数据结构与算法 A 笔记（以模块划分）

第 3 章：栈与队列

3.1 栈（运算只在表的一端进行）

一. 栈的定义

1. 后进先出（LIFO）

2. 栈的基本操作：入栈（push）、出栈（pop）、取栈顶元素（top）

3. 应用：表达式求值，消除递归，DFS

二. 栈的抽象数据类型

```
template<class T>
class Stack {
public:
    void clear(); // 清空栈
    bool push(const T item); // 入栈，成功返回真
    bool pop(T& item); // 出栈，成功返回真，并将栈顶元素存入item
    bool top(T& item); // 取栈顶元素，成功返回真，并将栈顶元素存入item
    bool isEmpty(); // 判断栈是否为空
    bool isFull(); // 判断栈是否已满
};
```

三. 火车进出栈问题

四. 栈的实现

1. 顺序栈：使用向量实现，顺序表的简化版

a. 顺序栈的类定义

```
template<class T>
class arrStack:public Stack<T> {
private:
    int mSize;// 栈的最大容量
    int top;//栈顶位置，应< mSize
    T* st;// 栈元素存储数组
public:
    arrStack(int size){
        mSize = size;
        top = -1; // 栈顶指针初始化为-1，表示栈为空
        st = new T[mSize]; // 动态分配数组
    }
    arrStack(){
        top=-1;
    }
    ~arrStack(){
```

```
        delete[] st; // 释放动态分配的数组
    }
    void clear() {
        top = -1; // 清空栈
    }
}
```

b. 按压入先后次序，最后压入的元素编号为 4，然后依次为 3, 2, 1

c. 顺序栈的溢出：

- 当栈满时，无法再入栈，可能导致内存溢出或程序崩溃（上溢）
- 对空栈进行出栈操作，可能导致访问非法内存（下溢）

d. 压入栈顶

```
bool arrStack<T>::push(const T item){
    if(top==mSize-1){
        cout<<"栈已满, 无法入栈"<<endl;
        return false;
    }
    else{
        st[++top] = item; // 将元素压入栈顶
        return true;
    }
}
```

e. 弹出栈顶

```
bool arrStack<T>::pop(T& item){
    if(top==-1){
        cout<<"栈为空, 无法出栈"<<endl;
        return false;
    }
    else{
        item = st[top--]; // 将栈顶元素存入item, 并将栈顶指针下移
        return true;
    }
}
```

2. 链式栈：用单链表存储，指针方向从栈顶向下链接

a. 链式栈的创建

```
template<class T>class lnkStack:public Stack<T> {
private:
    Link<T>* top; // 栈顶指针
    int size; // 栈的大小
public:
    lnkStack(int defSize) {
        top = NULL; // 初始化栈顶指针为空
        size = 0; // 栈的大小初始化为0
    }
    ~lnkStack() {
        clear(); // 析构时清空栈
    }
}
```

b. 链式栈的入栈

```
bool lnkStack<T>::push(const T item){
    Link<T>* tmp=new Link<T>(item,top); // 创建新节点，指向当前栈顶
    top = tmp; // 更新栈顶指针
    size++; // 栈大小增加
    return true; // 入栈成功
}
Link(const T info,Link* nextValue){
    data=info;
    next=nextValue;
}
```

c. 链式栈的出栈

```
bool lnkStack<T>::pop(T& item){
    Link<T>* tmp;
    if(size==0){
        cout<<"栈为空，无法出栈"<<endl;
        return false; // 栈为空，出栈失败
    }
    else{
        item = top->data; // 将栈顶元素存入item
        tmp = top; // 保存当前栈顶节点
        top = top->next; // 更新栈顶指针
        delete tmp; // 释放原栈顶节点
        size--; // 栈大小减少
        return true; // 出栈成功
    }
}
```

3. 顺序栈和链式栈的比较 -时间效率
- 顺序栈：入栈和出栈操作时间复杂度均为 O(1)
- 链式栈：入栈和出栈操作时间复杂度均为 O(1)
- 空间效率
    - 顺序栈：空间利用率较低，可能浪费内存
    - 链式栈：空间利用率较高，动态分配内存，节省空间，但每个节点需要额外存储指针，增加了内存开销
    - 实际应用中，顺序栈更广泛

4. 栈的应用
- 表达式求值：使用栈来存储操作数和操作符，按照运算优先级进行计算

  a. 中缀表达式
    - 中缀表达式：操作符在操作数之间，如 `4*x*(2*x+a)-c`

  b. 后缀表达式
    - 后缀表达式：操作符在操作数之后，如 `4 x * 2 x * a + * c -`

  c. 后缀表达式求值
    - 循环：依次顺序读入表达式的符号序列（假设以＝作为输入序列

  的结束），并根据读入的元素符号逐一分析
    - 当遇到的是一个操作数，则压入栈顶

- 当遇到的是一个运算符，就从栈中两次取出栈顶，按照运算符对这两个操作数进行计算。然后将计算结果压入栈顶
- 如此继续，直到遇到符号＝，这时栈顶的值就是输入表达式的值

【例】

> ## 题目描述
>
> 复制 Markdown 展开 进入 IDE 模式
>
> 所谓后缀表达式是指这样的一个表达式：式中不再引用括号，运算符号放在两个运算对象之后，所有计算按运算符号出现的顺序，严格地由左而右新进行（不用考虑运算符的优先级）。
>
> 本题中运算符仅包含 `+-*/`。保证对于 `/` 运算除数不为 0。特别地，其中 `/` 运算的结果需要**向 0 取整**（即与 C++ `/` 运算的规则一致）。
>
> 如：`3*(5-2)+7` 对应的后缀表达式为：`3.5.2.-*7.+@`。在该式中，`@` 为表达式的结束符号。`.` 为操作数的结束符号。
>
> ## 输入格式
>
> 输入一行一个字符串 s，表示后缀表达式。
>
> ## 输出格式
>
> 输出一个整数，表示表达式的值。
>
> ## 输入输出样例
>
> | 输入 #1 复制 | 输出 #1 复制 |
> | --- | --- |
> | 3.5.2.-*7.+@ | 16 |
>
> | 输入 #2 复制 | 输出 #2 复制 |
> | --- | --- |
> | 10.28.30./*7.-@ | -7 |
>
> ## 说明/提示
>
> 数据保证，$1 \le |s| \le 50$，答案和计算过程中的每一个值的绝对值不超过 10^9。

```
#include<iostream>
#include<string>
#include<stack>
#include<cctype>
using namespace std;
int main(){
    string s;
    cin>>s;
    stack<int> st;
    string tmp="";
    for(int i=0;i<s.size();i++){
        char c = s[i];
        if(c=='@')
            break;
        if(isdigit(c))
```

```
                tmp+=c;
            else if(c=='.'){
                if(!tmp.empty()){
                    st.push(stoi(tmp));
                    tmp = "";
                }
            }
            else if(c=='+' || c=='-' || c=='*' || c=='/'){
                int a=st.top();
                st.pop();
                int b=st.top();
                st.pop();
                int res;
                switch(c){
                    case '+':
                        res = b + a;
                        break;
                    case '-':
                        res = b - a;
                        break;
                    case '*':
                        res = b * a;
                        break;
                    case '/':
                        // if(a == 0) {
                        //     cout << "Error: Division by zero" << endl;
                        //     return 1; // Exit on division by zero
                        // }
                        res = b / a;
                        break;
                }
                st.push(res);
            }
        }
        cout<<st.top()<<endl;
        return 0;
    }
```

【关键点】1. 边进栈边计算

2. >10 数的合并操作

d. 后缀计算器的类定义

```
class Calculator {
private:
    Stack<double> s;
    bool GetTwoOperands(double& opd1, double& opd2);
    void Compute(char op);
public:
    Calculator(){};
    void Run();
    void Clear();
}
```

```cpp
template<class ELEM>
bool Calculator<ELEM>::GetTwoOperands(ELEM& opd1, ELEM& opd2) {
    if (s.isEmpty()) {
        cout << "栈为空，无法获取操作数" << endl;
        return false;
    }
    opd1 = s.top(); // 获取栈顶元素
    s.pop(); // 弹出栈顶元素
    if (s.isEmpty()) {
        cout << "栈中只有一个操作数" << endl;
        return false;
    }
    s.pop(opd2); // 再弹出第一个操作数
    return true; // 成功获取两个操作数
}


template<class ELEM>
void Calculator<ELEM>::Compute(char op) {
    bool result;
    ELEM opd1, opd2;
    result = GetTwoOperands(opd1, opd2);
    if(result==true)
          switch(op) {
              case '+':
                  s.push(opd2 + opd1);
                  break;
              case '-':
                  s.push(opd2 - opd1);
                  break;
              case '*':
                  s.push(opd2 * opd1);
                  break;
              case '/':
                  if (opd1 == 0) {
                      cout << "Error: Division by zero" << endl;
                      return; // Exit on division by zero
                  }
                  s.push(opd2 / opd1);
                  break;
              default:
                  cout << "Unknown operator: " << op << endl;
          }
      else s.ClearStack();
}


template <class ELEM> void Calculator<ELEM>::Run(void) {
char c;
ELEM newoperand;
while (cin >> c, c!= '=') {
    switch(c) {
```

```
            case '+': case '-': case '*': case '/':
                Compute(c);
                break;
            default:
                cin.putback(c); cin >> newoperand;
                S.Push(newoperand);
                break;
        }
    }
    if (!S.IsEmpty())
        cout << S.Pop() << endl; // 印出求值的最后结果
}
```

e. 中缀表达式转后缀表达式

- 当输入是操作数，直接输出到后缀表达式序列
- 当输入是左括号，压入栈顶
- 当输入的是运算符时： WHile

1. 如果栈非空 and 栈顶不是左括号 and 输入运算符的优先级 “≤” 栈顶运算符的优先级，将当前栈顶元素弹栈，放到后缀表达式序列中（此步反复循环，直到上述 if 条件不成立）；将输入的运算符压入栈中。

2. 否则把输入的运算符压栈（>当前栈顶运算符才压栈!）

- 当输入是右括号时，先判断栈顶是否为空

1. 如果栈顶为空，报错

2. 如果非空，则把栈中的元素依次弹出，遇到第一个左括号为止，将弹出的元素输出到后缀表达式的序列中（弹出的 开括号不放到序列中） 若没有遇到开括号，说明括号也不匹配，做异常处理，清栈退出

- 最后，当中缀表达式的符号序列全部读入时，若栈内仍有元素，把它们全部依次弹出，都放到后缀表达式序列尾部。 - 若弹出的元素遇到开括号时，则说明括号不匹配，做错误异常处理，清栈退出

【例】

题目描述

复制 Markdown 折叠 进入 IDE 模式

平常我们书写的表达式称为中缀表达式，因为它将运算符放在两个操作数中间，许多情况下为了确定运算顺序，括号是不可少的，而后缀表达式就不必用括号了。

后缀标记法：书写表达式时采用运算紧跟在两个操作数之后，从而实现了无括号处理和优先级处理，使计算机的处理规则简化为：从左到右顺序完成计算，并用结果取而代之。

例如：`8-(3+2*6)/5+4` 可以写为：`8 3 2 6 * + 5 / - 4 +`

其计算步骤为：

```
8 3 2 6 * + 5 / - 4 +
8 3 12 + 5 / - 4 +
8 15 5 / - 4 +
8 3 - 4 +
5 4 +
9
```

编写一个程序，完成这个转换，要求输出的每一个数据间都留一个空格。

输入格式

就一行，是一个中缀表达式。输入的符号中只有这些基本符号 `0123456789+-*/^()`，并且不会出现形如 `2*-3` 的格式。

表达式中的基本数字也都是一位的，不会出现形如 `12` 形式的数字。

所输入的字符串不要判错。

输出格式

若干个后缀表达式，第 $i+1$ 行比第 i 行少一个运算符和一个操作数，最后一行只有一个数字，表示运算结果。

输入输出样例

输入 #1 复制

```
8-(3+2*6)/5+4
```

输出 #1 复制

```
8 3 2 6 * + 5 / - 4 +
8 3 12 + 5 / - 4 +
8 15 5 / - 4 +
8 3 - 4 +
5 4 +
9
```

输入 #2 复制

```
2^2^3
```

输出 #2 复制

```
2 2 3 ^ ^
2 8 ^
256
```

说明/提示

运算的结果可能为负数，`/` 以整除运算。并且中间每一步都不会超过 2^{31}。字符串长度不超过 100。

注意乘方运算 `^` 是从右向左结合的，即 `2 ^ 2 ^ 3` 为 `2 ^ (2 ^ 3)`，后缀表达式为 `2 2 3 ^ ^`。

其他同优先级的运算是从左向右结合的，即 `4 / 2 / 2 * 2` 为 `((4 / 2) / 2) * 2`，后缀表达式为 `4 2 / 2 / 2 *`。

保证不会出现计算乘方时幂次为负数的情况，故保证一切中间结果为整数。

```cpp
#include<iostream>
#include<stack>
#include<string>
#include<vector>
#include<cctype>
using namespace std;

int grade(char op){
    if(op=='^')
        return 4;
    else if(op=='*'||op=='/')
        return 3;
    else if(op=='+'||op=='-')
        return 2;
    else if(op=='(')
        return 1;
    else
        return 0;
}

void cal(vector<string>& v){
    for(int i=0;i<v.size();i++){
        string c=v[i];
        if(c=="+"||c=="-"||c=="*"||c=="/"||c=="^"){
            int a=stoi(v[i-2]);
            int b=stoi(v[i-1]);
```

```
            int res;
            if(c=="+"){
                res=a+b;
            }
            else if(c=="-"){
                res=a-b;
            }
            else if(c=="*"){
                res=a*b;
            }
            else if(c=="/"){
                res=a/b;
            }
            else if(c=="^"){
                res=1;
                for(int j=0;j<b;j++){
                    res*=a;
                }
            }
            v[i-2]=to_string(res);
            v.erase(v.begin() + i - 1, v.begin() + i + 1);
            return;
        }
    }
}

int main() {
    stack<char> op;
    vector<string> all;
    string str;
    cin>>str;
    for(char c:str){
        if(isdigit(c)){
            all.push_back(string(1,c));
        }
        else if(c=='('){
            op.push(c);
        }
        else if (c == '+' || c == '-' || c == '*' || c == '/' || c == '^') {
            while (!op.empty() && op.top() != '(') {
                char top_op = op.top();
                if (grade(top_op) > grade(c) || (grade(top_op) == grade(c) && c !=
'^')) {  // 乘方右结合特判
                    all.push_back(string(1, op.top()));
                    op.pop();
                }
                else break;
            }
            op.push(c);
        }
        else if(c==')'){
            if(!op.empty()){
                while(op.top()!='('){
                    all.push_back(string(1,op.top()));
```

```
                op.pop();
            }
            op.pop(); // 弹出 '('
        }
    }
}
while(!op.empty()){
    all.push_back(string(1,op.top()));
    op.pop();
}
while(1){
    for (int i = 0; i < all.size(); i++) {
        cout << all[i];
        if (i < all.size() - 1) cout << " ";
    }
    cout << endl;
    if(all.size()==1) break;
    cal(all);
}
return 0;
}
```

【关键点】1. char 到 string 的转换 `c->string(1,c)`

2. 乘方右结合特判：`if (grade(top_op) > grade(c) || (grade(top_op) == grade(c) && c != '^'))`

3. 注意空栈问题易导致死循环

- 消除递归：将递归转化为迭代，使用栈来模拟函数调用
- 深度优先搜索（DFS）：使用栈来存储访问的节点，实现图的遍历

3.2 队列（运算只在表的两端进行）

一. 队列的定义

1. 先进先出（FIFO）

2. 限制访问点的线性表

3. 队头：`front` 队尾：`rear` 入队：`enQueue` 出队：`deQueue` 取队首：`getFront` 判空：`isEmpty`

二. 队列的抽象数据结构

```
template<class T> class Queue{
public:
    void clear();
    bool enQueue(const T item);
    bool deQueue(T& item);
    bool getFront(T& item);
    bool isEmpty();
    bool isFull();
};
```

三.队列的实现方式

1.顺序队列（关键在防止假溢出）

a.用向量存储队列元素，用两个变量分别指向 队列的前端(front)和尾端(rear)

b.队列的溢出

- 上溢：当队列满时，再做进队操作
- 下溢：当队列空时，再做删除操作
- 假溢出：当 rear = mSize-1 时，再作插入运算就会产生溢出，如果这时队列的前端还有许多空位置，这种现象称为假溢出

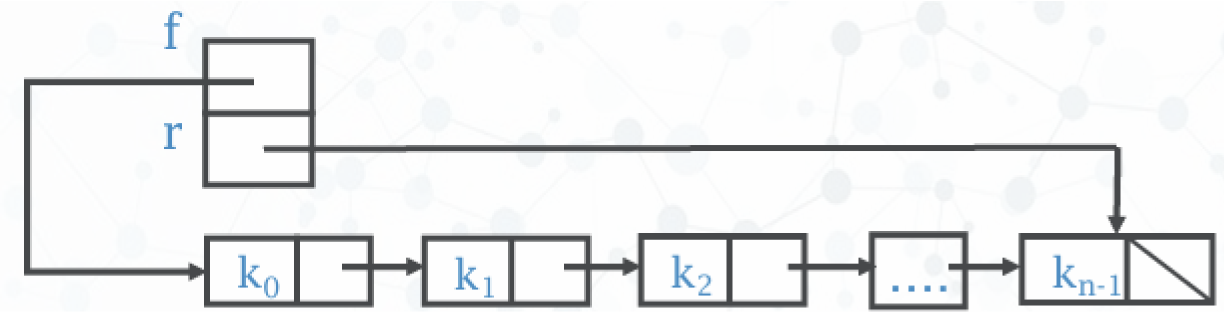
c.循环队列的类定义：

```
class arrQueue:public Queue<T>{
private:
    int mSize;
    int front;
    int rear;
    T* qu;
public:
    arrQueue(int size){
        mSize=size+1;// 浪费一个存储空间，以区别队列空和队列满
        qu=new T[mSize];
        front=rear=0;
    }
    ~arrQueue(){
        delete [] qu;
    }
};

bool arrQueue<T>::enQueue(const T item){
    if(((rear+1)%mSize)==front){
        cout << "队列已满，溢出" << endl;
        return false;
    }
    qu[rear]=item;
    rear=(rear+1)%mSize;
    return true;
}

bool arrQueue<T>::deQueue(T& item){
    if(front==rear){
        cout << "队列为空" << endl;
        return false;
    }
```

```
    item=qu[front];
    front=(front+1)%mSize;
    return true;
}
```

2. 链式队列（用单链表方式存储，队列中每个元素对应链表中的一个结点）

a. 链式队列的表示（链接指针的方向是从队列的前端向尾端链接）



b. 链式队列的类定义

```
template<class T>
class lnkQueue:public Queue<T>{
private:
    int size;
    Link<T>* front;
    Lint<T>* rear;
public:
    lnkQueue(int size);
    ~lnkQueue();
}

bool enQueue(const T item){
    if(rear==NULL){
        front=rear=new Link<T>(item,NULL);
    }
    else{
        rear->next=new Link<T>(item,NULL);
        rear=rear->next;
    }
    size++;
    return true;
}

bool deQueue(T* item){
    Link<T>* tmp;
    if(size==0){
        cout << "队列为空" << endl;
        return false;
    }
    *item=front->data;
    tmp=front;
    front=front->next;
    delete tmp;
    if(front==NULL)
```

```
        rear=NULL;
    size--;
    return true;
}
```

c. 顺序队列与链式队列的比较

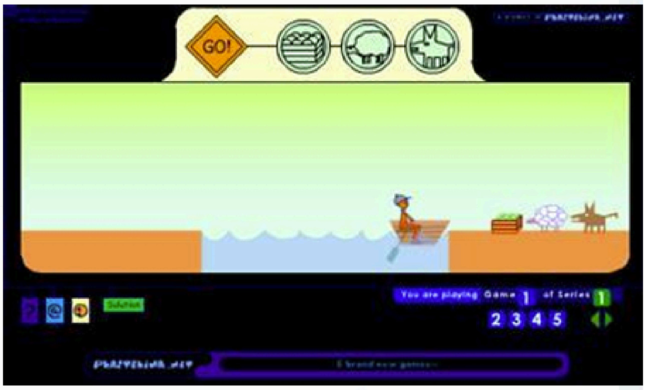
- 顺序队列 固定的存储空间
- 链式队列 可以满足大小无法估计的情况
- 都不允许访问队列内部元素

d. 队列的应用

- 调度或缓冲
- BFS

e. 农夫过河问题

- **问题抽象**： “人狼羊菜”乘船过河
  - 只有人能撑船，船只有两个位置（包括人）
  - 狼羊、羊菜不能在没有人时共处



- 假定采用 BFS 解决农夫过河问题
  - 采用队列做辅助结构，把下一步所有可能达到的状态都放在队列中，然后顺序取出对其分别处理，处理过程中再把下一步的状态放在队列中
  - 数据抽象：起始岸位置：0，目标岸：1
  - 数据表示：整数 status 表示上述四位二进制描述的状态
  - 算法抽象：从状态 0000（整数 0）出发，寻找全部由安全状态构成的状态序列，以状态 1111（整数 15）为最终目标。状态序列中每个状态都可以从前一状态通过农夫（可以带一样东西）划船过河的动作到达。序列中不能出现重复状态
  - 算法设计：

```
void solve(){
     int movers,i,location,newlocation;
     vector<int> route(END+1,-1); //记录已考虑的状态路径
     queue<int> moveTo;
     moveTo.push(0x00);// 相当于enQueue
     route[0]=0;
}

while(!moveTo.empty()&&route[15]==-1){
     status=moveTo.front();//得到现在的状态
     moveTo.pop();//相当于deQueue
     for(movers=1;movers<=8;movers<<=1){
          //农夫总是在移动，随农夫移动的也只能是在农夫同侧的东西
          if(farmer(status)==(bool)(status&movers)){
```

```
                newstatus =status ^(0x08|movers);
                if(safe(newstatus)&&(route[newstatus]==-1)){
                       route[newstatus]=status;
                       moveTo.push(newstatus);}
                }
            }
        }
   }

   // 反向打印出路径
  if (route[15] != -1) {
      cout<<"The reverse path is :" << endl;
      for (intstatus = 15; status >= 0; status = route[status]) {
          cout<< "The status is : “ << status << endl;
          if(status == 0) break;
      }
  }
  else
      cout<< "No solution.“ << endl;
```

e. 栈和队列的相互模拟

3.3 栈的应用：递归到非递归

一. 简单的递归转换

1. 【例】阶乘

- 递归：

```
int f(int n){
    if(n<=0)
        return 1;
    return n*f(n-1);
}
```

- 非递归：

```
int f(int n){
    int m=1;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        m*=i;
    return m;
}
```

- 尾递归：

```
int f(int n,int x){
    if(n<=0)
        return x;
    return f(n-1,x*n);
}
```

2. 一类特殊的递归函数—尾递归

- 指函数的最后一个动作是调用函数本身的递归函数，是递归的一种特殊情形

- 尾递归的本质是：将单次计算的结果缓存起来，传递给下次调用，相当于自动累积
- 计算仅占用常量栈空间
- 命令式语言：编译器可以对尾递归进行优化，没有必要存储函数调用栈信息，不会出现栈溢出 （例如 gcc －O2）
- 函数式语言：靠尾递归来实现循环

3.函数运行时的动态内存分配
- stack：函数调用
- heap(堆)：指针所指向空间的分配、全局变量

二.递归函数调用原理

1.函数调用及返回的步骤
- 调用
  - 保存调用信息（参数，返回地址）
  - 分配数据区（局部变量）
  - 控制转移给被调函数的入口
- 返回
  - 保存返回信息
  - 释放数据区
  - 控制转移到上级函数（主调用函数）

2.递归的实现
- 一个问题能否用递归实现，看其是否具有下面特点
  - 有递推公式（1 个或多个）
  - 有递归结束条件（1 个）
- 编写递归函数时，程序中必须有相应的语句
  - 一个（或者多个）递归调用语句
  - 测试结束语句
  - 先测试，后递归调用
- 递归程序的特点
  - 易读、易编，但占用额外内存空间

3.函数运行时的存储分配
- 静态分配
  - 在非递归情况下，数据区的分配可以在程序运行前进行，一直到整个程序运行结束才释放，这种分配称为静态分配
  - 采用静态分配时，函数的调用和返回处理比较简单，不需要每次分配和释放被调函数的数据区
- 动态分配
  - 在递归（函数）调用的情况下，被调函数的局部变量不能静态地分配某些固定单元，而必须每调用一次就分配一份，以存放当前所使用的数据，当返回时随即释放。【大小不确定，值不确定】
  - 动态分配在内存中开辟一个称为运行栈的足够大的动态区

4.动态存储分配

5.运行栈中的活动记录

- 函数活动记录是动态存储分配中的基本单元
  - 当调用函数时，函数的活动记录包含为其局部数据分配的存储空间
- 运行栈随着程序执行时发生的调用链或生长或缩小
  - 每次调用执行进栈操作，把被调函数的活动信息压入栈顶
  - 函数返回执行出栈操作，恢复到上次调用所分配的数据区
- 一个函数在运行栈上可以有若干不同的活动记录，每个都代表了一个不同的调用
  - 递归深度决定运行栈中活动记录的数目
  - 同一局部变量在不同的递归层次被分配给不同的存储空间

三.机械的递归转换

1.递归转非递归的通用方法

- 1. 设置一工作栈保存当前工作记录

```
enumrdType{0, 1, 2}; //对应三种返回情况
public class knapNode{
    int s, n;          // 背包容量和物品数目
    rdType rd;     // 返回情况标号
    bool k;            // 结果单元
};
```

- 2. 设置 t+2 个语句标号
  - label 0: 第一个可执行语句
  - label t+1: 设置在函数体结束处
  - label i (1 <= i <= t): 第 i 个递归返回处
- 3. 增加非递归入口

```
Stack<knapNode> stack;
knapNodetmp;
tmp.s= s; tmp.n= n, tmp.rd = 0;
stack.push(tmp);    // 入栈
```

- 4. 替换第 i (i = 1, …, t)个递归规则
  - 若函数体第 i (i=1, …, t)个递归调用语句形如 recf(a1, a2, …, am)；则用以下语句替换：

- 并增加标号为 i 的退栈语句

```
S.push(i, a1, ..., am);
goto label0;

label i: S.pop(&x);
//根据取值X进行相应的返回处理
```

- 5. 所有递归出口处增加语句：

```
goto label t+1;
```

- 6. 标号为 t+1 的语句的格式

```
S.pop(&tmp);
switch (tmp.rd) {
case 0: return;
case 1: gotolabel1; break;
// ……
cast t: gotolabelt; break;
default: break;
}
```

- 7. 改写循环和嵌套中的递归
- 8. 优化处理

2. [简化的 0-1 背包问题] 我们有 n 件物品，物品 i 的重量为 w[i] 。如果限定每种物品（0）要么完全放进背包（1）要么不放进背包；即物品是不可分割的。问： 能否从这 n 件物品中选择若干件放入背包，使其重量之和恰好为 s

```
bool knap(int s,int n){
    if(s==0)
        return true;
    if((s<0)||(s>0&&n<1))
        return false;
    if(knap(s-w[n-1],n-1)){
        cout<<w[n-1];
        return true;
    }
    else
        return knap(s,n-1);
}
```

第 4 章：字符串

4.1 字符串的基本概念

一. 最基本定义

1. 特殊的线性表，即元素为字符的线性表

2. $n(\geq 0)$ 个字符的有限序列， 一般记作 $S: c_0c_1c_2...c_{n-1}$，S是串名，$c_0c_1c_2...c_{n-1}$是串值，c_i是串中字符，n是串长

二. 字符/符号

1. 字符(char) ：组成字符串的基本单位

2. 取值依赖于字符集 Σ（同线性表，结点的有限集合）

三. 字符编码：单字节（8 bits）

- 用 ASCII 码对 128 个符号进行编码
- 其他编码方式： UNICODE…

四. 处理子串的函数

1. 子串（被包含）
- 空串是任意串的子串
- 真子串：非空且不为自身的子串

2. 函数

操作类别	方法	描述
子串	substr ()	返回一个串的子串
拷贝/交换	swap ()	交换两个串的内容
	copy ()	将一个串拷贝到另一个串中
赋值	assign ()	把一个串、一个字符、一个子串赋值给另一个串中
	=	把一个串或一个字符赋值给另一个串中
插入/追加	insert()	在给定位置插入一个字符、多个字符或串
	append () / +=	将一个或多个字符、或串追加在另一个串后
拼接	+	通过将一个串放置在另一个串后面来构建新串
查询	find ()	找到并返回一个子序列的开始位置
替换/清除	replace ()	替换一个指定字符或一个串的字串
	clear ()	清除串中的所有字符
统计	size () / length()	返回串中字符的数目
	max_size ()	返回串允许的最大长度

五. 字符串中的字符

1. 重载下标运算符[ ]

```
char& string::operator[](int n);
```

2. 按字符定位下标

```
int string::find(char c,int start=0);
```

3. 反向寻找，定位尾部出现的字符

```
int string::rfind(char c,int pos=0);
```

4.2 字符串的存储结构

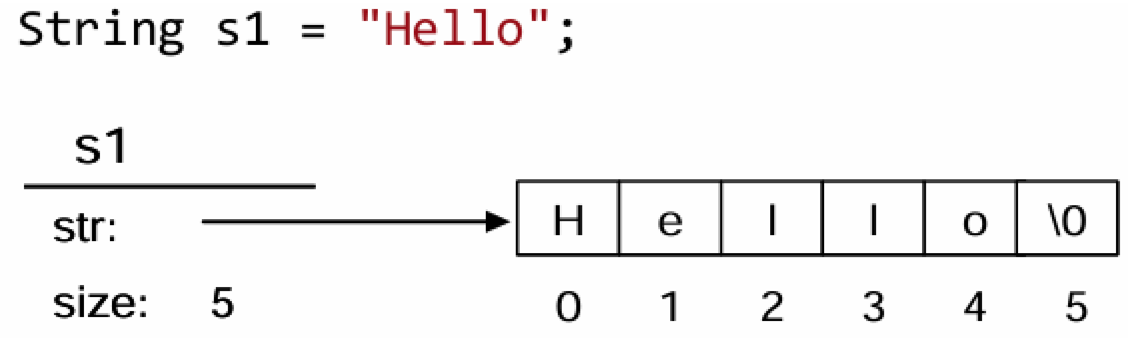
一. 字符串的顺序存储

1. 处理方案
- 用 S[0] 作为记录串长的存储单元 (Pascal)
  - 缺点：限制了串的最大长度不能超过 256
- 为存储串的长度，另辟一个存储的地方
  - 缺点：串的最大长度一般是静态给定的，不是动态申请数组空间
- 用一个特殊的末尾标记 '\0' (C/C++)

2. 早期：顺序，链接，索引

二·字符串类的存储结构

```
private:
char* str;
int size;
```



三. 串的运算实现

```
int strcmp(char* d,char* s){
    int i;
    for(int i=0;d[i]==s[i];i++){
        if(d[i]=='\0'&&s[i]=='\0')
            return 0;
    }
    return (d[i]-s[i])/abs(d[i]-s[i]);
}
```

4.4 字符串的模式匹配

一. 模式匹配

1. 定义：在目标 T 中寻找一个给定的模式 P 的过程

2. 应用：文本编辑时的特定词，句的查找，DNA 信息的提取

3. 用给定的模式 P，在目标字符串 T 中搜索与模式 P 全同的一个子串，并求出 T 中第一个和 P 全同匹配的子串（简称为“配串”），返回其首字符位置

二. 朴素算法

1. 穷举法

```
int Findpat(string T,string P,int startindex){
    for(int g=startindex;g<=T.length()-P.length();g++){
        for(int j=0;((j<P.length())&&(T[g+j]==P[j]));j++)
            if(j==P.length())
                return g;
    }
    return -1;
}
```

2. 效率分析:假定目标 T 的长度为 n，模式 P 长度为 m（m≤n），在最坏的情况下，每一次循环都不成功，则一共要进行比较（n-m+1）次,每一次“相同匹配”比较所耗费的时间，是 P 和 T 逐个字符比较的时间，最坏情况下，共 m 次 - 因此，整个算法的最坏时间开销估计为 $O(m * n)$

三. KMP 算法

1. 简介：一种高效字符串匹配算法，通过预处理模式串生成 next 数组（部分匹配表），在匹配失败时跳过无效比较，将时间复杂度优化至 O(n+m)（n 为主串长度，m 为模式串长度）

2. next 数组

- 定义：next[i]表示模式串 P[0..i]中，最长相等真前缀和真后缀的长度（不包括子串本身）
- 作用：当匹配失败时，根据 next 值移动模式串指针，避免主串回溯
- 构建逻辑
  - P[0]：无前缀/后缀，next[0]=0
  - P[1..8]：若 P[i] == P[j]，则 j++；否则 j = next[j-1]回退

【例】

经典编程题：字符串匹配

题目描述

给定文本串text和模式串pattern，找出pattern在text中所有出现的起始位置（下标从0开始） 2 7 。

输入示例:

复制

```
5
ABABC
10
ABABABCABAB
```

输出示例:

复制

```
0 5
```

解：

【例】

题目描述

复制 Markdown 展开 进入 IDE 模式

给出两个字符串 s_1 和 s_2，若 s_1 的区间 $[l, r]$ 子串与 s_2 完全相同，则称 s_2 在 s_1 中出现了，其出现位置为 l。
现在请你求出 s_2 在 s_1 中所有出现的位置。

定义一个字符串 s 的 border 为 s 的一个**非 s 本身**的子串 t，满足 t 既是 s 的前缀，又是 s 的后缀。
对于 s_2，你还需要求出对于其每个前缀 s' 的最长 border t' 的长度。

输入格式

第一行为一个字符串，即为 s_1。
第二行为一个字符串，即为 s_2。

输出格式

首先输出若干行，每行一个整数，**按从小到大的顺序**输出 s_2 在 s_1 中出现的位置。
最后一行输出 $|s_2|$ 个整数，第 i 个整数表示 s_2 的长度为 i 的前缀的最长 border 长度。

输入输出样例

输入 #1 复制

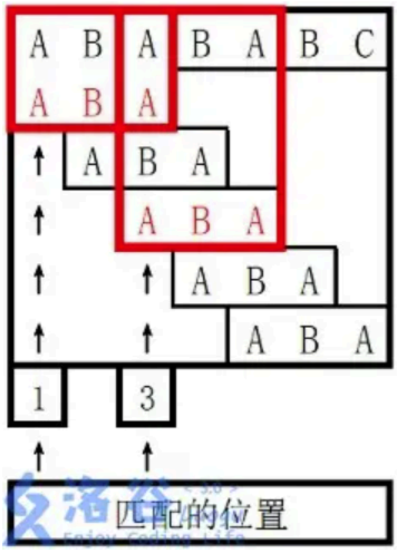
```
ABABABC
ABA
```

输出 #1 复制

```
1
3
0 0 1
```

说明/提示

样例 1 解释



。

对于 s_2 长度为 3 的前缀 `ABA`，字符串 `A` 既是其后缀也是其前缀，且是最长的，因此最长 border 长度为 1。

数据规模与约定

本题采用多测试点捆绑测试，共有 3 个子任务。

- Subtask 0（30 points）：$|s_1| \le 15$，$|s_2| \le 5$。
- Subtask 1（40 points）：$|s_1| \le 10^4$，$|s_2| \le 10^2$。
- Subtask 2（30 points）：无特殊约定。
- Subtask 3（0 points）：Hack。

对于全部的测试点，保证 $1 \le |s_1|, |s_2| \le 10^6$，$s_1, s_2$ 中均只含大写英文字母。

解：

第 5 章：二叉树

5.1 二叉树的概念

一 • 定义：二叉树(binary tree)由结点的有限集合构成，这个有限集合或者为空集(empty)，或者为由一个根结点(root)及两棵互不相交、分别称作这个根的左子树(left subtree)和右子树(right subtree)的二叉树组成的集合

二 • 五种基本形态

三 • 术语

1.结点
- 子结点、父结点、最左子结点
- 兄弟结点、左兄弟、右兄弟
- 分支结点、叶结点
  - 没有子树的结点称作 叶结点（或树叶、终端结点）
  - 非终端结点称为分支结点

2.边：两个结点的有序对

3.路径、路径长度
- 除结点 k0 外的任何结点 k∈K，都存在一个结点序列 k0，k1，…，ks，使得 k0 就是树根，且 ks=k，其中有序对 $< k_i - 1, k_i >$ ∈ r（1≤i≤s）。这样的结点序列称为从根到结点 k 的一条路径，其路径长度为 s（包含的边数）

4.祖先，后代
- 若有一条由 k 到达 ks 的路径，则称 k 是 ks 的祖先，ks 是 k 的子孙

5.层数
- 根为第 0 层，其他结点的层数等于其父结点的层数加 1

6.深度
- 层数最大的叶结点的层数

7.高度
- 层数最大的叶结点的层数加 1

8.满二叉树
- 一棵二叉树的任何结点，或者是树叶，或者恰有两棵非空子树

9.完全二叉树
- 最多只有最下面的两层结点度数可以小于 2，且最下一层的结点都集中最左边

10.扩充二叉树
- 所有空子树，都增加空树叶，
- 外部路径长度 E 和内部路径长度 I 满足：E = I + 2n（n 是内部结点个数）

四•主要性质

1.一棵二叉树，若其终端结点数为 n_0，度为 2 的结点数为n_2， 则 $n_0 = n_2 + 1$

证：设总边数 A，总结点数 B，节点分为n_0, n_1, n_2则$B = A - 1 = n_0 + n_1 + n_2 - 1$，而$B = n_1 + 2n_2$，联立即得

2.满二叉树定理：非空满二叉树树叶数目等于其分支结点数加 1

证：满二叉树要求所有分支结点（非叶结点）的度均为 2（即不存在度为 1 的结点），故 $n_2 = n_b$

3. 满二叉树定理推论：一个非空二叉树的空子树数目（空指针数）等于其结点数加 1

4.有 n 个结点（n>0）的完全二叉树的高度为 $\log_2(n + 1)$

5.2 二叉树的抽象数据类型

一・抽象数据类型

1. 逻辑结构 + 运算

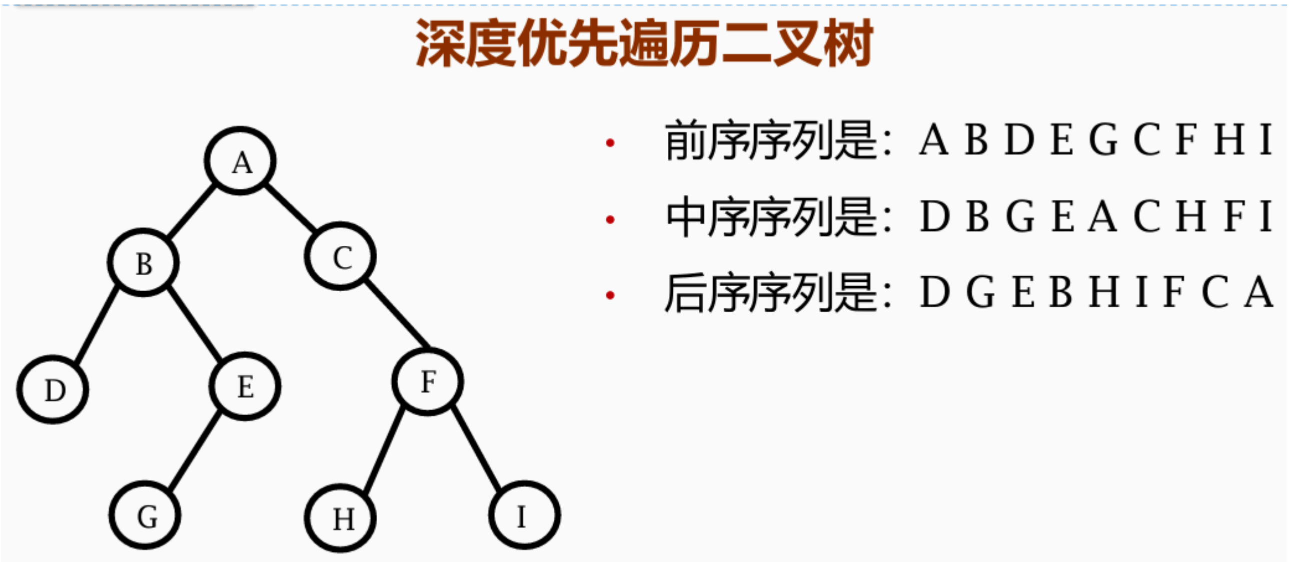
- 针对整棵树
  - 初始化二叉树
  - 合并两棵二叉树
- 围绕结点
  - 访问某个结点的左子结点、右子结点、父结点
  - 访问结点存储的数据

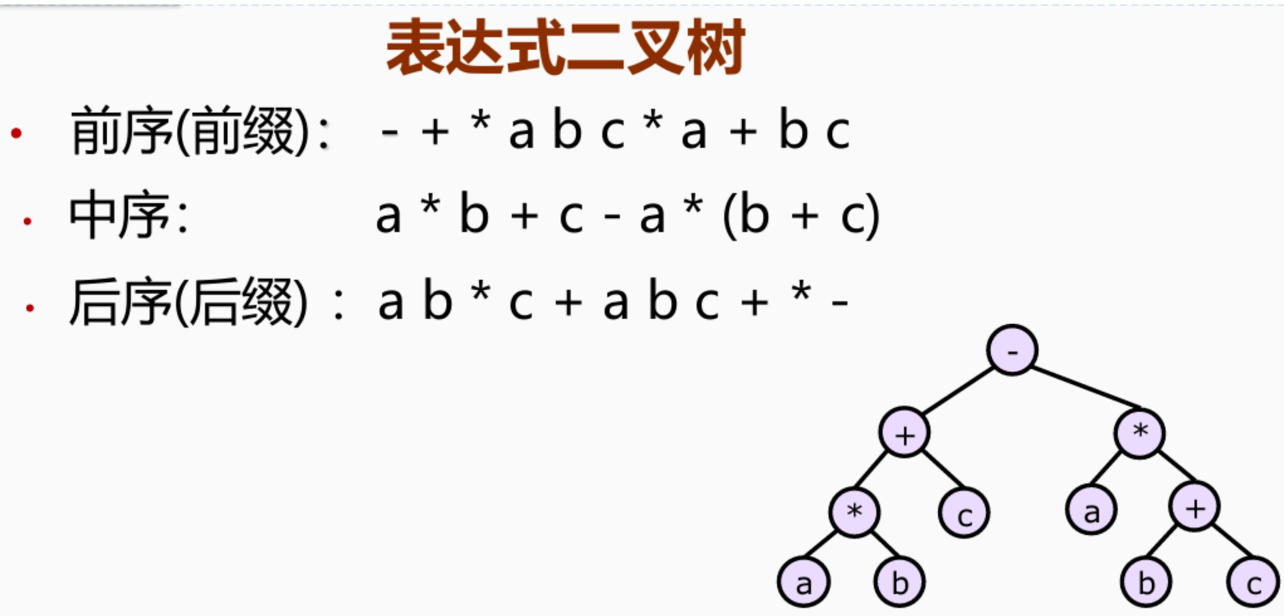
```
template<class T>
class BinaryTreeNode{
friend class BinaryTree<T>;// 声明二叉树类为友元类
private:
    T info;// 二叉树结点数据域
public:
    BinaryTreeNode(); // 缺省构造函数
    BinaryTreeNode(const T& ele); // 给定数据的构造
    BinaryTreeNode(const T& ele,BinaryTreeNode<T>* l,BinaryTreeNode<T>* r);// 子树构造结点
    T value() const;// 返回当前结点数据
    BinaryTreeNode<T>* leftchild() const;// 返回左子树
    void setLeftchild(BinaryTreeNode<T>*); // 设置左子树
    void setRightchild(BinaryTreeNode<T>*); // 设置右子树
    void setValue(const T& val); // 设置数据域
    bool isLeaf() const; // 判断是否为叶结点
    BinaryTreeNode<T>& operator =(const BinaryTreeNode<T>& Node);// 重载赋值操作符
}

template <class T>
class BinaryTree {
private:
BinaryTreeNode<T>* root; // 二叉树根结点
public:
BinaryTree() {root = NULL;};
~BinaryTree(){DeleteBinaryTree(root);};
bool isEmpty() const;// 判定二叉树是否为空树
BinaryTreeNode<T>* Root() {return root;}; // 返回根结点
};

BinaryTreeNode<T>* Parent(BinaryTreeNode<T>* current);     // 返回父
BinaryTreeNode<T>* LeftSibling(BinaryTreeNode<T> *current);// 左兄
BinaryTreeNode<T>* RightSibling(BinaryTreeNode<T> *current); // 右兄
void CreateTree(const T& info,
BinaryTree<T>& leftTree, BinaryTree<T>&  rightTree);    // 构造新树
void PreOrder(BinaryTreeNode<T> *root);     // 前序遍历二叉树或其子树
void InOrder(BinaryTreeNode<T> *root);
// 中序遍历二叉树或其子树
void PostOrder(BinaryTreeNode<T> *root);    // 后序遍历二叉树或其子树
```

```
void LevelOrder(BinaryTreeNode<T> *root);  // 按层次遍历二叉树或其子树
void DeleteBinaryTree(BinaryTreeNode<T> *root); // 删除二叉树或其子树
```

二 • DFS 遍历二叉树

- 前序法：访问根结点；按前序遍历左子树；按前序遍历右子树
- 中序法：按中序遍历左子树；访问根结点；按中序遍历右子树
- 后序法：按后序遍历左子树；按后序遍历右子树；访问根结点





- 递归遍历

```
template<class T>
void BinaryTree<T>::DepthOrder(BinaryTree<T>* root){
    if(root!=NULL){
        Visit(root);//前序
        DepthOrder(root->leftchild()); // 递归访问左子树
        Visit(root);//中序
        DepthOrder(root->leftchild());// 递归访问右子树
        Visit(root);//后序
```

```
    }
}
```

【例】已知某二叉树的中序序列为 $\{A,B,C,D,E,F,G\}$, 后序序列为 $\{B,D,C,A,F,G,E\}$ ；则其前序序列为何？

解：

1. **确定根节点**
   - 后序遍历的最后一个节点是整棵二叉树的根节点 1 3 5 。
     - 后序序列：$\{B, D, C, A, F, G, \boxed{E}\}$ → 根节点为 E。
2. **划分左右子树（基于中序序列）**
   - 在中序序列 $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ 中：
     - 根节点 E 左侧 $\{A, B, C, D\}$ 是左子树 1 5 。
     - 根节点 E 右侧 $\{F, G\}$ 是右子树 1 5 。
3. **提取子树的后序序列**
   - **左子树**：后序序列中根节点 E 前的部分（长度为左子树节点数 4）→ $\{B, D, C, A\}$
   - **右子树**：后序序列中左子树后、根节点前的部分 → $\{F, G\}$ 3 5 。
4. **递归处理子树**
   - **左子树（中序 $\{A, B, C, D\}$，后序 $\{B, D, C, A\}$）**：
     - 根节点：后序最后一个元素 A 3 5 。
     - 中序划分：A 左侧为空（无左子树），右侧 $\{B, C, D\}$ 为右子树 5 。
     - 右子树的后序：$\{B, D, C\}$ → 根节点为 C。
       - C 的中序左侧 $\{B\}$ 是左子树，右侧 $\{D\}$ 是右子树 5 。
   - **右子树（中序 $\{F, G\}$，后序 $\{F, G\}$）**：
     - 根节点：G（后序最后一个） 3 5 。
     - 中序划分：G 左侧 $\{F\}$ 是左子树，右侧为空 1 。

- 非递归算法（用栈模拟）
  - 前序：遇到一个结点，就访问该结点，并把此结点的非空右结点推入栈中，然后下降去遍历它的左子树；遍历完左子树后，从栈顶托出一个结点，并按照它的右链接指示的地址再去遍历该结点的右子树结构

```
template<class T>
void BinaryTree<T>::PreOrderWithoutRecusion(BinaryTree<T>* root){
  using std::stack;
  stack<BinaryTree<T>*> aStack;
  BinaryTree<T>* pointer=root;
  aStack.push(NULL);
  while(pointer){
      Visit(pointer->value());
```

```
        if(pointer->rightchild()!=NULL)
            aStack.push(pointer->rightchild());
        if(pointer->leftchild()!=NULL)
            aStack.push(pointer->leftchild());
        else{
            pointer=aStack.top();
            aStack.pop();
        }
    }
}
```

- 中序：遇到一个结点，把它推入栈中，遍历其左子树；遍历完左子树，从栈顶托出该结点并访问之，按照其右链地址遍历该结点的右子树

```
template<class T>
void BinaryTree<T>::InOrderWithoutRecusion(BinaryTreeNode<T>* root){
    using std::stack;
    stack<BinaryTreeNode<T>*> aStack;
    BinaryTreeNode<T>* pointer=root;
    while(!aStack.empty()||pointer){
        if(pointer){
            aStack.push(pointer);
            pointer=pointer->leftchild();
        }
        else{
            pointer=aStack.top();
            aStack.pop();
            pointer=pointer->rightchild();
        }
    }
}
```

- 后序：给栈中元素加上一个特征位，Left 表示已进入该结点的左子树，将从左边回来；Right 表示已进入该结点的右子树，将从右边回来

```
enum Tags{Left,Right};
template<class T>
class StackElement{
public:
    BinaryTreeNode<T>* pointer;
    Tags tag;
};
template<class T>
void BinaryTree<T>::PostOrderWithoutRecusion(BinaryTreeNode<T>* root){
    using std::stack;
    StackElement<T> element;
    stack<StackElement<T>> aStack;
    BinaryTreeNode<T>* pointer;
    pointer=root;
    while(!aStack.empty()||pointer){
        while(pointer!=NULL){
            element.pointer = pointer;
            element.tag = Left;
            aStack.push(element);
            pointer = pointer->leftchild();
```

```
        }
        element = aStack.top();
        aStack.pop();
        pointer = element.pointer;
        if (element.tag == Left) {
            element.tag = Right;
            aStack.push(element);
            pointer = pointer->rightchild();
        }
        else {
            Visit(pointer->value());
            pointer = NULL;
        }
    }
  }
```

- 二叉树遍历算法的空间代价分析
  - 深搜：栈的深度与树的高度有关，最好$O(\log n)$；最坏$O(n)$

三 • BFS 遍历二叉树

1.

```
void BinaryTree<T>::LevelOrder(BinaryTreeNode<T>* root){
    using std::queue;
    queue<BinaryTreeNode<T>*> aQueue;
    BinaryTreeNode<T>* pointer=root;
    if(pointer)
        aQueue.push(pointer);
    while(!aQueue.empty()){
        pointer=aQueue.front();
        aQueue.pop();
        Visit(pointer->value());
        if(pointer->leftchild())
            aQueue.push(pointer->leftchild());
        if(pointer->rightchild())
            aQueue.push(pointer->rightchild());
    }
}
```

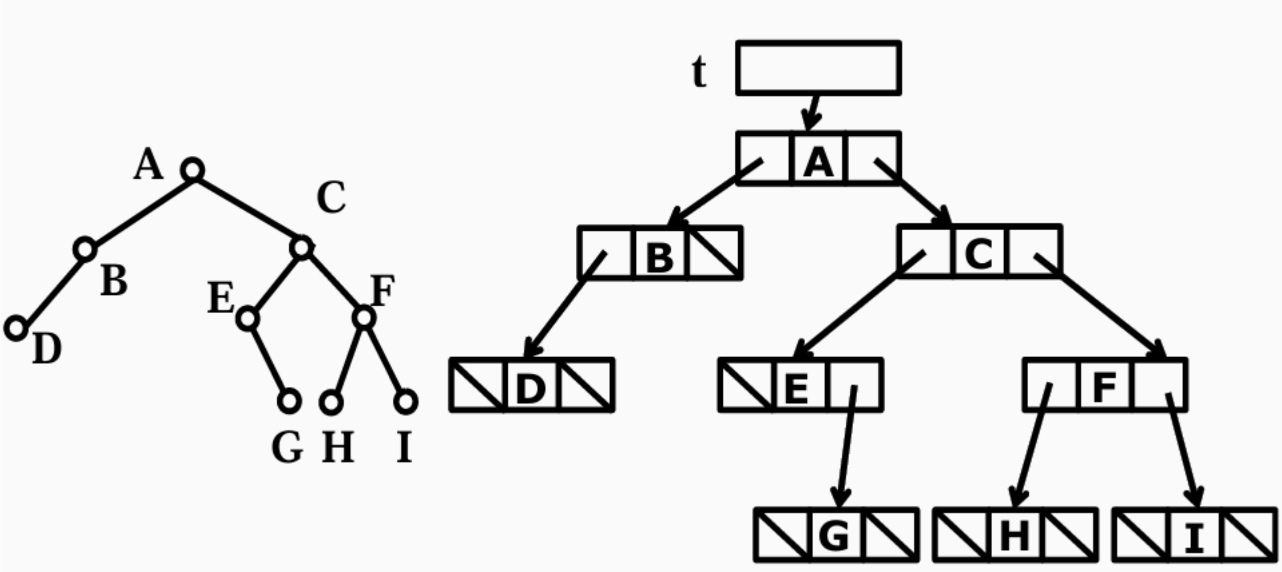
- 时间代价分析：$O(n)$
- 时间代价分析：最好$O(1)$；最坏$O(n)$

5.3 二叉树的存储结构

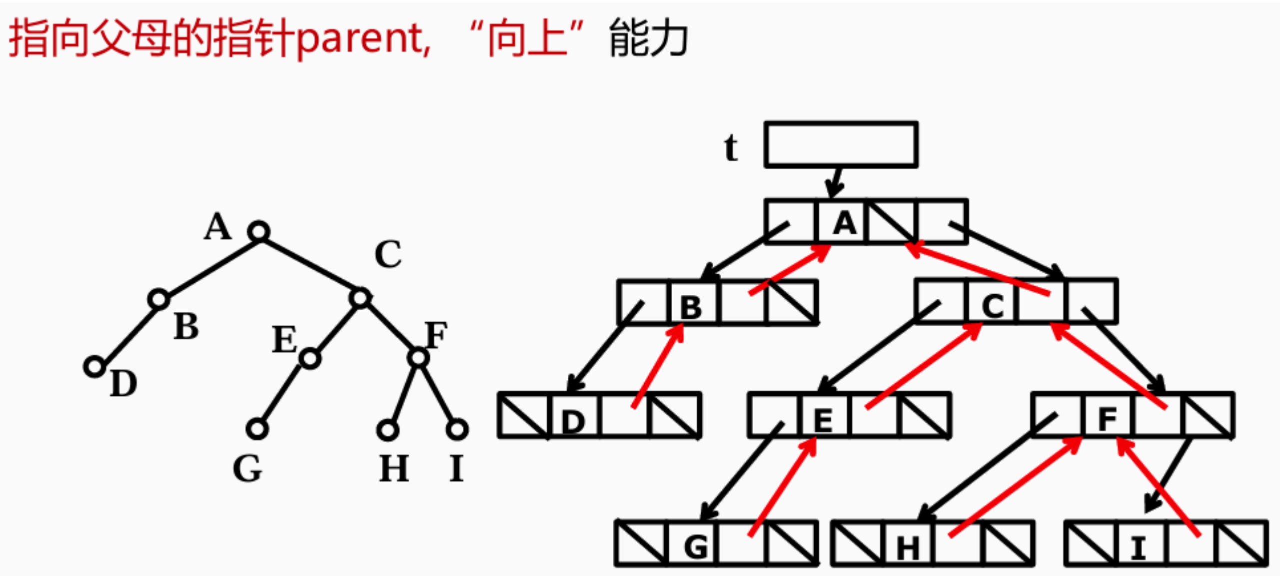
一 • 链式存储结构（二叉树的各结点随机地存储在内存空间中，结点之间的 逻辑关系用指针来链接）

1. 二叉链表

- 指针 left 和 right，分别指向结点的左孩子和右孩子



2. 三叉链表



3. BinaryTreeNode 类中增加两个私有数据成员

```
private:
    BinaryTreeNode<T> *left;
    BinaryTreeNode<T> *right;
```

4. 递归框架寻找父结点——注意返回

```
template<class T>
BinaryTreeNode<T>* BinaryTree<T>::Parent(BinaryTreeNode<T>* rt,BinaryTreeNode<T>*
current){
    BinaryTreeNode<T>* tmp;
    if(rt==NULL)
        return (NULL);
    if(current==rt->leftchild()||current==rt->rightchild())
        return rt;
    if ((tmp =Parent(rt- >leftchild(), current) != NULL)
        return tmp;
    if ((tmp =Parent(rt- > rightchild(), current) != NULL)
```

```
        return tmp;
    return NULL;
}
```

5. 非递归框架找父结点

```
BinaryTreeNode<T>* BinaryTree<T>::Parent(BinaryTreeNode<T> *current)  {
    using std::stack;
    stack<BinaryTreeNode<T>*> aStack;
    BinaryTreeNode<T>* pointer = root;
    aStack.push(NULL);
    while (pointer) {
        if (current == pointer->leftchild() || current == pointer->rightchild())
            return pointer;
        if (pointer->rightchild() != NULL)
            aStack.push(pointer->rightchild());
        if (pointer->leftchild() != NULL)
            pointer = pointer->leftchild();
        else {
            pointer=aStack.top();
            aStack.pop();
        }
    }
}
```

6. 空间开销分析

- 存储密度$\alpha(\leq 1)$表示数据结构存储的效率，$\alpha =$数据本身存储量/整个结构占用的存储总量
- 结构性开销$\gamma = 1 - \alpha$
- 每个结点存两个指针，一个指针域
  - 总空间：$(2p + d)n$
  - 结构性开销：$2pn$
- C++ 可以用两种方法来实现不同的分支与叶结点：
  - 用 union 联合类型定义
  - 使用 C++的子类来分别实现分支结点与叶结点，并采用虚函数 isLeaf 来区别分支结点与叶结点
- 早期节省内存资源:
  - 利用结点指针的一个空闲位（一个 bit）来标记结点所属的类型
  - 利用指向叶的指针或者叶中的指针域来存储该叶结点的值

7. 完全二叉树的下标公式（易推）

5.4 二叉搜索树（BST）

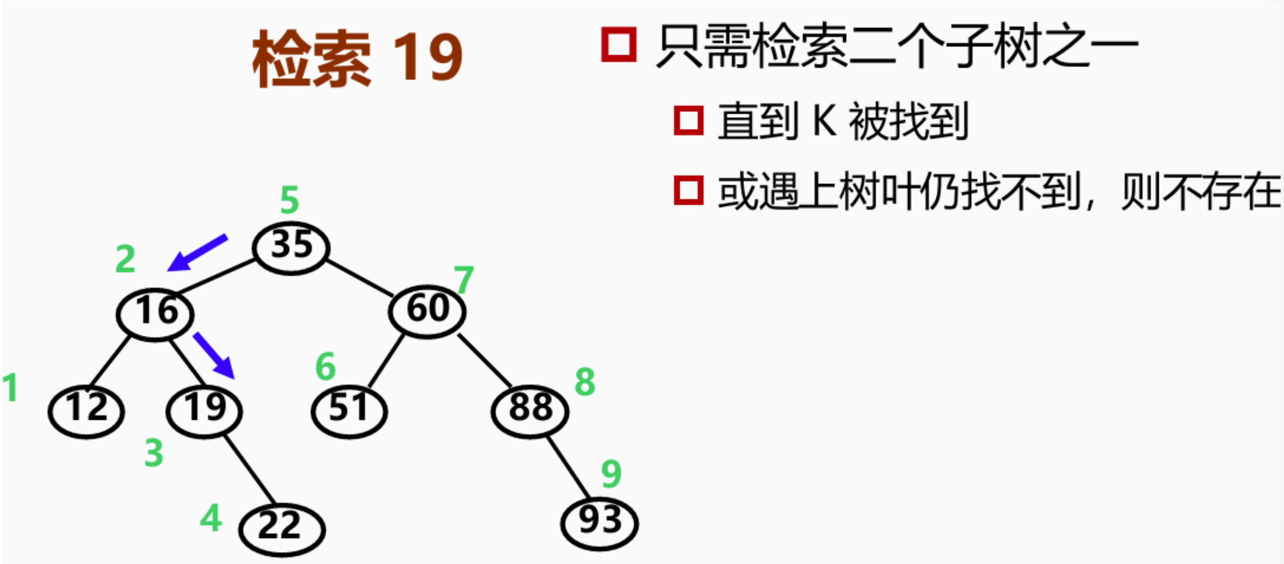
一 • 基本概念

1. 定义：或者是一棵空树；或者是具有下列性质的二叉树：对于任何一个结点，设其值为 K； 则该结点的 左子树(若不空)的任意一个结点的值都 小于 K；该结点的 右子树(若不空)的任意一个结点的值都 大于 K；而且它的左右子树也分别为 BST

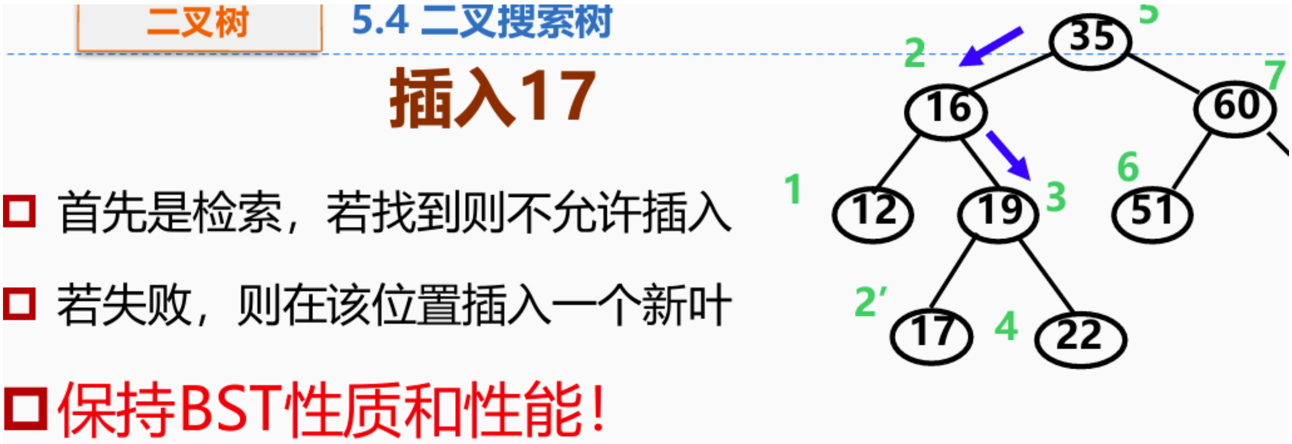
2. 性质： 中序遍历是正序的（由小到大的排列）

3. 功能：

- 检索



- 插入



- 删除
  - 度为 0：直接删除
  - 度为 1：用其子节点替代自身
  - 度为 2：

  a. 寻找替代节点：
  - 后继节点：目标节点右子树中的最小节点（即右子树的最左节点）。
  - 前驱节点：目标节点左子树中的最大节点（即左子树的最右节点）。
  - 任选一种方式，通常使用后继节点

  b. 替换与删除：
  - 将目标节点的值替换为后继/前驱节点的值。递归删除右子树（或左子树）中的后继/前驱节点（此时该节点必为叶子或单子节点，转为情况 1 或 2）。

4. 总结

- 组织内存索引
  - 适用于内存储器，常用红黑树、伸展树等，以维持平衡

- 外存常用 B/B+树
- 保持性质 vs 保持性能

5.5 堆与优先队列

一•堆

1.最小堆定义：对任意节点，其值小于或等于其子节点的值的完全二叉树

2.性质

- 完全二叉树的层次序列，可以用数组表示
- 堆中储存的数是局部有序的，堆不唯一
- 从逻辑角度看，堆实际上是一种树形结构

3.类定义

```
template<class T>
class MinHeap{
private:
    T* heapArray;
    int CurrentSize;
    int MaxSize;
    void BuildHeap();
public:
    MinHeap(const int n);
    virtual ~MinHeap(){delete []heapArray;};
    bool isLeaf(int pos)const;
    int leftchild(int pos)const;
    int rightchild(int pos)const;
    int parent(int pos)const;
    bool Remove(int pos,T& node);
    bool Insert(const T& newNode);
    T& RemoveMin();
    void SiftUp(int position);
    void SiftDown(int left);
}
```

4.对最小堆用筛选法 SiftDown 调整

```
template<class T>
void MinHeap<T>::SiftDown(int position){
    int i=position;
    int j=2*i+1;
    int Ttemp=heapArray[i];
    while (j < CurrentSize) {
        if((j < CurrentSize-1)&&(heapArray[j] > heapArray[j+1]))
            j++;  // j指向数值较小的子结点
        if (temp > heapArray[j]) {
            heapArray[i] = heapArray[j];
            i = j;
            j = 2*j + 1;     // 向下继续
        }
        else break;
    }
```

```
    heapArray[i]=temp;
}
```

5. 对最小堆用筛选法 SiftUp 向上调整

```
template<class T>
void MinHeap<T>::SiftUp(int position){
    int temppos=position;
    T temp=heapArray[temppos];
    while((temppos>0) && (heapArray[parent(temppos)] > temp))   {
        heapArray[temppos]=heapArray[parent(temppos)];
        temppos=parent(temppos);
    }
    heapArray[temppos]=temp;
}
```

6. 建最小堆过程

- 方法

🔧 二、自底向上建堆法（高效批量构建）

适用场景：已知完整数组，时间复杂度 **O(n)**（优于逐次插入的 O(n log n)）[2,5,7]。

步骤：

1. **定位起点**：
   - 从最后一个非叶子节点开始（索引 `start = 数组长度//2 - 1`）。
   - *例*：数组 `[50, 40, 90, 70, 60, 80]` 的最后一个非叶节点索引为 `6//2 - 1 = 2`（值 `90`）[2,7]。
2. **从后向前逐节点下沉（Sift Down）**：
   - 比较当前节点与其左右子节点，若父节点 > 子节点，则与**更小的子节点**交换[4,9]。
   - 递归调整被交换的子树，直到满足堆性质。
   - *流程示例*[1,4]：
     - 调整节点 `90`（索引 2）：与子节点 `80` 交换 → `[50,40,80,70,60,90]`。
     - 调整节点 `40`（索引 1）：子节点 `70,60` 均 ≥40，无需交换。
     - 调整节点 `50`（索引 0）：与子节点 `40` 交换 → `[40,50,80,70,60,90]`，再调整子树（节点 `50` 与 `60` 交换）→ `[40,60,80,70,50,90]`。

➕ 三、边插入边建堆法（动态构建）

适用场景：数据流式输入，单次插入时间复杂度 O(log n) 1 6 9 。

步骤：

1. **插入新元素**：追加到数组末尾 4 6 。
2. **上浮调整（Sift Up）**：
   - 比较新节点与其父节点，若子节点 < 父节点，则交换位置 5 8 。
   - 重复上浮直到根节点或满足堆性质。
   - *示例*（依次插入 `[5, 3, 8, 1]`） 4 6 ：
     - 插入 5 → `[5]`（根节点）。
     - 插入 3 → 与父节点 5 交换 → `[3,5]`。
     - 插入 8 → 父节点 3 更小，不交换 → `[3,5,8]`。
     - 插入 1 → 先与父节点 5 交换 → `[3,1,8,5]`，再与父节点 3 交换 → `[1,3,8,5]`。

- 操作
  - 删除特定元素
  - 插入特定元素
- 建堆效率分析
  - 建堆算法时间代价：$O(n)$

建堆效率分析

n 个结点的堆，高度 $d = \lfloor \log_2 n + 1 \rfloor$。根为第 0 层，则第 i 层结点个数为 2^i，

考虑一个元素在堆中向下移动的距离。

- 大约一半的结点深度为 d-1，不移动（叶）。
- 四分之一的结点深度为 d-2，而它们至多能向下移动一层。
- 树中每向上一层，结点的数目为前一层的一半，而子树高度加一。因而元素移动的最大距离的总数为

$$\sum_{i=1}^{\log n}(i-1)\frac{n}{2^i}=O(n)$$

- 插入结点、删除普通元素和删除最小元素的平均时间代价和最差时间代价都是$O(\log(n))$

7. 堆的应用

- 优先队列：堆的应用之一，支持插入、删除最小元素、查找最小元素等操作
- 堆排序：利用堆的性质进行排序，时间复杂度为$O(n\log n)$
- 图算法：Dijkstra 算法、Prim 算法等都使用堆来优化性能

5.6 Huffman 树及其应用

一 • 等长编码

1. 定义：每个字符的编码长度相同的编码方式

2. 包括：ASCII 码、中文编码等

3. 表示 n 个不同字符需要 n 个二进制码字，长度为 $\log_2(n)$ 位

二 • 数据压缩与不等长编码

1. 特点：可以利用字符的出现频率来编码， 经常出现的字符的编码较短，不常出现的字符编码较长

2. 优点：数据压缩既能节省磁盘空间，又能提高运算速度

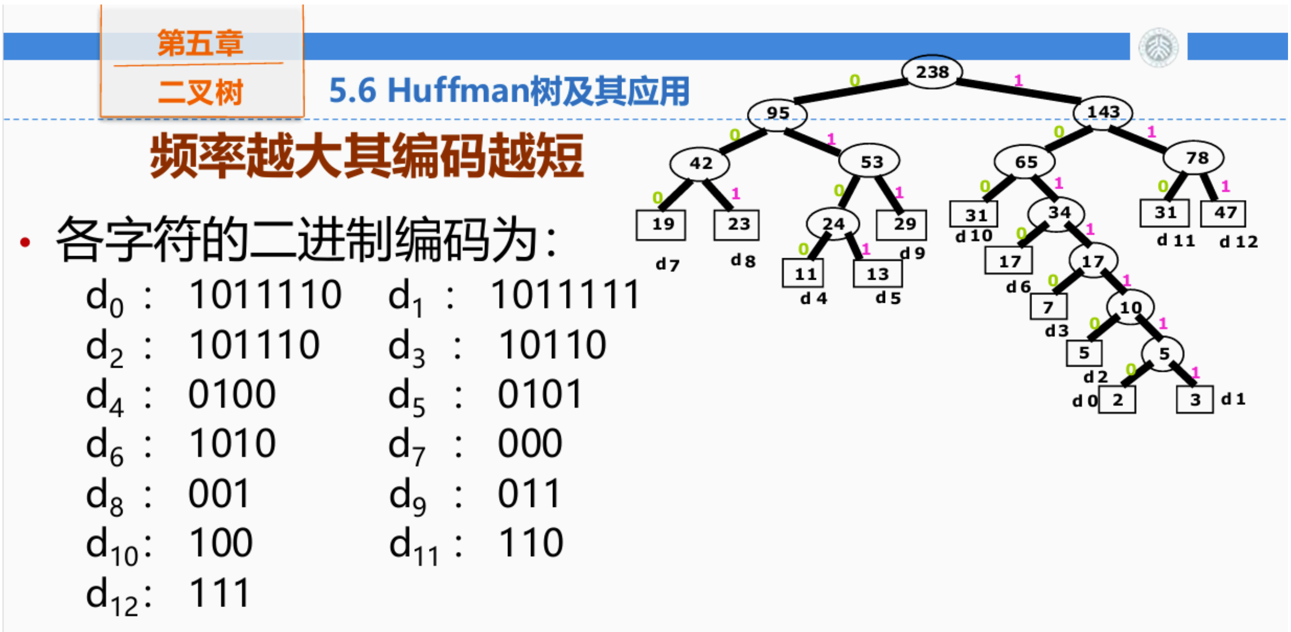
三·前缀编码

1. 定义：任何一个字符的编码都不是另外一个字符编码的前缀

2. 特点：前缀编码可以唯一地表示一个字符串，且不会产生歧义

四·Huffman 树与前缀编码

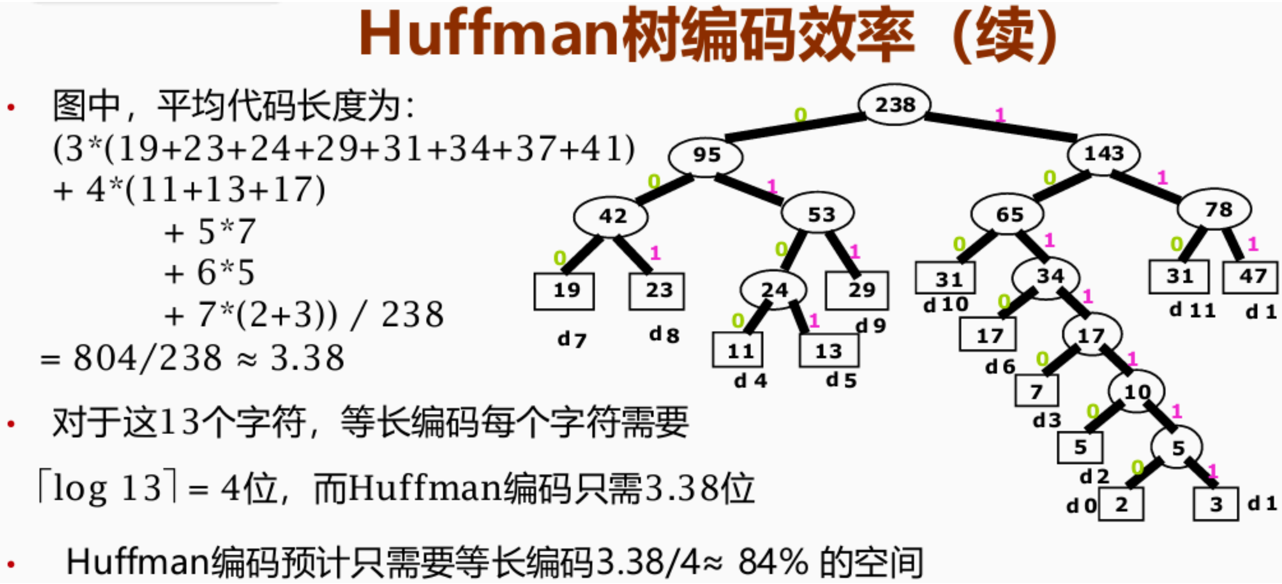
1. 建立 Huffman 树
- 首先，按照“权”(例如频率)将字符排为一列
- 然后，选择权值最小的两个结点作为左右子树，构造一个新结点，其权值为两子树权值之和
- 重复上述过程，直到所有结点合并为一棵树



2. 译码
- 从左至右逐位判别代码串，直至确定一个字符
- 译出了一个字符，再回到树根，从二进制位串中的下一位开始继续译码

3. huffman 性质
- 含有两个以上结点的一棵 Huffman 树中，字符使用频率最小的两个字符是兄弟结点，而且其深度不比树中其他任何叶结点浅
- 对于给定的一组字符，函数 HuffmanTree 实现了“最小外部路径权重”

4. Huffman 树编码效率



5. 应用
- 数据压缩：如 ZIP、RAR 等文件压缩格式
- 图像压缩：如 JPEG 图像格式
- 音频压缩：如 MP3、AAC 等音频格式

第 6 章：树

6.1 树的定义和基本术语

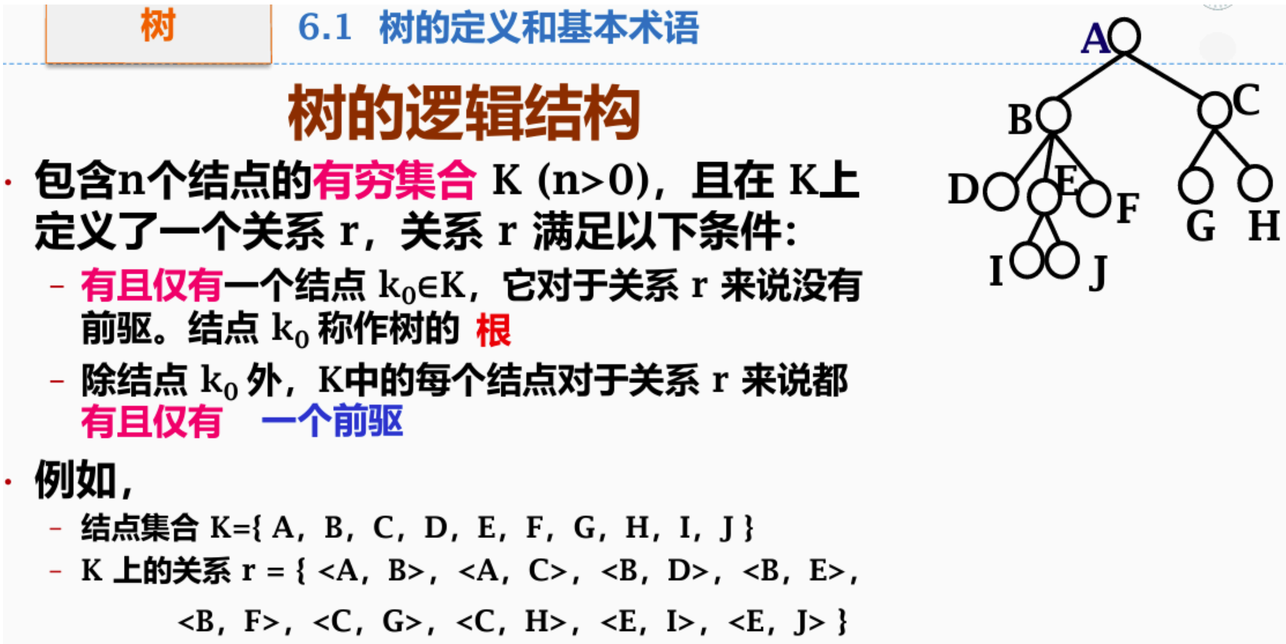
一 • 树和森林

1. 定义：树是包含 n 个节点的有限集合 T，其中 n>=1，且满足以下性质：
- 存在一个特定的节点称为根节点(root)，其余节点分为若干互不相交的子集，每个子集也是一棵树，称为根节点的子树(subtree)
- 每个节点有且仅有一个父节点(parent)，根节点没有父节点

2. 有向有序树：子树的相对次序是重要的

3. 度为 2 的有序树并不是二叉树

4. 树的逻辑结构

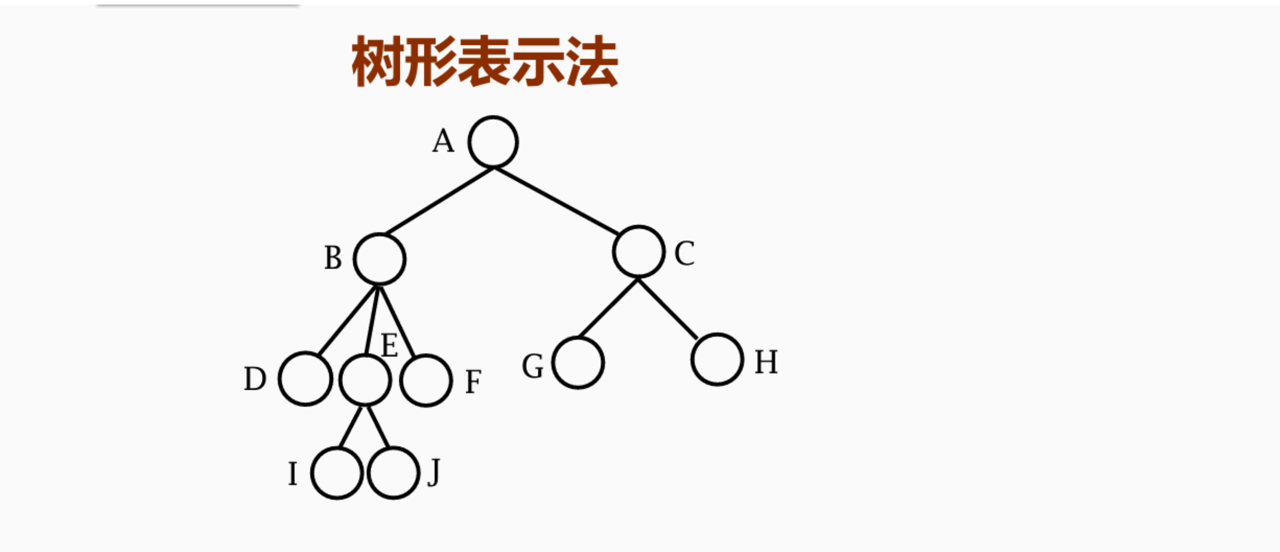


5. 树的相关术语

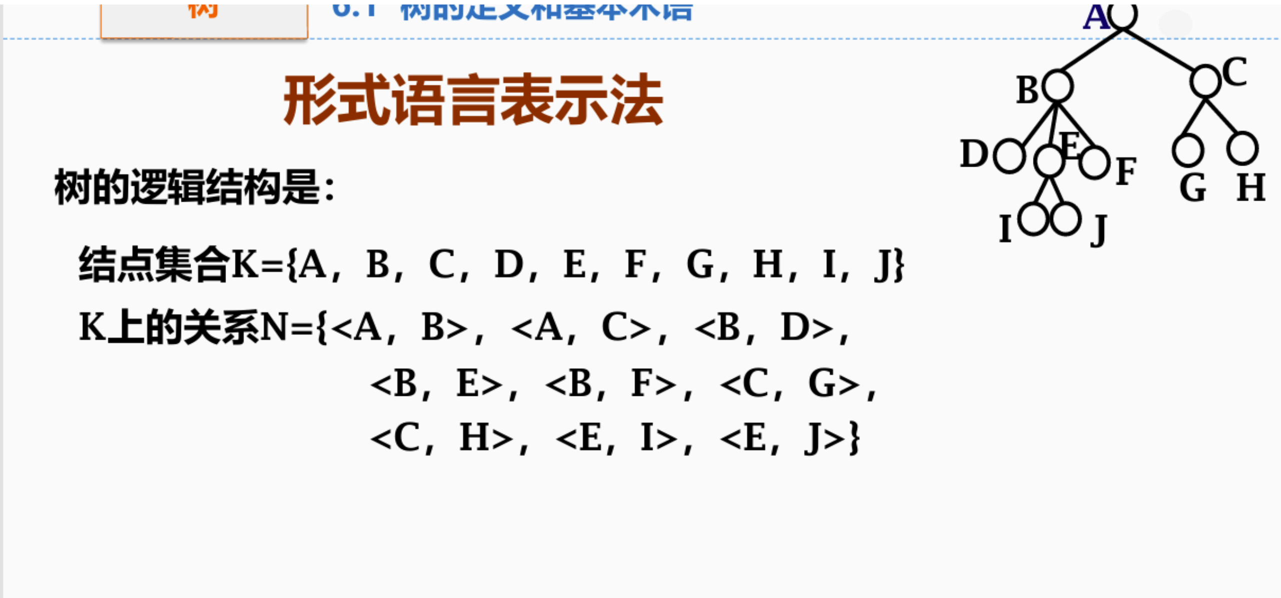
- 结点
  - 子结点、父结点、最左子结点
  - 兄弟结点、左兄弟、右兄弟
  - 分支结点、叶结点
    - 没有子树的结点称作叶结点（或树叶、终端结点）
    - 非终端结点称为分支结点
- 边：两个结点的有序对
- 路径、路径长度
  - 除结点 k0 外的任何结点 k∈K，都存在一个结点序列 k0，k1，…，ks，使得 k0 就是树根，且 ks=k，其中有序对 $<k_i-1,k_i>$ ∈ r（1≤i≤s）。这样的结点序列称为从根到结点 k 的一条路径，其路径长度为 s（包含的边数）
- 祖先，后代
  - 若有一条由 k 到达 ks 的路径，则称 k 是 ks 的祖先，ks 是 k 的子孙
- 层数
  - 根为第 0 层，其他结点的层数等于其父结点的层数加 1
- 深度
  - 层数最大的叶结点的层数
- 高度
  - 层数最大的叶结点的层数加 1
- 度数
  - 结点的度数是该结点子树的个数
  - 树的度数是树中所有结点的度数的最大值

6. 树形结构的各种表示法

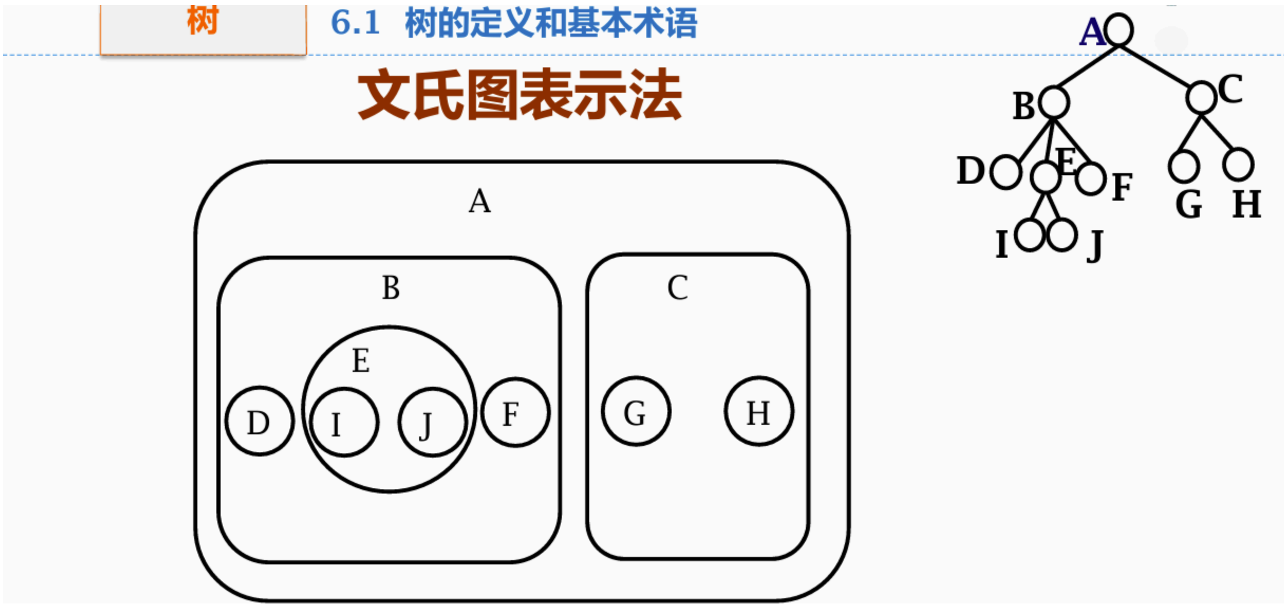
- 树形


树形表示法
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J

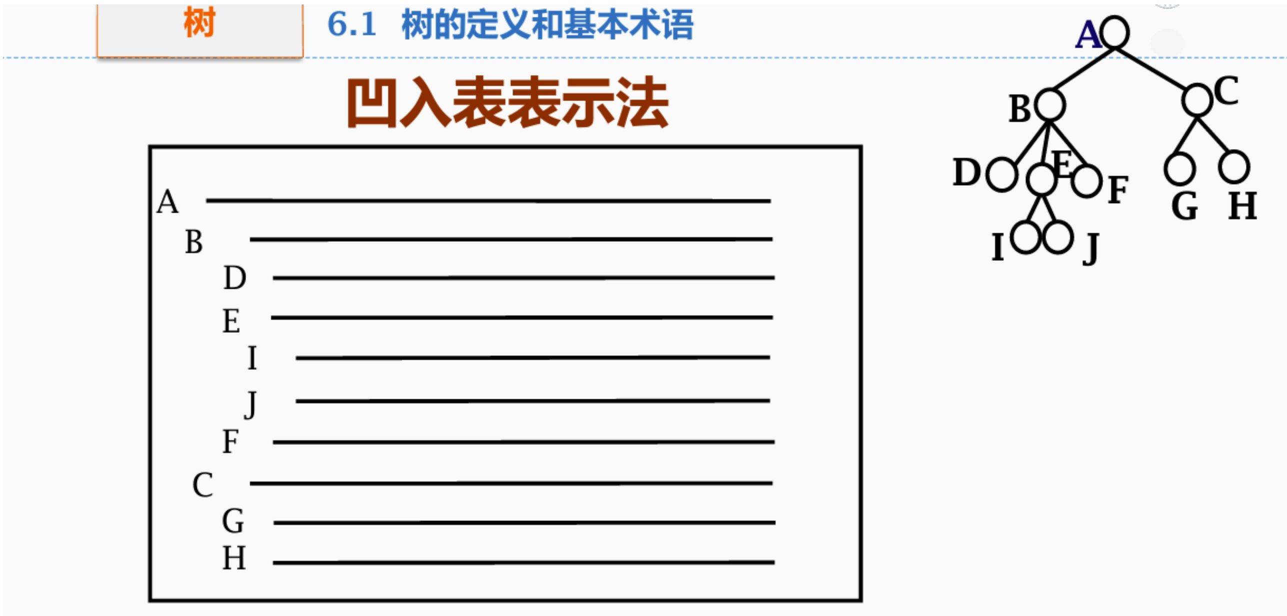
- 形式语言


形式语言表示法
树的逻辑结构是:
结点集合K={A，B，C，D，E，F，G，H，I，J}
K上的关系N={<A，B>，<A，C>，<B，D>，
<B，E>，<B，F>，<C，G>，
<C，H>，<E，I>，<E，J>}
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J

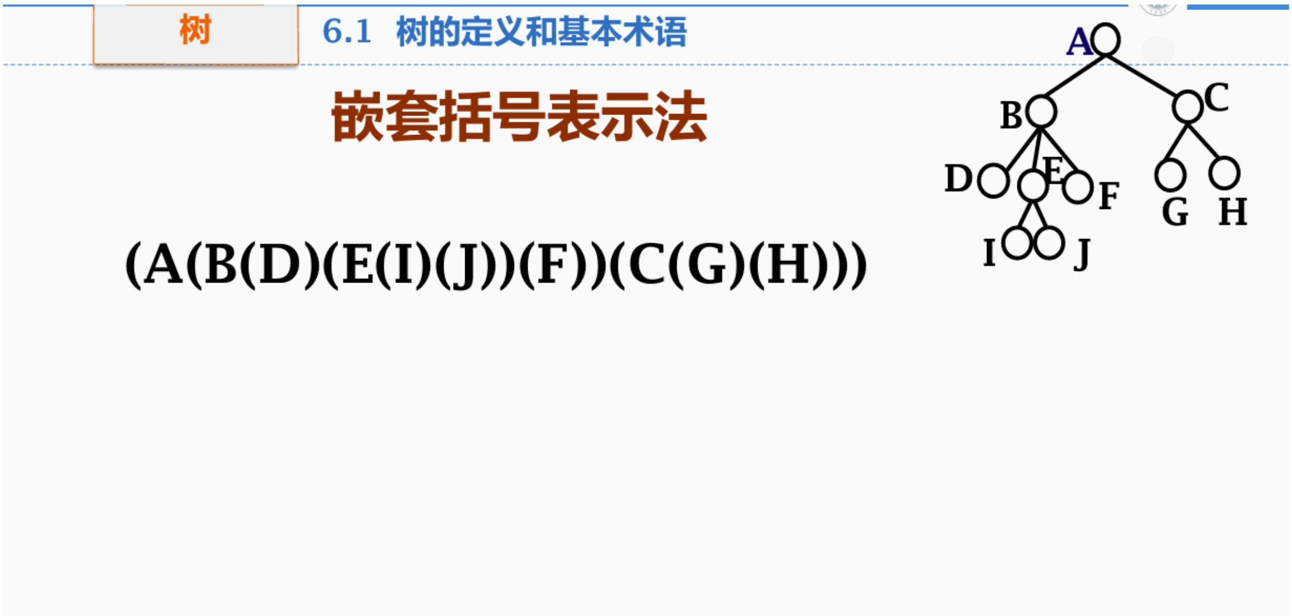
- 文氏图


树
6.1 树的定义和基本术语
文氏图表示法
A
B
C
E
D
I
J
F
G
H
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J

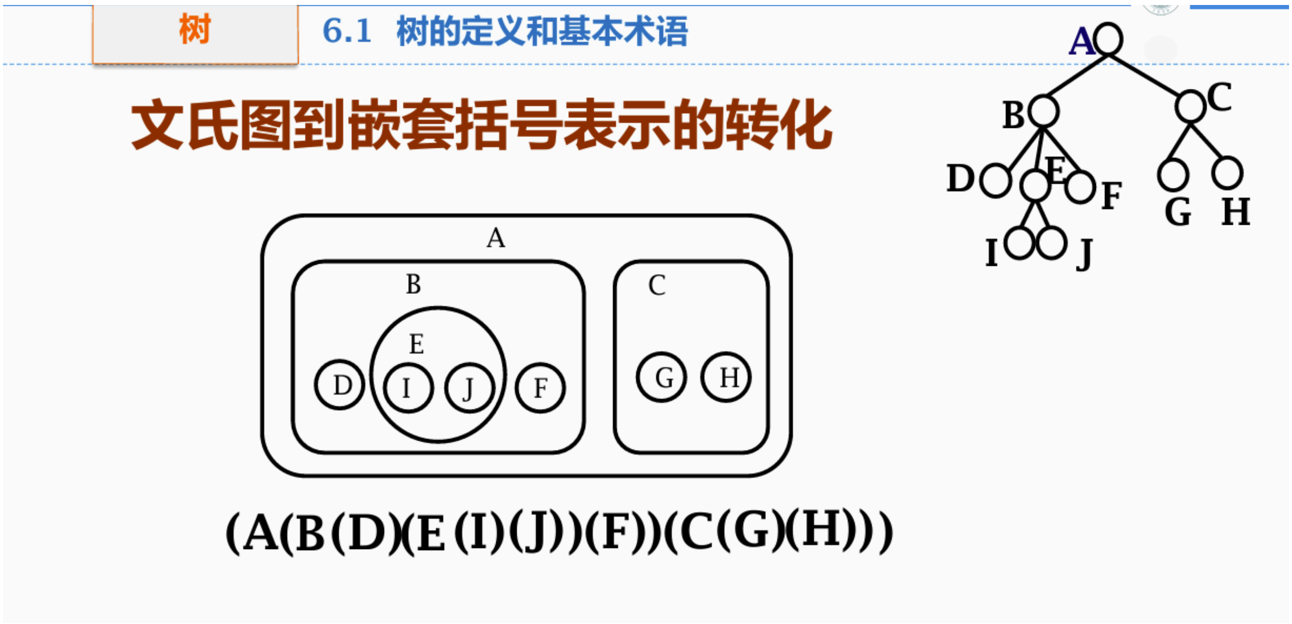
• 凹入表



• 嵌套括号



• 文氏图到嵌套括号的转化

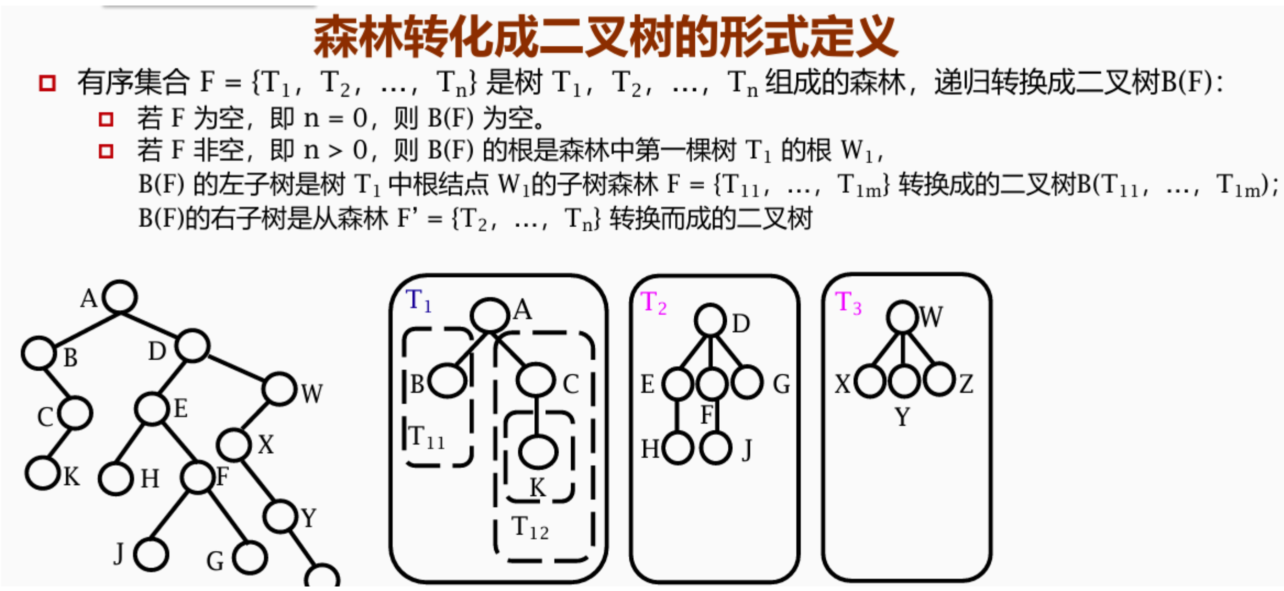


二・森林和二叉树的等价转换

1. 森林定义：由 m（m>=0）棵互不相交的树组成的集合称为森林(forest)

2. 根节点加不加的问题罢了

3. 森林转化为二叉树



1. **独立转换每棵树**
   - 将森林中的每棵树分别转换为二叉树：
     - **连接兄弟节点**：为每棵树中同一父节点的所有兄弟节点添加水平连线（虚线）。
     - **删除非长子连线**：仅保留父节点与第一个孩子（长子）的连线，删除父节点与其他孩子的连线。
     - **旋转调整**：以根为轴心顺时针旋转45°，使长子成为左孩子，兄弟成为右孩子。
   - *示例*：

复制

```
树：    A          →  二叉树：  A
      / | \                   /
     B  C  D                 B
                            / \
                           E   C
                                \
                                 D
```

2. **连接多棵二叉树**
   - 将森林中所有转换后的二叉树按顺序链接：
     - **第一棵树不动**：其根作为最终二叉树的根。
     - **后续树的根作为右孩子**：第二棵树的根链接为第一棵树根的右孩子；第三棵树的根链接为第二棵树根的右孩子，依此类推。
   - *示例*：

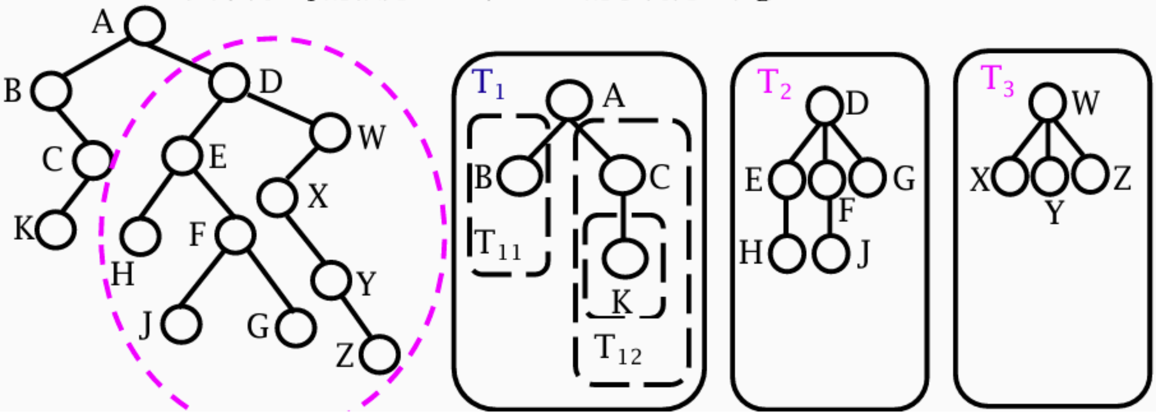
复制

```
森林：[树1：A]    →  二叉树：    A
     [树2：B]                /   \
     [树3：C]               D     B
                                   \
                                    C
```

4. 二叉树转化为森林

二叉树转化成森林或树的形式定义

- 设B是一棵二叉树，root是 B 的根，B_L 是 root 的左子树，B_R 是 root 的右子树，则对应于二叉树B的森林或树 F(B) 的形式定义是：
  - 若 B 为空，则 F(B) 是空的森林
  - 若 B 不为空，则 F(B)是一棵树T_1加上森林 $F(B_R)$，其中树 T_1 的根为 root，root 的子树为 $F(B_L)$



🔍 核心判断依据

根据二叉树根节点的右子树存在性决定转换结果 [5]：

- **根无右子树** → 转换为一棵树
- **根有右子树** → 转换为森林（多棵树）

🔄 转换步骤

1. 断开所有右链

- 从根节点开始，递归删除所有**右指针连线**，将二叉树拆分为多棵独立的二叉树 [2] [5]：
  - 若当前根节点存在右孩子（如 `A→C`），则断开 `A` 与 `C` 的右链，得到独立子树 `A` 和 `C`。
  - 对分离后的每棵子树递归执行此操作（如 `C` 若有右子树 `F`，则继续断开 `C→F`）。

2. 每棵二叉树转为树

对分离后的每棵二叉树执行以下操作 [2] [5]：

- **加线**：
  - 若节点 `X` 有左孩子 `L`，则将 `L` 的所有**右路径节点**（`L→R₁→R₂→...`）作为 `X` 的子节点。
  - 用新连线连接 `X` 与这些节点。
    示例：

markdown 复制

```
二叉树片段:  X          →  加线后:  X
           / \                    /|\
          L   R₁                 L R₁ R₂
               \
               R₂
```

- **删线**：删除原二叉树中所有**右指针连线**（如 `L→R₁`、`R₁→R₂` 等）。
- **调整层次**：逆时针旋转，恢复树形结构。

三 • 树的抽象数据类型

```cpp
template<class T>
class TreeNode {
public:
    TreeNode(const T& value);
    virtual ~TreeNode() {};
    bool isLeaf();
    T Value();
    TreeNode<T> *LeftMostChild();
    TreeNode<T> *RightSibling();
    void setValue(const T& value);
    void setChild(TreeNode<T> *pointer);
    void setSibling(TreeNode<T> *pointer);
    void InsertFirst(TreeNode<T> *node);
    void InsertNext(TreeNode<T> *node);
};
```

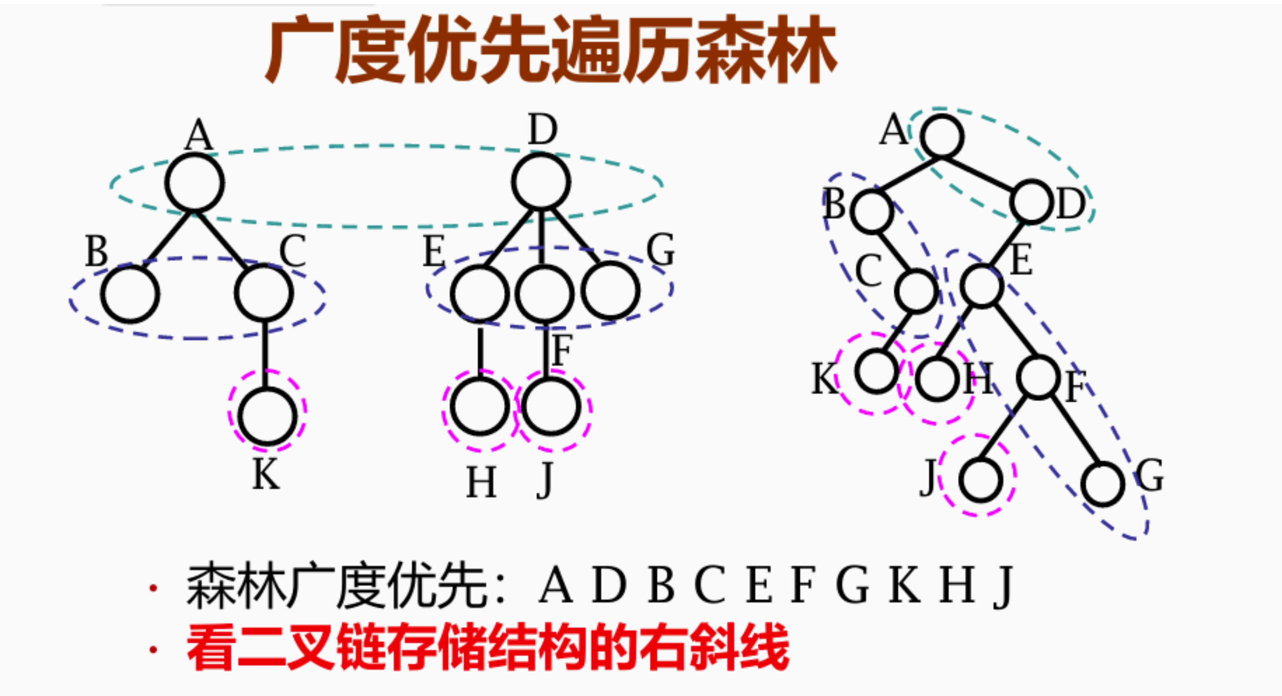
```
template<class T>
class Tree  {
public:
    Tree();
    virtual ~Tree();
    TreeNode<T>* getRoot();
    void CreateRoot(const T& rootValue);
    bool isEmpty();
    TreeNode<T>* Parent(TreeNode<T> *current);
    TreeNode<T>* PrevSibling(TreeNode<T> *current);
    void DeleteSubTree(TreeNode<T> *subroot);
    void RootFirstTraverse(TreeNode<T> *root);
    void RootLastTraverse(TreeNode<T> *root);
    void WidthTraverse(TreeNode<T> *root);
};
```

四·森林的遍历

1.先根深度优先遍历（前序遍历）

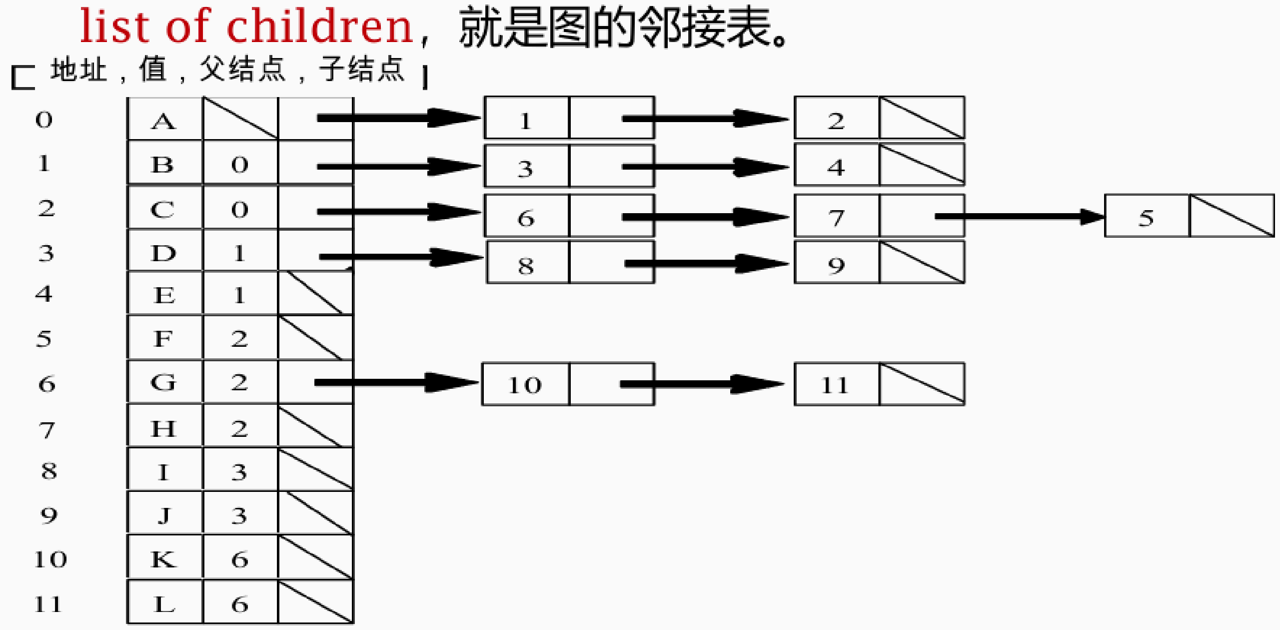
2.后根深度优先遍历（后序遍历）

3.广度优先遍历（层次遍历）

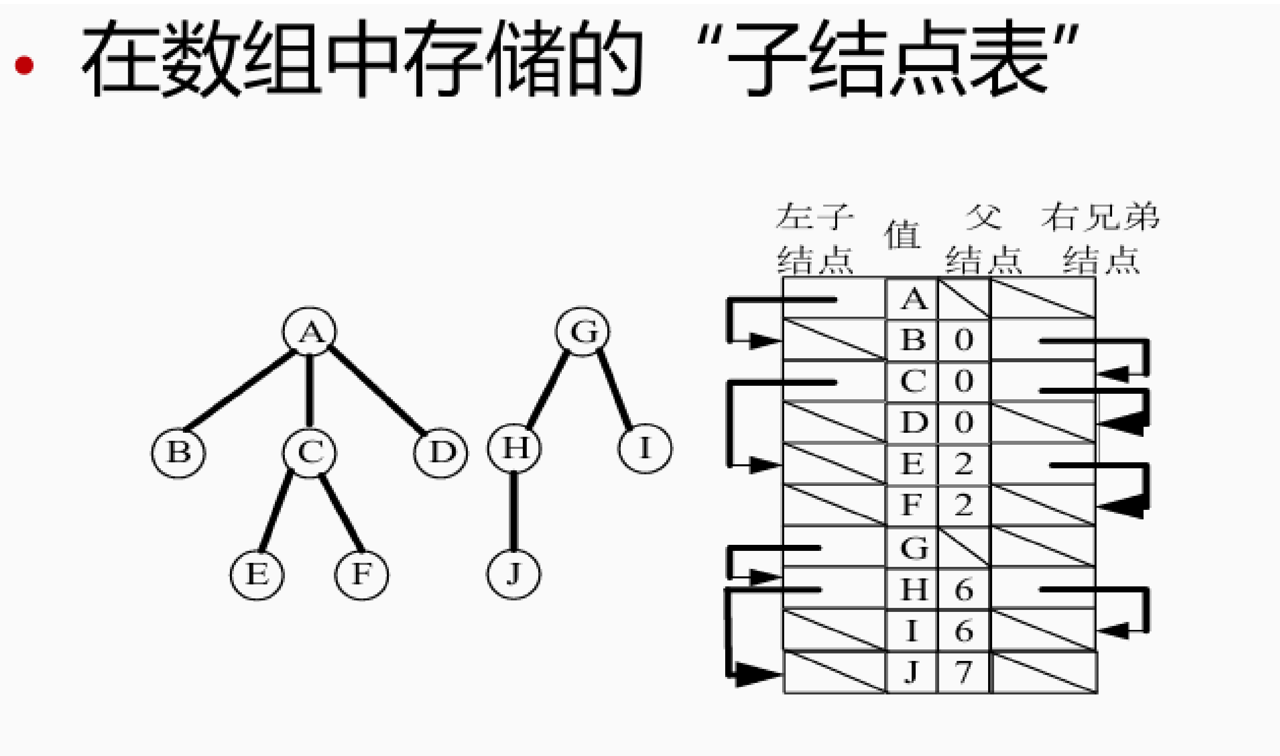


6.2 树的链式存储结构

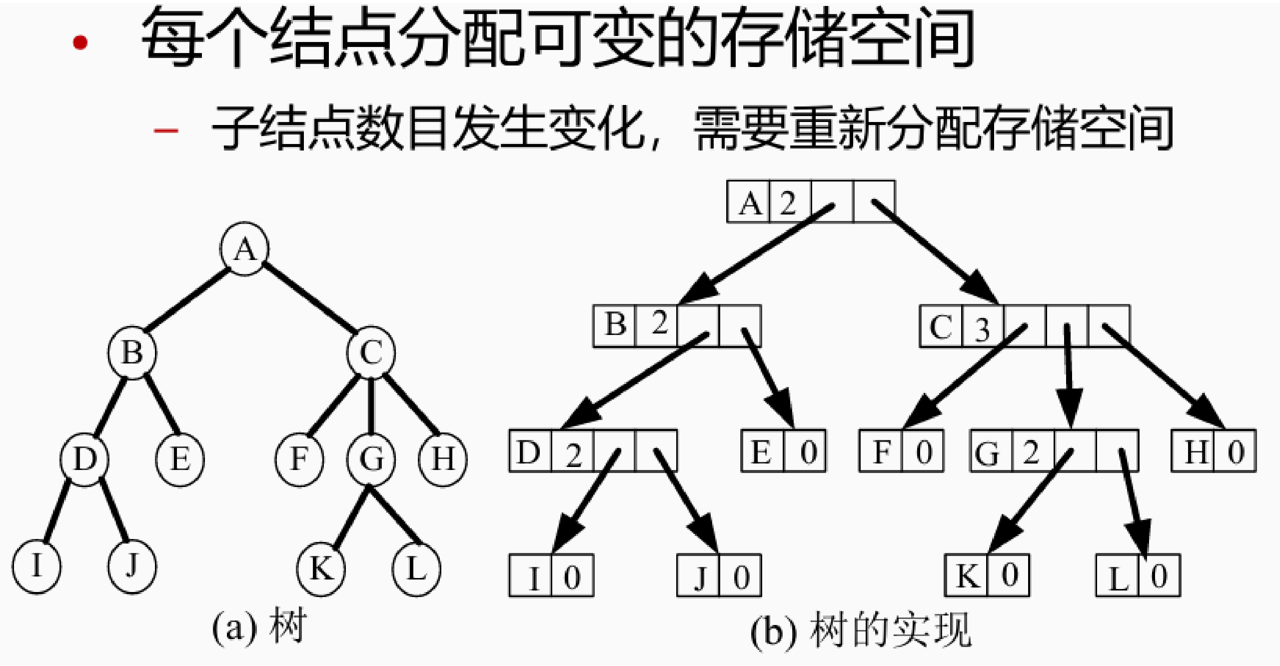
一·“子结点表”表示方法



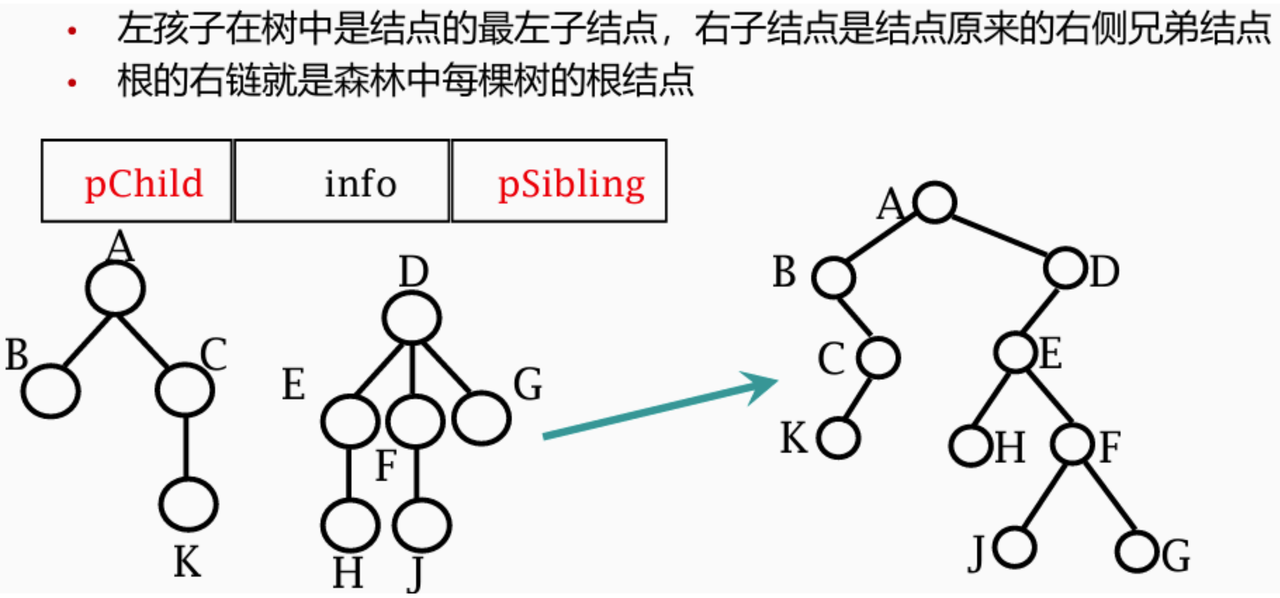
二・静态“左孩子/右兄弟”表示法



三・动态表示法

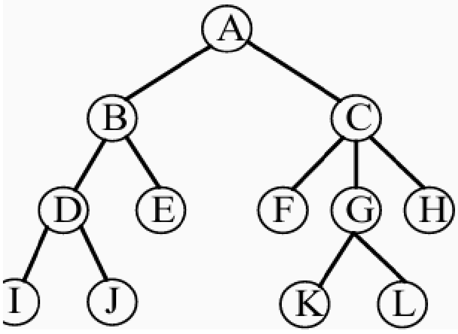


四 • 动态“左孩子/右兄弟”表示法



五 • 父指针表示法及其在并查集中的应用

- 只需要知道父结点的应用
- 只需要保存一个指向其父结点的指针域，称为 父指针(parent pointer)表示法
- 用数组存储树结点，同时在每个结点中附设一个指针指示其父结点的位置



结点索引	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
值	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
父结点索引		0	0	1	1	2	2	2	3	3	6	6

1. 并查集

- 定义：一组不相交的集合的集合
- 主要操作：合并两个集合、查询元素所在的集合
- 应用：用于处理等价关系、连通性问题等

2. 等价关系与等价类

- 等价关系：是满足自反性、对称性和传递性的二元关系
- 等价类：相互等价的元素所组成的最大集合

3. 用树来表示等价类的并查

- 用一棵树代表一个集合
  - 集合用父结点代替
  - 若两个结点在同一棵树中，则它们处于同一个集合
- 树的实现
  - 存储在静态指针数组中
  - 结点中仅需保存父指针信息

4. 树的父指针表示与 Union/Find 算法实现

```
template<class T>
class ParTreeNode {
private:
    Tvalue;
    ParTreeNode<T>* parent;
    int nCount;
public:
    ParTreeNode();
    virtual ~ParTreeNode(){};
    TgetValue();
    void setValue(const T& val);
    ParTreeNode<T>*  getParent();
    void setParent(ParTreeNode<T>* par);
    int getCount();
    void setCount(const int count);
```

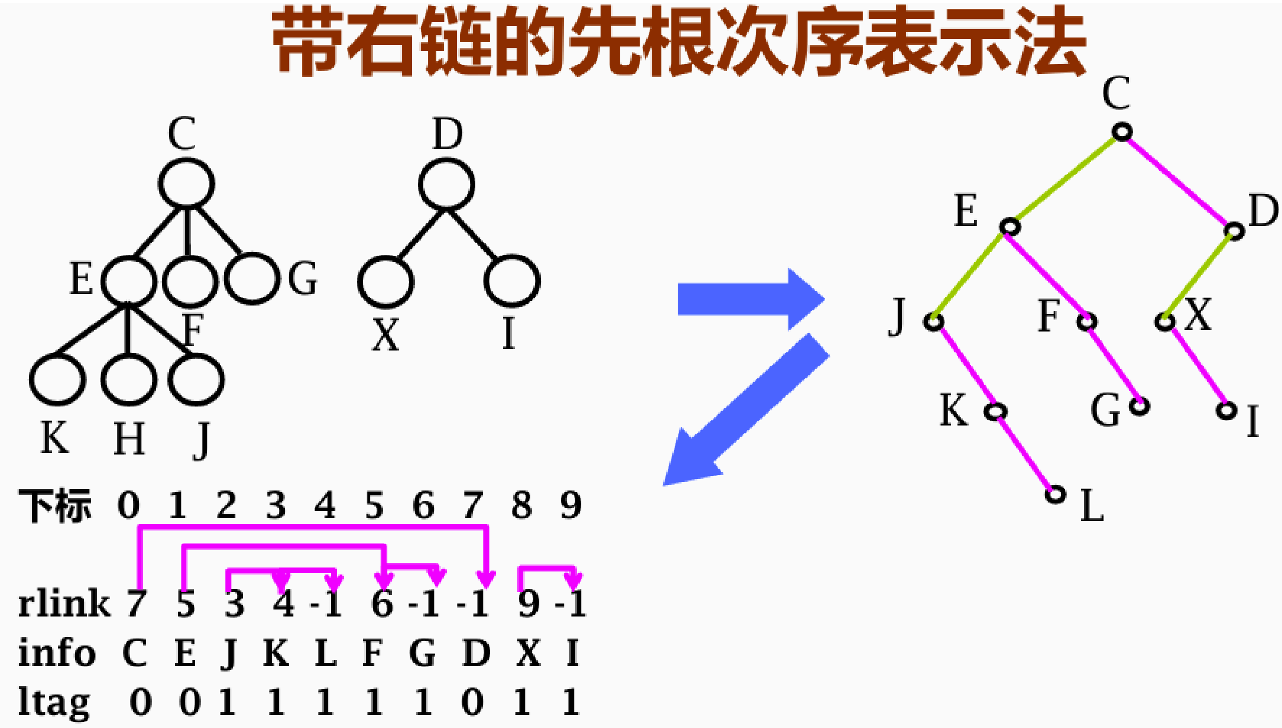
```
};

template<class T>
class ParTree {
public:
    ParTreeNode<T>* array;
    int Size;
    ParTreeNode<T>*
    Find(ParTreeNode<T>* node) const;  // 查找node结点的根结点
    ParTree(const int size);
    virtual ~ParTree();
    void Union(int i,int j);
    bool Different(int i,int j);
};

template <class T>
ParTreeNode<T>* ParTree<T>::Find(ParTreeNode<T>* node) const{
    ParTreeNode<T>* pointer=node;
    while ( pointer->getParent() != NULL )
    pointer=pointer->getParent();
    return pointer;
}

template<class T>
void ParTree<T>::Union(int i,int j) {
    ParTreeNode<T>* pointeri = Find(&array[i]);
    ParTreeNode<T>* pointerj = Find(&array[j]);
    if (pointeri != pointerj) {
        if(pointeri->getCount() >= pointerj->getCount()) {
            pointerj->setParent(pointeri);
            pointeri->setCount(pointeri->getCount() +
            pointerj->getCount());
        }
        else {
            pointeri->setParent(pointerj);
            pointerj->setCount(pointeri->getCount() +
            pointerj->getCount());
        }
    }
}
```

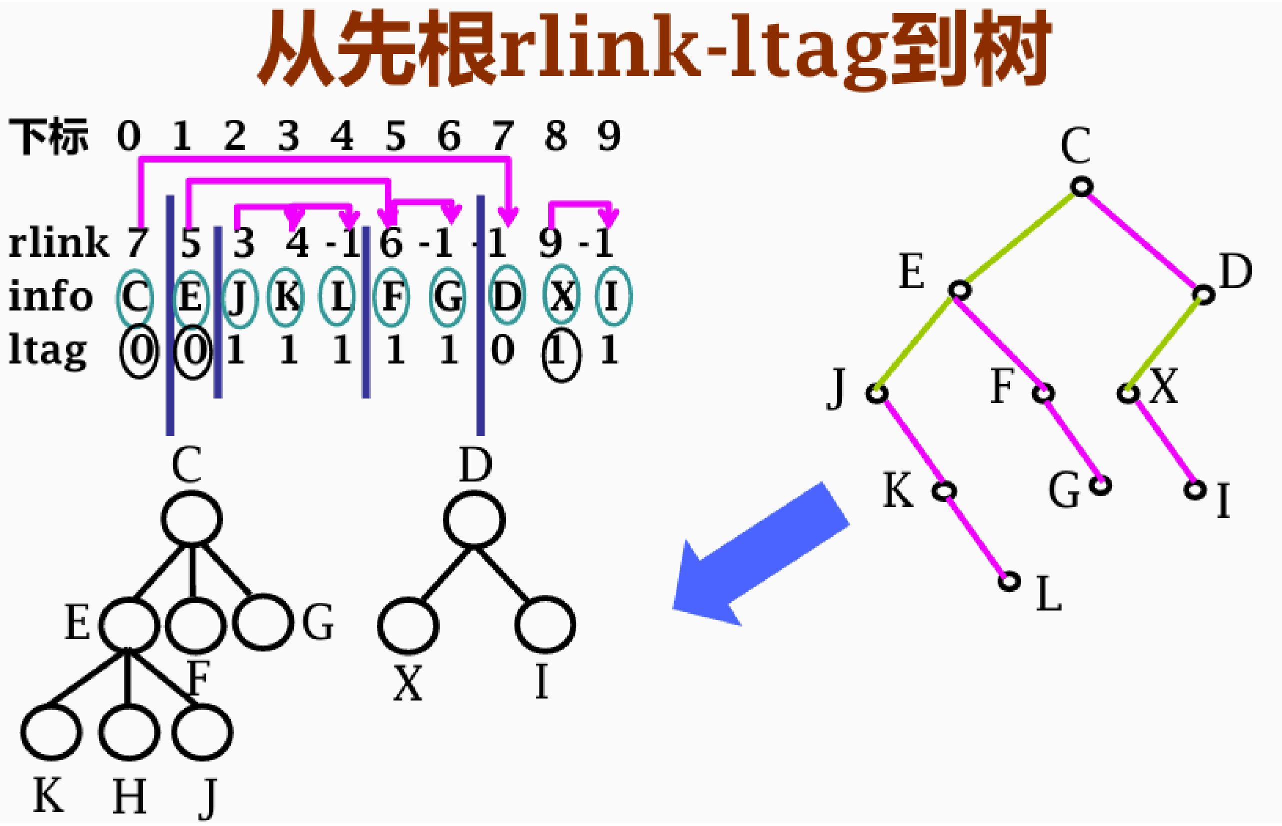
6.3 树的顺序存储结构

一 • 带右链的先根次序表示

1. 结点按先根次序顺序连续存储

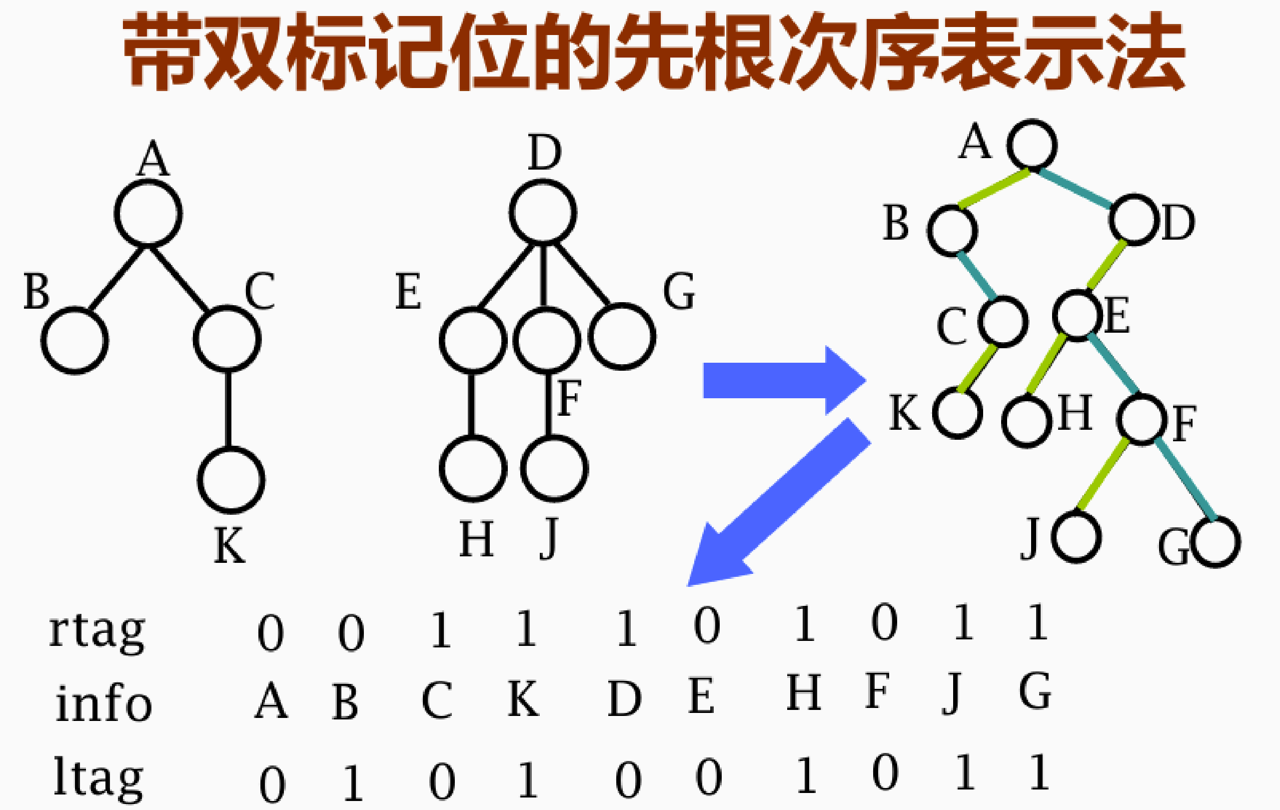
- info：结点的数据
- rlink：右指针
  - 指向结点的下一个兄弟、即对应的二叉树中结点的右子结点
- ltag：标记
  - 树结点没有子结点，即二叉树结点没有左子结点，ltag 为 1；否则为 0

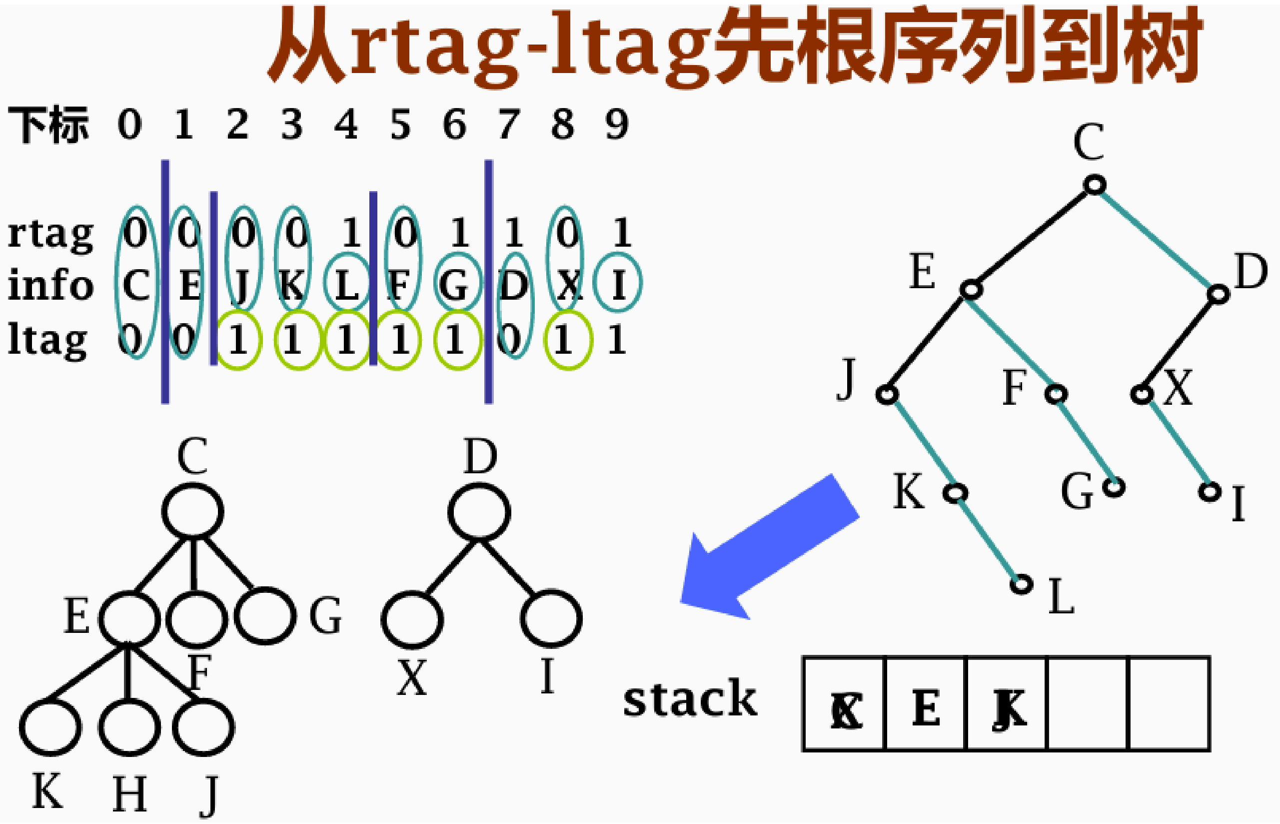




二・带双标记的先根次序表示

- 带右链的先根次序表示”中 rlink 也有冗余，可以把 rlink 指针替换为一个标志位 rtag，成为“带双标记的先根次序表示”。其中，每个结点包括结点本身数据，以及两个标志位 ltag 和 rtag，由结点的先根次序以及 ltag、rtag 两个标志位，就可以确定树“左孩子/右兄弟”链表中结点的 llink 和 rlink 值。其中 llink 的确定与带右链的先根次序表示法相同。



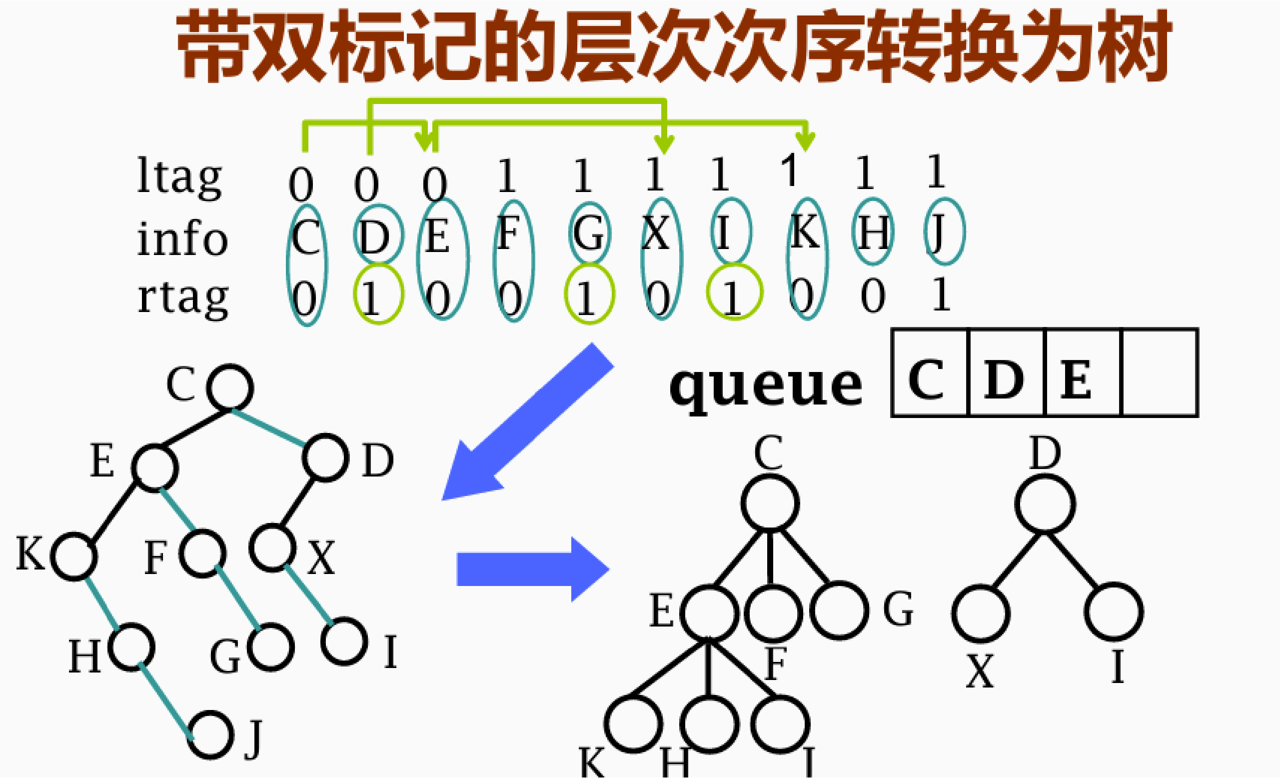


三·带双标记的层次次序表示

1. 结点按层次次序顺序存储在连续存储单元

- info 是结点的数据
- ltag 是一个一位的左标记，当结点没有子节点，即对应的二叉树中结点没有左子结点时，ltag 为 1，否则为 0

- rtag 是一个一位的右标记，当结点没有下一个兄弟，即对应的二叉树中结点没有右子结点时，rtag 为 1，否则为 0



四・带度数的后根次序表示

1. 结点按后根次序顺序存储在一片连续的存储单元中
- info 是结点的数据，degree 是结点的度数

6.4 K 叉树

类比二叉树即可