

中微子振荡：PMNS 范式

Neutrino Oscillations: The Rise of the PMNS Paradigm

译者：殷麒麟

2025/6/23

摘要

在中微子振荡发现后的过去 20 年里，有关中微子振荡的实验取得了显著的成果。物理学家精确测量了中微子的质量平方差与混合角，其中包括我们在实验上测得的最后一个混合角— θ_{13} 。

目前，我们观察到的一系列中微子振荡的实验结果都可以使用包含三个有质量的活性中微子的模型来解释，其质量本征态与味道本征态之间可以使用一个 3×3 么正混合矩阵—PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) 矩阵相关联，并且 PMNS 矩阵可以被参数化为 3 个混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 和 1 个 CP 破坏相位 δ_{CP} 。除此之外，中微子的质量平方差 $\Delta m_{ji}^2 = m_j^2 - m_i^2$ 也主导着中微子振荡，其中 m_i 是中微子的第 i 个质量本征态的本征值。本综述将主要介绍三种味道的中微子混合的 PMNS 范式与当前实验对振荡参数的测量。

在未来的几年里，一系列的中微子振荡实验将会取得丰硕的成果，最终将解决中微子振荡剩下的三个谜题，即：

- θ_{23} 混合角的象限 (octant) 与精确值的测量
- 中微子质量顺序 ($m_1 < m_2 < m_3$ 或 $m_3 < m_1 < m_2$) 的确定
- CP 破坏相位 δ_{CP} 的测量

1 简介

在经过长期的理论和实验的研究后，Pontecorvo 于 1957 年 [1][2] 提出的中微子振荡的假说终于在 1998 年到 2002 年的几年间得到证实。物理学家在超级神冈实验 (Super-Kamiokande, Super-Kamioka Neutrino Detection Experiment) [3] 和萨德伯里实验 (SNO, Sudbury Neutrino Observatory) [4] 中分别发现了来自大气和太阳中微子的振荡，随后 KamLAND 实验 (Kamioka Liquid Scintillator Antineutrino Detector) [5] 证实了这一发现。为此，梶田隆章与麦克唐纳获得了 2015 年度诺贝尔物理学奖。

自从中微子振荡被超级神冈实验和 SNO 实验证实以后，有关中微子振荡的实验进展迅速。先前的实验测量了 θ_{12} 与 θ_{23} ，而 θ_{13} 是我们最后一个未知的混合角。长基线的加速器中微子实验—T2K 实验 (Tokai-to-Kamioka) [6] 首次发现了 θ_{13} 非零的迹象，随后的反应堆实验—大亚湾实验 (Daya Bay) [7]、RENO 实验 (Reactor Experiment for Neutrino Oscillations) [8] 与 Double Chooz 实验 [9] 发现了由 θ_{13} 驱动的振荡。2013 年，T2K 实验首次发现了 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ 的出现 [10]，随后被 NO ν A 实验 (NuMI Off-Axis ν_e Appearance) 证实 [11]，这是我们首次以直接的方式探测到中微子的出现而非消失，并为我们探测中微子三种味道的效应开辟了道路。发现中微子振荡的

实验多以天然的中微子源作为基础，但精确测量中微子振荡参数的实验多以人工中微子源作为来源，例如核反应堆或加速器中微子束流。

在理论方面，Pontecorvo 受到 $K - \bar{K}$ 介子振荡的启发，于 1957 年首次提出若轻子数发生破坏，将会发生 $\nu - \bar{\nu}$ 振荡的现象 [1][2]。这个现象我们在今天描述为活性-惰性中微子的振荡，这需要中微子具有质量，与当时人们普遍认为的中微子无质量相矛盾。不久之后，随着 ν_μ 的发现，Maki、Nakagawa 和 Sakata 首次提出了中微子味混合的概念 [12]。随后，1967 年，Pontecorvo 提出了中微子味振荡的概念 [13]，并由 Gribov 和 Pontecorvo 在 1969 年表述成了如今的形式 [14]。

目前，我们观察到的一系列中微子振荡的实验结果都可以使用包含三个有质量的活性中微子的模型来解释，其质量本征态与味道本征态之间可以使用一个 3×3 么正混合矩阵—PMNS 矩阵相联系，并且 PMNS 矩阵可以被参数化为 3 个混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 和 1 个 CP 破坏相位 δ_{CP} （对于 Majorana 中微子的情形，将会引入额外 2 个相位，但它们不会对振荡产生影响）。除此之外，中微子的质量平方差 $\Delta m_{ji}^2 = m_j^2 - m_i^2$ 也主导着中微子振荡，其中 m_i 是中微子的第 i 个质量本征态的本征值。三种味道中微子发生味混合而引起振荡的模型（PMNS 范式）在过去的 20 年里经过了许多实验的验证，在未来的几年里，一系列的中微子振荡实验将会取得丰硕的成果，最终将解决中微子振荡剩下的三个谜题，即 θ_{23} 的象限与精确值、三代中微子的质量顺序与 CP 破坏相位 δ_{CP} 的测量。

研究中微子，特别是中微子振荡，对我们认识基本粒子物理有着重要的意义。仅在实验中观测到的中微子的非零质量是目前唯一的超出标准模型之外的新物理的迹象 [15]。此外，轻子 PMNS 混合矩阵中的三个混合角的数值较大，这与夸克区的 CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) 混合矩阵 [16][17] 明显不同，这本身也蕴含着深刻的物理问题。

有趣的是，PMNS 矩阵中较大的混合角意味着轻子区将有可能出现较大程度的 CP 破坏，这有助于我们理解宇宙中的重子-反重子不对称性的起源，其中最可信的机制是轻子生成 (leptogenesis) 机制 [18] (详见综述 [19])。轻子生成机制预言了除目前已经观测到的三种较轻的中微子以外，还存在较重的 Majorana 中微子，它可以解释宇宙中的重子-反重子不对称性。此外，较重的 Majorana 中微子也可以通过跷跷板 (seesaw) 机制赋予较轻的中微子质量 [20][21][22][23][24]。

本综述将主要介绍近期与中微子振荡参数测量有关的进展，以及未来测量未知振荡参数的实验。文章的结构如下：

- 第2部分：介绍有质量的中微子在真空与物质中振荡的理论
- 第 3-5 部分：概括由 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 混合角驱动的 $\nu_1 - \nu_2, \nu_2 - \nu_3, \nu_1 - \nu_3$ 模式的振荡，即两种味道中微子引起的振荡
- 第 6 部分：介绍仅由三种味道中微子共同振荡才能够解释的实验现象，以及由 T2K 实验和 NO ν A 实验发现的中微子 CP 破坏效应
- 第 7 部分：简要总结我们目前对 PMNS 混合参数的理解，以及全局拟合 (global fit) 的作用
- 第 8 部分：介绍由 PMNS 范式无法解释的反常现象
- 第 9 部分：概述未来的中微子实验

鉴于中微子振荡研究的丰富性与多样性，我们在本篇综述里不可能阐述与理论发展、实验方法和测量结果有关的所有细节与微妙之处。因此，我们推荐感兴趣的读者阅读书籍 [25][26][27][28]，

以及 [29][30][31][32]。PDG 的综述也介绍了与中微子的质量、混合、振荡有关的内容 [33]。也有一部分综述介绍了与中微子相关的专题，例如中微子在物质中的传播 [34][35]、太阳中微子 [36]、通过反应堆实验测量 θ_{13} 混合角 [37]、中微子的质量顺序与未来的相关实验 [38]、实验中观测到的在 PMNS 范式下的反常现象与惰性中微子 [39][40]。最后，[41] 从教学的角度全面介绍了中微子物理的发展历史，包括理论和实验的进展。

2 中微子振荡的理论唯象学

2.1 轻子区的味混合

真空中的中微子振荡是一种量子力学现象 [1][2][13]，来源于非简并的中微子质量与轻子味道的混合 [12][13]。类似夸克，轻子区的味混合来源于弱作用本征态与质量本征态的不重合，即以味本征态作为基矢表述的中微子质量矩阵是非对角的，其中味本征态定义为与带电轻子的质量本征态 e, μ, τ 所对应的弱作用本征态 ν_e, ν_μ, ν_τ 。联系左手中微子场的味本征态和质量本征态的幺正变换称为**轻子混合矩阵**，即 PMNS 矩阵：

$$\begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix}_L = U \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \\ \nu_3(x) \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \\ \nu_3(x) \end{pmatrix}_L \quad (1)$$

在方程 (1) 中， $\nu_{eL}(x), \nu_{\mu L}(x), \nu_{\tau L}(x)$ 是与处于左手**味本征态**的中微子对应的场，其中左手味本征态的中微子通过弱带电流分别与 e, μ, τ 耦合。而 $\nu_{1L}(x), \nu_{2L}(x), \nu_{3L}(x)$ 分别描述了质量为 m_1, m_2, m_3 的中微子左手质量本征态。方程 (1) 可以被简写为：

$$\nu_{\alpha L}(x) = \sum_i U_{\alpha i} \nu_{iL}(x) \quad (2)$$

其中， $\alpha = e, \mu, \tau$ 以及 $i = 1, 2, 3$ 。为了简化记号，之后我们将省略 $\nu_L(x)$ 中的“L”与“x”。味混合的结果是中微子不是以它的质量本征态去与给定味道的带电轻子 $\bar{\ell}_{\alpha L}$ 通过弱带电流（CC, charged current）耦合，而是以质量本征态的相干叠加去进行耦合：

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} + \text{h.c.} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \sum_{i=1,2,3} U_{\alpha i} \nu_{iL} + \text{h.c.} \quad (3)$$

正是这种相干性使得中微子可能会发生振荡。

由于 PMNS 矩阵是两组正交完备基矢的变换矩阵，因此它满足幺正性，即 $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$ ：

$$\sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau) \quad \sum_\alpha U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

对于任意的 3×3 幺正矩阵 U ，可以证明它可以被参数化为 3 个混合角和 6 个相位。然而，并不是所有相位都是物理的，我们可以通过相位转动重新定义轻子场，从而吸收额外的相位。即如果中微子是 Dirac 费米子，我们可以同时对轻子场和中微子场做相位转动： $\ell_\alpha(x) \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_\alpha(x), \nu_i(x) \rightarrow e^{i\phi_i} \nu_i(x)$ ，其中 $\ell_\alpha(x), \nu_i(x)$ 是 4 分量的 Dirac 场（即对左手和右手的轻子场做相同的相位转动，使得质量项 $-\sum_\alpha m_{\ell_\alpha} \bar{\ell}_{\alpha R} \ell_{\alpha L} - \sum_i m_i \bar{\nu}_{iR} \nu_{iL} + \text{h.c.}$ 保持不变）。在做如上的相位转动后，我们只需要重新定义 PMNS 矩阵：

$$U_{\alpha i} \rightarrow e^{i(\phi_\alpha - \phi_i)} U_{\alpha i} \quad (5)$$

即可使得带电流项 (3) 式保持不变。已知对于 9 个相位差 $\phi_\alpha - \phi_i$ ，其中只有 5 个是相互独立的，并且它们都可以通过矩阵元的重新定义从而被吸收。因此我们可以从 PMNS 中移除 5 个相位，只保留一个物理的相位—CP 破坏相位 δ_{CP} 。但如果中微子是 Majorana 费米子，那么我们无法对左手轻子场做相位转动，因为这样会导致它带有复的质量 (Majorana 质量项为 $-\frac{1}{2}m_i\nu_{iL}^T C\nu_{iL} + \text{h.c.}$ ，其中 C 是电荷共轭矩阵，满足 $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$ 。关于 Majorana 中微子，可以参考 [42])。因此我们只能对带电轻子场做相位转动，这种转动可以通过 PMNS 矩阵元的重新定义而被吸收：

$$U_{\alpha i} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} U_{\alpha i} \quad (6)$$

因此，与 Dirac 中微子不同，Majorana 中微子具有 3 个物理的 CP 破坏相位¹。

基于以上讨论，我们可以将 PMNS 矩阵写作三个关于角度 $\theta_{23}, \theta_{13}, \theta_{12}$ 的转动矩阵和一个关于相位的对角矩阵 P 的乘积。其中关于 θ_{13} 的转动矩阵与相位 δ_{CP} 有关，并且由于关于 θ_{13} 的转动矩阵中包含 $e^{i\delta_{\text{CP}}}$ ，因此它不是一般的正交转动实矩阵，而是一个么正矩阵。于是：

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} P \end{aligned} \quad (7)$$

方程 (7) 中， $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ ， $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ 。对于对角矩阵 P ，在 Dirac 中微子的情形下 $P = \mathbf{1}$ ，在 Majorana 中微子的情形下包含了与中微子的 Majorana 属性有关的 2 个相位。不失一般性地，我们可以取 $\theta_{ij} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 和 $\delta_{\text{CP}} \in [0, 2\pi)$ 。以上的参数化方法已经成为了一种标准，但 Majorana 中微子情形下的对角矩阵 P 的形式并无统一约定。以下几种记法在文献中都有出现：

$$P_{\text{Majorana}} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\phi_3 + \delta_{\text{CP}})} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\sigma} \end{pmatrix} \quad (8)$$

这些记法与带电轻子场的相位转动有关，它们彼此在物理上是完全等价的。PMNS 矩阵中的 δ_{CP} 通常称为“Dirac 相位”，而对角矩阵 P 中的相位通常称为“Majorana 相位”。不失一般性地，Majorana 相位的取值范围可以选为 $[0, \pi)$ 。我们在本综述中将不会重点关注 Majorana 相位，因为之后我们将会看到，它并不会影响中微子的振荡概率。Majorana 相位仅在轻子数破坏的过程中出现，例如无中微子双 β 衰变 ($0\nu\beta\beta$)，在这一类过程中 Majorana 属性将至关重要 (关于 $0\nu\beta\beta$ 的综述，理论方面可参考 [46][47]，实验方面可参考 [48])。而 Dirac 相位 δ_{CP} 与振荡概率相关，并且导致真空中的中微子振荡和反中微子振荡的不对称性，详见 2.3 节。

2.2 真空中的中微子振荡

一般的中微子振荡实验需要包含三个步骤。第一步，从带电流过程产生一束处于纯的味本征态的中微子束流，例如 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ 过程可以产生纯的 ν_μ 束流。而味本征态是质量本征态的相干

¹ 以上的参数化方法可以推广至任意 N 代轻子的情形。我们发现，在 Dirac 中微子的情形下， N 代轻子混合将导致混合矩阵中包含 $\frac{N(N-1)}{2}$ 个混合角与 $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ 个相位，对于 Majorana 中微子将会有额外 $N-1$ 个相位 [43][44][45]。因此，与夸克区不同，若中微子是 Majorana 中微子，则 CP 破坏在 2 代轻子中就可以出现，但振荡中的 CP 破坏至少需要 3 代轻子 (见 2.3 节)。

叠加²:

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (9)$$

注意, 前面我们描述味混合时采用的形式为 $\nu_\alpha(x) = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i(x)$, 但在 (9) 式中我们采用其复共轭 $U_{\alpha i}^*$, 其原因是 $\nu_\alpha(x)$ 是一个 Dirac 量子场算符, 其中包含正粒子的湮灭算符, 负责湮灭正中微子。但其复共轭场 $\nu_\alpha^\dagger(x) = \sum_i U_{\alpha i}^* \nu_i^\dagger(x)$ 包含正粒子的产生算符, 将其作用于真空态即可得到正中微子态, 即 $\nu_\alpha^\dagger(x)|0\rangle = |\nu_\alpha\rangle$ 。第二步, 中微子束流在空间中传播。由于每个质量本征态都是真空中的哈密顿量本征态, 所以随时间演化时带有因子 $e^{-iE_i t}$, 其中 $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ 是第 i 个质量本征态的能量 (取自然单位制 $c = \hbar = 1$)。由于不同质量本征态的时间演化因子不同, 因此质量本征态的含时演化将使得中微子束流不再是一个纯的味本征态:

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} \sum_\beta U_{\beta i} |\nu_\beta\rangle \quad (10)$$

最后一步是通过特定的带电流相互作用探测中微子束流。从 α 味道振荡至 β 味道的概率振幅为 $\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle$, 相应的振荡概率为:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle|^2 = \left| \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \quad (11)$$

在绝大多数情况下, 中微子是极端相对论的, 因此中微子的能量可以展开为 $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} = p\sqrt{1 + m_i^2/p^2} \simeq p\sqrt{1 + m_i^2/E^2} \simeq p(1 + m_i^2/2E^2) \simeq p + m_i^2/2E$ (使用近似 $E \simeq p$)。于是, 中微子的振荡公式可以写作³:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\Delta m_{ji}^2 \equiv m_j^2 - m_i^2$ 为质量平方差, $L \simeq ct$ 是中微子的传播距离。对于反中微子振荡, 我们需要将方程 (12) 中的 U 替换为 U^* , 这将会改变最后一项的符号:

$$\begin{aligned} P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E} \right) \end{aligned}$$

公式 (12) 的推导如下。由 (11) 式可知:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_{i,j} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i(E_j - E_i)t} = \sum_{i,j} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t}$$

²注意, 正中微子态的味道和质量本征态之间通过 PMNS 矩阵的复共轭相联系, 而正中微子场的味道和质量本征态之间通过 PMNS 矩阵相联系, 例如方程 (2)。这是因为量子中微子场 $\nu_\alpha(x)$ 可以湮灭一个味道为 α 的中微子, 而中微子态 $|\nu_\alpha(\vec{p})\rangle$ 需要通过产生算符 $a_\alpha^\dagger(\vec{p})$ 作用在真空态上得到。对于反中微子, 我们有 $\bar{\nu}_\alpha(x) = \sum_i U_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i(x)$ 与 $|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\bar{\nu}_i\rangle$ 。

³在推导 (12) 式的过程中, 我们进行了如下简化: 假设中微子传播中的质量本征态可以使用平面单色波描述, 带有动量 \vec{p}_i , 并假设不同质量本征态的动量相同, 即 $\vec{p}_i = \vec{p}$ 。而恰当的处理方式应当是将质量本征态看作是波包的叠加, 或在 QFT 的框架下计算。然而, 在适当的相干性条件下, 以上方法得到的振荡概率是相同的, 即 (12) 式。详细讨论见 [49]。

当 $i = j$ 时:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} = \sum_i |U_{\beta i} U_{\alpha i}^*|^2$$

当 $i \neq j$ 时:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \left(\sum_{i < j} + \sum_{i > j} \right) U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} \\ &= \sum_{i < j} \left(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} + U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} e^{i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} \right) \\ &= 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re} \left(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} \right) \end{aligned}$$

可以证明:

$$\operatorname{Re}(ze^{ix}) = \operatorname{Re}[(a + bi)(\cos x + i \sin x)] = a \cos x - b \sin x = \operatorname{Re}(z) \cos x - \operatorname{Im}(z) \sin x$$

因此, 当 $i \neq j$ 时有:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \cos \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \\ &= 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} t \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \end{aligned}$$

又已知恒等式:

$$\begin{aligned} \sum_i |z_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(z_i z_j^*) &= \sum_i |z_i|^2 + \sum_{i < j} (z_i z_j^* + z_i^* z_j) = \sum_i |z_i|^2 + \left(\sum_{i < j} + \sum_{i > j} \right) z_i z_j^* \\ &= \sum_{i, j} z_i z_j^* = \left| \sum_i z_i \right|^2 \end{aligned}$$

于是可得 (12) 式:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \sum_i |U_{\beta i} U_{\alpha i}^*|^2 + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} t \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \\ &= \left| \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \right|^2 - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} t \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E} \right) \end{aligned}$$

最后一步利用了 PMNS 矩阵的么正性 $\sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* = \delta_{\alpha\beta}$ ，以及中微子的传播距离 $L \simeq ct = t$ 。对于反中微子振荡，我们只需将其中的 $U \rightarrow U^*$ 即可。

从 (12) 式中，我们可以定性地获得一些有关中微子振荡的性质。首先，振荡发生的前提是中微子必须具有非简并的质量 ($\Delta m_{ji}^2 \neq 0$) 以及非平凡味混合 ($U \neq \mathbf{1}$)。振荡概率 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ 依赖于 3 个混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 和 2 个独立的质量平方差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ ($\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2$)。振荡同样依赖于 Dirac 相位 δ_{CP} ，而与 Majorana 相位无关，这是因为振荡概率的公式 (12) 中只包含类似 $U_{\alpha i} U_{\beta i}^*$ 的项，因此 (7) 中的对角矩阵 P 中的相位相互抵消，不会对振荡产生贡献。因此，Dirac 中微子和 Majorana 中微子具有相同的振荡概率。我们可以从更一般的角度来理解这个事实，因为中微子振荡中的总轻子数是守恒的，然而中微子的 Majorana 属性体现在轻子数破坏的过程中，例如 $0\nu\beta\beta$ ，所以 Majorana 中微子的振荡性质应该与 Dirac 中微子一致。从 (12) 式中我们还可以得知 CP 破坏 (即 $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) \neq P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$) 仅在出现过程 ($\beta \neq \alpha$ ，即从 ν_α 束流中出现了 ν_β) 中发生，在消失过程 ($\beta = \alpha$ ，由于 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) < 1$ ，说明 ν_α 消失，振荡到其它味道) 中不会发生。同时，中微子和反中微子的存活 (即不发生振荡) 概率相等：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 \sum_{i < j} |U_{\alpha i} U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha) \quad (13)$$

其原因是当 $\alpha = \beta$ 时， $U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}$ 一项为实数。

虽然在精确描述中微子振荡时，例如考虑次级效应和 CP 破坏效应时，我们必须使用三种味道中微子的振荡公式 (12) 式，但在许多振荡实验的条件下，我们可以考虑取 (12) 式的近似，忽略其中的次级项。此时，振荡公式就可以简化为由单一质量平方差 Δm^2 与单一混合角 θ 驱动的有效振荡，这种振荡只是两种味道中微子振荡：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right) \quad (\beta \neq \alpha) \quad (14)$$

若只考虑两种味道中微子振荡，令 PMNS 矩阵中 $\theta_{13} = \theta_{23} = 0$ ，混合矩阵可以约化成：

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} \end{pmatrix}$$

因此，振荡概率为：

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4(U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &= -4(-\sin^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{12}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &= \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

即得到 (14) 式。对于 θ_{23}, θ_{13} 驱动的振荡模式，以上推导过程同样成立。由 (7) 式可知，因为约化的 θ_{12}, θ_{23} 混合矩阵纯实，并且约化的 θ_{13} 混合矩阵中 $U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}$ 也是实数，因此振荡概率 (14) 式对于正反中微子相同，即在两种味道中微子振荡中不存在 CP 破坏，与我们之前的论述相同。此时，振荡的振幅为 $\sin^2 2\theta$ ，振荡长度为：

$$L_{\text{osc.}}(\text{km}) = 2.48 E(\text{GeV}) / \Delta m^2(\text{eV}^2) \quad P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2(\pi L / L_{\text{osc.}}) \quad (15)$$

振荡长度 L_{osc} 定义为相邻两个振荡概率极大值之间的距离：

$$\frac{\Delta m^2(L + L_{\text{osc}})}{4E} - \frac{\Delta m^2 L}{4E} = \pi \Rightarrow L_{\text{osc}}(\text{eV}^{-1}) = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$$

在自然单位制下，所有的单位都可以使用 eV 表示。其中 eV 与 m 的换算关系为：

$$1 \text{ m} = (3 \times 10^8)^{-1} \text{ s} = \frac{(3 \times 10^8)^{-1}}{1.056 \times 10^{-34}} \text{ J}^{-1} = (3 \times 10^8)^{-1} \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.056 \times 10^{-34}} \text{ eV}^{-1} = 5.051 \times 10^6 \text{ eV}^{-1}$$

即： $1 \text{ eV}^{-1} = (5.051 \times 10^9)^{-1} \text{ km}$ 。因此：

$$\begin{aligned} L_{\text{osc}}(\text{km}) &= L_{\text{osc}}(\text{eV}^{-1}) \times (5.051 \times 10^9)^{-1} = \frac{4\pi E(\text{eV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \times (5.051 \times 10^9)^{-1} \\ &= \frac{4\pi E(\text{GeV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \times 5.501^{-1} = \frac{2.48E(\text{GeV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \end{aligned}$$

此外，自然单位制下的相位：

$$\frac{\Delta m^2(\text{eV}^2)L(\text{eV}^{-1})}{4E(\text{eV})} = \frac{\Delta m^2(\text{eV}^2) \times (5.051 \times 10^9)^{-1}L(\text{km})}{4E(\text{GeV}) \times 10^{-9}} = \frac{1.27\Delta m^2(\text{eV}^2)L(\text{km})}{E(\text{GeV})}$$

需要注意，振荡概率 (14) 式对 Δm^2 的符号以及 θ 的象限 ($\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ 称为第一象限， $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 称为第二象限) 都不灵敏。当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，对应最大混合角。在中微子振荡实验的精度提高一个层次，并开始对次级效应灵敏之前，以上的两种味道的振荡公式已经被使用了几十年了。特别地，太阳和大气中微子的振荡可以被两味混合的框架很好地描述（太阳中微子振荡通常与物质效应有关，详见 2.5 节）。我们假设 $(\Delta m_{\text{sol}}^2, \theta_{\text{sol}})$ 与 $(\Delta m_{\text{atm}}^2, \theta_{\text{atm}})$ 分别表示太阳和大气中微子振荡的参数，在实验中，我们发现 $\Delta m_{\text{sol}}^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2$ ，并且混合角 $\theta_{\text{sol}}, \theta_{\text{atm}}$ 都很大。根据以上的实验结果，我们通常采用如下约定定义中微子的质量与质量平方差：(1) Δm_{sol}^2 由 ν_1, ν_2 的质量平方差定义；(2) 约定质量本征值 $m_2 > m_1$ ，即 $\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\text{sol}}^2 > 0$ 。于是， Δm_{atm}^2 一定为 $|\Delta m_{31}^2|$ 或 $|\Delta m_{32}^2|$ 。由于 $\Delta m_{\text{sol}}^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2$ ，所以有：

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 = \Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2| \simeq \Delta m_{\text{atm}}^2 \quad (16)$$

即 ν_1, ν_2 的质量接近，且 $m_1 < m_2$ ，而 ν_3 的质量与 ν_1, ν_2 差别较大。因此，三代中微子的质量顺序只有两种可能：**正序** (normal ordering/hierarchy)，对应 $m_1 < m_2 < m_3$ ，以及 $\Delta m_{31}^2 > 0$ ；**反序** (inverted ordering/hierarchy)，对应 $m_3 < m_1 < m_2$ ，以及 $\Delta m_{31}^2 < 0$ 。 $m_1 < m_3 < m_2$ 的质量顺序与 (16) 式不符，所以被排除。

假设振荡实验中的基线长度为 L ，束流能量为 E ，且满足 $\Delta m_{21}^2 L/E \ll 1$ ，此时我们可以令公式 (12) 中的 $\Delta m_{21}^2 = 0$ 作为近似，从而中微子振荡的“频率”只剩下 $\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{32}^2$ 。由于三个混合角中，除了 θ_{13} 较小以外，其余两个混合角的大小相当，因此这样的近似是合理的。此时，振荡（出现）概率可以表示为 [50][51]：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta_{\alpha\beta}^{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad \sin^2 2\theta_{\alpha\beta}^{\text{eff}} = 4|U_{\alpha 3}U_{\beta 3}|^2 \quad (\beta \neq \alpha) \quad (17)$$

不发生振荡（消失）的概率为：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - \sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad \sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{\text{eff}} = 4|U_{\alpha 3}|^2(1 - |U_{\alpha 3}|^2) \quad (18)$$

公式 (17) 的推导过程如下:

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} L \right) + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \right) \\
&= \delta_{\alpha\beta} - 4(U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) - 4(U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right) \\
&= -4[(U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* + U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= -4[(0 - U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= 4|U_{\alpha 3} U_{\beta 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right)
\end{aligned}$$

公式 (18) 的推导过程如下:

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) &= \delta_{\alpha\alpha} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} L \right) + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \right) \\
&= \delta_{\alpha\alpha} - 4(U_{\alpha 1} U_{\alpha 1}^* U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) - 4(U_{\alpha 2} U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right) \\
&= 1 - 4[(U_{\alpha 1} U_{\alpha 1}^* + U_{\alpha 2} U_{\alpha 2}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= 1 - 4[(1 - U_{\alpha 3} U_{\alpha 3}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= 1 - 4|U_{\alpha 3}|^2 (1 - |U_{\alpha 3}|^2) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right)
\end{aligned}$$

其中, 由于 $|U_{\alpha 3} U_{\beta 3}|^2, |U_{\alpha 3}|^2(1 - |U_{\alpha 3}|^2)$ 是实数, 所以虚部 $\text{Im}(U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha j}) = 0$ 。公式 (17)、(18) 通常可以用于描述大气中微子、长基线加速器中微子实验和短基线反应堆中微子实验主导的振荡。例如, 在大气中微子振荡中, ν_μ 的消失概率可以表示为 (代入 $U_{\mu 3} = \cos \theta_{13} \sin \theta_{23}$):

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - (\cos^2 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} + \sin^4 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \quad (19)$$

$$\simeq 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned}
4|U_{\alpha 3}|^2(1 - |U_{\alpha 3}|^2) &= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (1 - \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23}) \\
&= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (\sin^2 \theta_{23} + \cos^2 \theta_{23} - \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23}) \\
&= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} [\cos^2 \theta_{23} + \sin^2 \theta_{23} (1 - \cos^2 \theta_{13})] \\
&= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (\cos^2 \theta_{23} + \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{13}) \\
&= \cos^2 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} + \sin^4 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13}
\end{aligned}$$

在 (20) 式中, 我们忽略了正比于 $\sin^2 2\theta_{13}$ 的项。由此可以看出, 大气中微子振荡由 θ_{23} 混合角与 Δm_{31}^2 (或 Δm_{32}^2) 质量平方差主导, 因此我们通常将 θ_{23} 称为“大气混合角”, 将 Δm_{31}^2 (或 Δm_{32}^2)

称为“大气质量平方差”。对于在 ν_μ 束流中出现的 ν_e 与 ν_τ ，我们有：

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (21)$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (22)$$

对于短基线反应堆反中微子的消失：

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (23)$$

公式 (21) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= 4|U_{\mu 3}U_{e 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 4 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

公式 (22) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= 4|U_{\mu 3}U_{\tau 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

公式 (23) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) &= 1 - 4|U_{e 3}|^2(1 - |U_{e 3}|^2) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - 4 \sin^2 \theta_{13}(1 - \sin^2 \theta_{13}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - 4 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

需要注意，若考虑完整的三味混合时的振荡，那么以上的表达式需要进行一定修正。特别是对于如今的实验精度，这些修正是必须被考虑在内的。顺便指出，虽然振荡概率 (21)、(22) 仅由一个频率 Δm_{31}^2 所主导，但它们并不是简单的两味混合振荡，因为其中包含了两个混合角 θ_{13}, θ_{23} 。特别地，振荡概率 (21) 对 θ_{23} 的象限灵敏。

当 $\Delta m_{31}^2 L/E \ll 1$ 与 $\Delta m_{21}^2 L/E \gtrsim 1$ 时，此时由 Δm_{31}^2 主导的高频振荡将会被平均化， ν_e 的振荡将由 Δm_{21}^2 主导而非 Δm_{31}^2 。忽略被 $\sin^2 \theta_{13}$ 抑制的部分，我们可以得到：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) \simeq 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \quad (24)$$

公式 (24) 的推导过程如下。由三味混合的振荡公式 (13) 式可知：

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - 4 \sum_{i < j} |U_{ei}|^2 |U_{ej}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) \\
&= 1 - 4|U_{e1}|^2 |U_{e2}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - 4|U_{e2}|^2 |U_{e3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\
&\quad - 4|U_{e1}|^2 |U_{e3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\
&= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\
&\quad - \cos^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\
&\simeq 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2} \\
&\quad - \cos^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

其中：

$$\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}$$

取 $\sin^2 \theta_{13} \simeq 0, \cos^2 \theta_{13} \simeq 1$ ，即可得 (24) 式。该公式适用于长基线加速器中微子实验 KamLAND 以及低能太阳中微子振荡（其中某些振荡项已经被平均化）。低能太阳中微子振荡中，物质效应相比于真空振荡来说属于次级效应。由于 (24) 式可以描述太阳中微子振荡，因此 θ_{12} 通常称为“太阳混合角”， Δm_{21}^2 通常称为“太阳质量平方差”。若还原 (24) 式中的 θ_{13} 混合角，则有振荡概率：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = \sin^4 \theta_{13} + \cos^4 \theta_{13} \left[1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \right] \quad (25)$$

公式 (25) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2} \\
&\quad - \cos^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2} \\
&= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{13} \\
&= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - 2 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} \\
&= (\sin^2 \theta_{13} + \cos^2 \theta_{13})^2 - 2 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\
&= \sin^4 \theta_{13} + \cos^4 \theta_{13} - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right)
\end{aligned}$$

即 (25) 式。

2.3 中微子振荡的 CP 破坏与三味混合效应

我们在 2.2 节中看到，中微子振荡依赖于 PMNS 矩阵中的相位 δ_{CP} ，因此我们有可能在中微子振荡中观察到 CP 对称性的破坏 [52]，即正反中微子在真空中的振荡概率不同。在详细讨论振

荡概率之前，我们首先来讨论不同的分立对称性⁴对振荡概率的作用结果（我们推荐读者阅读 [53]，其中详细介绍了 CP 变换与 T 变换对中微子振荡的作用，包含真空振荡与物质效应）：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \xrightarrow{\text{CP}} P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) \quad (26)$$

$$\xrightarrow{\text{T}} P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) \quad (27)$$

$$\xrightarrow{\text{CPT}} P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha) \quad (28)$$

因此，如果 CPT 守恒成立，则 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha)$ ，这预示着中微子振荡中的 CP 不对称与 T 不对称的程度相同：

$$A_{\alpha\beta} = \frac{P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)}{P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) + P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)} = \frac{P(\nu_\alpha - \nu_\beta) - P(\nu_\beta - \nu_\alpha)}{P(\nu_\alpha - \nu_\beta) + P(\nu_\beta - \nu_\alpha)} \quad (29)$$

CPT 守恒同时也表明 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha)$ ，即在中微子消失的实验中不存在 CP 破坏，与我们之前在三味混合的公式 (13) 中看到的一致（其中我们已经隐含地假设正反中微子的质量与混合参数相同，这是 CPT 不变性所要求的）。

为了讨论中微子振荡中的 CP 破坏效应 (CPV)，我们可以引入 $\Delta P_{\alpha\beta} \equiv P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)$ ，它等于三味振荡公式 (12) 中关于 CP 变换呈奇函数性质 (CP-odd) 的部分的 2 倍，即 [43][54]：

$$\Delta P_{\alpha\beta} = \pm 16J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \quad (30)$$

$$J \equiv \text{Im}(U_{e1}U_{\mu 1}^*U_{e2}^*U_{\mu 2})$$

公式 (30) 的推导过程如下。已知 (12) 式以及反中微子的振荡概率：

$$\begin{aligned} P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i<j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) + 2 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i<j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) - 2 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \end{aligned}$$

由此可知：

$$\Delta P_{\alpha\beta} \equiv P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = 4 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right)$$

以 $\alpha = e, \beta = \tau$ 为例：

$$\begin{aligned} \Delta P_{e\mu} &= 4 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{ei} U_{\mu i}^* U_{ej}^* U_{\mu j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \\ &= 4 \left[\text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) + \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e3}^* U_{\mu 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}(U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e3}^* U_{\mu 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

⁴需要强调， $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)$ 是电荷-宇称变换 CP 作用于 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ 的结果，并非是电荷共轭变换 C 作用的结果。 ν_α, ν_β 是左手微子，其反粒子 $\bar{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\beta$ 是右手反中微子，也就是 ν_α, ν_β 的 CP 共轭。 ν_α, ν_β 的 C 共轭是假想的左手反中微子，它们不与 W, Z 玻色子耦合，也不能在弱作用过程中产生。

利用 PMNS 矩阵的么正性可得 $U_{e3}^* U_{\mu 3} = -U_{e1}^* U_{\mu 1} - U_{e2}^* U_{\mu 2}$, 于是:

$$\begin{aligned} U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e3}^* U_{\mu 3} &= U_{e1} U_{\mu 1}^* (-U_{e1}^* U_{\mu 1} - U_{e2}^* U_{\mu 2}) = -U_{e2}^* U_{\mu 2} U_{e1} U_{\mu 1}^* - |U_{e1}|^2 |U_{\mu 1}|^2 \\ U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e3}^* U_{\mu 3} &= U_{e2} U_{\mu 2}^* (-U_{e1}^* U_{\mu 1} - U_{e2}^* U_{\mu 2}) = -U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e1}^* U_{\mu 1} - |U_{e2}|^2 |U_{\mu 2}|^2 \end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned} \Delta P_{e\mu} &= 4 \left[\text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \text{Im}(U_{e2}^* U_{\mu 2} U_{e1} U_{\mu 1}^*) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. - \text{Im}(U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e1}^* U_{\mu 1}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \\ &= 4 \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \left[\sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

已知有三角恒等式:

$$\sin(C + A - B) + \sin(C - A + B) - \sin(C + A + B) - \sin(C - A - B) = 4 \sin A \sin B \sin C$$

其中 $A = \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}$, $B = \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}$, $C = \frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}$, 即:

$$4 \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) = \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right)$$

于是上式可以化为:

$$\begin{aligned} \Delta P_{e\mu} &= 16 \times \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \\ &= 16J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \end{aligned}$$

当 $\alpha = \mu, \beta = \tau$ 时:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\mu\tau} &= 4 \left[\text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 2}^* U_{\tau 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) + \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}(U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

由么正性可知:

$$\begin{aligned} \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 2}^* U_{\tau 2}) &= \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\mu 2}^* U_{\tau 1}^* U_{\tau 2}) = +\text{Im}[U_{\mu 1} U_{\mu 2}^* (-U_{e1}^* U_{e2} - U_{\mu 1}^* U_{\mu 2})] = -\text{Im}(U_{e1}^* U_{\mu 1} U_{e2} U_{\mu 2}^*) \\ \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) &= \text{Im}[U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* (-U_{\mu 1}^* U_{\tau 1} - U_{\mu 2}^* U_{\tau 2})] = -\text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 2}^* U_{\tau 2}) = +\text{Im}(U_{e1}^* U_{\mu 1} U_{e2} U_{\mu 2}^*) \\ \text{Im}(U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) &= \text{Im}[U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* (-U_{\mu 1}^* U_{\tau 1} - U_{\mu 2}^* U_{\tau 2})] = -\text{Im}(U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* U_{\mu 1}^* U_{\tau 1}) = -\text{Im}(U_{e1}^* U_{\mu 1} U_{e2} U_{\mu 2}^*) \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\mu\tau} &= 4 \left[J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - J \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + J \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \\ &= 4J \left[\sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

因此：

$$\Delta P_{\mu\tau} = 16J \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right)$$

进一步有：

$$\text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) = J \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ijk}$$

当 $(\alpha, \beta, \gamma), (i, j, k)$ 为 $(e, \mu, \tau), (1, 2, 3)$ 的偶置换时取 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = +1, \epsilon_{ijk} = +1$ ，为奇置换时取 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -1, \epsilon_{ijk} = -1$ 。这样我们就证明了 (30) 式：

$$\Delta P_{\alpha\beta} = \pm 16J \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right)$$

当 (α, β, γ) 是 (e, μ, τ) 的偶置换时，(30) 式前面取“+”号，为奇置换时取“-”号（即当 $(\alpha, \beta) = (e, \mu), (\mu, \tau), (\tau, e)$ 时前面取正号，其余情况取负号）。(30) 式中的 J 称为 **Jarlskog 不变量**⁵，可以衡量由 Dirac 相位 δ_{CP} 引起的 CP 破坏的程度。使用 PMNS 矩阵的标准参数化形式，我们可以将 Jarlskog 不变量表示为：

$$J = \frac{1}{8} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \quad (31)$$

公式 (31) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} J &= \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \\ &= \text{Im} [c_{12} c_{13} (-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{-i\delta_{\text{CP}}}) s_{12} c_{13} (c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= \text{Im} [c_{12} s_{12} c_{13}^2 (-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{-i\delta_{\text{CP}}}) (c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 \text{Im}(s_{12}^2 c_{23} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{\text{CP}}} - c_{12}^2 s_{23} c_{23} s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}}) \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 \text{Im}(s_{12}^2 c_{23} s_{23} s_{13} i \sin \delta_{\text{CP}} + c_{12}^2 s_{23} c_{23} s_{13} i \sin \delta_{\text{CP}}) \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 s_{23} c_{23} s_{13} \sin \delta_{\text{CP}} (s_{12}^2 + c_{12}^2) \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 s_{23} c_{23} s_{13} \sin \delta_{\text{CP}} \\ &= c_{13} c_{12} s_{12} c_{13} s_{13} c_{23} s_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \end{aligned}$$

即：

$$J = \frac{1}{2^3} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}}$$

因此，中微子振荡中发生 CP 破坏的必要条件是所有混合角 θ_{ij} 非零，相位 δ_{CP} 不等于 0 或 π 。进一步，由 (30) 式可知，发生 CP 破坏同时还要求质量平方差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2, \Delta m_{32}^2$ 非零，即三代中微子的质量各不相同。总结来说：

$$\text{Conditions for CPV in oscillations: } \theta_{ij} \neq 0, \delta_{\text{CP}} \neq 0, \pi, m_1 \neq m_2, m_2 \neq m_3, m_3 \neq m_1 \quad (32)$$

以上条件与夸克区的 CP 破坏相同。目前，所有的混合角 θ_{ij} 与质量平方差 Δm_{ji}^2 都已经被测量过了，但长期以来，我们对 θ_{13} 的实验测量只给出了它的上界（关于 θ_{13} 的早期实验测量与第一个非零迹象，详见 5.1 节）。如果 $\sin^2 2\theta_{13}$ 的值小于 10^{-4} ，即使 CP 破坏相位 δ_{CP} 最大，那么凭借我们现有的实验技术，也无法在振荡实验中观测到 CP 破坏。

⁵所谓“不变”，是指 J 不依赖于 PMNS 矩阵元的相位选择，即在轻子场的相位转动下保持不变。历史上，Jarlskog 不变量首先被引入用于描述夸克区的 CP 破坏 [55]，(30) 式中的 J 是它在轻子区的推广。

公式 (30) 中包含了许多信息。首先，它告诉我们 CP 破坏在中微子振荡中是普遍存在的，对于不同的振荡通道 $\alpha \rightarrow \beta$ ， $\Delta P_{\alpha\beta}$ 最多相差一个符号。这个特性来源于 PMNS 矩阵的么正性，它表明：

$$\text{Im}(U_{e1}U_{\mu 1}^*U_{e2}^*U_{\mu 2}) = -\text{Im}(U_{e1}U_{\tau 1}^*U_{e2}^*U_{\tau 2}) = \text{Im}(U_{\mu 1}U_{\tau 1}^*U_{\mu 2}^*U_{\tau 2}) \quad (33)$$

于是有 $\Delta P_{e\mu} = -\Delta P_{e\tau} = \Delta P_{\mu\tau}$ 。公式 (30) 还告诉我们 CP 破坏的效应正比于 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E)$ ，即只有在对较小的 Δm_{21}^2 主导的次级振荡模式灵敏的实验中才能观察到 CP 破坏现象。这也就是为什么寻找 CP 破坏的实验通常需要较长的基线（数百千米）、较强的中微子束流与较大的探测器。这类典型的实验条件将使得 $\Delta m_{31}^2 L/E \sim 1, \delta m_{21}^2 L/E \ll 1$ ，因此公式 (30) 可以在保留较小参量 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E)$ 与 $\sin \theta_{13}$ 到二阶的情况下近似为（此时有 $\Delta m_{21}^2 \simeq \Delta m_{31}^2$ ）：

$$\Delta P_{\alpha\beta} \simeq \pm 16J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \quad (34)$$

长基线实验通常意味着中微子将在地壳内部传播，此时它们的振荡与中微子和物质的相互作用有关（详见 2.5.2 节）。物质效应将使得与长基线实验相关的 $\nu_\mu - \nu_e$ 振荡对于正反中微子来说具有不对称性，即物质效应使得 $\Delta P_{\mu e} = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) - P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) \neq 0$ ，并且 $\Delta P_{\mu e}$ 的符号与质量顺序有关，即正序 ($\Delta m_{31}^2 > 0$) 或反序 ($\Delta m_{31}^2 < 0$)。因此，在寻找 CP 破坏时，需要从实验数据中扣除因物质效应引起的不对称性。

在忽略物质效应的情况下（对于 T2K 这一类长基线实验，这种近似是合理的），我们可以将 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ 的三味振荡概率展开到小量 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E), \sin \theta_{13}$ 的二阶：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &\simeq \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos \delta_{\text{CP}} \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \\ &- \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

公式 (35) 的推导如下。由 (12) 式可知：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= -4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\mu i} U_{e i}^* U_{\mu j}^* U_{e j}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\mu i} U_{e i}^* U_{\mu j}^* U_{e j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \\ &= -4 \left[\text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) + \text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Re}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \right] + 2 \left[\text{Im}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \text{Im}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

首先计算实部。已知：

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) &= \text{Re} [c_{12}c_{13}(-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}})s_{12}c_{13}(c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{-i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= c_{12}s_{12}c_{13}^2 \text{Re} [(-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}})(c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{-i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= c_{12}s_{12}c_{13}^2 (-s_{12}c_{12}c_{23}^2 + c_{12}s_{12}s_{13}^2s_{23}^2 - c_{12}^2s_{23}c_{23}s_{13} \cos \delta_{\text{CP}} + s_{12}^2c_{23}s_{23}s_{13} \cos \delta_{\text{CP}}) \end{aligned}$$

即：

$$\text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} c_{13}^2 (-c_{23}^2 + s_{13}^2 s_{23}^2) - \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \cos 2\theta_{12}$$

第二项：

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) &= \text{Re} [(-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) c_{12} c_{13} c_{13} s_{23} s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= -c_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} \text{Re} [(s_{12} c_{23} + c_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= -c_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} (s_{12} c_{23} \cos \delta_{\text{CP}} + c_{12} s_{13} s_{23}) \\ &= -c_{12} s_{12} c_{23} s_{23} c_{13} s_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - c_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \end{aligned}$$

即：

$$\text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) = -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - \frac{1}{4} c_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13}$$

第三项：

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) &= \text{Re} [(c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) s_{12} c_{13} c_{13} s_{23} s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= s_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} \text{Re} [(c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= s_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} (c_{12} c_{23} \cos \delta_{\text{CP}} - s_{12} s_{13} s_{23}) \\ &= s_{12} c_{12} c_{13} s_{13} s_{23} c_{23} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \end{aligned}$$

即：

$$\text{Re}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) = \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - \frac{1}{4} s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13}$$

保留到 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E)$, $\sin \theta_{13}$ 的二次项，实部可以分解为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} c_{13}^2 (-c_{23}^2 + s_{13}^2 s_{23}^2) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) &\simeq -\frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} \cos^2 \theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ \left[\sin^2 \theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \simeq 0, \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \simeq \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \right] \end{aligned}$$

以及：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \cos 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) &\simeq 0 \\ \left[\sin 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \simeq 0 \right] \end{aligned}$$

以及：

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \left[\sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left[\frac{(2m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)L}{4E} \right] \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{8} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

其中， $m_1 \simeq m_2$ ，并且有三角恒等式 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B) \sin(A-B)$ 。以及：

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4} c_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \frac{1}{4} s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{4} (c_{12}^2 + s_{12}^2) s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

其中, $\sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \simeq \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right)$ 。对于虚部, 我们可以发现它等于 $\Delta P_{\mu e}$ 的 2 倍:

$$\begin{aligned} 2\Delta P_{\mu e} &\simeq -2 \times 16J \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= -2 \times 16 \times \frac{1}{8} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= -\cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

将实部与虚部结合, 即可得到 (35) 式:

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &\simeq \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \\ &\quad - \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

其中, 第一项是主要的振荡模式, 由 Δm_{31}^2 驱动;

2.4 其它的三味混合效应

2.5 中微子在物质中的传播

2.5.1 基础理论

2.5.2 物质密度不变的介质

3 $\nu_1 - \nu_2$ 振荡

4 $\nu_2 - \nu_3$ 振荡

5 $\nu_1 - \nu_3$ 振荡

5.1 早期实验测量的极限与第一个非零迹象

References

- [1] B Pontecorvo. “Mesonium and anti-mesonium”. In: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 (1957). [Sov. Phys. JETP 6 (1958) 429], pp. 549–551.
- [2] B Pontecorvo. “Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge”. In: Sov. Phys. JETP 7 (1958). [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 34 (1957) 247], pp. 172–173.
- [3] Y Fukuda and et al. “Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos”. In: Phys. Rev. Lett. 81 (1998), pp. 1562–1567.
- [4] Q Ahmad and et al. “Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory”. In: Phys. Rev. Lett. 89 (2002), p. 011301.
- [5] K Eguchi and et al. “First Results from KamLAND: Evidence for Reactor Antineutrino Disappearance”. In: Phys. Rev. Lett. 90 (2003), p. 093004. arXiv: [hep-ex/0212021](#) [[hep-ex](#)].
- [6] K Abe and et al. “Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-produced Off-axis Muon Neutrino Beam”. In: Phys. Rev. Lett. 107 (2011), p. 041801.
- [7] F An and et al. “Observation of Electron-Antineutrino Disappearance at Daya Bay”. In: Phys. Rev. Lett. 108 (2012), p. 171803.
- [8] J Ahn and et al. “Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment”. In: Phys. Rev. Lett. 108 (2012), p. 191802.
- [9] Y Abe and et al. “Indication for the disappearance of reactor electron antineutrinos in the Double Chooz experiment”. In: Phys. Rev. D 86 (2012), p. 052008.
- [10] K Abe and et al. “Observation of Electron Neutrino Appearance in a Muon Neutrino Beam”. In: Phys. Rev. Lett. 112 (2014), p. 061802.
- [11] P Adamson and et al. “Constraints on oscillation parameters from ν_e appearance and ν_μ disappearance in NOvA”. In: (2017). arXiv:1703.03328 [hep-ex]. arXiv: [1703.03328](#) [[hep-ex](#)].
- [12] Z Maki, M Nakagawa, and S Sakata. “Remarks on the Unified Model of Elementary Particles”. In: Progress of Theoretical Physics 28 (1962), pp. 870–880.
- [13] B Pontecorvo. “Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge”. In: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53 (1967). [Sov. Phys. JETP 26 (1968) 984], p. 1717.
- [14] VN Gribov and B Pontecorvo. “Neutrino astronomy and lepton charge”. In: Phys. Lett. B 28 (1969), pp. 493–496.
- [15] RN Mohapatra and et al. “Theory of neutrinos: A white paper”. In: Reports on Progress in Physics 70 (2007), pp. 1757–1867.
- [16] N Cabibbo. “Unitary Symmetry and Leptonic Decays”. In: Phys. Rev. Lett. 10 (1963), pp. 531–533.
- [17] M Kobayashi and T Maskawa. “CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction”. In: Progress of Theoretical Physics 49 (1973), pp. 652–657.

- [18] M Fukugita and T Yanagida. “Baryogenesis Without Grand Unification”. In: *Phys. Lett. B* 174 (1986), pp. 45–47.
- [19] S Davidson, E Nardi, and Y Nir. “Leptogenesis”. In: *Physics Reports* 466 (2008), pp. 105–177.
- [20] P Minkowski. “ $\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays?” In: *Phys. Lett. B* 67 (1977), pp. 421–428.
- [21] M Gell-Mann, P Ramond, and R Slansky. “Complex Spinors and Unified Theories”. In: *Supergravity*. Ed. by P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman. Vol. C 790927. North-Holland Physics Publishing. Published in the Proceedings of the Workshop on Supergravity, Stony Brook, New York, 27–29 Sept 1979. Amsterdam, 1979, pp. 315–321.
- [22] T Yanagida. “Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos”. In: *Proceedings of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe*. Conf. Proc. C 7902131. Workshop held at KEK, Tsukuba, February 1979. Tsukuba, Japan, 1979, pp. 95–99.
- [23] SL Glashow. “The Future of Elementary Particle Physics”. In: *Proceedings of the 1979 Cargèse Summer Institute on Quarks and Leptons*. Vol. 61. NATO Science Series B: Physics. Cargèse, France, 1979. Plenum Press, 1980, pp. 687–713.
- [24] RN Mohapatra and G Senjanović. “Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation”. In: *Phys. Rev. Lett.* 44 (1980), pp. 912–915.
- [25] M Fukugita and T Yanagida. *Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics*. Berlin: Springer, 2003. ISBN: 978-3540439645.
- [26] RN Mohapatra and PB Pal. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*. 3rd. Singapore: World Scientific, 2004. ISBN: 978-9812380712.
- [27] C Giunti and CW Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford: Oxford University Press, 2007. ISBN: 978-0198508717.
- [28] SM Bilenky. *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*. Berlin: Springer, 2010. ISBN: 978-3642061911.
- [29] K Zuber. *Neutrino Physics*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN: 978-1439830757.
- [30] V Barger, D Marfatia, and K Whisnant. *The Physics of Neutrinos*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2012. ISBN: 978-0691157496.
- [31] JWF Valle and JC Romão. *Neutrinos in High Energy and Astroparticle Physics*. Weinheim: Wiley-VCH, 2015. ISBN: 978-3527411013.
- [32] F Suekane. *Neutrino Oscillations*. Tokyo: Springer, 2015. ISBN: 978-4431556962.
- [33] C Patrignani et al. “Review of Particle Physics”. In: *Chin. Phys. C* 40 (2016), p. 100001.
- [34] M Blennow and A Yu Smirnov. “Neutrino Propagation in Matter”. In: *Adv. High Energy Phys.* 2013 (2013), p. 972485.

- [35] TK Kuo and JT Pantaleone. “Neutrino Oscillations in Matter”. In: *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989), pp. 937–979.
- [36] A Ianni. “Solar Neutrinos and the Borexino Experiment”. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 94 (2017), pp. 257–281.
- [37] T Lachenmaier. “The measurement of the neutrino mixing angle θ_{13} with reactor neutrino experiments”. In: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 83 (2015), pp. 31–58.
- [38] X Qian and P Vogel. “Neutrino mass hierarchy”. In: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 83 (2015), pp. 1–30.
- [39] KN Abazajian et al. “Light Sterile Neutrinos: A White Paper”. In: *arXiv preprint* (2012). [arXiv: 1204.5379 \[hep-ph\]](#).
- [40] Stefano Gariazzo et al. “Light sterile neutrinos”. In: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 43.3 (2016), p. 033001.
- [41] SM Bilenky. “Neutrino. History of a unique particle”. In: *The European Physical Journal H* 38 (2013), pp. 345–404.
- [42] ST Petcov. “The nature of massive neutrinos”. In: *Advances in High Energy Physics* 2013.1 (2013), p. 852987.
- [43] Samoil M Bilenky, Jirí Hošek, and Serguey T Petcov. “On the oscillations of neutrinos with Dirac and Majorana masses”. In: *Physics Letters B* 94.4 (1980), pp. 495–498.
- [44] J Schechter and José WF Valle. “Neutrino masses in $SU(2) \otimes U(1)$ theories”. In: *Physical Review D* 22.9 (1980), p. 2227.
- [45] Masaru Doi et al. “CP violation in Majorana neutrinos”. In: *Physics letters B* 102.5 (1981), pp. 323–326.
- [46] John D Vergados, Hiroyasu Ejiri, and Fedor Šimkovic. “Theory of neutrinoless double-beta decay”. In: *Reports on Progress in Physics* 75.10 (2012), p. 106301.
- [47] Stefano Dell’Oro et al. “Neutrinoless double beta decay: 2015 review”. In: *Advances in High Energy Physics* 2016.1 (2016), p. 2162659.
- [48] Oliviero Cremonesi. “Neutrino-less double beta decay experiments”. In: *Hyperfine Interactions* 239.1 (2018), p. 54.
- [49] E Kh Akhmedov and A Yu Smirnov. “Paradoxes of neutrino oscillations”. In: *Physics of Atomic Nuclei* 72 (2009), pp. 1363–1381.
- [50] Alvaro De Rújula et al. “A fresh look at neutrino oscillations”. In: *Nuclear Physics B* 168.1 (1980), pp. 54–68.
- [51] V D Barger, K Whisnant, and R J N Phillips. “Matter effects on three-neutrino oscillations”. In: *Physical Review D* 22 (1980), pp. 1636–1649.
- [52] Nicola Cabibbo. “Time reversal violation in neutrino oscillation”. In: *Physics Letters B* 72.3 (1978), pp. 333–335.

- [53] E Kh Akhmedov. “Three-flavour effects and CP-and T-violation in neutrino oscillations”. In: *Physica Scripta* 2005.T121 (2005), p. 65.
- [54] V Barger, K Whisnant, and RJN Phillips. “CP nonconservation in three-neutrino oscillations”. In: *Physical Review Letters* 45.26 (1980), p. 2084.
- [55] C Jarlskog. “A basis independent formulation of the connection between quark mass matrices, CP violation and experiment”. In: *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* 29 (1985), pp. 491–497.