

量子场论

殷麒翔

2024 年 4 月 3 日

目录

I 自由场论	1
1 狹义相对论与经典场论	3
1.1 狹义相对论	3
1.1.1 Lorentz 变换	3
1.1.2 Lorentz 张量	6
1.2 电动力学的协变形式	7
1.3 经典场论	9
1.4 对称性与守恒律	10
1.4.1 Noether 定理	10
1.4.2 时空平移对称性	12
1.4.3 Lorentz 对称性	14
1.4.4 $U(1)$ 对称性	17
2 Klein-Gordon 标量场量子化	19
2.1 K-G 场的等时量子化	19
2.1.1 经典谐振子	19
2.1.2 K-G 场的量子化	20
2.1.3 基态和激发态	23
2.1.4 归一化	25
2.1.5 场算符的物理含义	26
2.2 Heisenberg 绘景下的 K-G 场	27
2.2.1 负能解问题	29
2.2.2 因果性问题	29
2.2.3 因果性的后果	32
2.3 K-G 传播子	33
2.3.1 推迟传播子	33
2.3.2 Feynman 传播子	38

3 Dirac 旋量场量子化	41
3.1 Lorentz 群的旋量表示	41
3.1.1 Lorentz 群的表示	44
3.1.2 Lorentz 群的矢量表示	45
3.1.3 Lorentz 群的旋量表示与 Dirac γ 矩阵	50

Part I

自由场论

Chapter 1

狭义相对论与经典场论

Notation: 取自然单位制 $c = \hbar = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, 取 Bjorken-Drell 度规: $\text{diag}(+, -, -, -)$, 默认采用 Einstein 求和约定。

1.1 狹义相对论

1.1.1 Lorentz 变换

狹义相对论中两个惯性系之间的时空坐标变换是 Lorentz 变换:

$$t' = \gamma(t - \beta x) \quad x' = \gamma(x - \beta t) \quad y' = y \quad z' = z \quad (1.1)$$

由公式 (1.1) 可知, 时空间隔 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ 在变换下具有不变性, 是一个 **Lorentz 标量**。

在狹义相对论的时空观中, 时间与空间并不是相互独立的。为了将时间与空间统一使用一个坐标来描述, 我们引入逆变 4-矢量 $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$ 。同时, 我们希望定义 4-矢量的内积, 为此需要引入度规:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

度规矩阵 $g_{\mu\nu}$ 中, μ 指标表示行, ν 指标表示列。协变 4-矢量就可以通过度规作用在逆变 4-矢量上得到: $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x})$, 度规 $g_{\mu\nu}$ 将 x^ν 的指标降低为 x_μ 。逆变与协变 4-矢量的内积就定义为它们各自的分量相乘再相加, 这样就得到了前面的 Lorentz 标量:

$$x^2 = x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.3)$$

在上式中, 同一指标在上标和下标中同时出现, 因此可以相消, 称为指标缩并。缩并后没有自由指标, 这是 Lorentz 标量的特点。而 Lorentz 矢量在缩并后具有一个自由指标, 例如 x^μ 。

由於 $x^\nu = g^{\nu\mu}x_\mu$, 所以 $g_{\mu\nu}, g^{\nu\mu}$ 是互逆矩陣, 并且:

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

它们滿足: $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$, 其中 Kronecker 符號定義為:

$$\delta^a_b = \delta_a^b = \delta^{ab} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases} \quad (1.5)$$

度規矩陣不仅可以用来对 Lorentz 矢量进行指标升降, 它也可以用于对自身的指标进行升降:

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{\rho\sigma} \quad (1.6)$$

沿 x 軸方向的 Lorentz boost 也可以表示为矩阵:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

即:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.8)$$

我们约定 Λ^μ_ν 矩阵中偏左的指标 μ 为行指标, 偏右的指标 ν 为列指标, 在时空变换下具有以上变换形式的物理量称为 **Lorentz 矢量**。(1.8) 式变换的特点是保证四维 Lorentz 矢量的内积 $x^\mu x_\mu$ 不变, 从这个角度, 我们可以定义保证四维 Lorentz 矢量的内积保持不变的变换为 Lorentz 变换。Lorentz 变换构成 Lorentz 群, boost 变换、三维空间中的转动变换与时空坐标原点的平移变换均属于 Lorentz 变换。(注: 时空坐标原点的平移实际上应属于 Poincare 变换)

由 Lorentz 变换的特性可知, 矩阵 Λ^μ_ν 应具有如下性质。由于 4-矢量的内积定义为:

$$x'^\mu x'_\mu = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta x^\alpha x^\beta = x_\beta x^\beta = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad (1.9)$$

所以保持内积不变就必須要求:

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (1.10)$$

称为保度規条件。

例如, 由于空间转动变换并不改变矢量的模长 $|\mathbf{x}|^2$, 也不改变时间 t , 所以绕 z 轴的空间转动变换将保持 4 矢量的内积不变, 因此属于 Lorentz 变换。矩阵 $[R_z(\theta)]^\mu_\nu$ 满足保度规条件:

$$[R_z(\theta)]^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

矩阵 δ^μ_ν 是一个单位矩阵, 使得 $x'^\mu = \delta^\mu_\nu x^\nu = x^\mu$, 这是一个恒等变换, 因此同属于 Lorentz 变换。

根据定义, Lorentz 变换的逆变换 Λ^{-1} 应满足 $\Lambda^{-1}\Lambda = 1$ 。若写成矩阵元乘积的形式:

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu} = g^{\mu\beta} g_{\alpha\rho} \Lambda^\alpha_\beta \Lambda^\rho_\nu \quad (1.12)$$

所以 Λ 的逆变换定义为:

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\rho \equiv g^{\mu\beta} g_{\rho\alpha} \Lambda^\alpha_\beta \quad (1.13)$$

并且, Λ^{-1} 也是一个 Lorentz 变换:

$$(\Lambda^{-1})_\mu^\sigma x'_\sigma = (\Lambda^{-1})_\mu^\sigma \Lambda_\sigma^\tau x_\tau = \delta_\mu^\tau x_\tau = x_\mu \Rightarrow x_\mu = (\Lambda^{-1})_\mu^\sigma x'_\sigma \quad (1.14)$$

将 Λ^μ_ν 视为矩阵 Λ , 则其转置矩阵 Λ^T 的矩阵元满足 $(\Lambda^T)_{\nu}{}^{\mu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, 即矩阵元从 μ 行 ν 列变为 ν 行 μ 列。由保度规条件可知:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = (\Lambda^T)_{\alpha}{}^{\mu} g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta \quad (1.15)$$

在右侧的表达式中, 重复的相邻指标缩并, 对应于矩阵乘法。所以, Lorentz 变换矩阵和度规矩矩阵满足:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (1.16)$$

于是, 矩阵行列式满足:

$$\det(g) = \det(\Lambda^T) \det(g) \det(\Lambda) = \det(g) [\det(\Lambda)]^2 \quad (1.17)$$

因此有 $[\det(\Lambda)]^2 = 1$, 故:

$$\det(\Lambda) = \pm 1 \quad (1.18)$$

Lorentz 变换 $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 的 Jacobi 行列式为:

$$\mathcal{J} = \det \left[\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right] = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \det(\Lambda) \quad (1.19)$$

于是 Lorentz 变换对体积元 d^4x 的变换为:

$$d^4x' = |\mathcal{J}| d^4x = |\det(\Lambda)| d^4x = d^4x \quad (1.20)$$

所以 d^4x 屬於 Lorentz 标量。

除 4-坐标以外，我們還可以定義 4-動量 $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ ，4-偏導 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$ ，它們都是 Lorentz 矢量。對於偏導 ∂_μ ，它是對 x^μ 的求導，這因為：

$$\partial_\mu x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.21)$$

這樣的寫法將會使得指標安排更為合理。

1.1.2 Lorentz 張量

在 Lorentz 變換下，具有如下變換規則的物理量稱為 **Lorentz 張量**：

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\nu_1} \cdots (\Lambda^{-1})^{\sigma_q}_{\nu_q} \quad (1.22)$$

注意到：

$$x'^\rho = \Lambda^\rho_\nu x^\nu \quad x'_\rho = \Lambda_\rho^\mu x_\mu \quad (1.23)$$

由 Lorentz 變換保持內積不變的性質可知：

$$x'^\rho x'_\rho = \Lambda^\rho_\nu \Lambda_\rho^\mu x^\nu x_\mu = x^\mu x_\mu = \delta^\mu_\nu x^\nu x_\mu \quad (1.24)$$

所以：

$$\Lambda_\rho^\mu \Lambda^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu \quad (1.25)$$

即 Λ_ρ^μ 和 Λ^ρ_μ 是互逆的，這與之前的保度規條件 (1.10) 是等價的。注意到前面對 Lorentz 逆變換的定義： $(\Lambda^{-1})^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu$ ，所以有：

$$\Lambda_\rho^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\rho \quad (1.26)$$

這樣，Lorentz 張量的變換就可以寫成：

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} \Lambda_{\nu_1}^{\sigma_1} \cdots \Lambda_{\nu_q}^{\sigma_q} T^{\rho_1 \cdots \rho_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_q} \quad (1.27)$$

Λ^ρ_μ 和 Λ_ρ^μ 的關係不難從 Lorentz 變換矩陣中看出。逆變矢量的 Lorentz 變換矩陣為：

$$\Lambda^\rho_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

而逆變矩陣就是將 $\beta = v$ 變號：

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\rho = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & & \\ +\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

而对于协变矢量 $x_\rho = (t, -\mathbf{x})$, 它的 Lorentz 变换矩阵为:

$$\Lambda_\rho^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & & \\ +\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^\mu_\rho \quad (1.30)$$

即: $\Lambda_\rho^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\rho$ 。

前面我们指出,Lorentz 变换矩阵的转置为: $\Lambda^\mu_\nu = (\Lambda^T)^\mu_\nu$, 而逆变换矩阵满足 $\Lambda^\mu_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu$, 所以有:

$$\Lambda^T = \Lambda^{-1} \quad (1.31)$$

即变换矩阵是正交矩阵, Lorentz 变换是一种正交变换, 这与三维 Euclid 空间中的正交变换是相似的。三维 Euclid 空间中的正交变换不改变矢量的模长, 而这里的 Lorentz 变换是四维 Minkowski 时空中的正交变换, 它不会改变 4-矢量的模长。

需要注意, Lorentz 变换矩阵 $\Lambda_\mu^\nu, \Lambda^\mu_\nu$ 并不是 Lorentz 张量, 它们并不遵循张量变换的规则, 也不能使用度规对其进行指标升降。

我们还可以定义 4 维 Levi-Civita 符号: $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, 约定 $\varepsilon^{0123} = +1$, 并规定 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 交换任意两个指标时改变一次符号, 且 $\mu\nu\rho\sigma$ 按 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 轮换时取 $+1$ 。 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 是一个四维张量, 属于全反对称张量。它的协变形式为:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\rho\gamma}g_{\sigma\delta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.32)$$

且: $\varepsilon_{0123} = -1$, 它也属于全反对称张量。可以证明:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4!\varepsilon^{0123}\varepsilon_{0123} = -4! \quad (1.33)$$

3 维 Levi-Civita 符号也可以类似定义, 它具有如下的性质:

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km} \quad (1.34)$$

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^{kl} \quad (1.35)$$

1.2 电动力学的协变形式

Maxwell 方程组可以写成明显的 Lorentz 协变形式, 也就是把相关物理量使用 Lorentz 标量、矢量和张量表示。

定义 4-电流密度矢量: $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, 于是电荷守恒定律:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.36)$$

電場強度 \mathbf{E} 和磁感應強度 \mathbf{B} 可以使用標勢 ϕ 和矢勢 \mathbf{A} 表示：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.37)$$

引入四維勢 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, 于是電場和磁場的分量可以表示為：

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i \quad B^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1.38)$$

引入電磁場的場強張量：

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu} \quad (1.39)$$

它是一個全反對稱張量（交換指標 μ, ν 改變符號），可以寫成矩陣形式：

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

利用偏導次序的可交換性：

$$\begin{aligned} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= \partial^\rho (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= \partial^\mu \partial^\rho A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu A^\rho + \partial^\nu \partial^\mu A^\rho - \partial^\nu \partial^\rho A^\mu \\ &= \partial^\mu F^{\rho\nu} + \partial^\nu F^{\mu\rho} \\ &= -\partial^\mu F^{\nu\rho} - \partial^\nu F^{\rho\mu} \end{aligned} \quad (1.41)$$

可得 **Bianchi 恒等式**：

$$\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0 \quad (1.42)$$

利用場強張量，電動力學中的 Maxwell 方程組就可以明顯地表述成協變形式。

Gauss 定理：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.43)$$

等價於：

$$J^0 = \rho = \partial_i E^i = -\partial_i F^{0i} = \partial_i F^{i0} = \partial_i F^{i0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0} \quad (1.44)$$

環路定理：

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.45)$$

等價於：

$$J^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j B^k - \partial_0 E^i = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i} \quad (1.46)$$

归纳起來，得到 Maxwell 方程：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (1.47)$$

通常，我們還可以定義電磁場的對偶場強張量：

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu} \quad (1.48)$$

1.3 经典场论

量子场论的建立是与经典场论密不可分的，量子场论中的许多重要概念都来源于经典场论。所以，我们需要对经典力学和经典场论做一个简要的回顾。

类比于经典力学中广义坐标是时间的函数，场论中，场 $\phi(t, \mathbf{x})$ 是系统的广义坐标，它是时空坐标 x^μ 的函数，并且每一个空间坐标都是一个独立自由度，所以经典场论是无穷自由度的质点力学。

在经典力学中，由于我们讨论的是力学系统可能的运动路径，这是一个空间概念，所以我们假定做等时变分 $\delta t = 0$ ，即不做时间坐标的改变，于是：

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i \quad (1.49)$$

利用作用量原理，对系统的拉氏量变分取极值：

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (1.50)$$

即可得到运动方程—拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.51)$$

并且定义广义动量与哈密顿量：

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad H(q_i, p_i) \equiv p_i \dot{q}_i - L \quad (1.52)$$

在经典场论中，由于我们讨论的是场 ϕ 可能的形式，所以需要对 ϕ 进行变分，而不用对时空坐标 x^μ 变分，即： $\delta x^\mu = 0$ 。于是有：

$$\delta(\partial_\mu \phi_a) = \partial_\mu(\delta \phi_a) \quad (1.53)$$

利用作用量原理，对系统的拉氏量密度变分取极值：

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \quad (1.54)$$

得到场的欧拉-拉格朗日方程，它给出场的运动方程：

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (1.55)$$

我们同样可以定义场的共轭动量密度与哈密顿量密度：

$$\pi(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \mathcal{H} \equiv \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.56)$$

1.4 对称性与守恒律

经典场论的另一个重要部分就是对称性与守恒定律。所谓物理中的对称性是指，一个物理系统在某种变换下具有不变性，那么就称它具有某种对称性。而每一个连续对称性都与一个守恒定律所对应，这就是 Noether 定理。

1.4.1 Noether 定理

场的 Noether 定理：如果一个系统具有某种连续对称性，并且当运动方程满足时，则该系统存在一个相应的守恒流（守恒律）。

下面给出证明。

假设考虑时空中的物理点 P ，在参考系变换前后的坐标分别为 x^μ 和 x'^μ 。在变换前该点处的场是坐标 x^μ 的函数 $f(x^\mu)$ ，而变换后该点处的场为 $f'(x'^\mu)$ 。

考虑无穷小变换： $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, $f(x^\mu) \rightarrow f'(x'^\mu) = f(x^\mu) + \delta f(x^\mu)$ ，注意到：

$$\begin{aligned}\delta f(x^\mu) &= f'(x'^\mu) - f(x^\mu) = f'(x^\mu + \delta x^\mu) - f(x^\mu) \\ &\simeq f'(x^\mu) - f(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu f'(x^\mu) = \delta_0 f(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu f'(x^\mu) \\ &\simeq \delta_0 f(x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu f(x^\mu)\end{aligned}\quad (1.57)$$

即： $\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu$ 。其中 δ_0 是固定坐标点（即在变换前后的两个参考系中坐标都是 x^μ ）处的变分，满足：

$$\delta_0 f(x) = f'(x) - f(x) \quad \delta_0(\partial_\mu f) = \partial_\mu(\delta_0 f) \quad (1.58)$$

而 δ 是对物理点处的变分，包含对时空坐标的改变，因此不能与时空导数随意交换。

例如，考虑时空平移变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 。在参考系变换下， P 点的坐标从 x^μ 变换到 $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ 。显然，时空平移并不改变场 ϕ 的函数形式，在物理点 P 这一处 $\delta\phi = 0$ ，那么同一坐标点处的改变为 $\delta_0\phi = -a^\mu \partial_\mu \phi$ 。

若在上述的无穷小变换下有：

$$0 = \delta S = \int [\delta(d^4x)\mathcal{L} + d^4x \delta\mathcal{L}] \quad (1.59)$$

即无穷小变换引起的作用量改变为 0，则称体系具有相应的**连续对称性**，连续体现在“无穷小”上。

考虑 (1.59) 式中的各项。

第一项： $\delta(d^4x)$

时空体积元的改变：

$$\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = |\mathcal{J}|d^4x - d^4x \quad (1.60)$$

其中：

$$\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \simeq \det\left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu + \delta x^\mu)\right] = \det\left[\delta^\mu_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right] \quad (1.61)$$

对于任意方阵 A , 可以证明: $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$, 其中: $\exp(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ 。若展开到一阶小量, 则有: $\det(\mathbf{1} + A) \simeq 1 + \text{tr}(A)$ 。所以:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &\simeq \det \left[\text{diag} \left(1 + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right) \right] = \det \left[\mathbf{1} + \text{diag} \left(\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right) \right] = 1 + \text{tr} \left(\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right) \\ &= 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)\end{aligned}\quad (1.62)$$

因此, 体积元的改变为:

$$\delta(d^4x) = d^4x' - d^4x = |\mathcal{J}|d^4x - d^4x = d^4x(\partial_\mu \delta x^\mu) \quad (1.63)$$

例如, 在时空平移变换下: $\delta x^\mu = a^\mu, \partial_\mu a^\mu = 0$, 于是 $d^4x' = d^4x$ 。

在 Lorentz 变换下, 无穷小 Lorentz 变换可以写作: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)x^\nu = x^\mu + \delta x^\mu$, 例如绕 z 轴的转动:

$$[R_z(\theta)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \theta & \\ & -\theta & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (1.64)$$

可以证明, ω 是四阶全反对称张量, 因此 $\omega^\mu{}_\mu = 0$, 而 $\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, 所以 $\partial_\mu \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu \delta_\mu{}^\nu = 0$, 于是 $d^4x' = d^4x$ 。

第二项: $\delta\mathcal{L}$

拉氏量的改变:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta_0\mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0(\partial_\mu \phi) \\ &= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta_0 \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right)\end{aligned}\quad (1.65)$$

Noether 定理的条件要求拉氏量 \mathcal{L} 满足运动方程, 故上式第二项等于 0。即:

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right) \quad (1.66)$$

综合考虑体积元与拉氏量的改变, 得到作用量的变分为:

$$\begin{aligned}0 &= \delta S = \int d^4x \left[\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right) \right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_0 \phi \right]\end{aligned}\quad (1.67)$$

利用 $\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu$, 把对同一坐标点处的变分 δ_0 变为对同一物理点处的变分 δ :

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\delta\phi - \delta x^\nu \partial_\nu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] \end{aligned} \quad (1.68)$$

定义守恒流:

$$j^\mu = \left(\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \quad (1.69)$$

满足流守恒方程:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.70)$$

对 (1.70) 式做空间积分:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x \partial_\mu j^\mu = \int d^3x \left(\frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) = \int d^3x \partial_0 j^0 + \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} \\ &= \frac{d}{dt} \int d^3x j^0 + \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.71)$$

定义守恒荷:

$$Q(t) = \int d^3x j^0 \quad (1.72)$$

当边界面趋于无穷远时, 面积分一项为 0, 此时:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x j^0 = 0 \quad (1.73)$$

在场论中, 如果一个系统具有某种连续对称性, 则存在相应的守恒流, 它满足流守恒方程, 而全空间的守恒荷不随时间变化。这样就证明了 Noether 定理。

1.4.2 时空平移对称性

时空平移变换为:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (1.74)$$

若场 ϕ 在时空平移变换下保持不变:

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \phi'(x'^\mu) = \phi'(x^\mu + a^\mu) = \phi(x^\mu) \quad (1.75)$$

则称该场具有时空平移对称性, 存在相应的守恒流与守恒荷。此时 $\delta x^\mu = a^\mu, \delta\phi = 0$, 代入 Noether 守恒流公式:

$$j^\mu = \left(\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi = \left(\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) a^\nu \quad (1.76)$$

流守恒方程 (1.70) 给出:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \left(\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) a^\nu = 0 \quad (1.77)$$

即:

$$\partial_\mu \left(\mathcal{L} \delta^\mu_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) = 0 \quad (1.78)$$

做指标替换, 得到:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\rho \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\rho \right) = 0 \quad (1.79)$$

上式两侧同乘度规 $g^{\rho\nu}$ 缩并:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\rho \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\rho \right) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} g^{\rho\nu} \partial_\rho \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\rho g^{\rho\nu} \right) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.80)$$

(1.80) 式的括号部分是场的能动张量:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (1.81)$$

它满足守恒方程:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.82)$$

并且只要场的拉氏量 \mathcal{L} 是 Lorentz 标量, 那么能动张量 $T^{\mu\nu}$ 就是 Lorentz 张量。

当拉氏量 \mathcal{L} 满足时空平移对称性时, 有:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (1.83)$$

对 $T^{0\nu}$ 做全空间积分, 就得到了 4 个守恒荷。

00 分量:

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \quad (1.84)$$

所以 T^{00} 就是场的哈密顿量密度。 T^{00} 的全空间积分:

$$H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \mathcal{H} \quad (1.85)$$

就是场的哈密顿量, 它是时间平移变换的守恒荷, 满足:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (1.86)$$

即時間平移對稱性對應能量守恒。

$0i$ 分量：

$$T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial^i \phi = \pi \partial^i \phi \quad (1.87)$$

是場的動量密度。 T^{0i} 的全空間積分：

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x \pi \partial^i \phi \quad (1.88)$$

是場的總動量。寫成三維矢量的形式：

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \pi \nabla \phi \quad (1.89)$$

總動量是空間平移變換的守恒荷，滿足：

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad (1.90)$$

即空間平移對稱性對應動量守恒。

所以，4-動量 $p^\mu = (H, \mathbf{P})$ 的每一個分量都是一个守恒荷。

1.4.3 Lorentz 對稱性

在相對論性場論中，我們希望拉氏量 \mathcal{L} 是 Lorentz 不變的，這樣得到的作用量與運動方程就都是 Lorentz 不變的，在不同參考系中具有相同的數學形式，所以 Lorentz 對稱性是量子場論中的基本對稱性。

考慮無窮小 Lorentz 變換：

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (1.91)$$

其中 $\omega^\mu{}_\nu$ 是無窮小變換的參數。由保度規條件 (1.10) 式可知：

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \\ &= g_{\mu\nu} (\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha) (\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta) \simeq g_{\mu\nu} \delta^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu} \delta^\mu{}_\alpha \omega^\nu{}_\beta + g_{\mu\nu} \omega^\mu{}_\alpha \delta^\nu{}_\beta \\ &= g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (1.92)$$

若定義：

$$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho} \omega^\rho{}_\nu \quad (1.93)$$

則由 (1.92) 式可知：

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (1.94)$$

是一個全反對稱張量，只包含六個獨立分量，分別對應沿三個方向的 boost 變換與繞三個空間軸的空間轉動變換。

例如：绕 z 轴转动 θ 角的空间转动变换：

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [R_z(\theta)]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu = \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \theta & \\ & -\theta & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

boost 变换可以使用快度来表示。对于沿 x 轴的 boost，定义快度：

$$\xi = \tanh^{-1} \beta \quad (1.96)$$

利用双曲函数的性质：

$$\tanh \xi = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi} \quad \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \quad (1.97)$$

可推出：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \xi}} = \left(\frac{\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi}{\cosh^2 \xi} \right)^{-\frac{1}{2}} = \cosh \xi \quad (1.98)$$

$$\beta \gamma = \tanh \xi \cosh \xi = \sinh \xi \quad (1.99)$$

所以：

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta & & \\ -\gamma \beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & & \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

相应的无穷小变换为：

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ -\xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \omega^\rho{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\xi & & \\ \xi & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

在无穷小 Lorentz 变换下：

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) x^\nu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (1.102)$$

场的变换为：

$$\phi_a(x) \rightarrow \phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta \phi_a(x) \quad (1.103)$$

对变换后的场在 $\omega_{\mu\nu} = 0$ 附近做 Taylor 展开，保留到 ω 的一次项：

$$\begin{aligned} \phi'(x') &\sim \phi(x) + \omega_{\mu\nu} \frac{\partial \phi'(x')}{\partial \omega_{\mu\nu}} \Big|_{\omega_{\mu\nu}=0} = \phi(x) - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi(x) \\ &= \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \right) \phi(x) \end{aligned} \quad (1.104)$$

其中 $I_{\mu\nu}$ 称为 Lorentz 群表示的生成元。由 $\omega_{\mu\nu}$ 的全反对称性可知: $I_{\mu\nu} = -I_{\nu\mu}$, 它也是一个全反对称张量。

下面我们可以计算与 Lorentz 对称性相对应的守恒流。时空坐标和场的无穷小变换为:

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad \delta\phi = -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi(x) \quad (1.105)$$

故 Noether 流:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \left(\mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi \right) \delta x^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \\ &= -\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu \right) \omega^\nu{}_\rho x^\rho - \frac{i}{2}\omega_{\nu\rho} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} I^{\nu\rho} \phi \\ &= -T^\mu{}_\nu \omega^\nu{}_\rho x^\rho - \frac{i}{2}\omega_{\nu\rho} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} I^{\nu\rho} \phi \end{aligned} \quad (1.106)$$

其中:

$$T^\mu{}_\nu = g_{\rho\nu} T^{\mu\rho} \quad (1.107)$$

是场的能动张量。利用度规可得:

$$T^\mu{}_\nu \omega^\nu{}_\rho = T^\mu{}_\nu \delta^\nu{}_\sigma \omega^\sigma{}_\rho = T^\mu{}_\nu g^{\nu\alpha} g_{\alpha\sigma} \omega^\sigma{}_\rho = T^{\mu\alpha} \omega_{\alpha\rho} = T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} \quad (1.108)$$

再利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性可得:

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu \omega^\nu{}_\rho x^\rho &= T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho - T^{\mu\nu} \omega_{\rho\nu} x^\rho) = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho - T^{\mu\rho} \omega_{\nu\rho} x^\nu) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \end{aligned} \quad (1.109)$$

现在, Noether 流 (1.106) 式就可以化为:

$$j^\mu = -\frac{i}{2}\omega_{\nu\rho} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} I^{\nu\rho} \phi - \frac{1}{2}\omega_{\nu\rho}(T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) = \frac{1}{2}\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho} \quad (1.110)$$

其中:

$$\mathbb{J}^{\mu\nu\rho} \equiv T^{\mu\rho} x^\nu - T^{\mu\nu} x^\rho - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} I^{\nu\rho} \phi \quad (1.111)$$

流守恒方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$ 给出:

$$\partial_\mu \mathbb{J}^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (1.112)$$

而守恒荷为:

$$J^{\nu\rho} \equiv \int d^3x \mathbb{J}^{0\nu\rho} = \int d^3x (T^{0\rho} x^\nu - T^{0\nu} x^\rho - i\pi I^{\nu\rho} \phi) \quad (1.113)$$

其中 $\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$ 是场的共轭动量密度。显然守恒荷也是一个全反对称张量: $J^{\nu\rho} = -J^{\rho\nu}$, 共包含有六个独立分量, 且满足:

$$\frac{dJ^{\nu\rho}}{dt} = 0 \quad (1.114)$$

$J^{\nu\rho}$ 可以分解为两项之和:

$$J^{\nu\rho} = L^{\nu\rho} + S^{\nu\rho} \quad (1.115)$$

第一项为:

$$L^{\nu\rho} \equiv \int d^3x (T^{0\rho}x^\nu - T^{0\nu}x^\rho) \quad (1.116)$$

$L^{\nu\rho}$ 的六个独立分量中, 其中三个是空间分量。空间分量 L^{jk} 可以表述为三维矢量 L^i :

$$L^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}L^{jk} \quad (1.117)$$

由此推出:

$$L^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \int d^3x (T^{0k}x^j - T^{0j}x^k) = \int d^3x \varepsilon^{ijk}x^jT^{0k} = \int d^3x \varepsilon^{ijk}x^j\pi\partial^k\phi \quad (1.118)$$

其中 $T^{0k} = \pi\partial^k\phi$ 是场的动量密度。写成矢量形式:

$$\mathbf{L} = - \int d^3x \mathbf{x} \times (\pi \nabla \phi) \quad (1.119)$$

这是场的轨道角动量。

第二项为:

$$S^{\nu\rho} \equiv -i \int d^3x \pi I^{\nu\rho} \phi \quad (1.120)$$

其空间分量同样可以写成三维矢量的形式:

$$S^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}S^{jk} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{ijk} \int d^3x \pi I^{jk}\phi \quad (1.121)$$

这是场的自旋角动量。于是, $J^{\nu\rho}$ 的空间分量对应的三维矢量为:

$$J^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}J^{jk} = L^i + S^i \quad (1.122)$$

这是场的总角动量。

以上我们讨论的是守恒荷的空间分量, 它们对应 Lorentz 变换中的空间转动变换。若系统具有空间旋转对称性, 则相应的守恒荷是不随时间变化的, 而这些守恒荷就是角动量。因此, 空间旋转对称性对应角动量守恒定律。

1.4.4 $U(1)$ 对称性

考虑由复标量场 $\phi(x)$ 及其复共轭 $\phi^\dagger(x)$ 构成的拉氏量:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi \quad (1.123)$$

其中, ϕ 与 ϕ^\dagger 是相互独立的标量场。复标量场的 $U(1)$ 整体变换定义为:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{iq\theta}\phi(x) \quad (1.124)$$

其中, q 是一个常数, θ 是连续变换的参数。所谓“整体”体现在变换参数 θ 是一个不依赖于时空坐标 x^μ 的实数, 因而以上变换对于时空中任一点处的标量场都是相同的。

相位因子 $e^{iq\theta}$ 可以看作是一个一维么正矩阵 $U(\theta) = e^{iq\theta}$, 满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$, 而集合 $\{U(\theta)|\theta \in [0, 2\pi/q]\}$ 构成一个群, 称为 $U(1)$ 群。显然, $U(1)$ 群是一个阿贝尔群:

$$U(\theta_1)U(\theta_2) = e^{iq\theta_1}e^{iq\theta_2} = e^{iq(\theta_1+\theta_2)} = e^{iq\theta_2}e^{iq\theta_1} = U(\theta_2)U(\theta_1) \quad (1.125)$$

在 $U(1)$ 整体变换下, 标量场 $\phi(x)$ 的复共轭 $\phi^\dagger(x)$ 的变换为:

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow \phi^{\dagger'}(x) = e^{-iq\theta}\phi^\dagger(x) \quad (1.126)$$

因此, 复标量场的拉氏量 (1.123) 式在 $U(1)$ 整体变换下保持不变, 具有 $U(1)$ 整体对称性:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \partial_\mu \phi^{\dagger'} \partial^\mu \phi' - m^2 \phi^{\dagger'} \phi' = e^{iq\theta} e^{-iq\theta} \mathcal{L} = \mathcal{L} \quad (1.127)$$

其中, q 称为相应的 $U(1)$ 荷。若考虑无穷小 $U(1)$ 整体变换:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + iq\theta\phi(x) \quad (1.128)$$

$$\phi^\dagger(x) \rightarrow \phi^{\dagger'}(x) = \phi^\dagger(x) - iq\theta\phi^\dagger(x) \quad (1.129)$$

即: $\delta x^\mu = 0, \delta\phi = iq\theta\phi, \delta\phi^\dagger = -iq\theta\phi^\dagger$ 。代入守恒流的定义 (1.69) 式可得:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger = (\partial^\mu \phi^\dagger)iq\theta\phi - (\partial^\mu \phi)iq\theta\phi^\dagger \\ &= -iq\theta[\phi^\dagger(\partial^\mu \phi) - \phi(\partial^\mu \phi^\dagger)] \\ &= -iq\theta\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \end{aligned} \quad (1.130)$$

它满足流守恒方程 (1.70) 式。其中, $\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$ 定义为:

$$\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \equiv \phi^\dagger(\partial^\mu \phi) - \phi(\partial^\mu \phi^\dagger) \quad (1.131)$$

定义 $U(1)$ 守恒流:

$$J^\mu \equiv iq\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (1.132)$$

于是 Noether 定理给出: $\partial_\mu J^\mu = 0$, 相应的守恒荷为:

$$Q \equiv \int d^3x J^0 = \int d^3x iq\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^0 \phi \quad (1.133)$$

满足荷守恒方程:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (1.134)$$

在实际的理论中, q 是由场所携带的某种荷, 例如电荷, 因而 $U(1)$ 整体对称性对应相应的荷守恒定律。例如, 电磁场的 $U(1)$ 整体对称性对应电荷守恒定律。

Chapter 2

Klein-Gordon 标量场量子化

2.1 K-G 场的等时量子化

已知实 K-G 经典场的拉氏量为：

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.1)$$

若引入共轭动量密度： $\pi = \partial\mathcal{L}_{\text{KG}}/\partial\dot{\phi} = \dot{\phi}$ ，则 K-G 经典场的哈密顿量可以表示为：

$$\mathcal{H}_{\text{KG}}(\phi, \pi) = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}_{\text{KG}} = T^{00} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.2)$$

将拉氏量代入 E-L 方程，即可得到 K-G 经典场的运动方程—Klein-Gordon 方程：

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (2.3)$$

其中，d'Alembert 算子定义为： $\square \equiv \partial^2 \equiv \partial_\mu\partial^\mu$ 。

2.1.1 经典谐振子

回顾非相对论量子力学中，对谐振子进行量子化的过程。已知一维谐振子的哈密顿量为：

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2q^2 \quad (2.4)$$

将经典谐振子量子化的关键在于把坐标和动量提升为算符，并要求它们满足对易关系：

$$[q, p] = i \quad (2.5)$$

引入算符 a, a^\dagger ，将坐标和动量改写为：

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad (2.6)$$

根据 q, p 的对易关系, 容易验证:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.7)$$

把用 a, a^\dagger 表示的 q, p 代入谐振子的哈密顿量, 可得:

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.8)$$

它满足对易关系:

$$[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger \quad [H, a] = -\omega a \quad (2.9)$$

我们把满足 $a|0\rangle = 0$ 的态称为体系的基态, 对应能量本征值 $\omega/2$:

$$H|0\rangle = \omega \left(a^\dagger a |0\rangle + \frac{1}{2} |0\rangle \right) = \frac{\omega}{2} |0\rangle \quad (2.10)$$

相应的第一激发态为 $a^\dagger|0\rangle$:

$$H(a^\dagger|0\rangle) = [H, a^\dagger](|0\rangle) + a^\dagger H(|0\rangle) = \omega \left(1 + \frac{1}{2} \right) (a^\dagger|0\rangle) \quad (2.11)$$

由此, 我们可以定义体系的能量本征态为:

$$|n\rangle \equiv (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (2.12)$$

对应能量本征值 $\omega(n + 1/2)$ 。与谐振子的哈密顿量相比较, 由于 $H|n\rangle = \omega(n + 1/2)|n\rangle$, 可知粒子数算符 N 的形式为:

$$N = a^\dagger a \quad N|n\rangle = n|n\rangle \quad (2.13)$$

使用粒子数算符和 a, a^\dagger 的对易关系, 以及能量本征态的定义, 我们可以证明:

$$a^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle \quad a|n\rangle = n|n-1\rangle \quad (2.14)$$

所以, 算符 a^\dagger 使得体系的能级上升一阶, 称为**升算符**, 而算符 a 使得体系的能级下降一阶, 称为**降算符**。我们可以将 $|0\rangle$ 看作谐振子的基态, 而将 $|n\rangle$ 看作谐振子的第 n 激发态, 这样就完成了简谐振子的量子化。

总结来说, 将经典谐振子量子化的关键在于把 q, p 提升为算符, 并且要求它们满足如下的**正则对易关系**:

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (2.15)$$

此时, 简谐振子将会出现分立的能级与量子态。

2.1.2 K-G 场的量子化

在动量空间对 K-G 场做 Fourier 变换:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t) \quad (2.16)$$

代入 K-G 方程 (2.3) 式:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.17)$$

可得:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \phi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (2.18)$$

这就是动量空间中 K-G 场的运动方程, 与简谐振子的运动方程有着完全相同的形式。其中, $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 是谐振子的频率, 方程的解是 $e^{\pm i\omega_p t}$ 线性独立的两个解。所以, K-G 场与谐振子之间十分相似, 我们可以类比经典谐振子量子化的过程, 对 K-G 场进行量子化。

仿照经典谐振子量子化的步骤, 在 K-G 场论中, 我们可以把经典场 $\phi(\mathbf{x})$ 和共轭动量 $\pi(\mathbf{x})$ 提升为算符, 并将离散的 i, j 连续化。猜测场和动量满足正则对易关系:

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 \quad (2.19)$$

类比:

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad (2.20)$$

将 K-G 场量子化后也对应一个厄米算符:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x}) \quad (2.21)$$

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p e^{ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot x}) \quad (2.22)$$

由于这里的场是具有无穷多自由度的, 所以对于每一个动量模式 \mathbf{p} 引入一个 a_p 和 a_p^\dagger , 然后再对动量积分。

为了满足场的量子化条件, 此处的 a_p, a_p^\dagger 也应满足一定的对易关系:

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (2.23)$$

$$[a_p, a_{p'}] = [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0 \quad (2.24)$$

对 $\phi(\mathbf{x})$ 的第二部分做变量替换 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, 因为积分区间是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 对称的, 且 $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \omega_{-\mathbf{p}}$, 因此:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p^\dagger e^{-ip \cdot x}) &= \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{d^3(-p)}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{-p}}} (a_{-p}^\dagger e^{ip \cdot x}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_{-p}^\dagger e^{ip \cdot x}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

所以, 场和动量算符可以改写为:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p + a_{-p}^\dagger) e^{ip \cdot x} \\ \pi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p - a_{-p}^\dagger) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (2.26)$$

于是：

$$\begin{aligned}
 [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \left[(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) - (a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger)(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) \right] e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{y})} \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \left([a_{-\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}] - [a_{\mathbf{p}}, a_{-\mathbf{p}'}^\dagger] \right) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{y})} \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{\omega_{\mathbf{p}}}} \left[-(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \right] e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{y})} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} i e^{i \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

与之前的猜测相符。

场的哈密顿量为：

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3 x \mathcal{H} = \int d^3 x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\
 &= \int d^3 x \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{2} (-i)^2 \frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}}{2} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) i^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} m^2 \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \right] \right] \\
 &= \int d^3 x \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \left[-\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{m^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \right] \right] \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \left[-\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}}{4} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{m^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{4\sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) \right] \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{4} \left[-(a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger) + \frac{m^2 + \mathbf{p}^2}{\omega_{\mathbf{p}}^2} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger)(a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) \right] \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

即：

$$H_{KG} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) \tag{2.29}$$

由上式可知， H_{KG} 的形式非常类似于 H_{SHO} ，只是 H_{KG} 是对无穷多简谐振子的动量积分。

至此，我们完成了 K-G 场的量子化。这里，我们是在 Schrodinger 绘景中对 K-G 场进行量子化。Schrodinger 绘景的特点是算符不随时间演化，即场算符与时间无关： $\phi = \phi(\mathbf{x})$ 。

2.1.3 基态和激发态

由于 $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \rightarrow \infty$, 因此哈密顿量的第二项趋于无穷大。这是很好理解的, 因为它是所有模式的零点能 $\omega_{\mathbf{p}}/2$ 之和, 这一项对应于真空能。所谓真空, 就是一个无穷大体系的基态。显然, 无穷大的真空能并不是一个物理可观测量。由于物理上讨论的是能级差, 而不是基态能量的绝对值, 所以我们可以通过重新定义基态, 使得 $H|0\rangle = 0$, 并重新给出:

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (2.30)$$

对于所有的动量 \mathbf{p} , 满足 $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$ 的态称为体系的基态, 因此在舍去无穷大后, 便有 $H|0\rangle = 0$ 。

可以验证, 哈密顿量满足对易关系:

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \quad (2.31)$$

我们可以构造 H 的第一激发态:

$$H(a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle) = a_{\mathbf{p}}^\dagger H|0\rangle + [H, a_{\mathbf{p}}^\dagger]|0\rangle = \omega_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle) \quad (2.32)$$

因此 $a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ 是 H 的本征态, 对应能量本征值为 $\omega_{\mathbf{p}}$ 。我们将 $a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ 诠释为第一激发态, 体系的能量即为: $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = E_{\mathbf{p}}$ 。因为量子场论认为粒子是场的激发, 所以 $a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ 可以诠释为单粒子态。由于 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 使得粒子数增加 1, 所以我们将其称为**产生算符**。而:

$$H(a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle) = (a_{\mathbf{p}} H - \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = (a_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}) a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = 0 \quad (2.33)$$

由于 $a_{\mathbf{p}}$ 使得粒子数减少 1, 所以我们将其称为**湮灭算符**。

双粒子态可以验证是 $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger|0\rangle$, 对应能量为 $\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}}$ 。因为 $[a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0$, 所以两个产生算符作用的效果与作用顺序没有关系, 湮灭算符亦是如此。

类似地, 我们还可以将经典场论中使用 Noether 定理得到的总动量 \mathbf{P} 提升为量子场算符:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= - \int d^3 x \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3 x \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{q}}}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\mathbf{p}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3 x \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{q}}}} \mathbf{p} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{q}}}} \mathbf{p} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{-\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger) (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}^\dagger - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger) \end{aligned} \quad (2.34)$$

其中, $a_{-\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger$ 两项各自由于积分区间关于原点的对称性而化为零。而对于 $a_{-\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}^\dagger$ 一项, 做 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ 的变量替换:

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{-\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}^\dagger = -\frac{1}{2} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{d^3(-p)}{(2\pi)^3} (-\mathbf{p}) a_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger = +\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad (2.35)$$

因此:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (-a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger]) \sim \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (2a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

即:

$$\mathbf{P} = - \int d^3 x \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (2.37)$$

我们将 \mathbf{P} 称为**总动量算符**。总动量算符满足对易关系:

$$[\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad [\mathbf{P}, a_{\mathbf{p}}] = -\mathbf{p} a_{\mathbf{p}} \quad (2.38)$$

注意到 H 和 \mathbf{P} 具有相似的形式, 且对易关系也十分相似。不难证明, $a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ 不仅是能量本征态, 也是动量本征态:

$$\mathbf{P}(a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle) = \mathbf{p}(a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle) \quad (2.39)$$

这样, 多粒子态就是:

$$a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle \quad (2.40)$$

它满足:

$$H(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle) = (\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2} + \cdots)(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle) \quad (2.41)$$

$$\mathbf{P}(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle) = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots)(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots |0\rangle) \quad (2.42)$$

所以, 多粒子态是 H, \mathbf{P} 的共同本征态, 具有确定的能量和动量。

对于量子谐振子, 由 (2.9) 式, 有:

$$[H, q] = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [H, a + a^\dagger] = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (= \omega a + \omega a^\dagger) = -\sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger) = -ip \quad (2.43)$$

$$[H, p] = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} [H, a - a^\dagger] = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (-\omega a - \omega a^\dagger) = i\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger) = i\omega^2 q \quad (2.44)$$

即: $[H, q] = -ip, [H, p] = i\omega^2 q$ 。利用哈密顿算符与产生湮灭算符的对易关系 (2.31) 式, 可以验证:

$$[H, \phi(\mathbf{x})] = -i\pi(\mathbf{x}) \quad [H, \pi(\mathbf{x})] = i(-\nabla^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}) \quad (2.45)$$

其中, $\hat{\omega}_{\mathbf{p}}^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 + m^2 = -\nabla^2 + m^2$ 是能量算符。即:

$$\begin{aligned}
 [H, \phi(\mathbf{x})] &= \left[\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega'_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \right] \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega'_{\mathbf{p}}}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} [a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'} + a_{-\mathbf{p}'}^\dagger] \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega'_{\mathbf{p}}}} e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} [-\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}} + \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}}^\dagger] \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (-a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) = -i\pi(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

以及:

$$\begin{aligned}
 [H, \pi(\mathbf{x})] &= \left[\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{2}} (a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger) e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \right] \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^6} \omega_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{2}} (-i) e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} [a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'} - a_{-\mathbf{p}'}^\dagger] \\
 &= \int \frac{d^3 p d^3 p'}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}'}}{2}} (-i) e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} [-\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}} - \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}}^\dagger] \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \omega_{\mathbf{p}}^2 (+i) (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (\mathbf{p}^2 + m^2) (+i) (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (+i) (-\nabla^2 + m^2) (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) = i(-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

2.1.4 归一化

首先选定真空态是归一化的:

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \tag{2.48}$$

其次, 对于单粒子态, 我们有:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] | 0 \rangle + \langle 0 | a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} | 0 \rangle = [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] + 0 = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \tag{2.49}$$

如果直接定义单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的归一化为: $\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$, 那么我们发现它并不是 Lorentz 不变的, 因此需要对单粒子态做一个修改。

考虑沿 z 方向的 boost:

$$p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E) \quad E' = \gamma(E + \beta p_3) \tag{2.50}$$

我们需要寻找到在新旧参考系中 $\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 和 $\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}')$ 之间的关系。已知 δ 函数具有如下的性质:

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \tag{2.51}$$

由于 $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(\mathbf{p}) \Leftrightarrow p'_3 = p_3'(p_3)$, 于是有:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') = \frac{1}{\frac{dp'_3}{dp_3}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.52)$$

因为:

$$\begin{aligned} \frac{dp'_3}{dp_3} &= \gamma + \gamma\beta \frac{dE}{dp_3} = \gamma \left(1 + \beta \frac{d}{dp_3} \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2} \right) \\ &= \gamma \left(1 + \beta \frac{p_3}{E} \right) = \frac{\gamma}{E} (E + \beta p_3) = \frac{E'}{E} \end{aligned} \quad (2.53)$$

所以有:

$$E' \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') = E \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.54)$$

即 $E \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 是 Lorentz 不变的。于是, 我们规定单粒子态的归一化条件为:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.55)$$

由此就可以给出单粒子态:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle \quad (2.56)$$

并且由于:

$$\langle \mathbf{p} | = \sqrt{2E_p} \langle 0 | a_p \quad |\mathbf{q}\rangle = \sqrt{2E_q} a_q^\dagger |0\rangle \quad (2.57)$$

所以:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2\sqrt{E_p E_q} \langle 0 | a_p a_q^\dagger |0\rangle = 2\sqrt{E_p E_q} \langle 0 | [a_p, a_q^\dagger] + a_q^\dagger a_p |0\rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.58)$$

这样, 我们就重新得到了单粒子态的归一化条件。

2.1.5 场算符的物理含义

考虑场算符作用在真空中:

$$\phi(\mathbf{x}) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{-ip \cdot x}) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot x} |\mathbf{p}\rangle \quad (2.59)$$

这个式子与非相对论量子力学中的位置本征矢 $|\mathbf{x}\rangle$ 十分相似, 我们将它诠释为算符 $\phi(\mathbf{x})$ 作用在真空中将会在 \mathbf{x} 位置处产生一个单粒子态。

此外, 注意到:

$$\langle 0 | \phi(\mathbf{x}) = (\phi(\mathbf{x}) | 0 \rangle)^\dagger = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} e^{ip' \cdot x} \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle \quad (2.60)$$

所以:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(\mathbf{x}) | \mathbf{p} \rangle &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} e^{ip' \cdot x} \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{p'}} e^{ip' \cdot x} (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (2.61)$$

我们将上式诠释为坐标表象 $|\mathbf{x}\rangle = \phi(\mathbf{x}) |0\rangle$ 中单粒子态 $|\mathbf{p}\rangle$ 的波函数。而在非相对论量子力学中, 我们有: $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = e^{ip \cdot x}$ 。

2.2 Heisenberg 绘景下的 K-G 场

前面我们讨论了 K-G 场的等时 ($t = 0$) 量子化, 即在 Schrodinger 绘景中, 约定算符与时间无关。现在我们将在 Heisenberg 绘景中讨论问题, 这时场算符是坐标与时间的函数: $\phi(\mathbf{x}, t)$ 。

已知 Heisenberg 绘景中的场算符为:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \quad (2.62)$$

对共轭动量 $\pi(\mathbf{x}, t)$ 亦是如此。Heisenberg 绘景中的算符随时间的演化遵循 Heisenberg 运动方程:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] \quad (2.63)$$

由 (2.45) 式可得, 场和动量算符满足的 Heisenberg 运动方程分别为:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) &= [\phi(\mathbf{x}, t), H] = [e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt}, H] = e^{iHt} [\phi(\mathbf{x}), H] e^{-iHt} \\ &= ie^{iHt} \pi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = i\pi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \pi(\mathbf{x}, t) &= [\pi(\mathbf{x}, t), H] = [e^{iHt} \pi(\mathbf{x}) e^{-iHt}, H] = e^{iHt} [\pi(\mathbf{x}), H] e^{-iHt} \\ &= -ie^{iHt} (-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = -i(-\nabla^2 + m^2) e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} \\ &= -i(-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.65)$$

于是有:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \pi(\mathbf{x}, t) = -(-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) \Rightarrow (\square + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.66)$$

即通过计算场和动量算符的 Heisenberg 方程, 我们可以得到 Klein-Gordon 方程:

$$(\square + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.67)$$

对于场算符, 由于:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p + a_{-p}^\dagger) e^{ip \cdot x} \quad (2.68)$$

所以:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (e^{iHt} a_p e^{-iHt} + e^{iHt} a_{-p}^\dagger e^{-iHt}) e^{ip \cdot x} \quad (2.69)$$

即在 Heisenberg 绘景中, 产生、湮灭算符的形式为:

$$a_p(t) = e^{iHt} a_p e^{-iHt} \quad a_p^\dagger(t) = e^{iHt} a_p^\dagger e^{-iHt} \quad (2.70)$$

上式对时间求导 (或直接代入 Heisenberg 方程):

$$i \frac{d}{dt} a_p(t) = e^{iHt} [a_p, H] e^{-iHt} = E_p a_p(t) \quad (2.71)$$

$$i \frac{d}{dt} a_p^\dagger(t) = e^{iHt} [a_p^\dagger, H] e^{-iHt} = -E_p a_p^\dagger(t) \quad (2.72)$$

解得：

$$a_{\mathbf{p}}(t) = a_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}} t} \quad a_{\mathbf{p}}^\dagger(t) = a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}} t} \quad (2.73)$$

将它们带回 (2.69) 式，得到：

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-iE_{\mathbf{p}} t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{iE_{\mathbf{p}} t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) \quad (2.74)$$

引入 4-动量 $p^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ ，则上式可以改写为：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \quad (2.75)$$

其中： $p^0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 。这就是 Heisenberg 绘景中的场算符。

对于任意算符 $G(x)$ ，由于：

$$[G(x), p_x] \psi = \left(-iG \frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial x} \psi + iG \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = i \frac{\partial G}{\partial x} \psi \Rightarrow i \frac{\partial G(x)}{\partial x^i} = [G(x), p^i] \quad (2.76)$$

其中，算符 $\hat{G}(\hat{\mathbf{x}})$ 可以展开为位置算符 $\hat{\mathbf{x}}$ 的幂级数，(2.76) 式来源于位置算符 $\hat{\mathbf{x}}$ 和动量算符 $\hat{\mathbf{p}}$ 的对易关系。但对于场算符 $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ ，它是时空坐标 \mathbf{x} 的函数，可以展开为产生、湮灭算符的叠加，而时空坐标 \mathbf{x} 在这里并非是位置算符，所以我们不能简单将 $G(\mathbf{x})$ 替换为 $\phi(\mathbf{x})$ ，从而认为场算符 $\phi(\mathbf{x})$ 遵循方程 (2.76) 式。

对于场算符，我们有：

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), P_i] &= \left[\phi(\mathbf{x}), \int d^3 x' \pi(\mathbf{x}') \partial_i \phi(\mathbf{x}') \right] = \int d^3 x' [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] \partial_i \phi(\mathbf{x}') \\ &= \int d^3 x' i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_i \phi(\mathbf{x}') = i \partial_i \phi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.77)$$

即：

$$i \frac{\partial}{\partial x^i} \phi(\mathbf{x}) = [\phi(\mathbf{x}), P_i] \quad (2.78)$$

与 (2.76) 式刚好相差一个负号。使用 4-矢量的形式，将能量和动量写在一起：

$$i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) = [\phi(x), P_\mu] \quad (2.79)$$

上式的解为：

$$\phi(x) = e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} = e^{i(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} \phi(0) e^{-i(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.80)$$

当然，我们也可以把这里的 $\phi(x)$ 换成 $a_{\mathbf{p}}(x)$ ，这会得到相同的结论。这里 H, \mathbf{P} 都是算符，上式是做时空平移将场从 $\phi(\mathbf{x} = 0, t = 0)$ 平移到 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 。

现在我们可以重新看待在固定粒子数的相对论波动力学中遇到的问题。

2.2.1 负能解问题

在相对论波动力学的视角, $\phi(x)$ 满足 K-G 方程。由于 K-G 方程是二阶微分方程, 所以存在两个线性独立的解, $e^{\pm ip \cdot x}$ 分别称为负频解和正频解, 对应负能量和正能量。

而在量子场论中, 我们把 $\phi(x)$ 提升为量子场算符, 场方程负频解的系数作为一个算符, 可以产生一个粒子, 而正频解的系数也作为一个算符, 可以湮灭一个粒子。这样, 场就与正能量和负能量无关了, 只是粒子的产生与湮灭。

2.2.2 因果性问题

在非相对论量子力学中, 我们引入了粒子从 $|\mathbf{r}', t'\rangle$ 状态到 $|\mathbf{r}'', t''\rangle$ 状态的传播子:

$$\langle \mathbf{r}'', t'' | e^{-iH(t'' - t')} | \mathbf{r}', t' \rangle \quad (2.81)$$

在 K-G 场被量子化后, 我们也可以类似地引入 4 维 Minkowski 时空中的从时空坐标 $y \rightarrow x$ 的传播子:

$$\langle x | e^{-iH(x^0 - y^0)t} | y \rangle \quad (2.82)$$

前面我们指出:

$$\phi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot x} |\mathbf{p}\rangle \quad (2.83)$$

可以类比于 $|\mathbf{x}\rangle$ 。所以:

$$\phi(\mathbf{x})e^{-iHx^0}|0\rangle = \phi(\mathbf{x})e^{-iEx^0}|0\rangle = e^{-iEt}|\mathbf{x}\rangle = |x\rangle \quad (2.84)$$

注意到实 K-G 场满足 $\phi^\dagger(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$ 。因此, 传播子可以写成:

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-iH(x^0 - y^0)t} | y \rangle &= \langle x | e^{-iHx^0} e^{iy^0} | y \rangle = \langle 0 | e^{iHx^0} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHx^0} e^{iy^0} \phi(\mathbf{y}) e^{-iy^0} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.85)$$

我们定义 Heisenberg 绘景下的两点关联函数为:

$$D(x - y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (2.86)$$

它的物理意义是: $\phi(y)|0\rangle$ 在 y 处产生一个粒子传播到 x 处由 $\langle 0 | \phi(x)$ 湮灭。其中:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}) \quad (2.87)$$

$$\phi(y) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} (a_{\mathbf{q}} e^{-iq \cdot y} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iq \cdot y}) \quad (2.88)$$

由于 $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$, 取复共轭有: $\langle 0 | a_{\mathbf{p}}^\dagger = 0$, 因此上式中的产生湮灭算符的四个乘积中只有:

$$\langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] + a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (2.89)$$

不为零。因此：

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.90)$$

它是一个 Lorentz 不变量，我们现在来证明这个结论。引入阶跃函数：

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.91)$$

于是：

$$\begin{aligned} \int dp^0 \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) &= \int dp^0 \delta((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \theta(p^0) \\ &= \int dp^0 \delta((p^0)^2 - E_p^2) \theta(p^0) \\ &= \int dp^0 \frac{1}{2E_p} \delta(p^0 - E_p) = \frac{1}{2E_p} \end{aligned} \quad (2.92)$$

其中 $\delta((p^0)^2 - E_p^2) = \frac{1}{\frac{d(p^0)^2}{dp^0}} \Big|_{p^0=E_p}$ 。上面使用到阶跃函数 $\theta(p^0)$ ，其目的是用来挑选出 $p^0 = +E_p$ 的正根。改写成四维积分后，所有的量都是 Lorentz 标量，所以关联函数也是 Lorentz 不变的：

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.93)$$

下面考虑关联函数 $D(x - y)$ 在类时、类空中的情形。

$x - y$ 是类时的： $t^2 - \mathbf{x}^2 > 0$

我们总可以选取一个参考系使得 $x^0 - y^0 = t, \mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$ ，此时有 $(x^0 - y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = t^2 > 0$ ，于是关联函数：

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p t} \\ &= 4\pi \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} t} \end{aligned} \quad (2.94)$$

因为 $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ，所以有 $dE = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}/E$ ，代入上式：

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{2E} e^{-iEt} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_m^\infty dE \frac{p}{2} e^{-iEt} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_m^\infty dE \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{2} e^{-iEt} \sim e^{-imt} \end{aligned} \quad (2.95)$$

由于时空中类时的两点间允许存在关联，所以存在非零的振荡因子是合理的。

$x - y$ 是类空的: $t^2 - \mathbf{x}^2 < 0$

我们总可以选取一个参考系使得 $x^0 - y^0 = 0, \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{r}$, 此时有 $(x^0 - y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = -\mathbf{r}^2 < 0$, 于是关联函数:

$$\begin{aligned} D(x - y) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip \cdot r} \\ &= \int_0^\infty d\rho \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} 2\pi p \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ir} = \frac{-i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty d\rho \frac{pe^{ipr}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (2.96)$$

延拓到复平面, 由因子 $1/\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 可知, $p = \pm im$ 是函数的两个奇点, 在选取积分围道时必须绕开。我们选择在上半平面选取积分围道, 做变量代换, 令 $\rho = -ip$, 我们得到:

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_m^\infty d\rho \frac{\rho e^{-\rho r}}{\sqrt{\rho^2 - m^2}} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-mr} \quad (2.97)$$

我们发现, 在光锥之外, 关联函数的积分按指数衰减, 但并不为零。这是否与狭义相对论相矛盾呢? 我们指出, 关联函数 $D(x - y)$ 在类空间隔中不为零并不意味着破坏因果性, 那么因果性在量子场论中该如何体现呢?

为了讨论真正的因果性, 我们应该知道, 关联函数 $D(x - y)$ 的物理意义是粒子从 y 点传播到 x 点的概率振幅, 而粒子在类空间隔中传播并不意味着因果性的破坏, 因果性应该是指在某一点的测量是否会影响在另一点的测量结果。

考虑如果 $x - y$ 是类空间隔, 则在 x 处的测量必须和在 y 处的测量互不影响。即当 $(x - y)^2 = \Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2 < 0$ 时, 在 x, y 处的两个物理量算符必须对易: $[O(x), O(y)] = 0$, 即先测量 x 处的物理量和先测量 y 处没有区别。

下面验证场算符对易子 $[\phi(x), \phi(y)]$ 在类空间隔中是否严格等于零。

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} \\ &\quad \times [(a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}), (a_q e^{-iq \cdot y} + a_q^\dagger e^{iq \cdot y})] \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_q}} \left([a_p, a_q] e^{-i(p \cdot x + q \cdot y)} + [a_p, a_q^\dagger] e^{i(q \cdot y - p \cdot x)} \right. \\ &\quad \left. + [a_p^\dagger, a_q] e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} + [a_p^\dagger, a_q^\dagger] e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} \right) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)}) \\ &= D(x - y) - D(y - x) \end{aligned} \quad (2.98)$$

当 $x - y$ 类空时, 由于因果性不再保证, 所以我们总可以进行 Lorentz 变换使得 $(x - y) \rightarrow (y - x)$, 即将 x, y 的前后顺序调换。因为关联函数 $D(x - y)$ 是 Lorentz 不变的, 所以在进行变换后关联函数保持不变, 有 $D(x - y) = D(y - x)$, 因此 $[\phi(x), \phi(y)] = 0$, 因果性得以保证。这样我们就得到, 在 Klein-Gordon 理论中, 光锥外一点的测量不影响到另一点的测量。

2.2.3 因果性的后果

考虑复 K-G 标量场：

$$\mathcal{L}_{\text{CKG}} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.99)$$

由于复的经典场量子化后不再是厄米的 ($\phi^\dagger \neq \phi$)，因此需要引入新的产生算符 b_p^\dagger ：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + b_p^\dagger e^{ip \cdot x}) \quad (2.100)$$

其中，产生湮灭算符的物理意义是： a_p 湮灭一个粒子， b_p^\dagger 产生一个反粒子。它们满足的对易关系为：

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad [b_p, b_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (2.101)$$

其余全部为 0。

下面我们将验证 CKG 场论中的因果性。前面指出：

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= D(x-y) - D(y-x) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.102)$$

其中，对关联函数 $D(x-y), D(y-x)$ 唯一有贡献的是 $\langle 0 | ab^\dagger | 0 \rangle$ 这一项，即产生一个反粒子 ($b^\dagger | 0 \rangle$) 和产生一个正粒子 ($\langle 0 | a = (a^\dagger | 0 \rangle)^\dagger$)，但粒子态和反粒子态的内积等于 0，故 $\langle 0 | ab^\dagger | 0 \rangle = 0$ 。而其它项含有 $a|0\rangle, b|0\rangle$ 及其复共轭，所以全部等于零。因此有 $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ 。

如果考虑：

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi^\dagger(y)] &= \langle 0 | [\phi(x), \phi^\dagger(y)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(y) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &\sim \langle 0 | (a + b^\dagger)(a^\dagger + b) | 0 \rangle - \langle 0 | (a^\dagger + b)(a + b^\dagger) | 0 \rangle \\ &\sim \langle 0 | aa^\dagger | 0 \rangle - \langle 0 | bb^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.103)$$

因此，保证因果性必须要求这两项在类空间隔中严格相消，则要求反粒子必须存在 (a, b 分别对应正反粒子)。此外，由于：

$$D(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.104)$$

其中 $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ 。两项严格相消必须要求正反粒子的 E_p 严格相等，即质量完全相同。总结来说，CKG 场论的因果性必须要求反粒子存在，且其质量与正粒子完全相同。

2.3 K-G 传播子

2.3.1 推迟传播子

进一步研究传播子 $\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$ 。假设 $x^0 > y^0$, 传播子可以写成:

$$\begin{aligned}\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{-ip \cdot (y-x)}) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)})\end{aligned}\quad (2.105)$$

分析其中的 $(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)})$ 一项:

$$e^{-ip \cdot (x-y)} = e^{-i(p^0(x^0-y^0)-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} = e^{-i(E_p(x^0-y^0)-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \Big|_{p^0=+E_p} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned}e^{ip \cdot (x-y)} &= e^{i(p^0(x^0-y^0)-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \Big|_{p^0=+E_p} = e^{-i((-E_p)(x^0-y^0)-(-\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \\ &= e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_p, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}}\end{aligned}\quad (2.107)$$

上式中的替换是由于积分在变量替换 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ 下不变, 因此:

$$\begin{aligned}\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-i(p^0(x^0-y^0)-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} - e^{i(p^0(x^0-y^0)-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))}) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-i(p^0(x^0-y^0)-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))} - e^{i(p^0(x^0-y^0)+\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))}) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} (e^{-i(p^0(x^0-y^0))} - e^{i(p^0(x^0-y^0))})\end{aligned}\quad (2.108)$$

所以传播子:

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=+E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-E_p} \right\} \quad (2.109)$$

若要计算这个式子, 我们首先需要回顾使用复变函数计算定积分的基本定理。(2.109) 式是 Peskin 书中的形式, 但我们将采取更直观的表达形式 (2.108) 式:

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} (e^{-i(p^0(x^0-y^0))} - e^{i(p^0(x^0-y^0))}) \quad (2.110)$$

需要注意, $e^{-ip \cdot x} = e^{-i(p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ 是平面波展开的标准形式, 因此 $e^{-i(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ 中的 E_p 是正能量。

留数定理: 解析函数 $f(z)$ 在复平面上的回路积分等于该回路所包含的奇点的留数之和的 $2\pi i$ 倍:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z), b_k] \quad (2.111)$$

其中 Γ 是正向封闭曲线 (围道), 而留数 $\text{res}[f(z), b_k] = a_{-1}$ 是解析函数 $f(z)$ 在以奇点 b_k 为圆心的环域内展开的洛朗级数的 -1 次幂前的系数。一阶奇点 (极点) 留数可以这样计算:

$$\text{res}[f(z), b_k] = \lim_{z \rightarrow b_k} (z - b_k)f(z) \quad (2.112)$$

下面还要介绍三个引理。

小圆弧引理: 如果函数 $f(z)$ 在 $z = a$ 点的空心邻域内连续, 并且在 $\theta_1 \leq \arg(z - a) \leq \theta_2$ 中, 当 $|z - a| \rightarrow 0$ 时, $(z - a)f(z) \rightarrow k$, 则:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.113)$$

其中 C_δ 是以 $z = a$ 为圆心, δ 为半径, 张角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的圆弧, $|z - a| = \delta$ 。简单来说, 就是如果我们在实轴或虚轴上遇到奇点时, 可以做一个小半圆弧绕开它, 函数在这个小半圆弧上的积分可以按照小圆弧引理来计算, 并且积分结果通常为 0。

大圆弧引理: 设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续, 在 $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ 中, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $zf(z) \rightarrow K$, 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.114)$$

其中 C_R 是以原点为圆心, R 为半径, 张角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的圆弧, $|z| = R$ 。简单来说, 就是如果我们要在上半平面或下半平面做一个无穷大的半圆弧来构成一个闭合围道, 则函数在这个大圆弧上的积分可以按照大圆弧引理来计算, 并且一般情况下都等于 0。

Jordan 引理: 设在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围 (上半平面) 内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z) \rightarrow 0$, 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0 \quad (2.115)$$

其中 $p > 0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的半圆弧。这是上半平面的 Jordan 引理, 如果将 e^{ipz} 中的 z 换成 $-z, \pm iz$ 即可得到下半平面和右、左半平面的 Jordan 引理。

现在我们来计算传播子 (2.110) 式。根据 Jordan 引理的条件, 我们需要 $e^{-ip^0(x^0 - y^0)}$ 呈现指数衰减的形式, 此时积分也将呈现指数衰减。由于假设 $x^0 > y^0$, 所以当我们从下半平面无穷远处绕行围道时, p^0 具有非常大的虚部, 和 $-i$ 相乘后是 e^{-mt} 的指数衰减形式。所以我们应当选取下半平面的围道, 并包围住实轴上的两个极点。

我们选取的围道是: 从实轴上的 $-R$ 点到 $-E_p$ 点, 在 $-E_p$ 点处做一小圆弧, 规定从上方绕过 $-E_p$ 点, 再继续沿实轴到 $+E_p$ 点, 在 $+E_p$ 点处做一小圆弧, 规定从上方绕过 $+E_p$ 点, 继续沿实轴到 $+R$ 点, 然后从下半平面做半圆弧绕回到实轴上的 $-R$ 点。

现在我们来证明:

$$\frac{1}{2E_p} \left(e^{-i(E_p(x^0 - y^0))} - e^{i(E_p(x^0 - y^0))} \right) = \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{(p^0)^2 - (E_p)^2} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \quad (2.116)$$

对于右式:

$$\int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{(p^0)^2 - (E_p)^2} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = -\frac{1}{2E_p} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - E_p} - \frac{1}{p^0 + E_p} \right) e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \quad (2.117)$$

计算围道积分:

$$-\frac{1}{2E_p} \oint \frac{dp_0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - E_p} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} - \frac{1}{p^0 + E_p} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \right) \quad (2.118)$$

由下半平面 Jordan 引理可知, 半圆弧上的积分等于 0, 所以围道积分等于沿实轴的积分:

$$\oint (\cdots) = \int (\cdots) \quad (2.119)$$

计算留数:

$$\text{res}(-E_p) = \lim_{p^0 \rightarrow -E_p} (p^0 + E_p) \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^0 + E_p} = e^{iE_p(x^0 - y^0)} \quad (2.120)$$

$$\text{res}(+E_p) = \lim_{p^0 \rightarrow +E_p} (p^0 - E_p) \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^0 - E_p} = e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \quad (2.121)$$

利用 Cauchy 积分公式:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{(p^0)^2 - (E_p)^2} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} &= -\frac{1}{2E_p} \oint \frac{dp_0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - E_p} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} - \frac{1}{p^0 + E_p} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2E_p} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i (\text{res}(+E_p) - \text{res}(-E_p)) \right) \\ &= \frac{1}{2E_p} (e^{-iE_p(x^0 - y^0)} - e^{iE_p(x^0 - y^0)}) \end{aligned} \quad (2.122)$$

第二行前的负号来源于积分围道是沿顺时针方向。于是:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip \cdot (x-y)} (e^{-i(E_p(x^0 - y^0))} - e^{i(E_p(x^0 - y^0))}) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-y)} \int \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{(p^0)^2 - (E_p)^2} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (2.123)$$

其中使用了四维动量内积 $p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$ 及相对论能量公式 $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ 。

以上我们就得到了传播子 $\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ 表达成四维积分的形式。需要注意的是, 我们在计算传播子时规定了围道的选取: 从上半平面绕过极点。

现在, 我们就可以定义推迟传播子:

$$D_R(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.124)$$

并规定绕开极点的规则: 从上半平面绕过极点, 围道积分回路包含两个极点。其中, θ 函数保证 $D_R(x - y)$ 是在 $x^0 > y^0$ 的条件下写出的。

$D_R(x - y)$ 是 Klein-Gordon 场的格林函数算符:

$$(\partial^2 + m^2) D_R(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y) \quad (2.125)$$

证明：首先说明 $\theta(x)$ 函数和 $\delta(x)$ 函数的性质：

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x) \quad f(x) \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x) \frac{df(x)}{dx} \quad (2.126)$$

已知：

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \quad (2.127)$$

而：

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} (a_p e^{ip \cdot \mathbf{x}} - a_p^\dagger e^{-ip \cdot \mathbf{x}}) \quad (2.128)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} (a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^\dagger e^{ip \cdot x}) \quad (2.129)$$

将其轭动量作用在基态右矢及其共轭左矢上，得到：

$$\pi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (+i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} a_p^\dagger e^{ip \cdot x} | 0 \rangle \quad (2.130)$$

$$\langle 0 | \pi(x) = \langle 0 | \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} a_p e^{-ip \cdot x} \quad (2.131)$$

因此：

$$\begin{aligned} \langle 0 | \pi(x) \phi(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} (\langle 0 | a_p a_q^\dagger | 0 \rangle e^{i(q \cdot y - p \cdot x)}) \\ &= \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{E_p}{E_q}} [(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{i(q \cdot y - p \cdot x)}] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2} e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (2.132)$$

其共轭形式为：

$$\langle 0 | \phi(y) \pi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} e^{ip \cdot (x-y)} \quad (2.133)$$

所以：

$$\langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2} [e^{-ip \cdot (x-y)} + e^{ip \cdot (x-y)}] \quad (2.134)$$

且：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial x^0} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}) \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (-iE_p) (e^{-ip \cdot (x-y)} + e^{ip \cdot (x-y)}) \\ &= \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.135)$$

因此:

$$\begin{aligned}
 (\partial^2 + m^2)D_R(x - y) &= (\partial^2 + m^2)\theta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 &= (\partial^2\theta(x^0 - y^0))\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 &\quad + 2(\partial_\mu\theta(x^0 - y^0))(\partial^\mu\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) \\
 &\quad + \theta(x^0 - y^0)(\partial^2 + m^2)\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

其中, 第一项:

$$\begin{aligned}
 (\partial^2\theta(x^0 - y^0))\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle &= \left(\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}\theta(x^0 - y^0) \right) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\delta(x^0 - y^0) \right) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
 &= -\delta(x^0 - y^0) \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \right) \\
 &= -\delta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

第二项:

$$\begin{aligned}
 2(\partial_\mu\theta(x^0 - y^0))(\partial^\mu\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) &= 2(\partial_0\theta(x^0 - y^0))(\partial^0\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) \\
 &\quad + 2(\partial_i\theta(x^0 - y^0))(\partial^i\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) \\
 &= 2\delta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

其中, $\partial_i\theta(x^0 - y^0) = 0$ 。第三项: 根据 K-G 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$, 第三项等于 0。所以:

$$\begin{aligned}
 (\partial^2 + m^2)D_R(x - y) &= -\delta(x^0 - y^0) \cdot (-i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})) + 2\delta(x^0 - y^0)(-i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\
 &= -i\delta^{(4)}(x - y)
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

$\tilde{D}_R(p)$ 是动量空间推迟传播子, 它可由坐标空间的推迟传播子 $D_R(x - y)$ 做四维 Fourier 变换得到:

$$D_R(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_R(p) \tag{2.140}$$

将上面证明过的: $(\square + m^2)D_R(x - y) = -i\delta^{(4)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 代入 (2.140) 式:

$$\begin{aligned}
 (\square + m^2)D_R(x - y) &= (\square + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_R(p) \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [(-i)^2 p_\mu p^\mu + m^2] e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_R(p) \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-p^2 + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{D}_R(p) \\
 &= -i\delta^{(4)}(x - y)
 \end{aligned} \tag{2.141}$$

即可得到:

$$(-p^2 + m^2)\tilde{D}_R = -i \tag{2.142}$$

则：

$$\tilde{D}_R(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (2.143)$$

推迟传播子 $D_R(x - y)$ 是在 $x^0 > y^0$ 的条件下定义的。类似地，我们还可以定义超前传播子 $D_A(x - y)$ ，要求 $x^0 < y^0$ ，规定从下半平面绕过极点，大圆弧围道位于上半平面。

2.3.2 Feynman 传播子

在量子场论中，最常用的传播子是 Feynman 传播子：

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.144)$$

并规定从下半平面绕过极点 $-E_p$ ，从上半平面绕过极点 $+E_p$ 。这样，不论是超前还是推迟，即不论是从上半平面还是从下半平面做大圆弧围道，积分结果都不为 0。大圆弧围道的选取方式与 x^0, y^0 的次序有关，这是为了保证积分随时间指数衰减，进而能使用 Jordan 引理。

若 $x^0 > y^0$ ，需从下半平面环绕大围道，包含极点 $+E_p$ ，积分结果不为 0；若 $x^0 < y^0$ ，需从上半平面环绕大围道，包含极点 $-E_p$ ，积分结果也不为 0。

Feynman 考虑把极点处的半圆推平，即把极点分别沿虚轴向上、下移动一小段 ϵ ，这样就可以沿实轴积分而不用做小圆弧了。其代价是给极点增加了一个小的虚部： $i\epsilon$ ，这称为 **Feynman 处方**。原来极点位于实轴上： $-E_p, +E_p$ ，现在极点位于： $-E_p + i\epsilon, +E_p - i\epsilon$ 。可以证明，此时：

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad (2.145)$$

此时不用再强调绕行规则，而是完全沿实轴对 p^0 积分。

类似地，我们也能得到标量场的动量空间 Feynman 传播子：

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.146)$$

我们也可以使用两点关联函数定义 Feynman 传播子：

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \begin{cases} D(x - y) & \text{when } x^0 > y^0 \\ D(y - x) & \text{when } x^0 < y^0 \end{cases} \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.147)$$

其中 T 称为**编时算符**，最先发生的事件放在最右侧，即最远离算符，最后发生的事件放在最左侧，即最邻近算符。例如，当 $x^0 > y^0$ 时， y^0 最先发生，所以 $\theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ 中 $\phi(y)$ 放置在最右侧。从上式可以看出，Feynman 传播子是一半超前，一半推迟的传播子。

下面我们来证明：

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (2.148)$$

等式右侧：

$$\begin{aligned}\langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0)\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0)\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0)\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{+ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip \cdot (x-y)} \left[e^{-iE_p(x^0 - y^0)}\theta(x^0 - y^0) + e^{iE_p(x^0 - y^0)}\theta(y^0 - x^0) \right]\end{aligned}\quad (2.149)$$

最后一行对第二项做了 $-\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ 的替换。现在我们要证明：

$$-\frac{1}{2E_p} \left[e^{-iE_p(x^0 - y^0)}\theta(x^0 - y^0) + e^{iE_p(x^0 - y^0)}\theta(y^0 - x^0) \right] = \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} \quad (2.150)$$

其中 $\epsilon \rightarrow 0$ 。应用 Feynman $i\epsilon$ 处方后，实轴上的极点移动至 $E_p - i\epsilon$ 和 $-(E_p - i\epsilon)$ 。令 $\eta = \frac{\epsilon}{2E_p}$ ，忽略 ϵ^2 的高阶项，上式右侧化简为：

$$\frac{1}{2E_p} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - (E_p - i\eta)} - \frac{1}{p^0 - [-(E_p - i\eta)]} \right) e^{ip^0(x^0 - y^0)} \quad (2.151)$$

即：

$$\frac{1}{2E_p} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - (E_p - i\eta)} - \frac{1}{p^0 + (E_p - i\eta)} \right) e^{ip^0(x^0 - y^0)} \quad (2.152)$$

当 $x^0 > y^0$ 时，我们选取的积分围道是实轴 + 上半平面圆弧（此时 p^0 有很大的虚部，保证 $e^{ip^0(x^0 - y^0)}$ 呈指数衰减），包含有极点 $-E_p + i\eta$ ，积分路径沿逆时针方向，保证沿实轴的积分从 $-p^0 \rightarrow p^0$ 。计算如下围道积分：

$$\frac{1}{2E_p} \oint \frac{dp^0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - (E_p - i\eta)} - \frac{1}{p^0 + (E_p - i\eta)} \right) e^{ip^0(x^0 - y^0)} \quad (2.153)$$

使用留数定理：

$$\begin{aligned}\oint (\dots) &= \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \operatorname{res}(-E_p + i\eta) \\ &= \frac{1}{2E_p} \lim_{p^0 \rightarrow -E_p + i\eta} \left(-(p^0 + E_p - i\eta) \frac{e^{ip^0(x^0 - y^0)}}{p^0 + E_p - i\eta} \right) \\ &= -\frac{1}{2E_p} e^{i(-E_p + i\eta)(x^0 - y^0)}\end{aligned}\quad (2.154)$$

因为 $\eta \rightarrow 0$ ，所以上式化为： $-\frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(x^0 - y^0)}$ 。根据 Jordan 引理，圆弧上积分为零，因此围道积分等于沿实轴的积分，上式化为：

$$\int (\dots) = -\frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \quad (2.155)$$

当 $x^0 < y^0$ 时，我们选取的积分围道是实轴 + 下半平面圆弧，包含有极点 $E_p - i\eta$ ，积分路径沿顺时针方向，保证沿实轴的积分从 $-p^0 \rightarrow p^0$ 。计算如下围道积分：

$$\frac{1}{2E_p} \oint \frac{dp^0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - (E_p - i\eta)} - \frac{1}{p^0 + (E_p - i\eta)} \right) e^{ip^0(x^0 - y^0)} \quad (2.156)$$

使用留数定理:

$$\begin{aligned} \oint(\cdots) &= -\frac{1}{2E_p} \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \operatorname{res}(E_p - i\eta) \\ &= -\frac{1}{2E_p} \lim_{p^0 \rightarrow -E_p + i\eta} \left((p^0 - E_p + i\eta) \frac{e^{ip^0(x^0 - y^0)}}{p^0 - E_p + i\eta} \right) \\ &= -\frac{1}{2E_p} e^{i(E_p - i\eta)(x^0 - y^0)} \end{aligned} \quad (2.157)$$

其中, 负号来源于围道沿顺时针方向。因为 $\eta \rightarrow 0$, 所以上式化为: $-\frac{1}{2E_p} e^{iE_p(x^0 - y^0)}$ 。根据 Jordan 引理, 圆弧上积分为零, 因此围道积分等于沿实轴的积分, 上式化为:

$$\int(\cdots) = -\frac{1}{2E_p} e^{iE_p(x^0 - y^0)} \quad (2.158)$$

因此:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} &= \frac{1}{2E_p} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \left(\frac{1}{p^0 - (E_p - i\eta)} - \frac{1}{p^0 + (E_p - i\eta)} \right) e^{ip^0(x^0 - y^0)} \\ &= \theta(x^0 - y^0) \left(-\frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \right) + \theta(y^0 - x^0) \left(-\frac{1}{2E_p} e^{iE_p(x^0 - y^0)} \right) \end{aligned} \quad (2.159)$$

得证:

$$-\frac{1}{2E_p} \left[e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \theta(x^0 - y^0) + e^{iE_p(x^0 - y^0)} \theta(y^0 - x^0) \right] = \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} \quad (2.160)$$

由于沿实轴 p^0 积分, 所以可以做代换: $p^0 \rightarrow -p^0$, 上式右侧可以化为:

$$-\int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0)^2 - E_p^2 + i\epsilon} = -\int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.161)$$

因此:

$$\frac{1}{2E_p} \left[e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \theta(x^0 - y^0) + e^{iE_p(x^0 - y^0)} \theta(y^0 - x^0) \right] = \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.162)$$

所以:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\phi(x)\phi(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{ip \cdot (x-y)} \left[e^{-iE_p(x^0 - y^0)} \theta(x^0 - y^0) + e^{iE_p(x^0 - y^0)} \theta(y^0 - x^0) \right] \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (x-y)} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (2.163)$$

得证。

Chapter 3

Dirac 旋量场量子化

3.1 Lorentz 群的旋量表示

在 Lorentz 变换下，不同类型的场按照不同的形式变换：

- (1) 标量场： $\phi(x) \xrightarrow{\Lambda} \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$, 1 是 Lorentz 群的标量表示；
- (2) 矢量场： $A^\mu(x) \xrightarrow{\Lambda} A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$, $\Lambda^\mu{}_\nu$ 是 Lorentz 群的矢量表示；
- (3) 张量场： $T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda} T'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x)$ ；
- (4) 旋量场：下面我们将要构造 Lorentz 群的旋量表示。

注意，这里 $\phi(\cdot)$ 括号内整体是旧坐标， $\phi'(\cdot)$ 括号内整体是新坐标，所以 $\phi'(x)$ 中 x 是新坐标，而 $\phi(\Lambda^{-1}x)$ 中 x 是新坐标， $\Lambda^{-1}x$ 是旧坐标。

普遍地，场在 Lorentz 变换下的形式可以写成：

$$\Phi_a(x) \xrightarrow{\Lambda} \Phi'_a(x) = M_{ab}(\Lambda) \Phi_b(\Lambda^{-1}x)$$

其中 $M_{ab}(\Lambda)$ 是 **Lorentz 群的有限维群表示**，对于标量场是 1，对于矢量场是 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 。

Lorentz 群是一个李群，李群的表示可以由李代数生成。李代数是指，对于任何一个连续群，其在单位元附近的无穷小变换可以构成一个线性矢量空间，这个矢量空间称为李代数，生成元就是这个矢量空间的基底。

因为 Lorentz 变换是连续变换，所以 Lorentz 群是一个连续群。Lorentz 群可以通过指数映射得到群表示，指数映射中包含有生成元。所以我们可以说生成元生成了群表示，并且生成元满足李代数，这种李代数就是生成元之间的对易关系。下面我们来举例说明指数映射和生成元之间的关系。

空间平移变换

空间平移变换可以表示为: $f(x) \rightarrow f'(x) = f(x+a)$, 对 $f(x+a)$ 做 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x) + a \frac{d}{dx} f(x) + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \dots \\ &= \left(1 + a \frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots \right) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(a \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \quad (3.1) \\ &= \exp \left(a \frac{d}{dx} \right) f(x) = U(a) f(x) \end{aligned}$$

其中平移算符为:

$$U(a) = \exp \left(a \frac{d}{dx} \right) = \exp (ip_x a) \quad (3.2)$$

所以动量是空间平移变换的生成元, 它满足的李代数为 $[p_i, p_j] = 0$ 。

空间转动变换

在转动变换下, 矢量场的空间分量: $A^i(x) \rightarrow A'^i(x) = R^{ij} A^j(R^{-1}x)$, 其中 $R_{3 \times 3}$ 满足 $R^T R = RR^T = \mathbf{1}_{3 \times 3}$, 它是转动群的三维矢量表示。

转动群的三维矢量表示可以映射为指数: $R = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}$, 其中 \vec{J} 是生成元, 满足李代数 $[J^i, J^j] = i\varepsilon^{ijk} J^k$, 其中 ε^{ijk} 称为群的结构常数。从李代数可以看出, 空间转动群的生成元 \vec{J} 也就是角动量。

一个连续的转动可以看作是无穷个无穷小转动的叠加:

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - i\delta\vec{\theta} \cdot \vec{J} \right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - i\frac{\vec{\theta} \cdot \vec{J}}{N} \right)^N = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} \quad (3.3)$$

这就是指数表示的来源。例如, 绕 \hat{x} 轴的转动, 其生成元为:

$$J_x = yp_z - zp_y = i \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.4)$$

若转动角度为 $\delta\theta$, 当转角为无穷小时, 有:

$$R = e^{-i\delta\theta_x J_x} = e^{-i\delta\theta J_x} \sim 1 - i\delta\theta J_x = 1 + \delta\theta \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.5)$$

作用在 $A^i(x, y, z)$ 上时, 有:

$$A^i(x) \rightarrow A'^i(x') = RA^i(x) \quad (3.6)$$

其中 $x' = Rx$, 上式即:

$$A^i(x) \rightarrow A'^i(x) = RA^i(R^{-1}x) \quad (3.7)$$

其中, R 表示对矢量场分量的旋转, R^{-1} 表示对矢量场坐标的旋转。

我们首先考虑坐标变换, 而不考虑场分量的变换, 即 $A^i(x) \rightarrow A^i(R^{-1}x)$, 而非 $A'^i(x)$ 。将算符 (3.5) 式作用于矢量 $A^i(x)$:

$$RA^i(x, y, z) = \left(1 + \delta\theta \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) A^i(x, y, z) = A^i(x, y + z\delta\theta, z - y\delta\theta) \quad (3.8)$$

上式使用了一阶近似的展开式: $f(x + h) \sim f(x) + h \frac{\partial f}{\partial x}$ 。当 θ 为有限小时:

$$RA^i(x, y, z) = A^i(x, y \cos\theta + z \sin\theta, z \cos\theta - y \sin\theta) = A^i(R^{-1}x) \quad (3.9)$$

所以, 绕 \hat{x} 轴的转动可以表达为矩阵形式:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

并且有 $R(\theta) = R(\theta + 2\pi)$ 。从以上过程中可以看出, 旋转算符 R 的微分形式从外作用于矢量场 $A^i(x)$ 相当于 R^{-1} 的矩阵形式作用于矢量场的坐标 x 。

而对于场分量 A^i 的变换, 我们需要将生成元 J_x 表示为 3×3 的矩阵形式, 再将其作用于 A^i 的三个分量之上。已知:

$$J_x = i \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

所以有:

$$\begin{pmatrix} A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} \sim 1 - i\delta\theta J_x \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 - \delta\theta A^3 \\ A^3 + \delta\theta A^2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

对于有限小变换:

$$\begin{pmatrix} A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \cos\theta - A^3 \sin\theta \\ A^3 \cos\theta + A^2 \sin\theta \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

其中, $A'^i = A'^i(x)$, $A^i = A^i(R^{-1}x)$ 。

自旋 (内禀空间的转动)

自旋是内禀空间中的转动, 转动群表示的指数映射为 $U(\theta) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}}$, 其中 $\vec{\sigma}$ 是三个 Pauli 矩阵, 它们是转动群的生成元, 满足李代数 $[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = i\varepsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}$ 。

自旋对应的群表示的指数映射可以展开为：

$$U(\theta) = 1 - i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 (\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma})^2 + \dots \quad (3.14)$$

对于第三项：

$$(\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma})^2 = \theta^i \sigma^i \theta^j \sigma^j = \frac{1}{2} (\theta^i \theta^j \sigma^i \sigma^j) + \frac{1}{2} (\theta^i \theta^j \sigma^j \sigma^i) = \frac{1}{2} \theta^i \theta^j \{\sigma^i, \sigma^j\} = \vec{\theta}^2 \quad (3.15)$$

上面是 $\vec{\theta}, \vec{\sigma}$ 的分量相乘， θ 可以随意换序，但 σ^i 必须在 σ^j 前。第二步将 i, j 指标互换，最后一步使用了 Pauli 矩阵的反对易性： $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \mathbf{1}_{2 \times 2}$ 。

如果 $\vec{\theta} = (0, 0, \theta_z)$ ，则上式化为：

$$U(\theta_z) = 1 - i\theta_z \frac{\sigma_3}{2} - \frac{1}{8} \theta_z^2 + \dots = \cos \frac{\theta}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.16)$$

最后一步是三角函数的 Taylor 展开。可以看出，自旋满足：

$$U(\theta + 2\pi) = -U(\theta) \quad U(\theta + 4\pi) = U(\theta) \quad (3.17)$$

分析这两个例子，我们可以发现它们的相似之处：

- (1) 都可使用指数映射表示群元；
- (2) 李代数类似，结构常数相同。

但也有区别：空间转动在转动 2π 后复原，而自旋在转动 4π 后复原。

3.1.1 Lorentz 群的表示

通过上面的讨论，我们知道，角动量 J 是转动变换群的生成元。一般的 Lorentz 变换可以看作是四维 Minkowski 空间中的转动，因此 Lorentz 群的生成元也应该是角动量，只不过它是四维形式的。我们现在就要将以上讨论从三维推广到四维。

三维空间中，角动量 J 是转动群的生成元：

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p} \quad (3.18)$$

并且有 $\vec{J} = -\vec{p} \times \vec{x}$ 。使用 Levi-Civita 符号写成分量的形式：

$$\begin{aligned} J^i &= \varepsilon^{ijk} x^j p^k = -\varepsilon^{ijk} p^j x^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (x^j p^k - x^k p^j) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} [x^j (-i\nabla^k) - x^k (-i\nabla^j)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

即：

$$J^i = -\frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} (x^j \nabla^k - x^k \nabla^j) = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk} \quad (3.20)$$

我们记:

$$J^{jk} = -i(x^j \nabla^k - x^k \nabla^j) \quad (3.21)$$

容易看出, 上式满足 $J^{jk} = -J^{kj}$, 具有反对称的性质。

现在我们推广到四维形式, 引入四维张量 $J^{\mu\nu}$:

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (3.22)$$

$J^{\mu\nu}$ 是一个全反对称张量, 对角线上的元素全为 0, 其它区域元素沿对角线反对称。独立分量共有 6 个, 其中 $J^{12,23,13}$ 描述空间中的转动, 而 $J^{01,02,03}$ 是 Lorentz boost。这里四维形式和三维形式相差了一个负号, 这是因为 $\partial^i = -\partial_i = -\frac{\partial}{\partial x^i} = -\nabla^i$ 。

$J^{\mu\nu}$ 是 Lorentz 群的生成元, 它满足的李代数为:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \quad (3.23)$$

称为 **Lorentz 代数**。而 **Lorentz 群的群表示**为:

$$M(\Lambda) = e^{-i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}} \quad (3.24)$$

3.1.2 Lorentz 群的矢量表示

下面我们来验证 $J^{\mu\nu}$ 的李代数, 我们将借助矢量表示的形式证明。考虑无穷小 Lorentz 矢量变换:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (3.25)$$

其中 $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} \omega^\sigma{}_\nu$, 且 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ 是反对称的, 共有 6 个独立分量。 ω 类似于三维空间旋转变换中的无穷小转角 $\delta\theta$, 可以做如下类比——对于三维空间中的普通矢量:

$$A^i(x, y, z) \rightarrow A'^i(x', y', z') = R^{ij} A^j(x, y, z) = (\delta^{ij} - i\delta\theta^k (J^k)^{ij}) A^j(x, y, z) \quad (3.26)$$

其中, $(J^k)^{ij}$ 表示生成元矩阵 J^k 的矩阵元。而对于四维 Lorentz 矢量:

$$\begin{aligned} A^\alpha(t, x, y, z) &\rightarrow A'^\alpha(t', x', y', z') = \Lambda^\alpha{}_\beta A^\beta(t, x, y, z) \\ &= \left(\delta^\alpha{}_\beta - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \right) A^\beta(t, x, y, z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

这里花写的 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 是矢量表示的生成元, 而正体的 $J^{\mu\nu}$ 表示任意类型的 Lorentz 群的生成元。(3.27) 式相较于 (3.26) 式的因子 $\frac{1}{2}$ 来源于张量关于指标 $\mu\nu$ 的反对称性。

$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$ 是 Lorentz 群矢量表示生成元的矩阵形式。 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 是一个 4×4 全反对称张量, 其六个独立分量分别对应沿 x, y, z 三个方向的转动与沿 x, y, z 三个方向的 Lorentz boost。类似地, $\omega_{\mu\nu}$ 表示转动和 boost 的三个角度和三个增速。空间转动与 Lorentz boost 都可以使用矩阵的形式来表示, $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$ 中的 $\mu\nu$ 指标表示空间转动与 boost 的 6 个矩阵, 而 $\alpha\beta$ 指标正是表示这些矩阵

的矩阵元。下面我们将要通过矢量表示验证 $J^{\mu\nu}$ 满足的李代数对易关系。已知无穷小变换的 ω^{μ}_{ν} 可以表示为：

$$\begin{aligned}\omega^{\alpha}_{\beta} &= g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\beta} - g^{\alpha\mu}\omega_{\beta\mu}) = \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^{\nu}_{\beta} - g^{\alpha\mu}\omega_{\nu\mu}\delta^{\nu}_{\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\mu}\omega_{\mu\nu}\delta^{\nu}_{\beta} - g^{\alpha\nu}\omega_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{\beta}) = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\alpha}) \\ &= \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(-i)(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\alpha})\end{aligned}\quad (3.28)$$

其中第一步使用了 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性，第三步中进行了指标替换，将 μ, ν 互换，再将 $\omega_{\mu\nu}$ 提出括号。定义：

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = i(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\alpha}) \quad (3.29)$$

为 Lorentz 群矢量生成元的矩阵表示。于是，对易关系可以这样计算：

$$\begin{aligned}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]^{\alpha}_{\beta} &= (J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\gamma}(J^{\rho\sigma})^{\gamma}_{\beta} - (J^{\rho\sigma})^{\alpha}_{\gamma}(J^{\mu\nu})^{\gamma}_{\beta} \\ &= i^2(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\gamma} - \delta^{\mu}_{\gamma}g^{\nu\alpha})(g^{\rho\gamma}\delta^{\sigma}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\beta}g^{\sigma\gamma}) \\ &\quad - i^2(g^{\rho\alpha}\delta^{\sigma}_{\gamma} - \delta^{\rho}_{\gamma}g^{\sigma\alpha})(g^{\mu\gamma}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\gamma})\end{aligned}\quad (3.30)$$

第一项：

$$\begin{aligned}-g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\gamma}g^{\rho\gamma}\delta^{\sigma}_{\beta} + g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta}g^{\sigma\gamma} + \delta^{\mu}_{\gamma}g^{\nu\alpha}g^{\rho\gamma}\delta^{\sigma}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\gamma}g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}g^{\sigma\gamma} \\ = -g^{\mu\alpha}g^{\rho\nu}\delta^{\sigma}_{\beta} + g^{\mu\alpha}g^{\sigma\nu}\delta^{\rho}_{\beta} + g^{\nu\alpha}g^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\sigma\mu}\delta^{\rho}_{\beta} \\ = -g^{\nu\rho}g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}\end{aligned}\quad (3.31)$$

上面用到了度规张量的对称性： $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ 。同理，第二项：

$$\begin{aligned}-g^{\rho\alpha}\delta^{\sigma}_{\gamma}g^{\mu\gamma}\delta^{\nu}_{\beta} + g^{\rho\alpha}\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\gamma} + \delta^{\rho}_{\gamma}g^{\sigma\alpha}g^{\mu\gamma}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\gamma}g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\gamma} \\ = -g^{\rho\alpha}g^{\mu\sigma}\delta^{\nu}_{\beta} + g^{\rho\alpha}g^{\nu\sigma}\delta^{\mu}_{\beta} + g^{\sigma\alpha}g^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\beta} - g^{\sigma\alpha}g^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\beta} \\ = -g^{\sigma\mu}g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + g^{\rho\mu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + g^{\sigma\nu}g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}_{\beta} - g^{\rho\nu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}\end{aligned}\quad (3.32)$$

所以：

$$\begin{aligned}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]^{\alpha}_{\beta} &= (-g^{\nu\rho}g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + g^{\mu\rho}g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta}) \\ &\quad - (-g^{\sigma\mu}g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + g^{\rho\mu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + g^{\sigma\nu}g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}_{\beta} - g^{\rho\nu}g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}) \\ &= g^{\nu\rho}(g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}_{\beta} - g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}) + g^{\mu\rho}(g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} - g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}) \\ &\quad + g^{\nu\sigma}(g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}) + g^{\mu\sigma}(g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta})\end{aligned}\quad (3.33)$$

再代入： $(J_{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} = i(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\alpha})$ ，得：

$$g^{\sigma\alpha}\delta^{\mu}_{\beta} - g^{\mu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} = -i(J^{\sigma\mu})^{\alpha}_{\beta} \quad g^{\nu\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} - g^{\sigma\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} = -i(J^{\nu\sigma})^{\alpha}_{\beta} \quad (3.34)$$

$$g^{\mu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - g^{\rho\alpha}\delta^{\mu}_{\beta} = -i(J^{\mu\rho})^{\alpha}_{\beta} \quad g^{\rho\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} = -i(J^{\rho\nu})^{\alpha}_{\beta} \quad (3.35)$$

所以：

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]^{\alpha}_{\beta} = -ig^{\nu\rho}(J^{\sigma\mu})^{\alpha}_{\beta} - ig^{\mu\rho}(J^{\nu\sigma})^{\alpha}_{\beta} - ig^{\nu\sigma}(J^{\mu\rho})^{\alpha}_{\beta} - ig^{\mu\sigma}(J^{\rho\nu})^{\alpha}_{\beta} \quad (3.36)$$

考虑到反对称性 $\mathcal{J}^{\sigma\mu} = -\mathcal{J}^{\mu\sigma}$, 所以:

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}]^\alpha_\beta &= ig^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\mu\sigma})^\alpha_\beta - ig^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^\alpha_\beta - ig^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^\alpha_\beta + ig^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\nu\rho})^\alpha_\beta \\ &= i[g^{\nu\rho}(\mathcal{J}^{\mu\sigma})^\alpha_\beta - g^{\mu\rho}(\mathcal{J}^{\nu\sigma})^\alpha_\beta - g^{\nu\sigma}(\mathcal{J}^{\mu\rho})^\alpha_\beta + g^{\mu\sigma}(\mathcal{J}^{\nu\rho})^\alpha_\beta] \end{aligned} \quad (3.37)$$

因此:

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\mathcal{J}^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\rho})$$

这就是 Lorentz 群生成元的李代数 (3.23) 式。

需要注意的是, (3.27) 式仅是 Lorentz 矢量的变换, 且仅在矢量中可以写出诸如 $\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta$ 这样的形式, 故 (3.29) 式仅是矢量表示的生成元。将上述过程从无限小推广至有限小, 我们就得到了 **Lorentz 群的矢量表示**:

$$\Lambda^\mu_\nu = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu_\nu\right) \quad (3.38)$$

因为 $\omega_{\alpha\beta}, \mathcal{J}^{\alpha\beta}$ 是全反对称张量, 所以沿某个方向做转动或 boost 时将有 $\omega_{\alpha\beta}, \omega_{\beta\alpha}, \mathcal{J}^{\alpha\beta}, \mathcal{J}^{\beta\alpha}$ 四项的贡献, 即:

$$\Lambda^\mu_\nu = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu_\nu - \frac{i}{2}\omega_{\beta\alpha}(\mathcal{J}^{\beta\alpha})^\mu_\nu\right) = \exp(-i\omega_{\alpha\beta}(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu_\nu) \quad (3.39)$$

其中, 重复指标不进行求和。下面我们还是以矢量表示为例, 说明 Lorentz 群矢量表示生成元如何生成 Lorentz 矢量变换。考虑无穷小 Lorentz 变换:

$$\Lambda^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(-i)(g^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta g^{\nu\alpha}) = \delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta \quad (3.40)$$

转动矩阵和 boost 矩阵, 以及 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 的矩阵形式——绕 x, y, z 轴的转动矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & \\ & \sin\theta_x & \cos\theta_x & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta_y & \sin\theta_y & \\ & -\sin\theta_y & \cos\theta_y & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta_z & -\sin\theta_z & \\ & \sin\theta_z & \cos\theta_z & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

相应的绕 x, y, z 轴的无穷小转动生成元为:

$$J^1 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \end{pmatrix}, J^2 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ & -1 & 0 & \end{pmatrix}, J^3 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

沿 x, y, z 轴的 boost:

$$\begin{pmatrix} \cosh\beta_x & \sinh\beta_x & & \\ \sinh\beta_x & \cosh\beta_x & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\beta_y & \sinh\beta_y & & \\ & 1 & & \\ \sinh\beta_y & \cosh\beta_y & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\beta_z & & \sinh\beta_z & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ \sinh\beta_z & & \cosh\beta_z & \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

相应的沿 x, y, z 轴的无穷小 boost 生成元为:

$$K^1 = i \begin{pmatrix} 0 & +1 & & \\ +1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, K^2 = i \begin{pmatrix} 0 & & +1 & \\ & 0 & & \\ +1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, K^3 = i \begin{pmatrix} 0 & & & +1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ +1 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

于是, 矢量表示生成元为:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & K^1 & K^2 & K^3 \\ -K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ -K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ -K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

其中:

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{J}^{jk} \quad K^i = \mathcal{J}^{0i} \quad (3.46)$$

$$\theta^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk} \quad \beta^i = \omega_{0i} \quad (3.47)$$

即:

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{J}^{jk} = \frac{1}{2} (+1) \mathcal{J}^{jk} + \frac{1}{2} (-1) \mathcal{J}^{kj} = \frac{1}{2} (\mathcal{J}^{jk} - \mathcal{J}^{kj}) = \mathcal{J}^{jk} \quad (3.48)$$

$$\theta^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk} = \frac{1}{2} (+1) \omega_{jk} + \frac{1}{2} (-1) \omega_{kj} = \frac{1}{2} (\omega_{jk} - \omega_{kj}) = \omega_{jk} \quad (3.49)$$

例如:

$$J^1 = \frac{1}{2} \varepsilon^{1jk} \mathcal{J}^{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{123} \mathcal{J}^{23} + \frac{1}{2} \varepsilon^{132} \mathcal{J}^{32} = \frac{1}{2} \mathcal{J}^{23} - \frac{1}{2} \mathcal{J}^{32} = \mathcal{J}^{23} \quad (3.50)$$

$$K^1 = \mathcal{J}^{01} \quad (3.51)$$

$$\theta^1 = \frac{1}{2} \varepsilon^{1jk} \omega_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon^{123} \omega_{23} + \frac{1}{2} \varepsilon^{132} \omega_{32} = \frac{1}{2} \omega_{23} - \frac{1}{2} \omega_{32} = \omega_{23} \quad (3.52)$$

$$\beta^1 = \omega_{01} \quad (3.53)$$

因此:

$$(J^1, J^2, J^3) = (\mathcal{J}^{23}, \mathcal{J}^{31}, \mathcal{J}^{12}) \quad (K^1, K^2, K^3) = (\mathcal{J}^{01}, \mathcal{J}^{02}, \mathcal{J}^{03}) \quad (3.54)$$

$$(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}) \quad (\beta^1, \beta^2, \beta^3) = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}) \quad (3.55)$$

下面, 我们把 $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ 记作 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$, 把 $(\beta^1, \beta^2, \beta^3)$ 记作 $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ 。

对于沿 \hat{x} 轴的 boost, 生成元为:

$$(\mathcal{J}^{01})^\alpha_\beta = i(g^{0\alpha} \delta^1_\beta - \delta^0_\beta g^{1\alpha}) = i \begin{pmatrix} 0 & +1 & & \\ +1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = K^1 \quad (3.56)$$

这里左侧的 $(\mathcal{J}^{01})^{\alpha}_{\beta}$ 是矩阵元，右侧是相应的无穷小变换生成元的矩阵。无穷小变换矩阵为：

$$1 - \frac{i}{2}(\omega_{01}\mathcal{J}^{01} + \omega_{10}\mathcal{J}^{10}) = 1 - i\beta_x\mathcal{J}^{01} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_x & & \\ \beta_x & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

回到有限小变换，则矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \cosh \beta_x & \sinh \beta_x & & \\ \sinh \beta_x & \cosh \beta_x & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\alpha}_{\beta} - i\beta_x(\mathcal{J}^{01})^{\alpha}_{\beta} + o(\beta_x^2) \quad (3.58)$$

实际上，沿 x 轴的 boost，有 $\omega_{01} = -\omega_{10} = \beta_x$ ，因此：

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta}\right) &= \exp\left[\left(-\frac{i}{2}\omega_{01}(\mathcal{J}^{01})^{\alpha}_{\beta}\right) + \left(-\frac{i}{2}\omega_{10}(\mathcal{J}^{10})^{\alpha}_{\beta}\right)\right] \\ &= \exp\left[\left(-\frac{i}{2}\omega_{01}(\mathcal{J}^{01})^{\alpha}_{\beta}\right) + \left(-\frac{i}{2}(-\omega_{01})(-\mathcal{J}^{01})^{\alpha}_{\beta}\right)\right] = \exp(-i\omega_{01}(\mathcal{J}^{01})^{\alpha}_{\beta}) = \exp(-i\beta_x K^1) \\ &= 1 - i\beta_x K^1 - \frac{1}{2!}\beta_x^2(K^1)^2 + \dots = 1 + \beta_x \begin{pmatrix} 0 & +1 & & \\ +1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\beta_x^2 \begin{pmatrix} 0 & +1 & & \\ +1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \beta_x & \sinh \beta_x & & \\ \sinh \beta_x & \cosh \beta_x & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.59)$$

这就是矢量表示生成元生成 boost 矩阵的过程。

对于绕 \hat{x} 轴的转动，生成元为：

$$(\mathcal{J}^{23})^{\alpha}_{\beta} = i(g^{2\alpha}\delta^3_{\beta} - \delta^2_{\beta}g^{3\alpha}) = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = J^1 \quad (3.60)$$

无限小变换矩阵为：

$$1 - \frac{i}{2}(\omega_{23}\mathcal{J}^{23} + \omega_{32}\mathcal{J}^{32}) = 1 - i\theta_x\mathcal{J}^{23} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -\theta_x \\ & \theta_x & 1 & \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

相应的有限小变换矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & \\ & \sin \theta_x & \cos \theta_x & \end{pmatrix} = \delta^\alpha_\beta - i\theta_x (\mathcal{J}^{23})^\alpha_\beta + o(\theta_x^2) \quad (3.62)$$

绕 x 轴的转动，有 $\omega_{23} = -\omega_{32} = \theta_x$ ，因此：

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta\right) &= \exp(-i\omega_{23}(\mathcal{J}^{23})^\alpha_\beta) = \exp(-i\theta_x J^1) = 1 - i\theta_x J^1 - \frac{1}{2!}\theta_x^2 (J^1)^2 + \dots \\ &= 1 + \theta_x \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\theta_x^2 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \end{pmatrix}^2 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & \\ & \sin \theta_x & \cos \theta_x & \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.63)$$

这样就通过生成元 \mathcal{J}^{23} 生成了转动矩阵。

对于不同的书籍，转动矩阵中的 $\sin \theta$ 或 boost 矩阵中的 $\sinh \theta$ 前的符号可能有所差别，这种差异来源于矢量表示 (3.38) 式中的正负号的定义不同，或者生成元的的定义不同，但其本质是一致的。

3.1.3 Lorentz 群的旋量表示与 Dirac γ 矩阵

继续回到主题。在前面，我们引入了 $J^{\mu\nu}$ ，并把它作为 Lorentz 群的生成元。下面，我们将使用它来构造 Lorentz 群的旋量表示。

对于矢量场：

$$A^\alpha \rightarrow A'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta = \left[e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}} \right]^\alpha_\beta A^\beta \quad (3.64)$$

其中 Λ^α_β 是 Lorentz 群的四维矢量表示，生成元：

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha_\beta = i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta g^{\nu\alpha}) \quad (3.65)$$

相应的，我们可以构造旋量表示。这需要引入 Dirac 矩阵： γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)，Dirac 矩阵满足 Dirac 代数：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_{4\times 4} = 2g^{\mu\nu} \quad (3.66)$$

同时还必须要求 γ^0 是厄米矩阵，而 γ^i 是反厄米的：

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (3.67)$$

定义 Lorentz 群旋量表示的生成元：

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.68)$$

可以验证，它满足 Lorentz 代数：

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho}) \quad (3.69)$$

所以它的确是 Lorentz 群表示的生成元。