

中微子振荡：PMNS 范式

Neutrino Oscillations: The Rise of the PMNS Paradigm

译者：殷麒麟

2025/6/23

摘要

在中微子振荡发现后的过去 20 年里，有关中微子振荡的实验取得了显著的成果。物理学家精确测量了中微子的质量平方差与混合角，其中包括我们在实验上测得的最后一个混合角— θ_{13} 。

目前，我们观察到的一系列中微子振荡的实验结果都可以使用包含三个有质量的活性中微子的模型来解释，其质量本征态与味道本征态之间可以使用一个 3×3 么正混合矩阵—PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) 矩阵相关联，并且 PMNS 矩阵可以被参数化为 3 个混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 和 1 个 CP 破坏相位 δ_{CP} 。除此之外，中微子的质量平方差 $\Delta m_{ji}^2 = m_j^2 - m_i^2$ 也主导着中微子振荡，其中 m_i 是中微子的第 i 个质量本征态的本征值。本综述将主要介绍三种味道的中微子混合的 PMNS 范式与当前实验对振荡参数的测量。

在未来的几年里，一系列的中微子振荡实验将会取得丰硕的成果，最终将解决中微子振荡剩下的三个谜题，即：

- θ_{23} 混合角的象限 (octant) 与精确值的测量
- 中微子质量顺序 ($m_1 < m_2 < m_3$ 或 $m_3 < m_1 < m_2$) 的确定
- CP 破坏相位 δ_{CP} 的测量

1 简介

在经过长期的理论和实验的研究后，Pontecorvo 于 1957 年 [1][2] 提出的中微子振荡的假说终于在 1998 年到 2002 年的几年间得到证实。物理学家在超级神冈实验 (Super-Kamiokande, Super-Kamioka Neutrino Detection Experiment) [3] 和萨德伯里实验 (SNO, Sudbury Neutrino Observatory) [4] 中分别发现了来自大气和太阳中微子的振荡，随后 KamLAND 实验 (Kamioka Liquid Scintillator Antineutrino Detector) [5] 证实了这一发现。为此，梶田隆章与麦克唐纳获得了 2015 年度诺贝尔物理学奖。

自从中微子振荡被超级神冈实验和 SNO 实验证实以后，有关中微子振荡的实验进展迅速。先前的实验测量了 θ_{12} 与 θ_{23} ，而 θ_{13} 是我们最后一个未知的混合角。长基线的加速器中微子实验—T2K 实验 (Tokai-to-Kamioka) [6] 首次发现了 θ_{13} 非零的迹象，随后的反应堆实验—大亚湾实验 (Daya Bay) [7]、RENO 实验 (Reactor Experiment for Neutrino Oscillations) [8] 与 Double Chooz 实验 [9] 发现了由 θ_{13} 驱动的振荡。2013 年，T2K 实验首次发现了 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ 的出现 [10]，随后被 NO ν A 实验 (NuMI Off-Axis ν_e Appearance) 证实 [11]，这是我们首次以直接的方式探测到中微子的出现而非消失，并为我们探测中微子三种味道的效应开辟了道路。发现中微子振荡的

实验多以天然的中微子源作为基础，但精确测量中微子振荡参数的实验多以人工中微子源作为来源，例如核反应堆或加速器中微子束流。

在理论方面，Pontecorvo 受到 $K - \bar{K}$ 介子振荡的启发，于 1957 年首次提出若轻子数发生破坏，将会出现 $\nu - \bar{\nu}$ 振荡的现象 [1][2]。这个现象我们在今天描述为活性-惰性中微子的振荡，这需要中微子具有质量，与当时人们普遍认为的中微子无质量相矛盾。不久之后，随着 ν_μ 的发现，Maki、Nakagawa 和 Sakata 首次提出了中微子味混合的概念 [12]。随后，1967 年，Pontecorvo 提出了中微子味振荡的概念 [13]，并由 Gribov 和 Pontecorvo 在 1969 年表述成了如今的形式 [14]。

目前，我们观察到的一系列中微子振荡的实验结果都可以使用包含三个有质量的活性中微子的模型来解释，其质量本征态与味道本征态之间可以使用一个 3×3 么正混合矩阵—PMNS 矩阵相联系，并且 PMNS 矩阵可以被参数化为 3 个混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 和 1 个 CP 破坏相位 δ_{CP} （对于 Majorana 中微子的情形，将会引入额外 2 个相位，但它们不会对振荡产生影响）。除此之外，中微子的质量平方差 $\Delta m_{ji}^2 = m_j^2 - m_i^2$ 也主导着中微子振荡，其中 m_i 是中微子的第 i 个质量本征态的本征值。三种味道中微子发生味混合而引起振荡的模型（PMNS 范式）在过去的 20 年里经过了许多实验的验证，在未来的几年里，一系列的中微子振荡实验将会取得丰硕的成果，最终将解决中微子振荡剩下的三个谜题，即 θ_{23} 的象限与精确值、三代中微子的质量顺序与 CP 破坏相位 δ_{CP} 的测量。

研究中微子，特别是中微子振荡，对我们认识基本粒子物理有着重要的意义。仅在实验中观测到的中微子的非零质量是目前唯一的超出标准模型之外的新物理的迹象 [15]。此外，轻子 PMNS 混合矩阵中的三个混合角的数值较大，这与夸克区的 CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) 混合矩阵 [16][17] 明显不同，这本身也蕴含着深刻的物理问题。

有趣的是，PMNS 矩阵中较大的混合角意味着轻子区将有可能出现较大程度的 CP 破坏，这有助于我们理解宇宙中的重子-反重子不对称性的起源，其中最可信的机制是轻子生成 (leptogenesis) 机制 [18] (详见综述 [19])。轻子生成机制预言了除目前已经观测到的三种较轻的中微子以外，还存在较重的 Majorana 中微子，它可以解释宇宙中的重子-反重子不对称性。此外，较重的 Majorana 中微子也可以通过跷跷板 (seesaw) 机制赋予较轻的中微子质量 [20][21][22][23][24]。

本综述将主要介绍近期与中微子振荡参数测量有关的进展，以及未来测量未知振荡参数的实验。文章的结构如下：

- 第2部分：介绍有质量的中微子在真空与物质中振荡的理论
- 第 3-5 部分：概括由 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 混合角驱动的 $\nu_1 - \nu_2, \nu_2 - \nu_3, \nu_1 - \nu_3$ 模式的振荡，即两种味道中微子引起的振荡
- 第 6 部分：介绍仅由三种味道中微子共同振荡才能够解释的实验现象，以及由 T2K 实验和 NO ν A 实验发现的中微子 CP 破坏效应
- 第 7 部分：简要总结我们目前对 PMNS 混合参数的理解，以及全局拟合 (global fit) 的作用
- 第 8 部分：介绍由 PMNS 范式无法解释的反常现象
- 第 9 部分：概述未来的中微子实验

鉴于中微子振荡研究的丰富性与多样性，我们在本篇综述里不可能阐述与理论发展、实验方法和测量结果有关的所有细节与微妙之处。因此，我们推荐感兴趣的读者阅读书籍 [25][26][27][28]，

以及 [29][30][31][32]。PDG 的综述也介绍了与中微子的质量、混合、振荡有关的内容 [33]。也有一部分综述介绍了与中微子相关的专题，例如中微子在物质中的传播 [34][35]、太阳中微子 [36]、通过反应堆实验测量 θ_{13} 混合角 [37]、中微子的质量顺序与未来的相关实验 [38]、实验中观测到的在 PMNS 范式下的反常现象与惰性中微子 [39][40]。最后，[41] 从教学的角度全面介绍了中微子物理的发展历史，包括理论和实验的进展。

2 中微子振荡的理论唯象学

2.1 轻子区的味混合

真空中的中微子振荡是一种量子力学现象 [1][2][13]，来源于非简并的中微子质量与轻子味道的混合 [12][13]。类似夸克，轻子区的味混合来源于弱作用本征态与质量本征态的不重合，即以味本征态作为基矢表述的中微子质量矩阵是非对角的，其中味本征态定义为与带电轻子的质量本征态 e, μ, τ 所对应的弱作用本征态 ν_e, ν_μ, ν_τ 。联系左手中微子场的味本征态和质量本征态的幺正变换称为**轻子混合矩阵**，即 PMNS 矩阵：

$$\begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \\ \nu_\tau(x) \end{pmatrix}_L = U \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \\ \nu_3(x) \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \\ \nu_3(x) \end{pmatrix}_L \quad (1)$$

在方程 (1) 中， $\nu_{eL}(x), \nu_{\mu L}(x), \nu_{\tau L}(x)$ 是与处于左手**味本征态**的中微子对应的场，其中左手味本征态的中微子通过弱带电流分别与 e, μ, τ 耦合。而 $\nu_{1L}(x), \nu_{2L}(x), \nu_{3L}(x)$ 分别描述了质量为 m_1, m_2, m_3 的中微子左手质量本征态。方程 (1) 可以被简写为：

$$\nu_{\alpha L}(x) = \sum_i U_{\alpha i} \nu_{iL}(x) \quad (2)$$

其中， $\alpha = e, \mu, \tau$ 以及 $i = 1, 2, 3$ 。为了简化记号，之后我们将省略 $\nu_L(x)$ 中的“L”与“x”。味混合的结果是中微子不是以它的质量本征态去与给定味道的带电轻子 $\bar{\ell}_{\alpha L}$ 通过弱带电流（CC, charged current）耦合，而是以质量本征态的相干叠加去进行耦合：

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} + \text{h.c.} = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\ell}_{\alpha L} \gamma^\mu \sum_{i=1,2,3} U_{\alpha i} \nu_{iL} + \text{h.c.} \quad (3)$$

正是这种相干性使得中微子可能会发生振荡。

由于 PMNS 矩阵是两组正交完备基矢的变换矩阵，因此它满足幺正性，即 $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$ ：

$$\sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau) \quad \sum_\alpha U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

对于任意的 3×3 幺正矩阵 U ，可以证明它可以被参数化为 3 个混合角和 6 个相位。然而，并不是所有相位都是物理的，我们可以通过相位转动重新定义轻子场，从而吸收额外的相位。即如果中微子是 Dirac 费米子，我们可以同时对轻子场和中微子场做相位转动： $\ell_\alpha(x) \rightarrow e^{i\phi_\alpha} \ell_\alpha(x), \nu_i(x) \rightarrow e^{i\phi_i} \nu_i(x)$ ，其中 $\ell_\alpha(x), \nu_i(x)$ 是 4 分量的 Dirac 场（即对左手和右手的轻子场做相同的相位转动，使得质量项 $-\sum_\alpha m_{\ell_\alpha} \bar{\ell}_{\alpha R} \ell_{\alpha L} - \sum_i m_i \bar{\nu}_{iR} \nu_{iL} + \text{h.c.}$ 保持不变）。在做如上的相位转动后，我们只需要重新定义 PMNS 矩阵：

$$U_{\alpha i} \rightarrow e^{i(\phi_\alpha - \phi_i)} U_{\alpha i} \quad (5)$$

即可使得带电流项 (3) 式保持不变。已知对于 9 个相位差 $\phi_\alpha - \phi_i$ ，其中只有 5 个是相互独立的，并且它们都可以通过矩阵元的重新定义从而被吸收。因此我们可以从 PMNS 中移除 5 个相位，只保留一个物理的相位—CP 破坏相位 δ_{CP} 。但如果中微子是 Majorana 费米子，那么我们无法对左手轻子场做相位转动，因为这样会导致它带有复的质量 (Majorana 质量项为 $-\frac{1}{2}m_i\nu_{iL}^T C\nu_{iL} + \text{h.c.}$ ，其中 C 是电荷共轭矩阵，满足 $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$ 。关于 Majorana 中微子，可以参考 [42])。因此我们只能对带电轻子场做相位转动，这种转动可以通过 PMNS 矩阵元的重新定义而被吸收：

$$U_{\alpha i} \rightarrow e^{i\phi_\alpha} U_{\alpha i} \quad (6)$$

因此，与 Dirac 中微子不同，Majorana 中微子具有 3 个物理的 CP 破坏相位¹。

基于以上讨论，我们可以将 PMNS 矩阵写作三个关于角度 $\theta_{23}, \theta_{13}, \theta_{12}$ 的转动矩阵和一个关于相位的对角矩阵 P 的乘积。其中关于 θ_{13} 的转动矩阵与相位 δ_{CP} 有关，并且由于关于 θ_{13} 的转动矩阵中包含 $e^{i\delta_{\text{CP}}}$ ，因此它不是一般的正交转动实矩阵，而是一个么正矩阵。于是：

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{\text{CP}}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{\text{CP}}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} P \end{aligned} \quad (7)$$

方程 (7) 中， $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ ， $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ 。对于对角矩阵 P ，在 Dirac 中微子的情形下 $P = \mathbf{1}$ ，在 Majorana 中微子的情形下包含了与中微子的 Majorana 属性有关的 2 个相位。不失一般性地，我们可以取 $\theta_{ij} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 和 $\delta_{\text{CP}} \in [0, 2\pi)$ 。以上的参数化方法已经成为了一种标准，但 Majorana 中微子情形下的对角矩阵 P 的形式并无统一约定。以下几种记法在文献中都有出现：

$$P_{\text{Majorana}} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\phi_3 + \delta_{\text{CP}})} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\sigma} \end{pmatrix} \quad (8)$$

这些记法与带电轻子场的相位转动有关，它们彼此在物理上是完全等价的。PMNS 矩阵中的 δ_{CP} 通常称为“Dirac 相位”，而对角矩阵 P 中的相位通常称为“Majorana 相位”。不失一般性地，Majorana 相位的取值范围可以选为 $[0, \pi)$ 。我们在本综述中将不会重点关注 Majorana 相位，因为之后我们将会看到，它并不会影响中微子的振荡概率。Majorana 相位仅在轻子数破坏的过程中出现，例如无中微子双 β 衰变 ($0\nu\beta\beta$)，在这一类过程中 Majorana 属性将至关重要 (关于 $0\nu\beta\beta$ 的综述，理论方面可参考 [46][47]，实验方面可参考 [48])。而 Dirac 相位 δ_{CP} 与振荡概率相关，并且导致真空中的中微子振荡和反中微子振荡的不对称性，详见 2.3 节。

2.2 真空中的中微子振荡

一般的中微子振荡实验需要包含三个步骤。第一步，从带电流过程产生一束处于纯的味本征态的中微子束流，例如 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ 过程可以产生纯的 ν_μ 束流。而味本征态是质量本征态的相干

¹ 以上的参数化方法可以推广至任意 N 代轻子的情形。我们发现，在 Dirac 中微子的情形下， N 代轻子混合将导致混合矩阵中包含 $\frac{N(N-1)}{2}$ 个混合角与 $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ 个相位，对于 Majorana 中微子将会有额外 $N-1$ 个相位 [43][44][45]。因此，与夸克区不同，若中微子是 Majorana 中微子，则 CP 破坏在 2 代轻子中就可以出现，但振荡中的 CP 破坏至少需要 3 代轻子 (见 2.3 节)。

叠加²:

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (9)$$

注意, 前面我们描述味混合时采用的形式为 $\nu_\alpha(x) = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i(x)$, 但在 (9) 式中我们采用其复共轭 $U_{\alpha i}^*$, 其原因是 $\nu_\alpha(x)$ 是一个 Dirac 量子场算符, 其中包含正粒子的湮灭算符, 负责湮灭正中微子。但其复共轭场 $\nu_\alpha^\dagger(x) = \sum_i U_{\alpha i}^* \nu_i^\dagger(x)$ 包含正粒子的产生算符, 将其作用于真空态即可得到正中微子态, 即 $\nu_\alpha^\dagger(x)|0\rangle = |\nu_\alpha\rangle$ 。第二步, 中微子束流在空间中传播。由于每个质量本征态都是真空中的哈密顿量本征态, 所以随时间演化时带有因子 $e^{-iE_i t}$, 其中 $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ 是第 i 个质量本征态的能量 (取自然单位制 $c = \hbar = 1$)。由于不同质量本征态的时间演化因子不同, 因此质量本征态的含时演化将使得中微子束流不再是一个纯的味本征态:

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} \sum_\beta U_{\beta i} |\nu_\beta\rangle \quad (10)$$

最后一步是通过特定的带电流相互作用探测中微子束流。从 α 味道振荡至 β 味道的概率振幅为 $\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle$, 相应的振荡概率为:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle|^2 = \left| \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \quad (11)$$

在绝大多数情况下, 中微子是极端相对论的, 因此中微子的能量可以展开为 $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} = p\sqrt{1 + m_i^2/p^2} \simeq p\sqrt{1 + m_i^2/E^2} \simeq p(1 + m_i^2/2E^2) \simeq p + m_i^2/2E$ (使用近似 $E \simeq p$)。于是, 中微子的振荡公式可以写作³:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\Delta m_{ji}^2 \equiv m_j^2 - m_i^2$ 为质量平方差, $L \simeq ct$ 是中微子的传播距离。对于反中微子振荡, 我们需要将方程 (12) 中的 U 替换为 U^* , 这将会改变最后一项的符号:

$$\begin{aligned} P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E} \right) \end{aligned}$$

公式 (12) 的推导如下。由 (11) 式可知:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_{i,j} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i(E_j - E_i)t} = \sum_{i,j} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t}$$

²注意, 正中微子态的味道和质量本征态之间通过 PMNS 矩阵的复共轭相联系, 而正中微子场的味道和质量本征态之间通过 PMNS 矩阵相联系, 例如方程 (2)。这是因为量子中微子场 $\nu_\alpha(x)$ 可以湮灭一个味道为 α 的中微子, 而中微子态 $|\nu_\alpha(\vec{p})\rangle$ 需要通过产生算符 $a_\alpha^\dagger(\vec{p})$ 作用在真空态上得到。对于反中微子, 我们有 $\bar{\nu}_\alpha(x) = \sum_i U_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i(x)$ 与 $|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\bar{\nu}_i\rangle$ 。

³在推导 (12) 式的过程中, 我们进行了如下简化: 假设中微子传播中的质量本征态可以使用平面单色波描述, 带有动量 \vec{p}_i , 并假设不同质量本征态的动量相同, 即 $\vec{p}_i = \vec{p}$ 。而恰当的处理方式应当是将质量本征态看作是波包的叠加, 或在 QFT 的框架下计算。然而, 在适当的相干性条件下, 以上方法得到的振荡概率是相同的, 即 (12) 式。详细讨论见 [49]。

当 $i = j$ 时:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} = \sum_i |U_{\beta i} U_{\alpha i}^*|^2$$

当 $i \neq j$ 时:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \left(\sum_{i < j} + \sum_{i > j} \right) U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} \\ &= \sum_{i < j} \left(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} + U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} e^{i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} \right) \\ &= 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re} \left(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t} \right) \end{aligned}$$

可以证明:

$$\operatorname{Re}(ze^{ix}) = \operatorname{Re}[(a + bi)(\cos x + i \sin x)] = a \cos x - b \sin x = \operatorname{Re}(z) \cos x - \operatorname{Im}(z) \sin x$$

因此, 当 $i \neq j$ 时有:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \cos \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \\ &= 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} t \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \end{aligned}$$

又已知恒等式:

$$\begin{aligned} \sum_i |z_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(z_i z_j^*) &= \sum_i |z_i|^2 + \sum_{i < j} (z_i z_j^* + z_i^* z_j) = \sum_i |z_i|^2 + \left(\sum_{i < j} + \sum_{i > j} \right) z_i z_j^* \\ &= \sum_{i, j} z_i z_j^* = \left| \sum_i z_i \right|^2 \end{aligned}$$

于是可得 (12) 式:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \sum_i |U_{\beta i} U_{\alpha i}^*|^2 + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} t \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \\ &= \left| \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \right|^2 - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} t \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} t \right) \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \operatorname{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E} \right) \end{aligned}$$

最后一步利用了 PMNS 矩阵的么正性 $\sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* = \delta_{\alpha\beta}$ ，以及中微子的传播距离 $L \simeq ct = t$ 。对于反中微子振荡，我们只需将其中的 $U \rightarrow U^*$ 即可。

从 (12) 式中，我们可以定性地获得一些有关中微子振荡的性质。首先，振荡发生的前提是中微子必须具有非简并的质量 ($\Delta m_{ji}^2 \neq 0$) 以及非平凡味混合 ($U \neq \mathbf{1}$)。振荡概率 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ 依赖于 3 个混合角 $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ 和 2 个独立的质量平方差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2$ ($\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2$)。振荡同样依赖于 Dirac 相位 δ_{CP} ，而与 Majorana 相位无关，这是因为振荡概率的公式 (12) 中只包含类似 $U_{\alpha i} U_{\beta i}^*$ 的项，因此 (7) 中的对角矩阵 P 中的相位相互抵消，不会对振荡产生贡献。因此，Dirac 中微子和 Majorana 中微子具有相同的振荡概率。我们可以从更一般的角度来理解这个事实，因为中微子振荡中的总轻子数是守恒的，然而中微子的 Majorana 属性体现在轻子数破坏的过程中，例如 $0\nu\beta\beta$ ，所以 Majorana 中微子的振荡性质应该与 Dirac 中微子一致。从 (12) 式中我们还可以得知 CP 破坏 (即 $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) \neq P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$) 仅在出现过程 ($\beta \neq \alpha$ ，即从 ν_α 束流中出现了 ν_β) 中发生，在消失过程 ($\beta = \alpha$ ，由于 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) < 1$ ，说明 ν_α 消失，振荡到其它味道) 中不会发生。同时，中微子和反中微子的存活 (即不发生振荡) 概率相等：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - 4 \sum_{i < j} |U_{\alpha i} U_{\alpha j}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha) \quad (13)$$

其原因是当 $\alpha = \beta$ 时， $U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}$ 一项为实数。

虽然在精确描述中微子振荡时，例如考虑次级效应和 CP 破坏效应时，我们必须使用三种味道中微子的振荡公式 (12) 式，但在许多振荡实验的条件下，我们可以考虑取 (12) 式的近似，忽略其中的次级项。此时，振荡公式就可以简化为由单一质量平方差 Δm^2 与单一混合角 θ 驱动的有效振荡，这种振荡只是两种味道中微子振荡：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right) \quad (\beta \neq \alpha) \quad (14)$$

若只考虑两种味道中微子振荡，令 PMNS 矩阵中 $\theta_{13} = \theta_{23} = 0$ ，混合矩阵可以约化成：

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} \end{pmatrix}$$

因此，振荡概率为：

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4(U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &= -4(-\sin^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{12}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &= \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

即得到 (14) 式。对于 θ_{23}, θ_{13} 驱动的振荡模式，以上推导过程同样成立。由 (7) 式可知，因为约化的 θ_{12}, θ_{23} 混合矩阵纯实，并且约化的 θ_{13} 混合矩阵中 $U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}$ 也是实数，因此振荡概率 (14) 式对于正反中微子相同，即在两种味道中微子振荡中不存在 CP 破坏，与我们之前的论述相同。此时，振荡的振幅为 $\sin^2 2\theta$ ，振荡长度为：

$$L_{\text{osc.}}(\text{km}) = 2.48 E(\text{GeV}) / \Delta m^2(\text{eV}^2) \quad P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2(\pi L / L_{\text{osc.}}) \quad (15)$$

振荡长度 L_{osc} 定义为相邻两个振荡概率极大值之间的距离：

$$\frac{\Delta m^2(L + L_{\text{osc}})}{4E} - \frac{\Delta m^2 L}{4E} = \pi \Rightarrow L_{\text{osc}}(\text{eV}^{-1}) = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$$

在自然单位制下，所有的单位都可以使用 eV 表示。其中 eV 与 m 的换算关系为：

$$1 \text{ m} = (3 \times 10^8)^{-1} \text{ s} = \frac{(3 \times 10^8)^{-1}}{1.056 \times 10^{-34}} \text{ J}^{-1} = (3 \times 10^8)^{-1} \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.056 \times 10^{-34}} \text{ eV}^{-1} = 5.051 \times 10^6 \text{ eV}^{-1}$$

即： $1 \text{ eV}^{-1} = (5.051 \times 10^9)^{-1} \text{ km}$ 。因此：

$$\begin{aligned} L_{\text{osc}}(\text{km}) &= L_{\text{osc}}(\text{eV}^{-1}) \times (5.051 \times 10^9)^{-1} = \frac{4\pi E(\text{eV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \times (5.051 \times 10^9)^{-1} \\ &= \frac{4\pi E(\text{GeV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \times 5.501^{-1} = \frac{2.48E(\text{GeV})}{\Delta m^2(\text{eV}^2)} \end{aligned}$$

此外，自然单位制下的相位：

$$\frac{\Delta m^2(\text{eV}^2)L(\text{eV}^{-1})}{4E(\text{eV})} = \frac{\Delta m^2(\text{eV}^2) \times (5.051 \times 10^9)^{-1}L(\text{km})}{4E(\text{GeV}) \times 10^{-9}} = \frac{1.27\Delta m^2(\text{eV}^2)L(\text{km})}{E(\text{GeV})}$$

需要注意，振荡概率 (14) 式对 Δm^2 的符号以及 θ 的象限 ($\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ 称为第一象限， $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 称为第二象限) 都不灵敏。当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，对应最大混合角。在中微子振荡实验的精度提高一个层次，并开始对次级效应灵敏之前，以上的两种味道的振荡公式已经被使用了几十年了。特别地，太阳和大气中微子的振荡可以被两味混合的框架很好地描述（太阳中微子振荡通常与物质效应有关，详见 2.5 节）。我们假设 $(\Delta m_{\text{sol}}^2, \theta_{\text{sol}})$ 与 $(\Delta m_{\text{atm}}^2, \theta_{\text{atm}})$ 分别表示太阳和大气中微子振荡的参数，在实验中，我们发现 $\Delta m_{\text{sol}}^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2$ ，并且混合角 $\theta_{\text{sol}}, \theta_{\text{atm}}$ 都很大。根据以上的实验结果，我们通常采用如下约定定义中微子的质量与质量平方差：(1) Δm_{sol}^2 由 ν_1, ν_2 的质量平方差定义；(2) 约定质量本征值 $m_2 > m_1$ ，即 $\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\text{sol}}^2 > 0$ 。于是， Δm_{atm}^2 一定为 $|\Delta m_{31}^2|$ 或 $|\Delta m_{32}^2|$ 。由于 $\Delta m_{\text{sol}}^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2$ ，所以有：

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 = \Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2| \simeq \Delta m_{\text{atm}}^2 \quad (16)$$

即 ν_1, ν_2 的质量接近，且 $m_1 < m_2$ ，而 ν_3 的质量与 ν_1, ν_2 差别较大。因此，三代中微子的质量顺序只有两种可能：**正序** (normal ordering/hierarchy)，对应 $m_1 < m_2 < m_3$ ，以及 $\Delta m_{31}^2 > 0$ ；**反序** (inverted ordering/hierarchy)，对应 $m_3 < m_1 < m_2$ ，以及 $\Delta m_{31}^2 < 0$ 。 $m_1 < m_3 < m_2$ 的质量顺序与 (16) 式不符，所以被排除。

假设振荡实验中的基线长度为 L ，束流能量为 E ，且满足 $\Delta m_{21}^2 L/E \ll 1$ ，此时我们可以令公式 (12) 中的 $\Delta m_{21}^2 = 0$ 作为近似，从而中微子振荡的“频率”只剩下 $\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{32}^2$ 。由于三个混合角中，除了 θ_{13} 较小以外，其余两个混合角的大小相当，因此这样的近似是合理的。此时，振荡（出现）概率可以表示为 [50][51]：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta_{\alpha\beta}^{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad \sin^2 2\theta_{\alpha\beta}^{\text{eff}} = 4|U_{\alpha 3}U_{\beta 3}|^2 \quad (\beta \neq \alpha) \quad (17)$$

不发生振荡（消失）的概率为：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - \sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad \sin^2 2\theta_{\alpha\alpha}^{\text{eff}} = 4|U_{\alpha 3}|^2(1 - |U_{\alpha 3}|^2) \quad (18)$$

公式 (17) 的推导过程如下:

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} L \right) + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \right) \\
&= \delta_{\alpha\beta} - 4(U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) - 4(U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^* U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right) \\
&= -4[(U_{\alpha 1} U_{\beta 1}^* + U_{\alpha 2} U_{\beta 2}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= -4[(0 - U_{\alpha 3} U_{\beta 3}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\beta 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= 4|U_{\alpha 3} U_{\beta 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right)
\end{aligned}$$

公式 (18) 的推导过程如下:

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) &= \delta_{\alpha\alpha} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha j}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} L \right) + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha j}) \sin \left(\frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \right) \\
&= \delta_{\alpha\alpha} - 4(U_{\alpha 1} U_{\alpha 1}^* U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) - 4(U_{\alpha 2} U_{\alpha 2}^* U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2}{4E} L \right) \\
&= 1 - 4[(U_{\alpha 1} U_{\alpha 1}^* + U_{\alpha 2} U_{\alpha 2}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= 1 - 4[(1 - U_{\alpha 3} U_{\alpha 3}^*) U_{\alpha 3}^* U_{\alpha 3}] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \\
&= 1 - 4|U_{\alpha 3}|^2 (1 - |U_{\alpha 3}|^2) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right)
\end{aligned}$$

其中, 由于 $|U_{\alpha 3} U_{\beta 3}|^2, |U_{\alpha 3}|^2(1 - |U_{\alpha 3}|^2)$ 是实数, 所以虚部 $\text{Im}(U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}^* U_{\alpha j}) = 0$ 。公式 (17)、(18) 通常可以用于描述大气中微子、长基线加速器中微子实验和短基线反应堆中微子实验主导的振荡。例如, 在大气中微子振荡中, ν_μ 的消失概率可以表示为 (代入 $U_{\mu 3} = \cos \theta_{13} \sin \theta_{23}$):

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - (\cos^2 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} + \sin^4 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \quad (19)$$

$$\simeq 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned}
4|U_{\alpha 3}|^2(1 - |U_{\alpha 3}|^2) &= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (1 - \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23}) \\
&= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (\sin^2 \theta_{23} + \cos^2 \theta_{23} - \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23}) \\
&= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} [\cos^2 \theta_{23} + \sin^2 \theta_{23} (1 - \cos^2 \theta_{13})] \\
&= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} (\cos^2 \theta_{23} + \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{13}) \\
&= \cos^2 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} + \sin^4 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13}
\end{aligned}$$

在 (20) 式中, 我们忽略了正比于 $\sin^2 2\theta_{13}$ 的项。由此可以看出, 大气中微子振荡由 θ_{23} 混合角与 Δm_{31}^2 (或 Δm_{32}^2) 质量平方差主导, 因此我们通常将 θ_{23} 称为“大气混合角”, 将 Δm_{31}^2 (或 Δm_{32}^2)

称为“大气质量平方差”。对于在 ν_μ 束流中出现的 ν_e 与 ν_τ ，我们有：

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (21)$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (22)$$

对于短基线反应堆反中微子的消失：

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (23)$$

公式 (21) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= 4|U_{\mu 3}U_{e 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 4 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

公式 (22) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) &= 4|U_{\mu 3}U_{\tau 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 4 \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

公式 (23) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) &= 1 - 4|U_{e 3}|^2(1 - |U_{e 3}|^2) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - 4 \sin^2 \theta_{13}(1 - \sin^2 \theta_{13}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - 4 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

需要注意，若考虑完整的三味混合时的振荡，那么以上的表达式需要进行一定修正。特别是对于如今的实验精度，这些修正是必须被考虑在内的。顺便指出，虽然振荡概率 (21)、(22) 仅由一个频率 Δm_{31}^2 所主导，但它们并不是简单的两味混合振荡，因为其中包含了两个混合角 θ_{13}, θ_{23} 。特别地，振荡概率 (21) 对 θ_{23} 的象限灵敏。

当 $\Delta m_{31}^2 L/E \ll 1$ 与 $\Delta m_{21}^2 L/E \gtrsim 1$ 时，此时由 Δm_{31}^2 主导的高频振荡将会被平均化， ν_e 的振荡将由 Δm_{21}^2 主导而非 Δm_{31}^2 。忽略被 $\sin^2 \theta_{13}$ 抑制的部分，我们可以得到：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) \simeq 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \quad (24)$$

公式 (24) 的推导过程如下。由三味混合的振荡公式 (13) 式可知：

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - 4 \sum_{i < j} |U_{ei}|^2 |U_{ej}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E} \right) \\
&= 1 - 4|U_{e1}|^2 |U_{e2}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - 4|U_{e2}|^2 |U_{e3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\
&\quad - 4|U_{e1}|^2 |U_{e3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\
&= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\
&\quad - \cos^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\
&\simeq 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2} \\
&\quad - \cos^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

其中：

$$\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}$$

取 $\sin^2 \theta_{13} \simeq 0, \cos^2 \theta_{13} \simeq 1$ ，即可得 (24) 式。该公式适用于长基线加速器中微子实验 KamLAND 以及低能太阳中微子振荡（其中某些振荡项已经被平均化）。低能太阳中微子振荡中，物质效应相比于真空振荡来说属于次级效应。由于 (24) 式可以描述太阳中微子振荡，因此 θ_{12} 通常称为“太阳混合角”， Δm_{21}^2 通常称为“太阳质量平方差”。若还原 (24) 式中的 θ_{13} 混合角，则有振荡概率：

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = \sin^4 \theta_{13} + \cos^4 \theta_{13} \left[1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \right] \quad (25)$$

公式 (25) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned}
P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2} \\
&\quad - \cos^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \times \frac{1}{2} \\
&= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{13} \\
&= 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - 2 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} \\
&= (\sin^2 \theta_{13} + \cos^2 \theta_{13})^2 - 2 \sin^2 \theta_{13} \cos^2 \theta_{13} - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\
&= \sin^4 \theta_{13} + \cos^4 \theta_{13} - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right)
\end{aligned}$$

即 (25) 式。

2.3 中微子振荡的 CP 破坏与三味混合效应

我们在 2.2 节中看到，中微子振荡依赖于 PMNS 矩阵中的相位 δ_{CP} ，因此我们有可能在中微子振荡中观察到 CP 对称性的破坏 [52]，即正反中微子在真空中的振荡概率不同。在详细讨论振

荡概率之前，我们首先来讨论不同的分立对称性⁴对振荡概率的作用结果（我们推荐读者阅读 [53]，其中详细介绍了 CP 变换与 T 变换对中微子振荡的作用，包含真空振荡与物质效应）：

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \xrightarrow{\text{CP}} P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) \quad (26)$$

$$\xrightarrow{\text{T}} P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha) \quad (27)$$

$$\xrightarrow{\text{CPT}} P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha) \quad (28)$$

因此，如果 CPT 守恒成立，则 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha)$ ，这预示着中微子振荡中的 CP 不对称与 T 不对称的程度相同：

$$A_{\alpha\beta} = \frac{P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)}{P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) + P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)} = \frac{P(\nu_\alpha - \nu_\beta) - P(\nu_\beta - \nu_\alpha)}{P(\nu_\alpha - \nu_\beta) + P(\nu_\beta - \nu_\alpha)} \quad (29)$$

CPT 守恒同时也表明 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\alpha)$ ，即在中微子消失的实验中不存在 CP 破坏，与我们之前在三味混合的公式 (13) 中看到的一致（其中我们已经隐含地假设正反中微子的质量与混合参数相同，这是 CPT 不变性所要求的）。

为了讨论中微子振荡中的 CP 破坏效应 (CPV)，我们可以引入 $\Delta P_{\alpha\beta} \equiv P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)$ ，它等于三味振荡公式 (12) 中关于 CP 变换呈奇函数性质 (CP-odd) 的部分的 2 倍，即 [43][54]：

$$\Delta P_{\alpha\beta} = \pm 16J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \quad (30)$$

$$J \equiv \text{Im}(U_{e1}U_{\mu 1}^*U_{e2}^*U_{\mu 2})$$

公式 (30) 的推导过程如下。已知 (12) 式以及反中微子的振荡概率：

$$\begin{aligned} P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i<j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) + 2 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i<j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) - 2 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \end{aligned}$$

由此可知：

$$\Delta P_{\alpha\beta} \equiv P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = 4 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right)$$

以 $\alpha = e, \beta = \tau$ 为例：

$$\begin{aligned} \Delta P_{e\mu} &= 4 \sum_{i<j} \text{Im}(U_{ei} U_{\mu i}^* U_{ej}^* U_{\mu j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \\ &= 4 \left[\text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) + \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e3}^* U_{\mu 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}(U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e3}^* U_{\mu 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

⁴需要强调， $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)$ 是电荷-宇称变换 CP 作用于 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ 的结果，并非是电荷共轭变换 C 作用的结果。 ν_α, ν_β 是左手中微子，其反粒子 $\bar{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\beta$ 是右手反中微子，也就是 ν_α, ν_β 的 CP 共轭。 ν_α, ν_β 的 C 共轭是假想的左手反中微子，它们不与 W, Z 玻色子耦合，也不能在弱作用过程中产生。

利用 PMNS 矩阵的么正性可得 $U_{e3}^* U_{\mu 3} = -U_{e1}^* U_{\mu 1} - U_{e2}^* U_{\mu 2}$, 于是:

$$\begin{aligned} U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e3}^* U_{\mu 3} &= U_{e1} U_{\mu 1}^* (-U_{e1}^* U_{\mu 1} - U_{e2}^* U_{\mu 2}) = -U_{e2}^* U_{\mu 2} U_{e1} U_{\mu 1}^* - |U_{e1}|^2 |U_{\mu 1}|^2 \\ U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e3}^* U_{\mu 3} &= U_{e2} U_{\mu 2}^* (-U_{e1}^* U_{\mu 1} - U_{e2}^* U_{\mu 2}) = -U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e1}^* U_{\mu 1} - |U_{e2}|^2 |U_{\mu 2}|^2 \end{aligned}$$

因此:

$$\begin{aligned} \Delta P_{e\mu} &= 4 \left[\text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \text{Im}(U_{e2}^* U_{\mu 2} U_{e1} U_{\mu 1}^*) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. - \text{Im}(U_{e2} U_{\mu 2}^* U_{e1}^* U_{\mu 1}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \\ &= 4 \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \left[\sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

已知有三角恒等式:

$$\sin(C + A - B) + \sin(C - A + B) - \sin(C + A + B) - \sin(C - A - B) = 4 \sin A \sin B \sin C$$

其中 $A = \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}, B = \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}, C = \frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}$, 即:

$$4 \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) = \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right)$$

于是上式可以化为:

$$\begin{aligned} \Delta P_{e\mu} &= 16 \times \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \\ &= 16J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \end{aligned}$$

当 $\alpha = \mu, \beta = \tau$ 时:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\mu\tau} &= 4 \left[\text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 2}^* U_{\tau 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) + \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}(U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

由么正性可知:

$$\begin{aligned} \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 2}^* U_{\tau 2}) &= \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\mu 2}^* U_{\tau 1}^* U_{\tau 2}) = +\text{Im}[U_{\mu 1} U_{\mu 2}^* (-U_{e1}^* U_{e2} - U_{\mu 1}^* U_{\mu 2})] = -\text{Im}(U_{e1}^* U_{\mu 1} U_{e2} U_{\mu 2}^*) \\ \text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) &= \text{Im}[U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* (-U_{\mu 1}^* U_{\tau 1} - U_{\mu 2}^* U_{\tau 2})] = -\text{Im}(U_{\mu 1} U_{\tau 1}^* U_{\mu 2}^* U_{\tau 2}) = +\text{Im}(U_{e1}^* U_{\mu 1} U_{e2} U_{\mu 2}^*) \\ \text{Im}(U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* U_{\mu 3}^* U_{\tau 3}) &= \text{Im}[U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* (-U_{\mu 1}^* U_{\tau 1} - U_{\mu 2}^* U_{\tau 2})] = -\text{Im}(U_{\mu 2} U_{\tau 2}^* U_{\mu 1}^* U_{\tau 1}) = -\text{Im}(U_{e1}^* U_{\mu 1} U_{e2} U_{\mu 2}^*) \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\mu\tau} &= 4 \left[J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - J \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + J \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \\ &= 4J \left[\sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) - \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

因此：

$$\Delta P_{\mu\tau} = 16J \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right)$$

进一步有：

$$\text{Im}(U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j}) = J \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{ijk}$$

当 $(\alpha, \beta, \gamma), (i, j, k)$ 为 $(e, \mu, \tau), (1, 2, 3)$ 的偶置换时取 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = +1, \epsilon_{ijk} = +1$ ，为奇置换时取 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -1, \epsilon_{ijk} = -1$ 。这样我们就证明了 (30) 式：

$$\Delta P_{\alpha\beta} = \pm 16J \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right)$$

当 (α, β, γ) 是 (e, μ, τ) 的偶置换时，(30) 式前面取“+”号，为奇置换时取“-”号（即当 $(\alpha, \beta) = (e, \mu), (\mu, \tau), (\tau, e)$ 时前面取正号，其余情况取负号）。(30) 式中的 J 称为 **Jarlskog 不变量**⁵，可以衡量由 Dirac 相位 δ_{CP} 引起的 CP 破坏的程度。使用 PMNS 矩阵的标准参数化形式，我们可以将 Jarlskog 不变量表示为：

$$J = \frac{1}{8} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \quad (31)$$

公式 (31) 的推导过程如下：

$$\begin{aligned} J &= \text{Im}(U_{e1} U_{\mu 1}^* U_{e2}^* U_{\mu 2}) \\ &= \text{Im} [c_{12} c_{13} (-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{-i\delta_{\text{CP}}}) s_{12} c_{13} (c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= \text{Im} [c_{12} s_{12} c_{13}^2 (-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{-i\delta_{\text{CP}}}) (c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 \text{Im}(s_{12}^2 c_{23} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{\text{CP}}} - c_{12}^2 s_{23} c_{23} s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}}) \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 \text{Im}(s_{12}^2 c_{23} s_{23} s_{13} i \sin \delta_{\text{CP}} + c_{12}^2 s_{23} c_{23} s_{13} i \sin \delta_{\text{CP}}) \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 s_{23} c_{23} s_{13} \sin \delta_{\text{CP}} (s_{12}^2 + c_{12}^2) \\ &= c_{12} s_{12} c_{13}^2 s_{23} c_{23} s_{13} \sin \delta_{\text{CP}} \\ &= c_{13} c_{12} s_{12} c_{13} s_{13} c_{23} s_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \end{aligned}$$

即：

$$J = \frac{1}{2^3} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}}$$

因此，中微子振荡中发生 CP 破坏的必要条件是所有混合角 θ_{ij} 非零，相位 δ_{CP} 不等于 0 或 π 。进一步，由 (30) 式可知，发生 CP 破坏同时还要求质量平方差 $\Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2, \Delta m_{32}^2$ 非零，即三代中微子的质量各不相同。总结来说：

$$\text{Conditions for CPV in oscillations: } \theta_{ij} \neq 0, \delta_{\text{CP}} \neq 0, \pi, m_1 \neq m_2, m_2 \neq m_3, m_3 \neq m_1 \quad (32)$$

以上条件与夸克区的 CP 破坏相同。目前，所有的混合角 θ_{ij} 与质量平方差 Δm_{ji}^2 都已经被测量过了，但长期以来，我们对 θ_{13} 的实验测量只给出了它的上界（关于 θ_{13} 的早期实验测量与第一个非零迹象，详见 5.1 节）。如果 $\sin^2 2\theta_{13}$ 的值小于 10^{-4} ，即使 CP 破坏相位 δ_{CP} 最大，那么凭借我们现有的实验技术，也无法在振荡实验中观测到 CP 破坏。

⁵所谓“不变”，是指 J 不依赖于 PMNS 矩阵元的相位选择，即在轻子场的相位转动下保持不变。历史上，Jarlskog 不变量首先被引入用于描述夸克区的 CP 破坏 [55]，(30) 式中的 J 是它在轻子区的推广。

公式 (30) 中包含了许多信息。首先，它告诉我们 CP 破坏在中微子振荡中是普遍存在的，对于不同的振荡通道 $\alpha \rightarrow \beta$ ， $\Delta P_{\alpha\beta}$ 最多相差一个符号。这个特性来源于 PMNS 矩阵的么正性，它表明：

$$\text{Im}(U_{e1}U_{\mu 1}^*U_{e2}^*U_{\mu 2}) = -\text{Im}(U_{e1}U_{\tau 1}^*U_{e2}^*U_{\tau 2}) = \text{Im}(U_{\mu 1}U_{\tau 1}^*U_{\mu 2}^*U_{\tau 2}) \quad (33)$$

于是有 $\Delta P_{e\mu} = -\Delta P_{e\tau} = \Delta P_{\mu\tau}$ 。公式 (30) 还告诉我们 CP 破坏的效应正比于 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E)$ ，即只有在对较小的 Δm_{21}^2 主导的次级振荡模式灵敏的实验中才能观察到 CP 破坏现象。这也就是为什么寻找 CP 破坏的实验通常需要较长的基线（数百千米）、较强的中微子束流与较大的探测器。这类典型的实验条件将使得 $\Delta m_{31}^2 L/E \sim 1, \delta m_{21}^2 L/E \ll 1$ ，因此公式 (30) 可以在保留较小参量 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E)$ 与 $\sin \theta_{13}$ 到二阶的情况下近似为（此时有 $\Delta m_{21}^2 \simeq \Delta m_{31}^2$ ）：

$$\Delta P_{\alpha\beta} \simeq \pm 16J \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \quad (34)$$

长基线实验通常意味着中微子将在地壳内部传播，此时它们的振荡与中微子和物质的相互作用有关（详见 2.5.2 节）。物质效应将使得与长基线实验相关的 $\nu_\mu - \nu_e$ 振荡对于正反中微子来说具有不对称性，即物质效应使得 $\Delta P_{\mu e} = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) - P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) \neq 0$ ，并且 $\Delta P_{\mu e}$ 的符号与质量顺序有关，即正序 ($\Delta m_{31}^2 > 0$) 或反序 ($\Delta m_{31}^2 < 0$)。因此，在寻找 CP 破坏时，需要从实验数据中扣除因物质效应引起的不对称性。

在忽略物质效应的情况下（对于 T2K 这一类长基线实验，这种近似是合理的），我们可以将 $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ 的三味振荡概率展开到小量 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E), \sin \theta_{13}$ 的二阶：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &\simeq \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos \delta_{\text{CP}} \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) \\ &- \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

公式 (35) 的推导如下。由 (12) 式可知：

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= -4 \sum_{i < j} \text{Re}(U_{\mu i} U_{e i}^* U_{\mu j}^* U_{e j}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(U_{\mu i} U_{e i}^* U_{\mu j}^* U_{e j}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{2E}\right) \\ &= -4 \left[\text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) + \text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Re}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \right] + 2 \left[\text{Im}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) \sin\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E}\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}\right) + \text{Im}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) \sin\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right) \right] \end{aligned}$$

首先计算实部。已知：

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) &= \text{Re} [c_{12}c_{13}(-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}})s_{12}c_{13}(c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{-i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= c_{12}s_{12}c_{13}^2 \text{Re} [(-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta_{\text{CP}}})(c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{-i\delta_{\text{CP}}})] \\ &= c_{12}s_{12}c_{13}^2 (-s_{12}c_{12}c_{23}^2 + c_{12}s_{12}s_{13}^2s_{23}^2 - c_{12}^2s_{23}c_{23}s_{13} \cos \delta_{\text{CP}} + s_{12}^2c_{23}s_{23}s_{13} \cos \delta_{\text{CP}}) \end{aligned}$$

即：

$$\text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 2}^* U_{e 2}) = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} c_{13}^2 (-c_{23}^2 + s_{13}^2 s_{23}^2) - \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \cos 2\theta_{12}$$

第二项：

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) &= \text{Re} [(-s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) c_{12} c_{13} c_{13} s_{23} s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= -c_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} \text{Re} [(s_{12} c_{23} + c_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= -c_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} (s_{12} c_{23} \cos \delta_{\text{CP}} + c_{12} s_{13} s_{23}) \\ &= -c_{12} s_{12} c_{23} s_{23} c_{13} s_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - c_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \end{aligned}$$

即：

$$\text{Re}(U_{\mu 1} U_{e 1}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) = -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - \frac{1}{4} c_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13}$$

第三项：

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) &= \text{Re} [(c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) s_{12} c_{13} c_{13} s_{23} s_{13} e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= s_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} \text{Re} [(c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta_{\text{CP}}}) e^{-i\delta_{\text{CP}}}] \\ &= s_{12} c_{13}^2 s_{13} s_{23} (c_{12} c_{23} \cos \delta_{\text{CP}} - s_{12} s_{13} s_{23}) \\ &= s_{12} c_{12} c_{13} s_{13} s_{23} c_{23} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - s_{12}^2 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 \end{aligned}$$

即：

$$\text{Re}(U_{\mu 2} U_{e 2}^* U_{\mu 3}^* U_{e 3}) = \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} - \frac{1}{4} s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13}$$

保留到 $\sin(\Delta m_{21}^2 L/4E)$, $\sin \theta_{13}$ 的二次项，实部可以分解为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} c_{13}^2 (-c_{23}^2 + s_{13}^2 s_{23}^2) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) &\simeq -\frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} \cos^2 \theta_{23} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ \left[\sin^2 \theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \simeq 0, \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \simeq \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \right] \end{aligned}$$

以及：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \cos 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) &\simeq 0 \\ \left[\sin 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \simeq 0 \right] \end{aligned}$$

以及：

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \left[\sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} c_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left[\frac{(2m_3^2 - m_1^2 - m_2^2)L}{4E} \right] \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{8} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

其中， $m_1 \simeq m_2$ ，并且有三角恒等式 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B) \sin(A-B)$ 。以及：

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4} c_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \frac{1}{4} s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\ &\simeq -\frac{1}{4} (c_{12}^2 + s_{12}^2) s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

其中, $\sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \simeq \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right)$ 。对于虚部, 我们可以发现它等于 $\Delta P_{\mu e}$ 的 2 倍:

$$\begin{aligned} 2\Delta P_{\mu e} &\simeq -2 \times 16J \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= -2 \times 16 \times \frac{1}{8} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &= -\cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

将实部与虚部结合, 即可得到 (35) 式:

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &\simeq \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \\ &\quad - \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

其中, 第一项是主要的振荡模式, 由 Δm_{31}^2 驱动; 第二项是由 Δm_{21}^2 驱动的振荡模式; 第三、四项同时包含 Δm_{21}^2 与 Δm_{31}^2 , 且第三项关于 CP 变换呈偶函数性质 (CP-even), 第四项关于 CP 变换呈奇函数性质 (CP-odd)。如前所述, 关于 CP 变换呈奇函数性质的项正比于 Jarlskog 不变量 J , 而 CP 变换呈偶函数性质的项正比于 $J \cot \delta_{\text{CP}} \propto \cos \delta_{\text{CP}}$ 。同时, 我们发现主要的振荡模式, 即第一项对于 θ_{23} 的象限灵敏。(35) 式还可以被简写为:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq A_{\text{atm}}^2 + A_{\text{sol}}^2 + 2 \cos \theta_{13} A_{\text{atm}} A_{\text{sol}} \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} + \delta_{\text{CP}} \right) \quad (36)$$

其中, $A_{\text{atm}} \equiv \sin \theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right)$ 以及 $A_{\text{sol}} \equiv \cos \theta_{23} \sin 2\theta_{12} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right)$ 。公式 (36) 的推导过程如下:

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &\simeq A_{\text{atm}}^2 + A_{\text{sol}}^2 + 2 \cos \theta_{13} A_{\text{atm}} A_{\text{sol}} \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} + \delta_{\text{CP}} \right) \\ &= \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \cos \theta_{13} \sin \theta_{23} \cos \theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} + \delta_{\text{CP}} \right) \end{aligned}$$

对于第三项:

$$\begin{aligned} (\dots) &= \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad \times \left[\cos \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \cos \delta_{\text{CP}} - \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \sin \delta_{\text{CP}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{12} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \\ &\quad - \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

将前两项与第三项结合，即可得到 (36) 式。相应的反中微子振荡概率 $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ 可将 (35) 式中的相位 δ_{CP} 改变符号得到，即改变最后一项前的符号（取矩阵元的复共轭后，有 $e^{\pm i\delta_{\text{CP}}} = \cos \delta_{\text{CP}} \pm i \sin \delta_{\text{CP}} \rightarrow e^{\mp i\delta_{\text{CP}}} = \cos \delta_{\text{CP}} \mp i \sin \delta_{\text{CP}}$ ）。我们可以定义描写 $\nu_\mu - \nu_e$ 振荡通道的 CP 破坏程度的参数：

$$A_{\mu e} \equiv \frac{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) - P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)}{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) + P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)} \simeq -\frac{\cos \theta_{23} \sin 2\theta_{12}}{\sin \theta_{23} \sin \theta_{13}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \delta_{\text{CP}} \quad (37)$$

公式 (37) 的推导过程如下。由 (35) 式可知：

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) - P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) \simeq -2 \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right)$$

以及：

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) + P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) \simeq 2 \left[\sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) + \frac{1}{2} \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E} \right) \right]$$

若只考虑主要的振荡模式，即第一项，则有：

$$A_{\mu e} \equiv \frac{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) - P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)}{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) + P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)} \simeq \frac{-2 \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta_{\text{CP}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right)}{2 \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right)}$$

即：

$$A_{\mu e} \simeq -\frac{\cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23}}{\sin 2\theta_{13} \sin^2 \theta_{23}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \delta_{\text{CP}} = -\frac{\cos \theta_{23} \sin 2\theta_{12}}{\sin \theta_{23} \sin \theta_{13}} \sin \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \sin \delta_{\text{CP}}$$

其中，我们多次使用了三角恒等式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 。

2.4 其它的三味混合效应

随着短基线反应堆中微子实验精度的提高，由 $\bar{\nu}_e$ 消失主导的测定质量平方差的实验已经逐渐可以分辨 Δm_{31}^2 与 Δm_{32}^2 之间的差异。此时，两味振荡公式 (23) 式不再精确，我们必须使用三味振荡的存活概率作为替代：

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) = 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \cos^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \quad (38)$$

公式 (38) 的推导过程详见公式 (24) 的推导。参考文献 [56] 中指出，(38) 式在短距离的情况下可以被很好地近似为：

$$P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e) \simeq 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ee}^2 L}{4E} \right) \quad (39)$$

其中, $\Delta m_{ee}^2 \equiv \cos^2 \theta_{12} \Delta m_{31}^2 + \sin^2 \theta_{12} \Delta m_{32}^2$ 可以被看作是 Δm_{31}^2 与 Δm_{32}^2 的 ν_e 加权平均值。公式 (39) 的推导过程如下, 对于 (38) 式的后两项:

$$(\cdots) = \sin^2 2\theta_{13} \left[\cos^2 \theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + \sin^2 \theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \right]$$

对于短距离的情形, 有:

$$\begin{aligned} (\cdots) &\simeq \cos^2 \theta_{12} \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) + \sin^2 \theta_{12} \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\ &= (\cos^2 \theta_{12} \Delta m_{31}^2 + \sin^2 \theta_{12} \Delta m_{32}^2) \frac{L}{4E} = \frac{\Delta m_{ee}^2 L}{4E} \simeq \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ee}^2 L}{4E} \right) \end{aligned}$$

当 $L/E < 1 \text{ km/MeV}$ 时, 公式 (39) 的精度高于万分之一 (即相对于 (38) 式的误差小于 10^{-4})。这样使得我们可以通过测量 $|\Delta m_{ee}^2|$ 进而去确定 $|\Delta m_{31}^2|$ (假设已经给定质量顺序, 并使用从其它实验测得的 θ_{12} 与 Δm_{21}^2), 其精度比 (23) 式更高。对于更精确的反应堆中微子实验, 我们可以使用比 (39) 式更精确的公式来确定 $|\Delta m_{ee}^2|$ [57]。

若长基线反应堆中微子实验满足 $\Delta m_{21}^2 L/E \sim 1$, 则它对 Δm_{21}^2 驱动的振荡模式最为灵敏, 而由 $\Delta m_{31}^2, \Delta m_{32}^2$ 驱动的次级振荡模式由于探测器的能量分辨率极限而被平均化。因此, 长基线反应堆中微子实验的振荡存活概率为 (25) 式。然而, 随着探测器能量分辨率的提高, 实验原则上可以对由 $\Delta m_{31}^2, \Delta m_{32}^2$ 驱动的快速、低幅度的次级振荡模式灵敏。有研究表明, 我们可以通过在远点探测器上精确测量反应堆反中微子的能谱进而去确定中微子的质量顺序 (详见第9节)。的确, 对于不同的质量顺序 (正序: $|\Delta m_{31}^2| > |\Delta m_{32}^2|$; 反序: $|\Delta m_{32}^2| > |\Delta m_{31}^2|$), (38) 式中的后两项将有所不同, 进而使得能谱对于不同的质量顺序有所差异。

2.5 中微子在物质中的传播

中微子与物质中的电子、质子和中子的相互作用将会影响它在物质中的传播, 从而导致一系列的新现象, 其中包括: (1) 与真空中的振荡相比, 物质中的振荡参数有所不同 [58][59]; (2) 在恒定密度的介质中, 振荡的共振放大 [60][61]; (3) 在例如太阳这种密度变化的介质中, 绝热的味道转换 [60][61]; (4) 在密度交替变化的多层介质中, 振荡参数的增强 [62][63], 例如中微子穿越地核的过程 [64][65]; (5) 核心坍缩超新星 (II 型超新星) 和早期宇宙中, 由中微子-中微子相互作用而产生的集体效应 [66][67]; (6) 如果存在新的、味道破坏 (味道改变) 的中微子相互作用, 那么将会导致非标准的物质效应 [58]。在本节中, 我们将主要讨论效应 (1)~(3) (有关物质效应的专题讨论可以参考 [34][35])。关于本文中未涉及到的物质效应, 我们推荐读者阅读其它综述, 例如关于效应 (4) 的讨论可以参考 [33][34], 关于效应 (5) 的讨论可以参考 [68] 的第 4 节。

2.5.1 基本理论

中微子在物质中的传播可以由类 Schrödinger 方程描述:

$$i \frac{d}{dt} |\nu(t)\rangle = H |\nu(t)\rangle \quad (40)$$

其中, $|\nu(t)\rangle$ 是中微子在 t 时刻的态矢量, 哈密顿量 H 可以被分解成自由 (动能) 部分 H_0 与势能项 V , H_0 描述中微子在真空中的传播, V 描述中微子与介质的相互作用:

$$H = H_0 + V \quad (41)$$

在味道本征态的基矢中，我们可以将含时演化方程 (40) 写作矩阵形式：

$$i \frac{d}{dt} \nu_\beta(t) = \sum_\gamma H_{\beta\gamma} \nu_\gamma(t) \quad (\beta, \gamma = e, \mu, \tau) \quad (42)$$

在方程 (42) 中， $H_{\beta\gamma} \equiv \langle \nu_\beta | H | \nu_\gamma \rangle$ 是味道表象下的哈密顿算符矩阵元， $\nu_\beta(t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle$ 是中微子的态矢量在味道本征态基矢上的投影，即在 t 时刻发现中微子处于味本征态 $|\nu_\beta\rangle$ 的概率振幅。因此，如果中微子在 $t = 0$ 时刻以味道本征态 $|\nu_\alpha\rangle$ 产生，则振荡概率为 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = |\nu_\beta(t)|^2$ 。

让我们首先考虑真空哈密顿量，在味道表象下⁶：

$$H_0 = U \begin{pmatrix} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & E_3 \end{pmatrix} U^\dagger \quad \left(E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \right) \quad (43)$$

其中， p 是中微子动量的模长， m_i ($i = 1, 2, 3$) 是中微子的质量本征值， U 是轻子混合矩阵。在极端相对论的情形下，中微子的能量可以展开为 $E_i \simeq p + m_i^2/(2E)$ ($E \simeq p$)，因此我们可以将哈密顿量重新定义为 $H_0 \rightarrow H_0 - p\mathbf{1}$ 。此时：

$$H_0 = \frac{1}{2E} \cdot U \begin{pmatrix} m_1^2 & & \\ & m_2^2 & \\ & & m_3^2 \end{pmatrix} U^\dagger = \frac{M_\nu^\dagger M_\nu}{2E} \quad (44)$$

其中， $M_\nu = U \cdot \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$ 是味道表象下的中微子质量矩阵。当哈密顿量减去一个正比于单位矩阵的项时，只会影响中微子态矢量的整体相位，而整体相位是不具有可观测效应的⁷。在两味振荡的情形下，方程 (44) 可以被约化为（从 H_0 中减去另一个正比于 $\mathbf{1}$ 的项）：

$$H_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

其中， $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ ， θ 是 2×2 的轻子混合矩阵参数化后的混合角（忽略了与振荡无关的 Majorana 相位）：

$$\begin{pmatrix} |\nu_\alpha\rangle \\ |\nu_\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \quad (46)$$

公式 (45) 的推导过程如下。已知：

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2E} \cdot U \begin{pmatrix} m_1^2 & \\ & m_2^2 \end{pmatrix} U^\dagger \\ &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^2 & \\ & m_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁶在质量本征态下，真空哈密顿量是对角的： $\langle \nu_i | H | \nu_j \rangle = E_i \delta_{ij}$ 。使用 $|\nu_\beta\rangle = \sum_i U_{\beta i}^* |\nu_i\rangle$ ，即可得到 $H_{\beta\gamma} = \langle \nu_\beta | H | \nu_\gamma \rangle = \sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\gamma j}^* \langle \nu_i | H | \nu_j \rangle = \sum_i U_{\beta i} U_{\gamma i}^* E_i = \sum_i U_{\beta i} E_i U_{\gamma i}^*$ 。

⁷即使正比于单位矩阵的项是含时的，以上结论依然成立。当 $\nu_\beta(t)$ 满足哈密顿量为 H 的含时演化方程 (42) 式时，则 $\nu'_\beta(t) = e^{i \int_0^t E_0(t') dt'}$ 满足哈密顿量为 $H' = H_0 - E_0(t)\mathbf{1}$ 的含时演化方程。并且， H 与 H' 对应的振荡概率相同： $|\nu_\beta(t)|^2 = |\nu'_\beta(t)|^2$ 。

即：

$$H_0 = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 \cos^2 \theta + m_2^2 \sin^2 \theta & (m_2^2 - m_1^2) \cos \theta \sin \theta \\ (m_2^2 - m_1^2) \sin \theta \cos \theta & m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

当哈密顿量 H_0 减去 $(m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta)\mathbf{1}$ 时，有：

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + m_2^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) & (m_2^2 - m_1^2) \cos \theta \sin \theta \\ (m_2^2 - m_1^2) \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} (m_1^2 - m_2^2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & (m_2^2 - m_1^2) \cos \theta \sin \theta \\ (m_2^2 - m_1^2) \sin \theta \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta & \Delta m^2 \sin 2\theta/2 \\ \Delta m^2 \sin 2\theta/2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即得到 (45) 式。

物质势 V 来源于中微子与介质中的电子或核子发生的相干向前散射。在向前散射的过程中，中微子的动量不会改变，因此它们可以与未被散射的中微子发生干涉 [58]。在中微子与物质发生相互作用的过程中，由于通常的物质里并不包含 μ 与 τ ，因此只有 ν_e 参与 W 玻色子的交换（带电流），而三种味道中微子同时参与 Z 玻色子的交换（中性流），因此中性流的作用对于三种中微子是相同的。在味道表象下，物质势是对角的：

$$V_{\alpha\beta} = \langle \nu_\alpha | V | \nu_\beta \rangle = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} = (V_{CC,\alpha} + V_{NC,\alpha}) \delta_{\alpha\beta} \quad (47)$$

其中，带电流的贡献 $V_{CC,\alpha}$ 与中微子的味道 α 有关，而中性流的贡献 $V_{NC,\alpha}$ 对于三种味道是普适的（关于物质势的详细推导，详见综述 [69]）：

$$V_{CC,\alpha} = \begin{cases} \sqrt{2}G_F n_e(x) & \alpha = e \\ 0 & \alpha = \mu, \tau \end{cases} \quad V_{NC,\alpha} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} n_n(x) \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (48)$$

其中， $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ 是 Fermi 耦合常数， $n_e(x), n_n(x)$ 分别表示介质中的电子和中子的密度⁸，它们与空间坐标 x 有关。对于反中微子，物质势具有相反的符号：

$$V_\alpha(\bar{\nu}) = -V_\alpha(\nu) \quad (49)$$

前面我们提到，哈密顿量可以减去一个正比于单位矩阵的项而不改变可观测的振荡概率。因此，当我们从哈密顿量中减去对三种味道普适的中性流的贡献后，中微子在物质中的哈密顿量在味道表象下为：

$$H_{\beta\gamma} = \frac{1}{2E} \sum_i U_{\beta i} U_{\gamma i}^* m_i^2 + V_{CC,\beta} \delta_{\beta\gamma} \quad (50)$$

对于反中微子，我们可以将 (50) 式中的项做如下替换：

$$U \rightarrow U^* \quad V \rightarrow -V \quad (51)$$

在物质中，中微子传播的本征态并不是真空中的质量本征态 $|\nu_i\rangle$ ，而是物质哈密顿量的本征态 $|\nu_i^m\rangle$ ，称为**物质本征态**。物质本征态与味道本征态之间通过物质中的混合矩阵 U_m 相联系，它

⁸注意，中性流的贡献 $V_{NC,\alpha}$ 只与中子密度有关：我们假设在中性介质中，质子和电子对 V_{NC} 的贡献恰好抵消，即 $n_p = n_e$ 。

可以使得 H 对角化：

$$H = U_m \begin{pmatrix} E_1^m & & \\ & E_2^m & \\ & & E_3^m \end{pmatrix} U_m^\dagger \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = U_m^* \begin{pmatrix} |\nu_1^m\rangle \\ |\nu_2^m\rangle \\ |\nu_3^m\rangle \end{pmatrix} \quad (52)$$

物质哈密顿量 H 的本征值 E_i^m 称为**物质中的能级**。在 t 时刻发现中微子处于 $|\nu_i^m\rangle$ 状态的概率振幅为 $\nu_i^m(t) = \langle \nu_i^m | \nu(t) \rangle$ ，它与发现中微子处于味道本征态 $|\nu_\beta\rangle$ 中的概率振幅 $\nu_\beta(t)$ 通过物质中的混合矩阵相关联：

$$\nu_\beta(t) = \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle = \sum_i \langle \nu_\beta | \nu_i^m \rangle \langle \nu_i^m | \nu(t) \rangle = \sum_i (U_m)_{\beta i} \nu_i^m(t) \quad (53)$$

(53) 式其实就是真空中的关系 $\nu_\beta(t) = \sum_i U_{\beta i} \nu_i(t)$ 在物质中的推广。

在许多物理条件下，两味振荡的框架可以作为一个很好的近似，例如中微子在太阳中的传播。在味道本征态的基矢 $\{|\nu_e\rangle, |\nu_\beta\rangle\}$ ($\beta = \mu, \tau$) 下，物质哈密顿量可以表示为：

$$H = H_0 + V_{CC} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \pm \sqrt{2} G_F n_e & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

其中， Δm^2 与 θ 是真空中的振荡参数，物质势前的符号 \pm 分别对应正、反中微子。哈密顿量 (54) 式可以使用物质中的混合矩阵进行对角化，其中的混合角是物质中的混合角 θ_m [58]：

$$H = U_m \begin{pmatrix} E_1^m & \\ & E_2^m \end{pmatrix} U_m^\dagger \quad U_m = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \quad (55)$$

其中（符号 \mp 分别对应正、反中微子）：

$$E_2^m - E_1^m = \frac{\Delta m^2}{2E} \sqrt{\left(1 \mp \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \quad (56)$$

物质中的混合角：

$$\sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\left(1 \mp \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}} \quad (57)$$

$$\cos 2\theta_m = \frac{\left(1 \mp \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right) \cos 2\theta}{\sqrt{\left(1 \mp \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}} \quad (58)$$

其中，我们引入了**共振密度**：

$$n_{\text{res}} = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2} G_F E} \quad (59)$$

(56)、(57) 和 (58) 式的推导过程如下。对于物质哈密顿量 H 所满足的的矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} E_1^m \cos^2 \theta_m + E_2^m \sin^2 \theta_m & (E_2^m - E_1^m) \cos \theta_m \sin \theta_m \\ (E_2^m - E_1^m) \sin \theta_m \cos \theta_m & E_1^m \sin^2 \theta_m + E_2^m \cos^2 \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \pm \sqrt{2} G_F n_e & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

已知物质哈密顿量的本征值为 E_1^m, E_2^m ，则由哈密顿矩阵 (54) 式的本征值方程可知：

$$\det(H - E^m \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \pm \sqrt{2} G_F n_e - E^m & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & -E^m \end{vmatrix} = 0$$

已知对于二阶矩阵：

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}$$

其本征值方程满足：

$$\det(H - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} H_{11} - \lambda & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (H_{11} - \lambda)(H_{22} - \lambda) - H_{12}^2 = \lambda^2 - (H_{11} + H_{22})\lambda + (H_{11}H_{22} - H_{12}^2) = 0$$

则本征值为：

$$\lambda_{1,2} = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2}$$

于是本征值之差为：

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4H_{12}^2}$$

若取：

$$H_{11} = -\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \pm \sqrt{2} G_F n_e \quad H_{12} = \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \quad H_{22} = 0$$

则：

$$\begin{aligned} E_2^m - E_1^m &= \sqrt{\left(-\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \pm \sqrt{2} G_F n_e\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \mp \sqrt{2} G_F n_e\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2} \end{aligned}$$

提取公因子，可得：

$$\begin{aligned} E_2^m - E_1^m &= \frac{\Delta m^2}{2E} \sqrt{\left(\cos 2\theta \mp \frac{2\sqrt{2} G_F E n_e}{\Delta m^2}\right)^2 + \sin^2 2\theta} \\ &= \frac{\Delta m^2}{2E} \sqrt{\left(1 \mp \frac{2\sqrt{2} G_F E n_e}{\Delta m^2 \cos 2\theta}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \end{aligned}$$

令 $n_{\text{res}} = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2} G_F E}$ ，即可得到 (56) 式。由方程：

$$(E_2^m - E_1^m) \cos \theta_m \sin \theta_m = \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta$$

即可解得 (57) 式。再由 $\sin^2 2\theta_m + \cos^2 2\theta_m = 1$ 即可解得 (58) 式。其中的共振密度为：

$$n_{\text{res}} = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2} G_F E}$$

若 $\Delta m^2 \cos 2\theta > 0$ （中微子的共振条件），则当 $n_e = n_{\text{res}}$ 时，物质中的混合角 θ_m 最大，与真空混合角 θ 的取值（非零）无关 [60][61]：

$$\sin^2 2\theta_m = 1 \quad \text{for } n_e = n_{\text{res}} \quad (\text{case } \Delta m^2 \cos 2\theta > 0) \quad (60)$$

这就是著名的 **MSW (Mikheev-Smirnov-Wolfenstein) 共振**。对于反中微子，共振条件为 $\Delta m^2 \cos 2\theta < 0$ ，共振发生在 $n_e = -n_{\text{res}}$ （此时， $-n_{\text{res}}$ 为正，可以诠释为共振密度）。

中微子在物质中的味道转换与物质密度是否恒定有关，下面我们将依次讨论两种情况。

2.5.2 物质密度恒定的介质

我们首先考虑物质密度不变的情形，即 $n_e(x) = n_e = \text{const}$ 。此时，哈密顿量在中微子的传播过程中保持不变，因此物质本征态 $|\nu_i^m\rangle$ 、能级 E_i^m 与混合矩阵 U_m 不含时间。将 (53) 式插入 (42) 式中，我们即可得到 n 个相互解耦的关于概率振幅 $\nu_i^m(t)$ 的演化方程：

$$i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) = E_i^m \nu_i^m(t) \quad (61)$$

方程 (61) 的推导过程如下，由 (53) 式、(42) 式可知：

$$\begin{aligned} \nu_\beta(t) &= \sum_i (U_m)_{\beta i} \nu_i^m(t) \\ i \frac{d}{dt} \nu_\beta(t) &= \sum_\gamma H_{\beta\gamma} \nu_\gamma(t) \end{aligned}$$

其中，哈密顿量为：

$$H_{\beta\gamma} = \sum_j U_{\beta j} U_{\gamma j}^* E_j$$

将 (53) 式代入 (42) 式，再由混合矩阵的么正性可得：

$$\begin{aligned} \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_{\gamma, j, k} (U_m)_{\beta j} (U_m^*)_{\gamma j} E_j^m (U_m)_{\gamma k} \nu_k^m(t) \\ \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_{j, k} (U_m)_{\beta j} \delta_{jk} E_j^m \nu_k^m(t) \\ \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_j (U_m)_{\beta j} E_j^m \nu_j^m(t) \\ \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_i (U_m)_{\beta i} E_i^m \nu_i^m(t) \end{aligned}$$

即可得到方程 (61)：

$$i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) = E_i^m \nu_i^m(t)$$

显然，方程 (61) 的解为 $\nu_i^m(t) = e^{-iE_i^m t} \nu_i^m(0)$ 。利用 (53) 式，并且已知有 $\nu_i^m(0) = \langle \nu_i^m | \nu(0) \rangle = \sum_j (U_m)_{\alpha j}^* \langle \nu_i^m | \nu_j^m \rangle = (U_m)_{\alpha i}^*$ ，所以我们可以得到物质中的振荡概率：

$$P_m(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\nu_\beta(t)|^2 = \left| \sum_i (U_m)_{\beta i} \nu_i^m(t) \right|^2 = \left| \sum_i (U_m)_{\beta i} (U_m)_{\alpha i}^* e^{-iE_i^m t} \right|^2 \quad (62)$$

因此，密度恒定介质中的中微子振荡与真空振荡概率 (11) 式相同，只不过是真空振荡的参数替换为物质中的振荡参数。特别地，类似 (14) 式，在两味振荡的情况下 [58]：

$$P_m(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{(E_2^m - E_1^m)t}{2} \quad (\alpha \neq \beta) \quad (63)$$

我们可以定义物质中的振荡长度：

$$L_{\text{osc.}}^m = \frac{2\pi}{|E_2^m - E_1^m|} \quad (64)$$

振荡长度在发生共振时达到最大, 即 $n_e = n_{\text{res}}$ 。此时, 它与真空中的振荡长度之间的关系为 $L_{\text{osc.}}^m = \frac{4\pi E}{|\Delta m^2| \sin 2\theta} = \frac{L_{\text{osc.}}}{\sin 2\theta}$ 。

当真空混合角较小时 (例如 θ_{13}), 物质效应将会对振荡产生显著的影响。假设中微子在真空中的混合是非最大的, 即 $\sin^2 2\theta < 1$, 此时我们可以将振荡分为三类情况：

- (1) 低密度 ($n_e \ll |n_{\text{res}}|$): $\sin^2 2\theta_m \simeq \sin^2 2\theta \left(1 \pm \frac{2n_e}{n_{\text{res}}} \cos^2 2\theta\right)$, 其中符号 \pm 分别对应正反中微子。此时, 真空振荡是主导效应, 物质效应属于次级效应；

已知物质混合角：

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{\sin^2 2\theta}{\left(1 \mp \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}$$

当 $n_e \ll |n_{\text{res}}|$ 时, 令 $\epsilon = \frac{n_e}{n_{\text{res}}}$, 则有 $\epsilon \ll 1$, 对于分母中的平方项：

$$(1 \mp \epsilon)^2 = 1 \mp 2\epsilon + \epsilon^2 \simeq 1 \mp 2\epsilon$$

因此：

$$(1 \mp \epsilon)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \simeq (1 \mp \epsilon) \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1 \mp 2\epsilon \cos^2 2\theta$$

因此：

$$\sin^2 2\theta_m \simeq \frac{\sin^2 2\theta}{1 \mp 2\epsilon \cos^2 2\theta} \simeq \sin^2 2\theta (1 \pm 2\epsilon \cos^2 2\theta) \quad \left(\frac{1}{1 \mp x} \simeq 1 \pm x\right)$$

- (2) 接近共振 ($n_e \simeq |n_{\text{res}}|$): 当共振条件 ($\frac{n_e}{n_{\text{res}}} \simeq +1, \sin^2 2\theta_m \simeq 1$) 满足时, 振荡相对于真空振荡将会增强。但如果不满足共振条件 ($\frac{n_e}{n_{\text{res}}} \simeq -1, \sin^2 2\theta_m \simeq \frac{\tan^2 2\theta}{4 + \tan^2 2\theta}$), 振荡将会被抑制；

当 $\frac{n_e}{n_{\text{res}}} \simeq -1$ 时, 对于正中微子：

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{\sin^2 2\theta}{\left(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \simeq \frac{\sin^2 2\theta}{4 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = \frac{\tan^2 2\theta}{4 + \tan^2 2\theta}$$

- (3) 高密度 ($n_e \gg |n_{\text{res}}|$): $\sin^2 2\theta_m \simeq \frac{\tan^2 2\theta}{\left(\frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2}$, 振荡被物质效应所抑制。

当 $n_e \gg |n_{\text{res}}|$ 时, 有 $\frac{n_e}{n_{\text{res}}} \gg 1$ ：

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{\sin^2 2\theta}{\left(1 \mp \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \simeq \frac{\sin^2 2\theta}{\left(\frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} \simeq \frac{\sin^2 2\theta}{\left(\frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta}$$

即：

$$\sin^2 2\theta_m \simeq \frac{\tan^2 2\theta}{\left(\frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2}$$

由于正反中微子与物质的相互作用不同, 所以即使当不存在 CP 破坏时, 它们在物质中的振荡概率也并不相同。这种效应在发生共振时达到最大, 其中中微子或反中微子的共振增强取决于 $\Delta m^2 \cos 2\theta$ 的符号。在实验中, 该效应可以被用于测定中微子的质量顺序, 即 $\Delta m_{31}^2 > 0$ 或

$\Delta m_{31}^2 < 0$ 。对于第一种情形（正序），正中微子的振荡将会比反中微子增强，而对于第二种情形（逆序），情况正好相反。

在太阳和大气中微子的数据分析中，地球的物质效应必须被考虑在内⁹。的确，在夜间，太阳产生的中微子在到达探测器前将穿越地球，导致所谓的**地球再生效应** [70]：部分振荡到 ν_μ 或 ν_τ 的太阳中微子在地球内部又转变回 ν_e ，这将会导致太阳中微子数据的日-夜不对称性（实际上数值很小，详见第3节）。这种效应的起源简单来说是由于物质中的振荡参数与真空不同。特别地，高能太阳中微子在离开太阳时处于质量本征态 $|\nu_2\rangle$ （见2.5.3节），这是在真空中的质量本征态，并非是在物质中的质量本征态。因此，高能太阳中微子将在从太阳到地球的途中将保持相同状态（处于真空），直到穿越地球时发生振荡（在物质中， $|\nu_2\rangle$ 不再是质量本征态）（详见 [33]）。从地球的另一侧向上传播的大气中微子同样也受到地球物质效应的影响，与真空振荡相比，这种效应将会改变它们的天顶角分布。利用这一特性，我们可以使用中微子望远镜来测定中微子的质量顺序（见第9节）。

2.5.3 物质密度变化的介质

当中微子传播路径上的物质密度发生变化时， $n_e(x) \neq \text{const}$ ，主导系统演化的哈密顿量将与时间有关。这将导致物质本征态、能级与物质中的混合角全部与时间有关，因此它们被称为**瞬时量**。此时，(52) 与 (53) 式依然可用，但其中的能级、混合矩阵与物质本征态需要改写为瞬时能级 $E_i^m(t)$ 、混合矩阵 $U_m(t)$ 与物质本征态 $|\nu_i^m(t)\rangle$ 。并且，概率振幅 $\nu_i^m(t) = \langle \nu_i^m(t) | \nu(t) \rangle$ 的含时演化方程此时在不同的质量本征态之间是相互耦合的：

$$i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) = E_i^m(t) \nu_i^m(t) - i \sum_{\gamma, j} (U_m^*)_{\gamma i}(t) (\dot{U}_m)_{\gamma j}(t) \nu_j^m(t) \quad (65)$$

(65) 式的推导过程如下。由 (61) 式的推导过程：

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \nu_\beta(t) &= i \sum_i (\dot{U}_m)_{\beta i} \nu_i^m(t) + \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) = \sum_\gamma H_{\beta\gamma} \nu_\gamma(t) \\ i \sum_i (\dot{U}_m)_{\beta i} \nu_i^m(t) + \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_{\gamma, j, k} (U_m)_{\beta j} (U_m^*)_{\gamma j} E_j^m (U_m)_{\gamma k} \nu_k^m(t) \\ i \sum_i (\dot{U}_m)_{\beta i} \nu_i^m(t) + \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_i (U_m)_{\beta i} E_i^m \nu_i^m(t) \\ i \sum_{i, \gamma} \delta_{\beta\gamma} (\dot{U}_m)_{\gamma i} \nu_i^m(t) + \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_i (U_m)_{\beta i} E_i^m \nu_i^m(t) \\ i \sum_{j, \gamma} \delta_{\beta\gamma} (\dot{U}_m)_{\gamma j} \nu_j^m(t) + \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_i (U_m)_{\beta i} E_i^m \nu_i^m(t) \\ i \sum_{i, j, \gamma} (U_m)_{\beta i} (U_m^*)_{\gamma i} (\dot{U}_m)_{\gamma j} \nu_j^m(t) + \sum_i (U_m)_{\beta i} i \frac{d}{dt} \nu_i^m(t) &= \sum_i (U_m)_{\beta i} E_i^m \nu_i^m(t) \end{aligned}$$

⁹虽然地球的电子密度并不是恒定的，但将其视为由密度恒定的各层（地壳、地幔、外核与内核）所组成是一个很好的近似。为了研究地球中的中微子振荡，通常采用所谓的两层近似（地幔-地核）[33]。

等式两侧约去 $(U_m)_{\beta i}$ ，即可得到 (65) 式。其中，符号上带有一点表示该物理量对时间的导数，例如 $\dot{U}_m(t) \equiv \frac{d}{dt}U_m(t)$ 。在两味振荡的情形下，以上方程可以约化为：

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1^m(t) \\ \nu_2^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^m(t) & -i\dot{\theta}_m(t) \\ i\dot{\theta}_m(t) & E_2^m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^m(t) \\ \nu_2^m(t) \end{pmatrix} \quad (66)$$

(66) 式的推导过程如下。在两味情形下，混合矩阵的形式为：

$$U_m(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(t) & \sin \theta_m(t) \\ -\sin \theta_m(t) & \cos \theta_m(t) \end{pmatrix}$$

当 $i = 1$ 时：

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \nu_1^m(t) &= E_1^m(t) \nu_1^m(t) - i[(U_m^*)_{e1}(t)(\dot{U}_m)_{e1}(t) \nu_1^m(t) + (U_m^*)_{e1}(t)(\dot{U}_m)_{e2}(t) \nu_2^m(t) \\ &\quad + (U_m^*)_{\mu1}(t)(\dot{U}_m)_{\mu1}(t) \nu_1^m(t) + (U_m^*)_{\mu1}(t)(\dot{U}_m)_{\mu2}(t) \nu_2^m(t)] \\ &= E_1^m(t) \nu_1^m(t) - i[-\cos \theta_m \sin \theta_m \dot{\theta}_m \nu_1^m(t) + \cos^2 \theta_m \dot{\theta}_m \nu_2^m(t) \\ &\quad + \sin \theta_m \cos \theta_m \dot{\theta}_m \nu_1^m(t) + \sin^2 \theta_m \dot{\theta}_m \nu_2^m(t)] \\ &= E_1^m(t) \nu_1^m(t) - i\dot{\theta}_m \nu_2^m(t) \end{aligned}$$

当 $i = 2$ 时：

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \nu_2^m(t) &= E_2^m(t) \nu_2^m(t) - i[(U_m^*)_{e2}(t)(\dot{U}_m)_{e1}(t) \nu_1^m(t) + (U_m^*)_{e2}(t)(\dot{U}_m)_{e2}(t) \nu_2^m(t) \\ &\quad + (U_m^*)_{\mu2}(t)(\dot{U}_m)_{\mu1}(t) \nu_1^m(t) + (U_m^*)_{\mu2}(t)(\dot{U}_m)_{\mu2}(t) \nu_2^m(t)] \\ &= E_2^m(t) \nu_2^m(t) - i[-\sin^2 \theta_m \dot{\theta}_m \nu_1^m(t) + \sin \theta_m \cos \theta_m \dot{\theta}_m \nu_2^m(t) \\ &\quad - \cos^2 \theta_m \dot{\theta}_m \nu_1^m(t) - \cos \theta_m \sin \theta_m \dot{\theta}_m \nu_2^m(t)] \\ &= E_2^m(t) \nu_2^m(t) + i\dot{\theta}_m \nu_1^m(t) \end{aligned}$$

以上两式分别对应矩阵方程 (66) 式的两个分量。中微子在传播过程中的状态是质量本征态（真空中）或物质本征态（物质中）的叠加，质量与物质本征态占总状态的成分随时间的演化分别由方程 (61) 与 (65) 式描述。在演化方程 (65) 式中，正比于 $\dot{\theta}_m(t)$ （或在三味情形中，正比于 $\sum_{\gamma} (U_m^*)_{\gamma i}(t)(\dot{U}_m)_{\gamma j}(t)$ ）的项引起了物质本征态 $|\nu_1^m(t)\rangle$ 与 $|\nu_2^m(t)\rangle$ 之间的转换，因此它们不再是传播过程中的本征态：一个中微子在密度变化的介质中传播时，有一定概率从一个质量本征态转换到另一个质量本征态 [70][71][72]。这种转换在中微子穿越共振层时更容易发生，由 (56) 式可知，在发生共振时，能级 E_1^m 与 E_2^m 之间的差异最小，因此更容易发生能级的转换。然而，在绝大多数物理环境中（特别是在太阳中），物质密度的变化足够小，以至于我们可以忽略 (66) 式矩阵中的非对角项，即 $|\dot{\theta}_m(t)| \ll |E_2^m - E_1^m|$ 。物理上，这意味着发生共振时的振荡长度（远）小于共振区域的空间宽度（在密度变化的介质中，共振可能只在一定区域内发生）[60]。在这种情况下，我们将中微子系统的演化称为是**绝热的**¹⁰：一个中微子以一个给定的瞬时物质本征态产生，在

¹⁰ 我们可以通过引入参数 $\gamma(t) \equiv \frac{|E_2^m(t) - E_1^m(t)|}{2|\dot{\theta}_m(t)|}$ 来定义绝热判据：当 $\gamma \gg 1$ 时，演化是绝热的 [70][71]。当 $\gamma < 1$ 时，演化是**非绝热的**，此时将可能发生物质本征态的转换。若中微子穿越共振层，则绝热参数应在共振处取值： $\gamma \equiv \left| \frac{E_2^m - E_1^m}{2\dot{\theta}_m} \right|_{\text{res}} = \left| \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta} \right| \left| \frac{1}{n_{\text{res}}} \left(\frac{dn}{dx} \right)_{\text{res}} \right|^{-1}$ 。对于太阳中的电子密度以及振荡参数 Δm_{21}^2 和 θ_{12} ，由此可知所有太阳中微子的能量都满足这一判据。

密度变化的介质中传播时，将始终保持在相同的物质本征态中 ($|\nu_i^m\rangle$)。然而，它的味道组成将会随时间演化，因为当中微子传播路径上的物质密度发生变化时，其瞬时物质本征态也将发生变化 ($|\nu_i^m\rangle = |\nu_i^m(t)\rangle$)。定性上，中微子味道改变的这种机制不同于中微子在密度恒定介质中的振荡，因此被称为**绝热味道转换**或**MSW 效应** [60][61]。注释10中的绝热参数表达式的推导如下。在共振处，由 (56)、(57) 式可知：

$$E_2^m - E_1^m = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{2E}$$

$$\frac{d(\sin 2\theta_m)}{dt} = \frac{d(\sin 2\theta_m)}{d(x/c)} = \frac{d(\sin 2\theta_m)}{dx} = \frac{-\frac{\sin 2\theta \cdot 2 \cos^2 2\theta (1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}})(-\frac{1}{n_{\text{res}}}) \frac{dn_e}{dx}}{2\sqrt{(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}})^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}}}{\left(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}$$

因此：

$$2 \cos 2\theta_m \dot{\theta}_m = \frac{-\frac{\sin 2\theta \cdot 2 \cos^2 2\theta (1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}})(-\frac{1}{n_{\text{res}}}) \frac{dn_e}{dx}}{2\sqrt{(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}})^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}}}{\left(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}$$

$$\frac{2 \left(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right) \cos 2\theta}{\sqrt{\left(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}} \dot{\theta}_m = \frac{-\frac{\sin 2\theta \cdot 2 \cos^2 2\theta (1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}})(-\frac{1}{n_{\text{res}}}) \frac{dn_e}{dx}}{2\sqrt{(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}})^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}}}{\left(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}$$

于是：

$$\dot{\theta}_m = -\frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{2 \left[\left(1 - \frac{n_e}{n_{\text{res}}}\right)^2 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \right]} \left(-\frac{1}{n_{\text{res}}} \right) \frac{dn_e}{dx}$$

在共振处：

$$\dot{\theta}_m = \frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{2 \sin^2 2\theta} \frac{1}{n_{\text{res}}} \frac{dn_e}{dx} = \frac{\cos 2\theta}{2 \sin 2\theta} \frac{1}{n_{\text{res}}} \frac{dn_e}{dx}$$

绝热参数：

$$\gamma = \left| \frac{E_2^m - E_1^m}{2\dot{\theta}_m} \right|_{\text{res}} = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{2E} \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \left| \frac{1}{n_{\text{res}}} \frac{dn_e}{dx} \right|^{-1} = \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta} \left| \frac{1}{n_{\text{res}}} \frac{dn_e}{dx} \right|^{-1}$$

在高密度的天体中，例如在超新星或太阳中，将会出现一种特殊的情况，即所谓的**能级交叉**。这种情况发生在中微子产生区域（例如太阳的中心）的电子密度远大于共振密度时¹¹，因此中微子将在传播时穿越共振层。此时，物质本征态近似与中微子产生时的味道本征态一致，这可以从取 (57)、(58) 式中 $n_e/n_{\text{res}} \rightarrow \infty$ 的极限看出。此时， $\sin 2\theta_m \rightarrow 0$, $\cos 2\theta_m \rightarrow -1$ ，即 $2\theta_m \rightarrow \pi$, $\theta_m \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 。对于两味混合的情形，混合矩阵的形式为：

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix}$$

例如，在太阳中心，对于能量 $E \gg 2 \text{ MeV}$ 的中微子，当 $n_e(r=0) \gg n_{\text{res}}$ 时，有 $|\nu_e\rangle \simeq |\nu_2^m(r=0)\rangle$, $|\nu_\beta\rangle \simeq -|\nu_1^m(r=0)\rangle$ （其中， ν_β 描述 ν_μ 或 ν_τ ）。因此，高能太阳中微子（主要是 $|\nu_e\rangle$ ）以近

¹¹之所以使用术语“能级交叉”，是因为共振区域的能级（能级定义为当介质密度 $n \rightarrow \infty$ 时，中微子能量的渐进极限 E_i^m ）趋于交叉（发生共振时，能级差 $E_2^m - E_1^m$ 最小）。

似纯的物质中的传播本征态 $|\nu_2^m\rangle$ 产生，由于它们的演化是绝热的，因此它们在传播时将保持在瞬时物质本征态 $|\nu_2^m(r)\rangle$ 。最终，它们以质量本征态 $|\nu_2\rangle$ 离开太阳，根据连续性，在电子密度变为零的位置 r ，有 $|\nu_2^m(r)\rangle = |\nu_2\rangle$ 。换言之，由于中微子瞬时物质本征态的演化，它们的味组成将因此改变：太阳中微子产生时是纯的 ν_e ，而在离开太阳时却是质量本征态 $|\nu_2\rangle$ ，即所有味道的混合。最终，质量本征态是中微子在真空中传播时的本征态，它们以状态 $|\nu_2\rangle$ 到达地球，此时的振荡概率为 $P_{ee} = |\langle\nu_e|\nu_2\rangle|^2 \simeq \sin^2 \theta_{12}$ （两味混合）[60][61]。这个公式很好地描述了 ^8B 中微子谱的高能部分，它们已经被超级神冈实验和 SNO 实验所测量。然而，对于低能太阳中微子（ pp 中微子，即质子-质子中微子），它们并未经历绝热味道转换的过程，它们的演化主要由真空振荡主导。事实上，低能太阳中微子的共振密度更高。满足 $n_e(r=0) \ll n_{\text{res}}$ ，因此作为一个很好的近似，物质效应可以被忽略（由于低能太阳中微子的物质效应可以忽略，因此它们的混合角就是真空中的混合角 θ ，所以它们在产生时是 ν_1, ν_2 的混合，而非是纯的 ν_2 ，因此它们并不会经历绝热味道转换的过程，而是一般的真空振荡），与之对应的存活概率为 $P_{ee} \simeq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{12}$ （见 (24) 式，对于低能情形， $\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}$ 较大，将会引起高频振荡，此时 $\langle \sin^2(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}) \rangle \simeq \frac{1}{2}$ ）。

3 $\nu_1 - \nu_2$ 振荡

4 $\nu_2 - \nu_3$ 振荡

5 $\nu_1 - \nu_3$ 振荡

5.1 早期实验测量的极限与第一个非零迹象

6 三味混合效应

7 PMNS 模型的全局拟合

8 超出 PMNS 模型的实验反常

9 PMNS 范式的未来

References

- [1] B Pontecorvo. “Mesonium and anti-mesonium”. In: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33 (1957). [Sov. Phys. JETP 6 (1958) 429], pp. 549–551.
- [2] B Pontecorvo. “Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge”. In: Sov. Phys. JETP 7 (1958). [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 34 (1957) 247], pp. 172–173.
- [3] Y Fukuda and et al. “Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos”. In: Phys. Rev. Lett. 81 (1998), pp. 1562–1567.
- [4] Q Ahmad and et al. “Measurement of the Rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ Interactions Produced by ^8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory”. In: Phys. Rev. Lett. 89 (2002), p. 011301.
- [5] K Eguchi and et al. “First Results from KamLAND: Evidence for Reactor Antineutrino Disappearance”. In: Phys. Rev. Lett. 90 (2003), p. 093004. arXiv: [hep-ex/0212021 \[hep-ex\]](#).
- [6] K Abe and et al. “Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-produced Off-axis Muon Neutrino Beam”. In: Phys. Rev. Lett. 107 (2011), p. 041801.
- [7] F An and et al. “Observation of Electron-Antineutrino Disappearance at Daya Bay”. In: Phys. Rev. Lett. 108 (2012), p. 171803.
- [8] J Ahn and et al. “Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment”. In: Phys. Rev. Lett. 108 (2012), p. 191802.
- [9] Y Abe and et al. “Indication for the disappearance of reactor electron antineutrinos in the Double Chooz experiment”. In: Phys. Rev. D 86 (2012), p. 052008.
- [10] K Abe and et al. “Observation of Electron Neutrino Appearance in a Muon Neutrino Beam”. In: Phys. Rev. Lett. 112 (2014), p. 061802.
- [11] P Adamson and et al. “Constraints on oscillation parameters from ν_e appearance and ν_μ disappearance in NOvA”. In: (2017). arXiv:1703.03328 [hep-ex]. arXiv: [1703.03328 \[hep-ex\]](#).
- [12] Z Maki, M Nakagawa, and S Sakata. “Remarks on the Unified Model of Elementary Particles”. In: Progress of Theoretical Physics 28 (1962), pp. 870–880.
- [13] B Pontecorvo. “Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge”. In: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53 (1967). [Sov. Phys. JETP 26 (1968) 984], p. 1717.
- [14] VN Gribov and B Pontecorvo. “Neutrino astronomy and lepton charge”. In: Phys. Lett. B 28 (1969), pp. 493–496.
- [15] RN Mohapatra and et al. “Theory of neutrinos: A white paper”. In: Reports on Progress in Physics 70 (2007), pp. 1757–1867.
- [16] N Cabibbo. “Unitary Symmetry and Leptonic Decays”. In: Phys. Rev. Lett. 10 (1963), pp. 531–533.
- [17] M Kobayashi and T Maskawa. “CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction”. In: Progress of Theoretical Physics 49 (1973), pp. 652–657.

- [18] M Fukugita and T Yanagida. “Baryogenesis Without Grand Unification”. In: *Phys. Lett. B* 174 (1986), pp. 45–47.
- [19] S Davidson, E Nardi, and Y Nir. “Leptogenesis”. In: *Physics Reports* 466 (2008), pp. 105–177.
- [20] P Minkowski. “ $\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays?” In: *Phys. Lett. B* 67 (1977), pp. 421–428.
- [21] M Gell-Mann, P Ramond, and R Slansky. “Complex Spinors and Unified Theories”. In: *Supergravity*. Ed. by P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman. Vol. C 790927. North-Holland Physics Publishing. Published in the Proceedings of the Workshop on Supergravity, Stony Brook, New York, 27–29 Sept 1979. Amsterdam, 1979, pp. 315–321.
- [22] T Yanagida. “Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos”. In: *Proceedings of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe*. Conf. Proc. C 7902131. Workshop held at KEK, Tsukuba, February 1979. Tsukuba, Japan, 1979, pp. 95–99.
- [23] SL Glashow. “The Future of Elementary Particle Physics”. In: *Proceedings of the 1979 Cargèse Summer Institute on Quarks and Leptons*. Vol. 61. NATO Science Series B: Physics. Cargèse, France, 1979. Plenum Press, 1980, pp. 687–713.
- [24] RN Mohapatra and G Senjanović. “Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation”. In: *Phys. Rev. Lett.* 44 (1980), pp. 912–915.
- [25] M Fukugita and T Yanagida. *Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics*. Berlin: Springer, 2003. ISBN: 978-3540439645.
- [26] RN Mohapatra and PB Pal. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*. 3rd. Singapore: World Scientific, 2004. ISBN: 978-9812380712.
- [27] C Giunti and CW Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford: Oxford University Press, 2007. ISBN: 978-0198508717.
- [28] SM Bilenky. *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*. Berlin: Springer, 2010. ISBN: 978-3642061911.
- [29] K Zuber. *Neutrino Physics*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2011. ISBN: 978-1439830757.
- [30] V Barger, D Marfatia, and K Whisnant. *The Physics of Neutrinos*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2012. ISBN: 978-0691157496.
- [31] JWF Valle and JC Romão. *Neutrinos in High Energy and Astroparticle Physics*. Weinheim: Wiley-VCH, 2015. ISBN: 978-3527411013.
- [32] F Suekane. *Neutrino Oscillations*. Tokyo: Springer, 2015. ISBN: 978-4431556962.
- [33] C Patrignani et al. “Review of Particle Physics”. In: *Chin. Phys. C* 40 (2016), p. 100001.
- [34] M Blennow and A Yu Smirnov. “Neutrino Propagation in Matter”. In: *Adv. High Energy Phys.* 2013 (2013), p. 972485.

- [35] TK Kuo and JT Pantaleone. “Neutrino Oscillations in Matter”. In: *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989), pp. 937–979.
- [36] A Ianni. “Solar Neutrinos and the Borexino Experiment”. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 94 (2017), pp. 257–281.
- [37] T Lachenmaier. “The measurement of the neutrino mixing angle θ_{13} with reactor neutrino experiments”. In: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 83 (2015), pp. 31–58.
- [38] X Qian and P Vogel. “Neutrino mass hierarchy”. In: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 83 (2015), pp. 1–30.
- [39] KN Abazajian et al. “Light Sterile Neutrinos: A White Paper”. In: arXiv preprint (2012). arXiv: [1204.5379 \[hep-ph\]](#).
- [40] Stefano Gariazzo et al. “Light sterile neutrinos”. In: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 43.3 (2016), p. 033001.
- [41] SM Bilenky. “Neutrino. History of a unique particle”. In: *The European Physical Journal H* 38 (2013), pp. 345–404.
- [42] ST Petcov. “The nature of massive neutrinos”. In: *Advances in High Energy Physics* 2013.1 (2013), p. 852987.
- [43] Samoil M Bilenky, Jirí Hošek, and Serguey T Petcov. “On the oscillations of neutrinos with Dirac and Majorana masses”. In: *Physics Letters B* 94.4 (1980), pp. 495–498.
- [44] J Schechter and José WF Valle. “Neutrino masses in $SU(2) \otimes U(1)$ theories”. In: *Physical Review D* 22.9 (1980), p. 2227.
- [45] Masaru Doi et al. “CP violation in Majorana neutrinos”. In: *Physics letters B* 102.5 (1981), pp. 323–326.
- [46] John D Vergados, Hiroyasu Ejiri, and Fedor Šimkovic. “Theory of neutrinoless double-beta decay”. In: *Reports on Progress in Physics* 75.10 (2012), p. 106301.
- [47] Stefano Dell’Oro et al. “Neutrinoless double beta decay: 2015 review”. In: *Advances in High Energy Physics* 2016.1 (2016), p. 2162659.
- [48] Oliviero Cremonesi. “Neutrino-less double beta decay experiments”. In: *Hyperfine Interactions* 239.1 (2018), p. 54.
- [49] E Kh Akhmedov and A Yu Smirnov. “Paradoxes of neutrino oscillations”. In: *Physics of Atomic Nuclei* 72 (2009), pp. 1363–1381.
- [50] Alvaro De Rújula et al. “A fresh look at neutrino oscillations”. In: *Nuclear Physics B* 168.1 (1980), pp. 54–68.
- [51] V D Barger, K Whisnant, and R J N Phillips. “Matter effects on three-neutrino oscillations”. In: *Physical Review D* 22 (1980), pp. 1636–1649.
- [52] Nicola Cabibbo. “Time reversal violation in neutrino oscillation”. In: *Physics Letters B* 72.3 (1978), pp. 333–335.

- [53] E Kh Akhmedov. “Three-flavour effects and CP-and T-violation in neutrino oscillations”. In: *Physica Scripta* 2005.T121 (2005), p. 65.
- [54] V Barger, K Whisnant, and RJN Phillips. “CP nonconservation in three-neutrino oscillations”. In: *Physical Review Letters* 45.26 (1980), p. 2084.
- [55] C Jarlskog. “A basis independent formulation of the connection between quark mass matrices, CP violation and experiment”. In: *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* 29 (1985), pp. 491–497.
- [56] Hiroshi Nunokawa, Stephen Parke, and Renata Zukanovich Funchal. “Another possible way to determine the neutrino mass hierarchy”. In: *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 72.1 (2005), p. 013009.
- [57] Stephen Parke. “What is Δm_{ee}^2 ?” In: *Physical Review D* 93.5 (2016), p. 053008.
- [58] Lincoln Wolfenstein. “Neutrino oscillations in matter”. In: *Solar neutrinos*. CRC Press, 2018, pp. 294–299.
- [59] V Barger et al. “Matter effects on three-neutrino oscillations”. In: *Physical Review D* 22.11 (1980), p. 2718.
- [60] SP Mikheev and AYu Smirnov. “Resonant amplification of neutrino oscillations in matter”. In: *Sov. J. Nucl. Phys.* 42 (1985). *Yad. Fiz.* 42 (1985) 1441, pp. 913–917.
- [61] SP Mikheev and AYu Smirnov. “Neutrino oscillations in a variable-density medium and neutrino bursts due to the gravitational collapse of stars”. In: *Nuovo Cim. C* 9 (1986), pp. 17–26.
- [62] EK Akhmedov. “Resonant amplification of neutrino spin rotation in matter and the solar-neutrino problem”. In: *Sov. J. Nucl. Phys.* 47 (1988). *Yad. Fiz.* 47 (1988) 475 [in Russian], pp. 301–302.
- [63] PI Krastev and A Yu Smirnov. “Parametric effects in neutrino oscillations”. In: *Physics Letters B* 226.3-4 (1989), pp. 341–346.
- [64] ST Petcov. “Diffractive-like (or parametric-resonance-like?) enhancement of the Earth (day-night) effect for solar neutrinos crossing the Earth core”. In: *Physics Letters B* 434.3-4 (1998), pp. 321–332.
- [65] E Kh Akhmedov. “Parametric resonance of neutrino oscillations and passage of solar and atmospheric neutrinos through the earth”. In: *Nuclear Physics B* 538.1-2 (1999), pp. 25–51.
- [66] James Pantaleone. “Neutrino oscillations at high densities”. In: *Physics Letters B* 287.1-3 (1992), pp. 128–132.
- [67] Stuart Samuel. “Neutrino oscillations in dense neutrino gases”. In: *Physical Review D* 48.4 (1993), p. 1462.
- [68] Alessandro Mirizzi et al. “Supernova neutrinos: production, oscillations and detection”. In: *La Rivista del Nuovo Cimento* 39 (2016), pp. 1–112.

- [69] Maria Concepción Gonzalez-Garcia and Michele Maltoni. “Phenomenology with massive neutrinos”. In: *Physics Reports* 460.1-3 (2008), pp. 1–129.
- [70] SP Mikheyev and A Yu Smirnov. “’86 Massive Neutrinos in Astrophysics and in Particle Physics”. In: *Proceedings of the Sixth Moriond Workshop*, ed. by O. Fackler and J. Tran Thanh Van. (Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette, 1986, p. 355). 1986.
- [71] A Messiah. “Massive Neutrinos in Astrophysics and in Particle Physics”. In: *Proceedings of the 6th Moriond Workshop of the 21st Rencontres de Moriond*. Tignes, France, Jan. 1986, pp. 373–389.
- [72] Stephen J Parke. “Nonadiabatic level crossing in resonant neutrino oscillations”. In: *Physical Review Letters* 57.10 (1986), p. 1275.