离散数学基础笔记（以模块划分）

模块 1：数论

一 • 基本概念

1. 平凡因子：1 和本身

   真因子

2. 带余除法：$a = qb + r$（其中$0 \leq r < |b|$）

3. 最大公因子：$\gcd(a, b)$

   最小公倍数：$\operatorname{lcm}(a, b)$

4. 梅森素数：形如$M_n = 2^n - 1$的素数

5. $[a]_m$或$[a]$以及Z_m：a的模m等价类，$[a]_m = \{b \mid b \equiv a \pmod m\}$，整数集 Z 在模 m 下的商集$Z_m$，例如$Z_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

6. 一次同余方程：$ax \equiv b \pmod m$，其中a, b, m为整数，$m > 0$

7. a 的模 m 逆元：a^{-1}，满足$aa^{-1} \equiv 1 \pmod m$

8. 欧拉函数：$\varphi(n)$，表示小于等于 n 且与 n 互素的正整数个数，注意$\varphi(1) = 1$

9. -1 和 9 公因数有{1，-1}，最大公因数为 1，所以互质

二 • 公式定理

1. 算术基本定理：设$a > 1$，则$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$，其中$p_k$为互异的素数，$r_k$为正整数，则不考虑顺序时表示唯一

2. 正因子个数：$d(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \ldots (r_k + 1)$

3. 有无穷多个素数：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln(n)}} = 1$$

或

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

4. 埃拉托色尼筛法：见例 2

5. 辗转相除法（欧几里得算法）：$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$

6. 贝祖定理：若a, b不全为 0，则存在x, y使得$\gcd(a, b) = ax + by$，其中x, y为整数

7. a, b 互素的充要条件：存在整数 x，y 使得$xa+yb=1$

8. 模运算的性质：

- 若 $a\equiv b\pmod m, c\equiv d\pmod m$，则 $a\pm c\equiv b\pm d\pmod m, ac\equiv bd\pmod m, a^k\equiv b^k\pmod m$, 其中 k 为自然数
- 若 $d\ge 1$，则 $a\equiv b\pmod m\Leftrightarrow da\equiv db\pmod{dm}$
- 若 $\gcd(c,m)=1$，则 $a\equiv b\pmod m\Leftrightarrow ca\equiv cb\pmod m$

9. 一次同余方程：$ax\equiv b\pmod m$，其中a,b,m为整数，$m>0$，$\gcd(a,m)=1$时有唯一解x，否则有解当且仅当$\gcd(a,m)$整除b，此时解的个数为$\gcd(a,m)$

10. a^{-1}存在 $\Leftrightarrow\gcd(a,m)=1$，且若存在则唯一（a 的任意两个模 m 逆都模 m 同余）

11. 若 n 的素因子分解式 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$，则 $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$

12. 欧拉定理：若 $\gcd(a,n)=1$，则 $a^{\varphi(n)}\equiv 1\pmod n$

13. 费马小定理（可视为欧拉定理在质数情况的推论）：

- 若 p为素数，a为整数，且 $\gcd(a,p)=1$，则 $a^{p-1}\equiv 1\pmod p$
- 若 p为素数，a为整数，则 $a^p\equiv a\pmod p$
  - 计算 a^{-1} 时的小推论：若 p 为素数，则 $a^{-1}\equiv a^{p-2}\pmod p$

三 • 精选例题

1. 20!的二进制表示从最低位起有多少个连续的 0？

解：$20!=2^{18}*3^8*5^4*7^2*11^1*13^1*17^1*19^1$，所以有 18 个连续的 0。

2. 求 100 以内的素数。

解：$\sqrt{100}=10$，10 以内素数：2，3，5，7，用他们删所有能被他们整除的数，剩下的就是素数。

3. 求 168, 300 最大公因数，并表示成线性组合

解：$168=2^3*3*7$，$300=2^2*3*5^2$，所以$\gcd(168,300)=2^2*3=12$ 而

$$300=168+132$$

$$168=132+36$$

$$132=36*3+24$$

$$36=24+12$$

$$24=12*2+0$$

则$12=36-24=36-(132-36*3)=...=9*168-5*300$

4. 3^{455}的个位数是？

解： 法一：$3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，$3^5=243$，$3^6=729$，所以周期为 4，余数为 3，所以个位数是 7。

法二：设为x，则$3^{455} \equiv x(\bmod 10)$，又$3^4 \equiv 1(\bmod 10)$，则$3^{4*113} \equiv 1^{113}(\bmod 10)$，又$3^3 \equiv 7(\bmod 10)$，两式相乘可得$3^{455} \equiv 7(\bmod 10)$

5. 解方程 $8x \equiv 4(\bmod 6)$

解：$\gcd(8,6)=2$，整除 4，所以有 2 解，取模 6 等价类代表$-2,-1,0,1,2,3$，代入得x的解为$2,-1$，即 $x \equiv 2(\bmod 6)$ 或 $x \equiv -1(\bmod 6)$

【错解】全部除以 2

四. 课后习题

4.4 设 a,b,c,d 均为正整数，下列叙述是否正确？是，证明；否，给反例

(1) 若 $a|c, b|c$，则 $ab|c$

(2) 若 $a|c, b|d$，则 $ab|cd$

(3) 若 $ab|c$，则 $a|c$

(4) 若 $a|bc$，则 $a|b$ 或 $a|c$

解：

(1) 错误，反例：$a=4,b=6,c=12$，则$4|12, 6|12$，但$4*6=24$，所以不成立。

(2) 正确，设$c=k_1a, d=k_2b$，则$cd=k_1k_2ab$，所以$ab|cd$

(3) 正确，设$c=kab$，则$a|c$是显然的

(4) 错误，反例：$a=6,b=2,c=3$，则$6|2*3=6$成立，但$6|2, 6|3$都不成立。

4.16 证明：$\forall x,y,u,v \in Z, \gcd(a,b) \leq \gcd(xa+yb, ua+vb)$

证：令 $d=\gcd(a,b)$

则 $d|a$且 $d|b$

则 $d|ax+by$且 $d|au+bv$

则 d 为 $xa+yb, ua+vb$ 的公因子

故 $d \leq \gcd(xa+yb, ua+vb)$，得证

4.34 下列叙述是否正确，是，证明之；否，举反例

(1) 若 $a^2 \equiv b^2(\bmod m)$，则 $a \equiv b(\bmod m)$ 或 $a \equiv -b(\bmod m)$

(2) 若 $a \equiv b(\bmod m)$，则 $a^2 \equiv b^2(\bmod m)$

(3) 若 $a^2 \equiv b^2(\bmod m^2)$，则 $a \equiv b(\bmod m)$

(4) 若 $a \equiv b(\bmod mn)$，则 $a \equiv b(\bmod m)$ 且 $a \equiv b(\bmod n)$

(5) 若 $a \equiv b(\bmod m)$ 且 $a \equiv b(\bmod n)$，则 $a \equiv b(\bmod mn)$

解：

（1） 错误，反例：$a=10,b=2,m=24$

（2） 正确，$a-b\equiv 0(\bmod m)$，则 $(a-b)(a+b)\equiv 0(\bmod m)$，得证

（3） 错误，反例：$a=5,b=3,m=4$

（4） 正确，由于 $a-b=kmn$，故 $a-b=km\vee a-b=kn$，得证

（5） 错误，反例：$a=5,b=1,m=4,n=2$

4.35 解下列一次同余方程

（1） $9x\equiv 3(\bmod 6)$

（2） $4x\equiv 3(\bmod 6)$

（3） $3x\equiv -1(\bmod 5)$

（4） $8x\equiv 2(\bmod 4)$

（5） $20x\equiv 12(\bmod 8)$

解：

（1） $\gcd(9,6)=3,3|3$，有 3 解，取模 6 等价类 $-2,-1,0,1,2,3$，代入得 $x\equiv -1(\bmod 6)\vee x\equiv 1(\bmod 6)\vee x\equiv 3(\bmod 6)$

（2） $\gcd(4,6)=2,2\nmid 3$，无解

（3） $\gcd(3,5)=1,1|-1$，有 1 解，取模 5 等价类 $-2,-1,0,1,2$，代入得 $x\equiv -2(\bmod 5)$

（4） $\gcd(8,4)=4,4\nmid 2$，无解

（5） $\gcd(20,8)=4,4|12$，有 4 解，取模 8 等价类 $-3,-2,-1,0,1,2,3,4$，代入得 $x\equiv -3(\bmod 8)\vee x\equiv -1(\bmod 8)\vee x\equiv 1(\bmod 8)\vee x\equiv 3(\bmod 8)$

4.37 对下列每一组 a, m, 是否有 $a^{-1}(\bmod m)$ ？

（1） $2,3$

（2） $8,12$

（3） $18,7$

（4） $12,21$

（5） $5,9$

（6） $-1,9$

解：

（1） $\gcd(a,m)=1$，是，3 是素数，由费马小定理的推论 $2^{-1}\equiv 2^{3-2}\equiv 2(\bmod 3)$

（2） $\gcd(a,m)=4$，不是

（3） $\gcd(a,m)=1$，是，7 是素数，由费马小定理的推论 $18^{-1}\equiv 18^{5}\equiv 4^{5}\equiv 2(\bmod 7)$

（4） $\gcd(a,m)=3$，不是

（5） $\gcd(a,m)=1$，是，9 不是素数，即解 $5x\equiv 1(\bmod 9)$，则 $5^{-1}\equiv 2(\bmod 9)$

（6） $\gcd(a,m)=1$，是，9 不是素数，即解 $-x\equiv 1(\bmod 9)$，则 $(-1)^{-1}\equiv 8(\bmod 9)$

4.45 用费马小定理计算下列各式

（1） $2^{325}(\bmod 5)$

（2） $3^{516}(\bmod 7)$

（3） $8^{1003}(\bmod 11)$

解：

（1） $2^4\equiv 1(\bmod 5), 2^{324}\equiv 1(\bmod 5), 2^{325}\equiv 2(\bmod 5)$

（2） $3^6\equiv 1(\bmod 7), 3^{516}\equiv 1(\bmod 7)$

（3） $8^{10}\equiv 1(\bmod 11), 8^{1000}\equiv 1(\bmod 11), 8^{1003}\equiv 8^3\equiv 6(\bmod 11)$

模块 2：图论

一 • 基本概念

1. 无序积：设 A，B 为任意两集合，则 $\{\{a,b\}|a\in A,b\in B\}$ 为 A，B 的无序积，记作 $A\&B$ 无序对$\{a,b\}$也可记作(a,b)，且允许$a=b$，并且任意 a, b，均有$(a,b)=(b,a)$，即$A\&B=B\&A$

2. 无向图G：是一个有序的二元组$<V,E>$，其中（1）V是一个非空有穷集（顶点集），其元素称作顶点或结点（2）E是无序积$V\&V$的有穷多重子集（边集），元素称作无向边，简称边

3. 有向图D：是一个有序的二元组$<V,E>$，其中（1）V是一个非空有穷集（顶点集），其元素称作顶点或结点（2）E是笛卡尔积$V*V$的有穷多重子集（边集），元素称作有向边，简称边

4. 图（G）：无向图（G）+有向图（D），但有时专指无向图；$V(G),E(G)$分别表示G的顶点集和边集，$|V(G)|$表示顶点数，其余类似

5. 阶：$|V(G)|=n\Longleftrightarrow n$阶图

6. 零图：$E(G)=0$，n阶零图记作N_n, N_1称作平凡图

7. 空图（$\emptyset$）：$|V(G)|=0$

8. 标定图：用图形表示图时，如果给每一个顶点和每一条边指定一个符号（字母或数字，当然字母还可以带下标）

9. 基图：有向图的各条有向边改成无向边后所得到的无向图称作这个有向图的基图

10. 关联： 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图，$e_k=\left(v_i,v_j\right)\in E$，称 v_i,v_j 为e_k 的端点，e_k 与v_i(v_j)关联. 若$v_i\neq v_j$，则 称 e_k 与v_i(v_j)的关联次数为 1；若$v_i=v_j$，则称e_k 与v_i 的关联次数为 2，并称e_k 为环. 如果顶点v_l不与边e_k关联，那么称e_k与v_l的关联次数为 0

11. 相邻：对无向图，若两个顶点之间有一条边连接，则称这两个顶点相邻. 若两条边至少有一个公共端点，则称这两条边相邻；对有向图，若两个顶点之间有一条有向边，则称这两个顶点相邻. 若两条边中一条边的终点是另一条边的始点，则称这两条边相邻

12. 设 $D=\langle V,E\rangle$为有向图，$e_k=\left\langle v_i,v_j\right\rangle\in E$，称 v_i,v_j 为e_k 的端点，v_i 为e_k 的始点，v_j 为e_k 的终点，并称 e_k 与v_i(v_j)关联. 若$v_i=v_j$，则称e_k 为D中的环

13. 孤立点：图（无向的或有向的）中没有边关联的顶点

14. 邻域：设无向图$G=<V,E>$，对任意的$v\in V$，称$N_G(v)=\{u|u\in V,(u,v)\in E,u\neq v\}$为$v$的邻域；称$\overline{N}_G(v)=N_G(v)\cup\{v\}$称为$v$的闭邻域；称$I_G(v)=\{e|e\in E,e$与$v$ 相关联$\}$为v的关联集

15. 后继元集：设有向图$D=<V,E>$，任意$v\in V$，称$\Gamma_D^+(v)=\{u|u\in V,<v,u>\in E,u\neq v\}$为$v$的后继元集；称$\Gamma_D^-(v)=\{u|u\in V,<u,v>\in E,u\neq v\}$为$v$的先驱元集；称$N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$为$v$的邻域；称$\overline{N}_D(v)=N_D(v)\cup\{v\}$为$v$的闭邻域

16. 平行边：无向图中，若关联一对顶点的无向边多于 1 条，则称这些边，平行边条数称为重数；有向图中，还需要始点与终点相同，则称。含平行边的图称作多重图，既不含平行边也不含环的图称作简单图。

17. 子图：设$G=<V,E>,G'=<V',E'>$为两个图（同为无向或有向），若$V'\subseteq V,E'\subseteq E$，则有子图与母图，记作$G'\subseteq G$。类似的，有真子图。若$V'=V$，则有生成子图。设$G=<V,E>,V_1\subset V,V_1\neq\emptyset$，称以$V_1$为顶点集，以$G$中两个端点都在$V_1$中的边组成的边集$E_1$的图为$G$的$V_1$导出的子图，记作$G[V_1]$；$E_1$导出的子图记作$G[E_1]$，同理

18. 设$G=<V,E>$为无向图。

（1）设$e\in E$，用$G-e$表示从G中去掉边e，称作删除边e。又设$E'\subset E$，用$G-E'$表示删除这些边
（2）设$v\in V$，用$G-v$表示从G中去掉v及所关联的一切边，称作删除顶点v。又设$V'\subset V$，从G中删除V'中所有的顶点，称作删除V'
（3）设$e=(u,v)\in G$，用$G\setminus e$表示从G中删除e后，将e的两个端点u,v用一个新的顶点w代替，并使w关联除了e之外u,v关联的所有边，称作边e的收缩
（4）设$u,v\in V$（u,v可能相邻，也可能并不），用$G\cup(u,v)\parallel G+(u,v)$表示在$u,v$之间加新边

在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边.

19. 设$G_1=<V_1,E_1>,G_2=<V_2,E_2>$为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）

（1）称以$V_1\cup V_2$为顶点集，以$E_1\cup E_2$为边集的图为并图，记作$G_1\cup G_2=<V_1\cup V_2,E_1\cup E_2>$
（2）称以E_1-E_2为边集，以E_1-E_2 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的差图，记作G_1-G_2

（3）称以$E_1 \cap E_2$为边集，以$E_1 \cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的交图，记作$G_1 \cap G_2$
（4）称以$E_1 \oplus E_2$为边集，以$E_1 \oplus E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的环和，记作$G_1 \oplus G_2$
（5）环和即不交并集，$G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$
（6）若两个图顶点集不交，称这两个图不交；若边集不交，称作边不交

20. 度数：设$G =< V, E >$，为无向图，任意$v \in V$，将v作为边的端点的次数称作v的度数，简称为度，记作$d_G(v)$。在不产生混淆时亦可记作$d(v)$；设$D =< V, E >$为有向图，任意$v \in V$，将v作为边的始点的次数称为v的出度，记作$d_D^+(v)$，简记作$d^+(v)$；同理，有入度$d_D^-(v)$，简单记作$d^-(v)$，称v的度数$d_D(v) = d^+(v) + d^-(v)$（或简单记作$d(v)$）

21. 最大（小）度：在无向图G中，令$\Delta(G) = \max\{d(v)|v \in V(G)\}, \delta(G) = \min\{d(v)|v \in V(G)\}$，分别称作$G$的最大度与最小度。类似的，有向图有
$\Delta(D), \delta(D), \Delta^+(D), \delta^+(D), \Delta^-(D), \delta^-(D)$，如需简记，去掉$(D)$即可

22. 悬挂顶点（边）：度数为 1（与之关联）
奇（偶）度顶点：度数为奇数（偶数）

23. 度数列：设$G =< V, E >$为一个n阶无向图，$V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$，称
$d(v_1), d(v_2), ..., d(v_n)$；对于顶点标定的无向图，它的度数列唯一。反之，对于给定的非负整数列$d = (d_1, d_2, ..., d_n)$，若存在以$V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$为顶点集的$n$阶无向图$G$，使得$d(v_i) = d_i, i = 1, 2, ..., n$，则称$d$是可图化的。特别的，若得到的图是简单图，则称可简单图化。对有向图还有类似的出度列和入度列。

24. 同构：设$G_1 =< V_1, E_1 >, G_2 =< V_2, E_2 >$是两个无向图，若存在双射函数$f : V_1 \to V_2, s.t. \forall v_i, v_j \in V_1, (v_i, v_j) \in E_1 \Leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) \in E_2, (v_i, v_j)$和$(f(v_i), f(v_j))$重数相同，则称$G_1$与$G_2$同构，记作$G_1 \cong G_2$。对有向图还有类似的定义。

25. 彼得松图：

在图 5.2.2 中，(a) 称作彼得松(Peterson)图，(b)，(c) 均与 (a) 同构. (d)，(e)，(f) 各图彼此间都不同构.

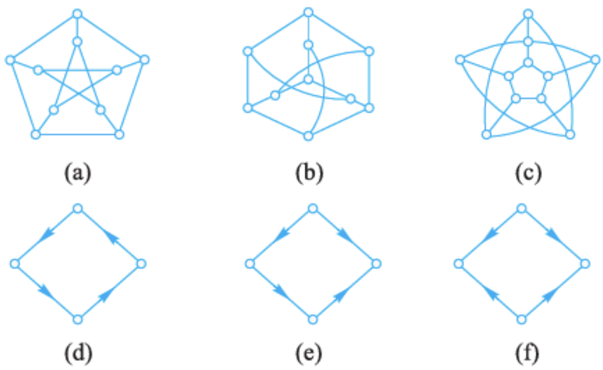


图 5.2.2

至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件。显然阶数相同、边数相同、度 数列相同等都是必要条件，但都不是充分条件

26. 完全图：设G为n阶无向简单图，$n \geq 1$，若G中每个顶点均与其余的$n-1$个顶点相邻，则称n阶无向完全图，简称n阶完全图，记作K_n；同理有n阶有向完全图；设D为n阶有向简单图，若D的基图为n阶无向完全图K_n，则称D为n阶竞赛图

在图 5.2.3 中,(a) 为 K_5 ,(b) 为 3 阶有向完全图,(c) 为 4 阶竞赛图.

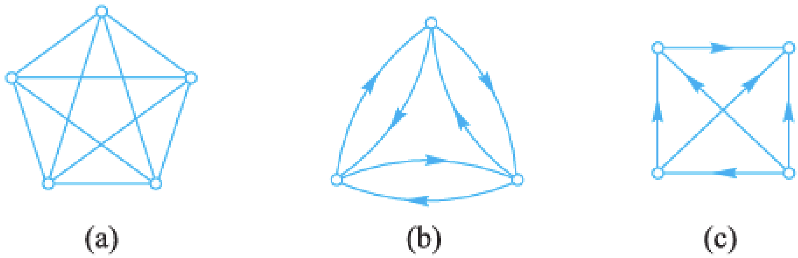


图 5.2.3

易知，n阶无向完全图，n阶有向完全图，n阶竞赛图的边数分别为$\frac{n(n-1)}{2}, n(n-1), \frac{n(n-1)}{2}$

27. $k-$正则图：设G为n阶无向简单图，若$\forall v \in V(G), d(v)=k$。
由握手定理可知，n阶$k-$正则图中，边数$m=\frac{kn}{2}$，因而当k为奇数时，n必为偶数

28. 补图：设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，令$\overline{E}=\{(u,v)|u,v \in V, u \neq v, (u,v) \notin E\}$，称$\overline{G}=<V,\overline{E}>$为$G$的补图。若$G \cong \overline{G}$，则称$G$为自补图

29. 通路和回路：设G为无向标定图，G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}...e_{j_l}v_{i_l}$称作$v_{i_0}$到$v_{i_l}$的通路，$v_{i_0}, v_{i_l}$分别称作$\Gamma$的始点和终点，$\Gamma$中边的条数称作长度。若有$v_{i_0}=v_{i_l}$，称之为回路。若$\Gamma$的所有边互不相同，称为简单通路。若又有$v_{i_0}=v_{i_l}$，称为简单回路。若所有顶点（除了$v_{i_0}, v_{i_l}$可能相同外）互不相同，所有边也互不相同，称作初级通路/路径。若又有$v_{i_0}=v_{i_l}$，称为初级回路/圈。根据长度的奇偶性，又有奇圈和偶圈（简单无向图中，圈的长度至少为 3）。若Γ中有边重复出现，则称Γ为复杂通路。若又有$v_{i_0}=v_{i_l}$ ，则称Γ为复杂回路。有向图中情况是类似的，只是要注意有向边方向的一致性。在简单图中可以只用顶点序列表示通路（回路）

30. 长度相同的圈都是同构的，因此在同构意义下给定长度的圈只有一个. 在标定图中，圈表示成顶点和边的标记序列. 只要两个标记序列不同，就认为这两个圈不同，称这两个圈在定义意义下不同

31. 连通：设无向图$G=<V,E>$，若$u,v \in V$之间存在通路，则称u,v是连通的，记作$u \sim v$。规定：$\forall v \in V, v \sim v$。
连通图：若无向图G是平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称连通图，否则非连通图。

32. 设无向图$G=<V,E>$，V_i是V关于顶点之间的连通关系的一个等价类，称导出子图$G[V_i]$为G的一个连通分支，G的连通分支数记作$p(G)$。由定义，若G为连通图，则$p(G)=1$；若为非连通图，则$p(G) \geq 2$。在所有n阶无向图中，n阶零图是连通分支最多的，$p(N_n)=n$。

33. 设u,v为无向图G中任意两个顶点，若$u \sim v$，则称u,v之间长度最短的通路为短程线，其长度称为u,v的距离，记作$d(u,v)$。当u,v不连通时，规定$d(u,v)=+\infty$

34. 割：设无向图$G=<V,E>$，若存在$V' \subset V, s.t. p(G-V') > p(G)$,且对于$\forall V'' \subset V'$，均有$p(G-V')=p(G)$，则称$V'$是$G$的点割集。若$V'=\{v\}$，则称$v$为割点
设无向图$G=<V,E>$，若$\exists E' \subseteq E, s.t. p(G-E') > p(G)$，且对于$\forall E'' \subset E', p(G-E'')=p(G)$，则称$E'$是$G$的边割集，或简称割集。若$E'=\{e\}$，称为割边或桥

35. 连通度：设G为无向连通图且不是完全图，则称$\kappa(G)=\min\{|V'||V'$ 为G 的点割集$\}$为G的点连通度，简称为连通度，$\kappa(G)$有时简记为κ。当$n \geq 1$时，规定完全图K_n的点连通度为

$n-1$，非连通图的点连通度为 0。又若$\kappa(G) \geq k$，称G为$k-$连通图，k为自然数。若G为$k-$连通图，$k \geq 1$，则在G中删除任何$k-1$个顶点后，所得到的图一定还是连通的
同理，有边连通度$\lambda(G)$或λ，r 边-连通图。若G为r 边-连通图，则在G中删除任何$r-1$个边后，所得到的图一定还是连通，K_n边连通度为$n-1$

36. 可达：设$D=<V,E>$为一个有向图，$\forall v_i,v_j \in V$，若从v_i到v_j存在通路，则称v_i可达v_j，记作$v_i \to v_j$；规定$v_i \to v_i$。若$v_i \to v_j$且$v_j \to v_i$，则称相互可达，记作$v_i \leftrightarrow v_j$

37. 短程线：设有向图$D=<V,E>,\forall v_i,v_j \in V$，若$v_i \to v_j$，则称$v_i$到$v_j$最短通路为短程线，短程线长度称为距离，记作$d<v_i,v_j>$，与$d(v_i,v_j)$相比，除无对称性外，具有一切性质

38. 强，弱，单连通图：若有向图$D=<V,E>$的基图是连通图，称为弱连通图，简称连通图。若$\forall v_i,v_j \in V, v_i \to v_j$和$v_j \to v_i$至少成立其一，则称单向连通图；若$\forall v_i,v_j \in V, v_i \leftrightarrow v_j$，则称强连通图

39. 极大路径：设$G=<V,E>$为n阶无向图，Γ为一条路径。若Γ始点和终点都不与Γ外的顶点相邻，则称Γ为一条极大路径。
扩大路径法（在涉及路径和圈的构造性证明中常用的方法）：任给一条路径，如果它的始点或终点与路径外的某个顶点相邻，就把它延伸到这个顶点。继续这一过程，直到最后不能向外延伸为止，最后总能得到一条极大路径。

40. 二部图：设无向图$G=<V,E>$，若能将V划分为V_1,V_2（即$V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$），使得$G$中的每条边的两个端点都是一个属于$V_1$，一个属于$V_2$，则称为二部图（或二分图，偶图），称$V_1,V_2$为互补顶点子集，记作$G=<V_1,V_2,E>$。又若是简单二部图，$V_1$中每个顶点均与$V_2$中的所有顶点相邻，则称为完全二部图，即为$K_{r,s}$，其中$r=|V_1|, s=|V_2|$。$N_n(n \geq 2)$为二部图。

41. 有向图关联矩阵：设$G=<V,E>$为n阶m边无向图，$V=\{v_1,v_2,...,v_n\}, E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$，定义$n \times m$矩阵$M(G)=(m_{ij})$，其中$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$关联次数，称$M(G)$为$G$的关联矩阵。

42. 无向图关联矩阵：设$D=<V,E>$为n阶m边有向图，无环，$V=\{v_1,v_2,...,v_n\}, E=\{e_1,e_2,...,e_m\}$，定义$n \times m$矩阵$M(D)=(m_{ij})$，其中$m_{ij}=1$，若$v_i$为$e_j$的始点；$m_{ij}=-1$，若$v_i$为$e_j$的终点；$m_{ij}=0$，$v_i,e_j$不关联，称$M(D)$为$D$的关联矩阵

43. 有向图的邻接矩阵：设$D=<V,E>$为n阶有向图，$V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$，令$a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到v_j的边数，定义$n \times n$矩阵$A(D)=\left(a_{ij}^{(1)}\right)$，称$A(D)$为$D$的邻接矩阵

44. 可达矩阵：设$D=<V,E>$为n阶有向图，$V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$，令$p_{ij}=1$，若$v_i \to v_j$；$r_{ij}=0$，否则。定义$n \times n$矩阵$P(D)=(p_{ij})_{n \times n}$，称$P(D)$为$D$的可达矩阵。

45. 只要计算出B_{n-1}，由B_{n-1}的元素$b_{ij}^{(n-1)}$是否为 0，即可判定$v_i \to v_j$是否成立，从而写出可达矩阵$P(D)$；不过$p_{ii} \equiv 1$，与B_{n-1}无关

46. 对无向图可以同样定义邻接矩阵和可达矩阵，实际上只要将无向图的每条边改成两条反向有向边即可。定理 13 及推论仍然成立。与有向图的区别是，无向图的邻接矩阵和可达矩阵都是对称的

47. 欧拉通路：通过图中所有边恰好一次且一次行遍所有顶点的通路；
欧拉回路：通过图中所有边恰好一次且一次行遍所有顶点的回路；

欧拉图：含有欧拉回路的图；
半欧拉图：含有欧拉通路但不含有欧拉回路的图

48. 规定平凡图是欧拉图

49.

二 • 公式定理

1. 握手定理：在任何无向图中，所有顶点度数之和等于边数的 2 倍；在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍，所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，都等于边数

【推论】：任何图中，奇度顶点个数是偶数

证：设图$G=<V,E>$，令$V_1=\{v|v\in V,d(v)为奇数\}$，$V_2=\{v|v\in V,d(v)为偶数\}$，则$V_1\cup V_2=V,V_1\cap V_2=\emptyset$。由握手定理，$2m=\sum_{v\in V}d(v)$，那么由于偶+（）=偶，奇*（）=偶，故$|V_1|$必为偶数。

2. 非负整数列$d=(d_1,d_2,...,d_n)$可图化$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}d_i$为偶数

证：由握手定理，$\Rightarrow$显然；对于$\Leftarrow$，由已知可知，d中有$2k$个奇数，其中$0\le k\le[\frac{n}{2}]$。不妨设它们为$d_1,d_2,...,d_k,...,d_{2k}$。如下构造以$d$为度数列的$n$阶无向图$G=<V,E>:V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$，在点$v_r,v_{r+k}$之间连边，$r=1,2,...,k$。若$d_i$为偶数，令$d_i'=d_i$；若$d_i$为奇数，令$d_i'=d_i-1$，得$d'=(d_1',d_2',...,d_n')$，则$d_i'$均为偶数。再在$v_i$处画$\frac{d_i'}{2}$条环，$i=1,2,...,n$。这就证明了$d$是可图化的。

3. 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G)\le n-1$。

4. 在n阶图G中，若从顶点u到v存在通路，且$u\ne v$，则从u到v存在长度$\le n-1$的初级通路

证：设$\Gamma=v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}...e_{j_l}v_{i_l},v_0=u,v_l=v$。若$l\le n-1$，成立；若$l>n-1$，此时$\Gamma$上顶点数大于$G$，于是必存在$v_s=v_k$，那么我们删除这个回路，递归操作有限步后，必得到$l\le n-1$

5. 在n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度$\le n$的回路

【推论】：在n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则一定存在v到自身长度$\le n$的初级回路

6. $\forall$无向图G，有$\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$

7. 强连通图的判定定理：有向图$D=<V,E>$是强连通图$\Leftrightarrow D$中存在经过每个顶点至少一次的回路

证：$\Leftarrow$显然；对于$\Rightarrow$，设$V=\{v_1,v_2...v_n\}$，由D的强连通性，$v_i\to v_{i+1},i=1\sim n-1$。设$\Gamma_i$为$v_i$到$v_{i+1}$的通路，$i=1,2...n-1$。又因为$v_n\to v_1$，设$\Gamma_n$为$v_n$到$v_1$的通路。于是，依次连接$\Gamma_1\sim\Gamma_n$，所得到回路经过$D$中每个顶点至少一次

8. 单向连通图的判定定理：有向图$D=<V,E>$是单向连通图 $\Leftrightarrow D$ 中存在经过每个顶点至少一次的通路

9. 二部图的判定定理：设$n\ge 2$，则n阶无向图G是二部图 $\Leftrightarrow$ G中无奇圈

证：⇒:若G中无圈，成立；若有圈，设其一为C，下证C是偶圈。令$C=v_{i_1}v_{i_2}...v_{i_l}v_{i_1}, l\geq 2$，不妨设$v_{i_1}\in V$，则让他们依次交替属于$V_1,V_2,v_{i_l}\in V_2$，因而$l$为偶数，得证

⇐:不妨设G为连通图，否则可以对每个连通分支讨论，孤立点可以根据需要分属V_1,V_2。设v_0为G中任一顶点，令$V_1=\{v|v\in V(G),d(v_0,v)\text{为偶数}\},V_2=\{v|v\in V(G),d(v_0,v)\text{为奇数}\}$，易知，$V_1\cup V_2=V,V_1\cap V_2=\emptyset,V_1\neq\emptyset,V_2\neq\emptyset$，故只需证$V_1$中任意两顶点不相邻，$V_2$中任意两顶点也不相邻。若$\exists v_i,v_j\in V_1$相邻，令$e=(v_i,v_j)$，设$v_0$到$v_i,v_j$短程线各为$\Gamma_i,\Gamma_j,d(v_0,v_i),d(v_0,v_j)$都是偶数，于是$\Gamma_i,\Gamma_j,e$构成一条长度为奇数的回路。这条回路可能是一条复杂回路，可以分解成若干由Γ_i,Γ_j共有的边构成的回路（实际上是每条边重复一次的路径）和由Γ_i,Γ_j不共有的边及e构成的圈。由Γ_i,Γ_j共有的边构成的回路长度为偶数，故在由Γ_i,Γ_j不共有的边及e构成的圈中一定有奇圈，这与已知矛盾。类似可证V_2，得证G为二部图。

10. $M(G)$的性质：
- （1）$\sum_{i=1}^{n}m_{ij}=2$
- （2）$\sum_{j=1}^{m}m_{ij}=d(v_i),i=1,2,...,n$
- （3）$\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}m_{ij}=2m$
- （4）第j列和第k列相同⇔边e_j,e_k是平行边
- （5）$M(G)$中某行全为 0⇔该行对应的顶点是孤立点

11. $M(D)$的性质：
- （1）每一列恰有一个 1 和一个-1，其余元素均为 0
- （2）第i行中 1 的个数为v_i的出度，-1 的个数为v_i的入度
- （3）平行边所对应的列相同

12. $A(D)$的性质：
- （1）$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(1)}=d^+(v),\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(1)}=d^-(v)$
- （2）$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(1)}=\sum_{i=1}^{n}d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n}d^-(v_i)=m$

13. 设A为有向图D的邻接矩阵，D的顶点集$V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$，则A^l中元素$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j的长为l的通路数, 其中$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i出发的长为l的回路数, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中所有顶点出发的长为l的通路数，其中$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$为所有顶点出发的长为$l$的回路数

证：只需证明$a_{ij}^{(l)}$为v_i到v_j的长为l的通路数。用数学归纳法证：
- 当$l=1$时，显然成立；
- 假设当$l=k$时结论成立，即$a_{ij}^{(k)}$为v_i到v_j的长为k的通路数.
- 考虑$l=k+1$时的情况，有$a_{ij}^{(k+1)}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}^{(k)}a_{rj}^{(1)}$，由假设知$a_{ir}^{(k)}$为$v_i$到$v_r$的长为$k$的通路数，$a_{rj}^{(1)}$为$v_r$到$v_j$的长为 1 的通路数，于是$a_{ij}^{(k+1)}$为$v_i$到$v_j$的长为$k+1$的通路数，得证

【推论】设$l\geq 1,B_l=A+A^2+...+A^l$，则$B_l$中元素之和为$D$中所有顶点出发的长不超过$l$的通路数；$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$为所有顶点出发的长不超过$l$的回路数

14. 无向图G是欧拉图⇔ G为连通图且所有顶点均为偶度

证：⇒：因为G为欧拉图，故存在欧拉回路，设其中任一条为C，$\forall v_i,v_j\in V,v_i,v_j$都在$C$上，因而二者连通，故为连通图。又$\forall v_i\in V,v_i$在$C$上每出现一次获得 2 度，故无奇度顶点，得证

⇐：边数$m\geq 1$，对m做归纳证明：
- 当$m=1$时，G只能是一个环，显然成立；
- 假设当$m=k(k\geq 1)$时结论成立；$\delta(G)\geq 2$，可以证明G中必含圈，设C为其一，删除C的边，得到子图G'，则G'中每个顶点度数均为偶数，G'的每个连通分支均为欧拉图，由归

纳假设，G'中每个连通分支均含有欧拉回路。将这些欧拉回路与C连接起来，便得到G的欧拉回路，得证

15. 无向图G是半欧拉图 $\Leftrightarrow$ G为连通图且恰有两个奇度顶点

证：$\Rightarrow$：因为G为半欧拉图，故存在欧拉通路，设其中任一条为$P = v_{i_0}e_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}...e_{j_l}v_{i_l}, l \geq 1$，则$v_{i_0}, v_{i_l}$均在$P$上，因而二者连通，$\forall v \in \{v_{i0} \sim v_{il}\}, v$在$P$上，因而$v, v_{i_0}$连通，$v, v_{i_l}$连通，故为连通图。又$v_{i_0}, v_{i_l}$在$P$上各出现一次获得 1 度，其余顶点在$P$上每出现一次获得 2 度，故$v_{i_0}, v_{i_l}$为奇度顶点，其余顶点均为偶度顶点，得证
$\Leftarrow$：设俩奇度顶点为u_0, v_0，对G加新边$(u_0, v_0), G' = G \cup (u_0, v_0)$，则$G'$连通且无奇度顶点，故为欧拉图，由定理 14，$G'$中存在欧拉回路，去掉$(u_0, v_0)$，便得到$G$的欧拉通路，得证

16.

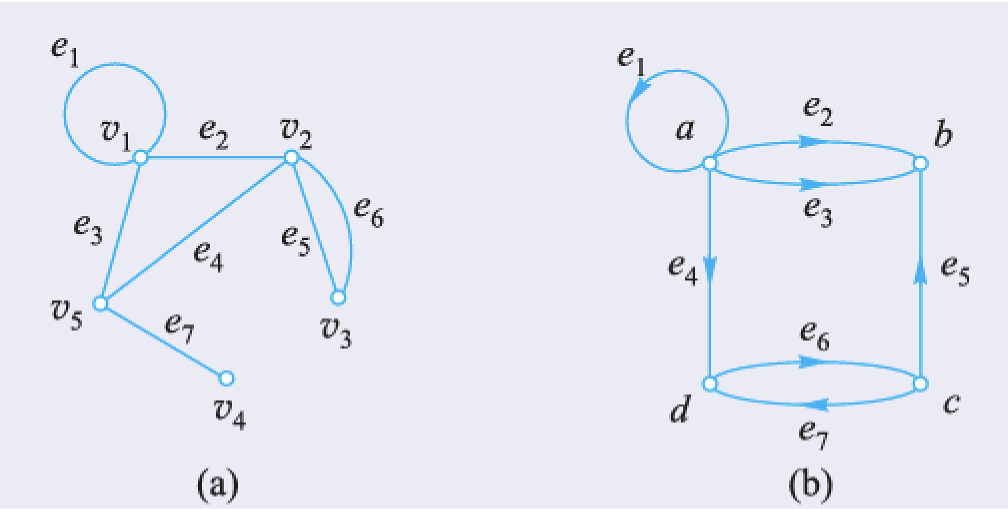
三 • 精选例题

1. （1）给定无向图$G =< V, E >$，其中$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$

（2）给定有向图$D =< V, E >$，其中$V = \{a, b, c, d\}$ $E = \{< a, a >, < a, b >, < a, b >, < a, d >, < d, c >, < c, d >, < c, b >\}$

画出G, D的图形

解：



(a) (b)

2. 判断下列非负整数列哪些可图化，哪些可简单图化？

（1）$(5, 5, 4, 4, 2, 1)$

（2）$(5, 4, 3, 2, 2)$

（3）$(3, 3, 3, 1)$

（4）$(d_1, d_2, ..., d_n), d_1 > d_2 > ... > d_n \geq 1$且$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数

（5）$(4, 4, 3, 3, 2, 2)$

解：

（1）否

（2）可图化；否；因为假设可，由定理 4$\Delta(G) \leq 5-1=4$，而原列最大度是 5

（3）可图化；否；因为假设可，设$G=<V,E>$以$(3,3,3,1)$为度数列，不妨设$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}, d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=3, d(v_4)=1$，由于$d(v_4)=1$，因而$v_4$只能与$v_1,v_2,v_3$之一相邻，不妨设与$v_1$相邻，于是$v_2$只能与$v_1,v_3$相邻，$v_3$只能与$v_1,v_2$相邻，不可能有 3 度，故不可

（4）可图化；否；因为假设可，由定理 4$\Delta(G) \leq n-1$，而$d_1 \geq n$，故不可简单图化

（5）可图化；可，举一例即可

3.（1）画出 4 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图

（2）画出 3 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图

解：

（1）由握手定理，$\sum_{i=1}^{4} = d_1+d_2+d_3+d_4 = 3\times 2 = 6, \Delta(G) \leq 3$，于是所求无向简单图的 度数列应满足的条件是，将 6 分成 4 个非负整数，每个整数均大于等于 0 且小于等于 3，并且奇数的个数为偶数，只有下面 3 种情况：$(a)3,1,1,1(b)2,2,1,1(c)2,2,2,0$

（2）由握手定理可知，所画有向简单图各顶点度数之和为 4，最大出 度和最大入度均小于等于 2． 度数列及入度出度列为：(a)度数列 $1,2,1$ ：$(a.1)$入度列为 $0,1,1$，出度列为 $1,1,0$ $(a.2)$入度列为 $0,2,0$，出度列为 $1,0,1(a.3)$入度列为 $1,0,1$，出度列为 $0,2,0$ (b)度数列为 $2,2,0$，入度列为 $1,1,0$，出度列为 $1,1,0$

4. 无向完全图K_3的顶点依次标定为a,b,c，在定义意义下有多少个不同的圈？

解：在同构意义下，K_3中只有一个长为 3 的圈. 但在定义意义下，不同起点（终点）的圈是不同的，顶点间排列顺序不同的圈也看成是不同的，因而K_3中有$6(\frac{3!}{2})$个不同的长度为 3 的圈：abca, acba, bacb, bcab, cabc, cbac. 如果只考虑起点（终点）的差异，而不考虑顺时针和逆时针的差异，应该有 3 种不同的圈，当然它们的长度都是 3

5. 一个农夫带着一条狗，一只羊和一筐白菜来到河的南岸。河边有一条小船，小船一次只能运载农夫和他带的一样东西（狗、羊或白菜）。而在农夫不在场的情况下，狗和羊，羊和白菜不能放在一起，因为狗要咬羊，羊会吃白 菜. 问：农夫怎样才能把他的 3 样东西安全地运到河对岸?至少需要来回几次?

解：用顶点表示可能的状况。例如，（人狗羊菜，$\varnothing$）表示人狗羊菜都在南岸，北岸什么也没有；（人羊，狗菜）表示人羊在南岸，狗菜在北岸。两个顶点之间有一条边当且仅当一次摆渡使表示的一种状态变成另一种状态。

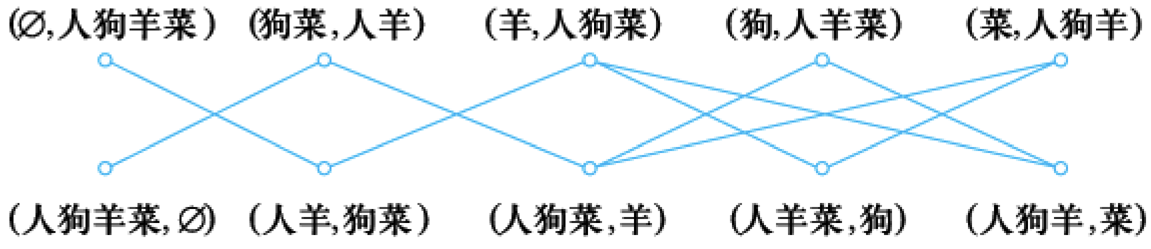
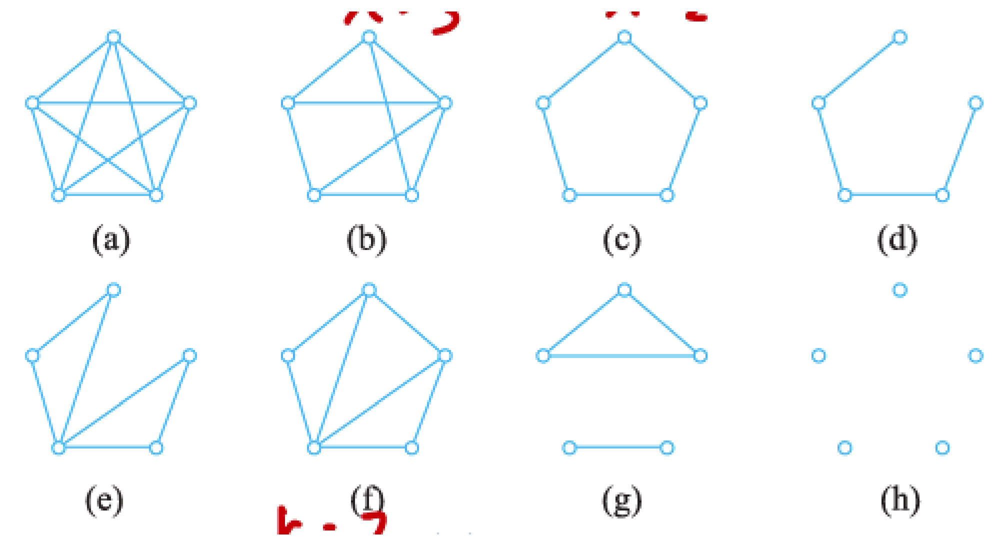


图 5.3.1

不难看出两条短程线长度都是 7。

6. 求下列各图的κ, λ，并指出各是几连通图及几边-连通图，最后分别排序。



解：

$\kappa_1 = 4, \lambda_1 = 4$，$1,2,3,4-$ 连通图，1,2,3,4 边-连通图
$\kappa_2 = 3, \lambda_2 = 3$，$1,2,3-$ 连通图，1,2,3 边-连通图
$\kappa_3 = 2, \lambda_3 = 2$，$1,2-$ 连通图，1,2 边-连通图
$\kappa_4 = 1, \lambda_4 = 1$，$1-$ 连通图，1 边-连通图
$\kappa_5 = 1, \lambda_5 = 2$，$1-$ 连通图，1,2 边-连通图
$\kappa_6 = 2, \lambda_6 = 2$，$1,2-$ 连通图，1,2 边-连通图
$\kappa_7 = 0, \lambda_7 = 0$，$0-$ 连通图，0 边-连通图
$\kappa_8 = 0, \lambda_8 = 0$，$0-$ 连通图，0 边-连通图
点连通程度：$a > b > c = f > d = e > g = h$
边连通程度：$a > b > c = e = f > d > g = h$

7.（1）给出$\kappa = \lambda = \delta$的无向简单图

（2）给出$\kappa < \lambda < \delta$的无向简单图

解：

（1）K_n, N_n

（2）在两个$K_n, n \geq 4$之间放置一个顶点v，并连接v与每一个K_n的两个顶点，则$\kappa = 1, \lambda = 2; \delta = \begin{cases} 3 \text{ if } n{=}4 \\ 4 \text{ if } n{\geq}5 \end{cases}$

8. 设G为$n(\geq 4)$阶无向简单图，$\delta(G) \geq 3$，证明G中存在长度≥ 4的圈

证：

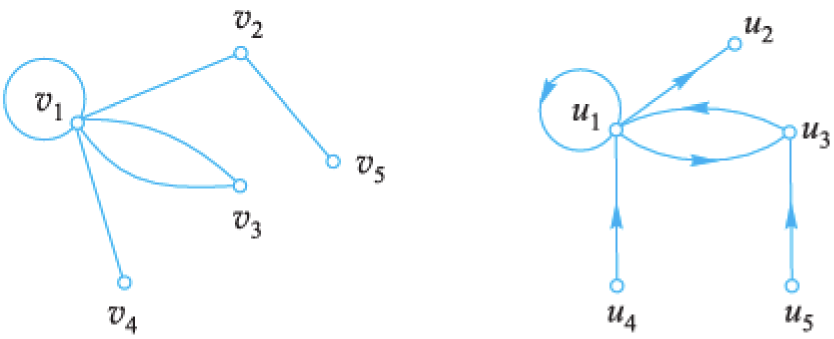
证明 不妨设 G 是连通图，否则，因为 G 的各连通分支的最小度也都大于等于 3，因而可对它的某个连通分支进行讨论. 设 u,v 为 G 中任意两个顶点，由于 G 是连通图，因而 u,v 之间存在通路. 由定理 5.2.5 的推论5.2.2可知 u,v 之间存在一条路径. 用扩大路径法扩大这条路径，设最后得到的极大路径为 $\Gamma=v_0v_1\cdots v_l$. 由于 $\delta(G)\geqslant 3$，必有 $l\geqslant 3$. 若 v_0 与 v_l 相邻，则 $\Gamma\cup(v_0,v_l)$ 为长度大于等于 4 的圈. 否则，由于 $d(v_0)\geqslant\delta(G)\geqslant 3$，因而 v_0 除与 Γ 上的 v_1 相邻外，还存在 Γ 上的顶点 v_k 和 v_t，$1<k<t<l$，与 v_0 相邻. 于是，$v_0v_1\cdots v_k\cdots v_tv_0$ 为一个圈且长度大于等于 4 如图 5.3.6 所示. □

图 5.3.6

四. 课后习题

5.4（1）写出（a）中v_1的邻域，闭邻域$N(v_1),\overline{N}(v_1)$

（2）写出（b）中u_1的先驱元集$\Gamma^-(u_1)$，后继元集$\Gamma^+(u_1)$，邻域$N(u_1)$，闭邻 域$\overline{N}(u_1)$



(a) (b)

图 5.4.5

解：（1）$N(v_1)=\{v_2,v_3,v_4\},\overline{N}(v_1)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

（2）$\Gamma^-(u_1)=\{u_3,u_4\},\Gamma^+(u_1)=\{u_2,u_3\},N(u_1)=\{u_2,u_3,u_4\},\overline{N}(u_1)=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$

5.7 已知有向图D的度数列$(2,3,2,3)$，出度列$(1,2,1,1)$，求D的入度列及 $\Delta(D),\delta(D),\Delta^+(D),\delta^+(D),\Delta^-(D),\delta^-(D)$

解：入度列为$(1,1,1,2)\Delta(D)=3,\delta(D)=2,\Delta^+(D)=2,\delta^+(D)=1,\Delta^-(D)=2,\delta^-(D)=1$

5.15 下列各数列中哪些是可简单图化的，试给出两个非同构的简单图

（1）$(2,3,3,5,5,6,6)$

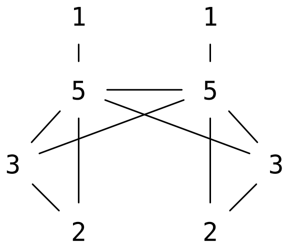
（2）$(1,1,2,2,3,3,5,5)$

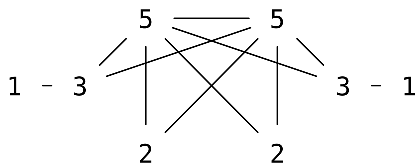
（3）$(2,2,2,2,3,3)$

解：

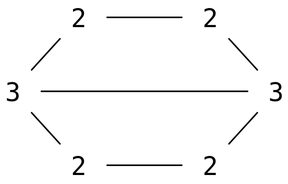
（1）不可；两个 6 度顶点只能与其余 5 个顶点相邻，此时 2 度顶点只能与两个 6 度顶点相邻，5 度顶点只能与两个 6 度顶点和三个 3 度顶点相邻，3 度顶点只能与两个 6 度顶点和一个 5 度顶点相邻，矛盾

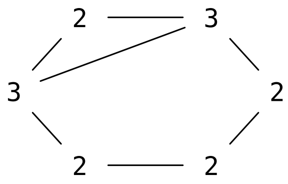
（2）可；





（3）可；





5.21 无向图G如图所示

（1）求G的全部点割集和边割集，并指出其中的割点和桥（割边）

（2）求G的点连通度$\kappa(G)$和边连通度$\lambda(G)$

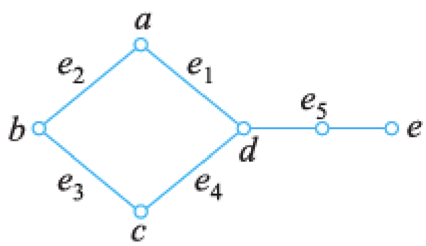


图 5.4.6

解：

（1）点割集：$\{d\},\{a,c\}$
边割集：$\{e_5\},\{e_1,e_2\},\{e_1,e_3\},\{e_1,e_4\},\{e_2,e_3\},\{e_2,e_4\},\{e_3,e_4\}$
割点：d 桥：e_5

（2）$\kappa(G)=1$ ，$\lambda(G)=1$

5.43 有向图D如图所示。
（1）D中有多少种非同构的圈，简单回路？
（2）求a到d的短程线和距离$d<a,d>$
（3）求d到a的短程线和距离$d<d,a>$
（4）判断D是哪类连通图
（5）对D的基图求解（1）（2）（3）

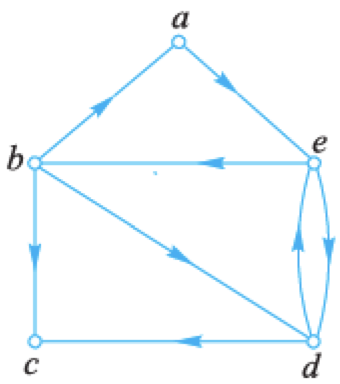


图 5.4.9

解：（1）2（长度为：d->e，3：b→a→e→b、b→d→e→b）；
3：d→e→d；b→a→e→b；b→d→e→b
（2）$a \to e \to d, d = 2$
（3）$d \to e \to b \to a, d = 3$
（4）单向，弱
（5）非同构圈类型：
- 长度 2（由多重边构成），
- 长度 3（三角形），
- 长度 4（四边形），
- 长度 5（五边形）。

简单回路总数：
- 2-圈 1 个：(d, e, d)，
- 三角形 3 个：$\{a, b, e\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d\}$，
- 四边形 2 个：$\{a, b, d, e\}, \{b, c, d, e\}$，
- 五边形 1 个：$\{a, b, c, d, e\}$。

a 到 d 的最短路及距离：a - e - d 与 a - b - d，距离 2。
d 到 a 的最短路及距离：d - e - a 与 d - b - a，距离 2。

5.50 设G是n阶m条边的无向连通图，证明：$m \geq n - 1$

证：

- i). 当$n = 1$时，$m = 0 = n - 1$，成立；当$n = 2$时，$m \geq 1 = n - 1$，成立
- ii). 假设当$n = k$时，结论成立，即k阶连通图G中$m \geq k - 1$，现证当$n = k + 1$时结论也成立。设G为$k + 1$阶连通图，边数为m，去掉G中一个顶点v，得到图$G - v$，则有以下两种情况：
  - (1) $G - v$仍然是连通图，则由假设知$G - v$边数$m' \geq k - 1$，因为G连通，v在G中至少与 1 个顶点相连，即$d(v) \geq 1 m = m' + d(v) \geq k = (k + 1) - 1$，结论成立
  - (2) G'变成非连通图，则G'有t个连通分支$G_1, G_2, ..., G_t$，设第i个分量顶点数为$n_i, (n_1 + n_2 + ... + n_t) = k$；边数为$m_i$，每个分量是连通的，按照归纳假设$m_i \geq n_i - 1$，故$m' = \sum_{i=1}^{t} m_i \geq \sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) = k - t$。另一方面，为使$G$在加入$v$后整体连通，$v$至少与每个分量的一个顶点相连，即$d(v) \geq t$，因此$m = m' + d(v) \geq k - t + t = k = (k + 1) - 1$

- 结论成立