第2章 命题逻辑与等值演算

2-1 等值式

2-2 析取范式与合取范式

2-3 联结词的完备集

析取范式与合取范式

1. 简单合取式与简单析取式
2. 范式
3. 范式的唯一性-主范式
4. 几个注意

简单合取式与简单析取式

引言：求如下方程的根

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

解：由因式分解有$(x-1)(x+2)=0$，因而$x=1, x=-2$为方程两根。通过对函数进行分解，函数表示成两个简单式的乘积。

因式分解：将一个多项式分解成多个简单项的乘积形式。

简单合取式与简单析取式

引言：求如下方程的根

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

解： 由因式分解有$(x-1)(x+2)=0$，因而$x=1, x=-2$ 为方程两根。通过对函数进行分解，函数表示成两个简单式的乘积。

因式分解：将一个多项式分解成多个简单项的乘积形式。

定义2.2 命题变项及其否定统称为**文字**。

仅由有限个文字构成的析取式称作**简单析取式**；

仅由有限个文字构成的合取式称作**简单合取式**。

简单合取式与简单析取式

如： $p, \neg p$ 为一个简单文字构成的析取式。

$p \vee \neg p, \neg p \vee q$ 为两个简单文字构成的析取式。

$p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee \neg r$ 为三个简单文字构成的析取式。

注：文字既是简单析取式又是简单合取式。

简单合取式与简单析取式

如： $p, \neg p$ 为一个简单文字构成的析取式。

$p \vee \neg p, \neg p \vee q$ 为两个简单文字构成的析取式。

$p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee \neg r$ 为三个简单文字构成的析取式。

注：文字既是简单析取式又是简单合取式。

用 A_i 表示含有 n 个文字的简单析取式，若 A_i 中既包含某个命题变项 p_j，又包含其否定式 $\neg p_j$，则 A_i 为重言式。

用 A_i 表示含有 n 个文字的简单合取式，若 A_i 中既包含某个命题变项 p_j，又包含其否定式 $\neg p_j$，则 A_i 为矛盾式。

范式

定义2.3

（1）由有限个简单合取式构成的析取式称为**析取范式**.

（2）由有限个简单析取式构成的合取式称为**合取范式**.

（3）析取范式与合取范式统称为**范式**.

设 $A_i\ (i=1,\cdots,s)$为简单合取式，则$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_s$为**析取范式**。

设 $A_i\ (i=1,\cdots,s)$为简单析取式，则$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_s$为**合取范式**。析取范式和合取范式统称为**范式**。

例： (1) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p$

(2) $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$

范式的性质

定理2.2

1. 一个析取范式是矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。
2. 一个合取范式是重言式，当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

定理2.3 （范式存在定理）

任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

思考：

- 只包含合取、析取、否运算的公式存在一个等值的范式。
- 一个范式经过与简单合取式或简单析取式的合取、析取、否运算，仍为范式。

定理2.3 （范式存在定理）

任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

思考：

- 只包含合取、析取、否运算的公式存在一个等值的范式。
- 一个范式经过与简单合取式或简单析取式的合取、析取、否运算，仍为范式。

证：由蕴涵等值式与等价等值式可知

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

因此在等值的条件下，可以消除所有公式中的蕴涵连接词和等价连接词。

求范式的步骤

（1）消去蕴涵连接词和等价连接词$\rightarrow, \leftrightarrow$

（2）否定连接词的消去（双重否定律）或内移（德摩根律）

（3）利用分配律：

求析取范式时，使用 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

求合取范式时，使用 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

求范式的步骤

（1）消去蕴涵连接词和等价连接词$\rightarrow, \leftrightarrow$

（2）否定连接词的消去（双重否定律）或内移（德摩根律）

（3）利用分配律：

求析取范式时，使用 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

求合取范式时，使用 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

注意：

为了清晰和无误，演算中利用交换律，使得每个简单析取式或合取式中命题变项的出现都是按字典顺序，这对下文中求主范式更为重要.

例2.7 求下面公式的析取范式与合取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r$$

例2.7 求下面公式的析取范式与合取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r$$

解： 先求合取范式

$$
\begin{aligned}
& (p \to q) \leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p \vee q) \to r) \wedge (r \to (\neg p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \\
\Leftrightarrow\ & ((p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)
\end{aligned}
$$

再求析取范式

$$
\begin{aligned}
& (p \to q) \leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p \vee q) \to r) \wedge (r \to (\neg p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee q)) \\
\Leftrightarrow\ & ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
& \vee (r \wedge \neg p) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge \neg r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)
\end{aligned}
$$

例： 求下列公式的析取范式和合取范式

$$(1)\quad (p \to \neg q) \vee \neg r$$

$$(2)\quad (p \to \neg q) \to r$$

例： 求下列公式的析取范式和合取范式

(1) $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

(2) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$

解： (1) $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

(2) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \rightarrow r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

范式的唯一性：主范式

$$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$
$$\Leftrightarrow (p \vee r \vee r) \wedge (q \vee q \vee r)$$

一般地，命题公式的合取范式不是唯一的。命题公式的析取范式也不是唯一的。为了将命题公式的范式唯一化，进一步将简单合取式和简单析取式规范化，即主范式。

定义2.4 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下标从小到大或按照字典顺序排列，称这样的**简单合取式**（**简单析取式**）为**极小项**（**极大项**）.

例： 给定变项 p, q, r

$p \wedge q \wedge r,\ \neg p \wedge q \wedge r,\ \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 是极小项

$\neg p \wedge r, p \wedge p \wedge q \wedge r$ 不是极小项

- 由于每个命题变项在极小项中以原形或否定式形式出现且仅出现一次，因而 n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极小项.
- 每个极小项都有且仅有一个成真赋值.

若成真赋值所对应的二进制数转换为十进制数 i，就将所对应极小项记作 m_i .

类似地，n 个命题变项共可产生 2^n 个极大项，每个极大项只有一个成假赋值，将其对应的十进制数 i 做极大项的角标，记作 M_i .

表2.3 含 p, q 的极小项和极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

表2.4 含 p, q, r 的极小项和极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

极小项和极大项关系

定理2.4 设 m_i 和 M_i 是相同命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 形成的极小项和极大项，则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i \qquad m_i \Leftrightarrow \neg M_i$$

主范式

定义2.5：　设由 n 个命题变项构成的析取范式（合取范式）中所有的简单合取式（简单析取式）都是极小项（极大项），则称该析取范式（合取范式）为主析取范式（主合取范式）.

主范式的存在性和唯一性

定理2.5：任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的.

主范式

定义2.5：设由 n 个命题变项构成的析取范式（合取范式）中所有的简单合取式（简单析取式）都是极小项（极大项），则称该析取范式（合取范式）为主析取范式（主合取范式）.

主范式的存在性和唯一性

定理2.5：任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的.

证：这里只证主析取范式的存在性和唯一性。

先证**存在性**。设 A 是任意含有 n 个命题变项的公式。由定理2.3可知，存在与 A 等值的析取范式 A'，即$A \Leftrightarrow A'$。若 A' 的某个简单合取式 A_i 既不含命题变项 p_i 也不含它的否定式，则可将 A_i 展开成如下等值形式。

$$A_i \Leftrightarrow A_i \wedge 1 \Leftrightarrow A_i \wedge (p_i \vee \neg p_i) \leftrightarrow (A_i \wedge p_i) \vee (A_i \wedge \neg p_i)$$

继续下去，直到所有的简单合取式都含任意命题变项或它的否定式.

若在演算过程中出现重复出现的命题变项以及极小项和矛盾式时，都应“消去”。例如：用 p 代替 $p \wedge p$ ，用 m_i 代替 $m_i \vee m_i$，用0代替矛盾式等。最后就将A化成与之等值的主析取范式A"。

再证**唯一性**。假设命题公式 A 等值于两个不同的主析取范式 B 和 C ，那么必有 $B \Leftrightarrow C$。由于 B 和 C 是不同的主析取范式，不妨设极小项 m_i 只出现在 B 中而不出现在 C 中。于是，角标 i 的二进制表示为 B 的成真赋值，C 的成假赋值，这与 $B \Leftrightarrow C$ 矛盾，因而 B 和 C 必相同。

主合取范式的存在唯一性可类似证明.

在证明定理2.5的过程中，已经给出了求主析取范式的步骤. 为了醒目和便于记忆，求出某公式的主析取范式（主合取范式）后，将极小项（极大项）都用名称写出，并且按极小项（极大项）名称的角标由小到大顺序排列.

例2.8 求下面公式的主析取范式与主合取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r$$

例2.7中计算得到该公式的析取范式和合取范式分别为

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

例2.8 求下面公式的主析取范式与主合取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r$$

解：先求主析取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r)$$

上述析取范式中简单合取式 $\neg p \land r$ 和 $q \land r$不是极小项，需要将其转化为极项。

$$\begin{aligned}(\neg p \land r) &\Leftrightarrow \neg p \land (\neg q \lor q) \land r \\ &\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land r) \\ &\Leftrightarrow m_1 \lor m_3\end{aligned}$$

例2.8 求下面公式的主析取范式与主合取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r$$

解： 先求主析取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

上述析取范式中简单合取式 $\neg p \wedge r$ 和 $q \wedge r$不是极小项，需要将其转化为极项。

$$\begin{aligned} q \wedge r &\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge q \wedge r \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\ &\Leftrightarrow m_3 \vee m_7 \end{aligned}$$

因而

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$$

再求主合取范式

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

该合取范式中简单析取式 $p \vee r$和 $\neg q \vee r$不是极大项，需要将其转化为极大项。

$$\begin{aligned} p \vee r &\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \\ &\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg q \vee r &\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r \\ &\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \\ &\Leftrightarrow M_2 \wedge M_6 \end{aligned}$$

因而

$$(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6$$

例2.9 求命题公式 $p \rightarrow q$ 的主析取范式与主合取范式

例2.9 求命题公式 $p \to q$ 的主析取范式与主合取范式

解： 本公式中含有两个命题变项，所以极小项和极大项均含有两个文字

先求主合取范式

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$
$$\Leftrightarrow M_2$$

例2.9 求命题公式 $p \rightarrow q$ 的主析取范式与主合取范式

解： 本公式中含有两个命题变项，所以极小项和极大项均含有两个文字

再求主析取范式

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg p \vee q \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \end{aligned}$$

注意： 由例2.8与2.9可知，在求给定公式的主析取范式（主合取范式）时，一定根据公式中命题变项的个数决定极小项（极大项）中文字的个数.

例：求公式 $A=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式

解：

$$
\begin{aligned}
(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r &\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\rightarrow r\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r\\
&\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r
\end{aligned}
$$

先求主析取范式

$$
\begin{aligned}
(p\wedge q) &\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)\\
&\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\\
&\Leftrightarrow m_6\vee m_7\\
r &\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r\\
&\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\\
&\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7
\end{aligned}
$$

综上有 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

例：求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式和主合取范式

再求主合取范式

$$\begin{aligned}(p\to\neg q)\to r &\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r\\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r\\ &\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r\\ &\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&(p\vee r)\\ \Leftrightarrow\ & p\vee(q\wedge\neg q)\vee r\\ \Leftrightarrow\ & (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\\ \Leftrightarrow\ & M_0\wedge M_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&q\vee r\\ \Leftrightarrow\ & (p\wedge\neg q)\vee q\vee r\\ \Leftrightarrow\ & (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\\ \Leftrightarrow\ & M_0\wedge M_4\end{aligned}$$

综合可得

$$(p\to\neg q)\to r\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$$

例：求公式 $A=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式

再求主合取范式

$$\begin{aligned}(p\longrightarrow\neg q)\longrightarrow r &\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\longrightarrow r\\ &\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r\\ &\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee r\\ &\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&(p\vee r)\\ \Leftrightarrow&p\vee(q\wedge\neg q)\vee r\\ \Leftrightarrow&(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\\ \Leftrightarrow&M_0\wedge M_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&q\vee r\\ \Leftrightarrow&(p\wedge\neg q)\vee q\vee r\\ \Leftrightarrow&(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\\ \Leftrightarrow&M_0\wedge M_4\end{aligned}$$

综合可得

$$(p\longrightarrow\neg q)\longrightarrow r\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$$

求公式的主析取范式的步骤:

设公式A 含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$

(1) 求A 的析取范式$A' = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_s$, 其中 B_j是简单合取式 $j = 1, \cdots, s$.

(2) 若某个 B_j 既不含p_i, 又不含 $\neg p_i$, 则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为 n 的极小项为止.

(3) 消去重复出现的极小项, 即使用等值式$m_i \vee m_i \Leftrightarrow m_i$.

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A 含命题变项 $p_1, p_2, \cdots, p_n$

(1) 求A 的合取范式$A' = B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_s$，其中 B_j是简单析取式 $j = 1, \cdots, s$.

(2) 若某个 B_j 既不含p_i，又不含 $\neg p_i$，则将 B_j 展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \vee p_i) \wedge (B_j \vee \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为 n 的极小项为止.

(3) 消去重复出现的极大项, 即使用等值式$M_i \wedge M_i \Leftrightarrow M_i$.

(4) 将极大项按下标从小到大排列

主范式的应用

(1) 求公式的成真和成假赋值

成真赋值： 主析取范式的极小项的下标对应的二进制表示的值；

成假赋值： 主析取范式的极大项的下标对应的二进制表示的值。

若公式A 中含 n 个命题变项，A的主析取范式含 s 个极小项，则 A 有 s 个成真赋值，它们是所含极小项角标的二进制表示；其余 $2^n - s$ 个赋值都是成假赋值。

主范式的应用

(1) 求公式的成真和成假赋值

成真赋值： 主析取范式的极小项的下标对应的二进制表示的值；
成假赋值： 主析取范式的极大项的下标对应的二进制表示的值。

若公式A 中含 n 个命题变项，A的主析取范式含 s 个极小项，则 A 有 s 个成真赋值，它们是所含极小项角标的二进制表示；其余 $2^n - s$ 个赋值都是成假赋值。

例题: 公式$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$
成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,
成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

(1) 求公式的成真和成假赋值

(2) 判断公式的类型

重言式：　主析取范式有 2^n 个极小项；

矛盾式：　主合取范式有 2^n 个极大项；

可满足式：主析取范式中至少有一个极小项。

(3) 判断两个命题公式等价

两公式等价当且仅当它们有相同主范式。

(4) 解决实际问题

例2.10 用公式的主析取范式判断下列公式的类型

$$(1)\ \neg(p \to q) \wedge q \quad (2)\ p \to (p \wedge q) \quad (3)\ (p \vee q) \to r$$

例2.10 用公式的主析取范式判断下列公式的类型

$$(1)\ \neg(p \to q) \wedge q \quad (2)\ p \to (p \wedge q) \quad (3)\ (p \vee q) \to r$$

解：

$$(1)\ A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$$

$$(2)\ B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$

(1)为矛盾式, (2)为重言式。

例2.10 用公式的主析取范式判断下列公式的类型

$$(1)\ \neg(p \to q) \wedge q \quad (2)\ p \to (p \wedge q) \quad (3)\ (p \vee q) \to r$$

解：

$$\begin{aligned}
(3)\ C &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
&\quad ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \wedge r) \vee (q \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
&\quad ((\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \vee r) \vee (q \wedge r)) \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7
\end{aligned}$$

(3)为可满足式，000，001，011，101，111为成真赋值

例：用主析取范式判断下列公式是否等值

(1) $p \to (q \to r)$ 和 $(p \wedge q) \to r$

(2) $p \to (q \to r)$ 和 $(p \to q) \to r$

解：$p \to (q \to r) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \wedge q) \to r = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \to q) \to r = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

当命题变项数量较少时，采用范式的形式来判断公式等值，貌似性价比较低

思考：编程实现，输入任意（3个命题变项，3层以内）公式，输出该公式的主析取范式及合取范式。

例2.12 某科研所要从3名科研骨干A，B，C中选出1~2名出国进修. 由于工作的需要,选派是要满足以下条件:

(1) 若A去，则C同去;

(2) 若B去，则C不能去.

(3) 若C不去，则A或B可以去.

问所里应该如何选派他们?

解这类问题的步骤：

1. 设简单命题并符号化
2. 用复合命题描述各条件
3. 写出由复合命题组成的合取式
4. 计算主合取范式或主析取范式（最好是主析取范式）
5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

(1) 若A去，则C同去；

(2) 若B去，则C不能去.

(3) 若C不去，则A或B可以去.

问所里应该如何选派他们?

p：	派A去
q：	派B去
r：	派C去

解： 由已知条件可得公式

$$E = (p \to r) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg r \to (p \vee q))$$

该公式的成真复制即为可行的选派方案。

$$
\begin{aligned}
E &= (p \to r) \land (q \to \neg r) \land (\neg r \to (p \lor q)) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg r) \lor (p \lor q \lor r) \\
&\Leftrightarrow ((\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg r) \lor (\neg q \land r) \lor (\neg r \land r)) \land (p \lor q \lor r) \\
&\Leftrightarrow ((\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg r) \lor (\neg q \land r)) \land (p \lor q \lor r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \land p \land \neg q) \lor (\neg p \land p \land \neg r) \lor (p \land \neg q \land r) \\
&\quad \lor (\neg p \land \neg q \land q) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg q \land q \land r) \\
&\quad \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg r \land r) \lor (\neg q \land r \land r) \\
&\Leftrightarrow (p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg q \land r) \\
&\Leftrightarrow (p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r)
\end{aligned}
$$

因此，故有三种方案

(a) A，C同去，B不去。

(b) B去，A，C不去；

(c) C去，A，B不去；

几点注意事项

1. 由公式的主析取范式求主合取范式.

设公式 A 含有 n 个命题变项，A的主析取范式含s个极小项，即

$$A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s},\ 0 \le i_j \le 2^n - 1,\ j = 1, 2, \cdots, s$$

没有出现的极小项为 $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_{2^n-s}}$，它们的角标的二进制表示为 $\neg A$ 的成真复制，因而$\neg A$的主析取范式为

$$\neg A = m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}$$

由定理2.4可得公式的主合取范式

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \neg\neg A \\ &\Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_{2^n-s}}) \\ &\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \cdots \wedge \neg m_{j_{2^n-s}} \\ &\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n-s}} \end{aligned}$$

例2.13 由公式的主析取范式，求主合取范式

(1) $A \Leftrightarrow m_1 \vee m_2$ (A 中含有两个命题变项 p, q)

(2) $B \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_3$ (B 中含有三个命题变项 p, q, r)

解： （1）由题可知，极小项 m_0 和 m_3 没有出现在主析取范式中，所以 A 的主合取范式含有两个极大项 M_0, M_3，因此

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_3$$

（2）B 的主析取范式中没有出现极小项 m_0, m_4, m_5, m_6, m_7，因此该公式的合取范式为

$$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$$

2. 重言式与矛盾式的主合取范式

(1) 矛盾式无成真赋值，因而矛盾式的主合取范式含有 2^n 个极大项.（n 为公式中命题变项个数)

(2) 重言式无成假赋值, 因而主合取范式不含有任何极大项. 将重言式的主合取范式记为1.

(3) 矛盾式的主析取范式为0.

3. 主析取范式有多少种不同的情况

含有 n 个命题变项的所有无穷多合式公式中，它们等值的主析取范式（主合取范式）共有多少种情况?

含有 n 个命题变项可以产生 2^n个极小项（极大项），因而共可以产生

$$C_{2^n}^0+C_{2^n}^1+\cdots+C_{2^n}^{2^n}=2^{2^n}$$

种不同的主析取范式（主合取范式）。由定理2.5可知，含有 n 个命题变项的所有公式的主析取范式（主合取范式）最多有 2^{2^n} 种不同情况.

可以看出：

$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 与 B 具有相同的真值表;

当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式（主合取范式）.

因而可以这样说，真值表与主范式是描述命题公式标准形式的两种不同的等价形式。

练习

1. 设 A 与 B 含有 n 个命题变项，判断下列命题是否为真？

(1) $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 和 B 具有相同的主析取范式

(2) 若 A 为重言式，则 A 的主合取范式为 0

(3) 若 A 为矛盾式，则 A 的主析取范式为 1

练习

1. 设 A 与 B 含有 n 个命题变项，判断下列命题是否为真?

（1）$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 和 B 具有相同的主析取范式

（2）若 A 为重言式，则 A 的主合取范式为 0

（3）若 A 为矛盾式，则 A 的主析取范式为 1

说明:

重言式的主合取范式不含任何极大项，为 1;

矛盾式的主析取范式不含有任何极小项，为 0.

练习

2. 判断公式的类型

(1) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg p)$

(2) $\neg(p \to q) \wedge q$

(3) $(p \to q) \wedge \neg p$

练习

解:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \\
& \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \vee \neg p) \\
& \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p) \\
& \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg p) \\
& \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg p) \\
& \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee \neg p \wedge (\neg q \vee q) \\
& \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \\
& \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
& \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \qquad \textbf{(主析取范式)} \\
& \Leftrightarrow 1 \qquad \textbf{(主合取范式)}
\end{aligned}
$$

练习

解： (2) $\neg(p \to q) \wedge q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q$

$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q$

$\Leftrightarrow 0$ **(主析取范式)**

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$ **(主合取范式)**

(3) $(p \to q) \wedge \neg p$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p$

$\Leftrightarrow \neg p$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1$ **(主析取范式)**

$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_3$ **(主合取范式)**

第2章 命题逻辑与等值演算

2-1 等值式

2-2 析取范式与合取范式

2-3 联结词的完备集

定义2.6 称$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$为 n 元真值函数.

- n 个命题变项共有2^n 种赋值组合;
- 每一组赋值都有$\{0,1\}$两种真值;
- n 个命题变项可构成 2^{2^n} 个不同的真值函数。

定义2.6 称 $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为 n 元真值函数.

- n 个命题变项共有 2^n 种赋值组合;
- 每一组赋值都有 $\{0,1\}$ 两种真值;
- n 个命题变项可构成 2^{2^n} 个不同的真值函数。

例:

表2.7: 一元真值表

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	**1**	**1**
1	0	**1**	0	**1**

每一个命题公式都有唯一等值的真值函数对应。

表2.8：二元真值函数

p, q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
1 0	0	0	**1**	**1**	0	0	**1**	**1**
1 1	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**

p, q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1	0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**
1 0	0	0	**1**	**1**	0	0	**1**	**1**
1 1	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**

定义2.7 设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词所构成的公式表示，则称 S 是一个联结词完备集。

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词完备集

证： 由于任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都与唯一的主析取范式等值，而在主析取范式中仅含有联结词 $\neg, \wedge, \vee$，因此 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是完备联结词。

推论：以下联结词都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$

(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

在计算机硬件设计中，用与非门或者用或非门设计逻辑电路。这是两个新的联结词，并且它们各自能构成联结词的完备集。

定义2.8 设 p, q是两个命题，复合命题“p 与 q 的否定式”称作 p 与 q 的**与非式**，记作$p\uparrow q$，即$p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$。符号$\uparrow$被称为**与非联结词。**

复合命题“p 或 q 的否定式”称作 p, q 的**或非式**，记作$p\downarrow q$，即 $p\downarrow \neg(p\vee q)$。符号$\downarrow$ 称作**或非联结词。**

- $p\uparrow q$为真，当且仅当p 与 q 不同时为真；
- $p\downarrow q$为真，当且仅当p 与 q 同时为假。

定理2.7 $\{\uparrow\}, \{\downarrow\}$ 都是联结词完备集。

证：已知$\{\neg, \wedge\}$为联结词完备集，因而只需证明其中的每个联结词都可以由 $\uparrow$ 表示即可

$$
\begin{aligned}
\neg p &\Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \\
&\Leftrightarrow p \uparrow p \\
p \wedge q &\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \\
&\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)
\end{aligned}
$$

同理可证$\downarrow$也是联结词完备集。

第二章　命题逻辑与等值演算

Chapter 2　Propositional Logic and equivalence calculus

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

目录

基本概念

- 等值：设 A 和 B 是两个命题公式，若 A, B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是等值的。
- 基本等值公式：1. 双重否定律，2. 幂等律，3. 交换律，4. 结合律，5. 分配律，6. 德摩根律，7. 吸收率，8. 零律，9. 同一律，10. 排中律，11. 矛盾律，12. 蕴含等值式，13. 等价等值式，14. 假言易位，15. 等价否定等值式，16. 归谬论。
- 等值演算：由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算。

- 置换规则：设 $\Phi(A)$ 是含有公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 所得到的命题公式，若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。
- 文字：命题变项及其否定统称为文字；
- 简单析取式：由有限个文字构成的析取式称作简单析取式；
- 简单合取式：由有限个文字构成的合取式称作简单合取式；
- 析取范式：由有限个简单合取式的析取构成的命题公式称作析取范式；

- 合取范式：由有限个简单析取式的合取构成的命题公式称作合取范式。析取范式与合取范式统称为范式。
- 极小项：在含有 n 个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下标从小到大或按照字典顺序排列，称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）
- 主范式： 所有简单合取式（简单析取式）都是极小项（极大项）的析取范式（合取范式）称为主析取范式（主合取范式）。两者统称为主范式。
- n 元真值函数：称 $F:\{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ 为 n 元真值函数。

- **联结词完备集**：设 S 是一个联结词集合，如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含有 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 为联结词完备集。

  如：$\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$ 等。

- **与非和或非联结词**：设 p 和 q 是两个命题，复合命题 “p 与 q 的否定式” 称为 p, q 的与非式，记作 $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$。复合命题 “$p$ 或 q 的否定式” 称为 $p\ q$ 的或非式。

  注：$\{\uparrow\}$ 和 $\{\downarrow\}$ 均为联结词完备集。

1. 设 A 与 B 为含 n 个命题变项的公式，判断下列命题是否为真？

(1) $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式。

(2) 若 A 为重言式，则 A 的主合取范式为 0。

(3) 若 A 为矛盾式，则 A 的主析取范式为 1。

(4) 任何公式都能等值地化成 $\{\wedge, \vee\}$ 中的公式。

(5) 任何公式都能等值地化成 $\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$ 中的公式。

1. 设 A 与 B 为含 n 个命题变项的公式，判断下列命题是否为真？

(1) $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 A 与 B 有相同的主析取范式。(真)

(2) 若 A 为重言式，则 A 的主合取范式为 0。(假)

(3) 若 A 为矛盾式，则 A 的主析取范式为 1。(假)

(4) 任何公式都能等值地化成 $\{\wedge, \vee\}$ 中的公式。(假)

(5) 任何公式都能等值地化成 $\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$ 中的公式。(真)

2. 用等值演算判断下列公式的类型

(1) $p \to (p \vee \neg q \vee r)$

(2) $\neg((p \vee q) \wedge \neg p \to q)$

(3) $(\neg p \vee q) \to (p \wedge r)$

解：

$$
\begin{aligned}
p \to (p \vee \neg q \vee r) &\Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee \neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow 1 \vee (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

故公式（1）为重言式。

$$
\begin{aligned}
\neg((p \vee q) \wedge \neg p \to q) &\Leftrightarrow \neg(\neg((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q) \\
&\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg p) \wedge q \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q) \wedge \neg q \\
&\Leftrightarrow 0
\end{aligned}
$$

故公式（2）为矛盾式。

$$
\begin{aligned}
(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge r) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge r) \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \\
&\Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)
\end{aligned}
$$

可知 $101, 110, 111$ 为成真赋值，其余为成假赋值，故（3）是可满足式。

3. 已知命题公式 A 含有 3 个命题变项 p, q, r，并知道它的成真赋值为 $001, 010, 111$，求 A 的主析取范式，及 A 对应的真值函数。

3. 已知命题公式 A 含有 3 个命题变项 p, q, r，并知道它的成真赋值为 $001, 010, 111$，求 A 的主析取范式，及 A 对应的真值函数。

解： A 的主析取范式为 $A \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_7$，$A$ 的主合取范式为

$$\neg\neg A \Leftrightarrow \neg(m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6)$$
$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

公式 A 对应的真值函数为

p	q	r	F	p	q	r	F
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

4. 将 $A = (p \to \neg q) \wedge r$ 改成下列各联结词集中的公式

(1) $\{\neg, \wedge, \vee\}$

(2) $\{\neg, \wedge\}$

(3) $\{\neg, \vee\}$

(4) $\{\neg, \to\}$

(5) $\{\uparrow\}$

(6) $\{\downarrow\}$

4. 将 $A=(p\to\neg q)\wedge r$ 改成下列各联结词集中的公式

解：(1) $\{\neg,\wedge,\vee\}$

$$(p\to\neg q)\wedge r\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge r$$

(2) $\{\neg,\wedge\}$

$$\begin{aligned}(p\to\neg q)\wedge r&\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge r\\&\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\wedge r\end{aligned}$$

(3) $\{\neg,\vee\}$

$$\begin{aligned}(p\to\neg q)\wedge r&\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge r\\&\Leftrightarrow\neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)\end{aligned}$$

(4) $\{\neg, \to\}$

$$\begin{aligned}(p \to \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r)\\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \to \neg q) \vee \neg r)\\ &\Leftrightarrow \neg((p \to \neg q) \to r)\end{aligned}$$

(5) $\{\uparrow\}$

$$\begin{aligned}(p \to \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge r\\ &\Leftrightarrow (p \uparrow q) \wedge r\\ &\Leftrightarrow \neg\neg((p \uparrow q) \wedge r)\\ &\Leftrightarrow \neg((p \uparrow q) \uparrow r)\\ &\Leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow r) \uparrow ((p \uparrow q) \uparrow r)\end{aligned}$$

(6) $\{\downarrow\}$

$$
\begin{aligned}
(p \to \neg q) \wedge r &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q) \downarrow \neg r \\
&\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))
\end{aligned}
$$

5. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中，选派一些人出国学习。选派必须满足以下条件：

- 若赵去，钱也去；
- 李、周两人中至少有一人去；
- 钱、孙两人中有且仅有一人去；
- 孙、李两人同去或者不同去；
- 若周去，则赵、钱也去

用等值演算判断该公司如何选派他们出国？

解： 1. 将简单命题符号化。

设 p : 派赵去，q : 派钱去，r : 派孙去，s : 派李去，u : 派周去。

2. 写出复合命题

若赵去，钱也去；	$p \to q$
李、周两人中至少有一人去；	$s \vee u$
钱、孙两人中有且仅有一人去；	$(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$
孙、李两人同去或者不同去；	$(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$
若周去，则赵、钱也去。	$u \to (p \wedge q)$

3. 写出复合命题的合取式

$$A = (p \to q) \wedge (s \vee u) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$$
$$\wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge (u \to (p \wedge q))$$

4. 写出析取范式；

5. 补充各简单合取式中缺少的文字，得到主析取范式。

$$A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

由上述主析取范式可知，A 的成真赋值为 00110 和 11001，因此方案有两种，分别为

- 派孙、李去（赵、钱、周不去）；
- 派赵、钱、周去（孙、李不去）。

作业

p43. 第 7 题，第 11 题（2）（3）
第 12 题，第 15 题（2），第 29 题。

第三章　命题逻辑的推理理论

Chapter 3　Inference Theory of Propositional Logic

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

有效推理

- 数理逻辑的主要任务是用数学的方法来研究数学中的推理.
- 所谓推理是指从前提出发推出结论的思维过程，而前提是已知命题公式集合，结论是从前提出发应用推理规则推出的命题公式.
- 要研究推理就应该给出推理的形式结构。为此，首先应该明确什么样的推理是有效的或正确的.

推理理论

推理：　　是从前提推出结论的思维过程

前提：　　是指已知的命题公式

结论：　　是指从前提出发应用推理规则推出的命题公式。

推理规则：若 A（条件），则 B（结论）

规则运用：若满足 A（条件），则可以得到 B（结论）。

定义 3.1

设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 B 都是命题公式，若对 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 B 中出现的命题变项的任意一组赋值，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为假，或者当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为真时，B 也为真，则称由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的理论是有效的或者正确的，并称 B 是有效结论。

- 由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推结论 B 的推理是否正确与诸前提的排列次序无关。前提的公式是一个有限的公式集合。
  设前提为 Γ，将 Γ 推出 B 的推理记为 $\Gamma \vdash B$。若推理是正确的，则记为 $\Gamma \models B$，否则记为 $\Gamma \not\models B$。这里称 $\Gamma \vdash B$ 和 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B$ 为推理的形式结构。
- 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, B$ 中共出现 n 个命题变项，对于任何一组赋值 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$（$\alpha_i = 0$ 或者 1，$i = 1, 2, \cdots, n$），前提和结论的取值情况有以下四种：
  (i) $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 0，B 为 0;
  (ii) $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 0，B 为 1;
  (iii) $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 1，B 为 0;
  (iv) $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为 1，B 为 1。
  由定义 3.1 可知，只要不出现 (iii)，推理就是正确的。

关于定义 3.1 的几点说明

- 人们所认为的推理中，只有在正确前提下推出的正确结论才是正确的。但离散数学中，如果前提不正确，不论结论正确与否，推理都是正确的。

例 3.1

判断下列推理是否正确

(1) $\{p, p \to q\} \vdash q$

(2) $\{p, q \to p\} \vdash q$

解：只要写出前提的合取式与结论的真值表，看是否出现前提合取式为真，而结论为假的情况。

表: 3.1

p	q	$p \wedge (p \to q)$	q	$p \wedge (q \to p)$	q
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

- 由表 3.1 可知，（1）推理正确，即 $\{p, p \to q\} \models q$；
- 由表 3.1 可知，（2）推理不正确，即 $\{p, q \to p\} \not\models q$。

有效的推理的等价定理

定理

3.1 命题公式 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的推理正确当且仅当

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

为重言式。

证：先证必要性。

若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的推理是正确的，则对于 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 和 B 所含命题变项的任意一组赋值，不会出现 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为真且 B 为假的情况。因而 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式。

再证充分性

若蕴涵式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式，则对于任意一组赋值该蕴涵式均为真。因而不会出现，$A_1 \wedge \cdots A_k$ 为真，B 为假的情况，符合定义 3.1 推理正确的定义。

有效推理的形式结构

（1）由定理 3.1 知，推理形式为

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：B

是有效的，当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to B$ 为重言式。

（2）$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to B$ 称为上述推理的形式结构。

（3）推理的有效性等价于它的形式结构为重言式，于是推理正确

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \models B$$

记为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$，其中 $\Rightarrow$ 和 $\Leftrightarrow$ 一样，是一种元语言符号，用来表示蕴涵式为重言式。

3. 判断推理是否正确（即判断命题公式永真性）有三个方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式
- 构造证明法

例 3.2 判断下面推理是否正确

（1）若 a 能被 4 整除，则 a 能被 2 整除。a 能被 4 整除。所以，a 能被 2 整除。

（2）若 a 能被 4 整除，则 a 能被 2 整除。a 能被 2 整除。所以，a 能被 4 整除。

（3）下午马芳或去看电影或去游泳。她没有去看电影。所以她去游泳了。

（4）若下午气温超过 30℃，则王小燕必去游泳。若她去游泳，她就不去看电影了。所以，若王小燕没去看电影，下午气温必超过 30℃。

（1）若 a 能被 4 整除，则 a 能被 2 整除。a 能被 4 整除。所以，a 能被 2 整除。

解：设 p：a 能被 4 整除，q：a 能被 2 整除

前提：$p \to q$，p

结论：q

推理的形式结构为：$(p \to q) \wedge p \to q$，即

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \wedge p \to q &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge \neg q) \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

故 $(p \to q) \wedge p \to q$ 为重言式，推理正确，即 $(p \to q) \wedge q \Rightarrow q$。

（2）若 a 能被 4 整除，则 a 能被 2 整除。a 能被 2 整除。所以，a 能被 4 整除。

解：设 p：a 能被 4 整除，q：a 能被 2 整除。

前提：$p \to q$，q
结论：p

推理的形式结构为：$(p \to q) \wedge q \to p$，即

$$\begin{aligned}(p \to q) \wedge q \to p &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \vee p \\ &\Leftrightarrow p \vee \neg q\end{aligned}$$

易知 01 是 $(p \to q) \wedge q \to p$ 的成假赋值，因此推理不正确。

（3）下午马芳或去看电影或去游泳。她没有去看电影。所以她去游泳了。

解：设 p : 马苏下午去看电影，q : 马苏下午去游泳。

前提：$p \vee q$，$\neg p$

结论：q

推理的形式结构为：$(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$，即

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee q \\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (p \vee q) \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

故 $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$ 为重言式，推理正确，即 $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$。

(4) 解：设 p：下午气温超过 30℃，q：王小燕去游泳，r：王小燕去看电影。

前提：$p \to q$，$q \to \neg r$
结论：$\neg r \to p$

推理的形式结构：$(p \to q) \wedge (q \to \neg r) \to (\neg r \to p)$。

$$\begin{aligned}
& (p \to q) \wedge (q \to \neg r) \to (\neg r \to p) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (r \vee p) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r) \vee r \vee p \\
\Leftrightarrow\ & ((p \wedge \neg q) \vee p) \vee ((q \wedge r) \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & p \vee r
\end{aligned}$$

易知 000 为 $(p \to q) \wedge (q \to \neg r) \to (\neg r \to p)$ 的成假赋值，故推理不正确。

练习：判断下面推理是否正确

（1）若今天是 1 号，则明天是 5 号。今天是 1 号。所以明天是 5 号。

（2）若今天是 1 号，则明天是 5 号。明天是 5 号。所以明天是 1 号。

（1）若今天是 1 号，则明天是 5 号。今天是 1 号。所以明天是 5 号。

解：设 p：今天是 1 号，q：明天是 5 号。

前提：$p \to q$，p

结论：q

推理的形式结构：$(p \to q) \wedge p \to q$。用等值演算

$$\begin{aligned}(p \to q) \wedge p \to q &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \\ &\Leftrightarrow 1\end{aligned}$$

（2）前提：$p \to q, q$

结论：p

推理的形式结构：$(p \to q) \wedge q \to p$。用主析取范式

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \wedge q \to p &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \to p \\
&\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p \\
&\Leftrightarrow p \vee \neg q \\
&\Leftrightarrow (p \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge \neg q) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q) \vee (p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3
\end{aligned}
$$

因此 01 是成假赋值，所以推理不正确。

重言蕴涵式（推理定律）

若 $A \to B$ 为重言式，则称 B 为 A 的推论，记作 $A \Rightarrow B$。以下是几个重要的重言蕴涵式及其名称

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论

8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难

9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难

关于九条推理定律的说明

- 出现的 A, B, C 等依然是元语言符号，它们代表的是任意公式，因而这些推理定律全是以模式的形式出现的。
- 若一个推理的形式结构与某条推理定律对应的蕴涵式一致，则不用证明就可断定这个推理是正确的，只需说明用了某条推理定律即可。
- 上一章给出的 24 个等值式中的每一个都可派生出两条推理定律，例如双重否定率 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ 可以产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 以及 $\neg\neg A \Rightarrow A$。
- 在下一节将看到，由九条推理定律可以产生九条推理规则. 它们构成了推理系统中的推理规则。

练习 1：判断推理是否正确

（1）前提：$\neg p \to q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

推理的形式结构：$(\neg p \to q) \land \neg q \to \neg p$。

方法一：等值演算法

$$\begin{aligned}(\neg p \to q) \land \neg q \to \neg p &\Leftrightarrow \neg((p \lor q) \land \neg q) \lor \neg p \\ &\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor q \lor \neg p \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \lor \neg p \\ &\Leftrightarrow \neg p \lor q\end{aligned}$$

易知 10 是成假赋值，推理错误。

方法二：主析取范式

$$
\begin{aligned}
(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p &\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p \\
&\Leftrightarrow \neg p \vee q \\
&\Leftrightarrow M_2 \\
&\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3
\end{aligned}
$$

未含有 m_1，不是重言式，故推理不正确。

方法三：真值表法

p	q	$\neg p \to q$	$(\neg p \to q) \wedge \neg q$	$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式，推理不正确。

方法四：直接看出 10 是成假赋值。

（2）前提：$q \to r$，$p \to \neg r$

结论：$q \to \neg p$

解：推理的形式结构：$(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p)$

用等值演算法

$$
\begin{aligned}
&(q \to r) \wedge (p \to \neg r) \to (q \to \neg p) \\
\Leftrightarrow &(\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \to (\neg p \vee \neg q) \\
\Leftrightarrow &\neg((q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r)) \to (\neg p \vee \neg q) \\
\Leftrightarrow &\neg((p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee \neg r)) \to (\neg p \vee \neg q) \\
\Leftrightarrow &((p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee \neg r)) \vee (\neg p \vee \neg q) \\
\Leftrightarrow &1
\end{aligned}
$$

章节内容

第 1 节 推理的形式结构

- 有效推理
- 有效推理的等价定理
- 重演蕴涵式

第 2 节 自然推理系统 P

- 推理形式系统
- 推理系统 P
- P 中的证明

推理形式系统

定义 3.2

一个推理系统 I 由以下 4 个部分组成

- 非空的字母表 $A(I)$。
- $A(I)$ 中符号构造的合式公式集 $E(I)$。
- $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集 $A_X(I)$。
- 推理规则集 $R(I)$。

可以将形式系统 I 记为 4 元组 $\langle A(I), E(I), A_X(I), R(I)\rangle$，其中 $\langle A(I), E(I)\rangle$ 是 I 的形式语言系统，$\langle A_X(I), R(I)\rangle$ 是 I 的形式演算系统。

一类是自然推理系统, 它的特点是从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的最后命题公式是推理的结论（有时称为有效的结论，它可能是重言式，也可能不是）。

另一类是公理推理系统，它只能从若干给定的公理出发，应用系统中推理规则进行推理演算，得到的结论是系统中的重言式，称为系统中的定理.

我们只介绍自然推理系统 P，它的定义中无公理部分.

P 是一个自然推理系统，因而没有公理。故 P 只有三个部分

定义 3.3 自然推理系统 P 定义如下

1. 字母表
   - 命题变项符号：$p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i, \cdots, (i \geq 1)$
   - 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
   - 括号与逗号：$(,), ,$。
2. 合式公式：将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作合式公式。
3. 推理规则。

推理规则

（1）前提引入规则：在证明的任何步骤上都可以引入前提。
（2）结论引入规则：在证明的任何步骤上所得到的结论都可以作为后继证明的前提。
（3）置换规则：在证明的任何步骤上，命题公式中的子公式都可以用与之等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式.

推理规则

由 9 条推理定理和结论引入规则可以到处以下各条推理规则：

（4）假言推理规则：若证明的公式序列中已出现过 $A \to B$ 和 A，则由假言推理定律 $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 可知，B 是 $A \to B$ 和 A 的有效结论。由结论引入规则可知，可将 B 引入到命题序列中来。用图式表示为如下形式：

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \underline{\quad A \quad} \\ \therefore B \end{array}$$

（5）附加规则：$A \Rightarrow (A \vee B)$

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

（6）化简规则：$A \wedge B \Rightarrow A$

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

（7）拒取式规则：$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \underline{\neg B} \\ \therefore \neg A \end{array}$$

推理规则

（8）假言三段论规则：$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \underline{\;B \to C\;} \\ \therefore A \to C \end{array}$$

（9）析取三段论规则：$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow Ad$

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \underline{\;\neg B\;} \\ \therefore A \end{array}$$

推理规则

（10）构造性二难推理：

$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ \underline{A \vee C} \\ \therefore B \vee D \end{array}$$

（11）破坏性二难规则：

$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ \underline{\neg B \vee \neg D} \\ \therefore \neg A \vee \neg D \end{array}$$

（11）合取引入规则：

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array}$$

若证明的公式序列中已出现 A 和 B，则可将 $A \wedge B$ 引入序列中。

在 P 中构造证明

设前提 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，结论 B 和公式序列 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_\ell\}$。如果每一个 $i(i = 1, 2, \cdots, \ell)$，$C_i$ 是某个 A_j，或者可由序列 $\mathcal{C}$ 中前面的公式应用推理规则得到，并且 $C_\ell = B$，则称公式序列 $\mathcal{C}$ 是由 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 推出 B 的证明。

例 3.3 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明

（1）前提：$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论：$r \wedge (p \vee q)$

（2）前提：$\neg p \vee q$，$r \vee \neg q$，$r \rightarrow s$

结论：$p \rightarrow s$

（1）前提：$p \vee q, q \to r, p \to s, \neg s$

结论：$r \wedge (p \vee q)$

解：（1）证明

① $p \to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg p$	①②拒取式
④ $p \vee q$	前提引入
⑤ q	③④析取三段论
⑥ $q \to r$	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理
⑧ $r \wedge (p \vee q)$	⑦④合取引入

（2）前提：$\neg p \vee q$，$r \vee \neg q$，$r \rightarrow s$

结论：$p \rightarrow s$

解：（2）证明

① $\neg p \vee q$	前提引入
② $p \rightarrow q$	①置换
③ $r \vee \neg q$	前提引入
④ $q \rightarrow r$	③置换
⑤ $p \rightarrow r$	②④假言三段论
⑥ $r \rightarrow s$	前提引入
⑦ $p \rightarrow s$	⑤⑥假言三段论

例 3.4 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明

若数 a 是实数，则它不是有理数就是无理数；若 a 不能表示成分数，则它不是有理数；a 是实数且它不能表示成分数。所以 a 是无理数.

解：（1）将简单命题符号化

设 $p : a$ 是实数，$q : a$ 是有理数，$r : a$ 是无理数，$s : a$ 能表示成分数。

（2）写出证明的形式结构

前提：$p \to (q \vee r), \neg s \to \neg q, p \wedge \neg s$

结论：r

前提：$p \to (q \vee r), \neg s \to \neg q, p \wedge \neg s$

结论：r

（3）证明

① $p \wedge \neg s$	前提引入
② p	①化简
③ $\neg s$	①化简
④ $p \to (q \vee r)$	前提引入
⑤ $q \vee r$	②④假言推理
⑥ $\neg s \to \neg q$	前提引入
⑦ $\neg q$	③⑥假言推理
⑧ r	⑤⑦析取三段论

练习：构造下面推理的证明

若小张喜欢数学，则小李或小赵也喜欢数学。若小李喜欢数学，则他也喜欢物理。小张确实喜欢数学，可小李不喜欢物理。所以，小赵喜欢数学。

若小张喜欢数学，则小李或小赵也喜欢数学。若小李喜欢数学，则他也喜欢物理。小张确实喜欢数学，可小李不喜欢物理。所以，小赵喜欢数学。

解：设 p : 小张喜欢数学，q : 小李喜欢数学，r : 小赵喜欢数学，s : 小李喜欢物理。

前提：$p \to (q \vee r)$, $q \to s$, p, $\neg s$

结论：r

证明：

① $q \to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg q$	①②拒取式
④ $p \to (q \vee r)$	前提引入
⑤ p	前提引入
⑥ $q \vee r$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论

P 中证明的两个常用技巧

- 附加前提证明法
- 归谬法

附加前提证明法

设推理的形式结构具有如下形式

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B)$$

推理的结论也为蕴涵式，此时可以将结论中的前件也作为推理的前提，使结论为 B，即将上述推理的形式结构写为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A \to B$$

证：方法一：等值演算法

$$\begin{aligned}(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) &\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B) \\ &\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B \\ &\Leftrightarrow (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B\end{aligned}$$

方法二：观察法。关注 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) = 1$，$(A \rightarrow B) = 0$

例 3.5 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影。小赵不去看电影或小张去看电影。小王去看电影。所以，当小赵去看电影时，小李也去看电影。

解：（1）将简单命题符号化

设 p : 小张去看电影，q : 小王去看电影，r : 小李去看电影，s : 小赵去看电影。

（2）写出证明的形式结构

前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg s \vee p$，q

结论：$s \to r$

（3）证明：用附加前提证明法

前提：$(p \wedge q) \rightarrow r$，$\neg s \vee p$，$q$

结论：$s \rightarrow r$

（3）证明：用附加前提证明法

① s	附加前提引入
② $\neg s \vee p$	前提引入
③ p	①②析取三段式
④ $(p \wedge q) \rightarrow r$	前提引入
⑤ q	前提引入
⑥ $p \wedge q$	③⑤合取
⑦ r	④⑥假言推理

练习：构造下面推理的证明

2 是素数[a]或合数。若 2 是素数，则 $\sqrt{2}$ 是无理数。若 $\sqrt{2}$ 是无理数，则 4 不是素数。所以，如果 4 是素数，则 2 是合数。

[a]素数，又称质数。一个大于 1 的只能被 1 和它自身整除的自然数。(否则称为合数)

用附加前提证明法构造证明

解：(1) 设 $p: 2$ 是素数，$q: 2$ 是合数，$r: \sqrt{2}$ 是无理数，$s: 4$ 不是素数。

(2) 推理的形式结构为

前提：$p \vee q$，$q \rightarrow r$，$r \rightarrow \neg s$

结论：$s \rightarrow q$。

前提：$p \vee q$，$q \to r$，$r \to \neg s$
结论：$s \to q$。

（3）证明

① s	附加前提引入
② $p \to r$	前提引入
③ $r \to \neg s$	前提引入
④ $p \to \neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p \vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段式

归谬法

在构造形式结构为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$$

的推理证明中，若将 $\neg B$ 作为前提能推出矛盾来，则说明推理正确。

证：

$$\begin{aligned} A_1 \wedge A_2 \cdots \wedge A_k \rightarrow B &\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B \\ &\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B) \end{aligned}$$

若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$ 为矛盾式，则说明
$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B)$ 为重言式，即
$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B) \Rightarrow B$，故推理正确。

例 3.6 在自然推理系统 P 中构造下面推理的证明

如果小张守第一垒并且小李向 B 队投球，则 A 队将取胜。或者 A 队未取胜，或者 A 队获取联赛第一名。A 队没有获得联赛第一名。小张守第一垒。因此，小李没有向 B 队投球

解：先将简单命题符号化

设 p：小张守第一垒；q：小李向 B 队投球，r：A 队取胜；s：A 队获得联赛第一名。

前提：$(p \wedge q) \rightarrow r$，$\neg r \vee s$，$\neg s$，$p$

结论：$\neg q$

证明：用归谬法

前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg r \vee s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明：

① q	结论的否定引入
② p	前提引入
③ $p \wedge q$	①②合取
④ $(p \wedge q) \to r$	前提引入
⑤ r	③④假言推理
⑥ $\neg r \vee s$	前提引入
⑦ s	⑤⑥析取三段式
⑧ $\neg s$	前提引入
⑨ $s \wedge \neg s$	⑦⑧合取

由最后一步 $s \wedge \neg s \Leftrightarrow 0$，所以 $((p \wedge q) \to r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge \neg s \wedge p \wedge q$ 为矛盾式。所以推理正确。

课后作业

p57-59：9，14（2）（4），15（2）
17，18（1）

章节内容

内容回顾

1. 推理的形式结构

推理的形式结构的符号化形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$$

若上式为重言式，则称推理是有效的，否则称推理是无效的。推理有效记作

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$$

2. 判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法
- 构造证明法

3. 推理定理（重言蕴涵式）

内容回顾

9 条推理定理

1. 附加律 $A \Rightarrow (A \vee B)$
2. 化简律 $(A \wedge B) \Rightarrow A$
3. 假言推理 $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$
4. 拒取式 $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
5. 析取三段论 $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$
6. 假言三段论 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$
7. 等价三段论 $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$
8. 构造性二难 $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$
   $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$
9. 破坏性二难 $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

4. 在自然推理系统 P 中构造证明

对于推理

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：B

构造序列 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_\ell\}$，其中任意 C_i 是某个 A_j，或者是由序列（$\mathcal{C}$ 序列）前面的公式应用推理规则得到，并且 $C_\ell = B$，称序列 $\mathcal{C}$ 是由 $\{A_1, \cdots, A_k\}$ 推出 B 的证明。

构造证明的方法

- 直接证明
- 附加前提证明法
- 归谬证明法

1. 写出以下推理的形式结构，并判断推理是否正确。

(1) 若今天是星期一，则明天是星期三。今天是星期一。所以明天是星期三。

(2) 若今天是星期一，则明天是星期二。今天不是星期一。所以明天不是星期二。

(3) 若今天是星期一，则明天是星期二或者星期三。今天是星期一。所以明天是星期二。

（1）若今天是星期一，则明天是星期三。今天是星期一。所以明天是星期三。（2）若今天是星期一，则明天是星期二。今天不是星期一。所以明天不是星期二。

解：（1）设 p：今天是星期一，q：明天是星期三。推理的形式结构为 $(p \to q) \wedge p \to q$。根据假言推理公式，可知 $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$，故推理正确。

（2）设 p：今天是星期一，q：明天是星期二。推理的形式结构为 $(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$。该公式的主合取范式为

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p \to \neg q \\
&\Leftrightarrow \neg p \to \neg q \\
&\Leftrightarrow p \vee \neg q \\
&\Leftrightarrow M_1
\end{aligned}
$$

因此 $(p \to q) \wedge q \to p$ 不是重言式，推理不正确。

（3）若今天是星期一，则明天是星期二或者星期三。今天是星期一。所以明天是星期二。

设 p：今天是星期一，q：明天是星期二，r：明天是星期三。推理的形式结构为

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge p \rightarrow q$$

利用等值演算法

$$\begin{aligned}(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge p \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q \vee r) \wedge p) \vee q \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee q \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)) \vee q \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee \neg r) \\ &\Leftrightarrow M_5\end{aligned}$$

故 $(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge p \rightarrow q$ 不是重言式，推理不正确。

2. 在自然推理系统 P 中，用直接证明法构造下列推理的证明。

（1）前提：$\neg(p \wedge \neg q), q \rightarrow \neg r, r$

结论：$\neg p$

（2）前提：$p \rightarrow r$，$q \rightarrow s$，p，q

结论：$r \wedge s$

（1）前提：$\neg(p \wedge \neg q), q \rightarrow \neg r, r$

结论：$\neg p$

证明：

① $q \rightarrow \neg r$	前提引入
② r	前提引入
③ $\neg q$	①②拒取式
④ $\neg(p \wedge \neg q)$	前提引入
⑤ $\neg p \vee q$	④置换
⑥ $\neg p$	③⑤析取

（2）前提：$p \to r$，$q \to s$，p，q

结论：$r \wedge s$

证明：

① $p \to r$	前提引入
② p	前提引入
③ r	①②假言推理
④ $q \to s$	前提引入
⑤ q	前提引入
⑥ s	④⑤假言推理
⑦ $r \wedge s$	③⑥合取

3. 在自然推理系统 P 中，用附加前提证明法证明下列推理

前提：$\neg p \vee (q \rightarrow r), s \rightarrow p, q$

结论：$\neg r \rightarrow \neg s$

解：证明：

① $\neg r$	附加前提引入
② q	前提引入
③ $\neg r \wedge q$	①②合取
④ $\neg(\neg q \vee r)$	③置换
⑤ $\neg(q \rightarrow r)$	④置换
⑥ $\neg p \vee (q \rightarrow r)$	前提引入
⑦ $\neg p$	⑤⑥析取三段论
⑧ $s \rightarrow p$	前提引入
⑨ $\neg s$	⑦⑧拒取式

4. 在自然推理系统 P 中，用归谬法证明下列推理

前提：$p \to (q \to r), p \wedge q$

结论：$r \vee s$

解：证明：

① $p \wedge q$	前提引入
② p	①化简
③ $p \to (q \to r)$	前提引入
④ $q \to r$	②③假言推理
⑤ $\neg(r \vee s)$	结论否定引入
⑥ $\neg r \wedge \neg s$	⑤置换
⑦ $\neg r$	⑥化简
⑧ $\neg q$	④⑦拒取式
⑨ q	①化简
⑩ $\neg q \wedge q$	⑧⑨合取

第六章　集合代数

Chapter 6　Set Algebra

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

章节内容

集合的表示

1. 集合的定义（from Wikipedia）

In mathematics, a set is a collection of different things; these things are called elements or members of the set and are typically mathematical objects of any kind: numbers, symbols, points in space, lines, other geometrical shapes, variables, or even other sets.

A set may have a finite number of elements or be an infinite set. There is a unique set with no elements, called the empty set; a set with a single element is a singleton.

注：集合通常用大写的英文字母来标记，如自然数集 $\mathbb{N}$，整数集合 $\mathbb{Z}$，有理数集合 $\mathbb{Q}$，实数集合 $\mathbb{R}$，以及复数集合 $\mathbb{C}$。

2. 集合的表示

- 列元素法：列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并把他们用花括号括起来。例如

$$A=\{a,b,\cdots,z\}, Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

- 谓语表示法：用谓词来概括集合中元素的属性。例如

$$B=\{x|x\in\mathbb{R}\wedge x^2-1=0\}$$

表示方程 $x^2-1=0$ 的实数集合。

注：许多集合可以用两种方法来表示，例如 $B=\{-1,1\}$，但有些集合不可用列元素法表示，例如实数集合。

集合的特点

- 集合的元素彼此是不相同的，如果同一个元素在集合中多次出现应该认为是一个元素，如

$$\{1,2,3,3\} = \{1,2,3\}$$

- 集合的元素是无序的，如

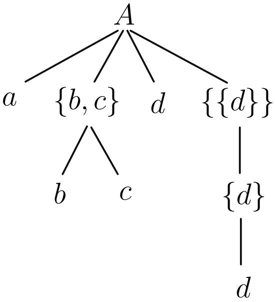
$$\{1,2,3\} = \{2,1,3\}$$

- 本书的体系中规定集合的元素都是集合。元素和集合之间的关系是隶属关系，即属于或者不属于，属于记作 $\in$，不属于 $\notin$。例如

$$A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$$

其中 $a \in A$，$\{b, c\} \in A$，但 $b \notin A$，$\{d\} \notin A$。

这种隶属关系可以使用**树形图**表示，该图分层构成，每一层上的节点都表示一个集合，它的子节点就是它的元素。



鉴于集合的元素都是集合这一规定，**隶属关系可以看作处于不同层次上的集合之间的关系**。

定义 6.1（包含）

设 A, B 为集合，如果 B 中的每个元素都是 A 的元素，则称 B 是 A 的子集合，简称为子集。此时也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记作 $B \subseteq A$。若 B 不被 A 包含，则记作 $B \nsubseteq A$。包含的符号化表示为

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$$

注： $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次上的问题。

思考：$\nsubseteq$ 的符号化表示。

集合之间的关系

定义 6.2（相等）

设 A, B 为集合，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B相等，记作 $A = B$，否则记作 $A \neq B$。相等的符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

思考：$\neq$ 的符号化表示。

定义 6.3（真子集）

设 A, B 为集合，若 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$，则称 B 是 A 的真子集，记作 $B \subset A$，否则记作 $B \not\subset A$。真子集的符号化表示为

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$$

定义 6.4（空集）

不含有任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$。空集的符号化表示为 $\varnothing = \{x | x \neq x\}$。

定理

6.1 空集是一切集合的子集。

证明：任给集合 A，由子集合定义有

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow x(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$$

右边的蕴涵式因前件为假而为真命题，所以 $\varnothing \subseteq A$ 也为真。

推论

空集是唯一的。

证明：假设存在空集 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$，由定理 6.1 有

$$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \text{ 和 } \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$$

根据集合相等的定义，有 $\varnothing_1 = \varnothing_2$。

幂集

1. 含有 n 个元素的集合简称 n 元素，它的含有 $m(m \leq n)$ 个元素的子集叫做它的 m 元子集。

例 6.1

$A = \{1, 2, 3\}$，将 A 的子集分类：

- 0 元子集，也就是空集，只有一个 $\varnothing$；
- 1 元子集，即单元集：$\{1\}, \{2\}, \{3\}$；
- 2 元子集，$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$；
- 3 元子集，$\{1, 2, 3\}$。

一般地说，对于 n 元集 A，它的 0 元子集有 C_n^0 个，1 元子集有 C_n^1 个，$\cdots$，m 元子集有 C_n^m 个，n 元子集有 C_n^m 个；子集总数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

幂集

定义 6.5

设 A 为集合，把 A 的全部子集构成的集合叫做 A 的幂集，记作 $P(A)$（或 $\mathscr{P}(A)$，2^A）。幂集的符号化表示为

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

例 6.1 中集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的幂集为

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

全集

定义 6.6

在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作 E。

全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集，即使是同一个问题也可以取不同的全集。例如，在研究平面上直线的相互关系时，可以把整个平面内（平面所有点的集合）取作全集，也可以把整个空间取作全集。

练习 1: 判断下列命题是否为真。

（1） $\varnothing \subseteq \varnothing$

（2） $\varnothing \in \varnothing$

（3） $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

（4） $\varnothing \in \{\varnothing\}$

（5） $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

（6） $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

（7） $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

（8） $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

练习

1. 判断下列命题是否为真。

（1）$\varnothing \subseteq \varnothing$

（2）$\varnothing \in \varnothing$

（3）$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

（4）$\varnothing \in \{\varnothing\}$

（5）$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

（6）$\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

（7）$\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

（8）$\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

解：（2）（8）为假，其余为真。

章节内容

集合的基本运算

集合的基本运算包括：并、交、相对补和对称差。

定义 6.7

设 A, B 为集合，A 与 B 的并集 $A \cup B$，交集 $A \cap B$，B 对 A 的相对补集 $A - B$ 分别定义如下

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

注：如果两个集合的交集为 $\varnothing$，则称这两个集合是不相交的。例如 $B = \{a\}$ 和 $C = \{b, d\}$ 是不相交的。

- 两个集合的并和交可以推广成 n 个集合的并和交

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

上述可以简写为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 和 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。

- 并和交运算还可以推广到无穷多个集合

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

定义 6.8

设 A, B 为集合，A 与 B 的对称差集 $A \oplus B$ 定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

对称差的另外一种定义是

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

定义 6.9

给定全集 E，$A \subseteq E$，A 的绝对补集 $\sim A$ 定义为

$$\sim A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$$

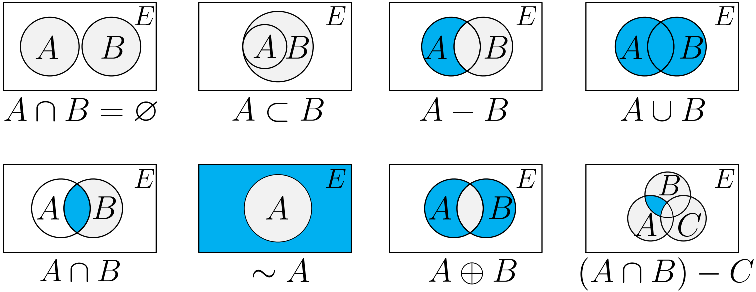


图 6.2 集合运算的文氏图表示

练习 2

判断以下命题的真假，并说明理由

（1）$A - B = A \Leftrightarrow B = \varnothing$

（2）$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

（3）$A \oplus A = A$

（4）若 $A \cap B = B$，则 $A = E$

（5）$A = \{x\} \cup x$，则 $x \in A$ 且 $x \subseteq A$

解：

（1）$B=\varnothing$ 是 $A-B=A$ 的充分条件，但不是必要条件。当 B 不空但是与 A 不交时，也满足 $A-B=A$。

（2）德摩根律

（3）反例：$A=\{1\}$，$A\oplus A=\varnothing$，但是 $A\neq\varnothing$。

（4）命题不为真，$A\cap B=B$ 的充分必要条件是 $B\subseteq A$

（5）命题为真，因为 x 既是 A 的元素，也是 A 的子集。

广义运算

定义 6.10

设 A 为集合，A 的元素的元素构成的集合称为 A 的广义并，记作 $\cup A$，符号化表示为 $\cup A = \{x | \exists z\, (z \in A \wedge x \in z)\}$

定义 6.11

设 A 为非空集合，A 的所有元素的公共元素构成的集合称作 A 的广义交，记作 $\cap A$，符号化表示为 $\cap A = \{x | \forall z\, (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

例

（1）$\cup\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\} = \{1,2,3\}$

（2）$\cap\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\} = \{1\}$

（3）$\cup\{\{a\}\} = \{a\}$，$\cap\{\{a\}\} = \{a\}$

（4）$\cup\{a\} = a$，$\cup\{a\} = a$

关于广义运算的说明

1. 广义运算的性质

- $\cup\varnothing=\varnothing$ 和 $\cap\varnothing=\varnothing$ 无意义。
- 单元集 $\{x\}$ 的广义并和广义交都等于 x。
- 广义运算减少了集合的层次（括弧减少一层）。
- 广义运算的计算一般可以转变为初级运算

$$\cup\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$
$$\cap\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

2. 引入广义运算的意义：可以表示无数个集合的并、交运算，如：$\cup\{\{x\}|x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$ 为实数集。

运算的优先权规定

- 1 类运算，初级运算 $\cup, \cap, -, \oplus$；优先顺序由括号规定。
- 2 类运算，广义运算和 $\sim$ 运算，运算由右向左进行。
- 混合运算，2 类运算优先于 1 类运算。

例

$A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$，计算 $\cap\cup A \cup (\cup\cup A - \cup\cap A)$。

解：

$$\begin{aligned}
\cap\cup A \cup (\cup\cup A - \cup\cap A) &= \cap\{a, b\} \cup \{\cup\{a, b\} - \cup\cap A\} \\
&= (a \cap b) \cup ((a \cup b) - a) \\
&= (a \cap b) \cup (b - a) \\
&= b
\end{aligned}$$

章节内容

有穷集的计数

1. 使用文氏图解决有穷集的计数问题

- 首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。一般地说，每一条性质决定一个集合。有多少条性质，就有多少个集合。如果没有特殊说明，在任何两个集合都画成相交的。
- 然后把已知集合的元素填入表示该集合的区域内。通常从 n 个集合的交集填起，根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。如果交集的数字是未知的，可以设为 x。根据题目中的条件，列方程并解方程。

例 6.4

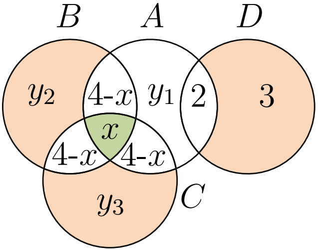
对 24 名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查，其统计结果如下：

- 会英、日、德和法语的人分别为 13，5，10 和 9 人；
- 同时会英语和日语的有 2 人；
- 会英、德和法语中任两种语言的都是 4 人；
- 会日语的人既不懂法语也不懂德语；

分别求只会一种语言的人数和会 3 种语言的人数。

解： 令 A, B, C, D 分别表示会英、法、德、日语的科技人员的集合。设同时会三种语言的人有 x 人，只会英、法、德一种语言的人数分别为 y_1, y_2, y_3。

将 x, y_1, y_2, y_3 分别填入图中相应的区域，并依次填入人数



根据已知条件，列方程组如下

$$
\begin{cases}
y_1 + 2(4 - x) + x - 2 = 13 \\
y_2 + 2(4 - x) + x = 9 \\
y_3 + 2(4 - x) + x = 10 \\
y_1 + y_2 + y_3 + 3(4 - x) + x = 19
\end{cases}
$$

解得 $x = 1$，$y_1 = 4$，$y_2 = 2$，$y_3 = 3$。即会三种语言的有 1 人，只会英语、法语、德语的人分别为 4、2、3 人。

定理

6.2 包含排斥原理. 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 n 个性质。S 中任何元素 x 或者具有性质 P_i 或者不具有性质 P_i，两种情况必居其一。令 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，则 S 中不具有性质 $P_1, \cdots, P_n$ 的元素为

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |S| + \sum_{i=1}^{n}(-1)^1|A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n}(-1)^2|A_i \cap A_j| \\
+ (-1)^3 \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\
+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

其中 $\overline{A_i}$ 表示 S 中元素 x 不含性质 P_i 的集合。

例 6.5

求 1 到 1000 之间（包含 1 和 1000）既不能被 5 和 6，也不能被 8 整除的数的个数。

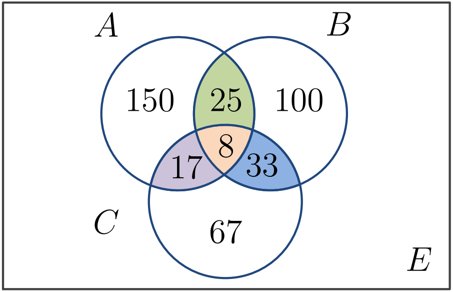
解：方法一：设

$$S=\{x|x\in\mathbb{Z}\wedge 1\le x\le 1000\},\quad A=\{x|x\in S\wedge x\text{ 可被 5 整除}\}$$
$$B=\{x|x\in S\wedge x\text{ 可被 6 整除}\},\quad C=\{x|x\in S\wedge x\text{ 可被 8 整除}\}$$

用 $|T|$ 表示有穷集 T 中元素个数，$\lfloor x\rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数，$\mathrm{lcm}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最小公倍数，则有

$$\begin{aligned}
|A| &= \lfloor 1000/5\rfloor = 200\\
|B| &= \lfloor 1000/6\rfloor = 166\\
|C| &= \lfloor 1000/8\rfloor = 125\\
|A\cap B| &= \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6)\rfloor = 33\\
|A\cap C| &= \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8)\rfloor = 25\\
|B\cap C| &= \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8)\rfloor = 41\\
|A\cap B\cap C| &= \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8)\rfloor = 8
\end{aligned}$$

绘制文氏图，将数字依次填入文氏图中。



因此 1 到 1000 之间不能被 5，6，8 整除的数的个数为

$$1000-(200+100+33+67)=600$$

方法二：采用包含排斥原理

$$1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$$

章节内容

基本集合恒等式

- 幂等律 $A \cup A = A$， $A \cap A = A$
- 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 交换律 $A \cup B = B \cup A$， $A \cap B = B \cap A$
- 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 同一律 $A \cup \varnothing = A$， $A \cap E = A$
- 零律 $A \cup E = E$， $A \cap \varnothing = \varnothing$
- 排中律 $A \cup \sim A = E$
- 矛盾律 $A \cap \sim A = \varnothing$

基本集合恒等式

- 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$
  $A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
  $\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$
  $\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$
  $\sim \varnothing = E$
  $\sim E = \varnothing$
- 双重否定律 $\sim (\sim A) = A$

例题

试证分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

证明： 对任意的 x，有

$$
\begin{aligned}
x \in A \vee x \in B \cap C &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge (A \cup C)
\end{aligned}
$$

故 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 成立，证毕。

例题

试证吸收律 $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$。

证：对于任意 x

$$\begin{aligned} x \in A \vee x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

由集合定义，可知 $x \in (A \cap B)$ 属于 A，故 $A \cup (A \cap B) = A$。

例 6.8

试证德摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明： 对任意的 x，有

$$
\begin{aligned}
x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
&\Leftrightarrow x\in A-B\wedge x\in A-C\\
&\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

证毕。

除了上述算律之外，还有一些关于集合运算性质的重要结果，例如

$$
\begin{aligned}
& A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B \\
& A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B \\
& A - B \subseteq A, A - B = A \cap \sim B
\end{aligned}
$$

例题

证明 $A-B=A\cap\sim B$。

证:

$$\begin{aligned} A\cap\sim B &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in E\wedge x\notin B \\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in E \\ &\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\in E \end{aligned}$$

故 $(A\cap\sim B)=(A-B)\cap E=A-B$。

集合证明题

证明方法包括：命题演算法、等式置换法。

命题演算证明法的书写规范（以下 X 和 Y 代表集合公式）

- 证 $X \subseteq Y$
  任取 x，$x \in X \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in Y$
- 证 $X = Y$
  方法一：分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$；
  方法二：任取 x，$x \in X \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in Y$。

注：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要条件。

例题

证明 $A-B=A\cap\sim B$。

证： 任取 x

$$
\begin{aligned}
x\in A-B &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B\\
&\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B
\end{aligned}
$$

等式置换法

例题

用等式置换法证明吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$。

证：

$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= (A \cap E) \cup (A \cap B) && (\text{同一律}) \\
&= A \cap (E \cup B) && (\text{分配律}) \\
&= A \cap E && (\text{零律}) \\
&= A && (\text{同一律})
\end{aligned}
$$

作业

p105 第 9 题（2）、（4），第 11 题
第 24 题

章节内容

内容回顾

- 集合：把一些事务汇集到一起组成一个整体就称作集合。
- 集合的关系：设 A，B 为集合，
  - $B \subseteq A$ 表示 B 是 A 的子集；
  - $A = B$ 表示集合 A 与集合 B 相等；
  - $B \subset A$ 表示 B 是 A 的真子集。
- 幂集：集合 A 所有子集所构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。
- 集合的运算：设 A, B 为集合

$$
\begin{aligned}
&\text{并集：} && A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \\
&\text{交集：} && A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \\
&\text{相对补集：} && A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \\
&\text{对称差集：} && A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)
\end{aligned}
$$

内容回顾

- 集合恒等式：幂等律、结合律、交换律、分配律、同一律、零律、排中律、矛盾律、吸收律、德摩根律、双重否定律。
- 证明技巧：命题演算法、等式置换法。

习题演练

1. 用适当的谓语表示下列集合
   - 小于 10 的非负整数集合
   - 偶整数集合
   - 5 的整倍数集合

解：

（1）$\{x|x<10\wedge x\in\mathbb{N}\}$ 或 $\{x|x<10\wedge x\in\mathbb{Z}\wedge x\geq 0\}$。

（2）$\{x|x=2k,k\in\mathbb{Z}\}$。

（3）$\{x|x=5k\ k\in\mathbb{Z}\}$。

2. 设 A, B, C 为任意集合，证明：

(1) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(2) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

(3) $(A - B) - C = (A - C) - B$

（1）$(A-B)-C=A-(B\cup C)$。

解：方法一：等式置换法

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= A\cap\sim B\cap\sim C\\ &= A\cap\sim(B\cup C)\\ &= A-(B\cup C)\end{aligned}$$

方法二：命题演算法

$$\begin{aligned}(A-B)-C &\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\notin C\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge\notin C\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\cup C\\ &\Leftrightarrow A-(B\cup C)\end{aligned}$$

（2）$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

解：方法一：等式置换法

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap\sim C)-(B\cap\sim C)\\
&= (A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C)\\
&= (A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C)\\
&= A\cap\sim B\cap\sim C\\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

方法二：命题演算法

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin C)\wedge\neg(x\in B\wedge x\notin C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin C)\wedge(x\notin B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin C\wedge x\notin B)\\
&\quad\ \vee(x\in A\wedge x\notin C\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge\notin C
\end{aligned}
$$

（3）$(A-B)-C=(A-C)-B$

解：方法一，等式置换法

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= A\cap\sim B\cap\sim C\\ &= A\cap\sim C\cap\sim B\\ &= (A-C)-B\end{aligned}$$

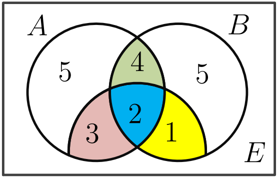
方法二：命题演算法

$$\begin{aligned}(A-B)-C &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge x\notin C\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin C\wedge x\notin B\\ &\Leftrightarrow (x\in A-C)\wedge x\notin B\end{aligned}$$

故 $(A-B)-C=(A-C)-B$。

3. 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这三中球。已知 6 个人会网球的人都会打篮球或排球。求不会打球的人数。

解：令 A, B, C 分表表示会打篮球、排球、网球的人的集合，E 表示 25 个人的集合。



由文氏图知，不会打球的人数为

$$25 - (5 + 4 + 2 + 3 + 1 + 5) = 5$$

第七章 二元关系

Chapter 7 Binary Relation

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

章节内容

章节内容

基本概念

定义 7.1 有序对

由两个元素 x 和 y（允许 $x = y$）按照一定顺序排列成的二元组称作一个有序对或序偶，记 $\langle x, y\rangle$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。

有序对 $\langle x, y\rangle$ 具有以下性质

- 当 $x \neq y$ 时，$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$；
- $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$。

注：有序对中元素是有序的。这些性质是二元集 $\{x, y\}$ 不具备的，由于集合的无序性，当 $x \neq y$ 时仍有 $\{x, y\} = \{y, x\}$。

例 7.1

已知 $\langle x+2, 4\rangle = \langle 5, 2x+y\rangle$，求 x 和 y

解： 由有序对相等的充要条件有

$$\begin{cases} x+2=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

解得 $x=3, y=2$。

定义 7.2 笛卡儿积

设 A, B 为集合，用 A 中元素为第一元素，B 中的元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合叫做 A 和 B 的笛卡儿积，记作 $A \times B$。笛卡儿积的符号化表示为

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \,|x \in A \wedge y \in B\}$$

- Example：设 $A = \{a, b\}$，$B = \{0, 1, 2\}$，则

$$A \times B = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$$
$$B \times A = \{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$$

由排列组合的知识不难证明，如果 $|A| = m$，$|B| = n$，有 $|A \times B| = mn$。

笛卡儿积运算的性质

- 对于任意集合 A，有 $A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$;
- 一般不满足交换律，即 $A \times B \neq B \times A$。除非：$A = \varnothing$，$B = \varnothing$，或 $A = B$。
- 一般不满足结合律，即 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$。除非：$A = \varnothing$，$B = \varnothing$，以及 $C \neq \varnothing$。
- 笛卡儿积运算满足对并和交运算满足分配律

$$
\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\
(B \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A) \\
A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\
(B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A)
\end{aligned}
$$

- $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$。

性质证明

证明 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

证：任取 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

所以有 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

练习

（1）证明，若 $A = B$，$C = D$，有 $A \times C = B \times D$；
（2）$A \times C = B \times D$ 能否推出 $A = B, C = D$？

证：（1）任取 $\langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in A \times C &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in D \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times D\end{aligned}$$

（2）特殊值法。不一定，反例如下：$A = \{1\}, B = \{2\}, C = D = \varnothing$，则 $A \times C = B \times D$，但 $A \neq B$。

章节内容

定义 7.3

如果一个集合满足以下条件之一

- 集合非空，且它的元素都是有序对；
- 集合是空集

则称该集合为一个二元关系，记作 R。二元关系也可以简称关系。对于二元关系 R，如果 $\langle x,y\rangle \in R$，则记作 xRy；如果 $\langle x,y\rangle \notin R$，则记作 $x\not{R}y$。

定义 7.4

设 A, B 为集合，$A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作从 A 到 B 的二元关系。特别地，当 $A = B$ 时，称作 A 上的二元关系。

Example: $A = \{0, 1\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，那么

$$R_1 = \{\langle 0, 2\rangle\}, R_2 = A \times B, R_3 = \varnothing, R_4 = \{\langle 0, 1\rangle\}$$

等都是从 A 到 B 的二元关系，而 R_3 和 R_4 同时也是 A 上的二元关系。

- 集合 A 上的二元关系的数目依赖 A 中元素数。如果 $|A| = n$，那么 $|A \times A| = n^2$，$A \times A$ 的子集就有 2^{n^2} 个。
- 每一个子集代表一个 A 上的二元关系，所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系。例如，$|A| = 3$，则 A 上有 $2^{3^2} = 512$ 个不同的二元关系。

思考： 若 R 是 A 上的关系，则 R 和 A 有何关联？

定义 7.5

对于任意集合 A，空集 $\varnothing$ 是 $A \times A$ 的子集，称作 A 上的空关系。定义 A 上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A。

$$E_A = \{\langle x, y\rangle \,|x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$$
$$I_A = \{\langle x, x\rangle \,|x \in A\}$$

Example: $A = \{1, 2\}$，则

$$E_A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$
$$I_A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

定义 7.5

除了上述 3 种特殊关系以外，还有一些常用的关系：

$$L_A = \{\langle x, y\rangle \,|x, y \in A, x \leq y\}$$
$$D_A = \{\langle x, y\rangle \,|x, y \in A, x|y\}$$
$$R_{\subseteq} = \{\langle x, y\rangle \,|x, y \in A, x \subseteq y\}$$

L_A 称作 A 上的小于等于关系，A 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集。D_A 称作 A 上的整除关系，其中 x 是 y 的因子，A 是非零整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的子集。$R_{\subseteq}$ 称作 A 上的包含关系，A 是由一些集合构成的集合族。

Example: $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，则

$$L_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$D_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

而令 $A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，则 A 上的包含关系是

$$\begin{aligned} R_\subseteq=\{&\langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{a\}\rangle,\langle\varnothing,\{b\}\rangle,\langle\varnothing,\{a,b\}\rangle,\langle\{a\},\{a\}\rangle \\ &\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,\langle\{b\},\{b\}\rangle,\langle\{b\},\{a,b\}\rangle,\langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle\} \end{aligned}$$

类似地还可以定义大于等于关系、小于关系、大于关系、真包含关系等。

集合表达式、关系矩阵、关系图

例 7.4

设 $A=\{1,2,3,4\}$，下面各式定义的 R 都是 A 上的关系，试用列元素法表示 R

（1）$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\text{是}y\text{的倍数}\}$；

（2）$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2\in A\}$；

（3）$R=\{\langle x,y\rangle \mid x/y\text{是素数}\}$；

（4）$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\neq y\}$

解：

（1）

$$R=\{\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$$

（2）

$$\begin{aligned}R=\{&\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle\\&\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}\end{aligned}$$

（3）

$$R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

（4）

$$\begin{aligned}R&=E_A-I_A\\&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\\&\quad\langle 3,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}\end{aligned}$$

关系矩阵

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, R 是 A 上的关系, 令 $r_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若} x_iRx_j \\ 0 & \text{若} x_i \not{R}\, x_j\end{cases}$

则 $(r_{ij})=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$ 是 R 的关系矩阵，记作 $\boldsymbol{M}_R$。

Example: $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$, 则 R 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

关系图

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 A 上的关系,R 的关系图记作 G_R。G_R 有 n 个顶点 $x_1,\cdots,x_n$。如果 $\langle x_i,x_j\rangle\in R$, 则在 G_R 上就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边。如关系 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ 的关系图，见图 7.2。

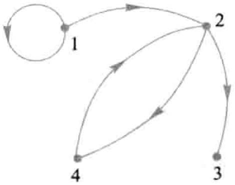


图 7.2

章节内容

关系的基本运算有 7 种，分别定义如下：

定义 7.6　设 R 为二元关系

（1）R 中所有有序对的第一元素构成的集合称作 R 的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}R$，形式化表示为

$$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

（2）R 中所有有序对的第二元素构成的集合称作 R 的**值域**，记作 $\mathrm{ran}R$，形式化表示为

$$\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

（3）R 的定义域和值域的并集称作 R 的**域**，记作 $\mathrm{fld}R$，形式化为

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

定义 7.7

设 R 为二元关系，R 的逆关系，简称为 R 的逆，记作 R^{-1}

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$$

定义 7.8

设 F, G 为二元关系，G 对 F 的右复合，记作 $F \circ G$

$$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t(\langle x, t\rangle \in F \land \langle t, y\rangle \in G)\}$$

类似地可以定义关系的左复合

$$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t(\langle x, t\rangle \in G \land \langle t, y\rangle \in F)\}$$

练习

设 A 是集合，R_1 和 R_2 是 A 上的关系，证明：

1. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$。
2. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$。

证：（1）任取 $\langle x, y \rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2 \\
&\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2 \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}
\end{aligned}
$$

（2）同理。

例 7.6

设 $F = \{\langle 3,3\rangle, \langle 6,2\rangle\}$，$G = \{\langle 2,3\rangle\}$，则

$$F^{-1} = \{\langle 3,3\rangle, \langle 2,6\rangle\}$$
$$F \circ G = \{\langle 6,3\rangle\}$$
$$G \circ F = \{\langle 2,3\rangle\}$$

若把二元关系看作是一种作用，$\langle x, y\rangle \in R$ 可以解释为 x 通过 R 的作用变到 y，那么右复合 $F \circ G$ 与左复合 $F \circ G$ 都表示两个作用的连续发生。

所不同的是：右复合$F \circ G$ 表示在右边的 G 是复合到 F 上的第二步作用。而左复合$F \circ G$ 恰好相反，其中 F 是复合到 G 上的第二步作用。这两种规定都是合理的。本书采用右复合的定义，而在其他书中可能采用左复合的定义，请读者注意两者的区别。

定义 7.9

设 R 为二元关系，A 是集合

- R 在 A 上的限制记作 $R \upharpoonright A$，其中

$$R \upharpoonright A = \{\langle x, y\rangle | xRy \wedge x \in A\}$$

- A 在 R 下的像记作 $R[A]$，其中

$$R[A] = \operatorname{ran}(R \upharpoonright A)$$

不难看出，R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 是 R 的子关系，而 A 在 R 下的像 $R[A]$ 是 $\operatorname{ran}R$ 的子集。

例 7.7

设 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$，则

$$R \upharpoonright \{1\} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$$
$$R \upharpoonright \varnothing = \varnothing$$
$$R \upharpoonright \{2,3\} = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$
$$R[\{1\}] = \{2,3\}$$
$$R[\varnothing] = \varnothing$$
$$R[\{3\}] = \{2\}$$

关系是集合，因此第六章所定义的集合运算对于关系也同样适用。为了使集合表达式更为简洁，进一步规定：

本节所定义的关系运算中逆运算优先于其他运算，而所有的关系运算都优先于集合运算，对于没有优先权的运算以括号决定运算顺序。

例如：$\mathrm{ran}F^{-1}$，$F \circ G \cup F \circ H$，$\mathrm{ran}(F \restriction A)$ 等都是合理的表达式。

定理 7.1

设 F 是任意的关系，则

1. $(F^{-1})^{-1} = F$；
2. $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$，$\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$。

证：（1）任取 $\langle x, y\rangle$，由逆的定义由

$$\langle x, y\rangle \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in F$$

（2）任取 x

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{dom}F^{-1} &\Leftrightarrow \exists y(\langle x, y\rangle \in F^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \exists y(\langle y, x\rangle \in F) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{ran}F \end{aligned}$$

定理 7.2

设 F, G, H 是任意的关系，则

1. $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
2. $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

证： （1）任取 $\langle x, y\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (F \circ G) \circ H &\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in F \circ G \wedge \langle t, y\rangle \in H) \\
&\Leftrightarrow \exists t((\exists s\, \langle x, s\rangle \in F \wedge \langle s, t\rangle \in G) \wedge \langle t, y\rangle \in H) \\
&\Leftrightarrow \exists t \exists s\, \langle x, s\rangle \in F \wedge \langle s, t\rangle \in G \wedge \langle t, y\rangle \in H \\
&\Leftrightarrow \exists s(\langle x, s\rangle \in F \wedge \exists t(\langle s, t\rangle \in G \wedge \langle t, y\rangle \in H)) \\
&\Leftrightarrow \exists s(\langle x, s\rangle \in F \wedge \langle s, y\rangle \in G \circ H) \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in F \circ (G \circ H)
\end{aligned}
$$

（2）任取 $\langle x, y\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (F \circ G)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in F \circ G \\
&\Leftrightarrow \exists t\ (\langle y, t\rangle \in F \wedge \langle t, x\rangle \in G) \\
&\Leftrightarrow \exists t\ (\langle x, t\rangle \in G^{-1} \wedge \langle t, y\rangle \in F^{-1}) \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}
\end{aligned}
$$

定理 7.3

设 R 是 A 上的关系，则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

定理 7.4

设 F, G, H 为任意关系，则

1. $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$
2. $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$
3. $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$
4. $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$

定理 7.5

设 F 为关系，A, B 为集合，则

1. $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$
2. $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$
3. $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$
4. $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

关系的幂运算

在左右复合的基础上可以定义关系的幂运算

定义 7.10

设 R 为 A 上关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为

1. $R^0 = \{\langle x, x\rangle \,|x \in A\}$
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$

注：由上述定义知,对于 A 上的任何关系 R 都有 $R^0 = I_A, R^1 = R$。

例 7.8

设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示。

解：R 和 R^2 的关系矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

R^3 和 R^4 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{M}^4 = \boldsymbol{M}^2$，即 $R^4 = R^2$，故

$$R^2 = R^4 = R^6 = \cdots, R^3 = R^5 = R^7 = \cdots$$

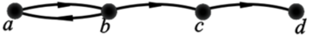
R^0 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关系图

$R^0, R^1, R^2, \cdots$ 的关系图如下图所示

R^0



R^1

$R^2 = R^4 = \cdots$

$R^3 = R^5 = \cdots$

幂运算的性质

定理 7.7

设 R 是 A 上的关系，$m, n \in \mathbb{N}$，则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
2. $(R^m)^n = R^{mn}$

证：（1）对于任意给定的 $m \in \mathbb{N}$，施归纳于 n。

当 $n = 0$ 时有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$ 成立，当 $n+1$ 时，有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1}$$

故对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$，有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$。

（2）由定理 7.7（1）显然有（2）。

幂运算的性质

定理 7.8

设 R 是 A 上的关系，若存在自然数 $s, t(s < t)$ 使得 $R^s = R^t$，则

1. 对任何 $k \in \mathbb{N}$，有 $R^{s+k} = R^{t+k}$；
2. 对于任何 $k, i \in \mathbb{N}$，有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t - s$；
3. 令 $S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q \in \mathbb{N}$ 有 $R^q \in S$。

证： （1）$R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$；

(2) 对 k 归纳。当 $k = 0$ 时，有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$；假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$ 成立，其中 $p = t - s$，则

$$
\begin{aligned}
R^{s+(k+1)p+i} &= R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p = R^{s+i} \circ R^p \\
&= R^{s+p+i} = R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i}
\end{aligned}
$$

最后一式根据定理 7.8（1）。

(3）令 $S=\{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in\mathbb{N}$ 有 $R^q\in S$。

证：任取 $q\in\mathbb{N}$，若 $q<t$，显然有 $R^q\in S$。
若 $q\geq t$，则存在自然数 k 和 i 使得

$$q=s+kp+i, \quad \text{其中} 0\leq i\leq p-1$$

于是

$$R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$$

而

$$s+i\leq s+p-1=s+t-s-1=t-1$$

故 $R^q\in S$。

章节内容

定义 7.11

设 R 为 A 上的关系

1. 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是**自反的**。
2. 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$，则称 R 在 A 上是**反自反的**。

- 自反：全域关系 E_A，恒等关系 I_A，小于等于关系 L_A，整除关系 D_A；
- 反自反：实数集上的小于关系，幂集上的真包含关系。

例 7.10

$A=\{1,2,3\}$，R_1,R_2,R_3 是 A 上的关系，

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$
$$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$$

说明 R_1，R_2，R_3 是否为 A 上的自反关系和反自反关系。

例 7.10

$A = \{1,2,3\}$，R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系，

$$R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle\}$$
$$R_3 = \{\langle 1,3\rangle\}$$

说明 R_1，R_2，R_3 是否为 A 上的自反关系和反自反关系。

解： 上述，R_2 自反，R_3 反自反，R_1 既不是自反也不是反自反的。

定义 7.12

设 R 为 A 上的关系

1. 若 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$，则称 R 为 A 上对称的关系。
2. 若 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x=y)$，则称 R 为 A 上反对称的关系。

- 对称关系：A 上的全域关系 E_A，恒等关系 I_A 和空关系 $\varnothing$;
- 反对称关系：恒等关系 I_A 和空关系是 A 上反对称的关系。

例 7.11

设 $A=\{1,2,3\}$，R_1,R_2,R_3 和 R_4 都是 A 上的关系，其中

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\},\ R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$
$$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\},\ R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$

说明 R_1,R_2,R_3,R_4 是否为 A 上对称和反对称的关系

解：R_1 : 对称和反对称，R_2 : 只有对称；R_3 : 只有反对称；R_4 : 不对称、不反对称。

定义 7.13

设 R 为 A 上的关系，若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R)$$

则称 R 为 A 上的传递关系。

例 7.12

设 $A = \{1, 2, 3\}$，R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系，其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$
$$R_3 = \{\langle 1, 3\rangle\}$$

说明 R_1, R_2, R_3 是否为 A 上的传递关系。

解：R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系，R_2 不是 A 上的传递关系。

定理 7.9

设 R 为 A 上的关系，则

1. R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$;
2. R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$;
3. R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$;
4. R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;
5. R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

（1）R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$；

证：充分性。由 R 在 A 上自反，可知对于任意 $x \in A$ 均有，$\langle x, x\rangle \in R$，即 $I_A \subseteq R$。

必要性。根据定义 $I_A = \{\langle x, x\rangle | x \in A\}$，因此对于任意的 $x \in A$，均有 $\langle x, x\rangle \in R$。满足 R 在 A 上是自反的定义。

（2）R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$；

证：充分性.
由反自反的定义，对于所有 $x \in A$，均有 $\langle x, x\rangle \notin R$，故 $I_A \cap R = \varnothing$。

必要性.
由于 $R \cap I_A = \varnothing$，故对于任意 $x \in A$，均有 $\langle x, x\rangle \notin R$，满足 R 在 A 上反自反的定义。

（3）R 在 A 上对称当且仅当 $R=R^{-1}$；

证：充分性.

由于 R 在 A 上对称，则有对于所有 $x,y\in A$ 并且 $\langle x,y\rangle\in R$ 均有 $\langle y,x\rangle\in R$，这满足 R 的逆的定义，因此 $R=R^{-1}$。

必要性.

由于 $R=R^{-1}$，因此任取 $\langle x,y\rangle$，均有

$$\langle x,y\rangle\in R\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R^{-1}$$

故 R 在 A 上是对称的。

（4）R 在 A 上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$；

证：充分性. 任取 $\langle x,y\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1} &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}\\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\end{aligned}$$

由于 R 在 A 上反对称，因此 $x=y$。故 $\langle x,y\rangle\in I_A$，从而证明了 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

必要性. 任取 $\langle x,y\rangle$，由于 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则有

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R^{-1} &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}\\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1}\\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle\in I_A\quad (R\cap R^{-1}\subseteq I_A)\\ &\Rightarrow x=y\end{aligned}$$

故 R 在 A 上是反对称的。

（5）R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$。

证：充分性. 任取 $\langle x, y\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \circ R &\Leftrightarrow \exists t\ (\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in R)\\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \quad (R\text{在}A\text{上传递})\end{aligned}$$

故 $R \circ R \subseteq R$。

必要性. 任取 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R &\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \circ R\\ &\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \quad (R \circ R \subseteq R)\end{aligned}$$

故满足 R 在 A 上是传递的定义。

例 7.13

设 A 是集合，R_1 和 R_2 是 A 上的关系，证明：

1. 若 R_1，R_2 是自反的和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的和对称的。
2. 若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的。

（1）若 R_1，R_2 是自反的和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的和对称的。

证：由于 R_1 和 R_2 是自反的，根据定理 7.9 有

$$I_A \subseteq R_1,\ I_A \subseteq R_2$$

又因为 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$，$R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$，故 $I_A \subseteq R_1 \cup R_2$，故 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的。
由于 R_1, R_2 是对称的，根据定理 7.9 有

$$R_1 = R_1^{-1}, R_2 = R_2^{-1}$$

由 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$，从而证明了 $R_1 \cup R_2$ 也是 A 上的对称关系。

（2）若 R_1 和 R_2 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的。

证：由 R_1 和 R_2 的传递性，有

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1,\ R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$$

根据定理 7.4

$$\begin{aligned}
(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2) &\subseteq (R_1 \cap R_2) \circ R_1 \cap (R_1 \cap R_2) \circ R_2 \\
&\subseteq R_1 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_2 \\
&\subseteq R_1 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \\
&\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap R_2 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \\
&\subseteq R_1 \cap R_2
\end{aligned}$$

从而证明了 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的传递关系。

关系性质的三种等价形式

表 7.1

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全为 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$ 且 $i \neq j$ 则 $r_{ji} = 0$	$\boldsymbol{M}^2$ 中 1 的位置，$\boldsymbol{M}$ 中对应位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边，是一对方向相反的边	两点之间有边，是一条有向的边	点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 也有边，则 x_i 到 x_k 也有边

例 7.14

判断图 7.3 中关系的性质，并说明理由

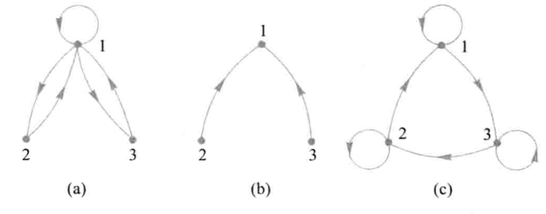


图 7.3

解：（a）该关系是对称的；既不自反也不是反自反；不是传递的；
（b）该关系是反自反；反对称；传递；
（c）该关系是自反；反对称；不是传递的。

表 7.2

运算	原有性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$R_1 \cap R_2$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$R_1 \cup R_2$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$
$R_1 - R_2$	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$
$R_1 \circ R_2$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

章节内容

引言

设 R 是 A 上的关系，我们希望 R 具有某些有用性质，如：自反性。如果 R 不具有自反性，可通过在 R 中添加一些有序对得到新的关系 R'，使得 R' 具有自反性。同时，希望添加的有序对尽可能少，称满足这样的 R' 为 R 的自反闭包。除此之外，还有对称闭包和传递闭包。

定义 7.14

设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的自反（对称或传递）闭包是 A 上的关系 R'，使得 R' 满足以下条件

1. R' 是自反的（对称或传递的）;
2. $R \subseteq R'$;
3. 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$。

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$，对称闭包记作 $s(R)$，传递闭包记作 $t(R)$。

- Example：令 $A = \{1, 2, 3\}$，$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$，则

$$r(R) = \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle$$

定理 7.10

设 R 为 A 上的关系，则有

1. $r(R) = R \cup R^0$
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$
3. $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

（1）$r(R) = R \cup R^0$

证：由于 $R^0 = I_A$，$I_A \subseteq R^0 \cup R$，根据定理 7.9 知 $R \cup R^0$ 是自反的，且满足 $R \subseteq R \cup R^0$。（条件（1）（2））
设 R'' 在 A 上包含 R 的自反关系，则有 $R \subseteq R''$ 和 $I_A \subseteq R''$。任取 $\langle x, y\rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle \in R \cup R^0 &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \cup I_A \\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R'' \cup R'' = R'' \end{aligned}$$

故 $R \cup R^0 \subseteq R''$（条件（3））。综上，$R \cup R^0$ 满足定义 7.14 的三个条件，故 $r(R) = R \cup R^0$。

（2）$s(R) = R \cup R^{-1}$

证：由于 $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R$，根据定理 7.9 知 $R \cup R^{-1}$ 在 A 上是对称的，且满足 $R \subseteq R \cup R^{-1}$。
设 R'' 在 A 上是包含 R 的对称关系，有

$$\langle x, y \rangle \in R \cup R^{-1} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R'' \cup R'' = R$$

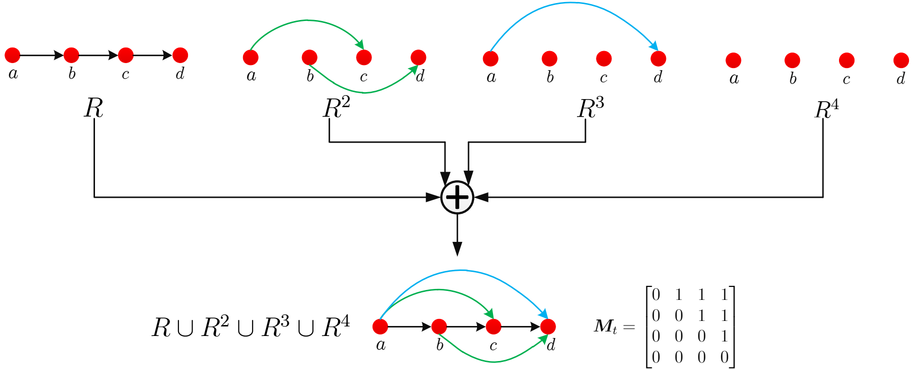
故 $s(R) = R \cup R^{-1}$。

“连通”关系

- R 是集合 A 上的关系
- 定义集合 A 上的“R 连通”关系 R^* 如下：
  - 对于任意 $x, y \in A$，xR^*y 当且仅当，存在 $t_1, t_2, \cdots, t_k \in A$（$k$ 为正整数），满足 $\langle x, t_1\rangle \in R; \langle t_1, t_2\rangle \in R, \cdots, \langle t_k, y\rangle \in R$。（可以表述为从 x 到 y 存在长度至少为 1 的通路）
  - 显然，对任意 $x, y \in A$，xR^*b 当且仅当存在某个正整数 k，使得 xR^ky。
- 于是：$R^* = R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^k \cup \cdots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$。

Example: 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$ 是 A 上的关系，求传递闭包 $t(R)$。

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{M}^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{M}_t=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

图 7.4

（3）$t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

证：先证 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq t(R)$。为此，只需证明对任意的正整数 n 有 $R^n\subseteq t(R)$ 即可。采用数学归纳法。

当 $n=1$ 时，有 $R^1=R\subseteq t(R)$。

假设当 $R^n\subseteq t(R)$，任取 $\langle x,y\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle\in R^{n+1} &\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in R^n\wedge\langle t,y\rangle\in R)\\
&\Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in t(R)\wedge\langle t,y\rangle\in t(R))\\
&\Rightarrow \langle x,y\rangle\in t(R)\quad (t(R)\text{在}A\text{上是传递的})
\end{aligned}
$$

再证 $t(R) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R^i$。为此只需证明 $R \cup R^2 \cup \cdots$ 是传递的

任取 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle$ 有

$$\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \wedge \langle y, z\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \\
\Rightarrow\ & \exists t(\langle x, y\rangle \in R^t) \wedge \exists s(\langle y, z\rangle \in R^s) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t \exists s(\langle x, z\rangle \in R^t \circ R^s) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t \exists s(\langle x, z\rangle \in R^{t+s}) \\
\Rightarrow\ & \langle x, z\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i
\end{aligned}$$

从而证明 $R \cup R^2 \cup \cdots$ 是传递的。

设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别为 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}_r, \boldsymbol{M}_s, \boldsymbol{M}_t$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_r &= \boldsymbol{M} + \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{M}_s &= \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^\top \\ \boldsymbol{M}_t &= \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^3 + \cdots\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 是和 $\boldsymbol{M}$ 同阶的单位矩阵，$\boldsymbol{M}^\top$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的转置矩阵，加法为逻辑加。

设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t，则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的边集相等，除了 G 的边以外，按照下述方法添加新的边

- 考察 G 的每个顶点，如果没有环就加上一个环，最终得到的是 G_r；
- 考察 G 的每一条边，如果有一条 x_i 到 $x_j (i \neq j)$ 的单向边，则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边，最终得到 G_s；
- 考察 G 的每个顶点 x_i，找出从 x_i 出发的所有第 2 步，3 步，$\cdots$，n 步长的路径（n 为 G 中的顶点数）。设路径的终点为 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_k}$。如果没有从 x_i 到 $x_{j_\ell} (\ell = 1, 2, \cdots, k)$ 的边，那么就加上这条边，在检查完所有顶点后就得到图 G_t。

例 7.15

设 $A = \{a, b, c, d\}$，$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$，则 R 和 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$ 的关系图如图 7.4 所示，其中 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图是使用上述方法直接从 R 的关系图得到的。

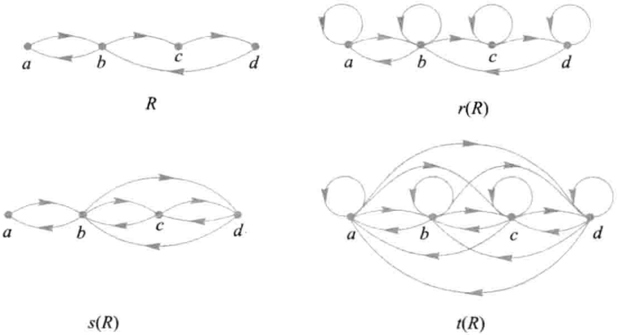


图 7.5

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，R 为 A 上的二元关系，$|A|=n$，则 A 上关系 R 的传递闭包为

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i = R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^n \tag{R1}$$

设 R 的关系矩阵为 $\boldsymbol{M}$，那么

$$\boldsymbol{M}_t=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^2+\cdots+\boldsymbol{M}^n \tag{R2}$$

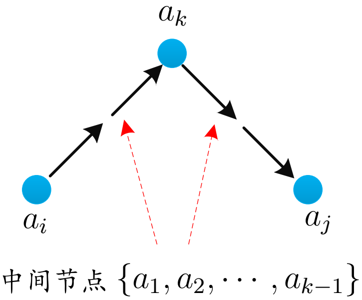
思考

1. 公式 (R1) 和 $t(R)=R^*=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 有何差别?

   A 中只有 n 个元素，如果在 R 中存在一条从 x 到 y 的长度至少为 1 的通路，那么存在一条不超过 n 的从 x 到 y 的通路。若 xR^*y，则存在某个自然数 $k(1\le k\le n)$，满足 xR^ky。
2. 公式 (R2) 的计算复杂度?

沃舍尔（Warshall）算法

- Warshall 算法高效的根源在于可以直接利用上一步计算结果中的有效信息简化当前计算过程；
- 如图，上一轮计算已经产生了 $a_i \to a_k$ 以及 $a_k \to a_j$ 的路径，当新一轮计算加入 a_k 作为中间节点时，立即可知存在 $a_i \to a_k \to a_j$ 的路径。



不直接计算 $\{\boldsymbol{M}^i, i = 1, \cdots, n\}$，Warshall 算法迭代式地用 $\boldsymbol{W}_{i-1}$ 计算 $\boldsymbol{W}_i$。

1. $\boldsymbol{W}_0$ 即为 R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$；
2. 对 $k = 1, 2, \cdots, n$，$W_k[i,j] = 1$ 当且仅当从 a_i 到 a_j 存在中间节点均在集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 内的通路。

$$W_k[i,j] = 1 \Leftrightarrow W_{k-1}[i,j] \vee (W_{k-1}[i,k] = 1 \wedge W_{k-1}[k,j] = 1)$$

3. $\boldsymbol{W}_n = \boldsymbol{M}_{t(R)}$，即所计算的传递闭包。

注：$W_k[i,j]$ 表示矩阵 $\boldsymbol{W}_k$ 的第 i 行第 j 列元素。

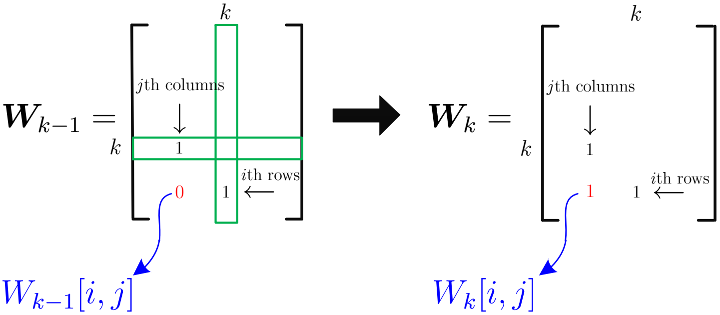
Warshall 算法的过程

1. $\boldsymbol{W}_0$ 是原关系 R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}$；
2. $\boldsymbol{W}_1$ 包含可以用第一个顶点作为中间节点的路径信息；

   $\vdots$
3. $\boldsymbol{W}_n$ 即为可用所有顶点作为中间点寻找有向路径，所以 $\boldsymbol{W}_n$ 即为 R 的传递闭包。
4. Warshall 算法的中心是可以通过 $\boldsymbol{W}_{k-1}$ 来计算 $\boldsymbol{W}_k$

递推公式

$$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j] \vee (W_{k-1}[i,k] \wedge W_{k-1}[k,j])$$

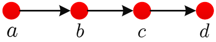


Warshall 算法

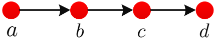
```
% Warshall Algorithm
Input: W = M_R
Output: W（t(R) 的关系矩阵）
for k = 1 : n do
    for i = 1 : n do
        for j = 1 : n do
            W[i, j] = W[i, j] ∨ (W[i, j] ∧ W[k, j]);
        end
    end
end
```

Example: 给定 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$ 是 A 上的关系，写出利用 Warshall 算法计算 R 的传递闭包 $t(R)$ 的步骤。

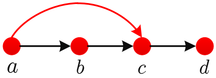
Step 1: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$



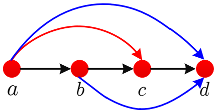
Step 2: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$



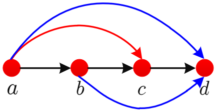
Step 3: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$



Step 4: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

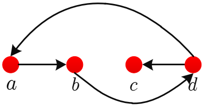


Step 5: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

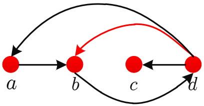


Example: 给定 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,a\rangle\}$。利用 Warshall 算法计算 R 的传递闭包 $t(R)$。

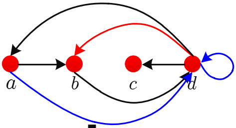
Step 1: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$



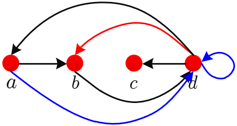
Step 2: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$



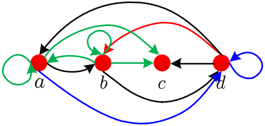
Step 3: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$



Step 4: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$



Step 5: $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$



定理 7.13

设 R 是非空集合 A 上的关系

1. 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的；
2. 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的；
3. 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 是传递的。

（2）若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的；

证：只证（2）。

由于 R 是 A 上的对称关系，故 $R = R^{-1}$，同时 $I_A = I_A^{-1}$

$$(R \cup I_A)^{-1} = R^{-1} \cup I_A^{-1}$$

根据定理 7.10，从而

$$r(R)^{-1} = (R \cup R^0)^{-1} = (R \cup I_A)^{-1} = R^{-1} \cup I_A^{-1} = R \cup I_a = r(R)$$

故 $r(R)$ 是 A 上对称关系。

- 欲证 $t(R)$ 是对称的，先证 R^i 是对称的，其中 i 是任意正整数。采用数学归纳法证明。当 $i=1$ 时，$R^i=R$，显然对称。假设 $R^i(i>1)$ 对称，任取 $\langle x,y\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in R^{n+1} &\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in R^n \wedge \langle t,y\rangle \in R) \\
&\Rightarrow \exists t(\langle t,x\rangle \in R^n \wedge \langle y,t\rangle \in R) \quad (R\text{对称，}R^n\text{对称}) \\
&\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R\circ R^n \\
&\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{n+1}
\end{aligned}
$$

因此 R^{n+1} 是对称的。故得证 R^i 为 A 上对称关系。

- 任取 $\langle x,y\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle \in t(R) &\Rightarrow \exists i(\langle x,y\rangle \in R^i) \\
&\Rightarrow \exists i(\langle y,x\rangle \in R^i) \quad (R^i\text{是对称的}) \\
&\Rightarrow \langle y,x\rangle \in t(R)
\end{aligned}
$$

从而证明了 $t(R)$ 的对称性质。

练习

给定 R 为 A（$|A| = n$）上关系，证明

1. $r(s(R)) = s(r(R))$；
2. $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$。

证：（1）

$$
\begin{aligned}
r(s(R)) &= r(R \cup R^{-1}) \\
&= (R \cup R^{-1}) \cup I_A \\
&= (R \cup I_A) \cup (R^{-1} \cup I_A) \\
&= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1} \\
&= s(R \cup I_A) \\
&= s(r(R))
\end{aligned}
$$

（2）$s(t(R)) \subseteq t(s(R))$。

• 注：由 $s(R)$ 为对称闭包，根据定理 7.13 知 $t(s(R))$ 也是对称的，因此只需证明：$t(R) \subseteq t(s(R))$。

$$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$t(s(R)) = (R \cup R^{-1}) \cup (R \cup R^{-1})^2 \cup \cdots \cup (R \cup R^{-1})^n$$

利用 $R^n \subseteq (R \cup R^{-1})^n$，得证 $s(t(R)) \subseteq t(s(R))$。

•$R^n \subseteq (R \cup R^{-1})^n$。采用数学归纳法证明，当 $n = 1$ 时，$R \subseteq R \cup R^{-1}$ 显然成立；假设 $R^n \subseteq (R \cup R^{-1})^n$ 成立，对于

$$\begin{aligned} R^{n+1} &= R^n \circ R \\ &\subseteq (R \cup R^{-1})^n \circ R \\ &\subseteq (R \cup R^{-1})^n \circ (R \cup R^{-1}) \\ &= (R \cup R^{-1})^{n+1} \end{aligned}$$

作业

p139-140：第 9 题（1）、（3），第 12 题，第 14 题
第 21 题，第 23 题（d）、（e）、（f）。

章节内容

定义 7.15

设 R 为非空集合 A 上的关系。如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。设 R 是一个等价关系，若 $\langle x, y\rangle \in R$，称 x 等价于 y，记 $x \sim y$。

例 7.16

设 $A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，如下定义 A 上的关系 R，验证 R 是 A 上的等价关系。

$$R = \{\langle x, y\rangle \, | x, y \in A \wedge x \equiv y (\mathrm{mod}\ 3)\}$$

其中 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$ 称作 x 与 y 模 3 相等，即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等。

解：不难验证 R 是 A 上的等价关系：

- $\forall x \in A$，有 $x = x(\mathrm{mod}\ 3)$；
- $\forall x, y \in A$，若 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$，则 $y \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$；
- $\forall x, y, z \in A$，若 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$，$y = z(\mathrm{mod}\ 3)$，则有 $x \equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$。

定义 7.16

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y|y \in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称x 的等价类，简记为 $[x]$ 或 $\overline{x}$。

从上述定义可知，x 的等价类是 A 中所有与 x 等价的元素构成的集合，如例 7.16 中等价类是

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

定理 7.14

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，则

1. $\forall x \in A$，$[x]$ 是 A 的非空子集；
2. $\forall x, y \in A$，如果 xRy，则 $[x] = [y]$；
3. $\forall x, y \in A$，如果 $x \not{R} y$，则 $[x] \cap [y] = \varnothing$；
4. $\cup\{[x] | x \in A\} = A$。

证：（1）由等价类的定义可知，$\forall x \in A$ 有 $[x] \subseteq A$。又由于等价关系的自反性有 $x \in [x]$，即 $[x]$ 非空。

（2）任取 z，有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \Rightarrow \langle z, x\rangle \in R \quad (R\text{对称})$$

因此有

$$\langle z, x\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle z, y\rangle \in R \Rightarrow (y, z) \in R$$

从而证明了 $z \in [y]$，故有 $[x] \subseteq [y]$。同理得 $[y] \subseteq [x]$，故 $[x] = [y]$。

（3）$x, y \in A$，如果 $x \not R\, y$，则 $[x] \cap [y] = \varnothing$；

证：假设 $[x] \cap [y] \neq \varnothing$，则存在 $z \in [x] \cap [y]$，从而 $z \in [x] \wedge z \in [y]$，即 $\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$ 成立。根据 R 的对称性和传递性，必有 $\langle x, y\rangle \in R$，与 $x \not R\, y$ 矛盾，即假设错误，故原命题成立。

（4）$\cup\{[x] | x \in A\} = A$。

证：先证 $\cup\{[x] | x \in A\} \subseteq A$，任取 y，有

$$y \in \cup\{[x] | x \in A\} \Rightarrow \exists x(x \in A \wedge y \in [x]) \Rightarrow y \in A \quad ([x] \subseteq A)$$

从而 $\cup\{[x] | x \in A\} \subseteq A$。

再证 $A \subseteq \cup\{[x] | x \in A\}$。任取 y，有

$$y \in A \Rightarrow y \in [y] \wedge y \in A \Rightarrow y \in \cup\{[x] | x \in A\}$$

从而 $A \subseteq \{[x] | x \in A\}$ 成立。

定义 7.17

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记作 A/R，即

$$A/R = \{[x]_R | x \in A\}$$

Example: 设 $A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，如下定义 A 上的关系 R:

$$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x \equiv y (\text{mod } 3)\}$$

求 A 关于 R 的商集。

解：A 关于 R 的商集为：$\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$。

与等价关系及商集有密切联系的概念就是集合的划分

定义 7.18

定义 A 为非空集合，若 A 的子集族π，（$\pi \subseteq P(A)$，是 A 的子集构成的集合）满足下面的条件：

1. $\varnothing \notin \pi$；
2. $\forall x \forall y (x, y \in \pi \land x \neq y \to x \cap y = \varnothing)$；
3. $\cup \pi = A$。

则称 π 是 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块。

例 7.17

设 $A=\{a,b,c,d\}$，判断如下 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_5$ 哪些是 A 的划分。

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$$
$$\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$
$$\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\}$$
$$\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$$
$$\pi_5=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$$
$$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}$$

π_1 和 π_2 是 A 的划分，其他都不是 A 的划分。

- 如果把商集和划分的定义相比较，易知商集就 A 的一个划分，并且不同的商集将对应于不同的划分。
- 反之，任给 A 的一个划分 π，如下定义 A 上的关系 R

$$R = \{\langle x, y\rangle \,|x, y \in A \wedge x\text{与}y\text{在}\pi\text{的同一划分块里}\}$$

则 R 为 A 上的等价关系，且等价关系的商集就是 π。

练习

给定 $A=\{a,b,c,d\}$，集合 A 的划分 $\pi=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$，求与 π 对应的等价关系 R 的关系矩阵。

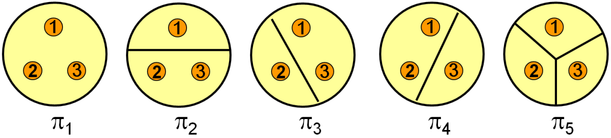
解： R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

例题 7.18

给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系。

解：如图所示，先给出 A 的所有划分



这些划分与 A 上的等价关系之间的一一对应是：π_1 对应于全域关系 E_A，π_5 对应于恒等关系 I_A，π_2,π_3,π_4 分别对应 R_2,R_3,R_4

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$$
$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$$
$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

章节内容

定义 7.19

设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系，记作 $\preccurlyeq$。设 $\preccurlyeq$ 为偏序关系，如果 $\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$，则记作 $x \preccurlyeq y$，读作 x “小于等于” y

Remark: “小于等于”不是指数的大小，而是指在偏序关系中的顺序性。x “小于等于” y 的含义是：依照这个序，x 排在 y 前面或者 x 就是 y。

Example: 集合 A 上的恒等关系 I_A、整除关系、小于等于关系、包含关系均是偏序关系。

定义 7.20

设 $\preccurlyeq$ 为非空集合 A 上的偏序关系，定义

1. $\forall x, y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$;
2. $\forall x, y \in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq \vee y \preccurlyeq x$。

定义 7.21

设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，如果 $\forall x, y \in A$, x 和 y 都是可比的，则称 R 为 A 上的全序关系（或线序关系）

Remark: 具有偏序关系 $\preccurlyeq$ 的集合 A 中任取两个元素 x 和 y 可能有下列几种情况发生

$$x \prec y \text{（或 } y \prec x\text{）},\ x = y,\ x \text{ 与 } y \text{ 不是可比的}$$

定义 7.22

集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起称作偏序集，记作 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$。

定义 7.23

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，$\forall x, y \in A$，如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 y 覆盖 x。

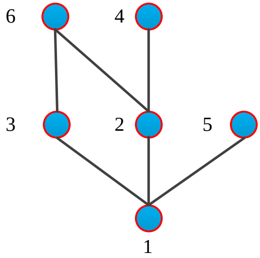
Example: $\{1, 2, 4, 6\}$ 集合上的整除关系有 2 覆盖 1；
4 和 6 覆盖 2；
4 不覆盖 1，因为有 $1 \prec 2 \prec 4$；
6 也不覆盖 4，因为 $4 \prec 6$ 不成立。

哈斯图

1. 在画偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 的哈斯图时，首先适当排列顶点的顺序，使得 $\forall x, y \in A$，若 $x \prec y$，则将 x 画在 y 的下方；
2. 对于 A 中两个不同的元素 x 和 y，如果 y 覆盖 x，就用一条线段连接 x 和 y。

例 7.19

画出偏序集 $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, R_{整除} \rangle$ 的哈斯图。



定义 7.24

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in B$

1. 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立，则称 y 为 B 的最小元；
2. 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立，则称 y 为 B 的最大元；
3. 若 $\forall x(x \in B \wedge x \preccurlyeq y \rightarrow x = y)$ 成立，则称 y 为 B 的极小元；
4. 若 $\forall x(x \in B \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x = y)$ 成立，则称 y 为 B 的极大元。

性质：

（1）对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个；

（2）最小元和最大元不一定存在，如果存在一定唯一；

（3）最小元一定是极小元；最大元一定是极大元；

（4）孤立节点既是极小元，也是极大元。

定义 7.25

设 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in A$

1. 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立，则称 y 为 B 的上界；
2. 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立，则称 y 为 B 的下界；
3. 令 $C = \{y | y\text{为}B\text{的上界}\}$，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界；
4. 令 $D = \{y | y\text{为}B\text{的下界}\}$，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界。

性质：

（1）下界、上界、下确界、上确界不一定存在；

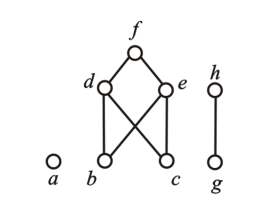
（2）下界、上界存在不一定唯一；

（3）下确界、上确界如果存在，则唯一；

（4）集合的最小元是其下确界，最大元是其上确界；反之不对。

例 7.21

设偏序集 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 如图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元和最大元。



解：极大元：a, b, c, g；极小元：a, f, h，没有最小元与最大元。

例 7.22

设 X 为集合，$A = (P(X) - \varnothing) - X$，且 $A \neq \varnothing$。若 $|X| = n$ 问：

1. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最大元？
2. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最小元？
3. 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由

解：

（1）（2）$\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 不存在最小元和最大元，因为 $n \geq 2$；

（3.1）$\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极小元是 X 的所有单元集，即 $\{\{x\}|x \in X\}$；

（3.2）$\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 的极大元恰好比 X 少一个元素，即 $X - \{x\}, x \in X$。

作业

p142：第 32 题（1）、（3），（5）
第 36 题。

章节内容

- 定义回顾

1. 有序对与笛卡儿积；
2. 二元关系，从 A 到 B 的关系，A 上的关系；
3. 关系表示法、关系矩阵、关系图；
4. 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂；
5. 关系运算的性质：A 上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递；
6. A 上关系的自反、对称、传递闭包；
7. A 上的等价关系、等价类、商集和 A 的划分；
8. A 上的偏序关系与偏序集，最小最大元、极小极大元、上下界、上下确界。

- 定理回顾

定理 7.2

设 F, G, H 是任意的关系，则

1. $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$;
2. $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

定理 7.4

设 F, G, H 为任意关系，则

1. $F \circ (G \circ H) = F \circ G \cup F \circ H$;
2. $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$;
3. $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$;
4. $(F \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$。

定理 7.7

设 R 为 A 上的关系，$m, n \in \mathbb{N}$，则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;
2. $(R^m)^n = R^{mn}$

定理 7.10

设 R 为 A 上的关系，则有

1. $r(R) = R \cup R^0$
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

练习 1

设 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle x,y\rangle\,|x,y\in A$且$x+2y\leq 6\}$。（1）求 R 的集合表达式，写出 R 的关系矩阵，并绘制关系图；（2）求 R 得自反闭包、对称闭包、传递闭包，并绘制关系图。

解： （1）$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$；其关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

（2）$r(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$；

$s(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$；

$t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$。

练习 2

设 R 为 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的关系，$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，有

$$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow b=d$$

（1）证明 R 为等价关系；（2）求商集 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/R$。

解：（a）$\forall\langle a,b\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，有 $\langle a,b\rangle R\langle a,b\rangle$，因此 R 是自反的；
（b）$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，有

$$\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\Leftrightarrow b=d\Rightarrow\langle c,d\rangle R\langle a,b\rangle$$

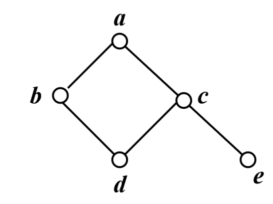
（c）对于任意的 $\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle\wedge\langle c,d\rangle R\langle e,f\rangle&\Leftrightarrow b=d\wedge d=f\\&\Rightarrow b=f\\&\Leftrightarrow\langle a,b\rangle R\langle e,f\rangle\end{aligned}$$

（2）$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\mathbb{R}=\{\mathbb{N}\times\{n\}|n\in\mathbb{N}\}$。

练习 3

设偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如图所示。



（1）写出 A 和 R 的集合表达式；

（2）求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元。

解:(1)$A = \{a, b, c, d\}$,$R = \{\langle d, b\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, c\rangle, \langle e, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle\} \cup I_A$;

（2）极大元和最大元是 a；极小元是 d, e，没有最小元。

第十三章 递推方程与生成函数

Chapter 13 Recursive Equation and Generating Function

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

章节内容

章节内容

例 13.1

设序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，简记为 $\{a_n\}$，一个把 a_n 与某些个 $a_i(i < n)$ 联系起来的等式称作关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程。

给定递推方程和适当初始值，就可以确定唯一序列。

例 1：Fibonacci 数列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots$,

递推方程 $\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$

初值 $\quad f_0 = 1, f_1 = 1$

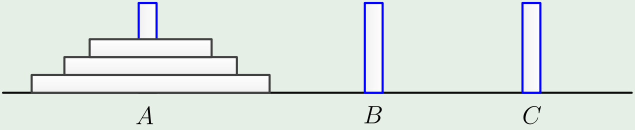
例 2：阶乘计算数列：$1, 2, 6, 24, 5!, \cdots$,

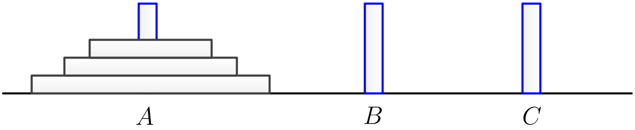
递推方程 $\quad F(n) = nF(n-1)$

初值 $\quad F(1) = 1$

例 13.1 Hanoi 塔

图 13.1 中有 A, B, C 三个柱子，在 A 柱上放着 n 个圆盘（对图 13.1，$n = 3$），其中小圆盘放在大圆盘的上边。从 A 柱将这些圆盘移到 C 柱上。如果把一个圆盘从一个柱子移动到另一个柱子称作一次运动，在移动和放指时允许使用 B 柱，但不允许大圆盘放到小圆盘上面，问：把所有的圆盘从 A 移动到 C 总计需要多少次移动？





下面给出一种递归算法，其中 Hanoi(X, Y, m) 表示从 X 柱移动 m 只盘子到 Y 柱的过程，move(X, Y) 表示从 X 柱移动 1 只盘子到 Y 柱的过程。

算法 Hanoi(A, C, n)

1. if $n = 1$ then move(A, C);
2. else
3.   Hanoi$(A, B, n-1)$;
4.   move(A, C);
5.   Hanoi$(B, C, n-1)$;

设使用 Hanoi 算法移动 n 个盘子的总次数为 $T(n)$。步骤 3 使用 Hanoi 算法递归地将 $n-1$ 个盘子从 A 柱搬到 B 柱，移动次数为 $T(n-1)$；步骤 4 利用 1 次移动将最下面的大盘子从 A 柱移动到 C 柱；步骤 5 利用 Hanoi 算法移动 $n-1$ 个盘子从 B 柱移动到 C 柱，移动次数为 $T(n-1)$。因此

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

初始值 $T(1) = 1$，故 $T(n) = 2^n - 1$。

章节内容

定义 13.2

设递推方程满足

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2 H(n-2) - \cdots a_k H(n-k) = f(n) \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \cdots, H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为常数，$a_k \neq 0$，这个方程称作k 阶常系数线性（linear）递推方程。当 $f(n) = 0$ 时称这个递推方程为k 阶常系数线性齐次（homogeneous）递推方程。

注：关于 Hanoi 塔的递推方程不是齐次的，关于 Fibonacci 数列的递推方程式齐次的。

齐次方程（homogeneous function）是数学的一个方程，是指简化后的方程中所有非零项的指数相等，也叫所含各项关于未知数的次数。其方程左端是含未知数的项，右端等于零。通常齐次方程是求解问题的过渡形式，化为齐次方程后便于求解。

齐次函数：$f(ax)=af(x)$，自变量伸缩 a 倍，对应函数伸缩 a 倍。

定义 13.3

设给定常系数线性齐次递推方程如下：

$$\begin{cases} H(n) - a_1H(n-1) - a_2H(n-2) - \cdots - a_kH(n-k) = 0 \\ H(0) = b_0,\ H(1) = b_1,\ H(2) = b_2,\ \cdots,\ H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

特征方程：$x^k - a_1x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$

特征方程的根称作递推方程的特征根

Example: 递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程 $x^2 - x - 1 = 0$

特征根 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

定理 13.1

设 q 是非零复数，则 q^n 是递推方程的解当且仅当 q 是它的特征根

证：

$$
\begin{aligned}
& q^n\text{是递推方程的解} \\
\Leftrightarrow\ & q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \cdots q_k q^{n-k} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & q^{n-k}(q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \cdots - a_k) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \cdots - a_k = 0 \quad (\text{因为} q \neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & q\text{是它的特征根}
\end{aligned}
$$

定理 13.2

设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程的解，c_1, c_2 为任意常数，则

$$c_1h_1(n) + c_2h_2(n)$$

也是这个递推方程的解。

证：

$$h_1(n) - a_1h_1(n-1) - a_2h_1(n-2) - \cdots - a_kh_1(n-k) = 0 \quad (1)$$
$$h_2(n) - a_1h_2(n-1) - a_2h_2(n-2) - \cdots - a_kh_2(n-k) = 0 \quad (2)$$

对式（1）左右两边同乘 c_1，式（2）左右两边同乘 c_2，并相加可得

$$(c_1h_1(n) + c_2h_2(n)) - \cdots - a_k(c_1h_1(n-k) + c_2h_2(n-k)) = 0$$

定理 13.2 推论

若 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是递推方程的特征根，则 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \cdots + c_kq_k^n$ 是该递推方程的解，其中 $c_1, c_3, \cdots, c_k$ 是任意常数。

定义 13.4

若对递推方程（13.2）由不同的初值确定的每个解 $h(n)$ 都存在一组常数 $c_1', c_2', \cdots, c_k'$，使得

$$h(n) = c_1' q_1^n + c_2' q_2^n + \cdots + c_k' q_k^n$$

成立，则称 $c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$ 为该递推方程的通解。

定理 13.3

设 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 是递推方程（13.2）不等的特征根，则

$$H(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$$

为该递推方程的通解

证：设 $h(n)$ 是递推方程的任意一个解，其中 $h(0), h(1), \cdots, h(k-1)$ 由初值 $b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$ 唯一确定。将初值代入得到线性方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0 \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_k q_k = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ c_1 q_q^{k-1} + c_2 q_2^{k-1} + \cdots + c_k q_k^{k-1} = b_{k-1} \end{cases}$$

如果这个方程组有唯一解 $c_1', c_2', \cdots, c_k'$，那么说明 $h(n) = c_1' q_1^n + c_2' q_2^n + \cdots + c_k' q_k^n$，从而证明了 $H(n)$ 是递推方程的通解。

例题 13.2

求解 Fibonnaci 数列的递推方程

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{特征根为：} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解：通解为 $f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 代入初值 $f_0 = 1, f_1 = 1$，得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解方程组得 $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$。故

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

有重根时的通解结构

定理

若 q 是递推方程的 e 重特征根，则

$$q^n, nq^n, \cdots, n^{e-1}q^n$$

是递推方程的线性无关的解。

Example: $H(n) - 3H(n-1) + 4H(n-3) = 0$。

定理 13.4

设 $q_1, q_2, \cdots, q_t$ 是递推方程（13.2）的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，其中 $i = 1, 2, \cdots, t$，令

$$H_i(n) = (c_{i1} + c_{i2}n + \cdots + c_{ie_i}n^{e_i-1})q_i^n$$

那么该递推方程的通解是 $H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$。

例 13.4

求解一下递推方程

$$\begin{cases} H(n) - 3H(n-1) + 4H(n-3) = 0 \\ H(0) = 1, H(1) = 0, H(2) = 0 \end{cases}$$

解：特征方程 $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$，特征根为 $-1, 2, 2$，通解为

$$H(n) = (c_1 + c_2 n)2^n + c_3(-1)^n$$

其中待定常数满足以下方程

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ 4c_1 + 8c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $c_1 = \frac{5}{9}, c_2 = -\frac{1}{3}, c_3 = \frac{4}{9}$。故 $H(n) = \frac{5}{9}2^n - \frac{1}{3}n2^n + \frac{4}{9}(-1)^n$。

$$H(n) - a_1 H(n-1) - \cdots - a_k H(n-k) = f(n),\ n \geq k, a_k \neq 0, f(n) \neq 0$$

定理 13.5

设 $\overline{H(n)}$ 是对应的齐次方程（13.2）的通解，$H^*(n)$ 是一个特解，则，则 $H(n) = \overline{H(n)} + H^*(n)$ 是递推方程的通解。

证： 将 $H(n)$ 代入递推方程中，可以验证 $H(n)$ 是递推方程的解。下面证明它是通解。设 $h(n)$ 是递推方程的一个解，只需证明 $h(n)$ 可以表示为对应齐次方程的一个解与特解 $H^*(n)$ 之和。因为 $h(n)$ 和 $H^*(n)$ 都是递推方程的解，因此有

$$h(n) - a_1 h(n-1) - \cdots - a_k h(n-k) = f(n)$$
$$H^*(n) - a_1 H^*(n-1) - \cdots - a_k H^*(n-k) = f(n)$$

两个式子相减可得

$$\begin{aligned}&[h(n)-H^*(n)]-a_1[h(n-1)-H^*(n-1)]\\&-\cdots-a_k[h(n-k)-H^*(n-k)]=0\end{aligned}$$

$h(n)-H^*(n)$ 是齐次解,即任意解 $h(n)$ 是一个齐次解与特解 $H^*(n)$ 之和。

•Case 1：$f(n)$ 为 n 的 t 次多项式，一般 $H^*(n)$ 也为 n 的 t 次多项式

注：如果递推方程的特征根是 1，就必须提高所设定特解的多项式次数，因为当把这个特解代入原方程时，最高次项和常数项都会消失，于是化简后等式左边多项式的次数将低于右边函数 $f(n)$ 的次数。

•Case 2：$f(n)$ 为指数函数 $A\beta^n$，A 表示某个常数。

- 若 β 不是特征根，则特解为 $P\beta^n$，其中 P 为待定系数；
- 若 β 是 $e(e \geq 1)$ 重特征根，则特解为 $Pn^e\beta^n$。

例 13.5

针对下面的顺序插入排序算法估计它在最坏情况下的时间复杂度 $W(n)$

算法 Insertsort(A,n)

1. for $j = 2 : n$
2. $\quad x = A[j]$
3. $\quad i = j - 1$
4. $\quad$ while $i > 0$ and $A[i] > x$ //行 4-7 将 $A[j]$ 插入 $A[1 \cdots j-1]$
5. $\qquad A[i+1] = A[i]$
6. $\qquad i = i - 1$
7. $\qquad A[i+1] = x$

解：最坏情况所做的比较次数满足以下递推方程

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

设该递推方程的特解为 $W^*(n) = P_1 n + P_2$，将其代入递推方程可得

$$P_1 n + P_2 - [P_1(n-1) + P_2(n-1)] = n - 1$$

化简得 $P_1 = n - 1$，故不存在常数 P_1。因此设通解为 $W^*(n) = P_1 n^2 + P_2 n$，代入递推方程有

$$(P_1 n^2 + P_2 n) - [P_1(n-1)^2 + P_2(n-1)] = n - 1$$

化简得 $2P_1 n - P_1 + P_2 = n - 1$，解得 $P_1 = 1/2$，$P_2 = -1/2$。

齐次方程 $W(n) - W(n-1) = 0$ 的特征方程为 $x - 1 = 0$，其解为 $x = 1$。故该递推方程的通解为

$$W(n) = c + \frac{n(n-1)}{2}$$

代入初值得 $c = 0$，故算法时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2)$。

例题

求递推方程 $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$ 的通解。

解：设 $a_n^* = P_1 n^2 + P_2 n + P_3$，代入递推方程可得

$$P_1 n^2 + P_2 n + P_3 + 5[P_1(n-1)^2 + P_2(n-1) + P_3] \\ + 6[P_1(n-2)^2 + P_2(n-2) + P_3] = 3n^2$$

合并同类项可得

$$\begin{cases} 12P_1 = 3 \\ -34P_1 + 12P_2 = 0 \\ 29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $P_1 = \frac{1}{4}$，$P_2 = \frac{17}{24}$，$P_3 = \frac{115}{288}$。

例题：Hanoi 塔

Hanoi 塔递推方程为

$$T(n) = 2T(n-1) + 1,\ T(1) = 1$$

求其通解。

解： 设通解为 $T^*(n) = P$，代入上式可得 $P = 2P + 1$，得 $P = -1$。齐次方程 $T(n) - 2T(n-1) = 0$ 的特征方程为 $x^2 - 2x = 0$，解得特征根为 $0, 2$。

$$\overline{T(n)} = c_1 2^n$$

结合特解可得通解

$$T(n) = \overline{T(n)} + T^*(n) = c_1 2^n - 1$$

根据初始值 $T(1) = c_1 2 - 1 = 1$，解得 $c_1 = 1$，故

$$T(n) = 2^n - 1$$

例题：通信编码问题

求递推方程 $a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$，$a_1 = 7$ 的通解

解：$a^*n = P8^{n-1}$，代入得 $P = 4$。齐次方程 $a_n - 6a_{n-1} = 0$ 的通解为 $\overline{a_n} = c_1 6^n$，故递推方程的通解为

$$a_n = c_1 6^n + 4 \cdot 8^{n-1}$$

代入初值得 $a_n = (6^n + 8^n)/2$。

例题

求 $H(n)-5H(n-1)+6H(n-2)=2^n$ 的一个特解

解：设 $H^*(n)=Pn2^n$，代入递推方程可得

$$Pn2^n-5P(n-1)2^{n-1}+6P(n-2)2^{n-2}=2^n$$

解得 $P=-2$，即 $H^*(n)=-n2^{n+1}$。

练习

求递推公式 $a_n - 2a_{n-1} = n + 3^n$，$a_0 = 0$ 的通解

解：设特解为 $a_n^* = P_1 n + P_2 + P_3 3^n$，代入递推式可得

$$\begin{aligned}
&(P_1 n + P_2 + P_3 3^n) - 2[P_1(n-1) + P_2 + P_3 3^{n-1}] = n + 3^n \\
\Leftrightarrow &- P_1 n + (2P_1 - P_2) + P_3 3^{n-1} = n + 3^n \\
\Rightarrow &P_1 = -1, P_2 = -2, P_3 = 3
\end{aligned}$$

故通解为 $a_n = c2^n - n - 2 + 3^{n+1}$。代入初值，得 $a_n = -2^n - n - 2 + 3^{n+1}$。

第十四章 图论

Chapter 14　Graph Theory

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

章节内容

章节内容

1. 图
2. 通路与回路
3. 图的连通性
4. 图的矩阵表示
5. 图的运算
6. 单元小结

Definition From Wikipedia

In mathematics, graph theory is the study of graphs, which are mathematical structures used to model pairwise relations between objects. A graph in this context is made up of vertices (also called nodes or points) which are connected by edges (also called arcs, links or lines). A distinction is made between undirected graphs, where edges link two vertices symmetrically, and directed graphs, where edges link two vertices asymmetrically.

Applications

Graphs can be used to model many types of relations and processes in physical, biological, social and information systems. Many practical problems can be represented by graphs. Emphasizing their application to real-world systems, the term network is sometimes defined to mean a graph in which attributes (e.g. names) are associated with the vertices and edges, and the subject that expresses and understands real-world systems as a network is called network science.

无向图与有向图

无序积

- 设 A, B 为任意两个集合，称

$$\{\{a, b\} | a \in A \wedge b \in B\}$$

为 A 与 B 的无序积，记作 $A \& B$。

- 为了方便起见，将无序积中的无序对 $\{a, b\}$ 记为 (a, b)，并允许 $a = b$，因而 $A \& B = B \& A$。

定义 14.1

一个无向图 G 是一个有序二元组 $\langle V, E\rangle$，其中

1. V 是一个非空有穷集，称作顶点集，其元素称作顶点或结点；
2. E 是无序集合 $V\&V$ 的有穷多重子集，称作边集，其元素称作无向边，简称为边。

定义 14.2

一个有向图 D 是一个有序的二元组 $\langle V, E\rangle$ 其中

1. V 是一个非空有穷集，称作顶点集，其元素称作顶点或结点；
2. E 是笛卡儿积 $V \times V$ 的有穷多重子集，称作边集，其元素称作有向边，简称边.

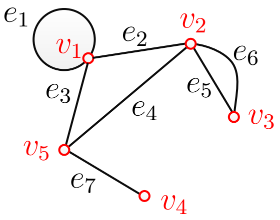
注：通常用图形来表示无向图和有向图；用小圆圈（或实心点）表示顶点，用顶点之间的连线表示无向边；用带箭头的连线表示有向边。

例题 14.1

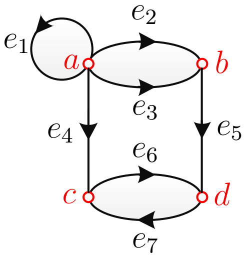
（1）给定无向图 $G=\langle V,E\rangle$，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E=\{(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_1,v_5),(v_4,v_5)\}$；

（2）给定有向图 $D=\{\langle V,E\rangle\}$，其中 $V=\{a,b,c,d\}$，$E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$

画出 G 和 D 的图形。



(a)



(b)

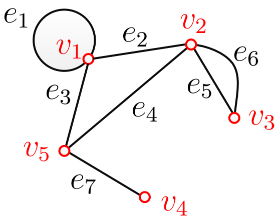
图的基本术语 1

- 无向图和有向图统称作图。通常用 G 表示无向图，D 表示有向图，用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集。$|V(G)|, |E(G)|$ 分别是 G 的顶点数和边数。若 $|V(G)| = n$，则称 G 为 n 阶图。
- 若 $|V(G)| < \infty$，$|E(G)| < \infty$，则称 G 为有限图。
- 在图 G 中，若边集 $E(G) = \varnothing$，则称 G 为零图；若 G 为 n 阶图，则称 G 为n 阶零图，记作 N_n，特别地，称 N_1 为平凡图。
- 在图的定义中规定顶点集 V 为非空集，但在图的运算中可能产生顶点集合为空集的运算结果，为此规定顶点集为空集的图为空图，并将空图记作 $\varnothing$。

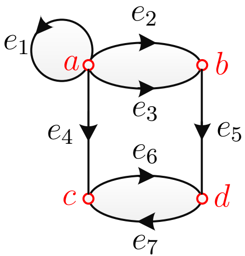
图的基本术语 2

- 将图的集合定义转化成图形表示之后，常用 e_k 表示无向边 (v_i, v_j)（或有向边 $\langle v_i, v_j\rangle$），并称顶点或用字母标定的图为标定图，否则称为非标定图。
- 将有向图的各条有向边改成无向边后所得到的无向图称作这个有向图的基图。
- 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图，$e_k = (v_i, v_j) \in E$，称 v_i, v_j 为 e_k 的端点，e_k 和 $v_i(v_j)$ 关联
  - 若 $v_i \neq v_j$，则称 e_k 与 $v_i(v_j)$ 的关联次数为 1；
  - 若 $v_i = v_j$，则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 2，并称 e_k 为环。
  - 如果顶点 v_i 不与边 e_k 关联，则称 e_k 与 v_i 关联次数为 0。

- 若两个顶点 v_i 和 v_j 之间有一条边连接，则称这两个顶点相邻。若两条边至少有一个公共端点，则称这两条边相邻。
- 图中没有边关联的顶点称作孤立点。



(a)



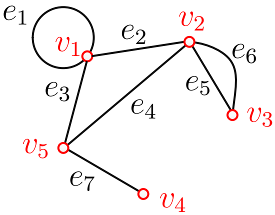
(b)

图的基本术语 3

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$，$\forall v \in V$

- 称 $N_G(v) = \{u | u \in V \wedge (u,v) \in E \wedge u \neq v\}$ 为 v 的邻域。
- 称 $\overline{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ 为 v 的闭邻域。
- 称 $I_G(v) = \{e | e \in E \wedge e\text{与}v\text{相关联}\}$ 为 v 的关联集。

Example: 如图所示，求 v_2 的邻域、闭邻域、关联集。

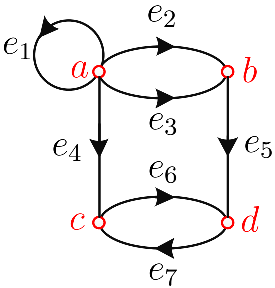


图的基本术语 4

设有向图 $D=\langle V,E\rangle$，$\forall v\in V$，

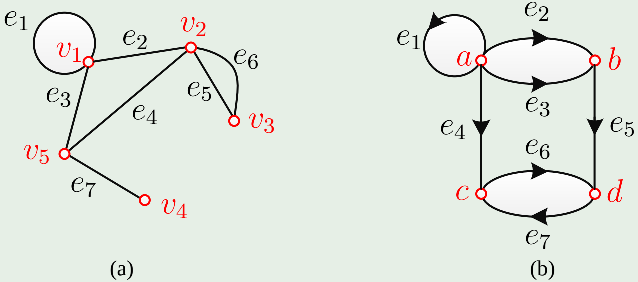
- 称 $\Gamma_D^+(v)=\{u|u\in V\wedge\langle v,u\rangle\in E\wedge u\neq v\}$ 为 v 的后继元集。
- 称 $\Gamma_D^-(v)=\{u|u\in V\wedge\langle u,v\rangle\in E\wedge u\neq v\}$ 为 v 的先驱元集。
- 称 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$ 为 v 的邻域。
- 称 $\overline{N}_D(v)=N_D(v)\cup\{v\}$ 为 v 的闭邻域。

Example: 如图所示，求 b 得后继元集、先驱元集、邻域、闭邻域。



练习

1. 写出图 (a) 顶点 v_1 的领域，闭邻域，关联集；
2. 写出图 (b) 顶点 d 的后继元集，先驱元集，邻域，和闭邻域。

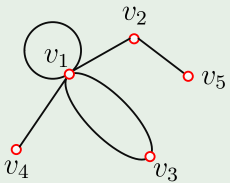


解：（1）$N_G(v_1) = \{v_2, v_5\}$，$\overline{N}_G(v_1) = \{v_1, v_2, v_5\}$，
$I_G(v_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$；

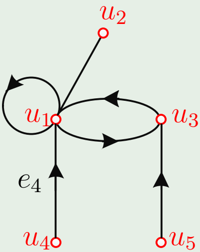
（2）$\Gamma_D^+(d) = \{c\}, \Gamma_D^-(d) = \{a, c\}, N_D(d) = \{a, c\}$，
$\overline{N}_D(d) = \{a, c, d\}$。

练习 1

1. 写出图 (a) 中顶点 v_1 的邻域 $N(v_1)$ 与闭邻域 $\overline{N}(v_1)$；
2. 写出图 (b) 中顶点 u_1 的先驱元集 $\Gamma^-(u_1)$、后继元集 $\Gamma^+(u_1)$、邻域 $N(u_1)$ 及闭邻域 $\overline{N}(u_1)$。



(a)



(b)

解：（1）$N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$, $\overline{N}(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$;

（2）$\Gamma^-(u_1) = \{u_3, u_4\}$，$\Gamma^+(u_1) = \{u_2, u_3\}$,

$\overline{N}(u_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$。

定义 14.3

在无向图中，如果关联一对顶点的无向边多于 1 条，则称这些边为平行边，平行边的条数称作重数。在有向图中，如果关联一对顶点的有向边多于 1 条，并且这些边的始点和终点相同（也就是它们的方向相同），则称这些变为平行边。含平行边的图称作多重图，既不含平行边也不含环的图称作简单图。

顶点的度数和握手定理

定义 14.4

- 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图，$\forall v\in V$，称 v 作为边的端点次数为 v 的度数，简称为度，记作 $d_G(v)$。在不发生混淆时，通常略去下标，简记 $d(v)$。
- 设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图，$\forall v\in V$ 称 v 作为边的始点的次数为 v 的出度，记作 $d_D^+(v)$，简记 $d^+(v)$。称 v 作为边的终点的次数为 v 的入度，记作 $d_D^-(v)$，简记为 $d^-(v)$。称 $d^+(v)+d^-(v)$ 为 v 的度数，记作 $d_D(v)$，简记为 $d(v)$。

基本术语 5

- 在无向图 G 中
  - 称 $\triangle(G) = \max\{d(v)|v \in V(G)\}$ 为 G 的最大度；
  - 称 $\delta(G) = \min\{d(v)|v \in V(G)\}$ 为 G 的最小度。
- 在有向图 D 中，可类似定义最大度$\triangle(D)$，最小度$\delta(D)$ 和最大出度 $\triangle^+(D)$，最小出度$\delta^+(D)$，最大入度$\triangle^-(D)$，最小入度$\delta^-(D)$。
- 称度数为 1 的顶点为悬挂顶点，与它关联的边称作悬挂边。度为偶数（奇数）的顶点称作偶度（奇度）顶点。

握手定理

定理 14.1（握手定理）

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$$

即所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍。

证：G 中每条边（包括环）均含有两个端点，所以在计算 G 中各项点度数之和时，每条边均提供 2 度。因此，m 条边，共提供 $2m$ 度。

定理 14.2（握手定理）

在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍；所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，都等于边数。

推论

任何图（无向的或有向的）中，奇度顶点的个数是偶数。

证：设图 $G=\langle V,E\rangle$，令

$$V_1=\{v|v\in V\wedge d(v)\text{为奇数}\}$$
$$V_2=\{v|v\in V\wedge d(v)\text{为偶数}\}$$

则 $V_1\cup V_2=V, V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于 $2m$ 和 $\sum_{v\in V_2}$ 均为偶数，所以 $\sum_{v\in V_1}d(v)$ 为偶数，但因 V_1 中顶点度数为奇数，所以 $|V_1|$ 必为偶数。

定义

- 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一个 n 阶无向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，称 $d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n)$ 为 G 的**度数列**。对于顶点标定的无向图，它的度数列是唯一的。
- 对于给定的非负整数列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，若存在以 $V=[v_1,v_2,\cdots,v_n]$ 为顶点集的 n 阶无向图 G，使得 $d(v_1)=d$，则称 d 是**可图化的**。特别地，若所得到的图是简单图，则称 d 是**可简单图化的**。
- 对有向图，称 $d^+(v_1),\cdots,d^+(v_n)$ 与 $d^-(v_1),\cdots,d^-(v_n)$ 分别为 D 的**出度列**和**入度列**。

问题：非负整数列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 在什么条件下是可图画的和可简单图化的?

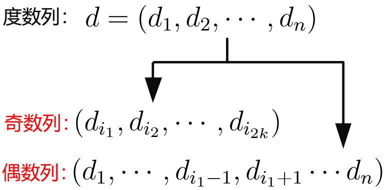
定理 14.3

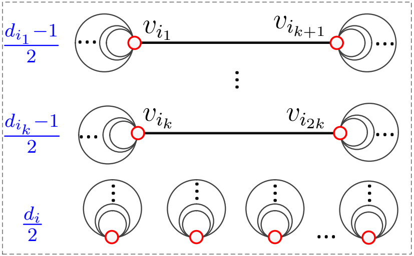
非负整数列 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$

$$d\text{可图化}\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i=0(\mathrm{mod}2)$$

证：• 根据握手定理，必要性显然。

•充分性，采用构造性证明。根据握手定理推论，可知序列 $d=(d_1,\cdots,d_n)$ 中奇数的个数为 $2k(0\le k\le\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$。记 d 中奇数为 $d_{i_1},\cdots,d_{i_{2k}}$。





Example

$(3, 3, 2, 1), (3, 2, 2, 1, 1)$ 是不可图化的，而 $(3, 3, 2, 2), (3, 2, 2, 2, 1)$ 是可图画的。

Theorem 14.4

设 G 为任意 n 阶无向简单图，则 $\triangle(G) \leq n-1$。

注：$\triangle(G) \leq n-1$ 是 G 可简单图化的必要不充分条件。

Example 14.2

判断下列各列非负整数列哪些是可图化的？哪些是可简单图化的？

(1) $(5,5,4,4,2,1)$

(2) $(5,4,3,2,2)$

(3) $(3,3,3,1)$

(4) $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $d_1>d_2>\cdots>d_n\geq 1$，且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数

(5) $(4,4,3,3,2,2)$

定义 14.5

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图（有向图），若存在双射函数 $f : V_1 \to V_2$，对于 $\forall v_i, v_j \in V_1$，满足

$$(v_i, v_j) \in E_1 \leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$$

且(v_i, v_j) 与 $(f(v_i), f(v_j))$的重数相同，则称 G_1 和 G_2同构，记作 $G_1 \cong G_2$。

例题

判断图 $G = \langle U, E\rangle$ 和 $H = \langle V, E'\rangle$ 是否同构?

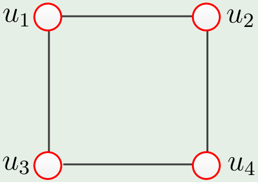


图 G

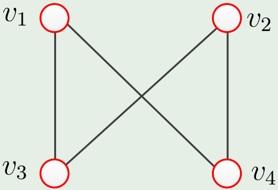


图 H

解：函数 f 满足 $f(u_1) = v_1$，$f(u_2) = v_4$，$f(u_3) = v_3$，$f(u_4) = v_2$。

$$(u_1, u_2) \in G,\ (v_1, v_4) \in H; \quad (u_2, u_4) \in G,\ (v_4, v_2) \in H$$
$$(u_3, u_4) \in G,\ (v_3, v_2) \in H; \quad (u_1, u_3) \in G,\ (v_1, v_3) \in H$$

故 G 与 H 同构。

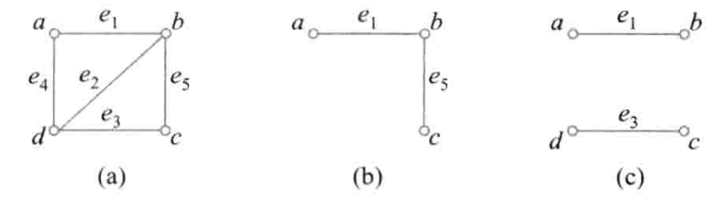
定义 14.6

- n 阶完全图。设 G 为 n 阶无向简单图，若 G 中每个顶点均与其余的 $n-1$ 个顶点相邻，则称 G 为n 阶无向完全图，简称n 阶完全图，记作 K_n $(n \geq 1)$；
- n 阶有向完全图。设 D 为 n 阶有向简单图，若 D 中每个顶点都邻接到其余的 $n-1$ 个顶点，则称 D 为n 阶有向完全图；
- n 阶竞赛图。设 D 为 n 阶有向简单图，若 D 的基图为 n 阶无向完全图 K，则称 D 为n 阶竞赛图；
- n 阶无向完全图，n 阶有向完全图，n 阶竞赛图的边数，分别为 $\frac{n(n-1)}{2}$，$n(n-1)$，$\frac{n(n-1)}{2}$。

- k-正则图。设 G 为 n 阶无向图，若 $\forall v \in V(G)$，均有 $d(v)=k$，则称 G 为k-正则图。
- 母图。设 $G=\langle V,E\rangle, G'=\langle V',E'\rangle$ 为两图（同为有向或无向），若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$，则称 G' 为 G 的子图，记作 $G'\subseteq G$。
- 真子图。若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称 G' 为 G 的真子图。若 $V'=V$，则称 G' 为 G 的生成子图。
- 导出的子图。设 $G=\langle V,E\rangle$，$V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\varnothing$，称以 V_1 为顶点集，以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集 E_1 的图为 G 的 V_1导出的子图，记作 $G[V_1]$。又设 $E_1\subset E$ 且 $E_1\neq\varnothing$，称以 E_1 为边集，以 E_1 中边关联的顶点为顶点集 V_1 的图为 D 的 E_1 导出的子图，记作 $G[E_1]$。

Example

在图 14.5 中，取 $V_1 = \{a, b, c\}$，（b）是（a）的 V_1 导出的子图。取 $E_1 = \{e_1, e_3\}$，（c）是（a）的 E_1 导出的子图。

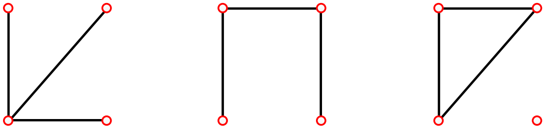


Example 14.3

(1) 画出 4 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图；
(2) 画出 3 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图。

解：(1) 由握手定理可知，所画的无向简单图各顶点度数之和为 $2 \times 3 = 6$，最大度数$\triangle(G) \leq 3$。于是所求无向简单图的应满足的条件是，将 6 分成 4 各非负整数，每个整数均大于等于 0 且小于等于 3，并且奇数的个数为偶数。将这些整数列排出来只有下面 3 种情况：

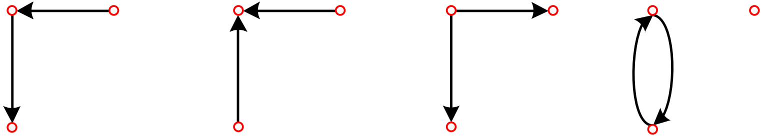
(a) 3, 1, 1, 1； (b) 2,2,1,1； (c) 2,2,2,0



（a） （b） （c）

(2) 由握手定理可知，所画有向简单图各顶点度数之和为 4，最大出度和最大入度均小于等于 2。度数列及入度出度列为

1. 度数列为 1, 2, 1
   （a.1）入度列 0, 1, 1，出度列 1, 1, 0;
   （a.2）入度列 0, 2, 0，出度列 1, 0, 1;
   （a.3）入度列 1, 0, 1，出度列 0, 2, 0;
2. 度数列为 2, 2, 0, 入度列 1,1,0，出度列 1, 1, 0。

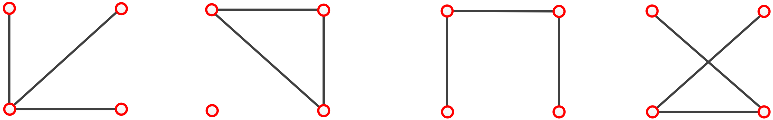

（a）　（b）　（c）　（d）

定义 14.9

- 补图：设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图，令

$$\overline{E} = \{(u,v) | u \in V \wedge v \in V \wedge u \neq v \wedge (u,v) \notin E\}$$

称 $\overline{G} = \langle V, \overline{E} \rangle$ 为 G 的补图。若 $G \cong \overline{G}$，则称 G 为自补图。



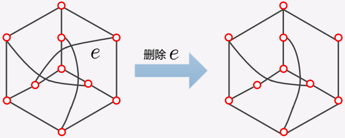
（a）（b）（c）（d）

注：n-阶图 G 的补图是 n 阶完全图删除 G 中的边所构成的图。

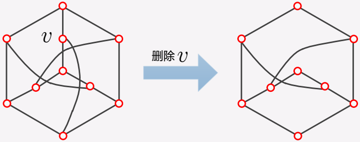
定义 14.10

设 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图。

- 删除边：设 $e \in E$，用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e，称作删除边e。又设 $E' \subset E$，用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中所有边，称作删除 E'。

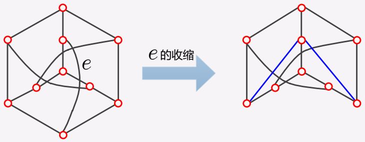


- 删除顶点：设 $v \in V$，用 $G - v$ 表示从 G 中去掉 v 所关联的一切边，称作删除顶点 v。又设 $V' \subset V$，用 $G - V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有的顶点，称作删除 V'。

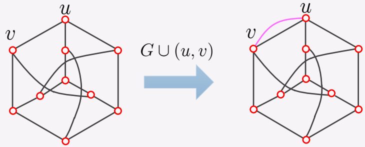


定义 14.10

- 收缩：设 $e=(u,v)\in E$，用 $G\backslash e$ 表示从 G 中删除 e 后，将 e 的两个端点 u,v 用一个新的顶点 w 替代，并使 w 关联除 e 外所有 u,v 的所有边，称作边的收缩。



- 加新边：设 $u,v\in V$（u,v 可能相邻，也可能不相邻），用 $G\cup(u,v)$ 或 $G+(u,v)$ 表示在 u 和 v 之间加一条边 u,v，称作加新边。



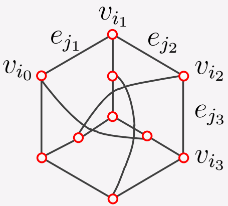
注：在收缩边和加边过程中可能产生环和平行边。

章节内容

定义 14.11

设 G 为无向标定图

- 通路：G 中顶点与边的交替序列，$\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}\cdots e_{j_l}v_{j_\ell}$ 称作 v_{i_0} 到 v_{i_ℓ} 的通路，其中 v_{i_0}, v_{i_1} 为 e_{j_1} 的端点，v_{i_0}, v_{i_ℓ} 的始点和终点。



$\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}v_{i_2}e_{j_3}v_{i_3}$

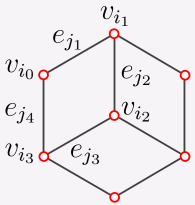
表示从 v_{i_0} 到 v_{i_3} 的通路，长度为3

- 回路：若始点和终点相同，即 $v_{i0} = v_{i_\ell}$，则称 Γ 为回路。若 Γ 的所有边各异，称 Γ 为简单通路。若 Γ 所有边各异，且 $v_{i_0} = v_{i_\ell}$ 则称 Γ 为简单回路。

定义 14.11

设 G 为无向标定图

- **初级通路**：Γ 路径上所有顶点各不相同，所有边各不相同。若始点终点相同，则称 Γ 为**初级回路**或**圈**。长度为奇数的圈称作**奇圈**，长度为偶数的圈称作**偶圈**。



$$\Gamma = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}v_{i_2}e_{j_3}v_{i_3}e_{j_4}v_{i_0}$$

表示从 v_{i_0} 到 v_{i_0} 的初级回路，长度为 4

- **复杂通路**：Γ 路径上，有边重复出现。若始点终点重合，则称**复杂回路**。
- 在有向图中，**通路**、**回路**及分类的定义与无向图中的非常类似，只是要注意边方向的一致性。

定理 14.5

在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v $(u \neq v)$ 存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路。

证： 设 $\Gamma = v_0e_1v_1e_2\cdots e_\ell v_\ell$ （$v_0 = u, v_\ell = v$）为 G 中从 u 到 v 的通路，假设 $\ell > n-1$，此时 Γ 上的顶点数大于 G 中的顶点数，于是必存在 $k, s, 0 \leq k < s \leq l$，使得 $v_s = v_k$，即在 Γ 上存在 v_k 到自身的回路 C，在 Γ 上删除 C，得到 $\Gamma' = v_0e_1v_1e_2\cdots v_ke_{s+1}\cdots e_\ell v_\ell$。此时，$\Gamma'$ 仍为 u 到 v 的通路，且长度至少比 Γ 少 1，若 Γ' 还不满足要求，重复上述过程。由于 G 是有限图，经过有限步骤，必得 u 到 v 长度小于等于 $n-1$ 的通路。

推论

在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v （$u \neq v$）存在通路，则 u 到 v 一定存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路（路径）。

定理 14.6

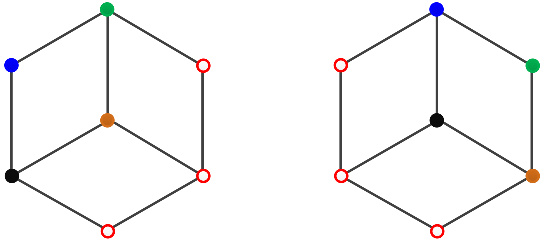
在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的回路，则一定存在 v 到 v 长度小于等于 n 的回路。

推论

在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的简单回路，则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的初级回路。

Remark

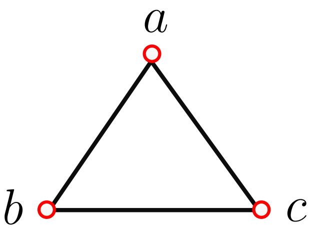
长度相同的圈都是同构的，因此在同构意义下的圈只有一个。在标定图中，圈表示称顶点和边的标记序列。主要两个标记序列不同，就认为两个圈是不同的，称这两个圈在定义意义上不同。



例题 14.4

无向完全图 K_3 的顶点依次标定 a, b, c，在定义意义下，K_3 有多少个不同的圈。

解： 在同构意义下，K_3 只有一个长度为 3 的圈。在定义意义下，不同的起点（终点）的圈是不同的，因此 K_3 有 6 个长度为 3 的圈：$abca, acba, bacb, bcab, cabc, cbac$。

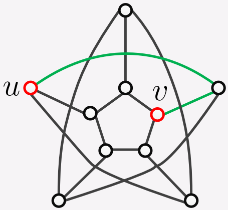


章节内容

定义 14.12

设无向图 $G = \langle V, E\rangle$

- 连通：若 $u, v \in V$ 之间存在通路，则称 u, v 是连通的，记作 $u \sim v$。规定：$v \in V, v \sim v$。



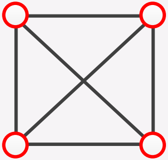
- 无向图中 G 顶点之间的连通关系 $\sim$ 是 V 上的等价关系，具有自反性，对称性和传递性。
  - 自反性：由定义知，若 $v \in V$，有 $v \sim v$;
  - 对称性：若存在 $u \sim v$，表明存在 u 到 v 的路径，由于无向图，同样也存在 v 到 u 的路径。
  - 传递性：若存在 $u \sim v, v \sim z$, 则 u 到 z 的路径为“u-v-z”。

无向图的连通性

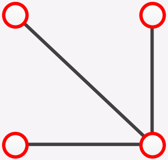
定义 14.12

设无向图 $G = \langle V, E\rangle$

- 连通图：G 是平凡图[a]或 G 中任意两个顶点是连通的 (connected)，则称 G 为连通图，否则称非连通图。



4阶完全图



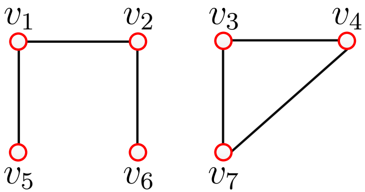
4阶连通图

- n 阶完全图，一共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边，4 阶连通图至少有 $n-1$ 条边。完全图一定是连通图，但连通图不一定是完全图。

[a] 只有一个顶点没有边

定义 14.13

- 连通分支：设无向图 $G = \langle V, E\rangle$，V_i 是 V 关于顶点之间的连通关系 $\sim$ 的一个等价类，称导出子图 $G[V_i]$ 为 G 的一个连通分支。G 的连通分支数记作 $p(G)$。



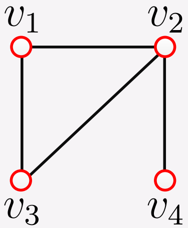
图中 $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ 和 $\{v_3, v_4, v_7\}$ 顶点之间连通关系是 V 上的等价关系。设 $\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ 顶点之间的连通关系为 R，设 V_i 是 v_1 关于 R 的等价类，即

$$V_i = [v_1]_R = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$$

G 的连通分支是图 G 的子图，即子图内部连通，但与图其他部分不连通。上图，连通分支数为 2。

定义 14.14

- **距离（distance）**：设 u, v 为无向图 G 中任意两个顶点，若 $u \sim v$，则称 u, v 之间长度最短的通路为 u, v 之间的短程线，短程线的长度称为 u, v 之间的距离，记作 u, v 不连通时，规定 $d(u, v) = \infty$。



如图 v_3 到 v_4 之间存在两条路径，$d(v_3, v_4) = 2$。

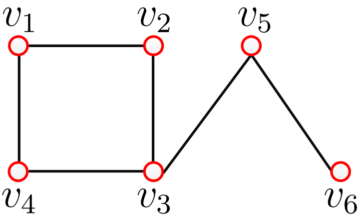
距离具有以下性质：$\forall u, v, w \in V(G)$

1. $d(u,v) \geq 0$，当且仅当 $u = v$ 时，等号成立；
2. 具有对称性：$d(u,v) = d(v,u)$；
3. 满足三角不等式：$d(u,v) + d(v,m) \geq d(u,w)$。

定义 14.15

- 点割集：设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，若存在 $V'\subset V$ 使得 $p(G-V')>p(G)$，且对于任意的 $V''\subset V'$，均有 $p(G-V'')=p(G)$，则称 V' 是 G 的点割集。若 $V'=\{v\}$，则称 v 为割点。

注：删除点集 V' 中的点，会使得 G 的连通分支数增加。

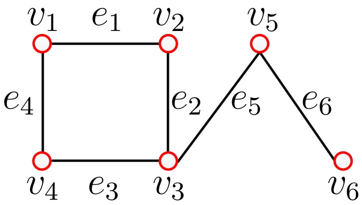


图中 $\{v_2,v_4\},\{v_3\},\{v_5\}$ 都是点割集，其中 $\{v_3\},\{v_5\}$ 是割点。

定义 14.16

- **边割集**:设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,若存在 $E'\subseteq E$ 使得 $p(G-E')>p(G)$,且对于任意的 $E''\subset E'$,均有 $p(G-E'')=p(G)$,则称 E' 是 G 的边割集,或简称割集。若 $E'=\{e\}$,则称 e 为割边或者桥。

注:删除边集 E' 中的边,会使得 G 的连通分支增加。



图中 $\{e_6\},\{e_5\},\{e_2,e_3\},\{e_1,e_2\},\{e_3,e_4\},\{e_1,e_4\},\{e_1,e_3\},\{e_2,e_4\}$ 都是割集,其中 e_6,e_5 是桥。

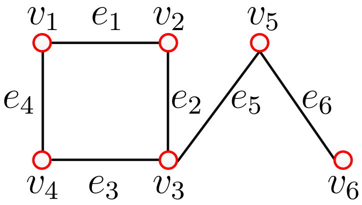
定义 14.17

- 连通度：设 G 为无向连通图且不是完全图，则称

$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' 为G的点割集\}$$

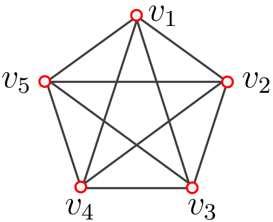
为 G 的**点连通度**，简称**连通度**，$\kappa(G)$ 有时简记为 κ。即点割集最小长度。

- 规定完全图 $K_n(n \geq 1)$ 的点连通度为 $n-1$，非连通图的点连通度为 0。若 $\kappa \geq k$，称 G 为**k-连通图**，k 为非负整数。
- k-连通图 G 删除任意 $k-1$ 个顶点，仍然是连通图。



图中点割集合为 $\{v_3\}, \{v_5\}, \{v_2, v_3\}$，因此 G 的连通度为 1。

- K_5 的连通度是 $\kappa = 4$，因而 K_5 是 1-连通图、2-连通图、3-连通图、4-连通图。



定义 14.18

- 边连通度：设 G 是无向连通图，称

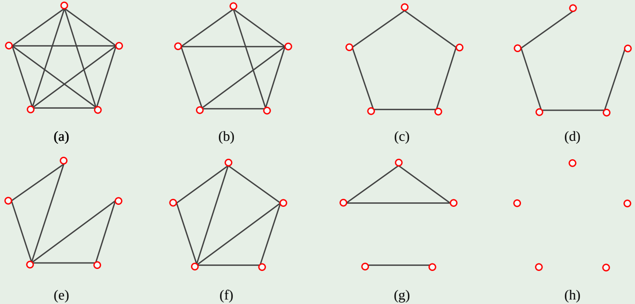
$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{为} G \text{的边割集}\}$$

为 G 的边连通度，简记为 λ。

- 规定非连通图的边连通度为 0。若 $\lambda(G) \geq r$，则称 G 为 r 边-连通图。

例题 14.6

求下列各图的点连通度和边连通度，并指出它们各是几连通图及几边连通图，最后将它们按照点连通程度及边连通程度排序。



解：设第 i 各图的点连通度为 κ_i，边连通度为 λ_i，$i = a, b, \cdots, h$，容易看出 $\kappa_a = \lambda_a = 4$, $\kappa_b = \lambda_b = 3$, $\kappa_c = \lambda_c = 2$，$\kappa_d = \lambda_d = 1$, $\kappa_e = 1, \lambda_e = 2$，$\kappa_f = \lambda_f = 2$，$\kappa_g = \lambda_g = 0$，$\kappa_h = \lambda_h = 0$。

定理 14.7

对于任何无向图 G，有[a]

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

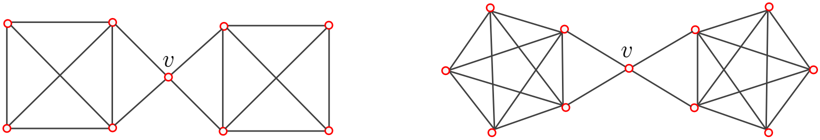
[a] $\delta(G)$ 表示 G 的最小度 $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$。

例题 14.7

（1）给出 $\kappa = \lambda = \delta$ 的无向简单图；

（2）给出 $\kappa < \lambda < \delta$ 的无向简单图。

解：见图



(a) (b)

有向图的连通性

定义 14.19

- 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为一个有向图，$\forall v_i, v_j \in V$，若从 v_i 到 v_j 存在通路，则称 v_i可达v_j，记作 $v_i \to v_j$。
- 规定 v_i 总可达自身的，即 $v_i \to v_i$。若 $v_j \to v_i$ 且 $v_j \to v_i$，则称 v_i 与 v_j 是相互可达的，记作 $v_i \leftrightarrow v_j$。规定 $v_i \leftrightarrow v_i$。
- $\to$ 与 $\leftrightarrow$ 都是 V 上的二元关系，$\leftrightarrow$ 为等价关系。

定义 14.20

设有向图 $D=\langle V,E\rangle$，$\forall v_i,v_j\in V$，若 $v_i\to v_j$，则称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的**短程线**，短程线的长度为 v_i 到 v_j 的**距离**，记作 $d(v_i,v_j)$。

定义 14.21

若有向图 $D = \langle V, E \rangle$ 的基图是连通图，则称 D 为弱连通图，简称连通图。若 $\forall v_i, v_j \in V, v_i \to v_j$ 与 $v_j \to v_i$ 至少成立其一，称 D 为单向连通图。若 $\forall v_i, v_j \in V$，均有 $v_i \leftrightarrow v_j$，则称 D 为强连通图。

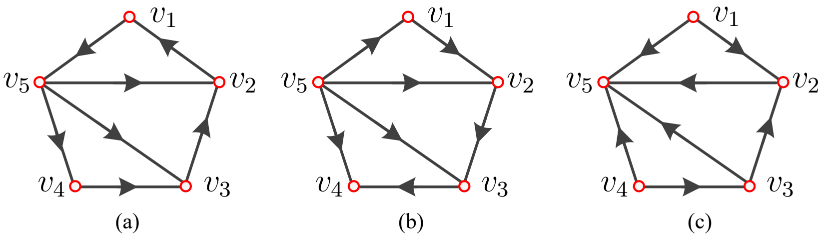
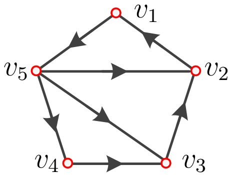


图 (a) 是强连通图，图 (b) 是单向连通图，图 (c) 是弱连通图。

定理 14.8

有向图 $D = \langle V, E\rangle$ 是强连接图当且仅当 D 存在经过每个顶点至少一次的回路。

证：充分性显然。

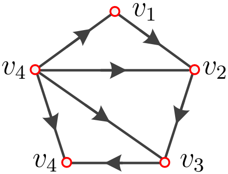


必要性。设 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，由 D 的强连通性，$v_i \to v_{i+1}, i = 1, 2 \cdots, n-1$。设 Γ_i 表示 v_i 到 v_{i+1} 的通路，$i = 1, 2, \cdots, n-1$。设 Γ_n 表示从 v_n 到 v_1 的通路，依次连接 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$ 所得到的回路经过 D 中每个顶点至少一次。

定理 14.9

有向图 D 是单向连通图当且仅当 D 存在经过每个顶点至少一次的通路。

证：充分性显然。



必要性，证明略。

扩大路径法

定义

- 设 $G = \langle V, E\rangle$ 为 n 阶无向图，Γ 为一条路径。若 Γ 的始点和终点都不与 Γ 外的顶点相邻，则称 Γ 为一条极大路径。
- 任给一条路径，如果它的始点和终点与路径外的某个顶点相邻，就把它延申到这个顶点。继续这一过程，直到最后不能向外延申为止。最后总能得到这一条极大路径，称如此构造一条极大路径的方法为极大路径法。
- 在有向图中可以同样定义极大路径的概念。

例题 14.8

设 G 为 $n(n \geq 4)$ 阶无向简单图，$\delta(G) \geq 3$，证明 G 中存在长度大于等于 4 的圈。

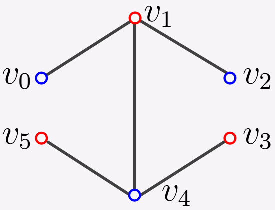
证：存在两种情况：连通图和非连通图。由于 $\delta(G) \geq 3$，若为非连通图，则 G 存在多个连通分支。不妨设 G 为连通图（非连通图类似讨论）。设 u, v 为 G 中任意两个顶点，由于 G 是连通图，因而 u, v 之间存在通路。根据定理 14.5 的推论可知，u, v 之间存在一条路径。用扩大路径法扩大这条路径，设最后得到的极大路径为 $\Gamma = v_0 v_1 \cdots v_l$。由于 $\delta(G) \geq 3$，必有 $l \geq 3$。

- 若 v_0 与 v_l 相邻，则 $\Gamma \cup (v_0, v_1)$ 为长度大于 4 的圈。
- 若 v_0 与 v_l 不相邻，由于 $d(v_0) \geq \delta(G) \geq 3$，因而 v_0 除了与 Γ 上的 v_1 相邻外，还存在 Γ 上的顶点 v_k 和 $v_t(1 < k < t < l)$ 与 v_0 相邻。于是 $v_0 v_1 \cdots v_k \cdots v_t v_0$ 为一个长度大于等于 4 的圈。

定义 14.22

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$

- 二部图：若能将 V 划分为 V_1 和 V_2（即 $V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\varnothing$ 且 $V_1\neq\varnothing$，$V_2\neq\varnothing$），使得 G 中每条边的两个端点都是一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为二部图（或二分图、偶图），称 V_1 和 V_2 为互补顶点子集，常将二部图 G 记作 $\langle V_1,V_2,E\rangle$。



- 完全二部图：若 G 是简单二部图，V_1 中的每个顶点均与 V_2 中的所有顶点相邻，则称 G 为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中 $r=|V_1|$，$s=|V_2|$。

定理 14.10

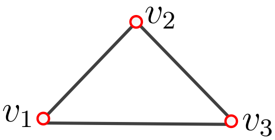
$n(n \geq 2)$ 阶无向图 G 是二部图当且仅当 G 中无奇圈[a]。

[a] 路径 Γ 上所有顶点各异、所有边各异，且始点和终点重合，称 Γ 为圈。若 Γ 长度为奇数，则称 Γ 为奇圈。

证：反证法。假设二分图 G 的环是奇圈。设奇圈为

$$\Gamma = v_1 v_2 \cdots v_{2k-1} v_1, \quad k \geq 1$$

相邻两点有边连接，如 v_1, v_2 之间存在边 (v_1, v_2)。由二部图的定义，不妨设 v_1 在集 X 中，则 v_2 必然在另一集合 Y 中。于是 v_3 在 X 中，v_4 在 Y 中，即奇数节点在 X 中，偶数节点在 Y 中。又 v_{2k-1} 为奇数节点,在 X 中,而 v_{2k-1} 和 v_1 之间存在边 (v_{2k-1}, v_1)，则 v_1 应在 Y 中。这与二部图的定义矛盾。因此，二部图 G 的圈长度不为奇数。



不妨设 $v_1 \in X$

- 对于 (v_1, v_2)，有 $v_1 \in X$ 和 $v_2 \in Y$；
- 对于 (v_2, v_3)，有 $v_2 \in Y$ 和 $v_3 \in X$；
- 对于 (v_3, v_1)，有 $v_3 \in X$ 和 $v_1 \in Y$。

$v_1 \in X$，$v_1 \in Y$ 与二部图的定义相矛盾。

章节内容

图的矩阵表示

图可以用集合来定义，常用图形和矩阵来表示。用矩阵表示便于用代数方法研究图的性质。为了用矩阵表示图，必须指定顶点或者边的顺序，使其称为标定图。

定义 14.23

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，令 m_{ij} 为顶点 v_i 与 e_j 的关联次数，则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为关联矩阵，记作 $\boldsymbol{M}(G)$。

Example: 图 14.15 所示的无向图的关联矩阵为

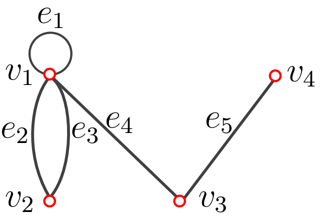
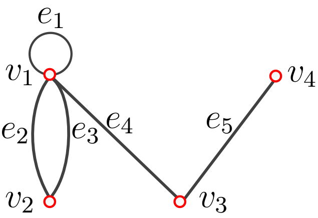


图 14.15

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$



$$M(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关联矩阵 $\boldsymbol{M}(G)$ 具有以下性质：

1. $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2\ (j = 1, \cdots m)$，即$\boldsymbol{M}(G)$ 每列元素之和均为 2，这是因为每条边恰好关联两个顶点（环所关联的两个顶点重合）。
2. $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i)$，即 $\boldsymbol{M}(G)$ 第 i 行元素之和为 v_i 的度数，$i = 1, \cdots, n$。
3. $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 2m$。（握手定理）
4. 第 j 列与第 k 列相同当且仅当 e_j 与 e_k 是平行边。
5. $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$当且仅当 v_i 是孤立点。

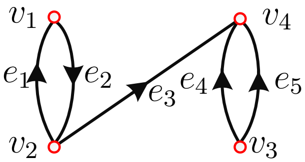
定义 14.24

设有向图 $D=\langle V,E\rangle$ 中无环，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，令

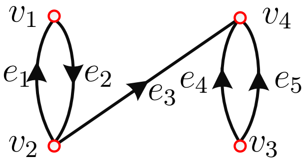
$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的**关联矩阵**，记作 $\boldsymbol{M}(D)$。

Example: 下图所示的图 D 的关联矩阵为



$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$



$$M(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

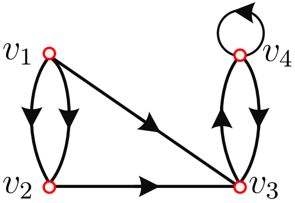
$\boldsymbol{M}(D)$ 具有下列各条性质：

1. 每一列恰好有一个 $+1$ 和一个 -1
2. -1 的个数等于 $+1$ 的个数，都等于边数 m。（握手定理）
3. 第 i 行中，$+1$ 的个数等于 $d^+(v_i)$ 的个数，-1 的个数等于 $d^-(v_i)$。
4. 平行边对应的列相同。

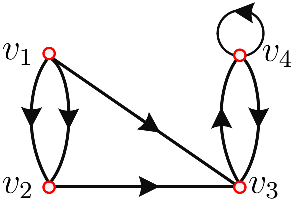
定义 14.25

设有向图 $D = \langle V, E\rangle$, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 的边的条数，称 $(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵，记作 $\boldsymbol{A}(D)$，简记为 $\boldsymbol{A}$。

下图所示的有向图 D 的邻接矩阵为



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵有以下性质：

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i)$， $i=1,2,\cdots,n$；
2. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j)$， $j=1,2,\cdots,n$；
3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} d^{(}v_i) = m, \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} d^{-}(v_j)$ m， 即 $\boldsymbol{A}(D)$ 中所有元素之和等于边数。（握手定理）

定理 14.11

设 $\boldsymbol{A}$ 为有向图 D 的邻接矩阵，D 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 ℓ 次幂 $\boldsymbol{A}^\ell$（$\ell\geq 1$）中

- $a_{ij}^{(\ell)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 ℓ 的通路数
- $a_{ii}^{(\ell)}$ 为 v_i 到自身长度为 ℓ 的回路数
- $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(\ell)}$ 为 D 中长度为 ℓ 的通路（含回路）总数
- $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(\ell)}$ 为 D 中长度为 ℓ 的回路总数。

注：这里的通路和回路可以是复杂通路和复杂回路，而且是在定义意义下计算通路数和回路数，即只需要两个顶点和边的标记序列不同，就认为它们表示的通路和回路不同。

证：只需证明 $a_{ij}^{(\ell)}$ 等于 v_i 到 v_j 长度为 ℓ 的通路数，对 ℓ 作归纳证明。

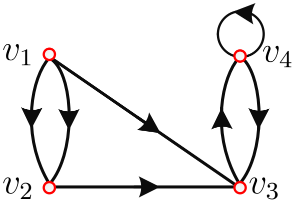
当 $\ell=1$ 时，根据邻接矩阵的定义，$a_{ij}^{(1)}$ 等于 v_i 到 v_j 的边数，即 v_i 到 v_j 的长度为 1 的通路数，结论成立。

假设 ℓ 时结论成立，即 $a_{ij}^{(\ell)}$ 等于 v_i 到 v_j 长度为 ℓ 的通路数，要证对 $\ell+1$ 成立，即 $a_{ij}^{(\ell+1)}$ 等于 v_i 到 v_j 长度为 $\ell+1$ 的通路数。

因为 v_i 到 v_j 长度为 $\ell+1$ 的通路由 v_i 到某一点 v_k 长度为 ℓ 的一条通路加上 v_k 到 v_j 的一条边组成，根据归纳法假设，v_i 到 v_k 长度为 ℓ 的通路数等于 $a_{ik}^{(\ell)}$，所以 v_i 到 v_j 长度为 $\ell+1$ 的通路数等于

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(\ell)}.a_{kj}^{(1)} = a_{ij}^{(\ell+1)}$$

得证对 $\ell+1$ 结论成立。



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

依次计算得

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix}0&0&3&4\\0&0&1&2\\0&0&2&3\\0&0&3&5\end{bmatrix}$$

从 $\boldsymbol{A}^1\sim\boldsymbol{A}^4$，不难看出，$D$ 中 v_2 到 v_4 长度为 1，2，3，4 的通路分别为 0，1，1，2 条。v_4 到自身长度为 1，2，3，4 的回路分别为 1，2，3，5 条，其中有复杂回路。D 中长度小于等于 4 的通路有 53 条，其中有 15 条回路。

推论

设 $\boldsymbol{B}_\ell = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^\ell$（$\ell \geq 1$），则 $\boldsymbol{B}_\ell$ 中元素之和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(\ell)}$$

表示 D 中长度小于等于 ℓ 的通路数，其中 $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(\ell)}$ 为 D 中长度小于等于 ℓ 的回路数。

证明略。

定义 14.26

设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，令

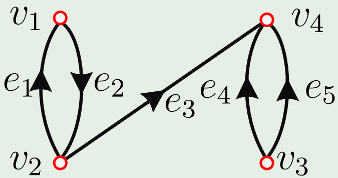
$$p_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{可达}v_j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

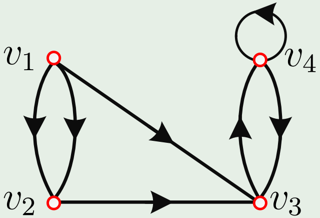
称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为 D 的可达矩阵，记作 $\boldsymbol{P}(D)$，简记为 $\boldsymbol{P}$。

注：对无向图可以同样定义邻接矩阵和可达矩阵，实际上只要把每一条无向边 (u,v) 看成一对方向相反的有向边 $\langle u,v\rangle$ 和 $\langle v,u\rangle$ 即可。定义 14.11 及推论对无向图同样成立。与有向图的区别是，无向图的邻接矩阵和可达矩阵都是对称的。

练习

写出下列有向图的可达矩阵





$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

章节内容

1. 图
2. 通路与回路
3. 图的连通性
4. 图的矩阵表示
5. 图的运算
6. 单元小结

定义 14.27

设图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$，若 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，则称 G_1 与 G_2 是不交的。若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，则称 G_1 和 G_2 是边不交的或边不重的。

定义 14.28

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）。

- 称以 $V_1 \cup V_2$ 为顶点集，以 $E_1 \cup E_2$ 为边集的图为 G_1 和 G_2 的并图，记作 $G_1 \cup G_2$，即 $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$。
- 称以 $E_1 - E_2$ 为边集，以 $E_1 - E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的差图，记作 $G_1 - G_2$。
- 称以 $E_1 \cap E_2$ 为边集，以 $E_1 \cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的交图，记作 $G_1 \cap G_2$。
- 称 $E_1 \oplus E_2$ 为边集，以 $E_1 \oplus E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的环和，记作 $G_1 \oplus G_2$。

注：在定义 14.28 中应注意以下几点：

- 若 $G_1 = G_2$，则 $G_1 \cup G_2 = G_2 \cap G_2$，而 $G_1 - G_2 = G_2 - G_1 = \varnothing$，这就是在图的定义中给出空图概念的原因。
- 当 G_1 和 G_2 边不重时，$G_1 \cap G_2 = \varnothing, G_1 - G_2 = G_1, G_2 - G_1 = G_2, G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$。
- 两个图的环可以用并、交、差给出：$G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$。

章节内容

1. 图

1. 图的定义：无向图、有向图、n 阶图、n 阶零图、平凡图、标定图、非标定图、基图。
2. 顶点与边的关联关系：关联、关联次数、环、孤立点。
3. 顶点度数：无向图 G 中顶点 v 的度数 $d(v)$；有向图 D 中顶点 v 的度数、出度、入度；最大度 $\triangle(G)$，最小度 $\delta(G)$；度数列。
4. 图的同构：存在双射函数...，图的同构关系是等价关系。
5. 完全图：n 阶完全图，n 阶有向完全图，n 阶竞赛图。
6. 母图、真子图、导出子图。

2. 通路与回路

1. 通路与回路的定义
2. 通路（回路）的长度、简单通路与简单回路、初级通路与初级回路（圈）。

3. 图的连通性

1. 连通、连通图、连通分支、连通分支数；
2. 点割集、割点、边割集、割集、割边（桥）；
3. 点连通度、k-连通图、边连通度、r 边-连通图；
4. 短程线，距离；
5. 弱连通图、单向连通图、强连通图；
6. 二部图、完全二部图。

4. 图的矩阵表示与图的运算

1. 关联矩阵、邻接矩阵、可达矩阵
2. 图的交、并、环、和。

5. 设无向图 G 有 10 条边，3 度和 4 度顶点各 2 各，其余顶点的度数均小于 3，问：G 中至少有几个顶点？在最小顶点的情况下，写出 G 的度数列及 $\triangle(G), \delta(G)$。

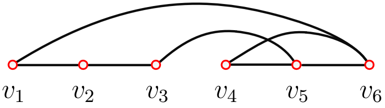
解：设 G 的阶数为 n，已知有 2 个 3 度顶点和 2 个 4 度顶点，其余 $n-4$ 个顶点的度数均小于等于 2。由握手定理可得

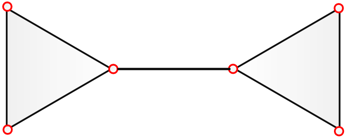
$$2m = 20 \leq 2\times 3 + 2\times 4 + (n-4)\times 2 = 2n+6$$

解得 $n \geq 7$，即 G 中至少有 7 个顶点。当 G 有 7 个顶点时，其度数列为 $(2,2,2,3,3,4,4)$，$\triangle(G)=4$，$\delta(G)=2$。

15. 度数列 $(2,2,2,2,3,3)$ 是否可简单图化？若可简单图化，试给出两个非同构的简单图。

解：可简单图化

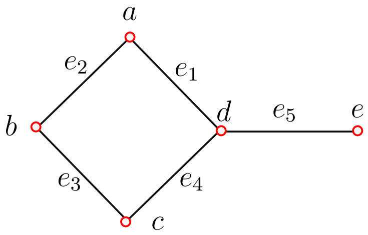




21. 无向图 G 如图所示

（1）求 G 的全部点割集和边割集，并指出其中的割点和桥（割边）;

（2）求 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$。

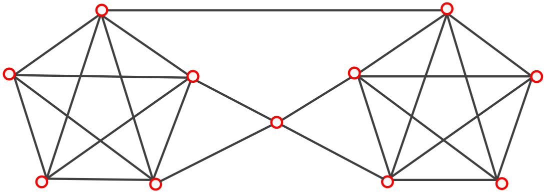


解：

（1）点割集 $\{d\}, \{a, c\}$，其中 $\{d\}$ 为割点；边割集为 $\{e_5\}, \{e_1, e_4\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$，$\{e_2, e_4\}$, 其中 $\{e_5\}$ 为桥。

（2）G 点连通度为 $\kappa(G) = 1$，边连通度为 $\lambda(G) = 1$。

23. 求图所示的图 G 的 $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$。



解：该图的 $\kappa(G) = 2$，$\lambda(G) = 3$，$\delta(G) = 4$。

28. 设 n 阶无向简单图为 3-正则图，且边数 m 与 n 满足

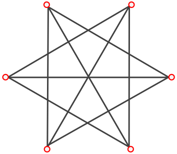
$$2n - 3 = m$$

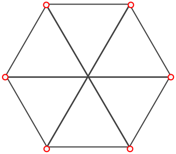
问：这样的无向图有几种非同构的情况？

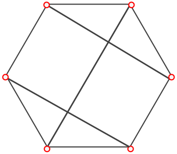
解：由握手定理可知 $3n = 2m$，联立方程组

$$\begin{cases} 2n - m = 3 \\ 3n - 2m = 0 \end{cases}$$

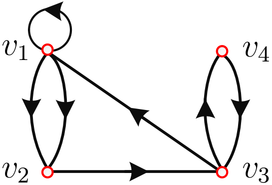
解得 $n = 6, m = 9$。这种无向图有 2 种非同构的情况


（a）


（b）


（c）

44. 有向图 D 如图所示



(1) D 中 v_1 到 v_4 长度为 1,2,3,4 的通路各为几条?

(2) D 中 v_1 到 v_1 长度为 1,2,3,4 的回路各为几条?

(3) D 中长度为 4 的通路有多少条? 其中长度为 4 回路为多少条?

(4) D 中长度小于等于 4 的通路为多少条? 其中有多少条为回路?

解：利用 D 的邻接矩阵的前 4 次幂解此题

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

（1）v_1 到 v_4 长度为 1，2，3，4 的通路数分别为 $a_{14}^{(1)}=0, a_{14}^{(2)}, a_{14}^{(3)}=2, a_{14}^{(4)}=2$；

（2）v_1 到 v_1 长度为 1,2,3,4 的回路分别为 $a_{11}^{(1)}=1$，$a_{11}^{(2)}=1$，$a_{11}^{(3)}=3$,$a_{11}^{(4)}=5$；

（3）长度为 4 的通路为 44，即 $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^{(4)}$，长度为 4 的回路为 11，即 $\boldsymbol{A}^4$ 对角线元素之和；

（4）长度小于等于 4 的通路为 88 条，即 $\boldsymbol{B}_4=\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^4$ 的元素之和，其中 22 条为回路。

48. 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E=\{e_1,\cdots,e_5\}$,其关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

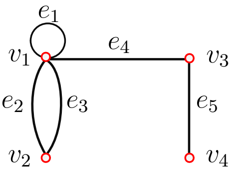
写出 G 的邻接矩阵和可达矩阵，并求

（1）v_1 到 v_4 长度为 1，2，3，4 的通路数；

（2）v_1 到 v_1 长度为 1，2，3，4 的回路数。

解：根据关联矩阵绘制无向图如下

$$M(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$



根据无向图可知，邻接矩阵及其各次幂分别为

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}6&2&1&1\\2&4&2&0\\1&2&2&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}11&12&7&1\\12&4&2&2\\7&2&1&2\\1&2&2&0\end{bmatrix},\quad A^4=\begin{bmatrix}42&22&12&7\\22&24&14&2\\12&14&9&1\\7&2&1&2\end{bmatrix}$$

（1）v_1 到 v_4 长度为 $1,2,3,4$ 的通路数分别为 $0,1,1,7$；（2）v_1 到 v_1 长度为 $1,2,3,4$ 的回路数分别为 $1,6,11,42$。由于 A^4 元素均大于 1，故可达矩阵为全 1 矩阵。

第十五章 欧拉图与哈密顿图

Chapter 15 Euler Graph and Hamilton Graph

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

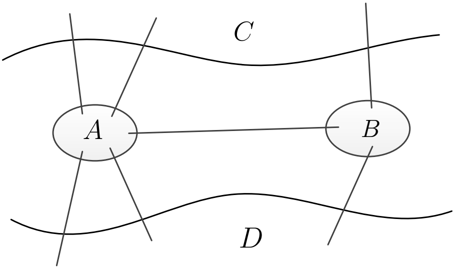
(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

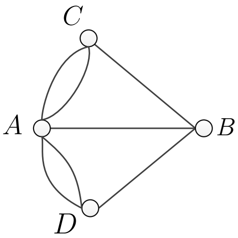
章节内容

1. 欧拉图
2. 哈密顿图
3. 最短路问题
4. 习题讲解

章节内容

历史背景

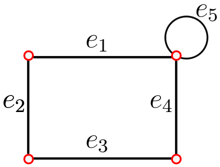




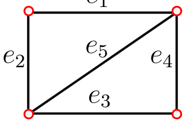
莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler, 1707.4.15 日—1783.9.18），瑞士数学家、自然科学家，18 世纪最伟大的数学家之一。他是数学史上最多产的数学家，平均每年写出八百多页的论文，还写了大量的力学、分析学、几何学、变分法等的课本，《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等都成为数学界中的经典著作。

定义 15.1

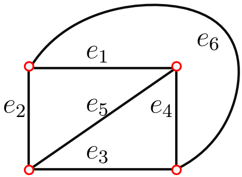
- 通过图（无向图或有向图）中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称作欧拉通路；通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称作欧拉回路。
- 具有欧拉回路的图称作欧拉图；具有欧拉通路而无欧拉回路的图称作半欧拉图；
- 规定平凡图是欧拉图。环不影响图的欧拉性。


e_5
e_1
e_2
e_4
e_3

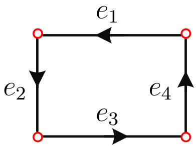
（a）


e_1
e_2
e_5
e_4
e_3

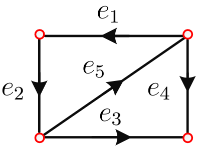
（b）


e_6
e_1
e_2
e_5
e_4
e_3

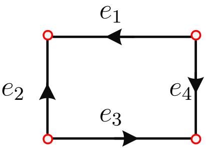
（c）


e_1
e_2
e_4
e_3

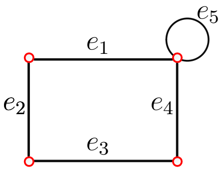
（d）


e_1
e_5
e_2
e_4
e_3

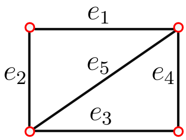
（e）


e_1
e_2
e_4
e_3

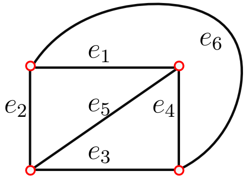
（f）



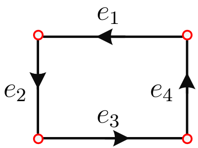
欧拉图



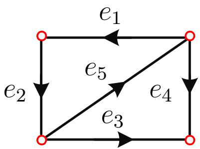
半欧拉图



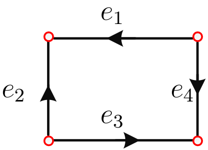
不是



欧拉图



不是

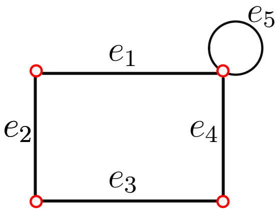


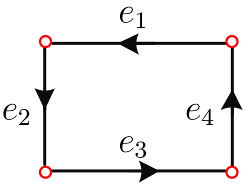
不是

欧拉图的判定

欧拉图的判定定理

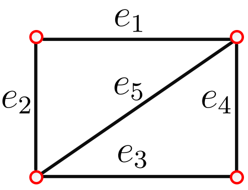
- 定理 15.1：无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图且没有奇度顶点。
- 定理 15.3：有向图 D 是欧拉图当且仅当 D 是强连通的且每个顶点的入度等于出度。

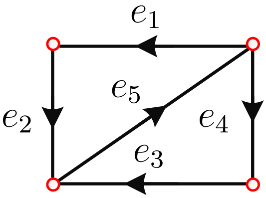




欧拉图的判定定理

- **定理 15.2**：无向图 G 是半欧拉图当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点。
- **定理 15.4**：有向图 D 是半欧拉图当且仅当 D 是单向连通图且恰好有两个奇度顶点，其中一个顶点的入度比出度大 1，另一个顶点的出度比入度大 1，而其余顶点的入度等于出度。





例 15.1

设 G 是非平凡的欧拉图，证明：$\lambda(G) \geq 2$。

证：只需证明 G 不是 1 边-连通图，即证明 G 的任意一条边 e 都不是桥。设 C 是一条欧拉回路，e 在 C 上，则删除 e 并不会增加连通分支数，即 $p(G-e)=p(G)$，故 e 不是桥。

Algorithm 1: Fleury 算法

1. 输入：欧拉图 G.
2. 初始化：任取 $v_0 \in V(G)$，令 $P_0 = v_0, i = 0$.
3. **for** $i = i + 1$ **do**

    if $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中没有与 v_i 关联的边 **then**

        break;

    else

        从 $E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中任取一条边 e_{i+1}，满足

        - e_{i+1} 与 v_i 相关联；
        - 除非无别的边可供选择，否则 e_{i+1} 不应为 $G_i = G - \{e_1, \cdots, e_i\}$ 中的桥。

        将 $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$ 和 v_{i+1} 加入到 P_i 中得到 P_{i+1}。

4. 输出：$P_m = v_0e_1v_1e_2, \cdots e_mv_m$（$v_m = v_0$）为 G 中的一条欧拉回路。

章节内容

定义 15.2

- 经过图（有向图或无向图）中所有顶点一次且仅一次的通路称作**哈密顿通路**；经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作**哈密顿回路**。
- 具有哈密顿回路的图称作哈密顿图；具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称作**半哈密顿图**。
- 规定平凡图是哈密顿图。

哈密顿图的判定

定理

定理 15.6: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图，则对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$，均有

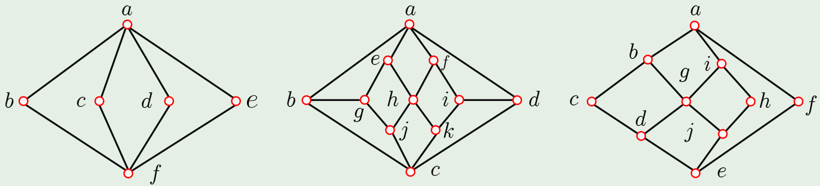
$$p(G - V_1) \leq |V_1|$$

推论: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是半哈密顿图，则对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$，均有

$$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$$

例 15.3

图 15.6 所示的 3 个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图？哪些是半哈密顿图？



推论

一般情况下，设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，$|V_1|\le|V_2|$，且 $|V_1|\ge 2$，$|V_2|\ge 2$。由定理 15.6 及其推论可知

1. 若 G 是哈密顿图，则 $|V_1|=|V_2|$；
2. 若 G 是半哈密顿图，则 $|V_2|=|V_1|+1$；
3. 若 $|V_2|\ge|V_1|+2$，则 G 既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图。

定理 15.7

设 G 是 n 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 u,v，均有

$$d(u)+d(v)\geq n-1$$

则 G 中存在哈密顿通路。

推论

设 G 为 $n(n\geq 3)$ 阶无向简单图，若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 u,v 均有

$$d(u)+d(v)\geq n$$

则 G 中存在哈密顿回路。

定理 15.8

设 u, v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点，且 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u, v)$ 为哈密顿图。

定理 15.9

$n(n \geq 2)$ 阶竞赛图中都有哈密顿通路。

例题 15.4

在某次国际会议的预备会中，共有 8 人参加，他们来自不同的国家。已知他们中任何两个不会说同一种语言，与其余会说同一种语言的人数之和大于等于 8，试证明能将这 8 个人排在圆桌旁，使其任何人能与两边的人交谈。

解： 设 8 个人分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_8$，作无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$，其中 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_8\}$，

$$E = \{(v_i, v_j) | v_i\text{与}v_j\text{会说同一种语言 } i \leq i < j \leq 8\}$$

G 为 8 阶无向简单图，$d(v_i)$ 为与 v_i 会说同一种语言的人数。由已知条件，$\forall v_i, v_j \in V$ 且 $(v_i, v_j) \notin E$，均有 $d(v_i) + d(v_j) \geq 8$。由定理 15.7 的推论可知，G 种存在哈密顿回路，设 $C = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_8} v_{i_1}$ 为 G 种的一条哈密顿回路，按照这条回路的顺序安排座次即可。

章节内容

定义 15.3

- 带权图：设图 $G=\langle V,E\rangle$（无向图或有向图），给定 $W:E\mapsto\mathbb{R}$，对 G 的每一条边 e，称 $W(e)$ 为边 e 的权（weight）。把这样的图称作带权图，记作 $G=\langle V,E,W\rangle$。当 $e=(u,v)$（有向图时为 $\langle u,v\rangle$）时，把 $W(e)$ 记作 $W(u,v)$。
- 长度：设 P 是 G 种一条通路，P 中所有边的权之和称作 P 的长度，记作 $W(P)$，即 $W(P)=\sum_{e\in E(P)}W(e)$。类似地，而可以定义回路 C 的长度 $W(C)$。

最短路问题

●设带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$（无向图或有向图），其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数。$\forall u,v\in V$，当 u 和 v 连通（u 可达 v）时，称从 u 到 v 长度最短的路径为从 u 到 v 的最短路径，称其长度为 u 到 v 的距离，记作 $d(u,v)$。约定：$d(u,u)=0$；当 u 和 v 不连通（u 不可达 v）时，$d(u,v)=+\infty$。

● 最短路问题：给定带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$ 及顶点 u 和 v，其中每一条边 e 的权 $W(e)$ 为非负实数，求 u 到 v 的最短路径。

●不难看出，如果 $uv_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v$ 是从 u 到 v 的最短路径，则对每个 $t(1\leq t\leq k)$，$uv_{i_1}\cdots v_{i_t}$ 是从 u 到 v_{i_t} 的最短路径。

Dijkstra 标号法

输入： 带权图 $G = \langle V, E, W \rangle$ 和 $s \in V$，其中 $|V| = n$，$\forall e \in E, W(e) \geq 0$

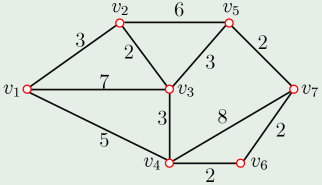
输出： s 到 G 中每一个点的最短路径及距离

1. 令 $\ell(s) \leftarrow (s, 0)$，$l(v) \leftarrow (s, +\infty)$ $(v \in V - \{s\}$，$i \leftarrow 1$，$l(s)$ 为永久标号，其余标号均为临时标号，$u \leftarrow s$;
2. for 与 u 关联的临时标号的顶点;
3. if $l_2(u) + W(u, v) < l_2(v)$ then 令 $l(v) \leftarrow (u, l_2(u) + W(u, v))$;
4. 计算 $l_2(t) = \min\{l_2(v) | v \in V$且有临时标号$\}$，把 $l(t)$ 改成永久标号;
5. if $i < n$ then 令 $u \leftarrow t$，$i = i + 1$，转 2。

计算结束时，对每一个顶点 u，$d(s, u) = l_2(u)$，利用 $l_1(v)$ 从 u 开始回溯找到从 s 到 u 的最短路径。

例题 15.6

带权图 G 如图所示，求从 v_1 到其余各点的最短路径和距离。



解：用 $*$ 表示永久标号，用 $**$ 表示这一步选中的永久标号。

步骤	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	$(v_1,0)^{**}$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
2	$(v_1,0)^*$	$(v_1,3)^{**}$	$(v_1,7)$	$(v_1,5)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
3	$(v_1,0)^*$	$(v_1,3)^*$	$(v_2,5)^{**}$	$(v_1,5)$	$(v_2,9)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
4	$(v_1,0)^*$	$(v_1,3)^*$	$(v_2,5)^*$	$(v_1,5)^{**}$	$(v_3,8)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
5	$(v_1,0)^*$	$(v_1,3)^*$	$(v_2,5)^*$	$(v_1,5)^*$	$(v_3,8)$	$(v_4,7)^{**}$	$(v_4,13)$
6	$(v_1,0)^*$	$(v_1,3)^*$	$(v_2,5)^*$	$(v_1,5)^*$	$(v_3,8)^{**}$	$(v_4,7)^*$	$(v_6,9)$
7	$(v_1,0)^*$	$(v_1,3)^*$	$(v_2,5)^*$	$(v_1,5)^*$	$(v_3,8)^*$	$(v_4,7)^*$	$(v_6,9)^{**}$

根据表 15.1 的最后一行，从 v_1 到其余各点的最短路径和距离如下

v_1v_2	$d(v_1, v_2) = 3$
$v_1v_2v_2$	$d(v_1, v_3) = 5$
v_1v_4	$d(v_1, v_4) = 5$
$v_1v_2v_3v_5$	$d(v_1, v_3) = 8$
$v_1v_4v_5$	$d(v_1, v_6) = 7$
$v_1v_4v_6v_7$	$d(v_1, v_7) = 9$

课后作业

p327–328：第 8 题、第 11 题、第 14 题、第 21 题（a）

章节内容

习题 15：第 14 题

今有 n 个人，已知他们中的任何二人合起来认识其余的 $n-2$ 个人，证明：当 $n \geq 3$ 时，这 n 个人能拍成一列，使得任何两个相邻的人都相互认识。而当 $n \geq 4$ 时，这 n 个人能拍成一个圆圈，使得每个人都认识两旁的人。

习题 15：第 14 题

今有 n 个人，已知他们中的任何二人合起来认识其余的 $n-2$ 个人，证明：当 $n \geq 3$ 时，这 n 个人能拍成一列，使得任何两个相邻的人都相互认识。而当 $n \geq 4$ 时，这 n 个人能拍成一个圆圈，使得每个人都认识两旁的人。

解：设 n 阶无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$，其中

$$V = \{v | v \text{ 为此人群中成员}\}$$
$$E = \{(u, v) | u, v \in V, u \neq v \text{ 且 } u \text{ 与 } v \text{ 认识}\}$$

由已知条件，$\forall u, v \in V$，均有

$$d(u) + d(v) \geq n - 2$$

任取 $u, v \in V$，u 与 v 不认识。选取第三个顶点 $w \in V$ 且 $w \neq u, w \neq v$。

1. 若 w 和 v 认识，则存在边 (w, v)。此时，u, w 合起来认识所有的人。
2. 若 w 与 v 不认识，则 v 与 w, u 均不认识，这与题设"任何二人合起来认识其余的 $n-2$ 个人"矛盾。

因此 w 与 v 认识。同理

1. 若 w 和 u 认识，则存在边 (w, u)。此时，u, w 合起来认识所有的人。
2. 若 w 与 u 不认识，则 u 与 w, v 均不认识，这与题设"任何二人合起来认识其余的 $n-2$ 个人"矛盾。

因此 w 与 u, v 均认识。

由于 w 是任意不同于 u, v 的顶点，因此任意不相邻的顶点 u, v 需要同时认识其余顶点，即

$$d(u) + d(v) \geq 2(n-2)$$

- 当 $n \geq 3$ 时，$2(n-2) \geq n-1$，故 $d(u) + d(v) \geq n-1$。根据定理 17.5，可知 G 中存在哈密顿通路；
- 当 $n \geq 4$ 时，$2(n-2) \geq n$，故 $d(u) + d(v) \geq n$。根据定理 17.5 推论，可知 G 中存在哈密顿回路。

练习

今有 a, b, c, d, e, f, g7 个人，已知下列事实：

- a 会讲英语；
- b 会讲英语和汉语；
- c 会讲英语、意大利与和俄语；
- d 会讲日语和汉语；
- e 会讲德语和意大利语；
- f 会讲法语、日语和俄语；
- g 会讲法语和德语。

若这七个人坐一圆桌，应该如何排座位，才能使每个人都能和他身边的人交谈？

解： 做无向图 $G = \langle V, E \rangle$，$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$$E = \{(u, v) | u, v \in V \text{且} u \neq v \text{ 且} u \text{与} v \text{会讲同一种语言}\}$$

对应事实

a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利与和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语、日语和俄语；g 会讲法语和德语。

的图 G 如下图所示

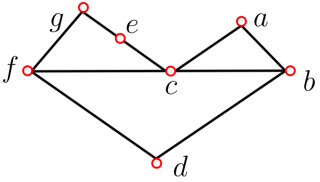


图 G 中 $C = acegfdba$ 为一条哈密顿回路。可按照 C 上顺序排列。

JIANGXI UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

第十六章 树

Chapter 16 Tree

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

章节内容

章节内容

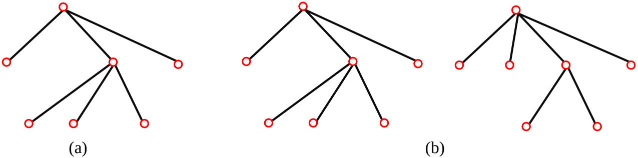
1. 无向树及其性质
2. 生成树
3. 根树及其应用

定义 16.1

- 连通无回路的无向图称作无向树，或者简称为树。每个连通分支都是树的无向图称作森林。平凡图称作平凡树。
- 在无向树中，悬挂顶点称作树叶，度数大于等于 2 的顶点称作分支点。
- 说明：本章中回路指初级回路[a]或简单回路[b]。

[a]回路 Γ 所有的边和所有的顶点各异；
[b]回路 Γ 所有边各异。

Example：

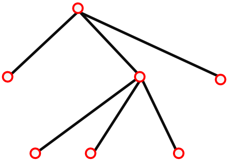


定理 16.1

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图，则下列各命题是等价的

1. G 是树；
2. G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径；
3. G 中无回路且 $m = n - 1$；
4. G 是连通的且 $m = n - 1$；
5. G 是连通的且任何边均为桥；
6. G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得的图中有唯一的一个含新边的圈。

Example：如图无向树具有 7 个顶点 6 条边。



定理 16.2

设 T 是 n 阶非平凡的无向树，则 T 中至少有两片树叶。

证：设 T 有 x 片树叶，由握手定理及定理 16.1 可知

$$2(n-1)=\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq x+2(n-x)$$

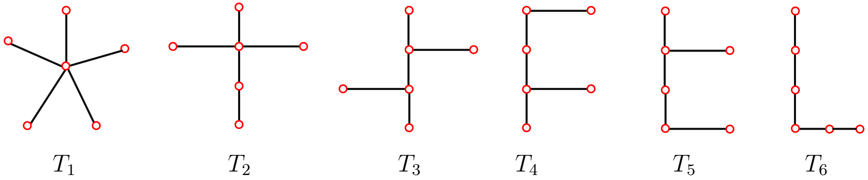
由上式解得 $x \geq 2$。

例 16.1

画出所有 6 阶非同构的无向树

解：设 T 是 6 阶无向树。由定理 16.1 可知，T 的边数 $m = 5$。由握手定理可知，T 的 6 个顶点的度数之和等于 10。又有 $\delta(T) \geq 1$，$\triangle(T) \leq 5$。于是，T 的度数列必为以下情况之一：

① 1,1,1,1,1,5　② 1,1,1,1,2,4　③ 1,1,1,1,3,3
④ 1,1,1,2,2,3　⑤ 1,1,2,2,2,2



常称只有一个分支点，且分支点的度数为 $n-1$ 的 $n(n \geq 3)$ 阶无向树为星形图，称其唯一的分支点为星点。

nihao

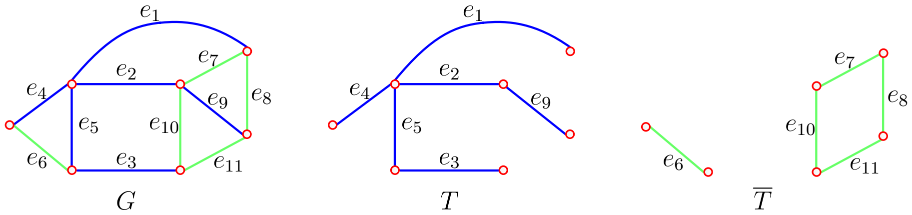
章节内容

1. 无向树及其性质
2. 生成树
3. 根树及其应用

定义 16.2

如果无向图 G 的生成子图[a] T 是树，则称 T 是 G 的生成树。设 T 是 G 的生成树，G 的在 T 中的边称作 T 的树枝，不在 T 中边称作 T 的弦。称 T 的所有弦的导出子图为 T 的余树，记作 $\overline{T}$。

[a] 设 $G = \langle V, E\rangle$，$G' = \langle V', E'\rangle$ 为两个图，若 $V' = V$ 且 $E' \subset E$，则称 G' 为 G 的生成子图。



定理 16.3

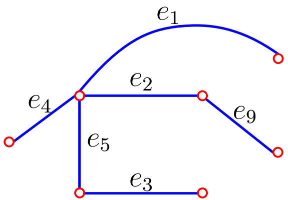
无向图 G 有生成树当且仅当 G 是连通图

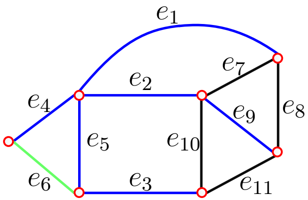
推论

设 G 为 n 阶 m 边的无向连通图，则 $m \geq n-1$。

定理 16.4

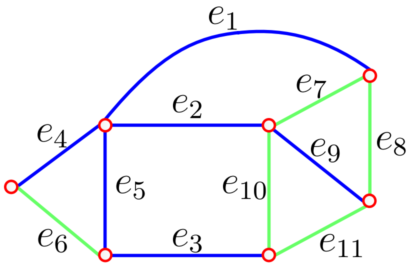
设 T 为无向连通图 G 中的一颗生成树，e 为 T 的任意一条弦，则 $T \cup e$ 中含 G 中只含一条弦 e，其余边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈也不同。





定义 16.3

设 T 是 n 阶 m 条边的无向连通图 G 的一棵生成树，设 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_{m-n+1}$ 为 T 的弦，$C_r(r = 1, 2, \cdots, m-n+1)$ 为 T 添加弦 e'_r 所产生的 G 中由弦 e'_r 何树枝构成的圈，称 G_r 为 G 的对应弦 e'_r 的基本回路或基本圈。称 $\{C_1, C_2, \cdots, C_{m-n+1}\}$ 为 G 对应 T 的基本回路系统，称 $m-n+1$ 为 G 的圈秩，记作 $\xi(G)$。

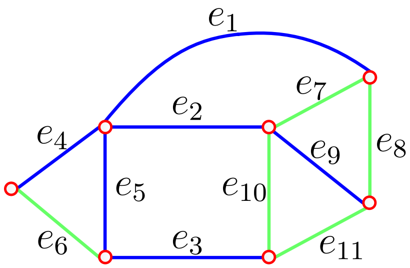


C_1：$e_6e_4e_5$； C_2：$e_11e_3e_5e_2e_9$； C_3：$e_{10}e_3e_5e_2$

C_4：$e_7e_2e_1$； C_5：$e_8e_9e_2e_1$。 该图圈秩为 5。

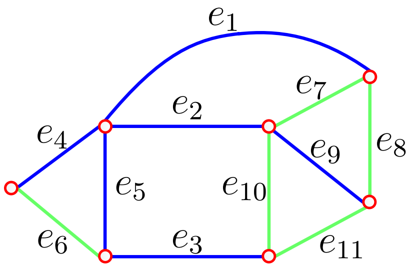
定理 16.5

设 T 是连通图 G 的一棵生成树，e 为 T 的树枝，则 G 中存在只含树枝 e，其余边都是弦的割集，且不同树枝对应的割集不同的。



定义 16.4

设 T 是 n 阶连通图 G 的一棵生成树，$e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 为 T 的树枝，$S_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是由树枝 e_i 和弦构成的集合，则称 S_i 为 G 的对应树枝 e_i 的基本割集。称 $\{S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}\}$ 为 G 对应 T 的基本割集系统，称 $n-1$ 为 G 的割集秩，记作 $\eta(G)$。



该图基本割集分别为

$$S_1 = \{e_1, e_7, e_8\}, S_2 = \{e_2, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\}, S_3 = \{e_3, e_{10}, e_{11}\}$$

$$S_4 = \{e_4, e_6\}, S_5 = \{e_5, e_6, e_{10}, e_{11}\}, S_6 = \{e_9, e_8, e_{11}\}$$

最小生成树

定义 16.5

设无向连通带权图 $G = \langle V, E, W \rangle$，$T$ 是 G 的一棵生成树，T 的各边权之和称为 T 的权，记作 $W(T)$。G 的所有生成树中权最小的生成树称为 G 的最小生成树。

Kruskal 算法

n 设阶无向连通带权图 $G = \langle V, E, W \rangle$ 有 m 条边，不妨设 G 中没有环（否则，可以将所有环先删去），

1. 将 m 条边按权从小到大顺序排列，设为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$；
2. 取 e_1 在 T 中，依次检查 $e_2, e_3, \cdots, e_m$。若 $e_j (j \geq 2)$ 与已在 T 中的边不能构成回路，则取 e_j 在 T 中，否则丢弃 e_j；
3. 算法停止时所得到的 T 为 G 的最小生成树。

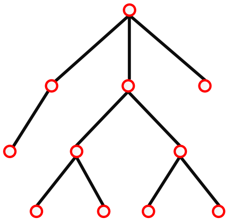
章节内容

1. 无向树及其性质
2. 生成树
3. 根树及其应用

定义 16.6

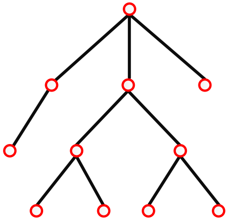
若有向图的基图为无向树，则称这个有向图为有向树。一个顶点的入度为 0，其余顶点的入度为 1 的有向树称作根树。入度为 0 的顶点称作树根，入度为 1 出度为 0 的顶点称作树叶，入度为 1 出度不为 0 的称作内点，内点和树根统称作分支点。从树根到任意顶点 v 的路径长度（即路劲的边数）称作 v 的层数，所有顶点的最大层数称作树高。

在绘制根树时通常将树根画在最上方，有向边的方便向下或斜下方，并省去各边上的箭头。



定义 16.7

设 T 为一棵非平凡树根，$\forall v_i, v_j \in V(T)$，若 v_i 可达 v_j，则称 v_i 为 v_j 的祖先，v_j 为 v_i 的后代；若 v_i 邻接到 v_j（即 $\langle v_i, v_j \rangle \in E(T)$），则称 v_i 为 v_j 的父亲（父节点），而 v_j 为 v_i 的儿子（子节点）。若 v_j, v_k 的父亲相同，则称 v_j 和 v_k 是兄弟。



根据根树 T 中每个分支点儿子数以及是否有序，可以将根树分为下列各类

1. 若 T 的每个分支点至多有 r 个儿子，则称 T 为r 叉树；又若 r 叉树是有序的，则称它为r 叉有序树。
2. 若 T 的每个分支点都恰好有 r 个儿子，则称 T 为r 叉正则树；又若 T 是有序的，则称它为r 叉正则有序树。
3. 若 T 是 r 叉正则树，且每个树叶的层数均为树高，则称 T 为r 叉完全正则树；又若 T 是有序的，则称它为r 叉完全正则有序树。

定义 16.8

- 设 T 为一棵树，$\forall v \in V(T)$，称 v 及其后代的导出子图 T_v 为 T 以 v 为根的根子树。
- 2 叉正则有序树的每个分支点的两个儿子导出的根子树分别为该分支点的左子树和右子树。

定义 16.9

设 2 叉树 T 有 t 片树叶 $v_1, v_2, \cdots, v_t$，权分别为 $w_1, w_2, \cdots, w_t$，称 $W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为 T 的权，其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数，在左右有 t 片树叶，带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的 2 叉树中，权最小的 2 叉树称作最优 2 叉树。

Huffman 算法

给定加权系数 $w_1, w_2, \cdots, w_t$；

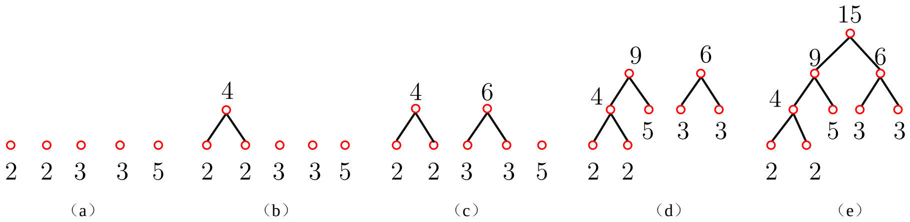
1. 作 t 片树叶，分别以 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 为权；
2. 在所有入度为 0 的顶点（不一定是树叶）中选出两个权最小的顶点，添加一个新分支，它以这两个顶点为儿子，其权等于这 2 个儿子的权之和；
3. 重复 2，直到只有 1 个入度为 0 的顶点为止。

$W(T)$ 等于所有分支点的权之和。

例 16.5

求带权 2, 2, 3, 3, 3, 5 的最优 2 叉树

解：下图给出了 Huffman 算法计算最优树的过程，(e) 为最优树，$W(T) = 34$。



在通信中，常用二进制编码表示符号，例如：可以用长为 2 的二进制编码 00,01,10,11 分别表示 A,B,C,D，称这种表示法为等长码表示法。若在传输中，A,B,C,D 出现的频率大体相同，用等长码表示是很好的方法。但当它们出现的频率相差悬殊时，为了节省二进制位，以达到提高效率的目的，就要采用非等长的编码。

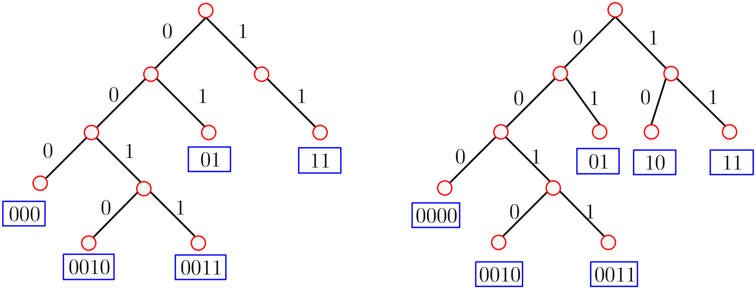
定义 16.10

设 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是长为 n 符号串，称其子串 $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \cdots, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为该符号串的前缀。设 $A = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 是一个符号串集合，若 A 的任意两个符号串都互不为前缀，则称 A 为前缀码。由 0-1 符号串构成的前缀码称作2 元前缀码。

Example:

- $\{1, 00, 0101, 01001, 01000\}$ √
- $\{1, 00, 011, 0101, 0100, 01001, 01000\}$ ×

2 叉树产生 2 元前缀码



(a) (b)

- T 的每个分支点有 1 或 2 个儿子（子顶点）；
- v 为 T 的分支点，若 v 有两个子节点，在 v 引出的两条边上，作边标 1，右边标 2；
- 树根到树叶 v_i 的通路上的按照顺序组成的字符串，存放在 v_i 处；
- t 个符号串组成一个 2 元码，如图（a）$\{01, 11, 000, 0010, 0011\}$。

最佳前缀码

上述产生的任一个前缀码都可以用来传输 5 个符号，如 $\{A, B, C, D, E\}$，但当在文本中这些字母出现频率不同时，传输这个文本所用的二进制位数是不同的。

设共有 t 个符号，用树叶 v_i 处的二进制串表示的符号出现的频率为 c_i，v_i 处的二进制串的长度等于 v_i 的层数 $\ell(v_i)$，因而传输 m 个符号使用的二进制位数为 $m\sum_{i=1}^{t} c_i\ell(v_i)$。

显然，用以各个符号出现的频率为权的最优 2 叉树产生的前缀码所用的二进制位数最小。称这个由最优 2 叉树产生的前缀码为最佳前缀码。用最佳前缀码传输的二进制位数最省。

例 16.7

在通信中，八进制数字出现的频率如下：

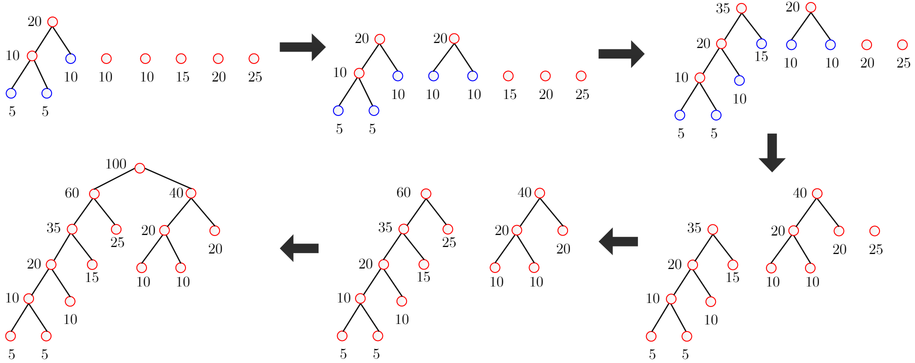
0: 25%	1: 20%	2: 15%	3: 10%
4: 10%	5: 10%	6: 5%	7: 5%

（1）求传输它们的最佳前缀码；

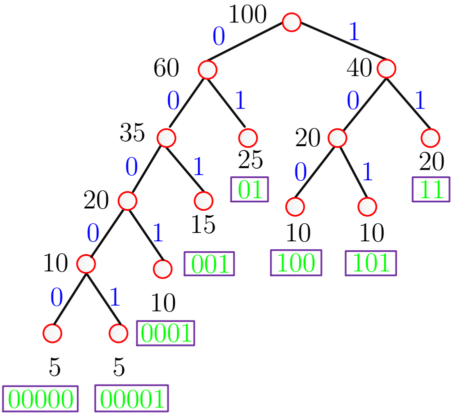
（2）求传输 $10^n (n \geq 2)$ 个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？

（3）若是用等长的（长为 3）的码字传输需要多少个二进制数字？

解：步骤 1：用 100 乘上频率得到权重，用 Huffman 编码得到最优 2 叉树



步骤 2：由最优 2 叉树，获得对应 2 元前缀码



它产生的最优前缀码为

01	传 0	11	传 1	001	传 2	100	传 3
101	传 4	0001	传 5	00000	传 6	00001	传 7

（2）树为 T，传输 100 个按题给定的频率出现的八进制数字所用二进制数字个数等于 $W(T)$，它等于各分支点权之和

$$W(T) = 10 + 20 + 35 + 60 + 100 + 40 + 20 = 285$$

传输 10^n 个按题中给定频率出现的八进制数字需要 $10^{n-2} \times 285 = 2.85 \times 10^n$ 个二进制数字。而
（3）用长为 3 的 0,1 组成的符号串传输 10^n 个八进制数字（如 000 传 0，001 传 1，$\cdots$，111 传 7）要用 3×10^n 个二进制数字。

课后作业

p340-342：第 3 题、第 6 题、第 20 题、第 25 题
第 37 题、第 41 题。

$$4 + x = y = z$$

第十七章 平面图

Chapter 17 Planar Graph

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

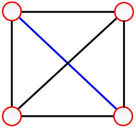
(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

章节内容

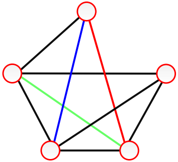
章节内容

定义 17.1

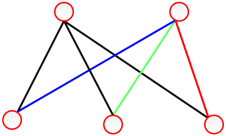
如果能将无向图 G 画在平面上使得除顶点处外无边相交，则称 G 为可平面图，简称为平面图。画出的无边相交的图称作 G 的平面嵌入。无平面图嵌入的图称作非平面图。



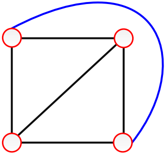
(a)



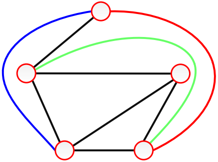
(b)



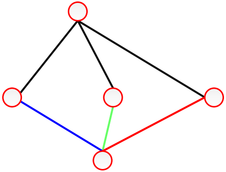
(c)



(d)



(e)



(f)

- K_1, K_2, K_3, K_4 都是平面图；
- 完全二部图 $K_{1,n}, K_{2,n}(n \geq 2)$ 都是平面图；
- $K_5 - e$ 也是平面图。

定理 17.1

平面图的子图都是平面图，非平面图的母图都是非平面图。

定理 17.2

设 G 是平面图，则在 G 中加平行边或环后所得的图还是平面图。换言之，平行边和环不影响图的平面性。

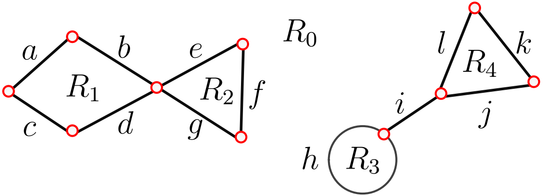
定义 17.2

给定平面图 G 的平面嵌入，G 的边将平面化分为若干区域，每个区域都称作 G 的一个面，其中有一个面的面积无限，称作无限面或外部面，其余面的面积有限，称作有限面或内部面。包围每个面的所有边组成的回路[a]组称作该面的边界，边界的长度称作该面的次数。

注：常记外部面为 R_0，内部面为 $R_1, R_2, \cdots, R_k$，面 R 的次数记作 $\deg(R)$。

[a]可能是圈、简单回路、也可能是复杂回路。

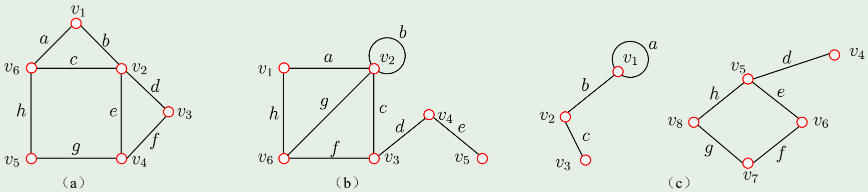
Example



- R_1 的边界为圈 $abcd$，$\deg(R_1) = 4$
- R_2 的边界为圈 efg，$\deg(R_2) = 3$
- R_3 的边界为 h，$\deg(R_3) = 1$
- R_4 的边界为圈 lkj，$\deg(R_4) = 3$
- R_0 的边界为一条简单回路 $abefdgc$ 和一条复杂回路 $kjihil$ 组成，$\deg(R_0) = 13$。

练习 1

如下图所示 3 个图均为平面嵌入，求出图中各面的边界和次数

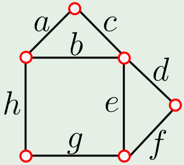


解：

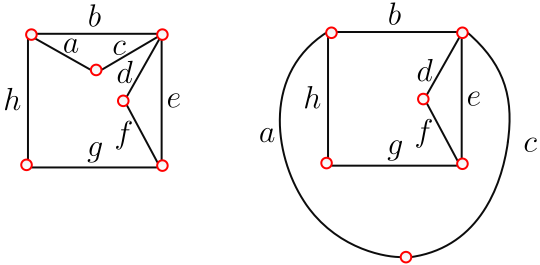
1. （a）一共有 4 个面，$R_1: abc$，$\deg(R_1) = 3$；$R_2: begh$，$\deg(R_2) = 4$；$R_3: def$，$\deg(R_3) = 3$，$R_4: acdfgh$，$\deg(R_4) = 6$。
2. （b）一共有 4 个面，$R_1: agh$，$\deg(R_1) = 3$；$R_2: b$，$\deg(R_2) = 1$；$R_3: gcf$，$\deg(R_3) = 3$；$R_4: abcdeedfh$，$\deg(R_4) = 9$。
3. （c）一共 3 个面，$R_1: a$，$\deg(R_1) = 1$；$R_2: efgh$，$\deg(R_2) = 4$；R_3 由复杂回路 $abccb$ 和简单回路 $defghd$ 组成，$\deg(R_3) = 11$。

练习 2

如图所示，重新找 2 个平面嵌入，使得外部面的次数分别为 3 和 4。



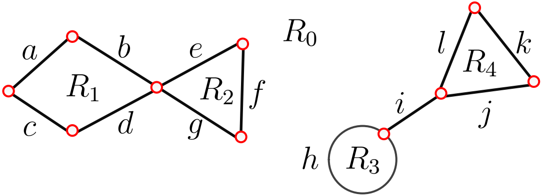
解：



定理 17.3

平面图所有面的次数之和等于边数的两倍。

Example:



该平面图所有面的次数之和为

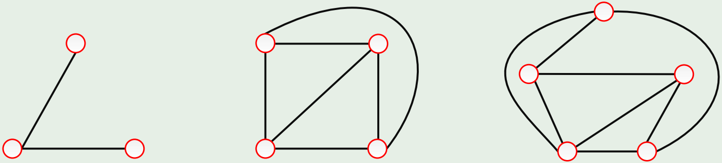
$$\deg(R_0) + \deg(R_1) + \deg(R_2) + \deg(R_3) + \deg(R_4) = 24 = 2m$$

定义 17.3

- 设 G 为简单平面图，若在 G 的任意两个不相邻的顶点 u, v 之间加一条新边 (u, v)，所得图为非平面图，则称 G 为极大平面图。
- $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 - e$ 均为极大平面图。

练习

下列平面图中，哪些为极大平面图？



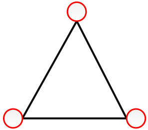
(a)　　(b)　　(c)

解：图（b）为极大平面图，其余不是。

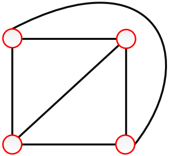
定理 17.4

极大平面图是连通的，并且当阶数大于等于 3 时没有割点和桥。

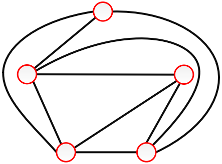
Example: 下图所示平面图 K_3，K_4，K_5-e 中不含割点和桥。



K_3



K_4



K_5-e

定理 17.5

设 G 是 n（$n \geq 3$）阶简单连通的平面图，G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3.

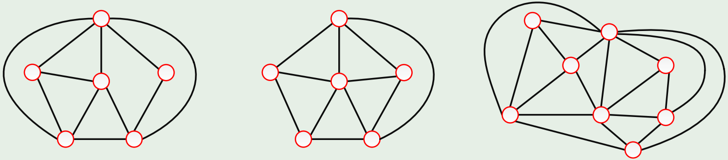
证： 先证必要性，充分性在后续部分再证明。由于 G 为简单平面图，所以 G 中无环和平行边。根据定理 17.4 可知，G 为连通图且没有割点和割边。所以，G 中各面的次数大于等于 3。只需证明 G 个面的次数不超过 3。

假设面 R_i 的次数 $\deg(R_i) = s \geq 4$。

不妨设 $\deg(R_i) = 4$，此时 R_i 中包含 4 个顶点。假设 v_1, v_3 为 R_i 中不相邻的顶点，可将 v_1, v_3 连接，不破坏图 G 的平面性，这与极大平面图的定义矛盾。故 $s = 4$ 不成立。同理可证明 $\deg(R_i) > 4$ 不成立。联立 $s \leq 3$ 和 $s \geq 3$，得 $s = 3$。

练习

根据定理 17.5，指出下列平面图哪些是极大平面图



(a) (b) (c)

解：根据定理 17.5，只有图 (c) 是极大平面图。

定义 17.4

- 若在非平面图 G 中任意删除一条边，所得到的图为平面图，则称 G 为极小非平面图
- K_5 和 $K_{3,3}$ 均为极小非平面图。

章节内容

1. 平面图的基本概念
2. 欧拉公式
3. 平面图的判断
4. 平面图的对偶图
5. 二部图的匹配
6. 点、边着色

定理 17.6（欧拉公式）

设连通平面图 G 的顶点、边数和面数分别为 n, m, r，则有

$$n - m + r = 2$$

证：对边数 m 作归纳证明。

（1）当 $m = 0$ 时，由于 G 是连通图，所以 G 为平凡图。此时 $n = 1, m = 0, r = 1$，结论成立；

（2）设 $m=k$（$k\geq 0$）时结论成立，当 $m=k+1$ 时，对 G 作如下讨论。

- 若 G 是树，则 G 是非平凡的，至少有 2 片树叶。设 v 为树叶，令 $G'=G-v$，则 G' 仍然是连通的，且 G' 的边数 $m'=m-1=k$，由归纳假设

$$n'-m'+r'=2$$

其中 n',m',r' 分别为 G' 的顶点数、边数、和面数。因而

$$n-m+r=(n'+1)-(m'+1)+r'=n'-m'+r'=2$$

- 若 G 不是树，则 G 中含圈。设边 e 在 G 中的某个圈上，令 $G' = G - e$，则 G' 仍连通，且 $m' = m - 1 = k$。由归纳假设有

$$n' - m' + r' = 2$$

而 $n' = n, r' = r - 1$。于是

$$n - m + r = n' - (m' + 1) + (r' + 1) = n' - m' + r' = 2$$

得证欧拉公式。

定理 17.5 证明（续）

定理 17.5（必要性）：若 n 阶平面图 G 的每个面的次数均为 3，则 G 为极大平面图。

证：设 G 的面数为 r，边数为 m。根据欧拉公式（定理 17.6）有

$$n - m + r = 2$$

根据定理 17.3[1] 有 $2m = 3r$，联立可得 $m = 3n - 6$。

反证法：假设 G 不是极大平面图，则 G 中一定存在不相邻的顶点 u, v，使得 $G' = G \cup (u, v)$ 仍为简单平面图，而 G' 的边数为 $m' = m + 1$，$n' = n$。因而，图 G' 有 $m' \neq 3n' - 6$，与所得结论矛盾，故 G 为极大平面图。

[1] 平面图所有面的次数之和等于边数的两倍。

欧拉公式（非连通）

定理 17.7

对于有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的平面图 G，有

$$n - m + r = k + 1$$

其中 n, m, r 分别为 G 的顶点数、边数和面数。

证：设 G 的连通分支分别为 $G_1, \cdots, G_k$，并设 G_i 的顶点数、边数和面数分别为 $n_i, m_i, r_i, i = 1, \cdots, k$。由欧拉公式（定理 17.5）有

$$n_i - m_i + r_i = 2$$

由于每个 G_i 有一个外部面，而 G 只有一个外部面，所以 G 的面数 $r = \sum_{i=1}^{k} r_i - k + 1$。而 $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$，$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$。

于是

$$
\begin{aligned}
2k &= \sum_{i=1}^{k}(n_i - m_i + r_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} r_i \\
&= n - m + r + k - 1
\end{aligned}
$$

整理上式可得 $n - m + r = k + 1$。

平面图的性质

定理 17.8

设 G 是连通的平面图，且每个面的次数至少为 $l(l \geq 3)$，则 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证： 由定理 17.3

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq l \times r$$

将欧拉公式（定理 17.5）$r = 2 + m - n$，代入上式

$$2m \geq l(2 + m - n)$$

整理得 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$。

推论

K_5 与 $K_{3,3}$ 都是非平面图。

定理 17.9

设平面图 G 有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支，各面得次数至少为 $l(l \geq 3)$，则边数 m 与顶点 n 满足

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

定理 17.10

设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的极大平面图，则 $m = 3n - 6$。

推论

设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的简单平面图，则 $m \leq 3n - 6$。

定理 17.11

设 G 是简单平面图，则 G 的最小度 $\delta \leq 5$。

证：若 G 的阶数 $n \leq 6$，结论显然成立。因而讨论 $n \geq 7$。（反正法）若 $\delta \geq 6$，由握手定理可知

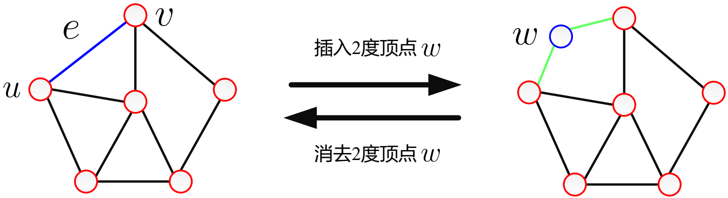
$$2m \geq 6n$$

因而 $m \geq 3n$，这与定理 17.10 的推论 $m \leq 3n - 6$ 矛盾。

章节内容

定义 17.5

设 $e=(u,v)$ 为图 G 的一条边，在 G 中删除 e，增加新的顶点 w，使 u,v 均与 w 相邻，称作在 G 中插入 2 度顶点 w。设 w 为 G 中的一个 2 度顶点，w 与 u,v 相邻，删除 w，增加新边 (u,v)，称作在 G 中消去 2 度顶点 w。



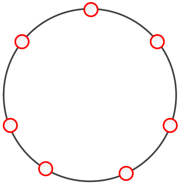
同胚

定义

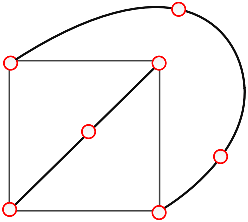
若两个图 G_1 和 G_2 同构[a]，或通过反复插入、消去 2 度顶点后同构，则称 G_1 和 G_2 同胚。

[a] $(v_i, v_j) \in E_1 \leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$。

Example: （a）与 K_3 同胚，（b）与 K_4 同胚



（a）



（b）

平面图的判定

定理 17.12（Kuratowski 定理 1）

图 G 是平面图当且仅当 G 中既不含与 K_5 同胚的子图，也不含与 $K_{3,3}$[a]同胚的子图。

[a] $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 为简单二部图，且 V_1 中所有顶点均与 V_2 中所有顶点相邻，称 G 为完全二部图。

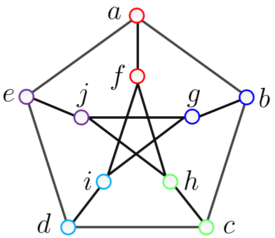
定理 17.13（Kuratowski 定理 2）

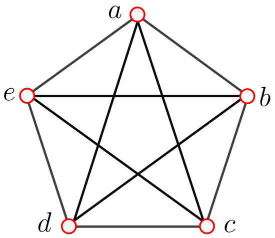
图 G 是平面图当且仅当 G 中既没有可以收缩到 K_5 的子图，也没有可以收缩到 $K_{3,3}$ 的子图。

例题 17.1

证明彼得松图不是平面图

解：对彼得松图收缩点可得



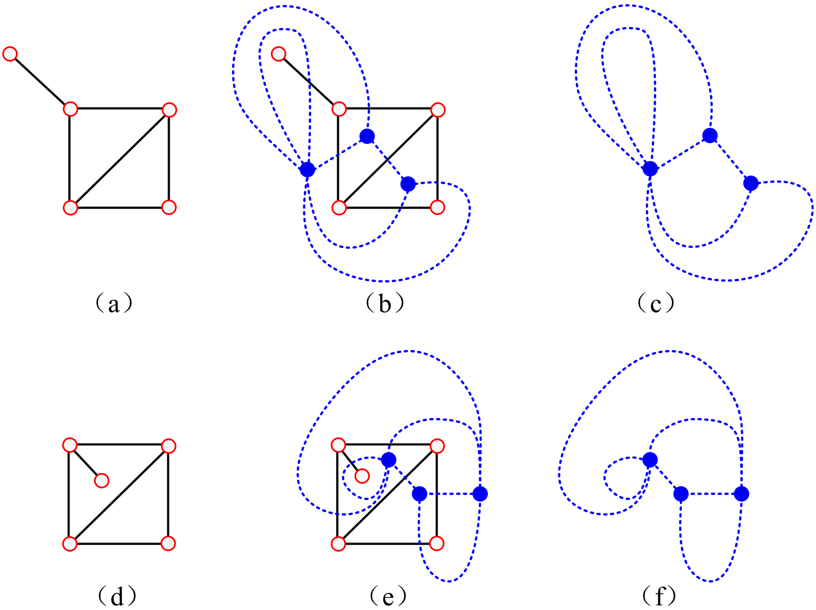


根据定理 17.13 可知彼得松图不是平面图。

章节内容

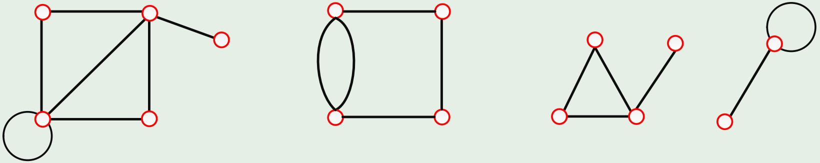
定义 17.6

设 G 是一个平面图的平面嵌入，构造图 G^* 如下：在 G 的每一个面 R_i 中放置一个顶点 v_i^*。设 e 为 G 的一条边，若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上，则作边 $e^* = (v_i^*, v_j^*)$ 与 e 相交，且不与其他任何边相交。若 e 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上，则作以 v_i^* 为端点的环 $e^* = (v_i^*, v_i^*)$。称 G^* 为 G 的对偶图。


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)

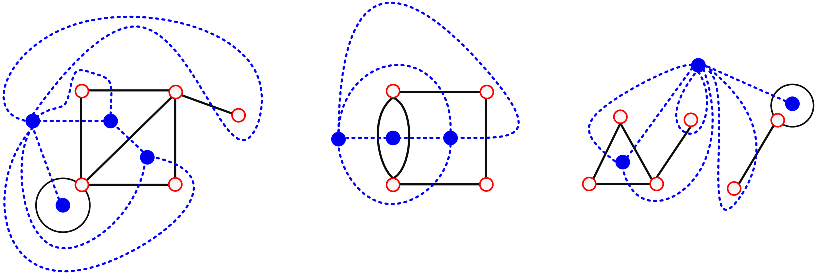
练习

求下图所示的各平面图的对偶图



（a）　　（b）　　（c）

解：



对偶图的性质

平面图 G 的对偶图 G^* 有以下性质

1. G^* 是平面图，而且是平面嵌入；
2. G^* 是连通图；
3. 若边 e 为 G 中的环，则 G^* 与 e 对应的边 e^* 为桥；若 e 为桥，则 G^* 中与 e 对应的边 e^* 为环；
4. 在多数情况下，G^* 为多重图（含平行边的图）；
5. 同一个平面图的不同平面嵌入的对偶图不一定同构。

平面图与其对偶图的关联

定理 17.14

设平面图 G 是连通的，G^* 是 G 的对偶图，n^*，m^*，r^* 和 n，m，r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

（1）$n^* = r$

（2）$m^* = m$

（3）$r^* = n$

（4）设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中，则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$

证：由 G^* 的构造可知，（1）（2）显然。

（3）由于 G 与 G^* 都是连通的，因此满足欧拉公式：

$$n - m + r = 2, \quad n^* - m^* + r^* = 2$$

结合（1）（2）可得 $r^* = n$。

定理 17.14 证明（续）

设 G 的面 R_i 的边界为 C_i，设 C_i 中有 k_1（$k_1 \geq 0$）条桥、k_2 条非桥的边，于是 C_i 的长度为 $k_2 + 2k_1$，即 $\deg(R_i) = k_2 + 2k_1$。而 k_1 条桥对应 v_i^* 处有 k_1 个环，k_2 条非桥的边对应从 v_i^* 处引出 k_2 条边，所以 $d_{G^*}(v_i) = k_2 + 2k_1 = \deg(R_i)$。

定理 17.15

设平面图 G 有 $(k \geq 1)$ 个连通分支，G^* 是 G 的对偶图，n^*，m^*，r^* 和 n，m，r 分别为 G^* 和 G 的顶点数和面数，则

（1）$n^* = r$

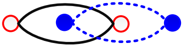
（2）$m^* = m$

（3）$r^* = n - k + 1$

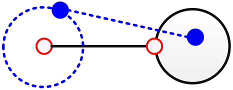
（4）设 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中，则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$。

定义 17.7

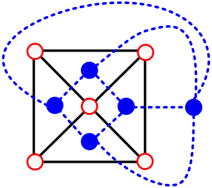
设 G^* 是平面图 G 的对偶图，若 $G^* \cong G$，则称 G 为**自对偶图**。



（a）



（b）



（c）

轮图

在 $n-1$（$n \geq 4$）边形 C_{n-1} 内放置一个顶点，连接这个顶点与 C_{n-1} 上的所有顶点，所得的 n 阶简单图称作n 阶轮图，记作 W_n。n 为奇数的轮图称作奇阶轮图，n 为偶数的轮图称作偶阶轮图。

轮图均为自偶图。

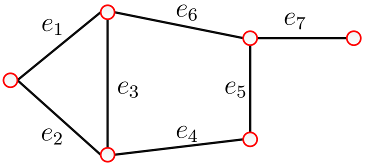
章节内容

匹配

定义 18.5

- 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$，$E^*\subseteq E$，若 E^* 中任何俩个边均不相邻，则称 E^* 为 G 的边独立集，也称 G 的匹配。
- 若在 E^* 中再加上任意一条边后，所得集合都不是匹配，则称 E^* 为极大匹配。
- G 的边数最多的匹配称作最大匹配，最大匹配中的边数称作边独立数或匹配数，记作 $\beta_1(G)$ 或简记为 β_1。

Example: 下图中 $\{e_2,e_6\},\{e_3,e_5\},\{e_1,e_4,e_7\}$ 等都是极大匹配。



定义 18.6

设 M 为图 $G = \langle V, E \rangle$ 的一个匹配，

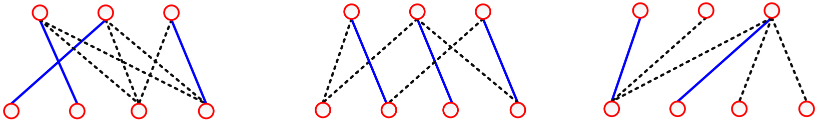
1. 称 M 中的边为匹配边，不在 M 中的边为非匹配边。
2. 与匹配边相关联的顶点为饱和点，不与匹配边相关联的顶点为非饱和点。

定义 18.7

设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 为二部图，$|V_1|\geq|V_2|$，M 为 G 的一个匹配且 $|M|=|V_1|$，称 M 为 V_1 到 V_2 的完备匹配。

注：二部图的完备匹配是最大匹配，但最大匹配不一定是完备匹配。当 $|V_2|=|V_1|$ 时，完备匹配是完美匹配。

Example: 下图中（a）（b）蓝色实线边是完备匹配，而（c）中的蓝色实线边是最大匹配，但不是完备匹配。



（a）（b）（c）

定理 18.5（Hall 定理）

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E\rangle$，其中 $|V_1| \leq |V_2|$，则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 $k(k = 1, 2, \cdots, |V_1|)$ 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻。

证：必要性：由于 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配，即存在 M 为 G 的一个匹配，且 $|M| = |V_1|$。因此，对于任意的 $S \subseteq V$，均有 $|S|$ 个顶点必在 V_2 中。

充分性证明略。

定理 18.6

设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，如果存在正整数 t，使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边，而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边，则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配。

练习 1

现有 4 名教师：张、王、李、赵，要求他们去教 4 门课程：数学、物理、电工和计算机基础，已知张能胜任数学和计算机基础；王能胜任物理和电工；李能胜任数学、物理和电工；而赵智能胜任电工。如何安排，才能使每名教师都教一门自己能胜任的课程并且每门课程都有以一命教师教？讨论几种安排方案。

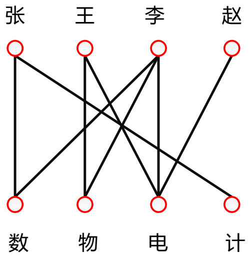
解：作二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$，其中

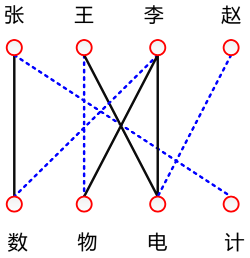
$$V_1 = \{v | v\text{为 4 名教师之一}\}$$

$$V_2 = \{u | u\text{为 4 名课程之一}\}$$

$$E = \{(u, v) | v \in V_1 \wedge u \in V_2 \wedge v\text{能教}u\}$$

绘制二部图如下





故只有一种分配情况。

章节内容

点着色

定义 18.8

设无向图 G 无环，对 G 的每个顶点涂一种颜色，使得相邻的顶点涂不同的颜色，称作图 G 的一种点着色，简称着色。若能使用 k 种颜色给 G 的顶点着色，则称 G 为 k-可着色的。若 G 是 k-可着色的，但不是 $(k-1)$-可着色的，则称 G 的色数为 k。G 的色数记作 $\chi(G)$，简记为 χ。

点着色的应用

图着色有着广泛的应用。当试图在有冲突的情况下分配资源时，就会自然产生这个问题，例如

- 有 n 项工作，每项工作需要一天时间完成。有些工作由于需要相同的人员或设备不能同时进行，问至少需要几天才能完成所有的工作。

  用图描述如下：用顶点表示工作，如果两项工作需要相同的人员或设备就用一条边连接对应的顶点。工作的时间安排对应于这个图的点着色。着同一种颜色的顶点对应的工作可以安排在同一天，所需的最少天数正好是这个图的色数。

- 计算机有 k 个寄存器，现在在编译一个程序，可以构造一个图，每一个变量是一个顶点，如果两个变量要在同一时刻使用，则用一条边连接这两个变量。于是，这个图的 k-着色对应给变量分配寄存器的一种安全方式为：给着不同颜色的变量分配不同的寄存器。

例 18.3

1. $\chi(G)=1$ 当且仅当 G 是零图；
2. $\chi(K_n)=n$；
3. 偶圈的色数为 2，奇圈的色数为 3，奇阶轮图的色数为 3；偶阶轮图的色数为 4；
4. 设 G 至少含有一条边，则 $\chi(G)=2$ 当且仅当 G 为二部图。

定理 18.7

对于任意的无环图 G，均有

$$\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$$

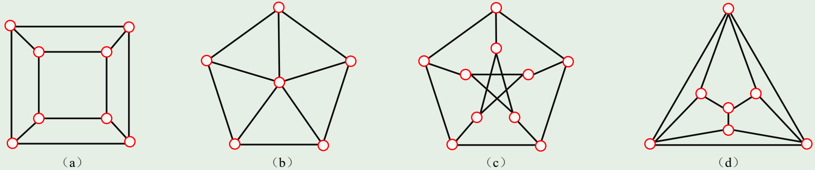
定理 18.8（Brooks 定理）

设无环图 G 不是完全图 $K_n(n \geq 3)$，也不是奇圈，则

$$\chi(G) \leq \triangle(G)$$

例题 18.4

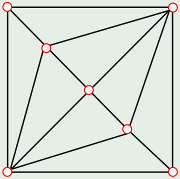
求下图所示的各图的色数

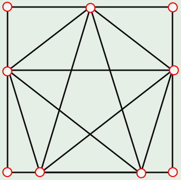


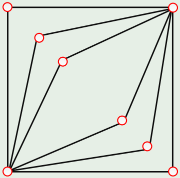
1. 由于 (a) 为二部图，故 $\chi = 2$;
2. （b）为六阶轮图故 $\chi = 4$;
3. （c）为彼得松图，$\triangle = 3$，由 Brooks 定理（定理 18.8），有 $\chi \leq 3$。又因为含有奇圈，因此 $\chi \geq 3$，综上知 $\chi = 3$。
4. （d）由 Brooks 定理（定理 18.8），$\chi \leq \triangle 4$，又因为图中有奇圈，故 $\chi \geq 3$。因而 $\chi = 3$ 或 $\chi = 4$。由于中间点与外面点都连接，因此可以三种颜色，而最里面那个点，需要用第四种颜色。因此 $\chi = 4$。

练习：习题 18 第 21 题

求下列各图的点色数







解：上图点色数分别为 3，5，2。

练习：习题 18 第 32 题

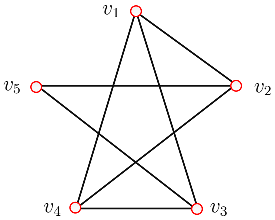
某大学计算机专业三年级有 5 门选修课，其中课程 1 与 2，1 与 3，1 与 4，2 与 4，2 与 5，3 与 4，3 与 5 均有人同时选修，问：安排这五门课的考试至少需要几个时间段。

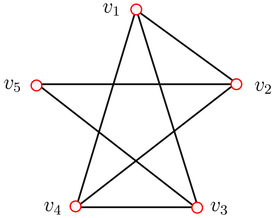
解：做无向图 $G = \langle V, E \rangle$

$$V = \{v_i | i = \text{课程}1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(v_i, v_j) | v_i \text{与} v_j \text{有人同时选}, 1 \leq i < j \leq 5\}$$

绘制图 G





$$
\begin{aligned}
&\text{课程}v_i\text{和}v_j\text{可以同时选}\\
\Leftrightarrow&\text{没有人同时选}v_i\text{和}v_j\\
\Leftrightarrow&v_i\text{和}v_j\text{可以涂同一种颜色。}
\end{aligned}
$$

不难看出 $\chi(G)=3$。

定义 18.10

G 为无环的无向图，对图 G 的每条边着一种颜色，使相邻[a]的边着不同的颜色，称作对图 G 的边着色，若能用 k 中颜色给 G 的边着色，则称 G 为 k-可边着色。若 G 为 k-可边着色的，但不是 $(k-1)$-可边着色的，则称 G 的边色数为 k。G 的边色数记作 $\chi'(G)$，简记作 χ'。

[a]两条边有共同的端点，称两边相邻。

Vizing 定理

简单图的边色数只可能取两个值：$\triangle$ 或 $\triangle + 1$。

定理 18.12

二部图的边色数等于 $\triangle$。

推论

长度大于等于 2 的偶圈的边色数等于 2，长度大于等于 3 的奇圈的边色数等于 3。

JIANGXI UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

第十九章 初等数论

Chapter 19　Elementary Number Theory

邹秋云

江西财经大学软件与物联网工程学院

(zouqiuyun@jxufe.edu.cn)

章节内容

章节内容

1. 素数
2. 最大公约数与最小公倍数
3. 同余
4. 一次同余方程

整除

定义

设 a, b 是两个整数，且 $b \neq 0$。如果存在整数 c，使得 $a = bc$，则称 a 被 b 整除，或 b 整除 a，记作 $b|a$。此时，又称 a 为 b 的倍数，b 是 a 的因子。把 b 不整除 a 记作 $b \nmid a$。

1 和它自己本身，称作它的平凡因子。平凡因子之外的因子称作真因子。例如 1 和 10 是 10 的平凡因子，2 和 5 是 10 的真因子。

带余除法

定义

设 a, b 是两个整数，且 $b \neq 0$，则存在唯一的整数 q 和 r，使得

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

这个式子被称作带余除法，记余数 $r = a \mod b$。显然，当 $b|a$ 时，$a \mod b = 0$。

整除的性质

1. 若 $a|b$ 且 $a|c$，则对于任意整数 x, y，有 $a|xb+yc$

   证：设 $b = ma, c = na$，$(m, n$ 为任意整数，且 $m, n \neq 0)$，则

   $$bx + cy = max + ncy = a(mx + ny)$$

2. 若 $a|b$ 且 $b|c$，则 $a|c$。
3. 设 $m \neq 0$，则 $a|b$ 当且仅当 $ma|mb$。
4. 若 $a|b$ 且 $b|a$，则 $a = \pm b$。
5. 若 $a|b$ 且 $b \neq 0$，则 $|a| \leq |b|$。

定义 19.1

如果正整数 a 大于等于 1 且只能被 1 和它自己整除，则称 a 为素数；如果 a 大于 1，且不是素数，则称 a 为合数。素数也称质数。

例如：$1, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$ 是素数，$2, 4, 6, 8, \cdots$ 为合数。

素数的性质

1. 若 $d>1$，p 是素数且 $d|p$，则 $d=p$；
2. 若 p 是素数且 $p|ab$，则必有 $p|a$ 或 $p|b$；
3. $a>1$ 是合数当且仅当 $a=bc$，其中 $1<b<a, 1<c<a$；
4. 合数必有素数因子，即设 a 是一个合数，则存在素数 p，使得 $p|a$。

定理 19.1（素因子分解）

设 $a > 1$，则

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不相同的素数，$r_1, r_2, \cdots, r_k$ 是正整数，并且在不计顺序的情况下，该表示是唯一的。

Example:

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$88 = 2^3 \times 11$$
$$35989 = 17 \times 29 \times 73$$
$$99099 = 3^2 \times 7 \times 11^2 \times 13$$
$$1024 = 2^{10}$$

推论

设 $a = p_1^{r_1}p_2^{r_2},\cdots p_k^{r_k}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不相同的素数，$r_1,r_2,\cdots,r_k$ 是正整数，则正整数 d 为 a 的因子的充分必要条件是

$$d = p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_k^{s_k}$$

其中 $0 \leq s_i \leq r_i, i = 1,2,\cdots,k$。

定理 19.2

有无穷多个素数

记 $\pi(n)$ 是小于 n 的素数个数，表 19.1 表明 $\frac{n}{\ln n}$ 是 $\pi(n)$ 的很好近似。关于 $\pi(n)$ 与 $\frac{n}{\ln n}$ 的关系有如下定理

定理 19.3（素数定理）

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln n} = 1$$

定理 19.4

若 a 是一个合数，则 a 必有一个小于等于 $\sqrt{a}$ 的真因子。

证： 由于 a 为合数，则有 $a = bc$，其中 $1 < b < a, 1 < c < a$。显然 b 和 c 中必然有一个小于等于 $\sqrt{a}$。否则 $bc > (\sqrt{a})^2 = a$，矛盾。

推论

若 a 是一个合数，则 a 必有一个小于等于 $\sqrt{a}$ 的素因子。

例 19.2

判断 127 和 133 是否是素数

解：$\sqrt{127}$ 和 $\sqrt{133}$ 都小于 13，根据定理 19.2 的推论，只需检查她们是否有雄安与等于 13 的素因子。小于 13 的素数有：2, 3, 5, 7, 11，检查结果如下:

$$2 \nmid 127, 3 \nmid 127, 5 \nmid 127, 11 \nmid 127$$

结论：127 是素数。

$$2 \nmid 133, 3 \nmid 133, 5 \nmid 133, 7 | 133$$

结论：133 是合数。

近代已知的最大素数差不多总是形如 2^n-1 的数。当 n 是合数时，2^n-1 一定是合数。设 $n=ab$，其中 $a>1,b>1$，则有

$$2^{ab}-1=(2^b-1)(2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\cdots+2^a+1)$$

当 n 为素数时，$2^2-1=3$，$2^3-1=7$，$2^5-1=31$，$2^7-1=127$ 都是素数，而 $2^{11}-1=2047=23\times 89$ 是合数。

设 p 是素数，称形如 2^p-1 的数为梅森素数。到 2013 年初共找到 48 个梅森素数，最大的梅森素数是 $2^{57885161}-1$，这个数超过 1700 万位。

章节内容

设 a 和 b 是两个整数，如果 $d|a$ 且 $d|b$，则称 d 为 a 与 b 的公因子或公约数。除 0 外，任何整数只有有限个因子。因而，两个不全为 0 的整数只有有限个公因子，其中最大的称作最大公因子，或最大公约数（greatest common divisor），记作 $\gcd(a,b)$。

例如：18 与 24 的正公约数有 1，2，3 和 6，故 $\gcd(18,24)=6$。

设 a 和 b 是两个非零整数，如果 $a|m$ 且 $b|m$，则称 m 为 a 和 b 的公倍数。a 与 b 有无穷多个公倍数，其中最小的公倍数称作最小公倍数（least common multiple），记作 $\mathrm{lcm}(a,b)$。

例如：18 与 24 的正公倍数有 $72, 144, 216$ 等，故 $\mathrm{lcm}(18,24)=72$。

定理 19.5

1. 若 $a|m$，$b|m$，则 $\mathrm{lcm}(a,b)|m$；
2. 若 $d|a$，$d|b$，则 $d|\gcd(a,b)$。

证：（1）记 $M=\mathrm{lcm}(a,b)$，设 $m=qM+r$，$0\le r<M$。根据性质 19.1，由 $a|m$，$a|M$，及 $r=m-qM$，可以推出 $a|r$。同理，有 $b|r$。即 r 是 a 和 b 的公倍数。根据最小公倍数的定义，必有 $r=0$，得证 $M|m$。

（2）记 $D=\gcd(a,b)$，令 $m=\mathrm{lcm}(d,D)$。若 $m=D$，自然有 $d|D$，结论成立。否则 $m>D$，注意到 $d|a$，$D|a$，由（1），得 $m|a$。同理，$m|b$，即 m 是 a 和 b 的公因子，与 D 是 a 和 b 的最大公约数矛盾。

素因子分解求 lcm 和 gcd

设

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}, \quad b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的素数，$r_1, r_2, \cdots, r_k, s_1, s_2, \cdots, s_k$ 是非负整数，则

$$\gcd(a,b) = p_1^{\min(r_1,s_1)} p_2^{\min(r_2,s_2)} \cdots p_k^{\min(r_k,s_k)}$$
$$\operatorname{lcm}(a,b) = p_1^{\max(r_1,s_1)} p_2^{\max(r_2,s_2)} \cdots p_k^{\max(r_k,s_k)}$$

例 19.3

求 168 和 300 的最大公约数和最小公倍数。

解：对 150 和 220 做素因子分解：

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7, \quad 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

可把它们写成

$$168 = 2^3 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1, \quad 300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^0$$

于是

$$\gcd(168, 300) = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 = 12$$
$$\operatorname{lcm}(168, 300) = 2^3 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 = 4200$$

定理 19.6

设 $a=qb+r$，其中 a,b,q,r 都是整数，则 $\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$。

设整数 a,b，且 $b\neq 0$。做带余除法

$$a=q_1b+r_2,\quad 0\leq r_2<|b|$$

若 $r_2>0$，再对 b 和 r_2 做带余除法，得

$$b=q_2r_2+r_3, 0\leq r_3<r_2$$

重复上述过程。由于 $|b|>r_2>r_3>\cdots\geq 0$。必存在 k 使 $r_{k+1}=0$。

辗转相除法（续）

于是，有

$$
\begin{aligned}
&a = q_1 b + r_2, \quad 1 \leq r_2 < |b| \\
&b = q_2 r_2 + r_3, \quad 1 \leq r_3 < r_2 \\
&r_2 = q_r r_3 + r_4, \quad 1 \leq r_4 < r_3 \\
&\quad \vdots \\
&r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k, \quad 1 \leq r_k < r_{k-1} \\
&r_{k-1} = q_k r_k
\end{aligned}
$$

根据定理 19.6，有

$$
\gcd(a, b) = \gcd(b, r_2) = \cdots = \gcd(r_{k-1}, r_k) = r_k
$$

定理 19.7

设 a 和 b 不全为 0，则存在整数 x 和 y 使得 $\gcd(a,b) = xa + yb$。

定理 19.8

整数 a 和 b 互素的充要条件是存在整数 x 和 y 使得 $xa + yb = 1$。

例 19.4

用辗转相除法求 168 与 300 的最大公因子 d，并把 d 表示成 168 和 300 的线性组合，即求整数 x 和 y 使 $d = 168x + 300y$

解：做辗转相除法

$$300 = 168 + 132$$
$$168 = 132 + 36$$
$$132 = 3 \times 36 + 24$$
$$36 = 24 + 12$$
$$24 = 2 \times 12$$

得 $\gcd(168, 300) = 12$。

由上面的式子，又有

$$\begin{aligned}12 &= 36 - 24 \\ &= 36 - (132 - 3 \times 36) \\ &= 4 \times 36 - 132 \\ &= 4 \times (168 - 132) - 132 \\ &= -5 \times 132 + 4 \times 168 \\ &= -5 \times (300 - 168) + 4 \times 168 \\ &= 9 \times 168 - 5 \times 300\end{aligned}$$

章节内容

定义 19.3

设 m 是正整数，a 和 b 是整数。如果 $m|a-b$，则称a 模 m 同余 b，或 a 与 b 模 m 同余，记作 $a=b(\mathrm{mod}\ m)$，即 a 除以 m 的余数和 b 除以 m 的余数相等。如果 a 与 b 模 m 不同余，则记作 $a\neq b(\mathrm{mod}\ m)$。

a 与 b 模 m 同余的充要条件

1. a 与 b 除以 m 的余数相同，即 $a \mod m = b \mod m$；
2. $a=b+km$，其中 k 是整数。

例 7.16

设 $A=\{1,2,\cdots,8\}$，如下定义 A 上的关系 R，证明 R 是 A 上的等价关系。

$$R=\{\langle x,y\rangle\,|x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

解：不难证明 R 是 A 上的等价关系：

- $\forall x\in A$，有 $x\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$；
- $\forall x,y\in A$，若 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$，则 $y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$；
- $\forall x,y,z\in A$，若 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$，$y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$，则有 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$。

同余的性质

性质 19.10

1. 自反性：$a \equiv a(\bmod m)$；
2. 传递性：$a \equiv b(\bmod m), b \equiv c(\bmod m) \Rightarrow a \equiv c(\bmod m)$；
3. 对称性：$a = b(\bmod m) \Rightarrow b \equiv a(\bmod m)$。

性质 19.11 模算术运算

若 $a \equiv b(\bmod m)$，$c = d(\bmod m)$，则

$$a \pm c \equiv b \pm d(\bmod m), \quad ac = bd(\bmod m), \quad a^k \equiv b^k(\bmod m)$$

其中 k 是非负整数。

同余的性质

性质 19.12

设 $d \geq 1$，$d|m$，则 $a \equiv b(\text{mod } m) \Rightarrow a \equiv b(\text{mod } d)$

性质 19.13

设 $d \geq 1$，$a \equiv b(\text{mod } m) \Leftrightarrow da \equiv db(\text{mod } dm)$。

性质 19.14

设 c 与 m 互素，则 $a \equiv b(\text{mod } m) \Leftrightarrow ca \equiv cb(\text{mod } m)$。

整数 a 在模 m 同余关系下的等价类记作 $[a]_m$，称作 a 的模 m 等价类。在不会引起混淆的情况下，可以略去下标 m，简记作 $[a]$。把整数集 $\mathbb{Z}$ 在模 m 同余关系下的商集记作 $\mathbb{Z}_m$。根据性质 19.11，可以在 $\mathbb{Z}_m$ 上定义加法和乘法如下：对于任意的整数 a, b

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a] \cdot [b] = [ab]$$

例 19.7

3^{455} 的个位数是多少？

解: 解 3^{455} 的个位数为 x,则有 $3^{455} = x \pmod{10}$。由 $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ 和性质 19.11，有

$$\begin{aligned}3^{455} &= 3^{4\times113+3} \\ &= (3^4)^{113} \cdot 3^3 \\ &\equiv 1^{113} \times 3^3 \pmod{10} \\ &\equiv 7 \pmod{10}\end{aligned}$$

故 3^{455} 的个位数为 7。

章节内容

一次同余方程

设 $m > 0$，方程

$$ax \equiv c(\bmod m) \tag{19.1}$$

称作一次同余方程，使得式 (19.1) 成立的整数称作该方程的解。

定理 19.9

方程（19.1）有解的充要条件是 $\gcd(a,m)|c$

证：充分性。记 $d=\gcd(a,m)$，$a=da_1, m=dm_1, c=dc_1$，其中 a_1 与 m_1 互素。由定理 19.8，存在 x_1 和 y_1，使得 $a_1x_1+m_1y_1=1$。令 $x=c_1x_1, y=c_1y_1$，得 $a_1x+m_1y=c_1$。等式两边同乘以 d，得 $ax+my=c$。所以 $ax\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$，即 x 是方程（19.1）的解。

必要性。设 x 是方程的解，则存在整数 y 使得 $ax+my=c$。将 $a=da_1, m=dm_1$ 代入，可得

$$d(a_1x+m_1y)=c$$

故 $d|c$。

例 19.9

求一次同余方程 $8x \equiv 4 \pmod 6$ 的最小正整数解。

解：$\gcd(8,6)=2$，$2|4$，由定理 19.9 知方程有解。由 $4 \pmod 6$，知

$$8x = 4+6\cdot 0,\ 4+6\cdot 1,\ 4+6\cdot 2,\ 4+6\cdot 3,\ \cdots$$

即 $x=\frac{1}{2},\ \frac{10}{8},\ 2,\ \frac{22}{8},\ \cdots$，故最小正整数解为 2。

定义 19.4

如果 $ab = 1 \pmod m$，则称 b 为 a 的模 m 逆，记作 $a^{-1} \pmod m$ 或 a^{-1}。根据定义，a 的模 m 逆就是方程

$$ax \equiv 1 \pmod m$$

的解。

定理 19.10

1. a 的模 m 逆存在的充要条件是 a 与 m 互素；
2. 设 a 与 m 互素，则在模 m 下的模 m 逆是唯一的，即 a 的任意两个模 m 逆都模 m 同余。

例 19.10

求 5 的模 7 逆

解：即计算一次同余方程 $5x \equiv 1 \pmod 7$ 的解，观察发现 $3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$，故 $5^{-1} \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$ 或 $5^{-1} \equiv 3 \pmod 7$。