A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$——二次谐波

$$A_n \cos(n\omega t)\sin(\varphi_n) + A_n \sin(n\omega t)\cos(\varphi_n)$$

令 $a_0 = 2A_0 \quad x = \omega t \quad a_n = A_n \sin(\varphi_n) \qquad b_n = A_n \cos(\varphi_n)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

称上述级数为三角级数。

定义2： 若函数 $f(x), g(x)$ 满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$$

则称 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上正交。正交是垂直概念的扩展。

定理1 组成三角级数的函数系

$$1, \cos x, \cos 2x, \cdots \cos nx, \cdots, \sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上两两正交。

证：（1）

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sin nx \bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \cos nx \bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \mathrm{d}x$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x \mathrm{d}x}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x \mathrm{d}x}_{=0\ (n\neq k),\ \pi\ (n=k)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \pi & n = k \end{cases}$$

同理可得：$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \pi & n = k \end{cases}$

（3） $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \mathrm{d}x$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+k)x \mathrm{d}x}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-k)x \mathrm{d}x}_{=0}$$

定义3： 如果在正交函数集 $\mathcal{C}=\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$外，不存在函数 $\varphi(x)$ 使得 $\varphi(x)$ 与正交函数集中的函数正交，则称 $\mathcal{C}$ 为完备正交集。

定理2 组成三角级数的函数系

$$1,\cos x,\cos 2x,\cdots\cos nx,\cdots,\sin x,\sin 2x,\cdots,\sin nx,\cdots$$

在$[-\pi,\pi]$上两两正交，且为完备正交集。

函数展开成傅里叶级数

1. 什么是傅里叶级数？

2. 为什么要将函数展开成傅里叶级数？

3. 如何将函数展开成傅里叶级数？

傅里叶（1768-1830）

约瑟夫.傅里叶（Fourier）法国数学家、物理学家。傅里叶生于法国欧赛尔一个裁缝家庭，9岁成为孤儿，由教会抚养。少年时候就读于军校，展现出数学天赋。1817年当选巴黎科学院院士。傅里叶的主要成就是发现任何周期函数均可分解为三角函数的无穷级数，并发展出傅里叶变换。这一理论奠定了信号处理、图像分析、无线通信等领域的基石。

定义3： 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

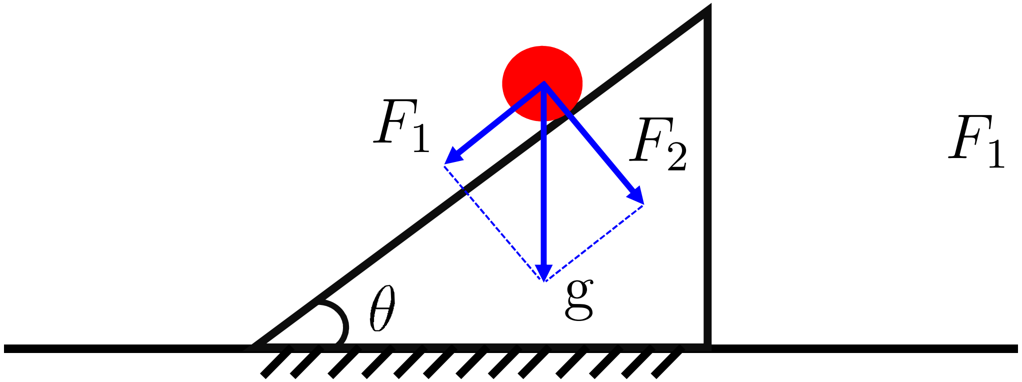
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$\{a_n,b_n\}$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数，称

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数。

引言：如图所示，斜面固定在平面上，且斜面与平面的夹角为 θ，求小球沿斜面下滑的加速度



$$F_1 = \mathrm{g}\sin\theta$$

对重力的正交分解，可以快速得到小球沿斜面的加速度！！！

类似于重力的正交分解，在信号处理领域，对于周期信号 $f(x)$ 是否存在类似的正交分解呢？

$\longrightarrow$ of course !!! 版本答案：周期信号的**傅里叶分解**

（傅里叶级数）

周期信号（函数）分解到完备正交函数集

设$\{\varphi_n(t)\}$为区间(t_1,t_2)上的完备正交集，将任意信号$f(t)$表示成这组完备正交集上函数的组合，即

$$f(t) \approx a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(t)$$

如何确定系数a_k？使得上述近似为最佳近似。

选取均方误差（mean square error, MSE）来衡量这个近似效果

$$\mathsf{mse} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

计算mse关于a_k的偏导数

$$\frac{\partial \mathsf{mse}}{\partial a_k} = \frac{1}{t_2 - t_2}\frac{\partial}{\partial a_k}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial \text{mse}}{\partial a_k} = \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{\partial}{\partial a_k} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t) \right]^2 \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \text{mse}}{\partial a_k} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial a_k} \left[f(t) - \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t) \right]^2 \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \text{mse}}{\partial a_k} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2 \left[f(t) - \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t) \right] (-\varphi_k(t)) \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \text{mse}}{\partial a_k} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2 \left[-f(t)\varphi_k(t) + \varphi_k(t) \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t) \right] \mathrm{d}t$$

令偏导数为 0，解得

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k^2(t)\mathrm{d}t}$$

周期函数的傅里叶分解

给定正交函数集

$$\{1, \cos nx, \sin nx\} \quad (n = 1, 2, \cdots,)$$

$$a_k = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2} \varphi_k^2(x)\mathrm{d}x}$$

将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 分解到该正交函数集上

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

上式两端同乘 $\cos nx$，并在 $[-\pi, \pi]$ 内积分

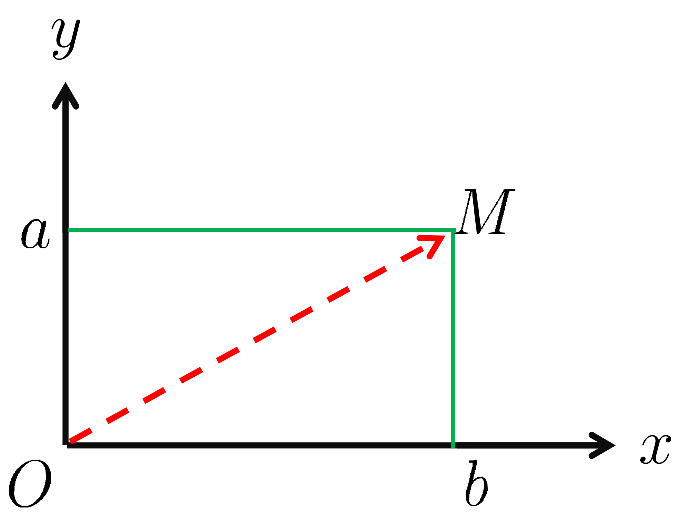
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

同理可得 $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$。

傅里叶分解是均方意义下的最佳近似！！！

函数的正交分解与平面直线分解



设 $\{\varphi_n(t)\}$ 为区间 (t_1, t_2) 上的完备正交集， 将任意周期信号 $f(t)$ 表示成这组完备正交集上函数的组合

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= a(1,0) + b(0,1) \\ &= a\vec{x} + b\vec{y}\end{aligned}$$

类比

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(t)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_k(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}x = 0$$

$\vec{x} \perp \vec{y}$

$\varphi_k(t)$ 与 $\varphi_i(t)$ 正交

定理3（收敛定理，迪利克雷充分条件）设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足

（1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

（2）在一个周期内至多只有有限个极值点

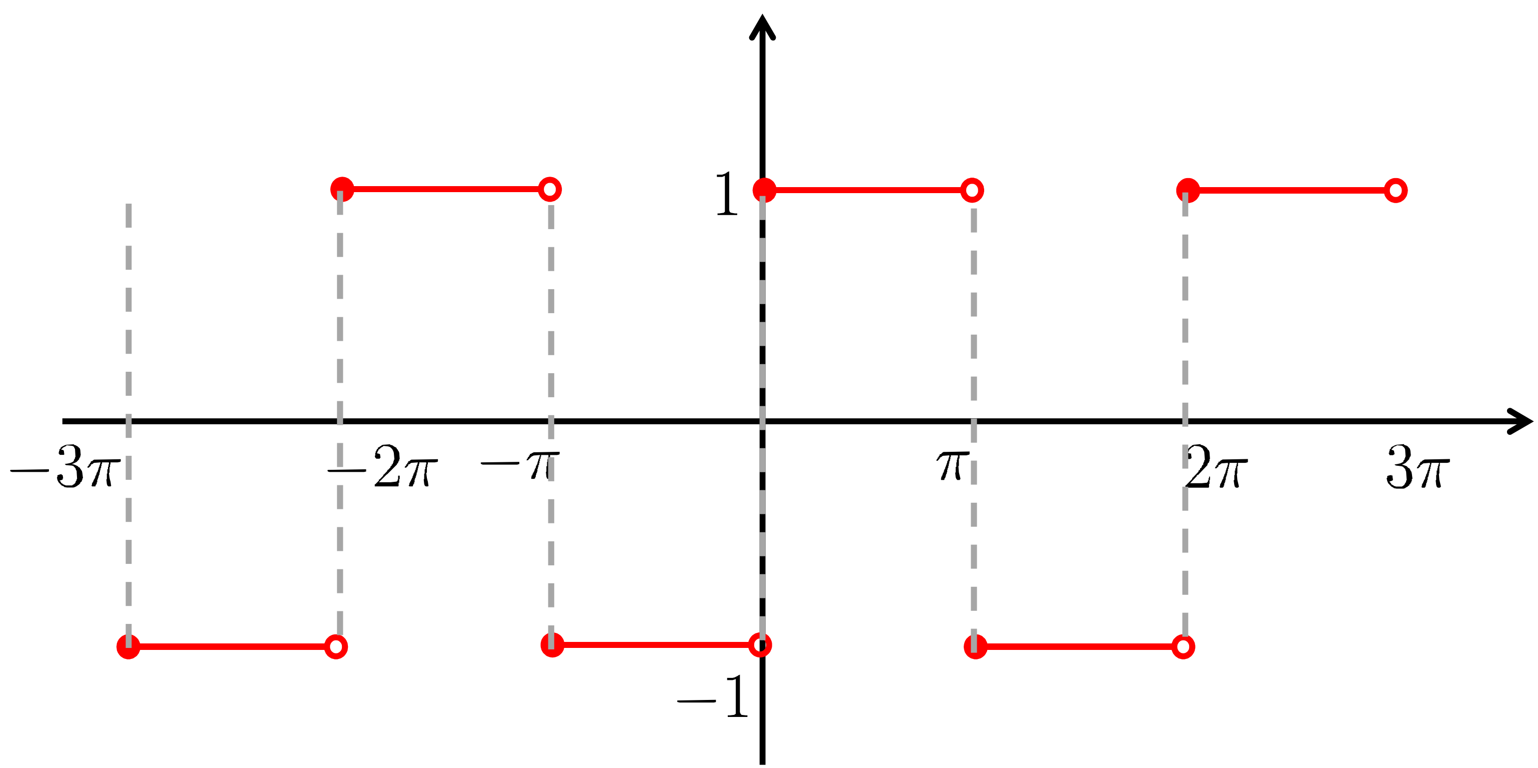
那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；
- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$。

例1：设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\leqslant x<0\\ 1 & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

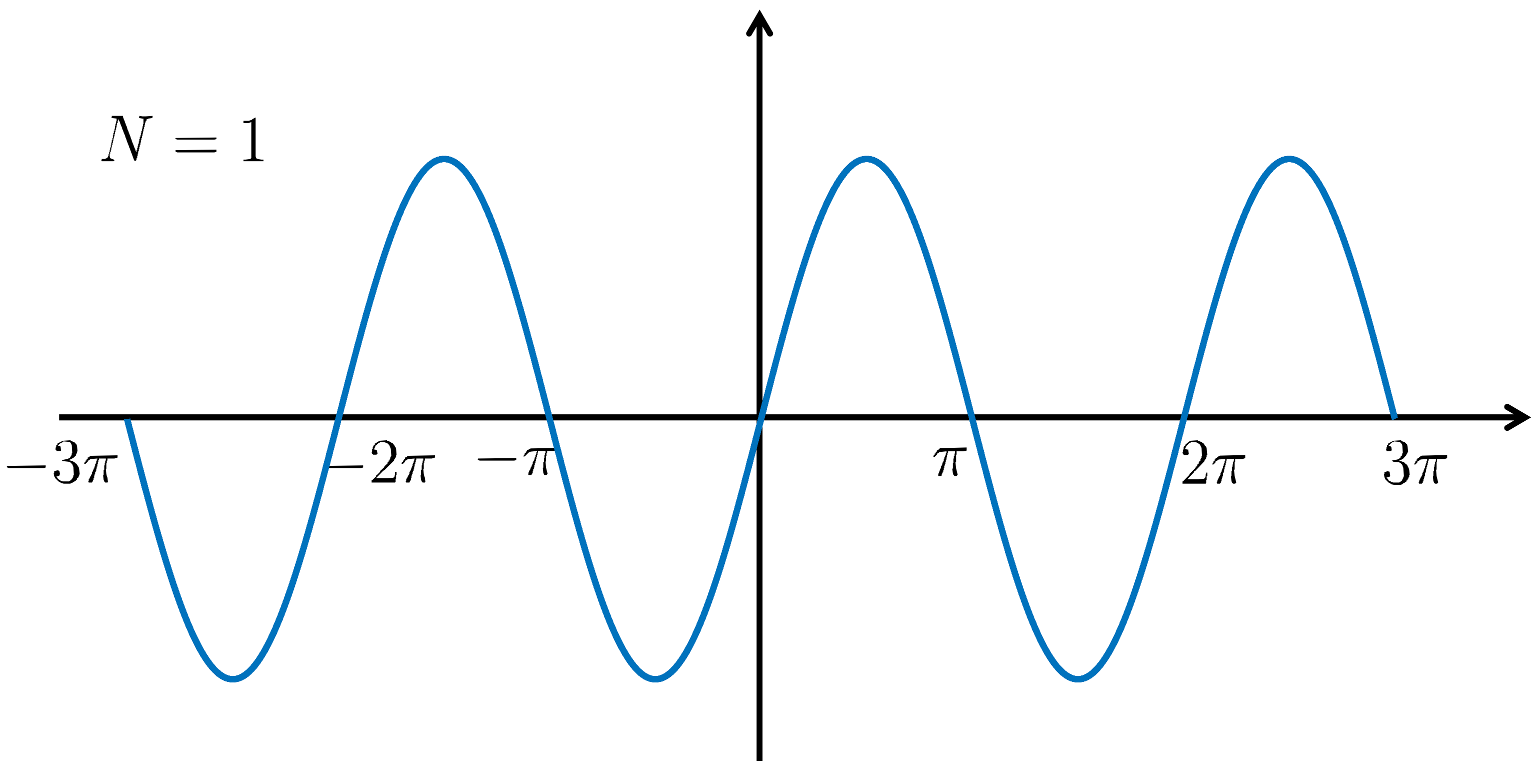
将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并作出级数的和函数的图形。



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$

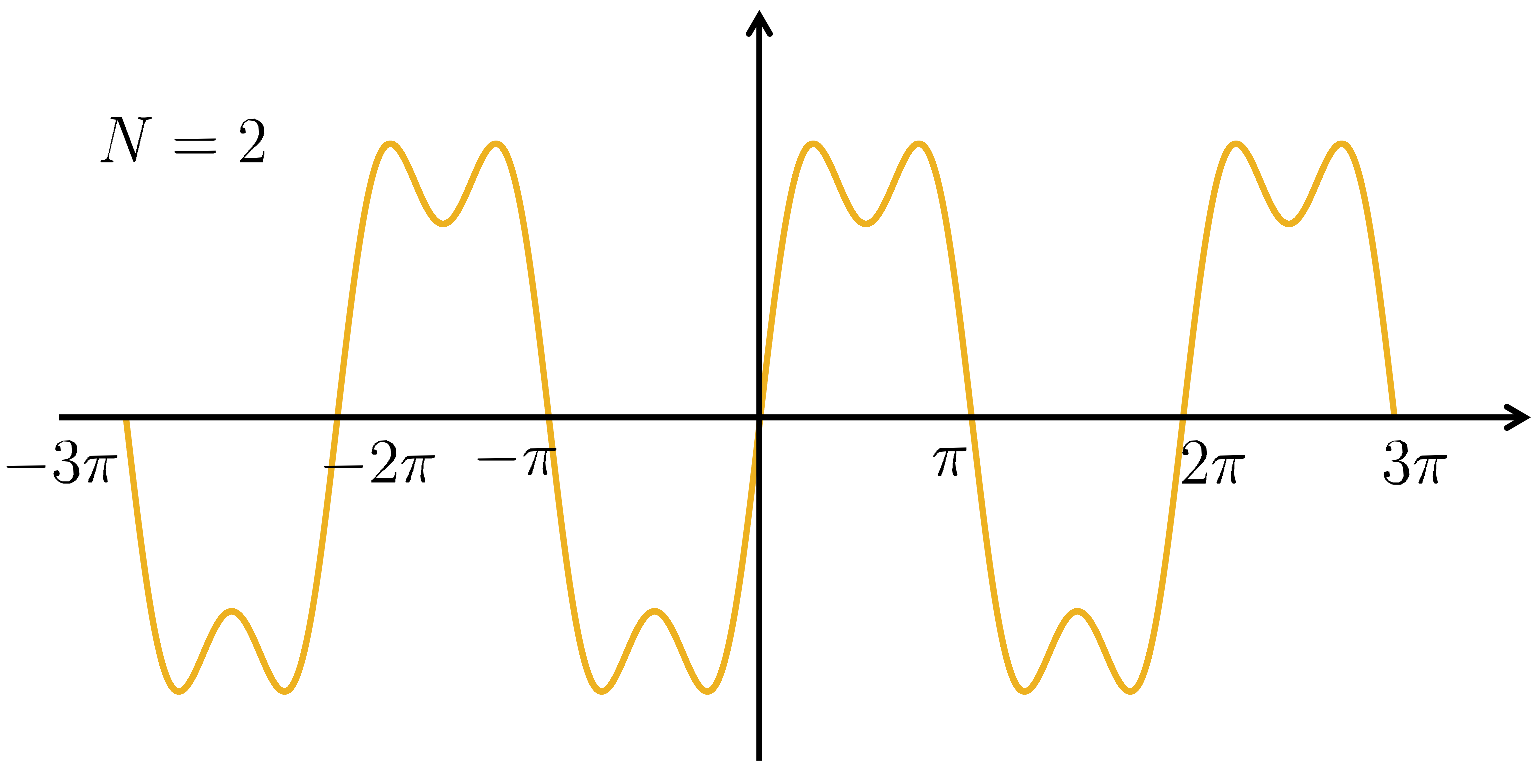
考虑级数的前 N 项和：



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$

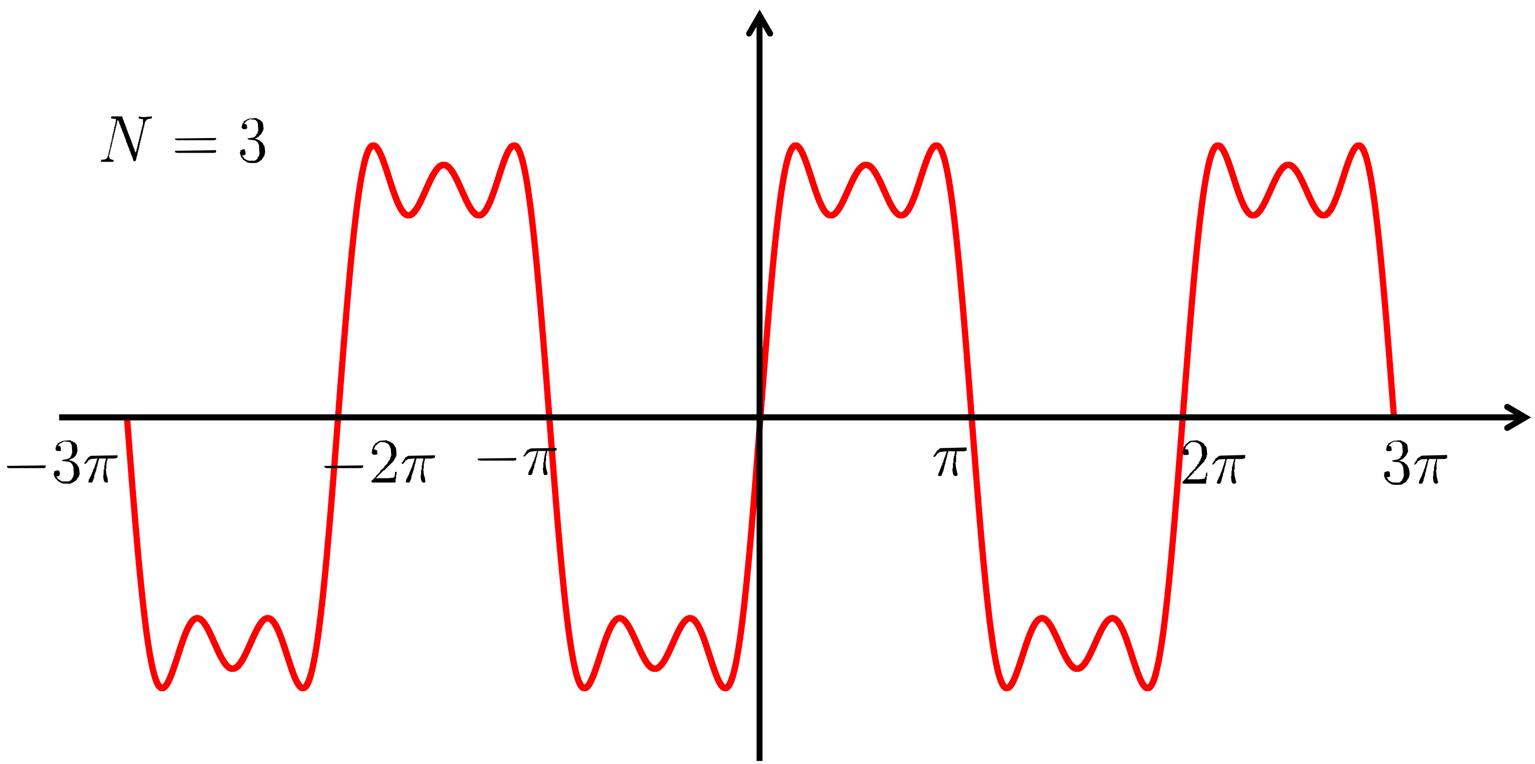
考虑级数的前 N 项和：



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$

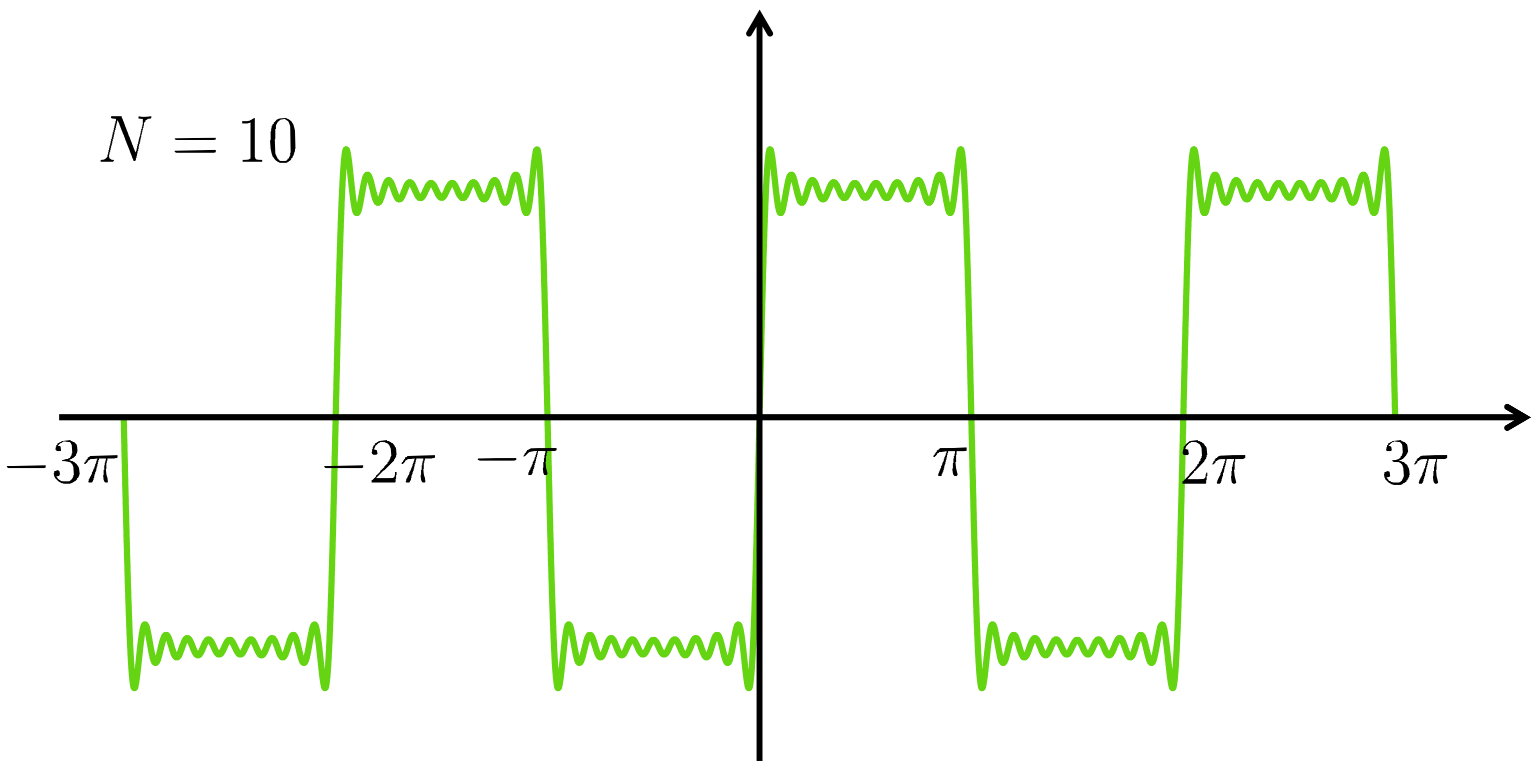
考虑级数的前 N 项和:



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$

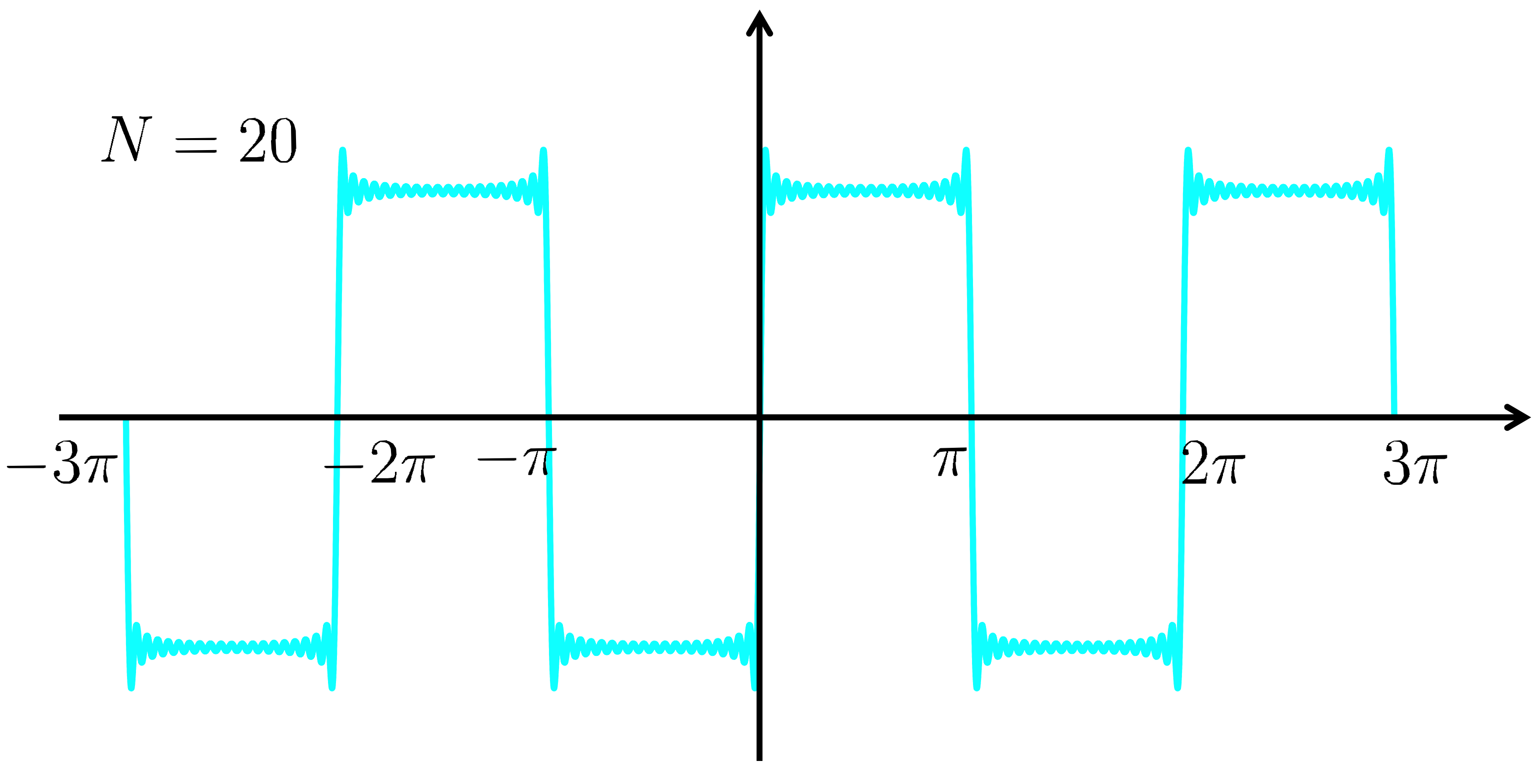
考虑级数的前 N 项和:



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$

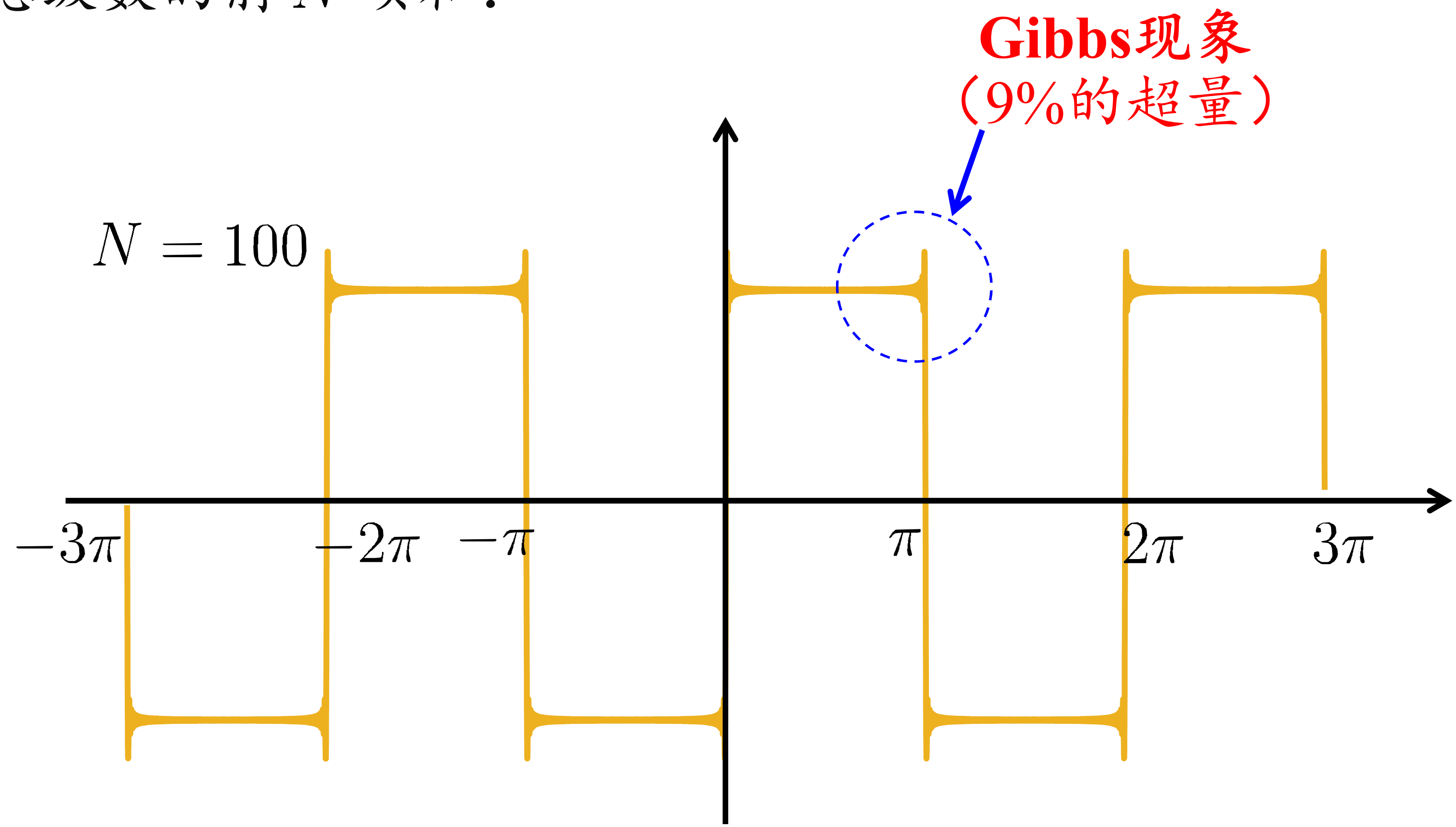
考虑级数的前 N 项和：



$f(x)$的傅里叶级数是

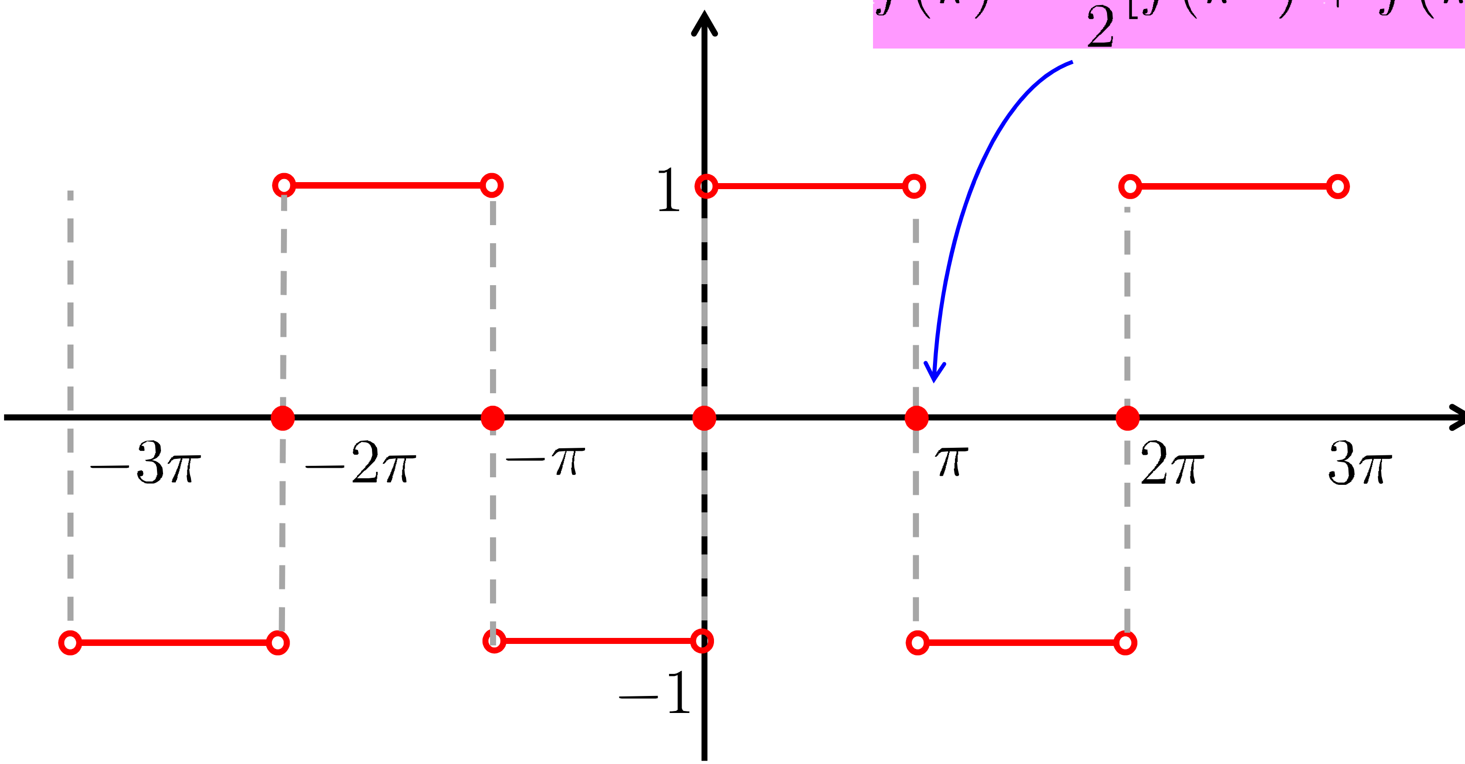
$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)x]$$

考虑级数的前 N 项和:



级数的和函数如图所示

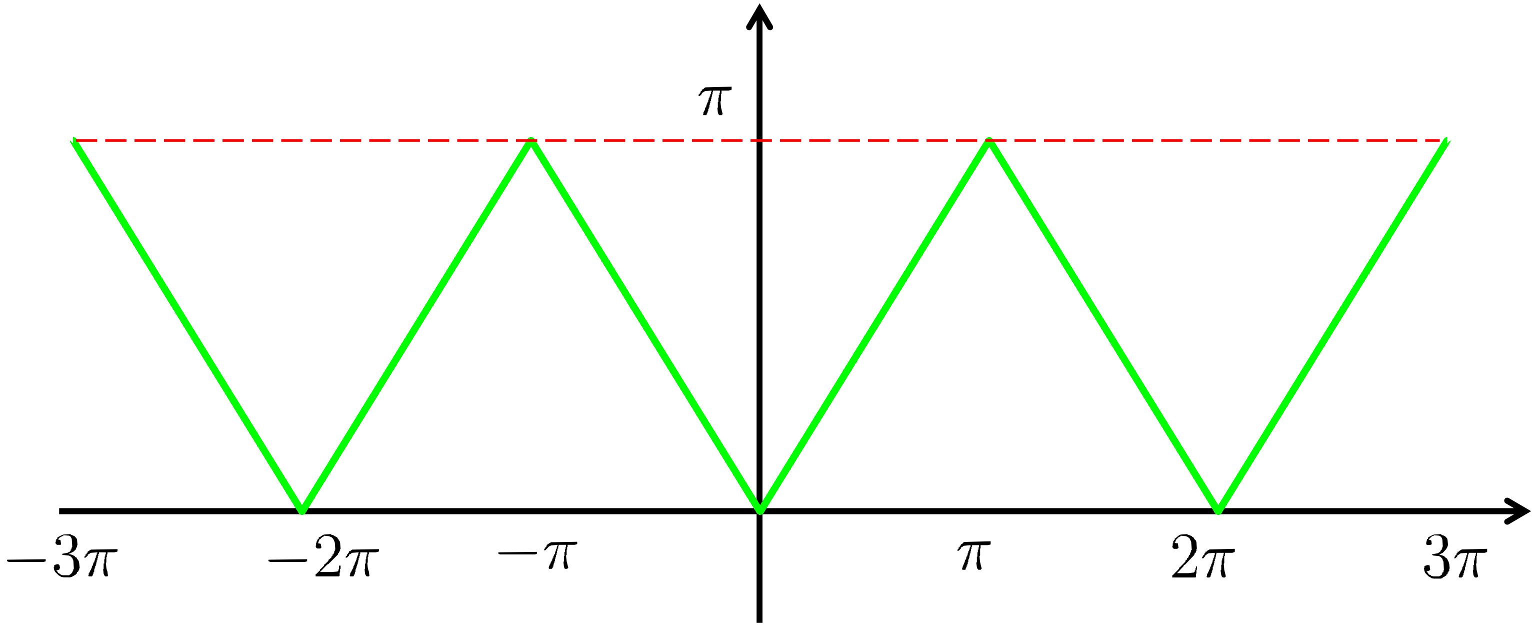
$$f(\pi)=\frac{1}{2}[f(\pi^{-})+f(\pi^{+})]$$



例2：设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=|x|$$

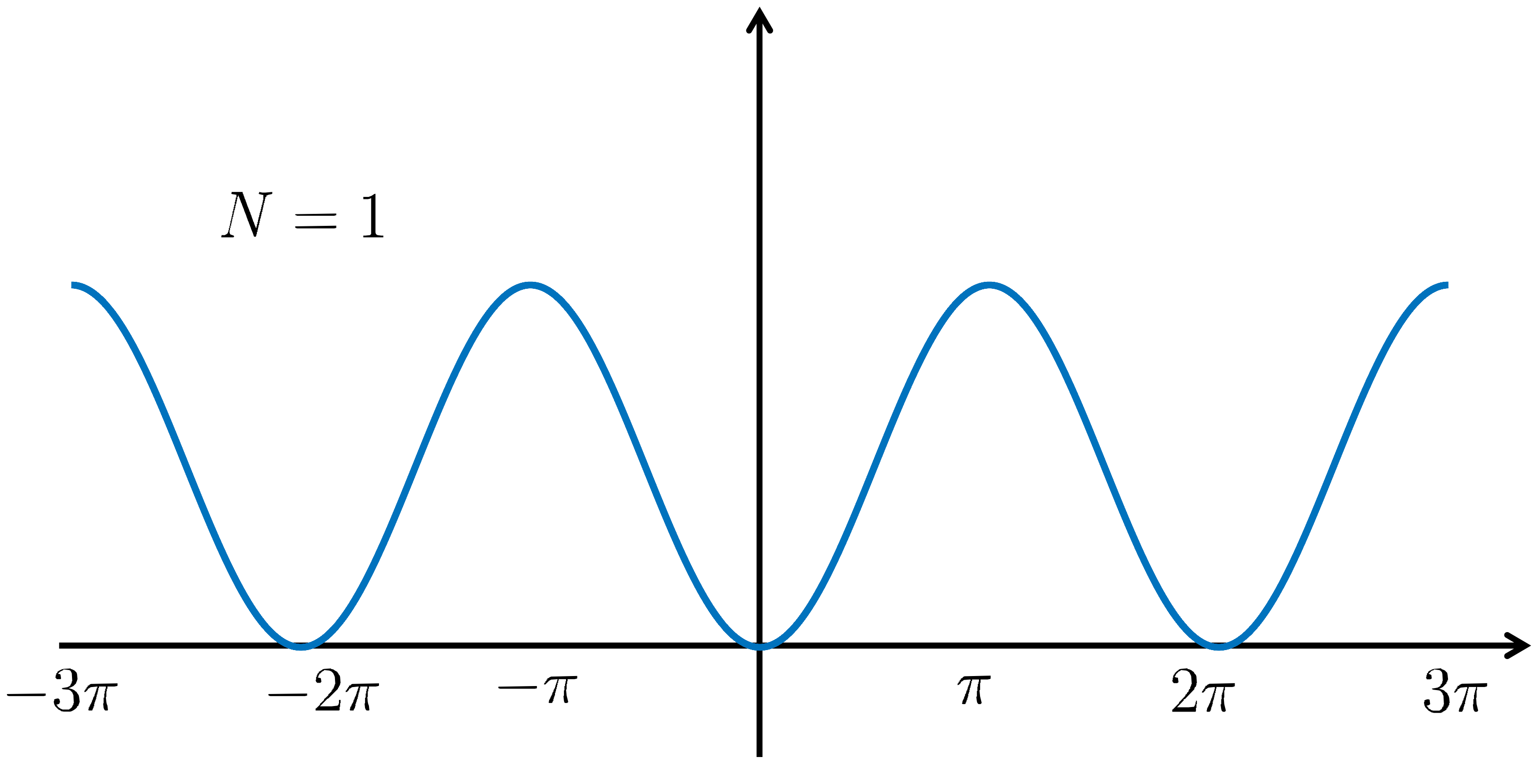
将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并作出级数的和函数的图形。



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

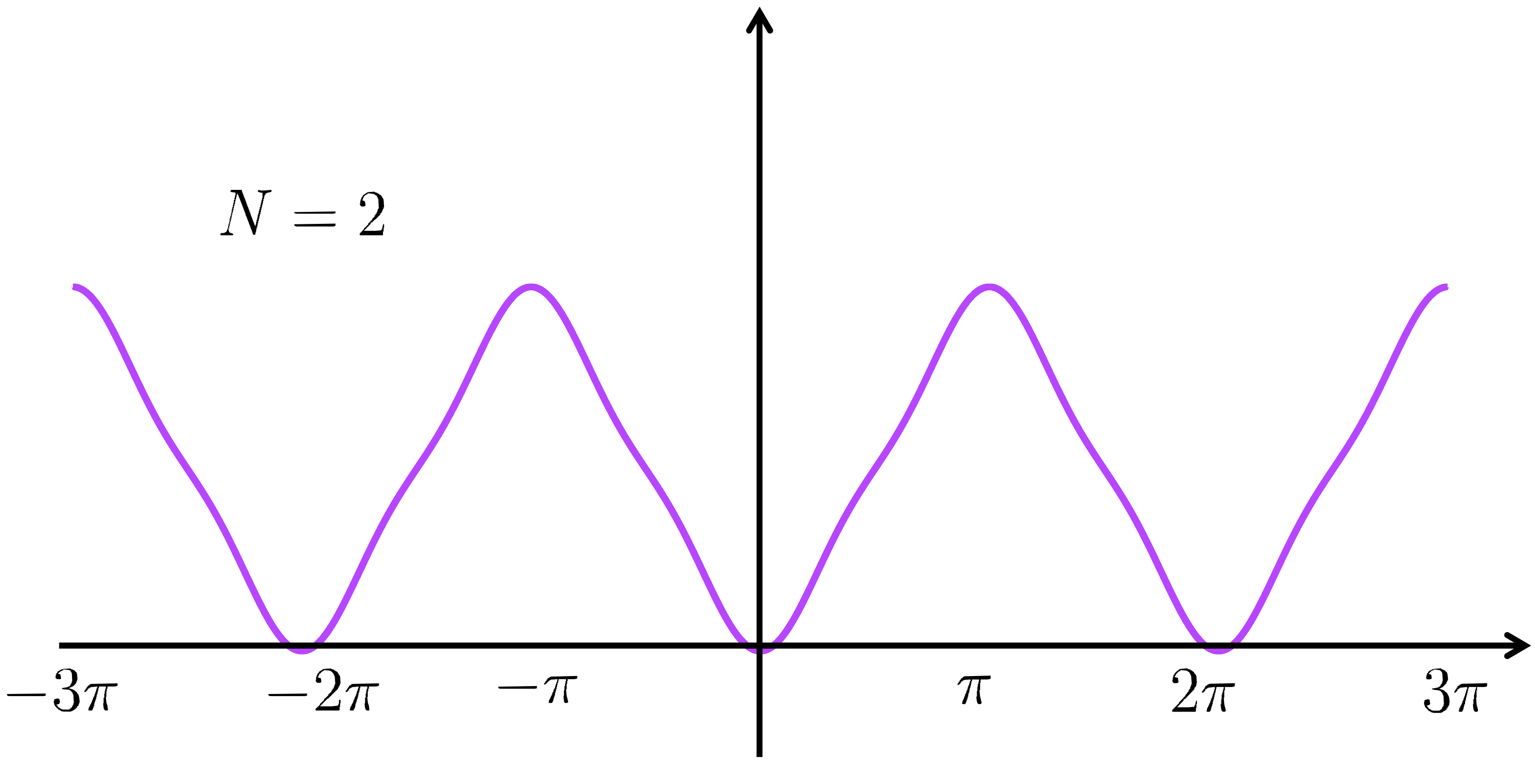
考虑级数的前 N 项和：



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

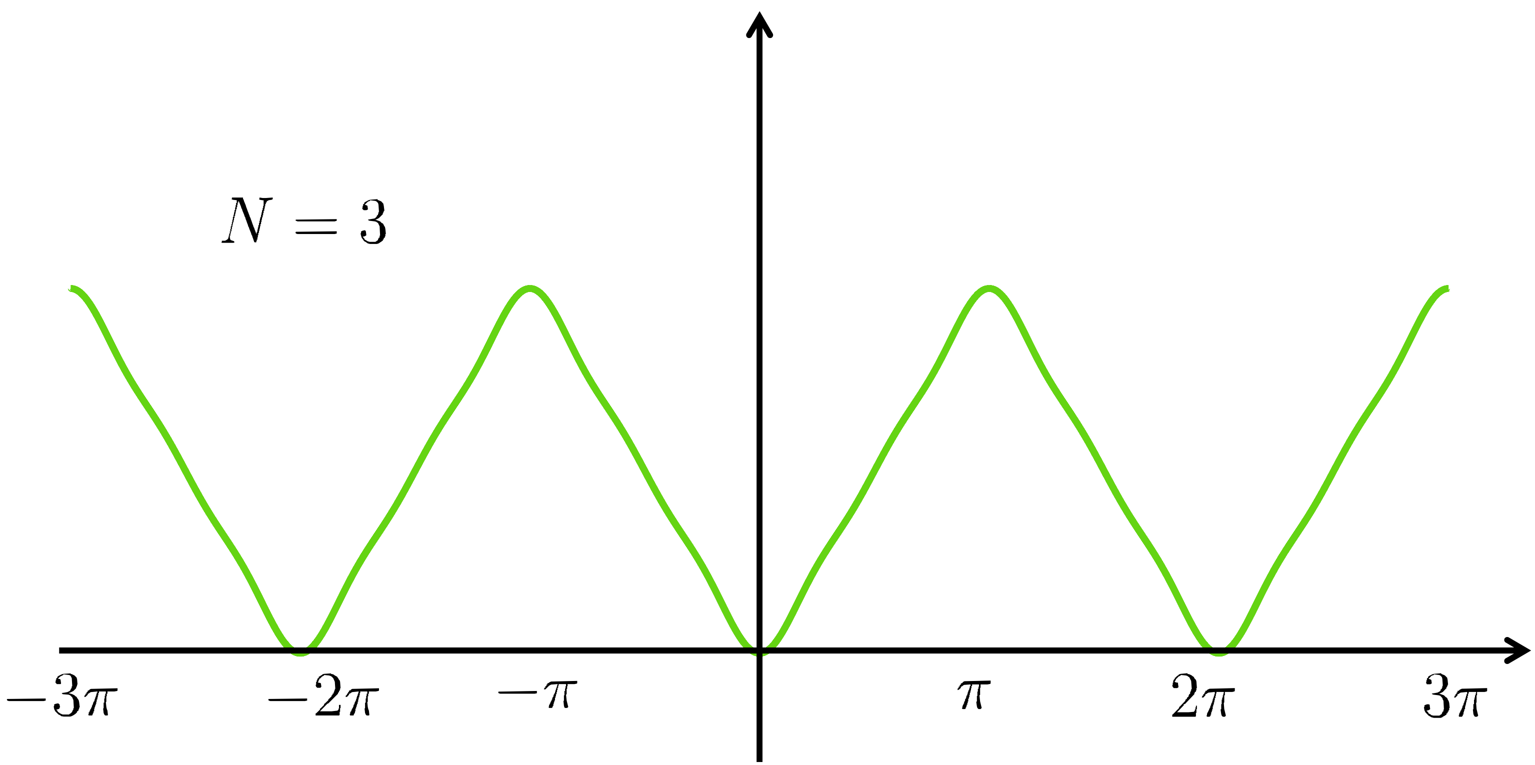
考虑级数的前 N 项和：



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

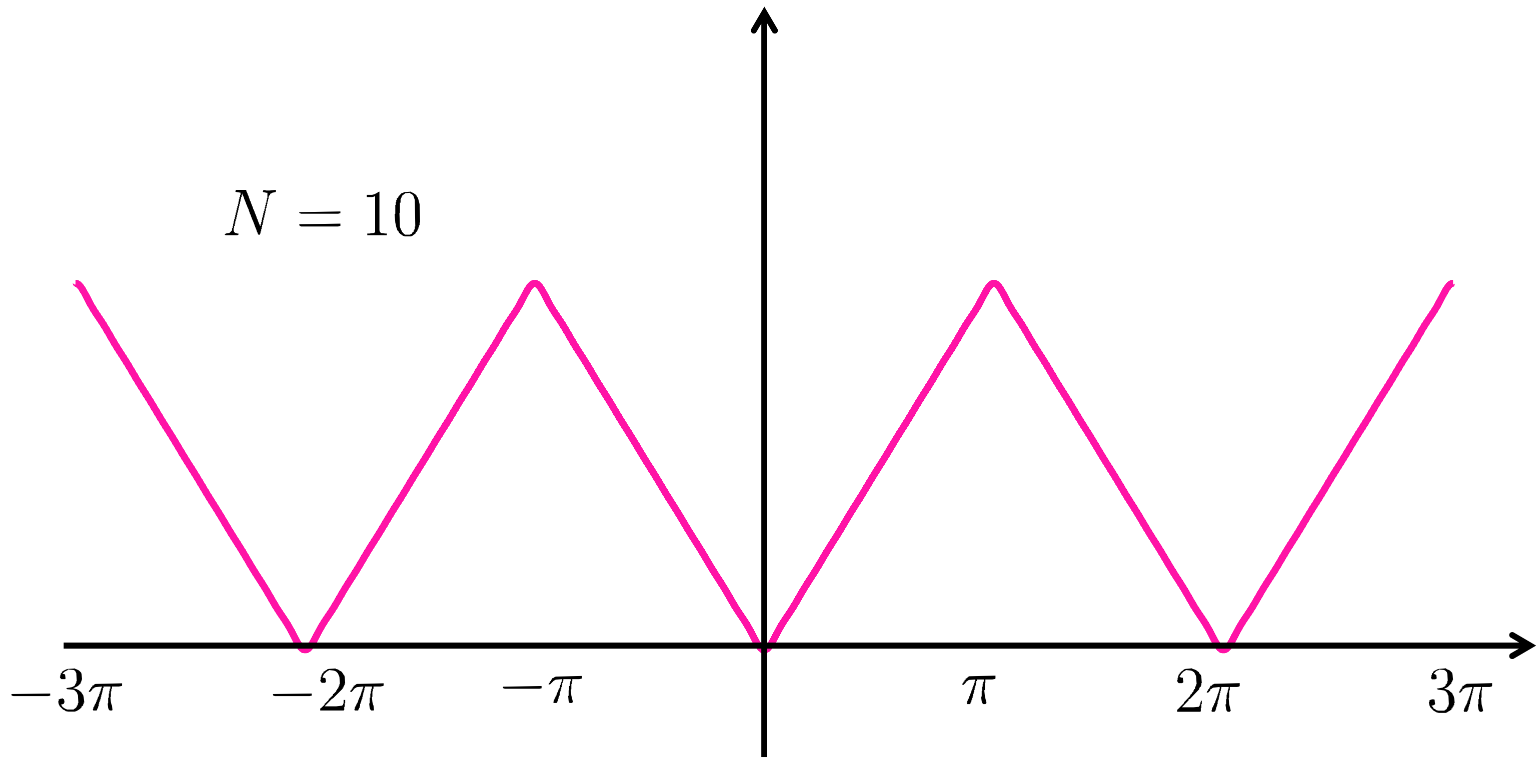
考虑级数的前 N 项和:



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

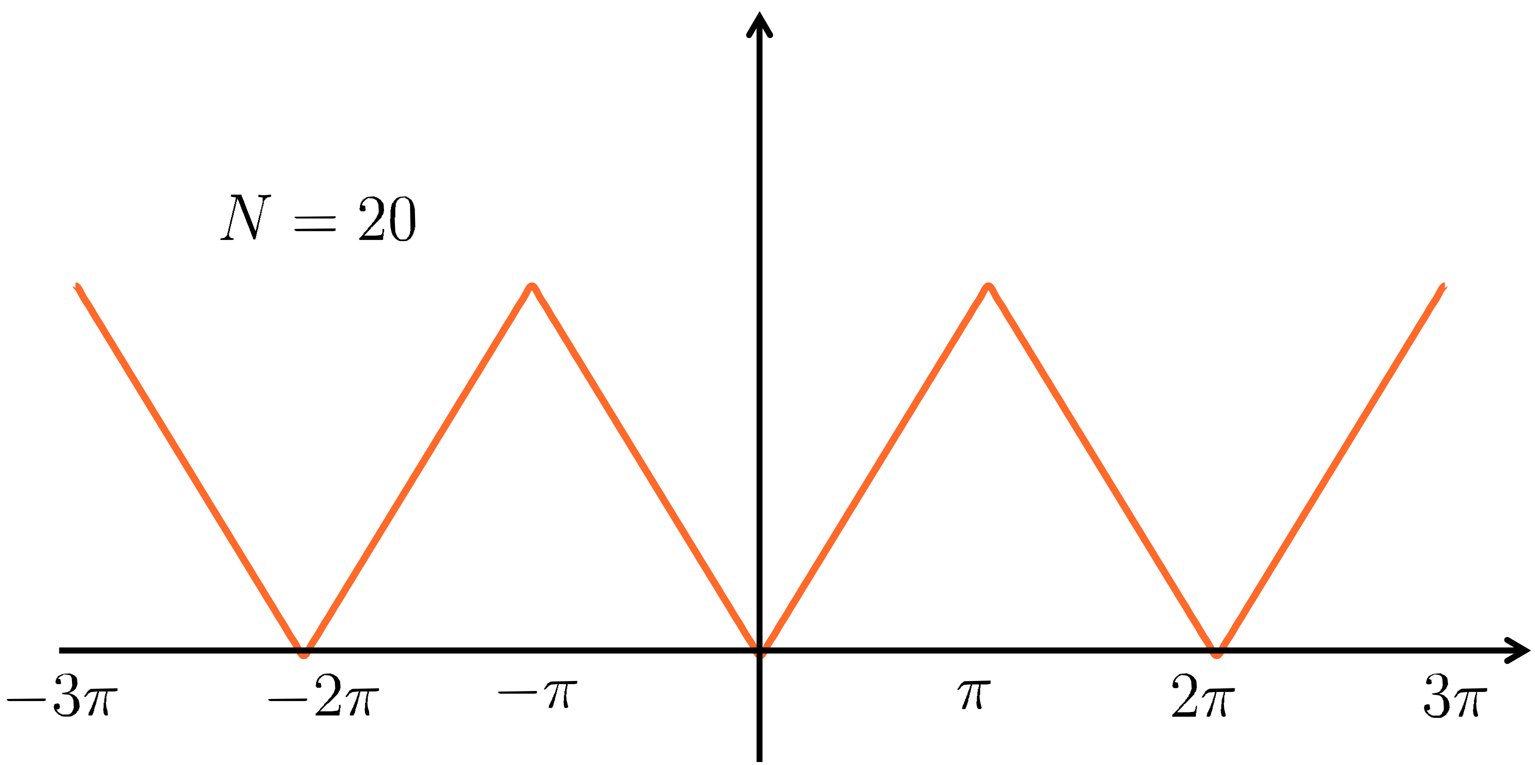
考虑级数的前 N 项和：



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

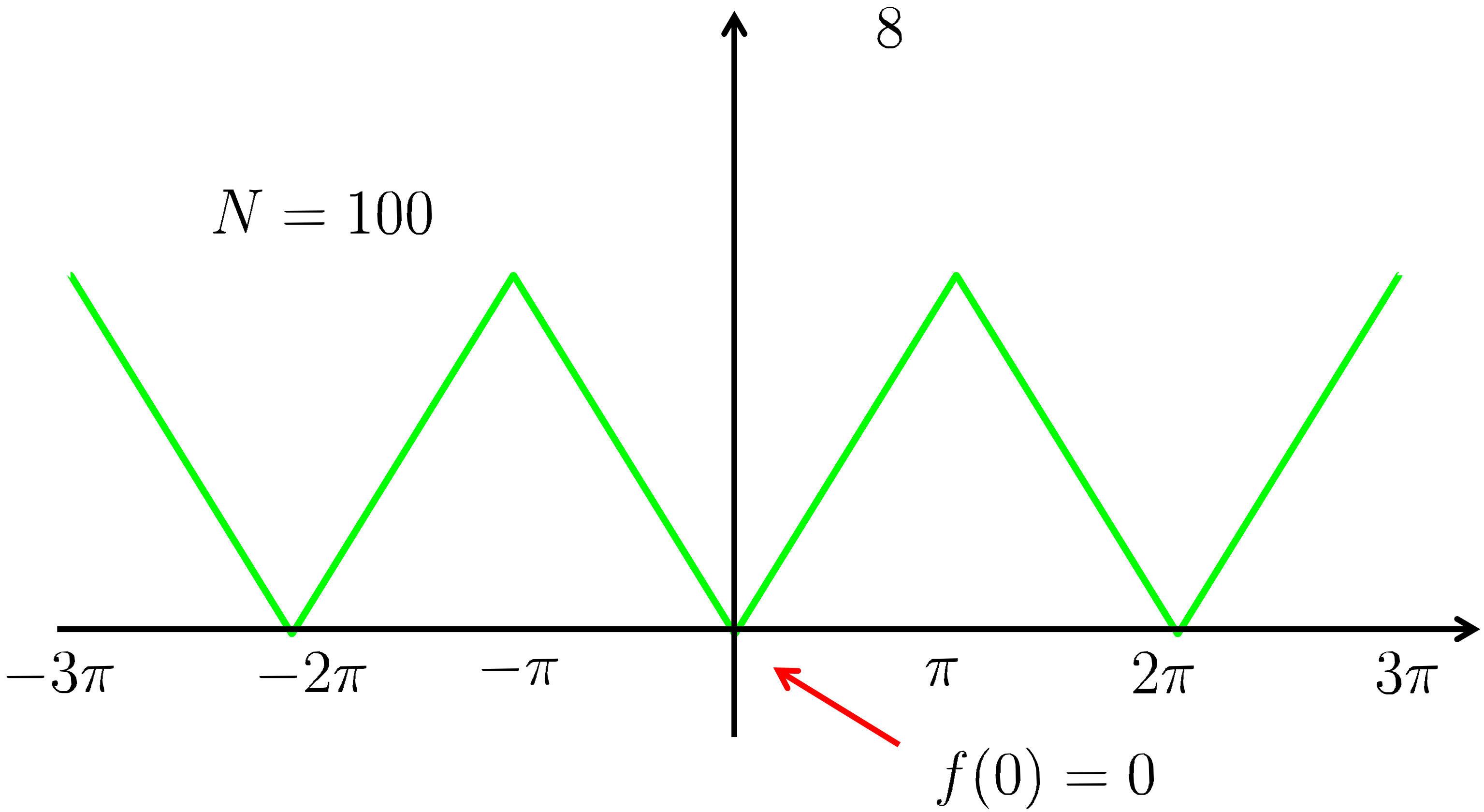
考虑级数的前 N 项和：



$f(x)$的傅里叶级数是

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}}_{\frac{\pi^2}{8}}$$

考虑级数的前 N 项和：



定理4 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

定理5 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

证：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)\\&=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

正弦级数与余弦级数

性质：设$f(x)$是周期为 2π 的周期函数

- 若 $f(x)$ 是奇函数，则傅里叶级数为正弦级数

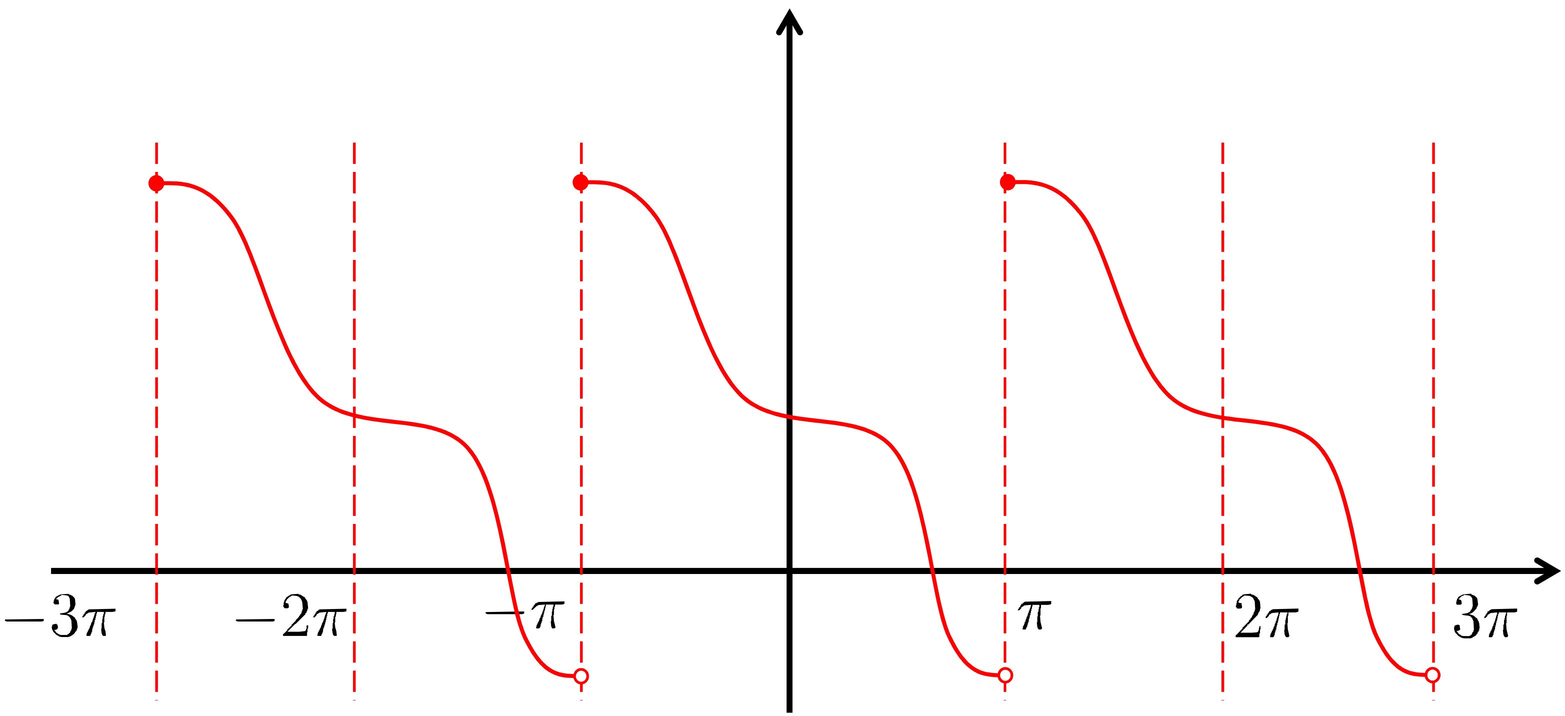
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数，则傅里叶级数为余弦级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

周期延拓

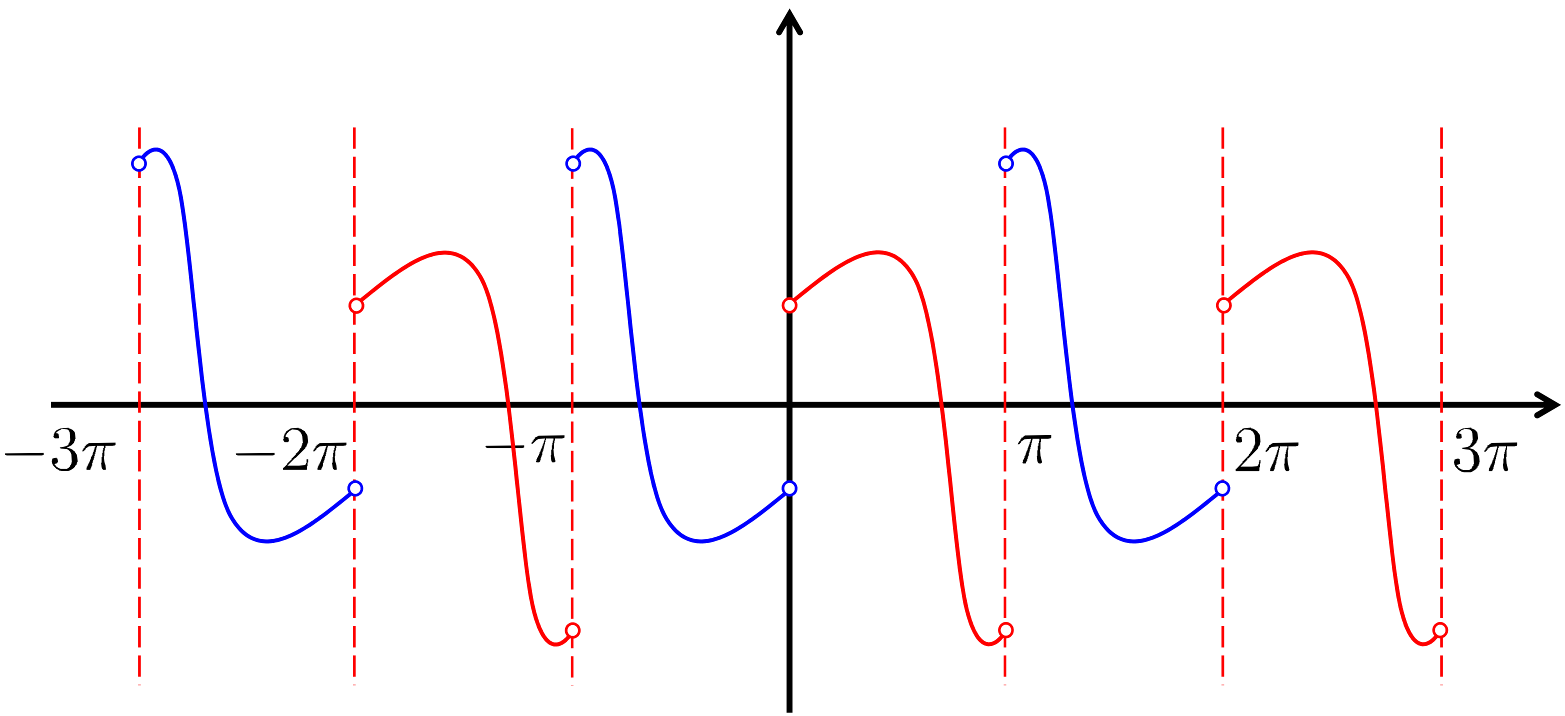
设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi,\pi)$（或 $(-\pi,\pi]$）上的函数，可以对其进行周期延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数：



延拓后的周期函数仍记为 $f(x)$，此时可作傅里叶展开。

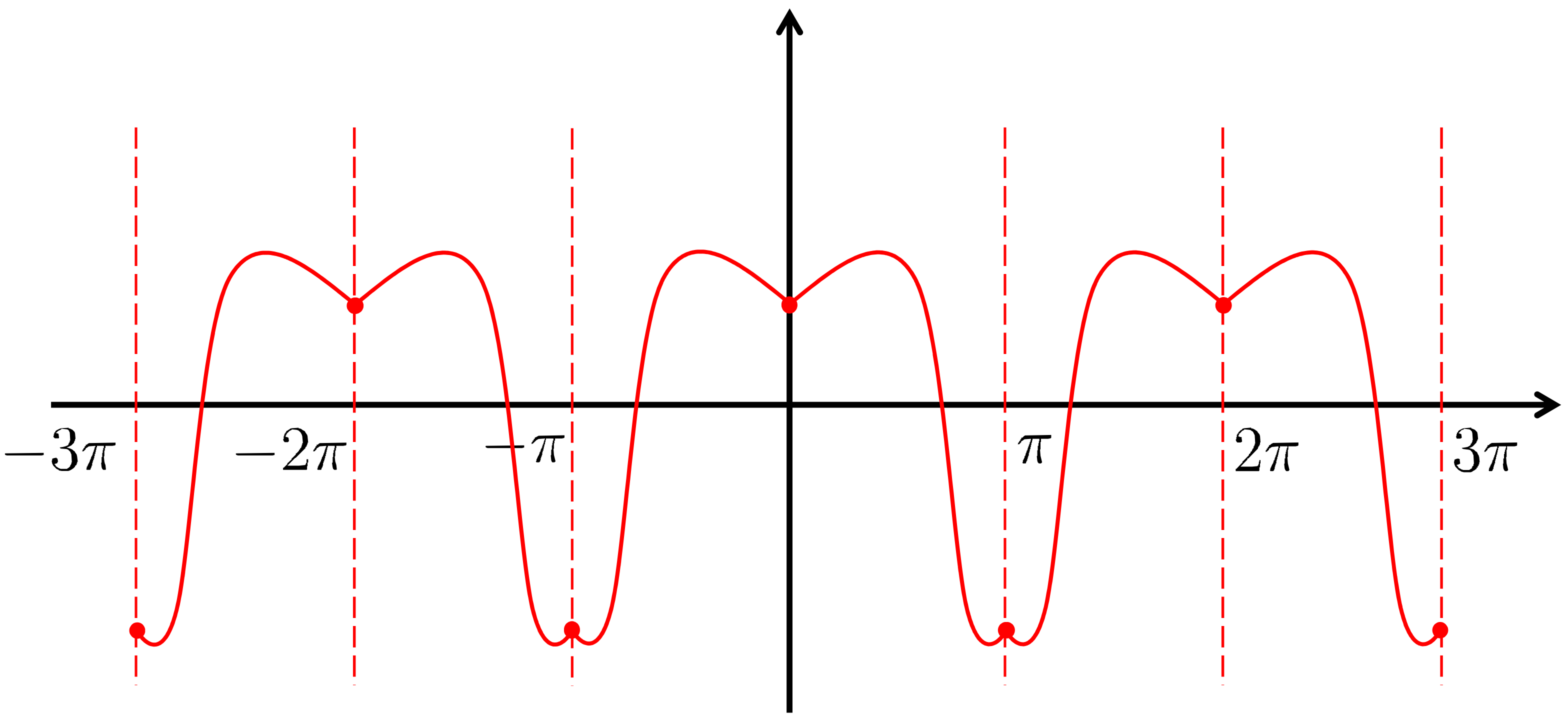
奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，再对其进行周期延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数：



偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,\pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，再对其进行周期延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期偶函数：



例3：将函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

分别展成正弦级数和余弦级数。

解：先展成正弦级数。对函数 $f(x)$ 作奇延拓，计算

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(n-1)x+\sin(n+1)x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{n-1}{2}\pi-\frac{1}{n+1}\cos\frac{n+1}{2}\pi\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi(n^2-1)}(n - \sin\frac{n\pi}{2})$$

计算

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}$$

再展成余弦级数。对函数 $f(x)$ 作偶延拓，计算

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(n-1)x + \cos(n+1)x]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-1}\sin\frac{n-1}{2}\pi + \frac{1}{n+1}\sin\frac{n+1}{2}\pi\right) \\ &= \frac{2}{\pi(n^2-1)}\sin\frac{n-1}{2}\pi = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \\ \frac{2(-1)^{k-1}}{\pi(4k^2-1)} & n = 2k \end{cases}\end{aligned}$$

计算

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\left[\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}(n-\sin\frac{n\pi}{2})\sin nx\right]\quad(0<x\leqslant\pi)$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos 2kx\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$$

作业

P306： 第 1 题（3）

第 2 题（2）

第 3 题

第 5 题

第 7 题

12.8 一般周期信号的傅里叶级数

定义1：设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，且能展开成三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x)$$

其中 $\omega = 2\pi/\mathrm{T}$

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}} f(x)\cos(n\omega_0 x)\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}} f(x)\sin(n\omega_0 x)\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$\{a_n, b_n\}$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数，称

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x)$$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数。

定义2：设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的函数，且能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\frac{n\pi x}{l}x+b_n\sin n\frac{n\pi x}{l}x)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$\{a_n,b_n\}$ 为$f(x)$的傅里叶系数，称

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0x+b_n\sin n\omega_0x)$$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数。

例1：设$f(x)$是周期为 4 的周期函数，它在$[-2,2)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\leqslant x<0\\ h & 0\leqslant x<2\end{cases}$$

将$f(x)$展开成傅里叶级数。

证：$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 h\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left[\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=0\quad(n\neq 0)$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 h\mathrm{d}x=h$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 h\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{h}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{h}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{2h}{n\pi} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

代入傅里叶级数公式中，可得

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2} + \cdots\right)$$

$$(-\infty < x < \infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4)$$

周期函数傅里叶级数的复数形式

设 $f(x)$ 是周期为 T 角频率 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$ 的函数，其三角级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x)$$

利用欧拉公式 $\cos x = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}$，$\sin x = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{\mathrm{i}n\omega_0 x} + e^{-\mathrm{i}n\omega_0 x}) - \frac{b_n \mathrm{i}}{2}(e^{\mathrm{i}n\omega_0 x} - e^{-\mathrm{i}n\omega_0 x})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} e^{\mathrm{i}n\omega_0 x} + \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} e^{-\mathrm{i}n\omega_0 x} \right)$$

定义 $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$，$c_n = \dfrac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}$，$c_{-n} = \dfrac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}$ $\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\boxed{f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{\mathrm{i}n\omega_0 x} + c_{-n} e^{-\mathrm{i}n\omega_0 x}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{i}n\omega_0 x}}$$

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} f(x) \cos(n\omega_0 x) \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} f(x) \sin(n\omega_0 x) \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{i} b_n}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} (f(x) \cos(n\omega_0 x) - \mathrm{i} f(x) \sin(n\omega_0 x)) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} f(x) [\cos(n\omega_0 x) - \mathrm{i} \sin(n\omega_0 x)] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} f(x) e^{-\mathrm{i} n\omega_0 x} \mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

同理 $c_{-n} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} f(x) e^{\mathrm{i} n\omega_0 x} \mathrm{d}x$ 。 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

故 $c_n = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} f(x) e^{-\mathrm{i} n\omega_0 x} \mathrm{d}x, \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

定义3： 设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，其傅里叶级数为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{\mathrm{T}}x}$$

其中 $\{c_n\}$ 为傅里叶系数

$$c_n = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}} f(x) e^{-\mathrm{i}n\omega_0 x} \mathrm{d}x$$

作业

P312：第 1 题（1）（3）

第 2 题（2）