COMP9414: 人工智能解决方案5：不确定因素的推理

1. $p(a \wedge b) = p(a|b).p(b)$

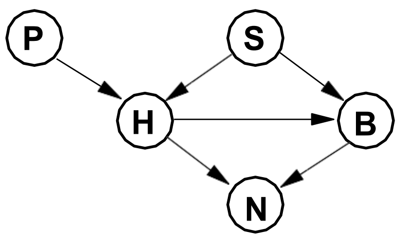
   $p(b \wedge a) = p(b|a).p(a)$

   现在$P(A \wedge B)=P(B \wedge A)$[到底为什么？] 因此
   $P(A|B).P(B)=P(B|A).P(A)$

   重新排列可以得到贝叶斯规则$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$ 如果$P(B)>0$的话

2. $P(Mumps|\neg Fever) = \frac{P(\neg Fever|Mumps).P(Mumps)}{P(\neg 发烧)}$
   $\frac{(1\text{-}P(Fever|Mumps)).P(Mumps)}{1\text{-}P(发烧)}$
   $(1-\frac{3}{4}) \circ \frac{1}{15000}$
   $\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}}$
   $= 0.0000167$

3. (i)



$p(h \wedge b \wedge s \wedge p \wedge n) = p(h|p \wedge s).p(b|s \wedge h).p(s).p(p).p(n|h \wedge b)$

(ii) $p(h \wedge b \wedge s \wedge p \wedge \neg n) = p(h|s \wedge p).p(b|h \wedge s).p(s).p(p).p(\neg n|h \wedge b)$
$= 0.8 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.2 \times 0.1$
$= 0.00064$
$p(h \wedge \neg b \wedge s \wedge p \wedge \neg n) = p(h|s \wedge p).p(\neg b|h \wedge s).p(s).p(p).p(\neg n|h \wedge \neg b)$
$= 0.8 \times 0.6 \times 0.1 \times 0.2 \times 0.5$
$= 0.00480$
$p(h \wedge b \wedge \neg s \wedge p \wedge \neg n) = p(h|\neg s \wedge p).p(b|h \wedge \neg s).p(\neg s).p(p).p(\neg n|h \wedge b)$
$= 0.4 \times 0.3 \times 0.9 \times 0.2 \times 0.1$
$= 0.00216$
$p(h \wedge \neg b \wedge \neg s \wedge p \wedge \neg n) = p(h|\neg s \wedge p).p(\neg b|h \wedge \neg s).p(\neg s).p(\neg n|h \wedge \neg b)$
$= 0.4 \times 0.7 \times 0.9 \times 0.2 \times 0.5$
$= 0.02520$
$p(h \wedge b \wedge s \wedge \neg p \wedge \neg n) = p(h|s \wedge \neg p).p(b|h \wedge s).p(\neg p).p(\neg n|h \wedge b)$
$= 0.6 \times 0.4 \times 0.1 \times 0.8 \times 0.1$
$= 0.00192$
$p(h \wedge \neg b \wedge s \wedge \neg p \wedge \neg n) = p(h|s \wedge \neg p).p(\neg b|h \wedge s).p(s).p(\neg p).p(\neg n|h \wedge \neg b)$
$= 0.6 \times 0.6 \times 0.1 \times 0.8 \times 0.5$
$= 0.0144$
$p(h \wedge b \wedge \neg s \wedge \neg p \wedge \neg n) = p(h|\neg s \wedge \neg p).p(b|h \wedge \neg s).p(\neg s).p(\neg p).p(\neg n|h \wedge b)$
$= 0.02 \times 0.3 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.1$
$= 0.000432$
$p(h \wedge \neg b \wedge \neg s \wedge \neg p \wedge \neg n) = p(h|\neg s \wedge \neg p).p(\neg b|h \wedge \neg s).p(\neg s).p(\neg p).p(\neg n|h \wedge \neg)$
$\neg B)$
$= 0.02 \times 0.7 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.5$
$= 0.00504$

(iii) $p(p \mid h \wedge \neg n) = \frac{P(P \wedge H \wedge \neg N)}{P(H \wedge \neg N)} = \frac{0.0328}{0.054592} = 0.60082$

请注意。

$P(P \wedge H \wedge \neg N) = \sum_{b,s} P(H \wedge b \wedge s \wedge P \wedge \neg N) = 0.00064 + 0.00480 + 0.00216 + 0.02520$

$P(H \wedge \neg N) = \sum_{b,s,p} P(H \wedge b \wedge s \wedge p \wedge \neg N) = 0.00064 + 0.00480 + 0.00216 + 0.02520 + 0.00192 + 0.0144 + 0.000432 + 0.00504 = 0.05452$

我们也可以使用直接推理，尽管这在本例中没有任何优势。要做到这一点，我们需要一个条件版的贝叶斯规则。$P(B|A, C) = \frac{P(A|B,C)P(B|C)}{P(A|C)}$

那么$P(P \mid H, \neg N) = \frac{P(\neg N \mid H, P).P(P \mid H)}{P(\neg N \mid H)}$

现在 $P(\neg N \mid H, P) = P(\neg N \mid H, B, P).P(B|H, P) + P(\neg N \mid H, \neg B, P).P(\neg B|H, P)$

$= p(\neg n \mid h, b).p(b|h, p) + p(\neg n \mid h, \neg b).p(\neg b|h, p)$

$= p(\neg n \mid h, b).(p(b|h, s, p).p(s|h, p) + p(b|h, \neg s, p).p(\neg s|h, p))+$

$P(\neg N \mid H, \neg B).(p(\neg b|h, s, p).p(s|h, p) + p(\neg b|h, \neg s, p).p(\neg s|h, p))$

$= [p(\neg n \mid h, b).(p(b|h, s).p(h|s, p).p(s|p)+p(b|h, \neg s).p(h|\neg s, p).p(\neg s|p))+$

$P(\neg N \mid H, \neg B).(p(\neg b|h, s).p(h|s, p).p(s|p)+p(\neg b|h, \neg s).p(h|\neg s, p).p(\neg s|p))]/p(h|p)$

$= [p(\neg n \mid h, b).(p(b|h, s).p(h|s, p).p(s) + p(b|h, \neg s).p(h|\neg s, p).p(\neg s))+$

$P(\neg N \mid H, \neg B).(p(\neg b|h, s).p(h|s, p).p(s)+p(\neg b|h, \neg s).p(h|\neg s, p).p(\neg s))]/p(h|p)$

另外，$P(P \mid H) = P(H|P).P(P)/P(H)$，所以要取消$P(H|P)$

$p(\neg n \mid h, p).p(p \mid h)$

$= [p(\neg n \mid h, b).(p(b|h, s).p(h|s, p).p(s) + p(b|h, \neg s).p(h|\neg s, p).p(\neg s))+$

$P(\neg N \mid H, \neg B).(p(\neg b|h, s).p(h|s, p).p(s)+p(\neg b|h, \neg s).p(h|\neg s, p).p(\neg s))].p(p)/p(h)$

这就产生了与上面完全相同的四个术语，同样，P（$\neg N \mid H$）也产生了与上面相同的八个术语。额外的$P(H)$相互抵消了。

4. 让A代表 "报警"，B代表 "入室盗窃"，E代表 "地震"。那么根据
   贝叶斯法则
   $p(b|a) = p(a|b).p(b)/p(a) = (p(a|b \wedge e).p(e).p(b) + p(a|b \wedge \neg e).p(\neg e).p(b))/p(a)$。
   并如在讲座中
   $p(a) = p(a|b \wedge e).p(e).p(b) + p(a|b \wedge \neg e).p(\neg e).p(b) + p(a|\neg b \wedge e).p(e).p(\neg b) + p(a|\neg b \wedge \neg e).p(\neg e).p(\neg b)$

   所以$P(B|A) = (0.95 \times 0.002 \times 0.001 + 0.94 \times 0.998 \times 0.001)/P(A)$，并且
   $p(a) = 0.95 \times 0.002 \times 0.001 + 0.94 \times 0.998 \times 0.001 + 0.29 \times 0.002 \times 0.999 + 0.001 \times 0.998 \times 0.999$
   因此$P(B|A) = 0.00094002/0.002516442 = 0.3735512$
   直观地说，"真阳性"（当真的有入室盗窃时）大约只占警报响起时的10/26个案例（大约0.001的时间），而 "假阳性 "则占16/26个案例（当警报因地震而响起时的6/26，由于假阳性率大约为0.3，先验为0.002，所以大约0.0006的时间，而当既没有入室盗窃也没有地震时的10/26，由于假阳性率为0.001和一个接近1的先验，所以大约是0.001的时间）。粗略的计算是10/26 = 0.001/(0.001 + 0.0006 + 0.001)。也就是说，在这种情况下，假阳性大大超过了真阳性。

5. 根据链式规则，$P(A \wedge B \wedge C) = P(B|A, C).P(A|C).P(C) = P(A|B, C).P(B|C).P(C)$。
   所以，只要$P(C) \neq 0$，$P(A|C) \neq 0$，贝叶斯规则的条件版本就会出现。