

离散数学基础笔记（以模块划分）

模块 1：数论

一 • 基本概念

1. 平凡因子：1 和本身

真因子

2. 带余除法： $a = qb + r$ （其中 $0 \leq r < |b|$ ）

3. 最大公因子： $\gcd(a, b)$

最小公倍数： $\text{lcm}(a, b)$

4. 梅森素数：形如 $M_n = 2^n - 1$ 的素数

5. $[a]_m$ 或 $[a]$ 以及 Z_m ： a 的模 m 等价类， $[a]_m = \{b \mid b \equiv a \pmod{m}\}$ ，整数集 Z 在模 m 下的商集 Z_m ，例如 $Z_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

6. 一次同余方程： $ax \equiv b \pmod{m}$ ，其中 a, b, m 为整数， $m > 0$

7. a 的模 m 逆元： a^{-1} ，满足 $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$

8. 欧拉函数： $\varphi(n)$ ，表示小于等于 n 且与 n 互素的正整数个数，注意 $\varphi(1) = 1$

9. -1 和 9 公因数有 $\{1, -1\}$ ，最大公因数为 1，所以互质

二 • 公式定理

1. 算术基本定理：设 $a > 1$ ，则 $a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ ，其中 p_k 为互异的素数， r_k 为正整数，则不考虑顺序时表示唯一

2. 正因子个数： $d(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_k + 1)$

3. 有无穷多个素数：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln(n)}} = 1$$

或

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

4. 埃拉托色尼筛法：见例 2

5. 辗转相除法（欧几里得算法）： $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$

6. 贝祖定理：若 a, b 不全为 0，则存在 x, y 使得 $\gcd(a, b) = ax + by$ ，其中 x, y 为整数

7. a, b 互素的充要条件: 存在整数 x, y 使得 $xa + yb = 1$

8. 模运算的性质:

- 若 $a \equiv b(\text{mod } m), c \equiv d(\text{mod } m)$, 则 $a \pm c \equiv b \pm d(\text{mod } m), ac \equiv bd(\text{mod } m), a^k \equiv b^k(\text{mod } m)$, 其中 k 为自然数
- 若 $d \geq 1$, 则 $a \equiv b(\text{mod } m) \Leftrightarrow da \equiv db(\text{mod } dm)$
- 若 $\text{gcd}(c, m) = 1$, 则 $a \equiv b(\text{mod } m) \Leftrightarrow ca \equiv cb(\text{mod } m)$

9. 一次同余方程: $ax \equiv b(\text{mod } m)$, 其中 a, b, m 为整数, $m > 0$, $\text{gcd}(a, m) = 1$ 时有唯一解 x , 否则有解当且仅当 $\text{gcd}(a, m)$ 整除 b , 此时解的个数为 $\text{gcd}(a, m)$

10. a^{-1} 存在 $\Leftrightarrow \text{gcd}(a, m) = 1$, 且若存在则唯一 (a 的任意两个模 m 逆都模 m 同余)

11. 若 n 的素因子分解式 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, 则 $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

12. 欧拉定理: 若 $\text{gcd}(a, n) = 1$, 则 $a^{\varphi(n)} \equiv 1(\text{mod } n)$

13. 费马小定理 (可视为欧拉定理在质数情况的推论):

- 若 p 为素数, a 为整数, 且 $\text{gcd}(a, p) = 1$, 则 $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$
- 若 p 为素数, a 为整数, 则 $a^p \equiv a(\text{mod } p)$
 - 计算 a^{-1} 时的小推论: 若 p 为素数, 则 $a^{-1} \equiv a^{p-2}(\text{mod } p)$

三 • 精选例题

1. $20!$ 的二进制表示从最低位起有多少个连续的 0?

解: $20! = 2^{18} * 3^8 * 5^4 * 7^2 * 11^1 * 13^1 * 17^1 * 19^1$, 所以有 18 个连续的 0。

2. 求 100 以内的素数。

解: $\sqrt{100} = 10$, 10 以内素数: 2, 3, 5, 7, 用他们删所有能被他们整除的数, 剩下的就是素数。

3. 求 168, 300 最大公因数, 并表示成线性组合

解: $168 = 2^3 * 3 * 7$, $300 = 2^2 * 3 * 5^2$, 所以 $\text{gcd}(168, 300) = 2^2 * 3 = 12$ 而

$$300 = 168 + 132$$

$$168 = 132 + 36$$

$$132 = 36 * 3 + 24$$

$$36 = 24 + 12$$

$$24 = 12 * 2 + 0$$

则 $12 = 36 - 24 = 36 - (132 - 36 * 3) = \dots = 9 * 168 - 5 * 300$

4. 3^{455} 的个位数是?

解: 法一: $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, 3^6 = 729$, 所以周期为 4, 余数为 3, 所以个位数是 7。

法二：设为 x ，则 $3^{455} \equiv x \pmod{10}$ ，又 $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ ，则 $3^{4 \cdot 113} \equiv 1^{113} \pmod{10}$ ，又 $3^3 \equiv 7 \pmod{10}$ ，两式相乘可得 $3^{455} \equiv 7 \pmod{10}$

5. 解方程 $8x \equiv 4 \pmod{6}$

解： $\gcd(8, 6) = 2$ ，整除 4，所以有 2 解，取模 6 等价类代表 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ ，代入得 x 的解为 $2, -1$ ，即 $x \equiv 2 \pmod{6}$ 或 $x \equiv -1 \pmod{6}$

【错解】全部除以 2

四. 课后习题

4.4 设 a, b, c, d 均为正整数，下列叙述是否正确？是，证明；否，给反例

- (1) 若 $a|c, b|c$ ，则 $ab|c$
- (2) 若 $a|c, b|d$ ，则 $ab|cd$
- (3) 若 $ab|c$ ，则 $a|c$
- (4) 若 $a|bc$ ，则 $a|b$ 或 $a|c$

解：

- (1) 错误，反例： $a = 4, b = 6, c = 12$ ，则 $4|12, 6|12$ ，但 $4 * 6 = 24$ ，所以不成立。
- (2) 正确，设 $c = k_1 a, d = k_2 b$ ，则 $cd = k_1 k_2 ab$ ，所以 $ab|cd$
- (3) 正确，设 $c = kab$ ，则 $a|c$ 是显然的
- (4) 错误，反例： $a = 6, b = 2, c = 3$ ，则 $6|2 * 3 = 6$ 成立，但 $6|2, 6|3$ 都不成立。

4.16 证明： $\forall x, y, u, v \in Z, \gcd(a, b) \leq \gcd(xa + yb, ua + vb)$

证：令 $d = \gcd(a, b)$

则 $d|a$ 且 $d|b$

则 $d|ax + by$ 且 $d|au + bv$

则 d 为 $xa + yb, ua + vb$ 的公因子

故 $d \leq \gcd(xa + yb, ua + vb)$ ，得证

4.34 下列叙述是否正确，是，证明之；否，举反例

- (1) 若 $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$ ，则 $a \equiv b \pmod{m}$ 或 $a \equiv -b \pmod{m}$
- (2) 若 $a \equiv b \pmod{m}$ ，则 $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$
- (3) 若 $a^2 \equiv b^2 \pmod{m^2}$ ，则 $a \equiv b \pmod{m}$
- (4) 若 $a \equiv b \pmod{mn}$ ，则 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $a \equiv b \pmod{n}$
- (5) 若 $a \equiv b \pmod{m}$ 且 $a \equiv b \pmod{n}$ ，则 $a \equiv b \pmod{mn}$

解:

- (1) 错误, 反例: $a = 10, b = 2, m = 24$
- (2) 正确, $a - b \equiv 0(\text{mod } m)$, 则 $(a - b)(a + b) \equiv 0(\text{mod } m)$, 得证
- (3) 错误, 反例: $a = 5, b = 3, m = 4$
- (4) 正确, 由于 $a - b = kmn$, 故 $a - b = km \vee a - b = kn$, 得证
- (5) 错误, 反例: $a = 5, b = 1, m = 4, n = 2$

4.35 解下列一次同余方程

- (1) $9x \equiv 3(\text{mod } 6)$
- (2) $4x \equiv 3(\text{mod } 6)$
- (3) $3x \equiv -1(\text{mod } 5)$
- (4) $8x \equiv 2(\text{mod } 4)$
- (5) $20x \equiv 12(\text{mod } 8)$

解:

- (1) $\gcd(9, 6) = 3, 3|3$, 有 3 解, 取模 6 等价类 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$, 代入得 $x \equiv -1(\text{mod } 6) \vee x \equiv 1(\text{mod } 6) \vee x \equiv 3(\text{mod } 6)$
- (2) $\gcd(4, 6) = 2, 2 \nmid 3$, 无解
- (3) $\gcd(3, 5) = 1, 1|-1$, 有 1 解, 取模 5 等价类 $-2, -1, 0, 1, 2$, 代入得 $x \equiv -2(\text{mod } 5)$
- (4) $\gcd(8, 4) = 4, 4 \nmid 2$, 无解
- (5) $\gcd(20, 8) = 4, 4|12$, 有 4 解, 取模 8 等价类 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, 代入得 $x \equiv -3(\text{mod } 8) \vee x \equiv -1(\text{mod } 8) \vee x \equiv 1(\text{mod } 8) \vee x \equiv 3(\text{mod } 8)$

4.37 对下列每一组 a, m , 是否有 $a^{-1}(\text{mod } m)$?

- (1) 2, 3
- (2) 8, 12
- (3) 18, 7
- (4) 12, 21
- (5) 5, 9
- (6) -1, 9

解:

- (1) $\gcd(a, m) = 1$, 是, 3 是素数, 由费马小定理的推论 $2^{-1} \equiv 2^{3-2} \equiv 2(\text{mod } 3)$
- (2) $\gcd(a, m) = 4$, 不是
- (3) $\gcd(a, m) = 1$, 是, 7 是素数, 由费马小定理的推论 $18^{-1} \equiv 18^5 \equiv 4^5 \equiv 2(\text{mod } 7)$

- (4) $\gcd(a, m) = 3$, 不是
- (5) $\gcd(a, m) = 1$, 是, 9 不是素数, 即解 $5x \equiv 1(\text{mod } 9)$, 则 $5^{-1} \equiv 2(\text{mod } 9)$
- (6) $\gcd(a, m) = 1$, 是, 9 不是素数, 即解 $-x \equiv 1(\text{mod } 9)$, 则 $(-1)^{-1} \equiv 8(\text{mod } 9)$

4.45 用费马小定理计算下列各式

- (1) $2^{325}(\text{mod } 5)$
- (2) $3^{516}(\text{mod } 7)$
- (3) $8^{1003}(\text{mod } 11)$

解:

- (1) $2^4 \equiv 1(\text{mod } 5), 2^{324} \equiv 1(\text{mod } 5), 2^{325} \equiv 2(\text{mod } 5)$
- (2) $3^6 \equiv 1(\text{mod } 7), 3^{516} \equiv 1(\text{mod } 7)$
- (3) $8^{10} \equiv 1(\text{mod } 11), 8^{1000} \equiv 1(\text{mod } 11), 8^{1003} \equiv 8^3 \equiv 6(\text{mod } 11)$

模块 2: 图论

一 • 基本概念

1. 无序积: 设 A, B 为任意两集合, 则 $\{\{a, b\} | a \in A, b \in B\}$ 为 A, B 的无序积, 记作 $A \& B$ 无序对 $\{a, b\}$ 也可记作 (a, b) , 且允许 $a = b$, 并且任意 a, b , 均有 $(a, b) = (b, a)$, 即 $A \& B = B \& A$
2. 无向图 G : 是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$, 其中 (1) V 是一个非空有穷集 (顶点集), 其元素称作顶点或结点 (2) E 是无序积 $V \& V$ 的有穷多重子集 (边集), 元素称作无向边, 简称边
3. 有向图 D : 是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$, 其中 (1) V 是一个非空有穷集 (顶点集), 其元素称作顶点或结点 (2) E 是笛卡尔积 $V * V$ 的有穷多重子集 (边集), 元素称作有向边, 简称边
4. 图 (G) : 无向图 (G) + 有向图 (D) , 但有时专指无向图; $V(G), E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集, $|V(G)|$ 表示顶点数, 其余类似
5. 阶: $|V(G)| = n \iff n$ 阶图
6. 零图: $E(G) = \emptyset$, n 阶零图记作 N_n, N_1 称作平凡图
7. 空图 (\emptyset) : $|V(G)| = 0$
8. 标定图: 用图形表示图时, 如果给每一个顶点和每一条边指定一个符号 (字母或数字, 当然字母还可以带下标)
9. 基图: 有向图的各条有向边改成无向边后所得到的无向图称作这个有向图的基图

10. 关联: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图, $e_k = (v_i, v_j) \in E$, 称 v_i, v_j 为 e_k 的端点, e_k 与 $v_i(v_j)$ 关联. 若 $v_i \neq v_j$, 则称 e_k 与 $v_i(v_j)$ 的关联次数为 1; 若 $v_i = v_j$, 则称 e_k 与 v_i 的关联次数为 2, 并称 e_k 为环. 如果顶点 v_l 不与边 e_k 关联, 那么称 e_k 与 v_l 的关联次数为 0

11. 相邻: 对无向图, 若两个顶点之间有一条边连接, 则称这两个顶点相邻. 若两条边至少有一个公共端点, 则称这两条边相邻; 对有向图, 若两个顶点之间有一条有向边, 则称这两个顶点相邻. 若两条边中一条边的终点是另一条边的始点, 则称这两条边相邻

12. 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图, $e_k = \langle v_i, v_j \rangle \in E$, 称 v_i, v_j 为 e_k 的端点, v_i 为 e_k 的始点, v_j 为 e_k 的终点, 并称 e_k 与 $v_i(v_j)$ 关联. 若 $v_i = v_j$, 则称 e_k 为 D 中的环

13. 孤立点: 图 (无向的或有向的) 中没有边关联的顶点

14. 邻域: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 对任意的 $v \in V$, 称 $N_G(v) = \{u | u \in V, (u, v) \in E, u \neq v\}$ 为 v 的邻域; 称 $\bar{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ 称为 v 的闭邻域; 称 $I_G(v) = \{e | e \in E, e \text{ 与 } v \text{ 相关联}\}$ 为 v 的关联集

15. 后继元集: 设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 任意 $v \in V$, 称 $\Gamma_D^+(v) = \{u | u \in V, \langle v, u \rangle \in E, u \neq v\}$ 为 v 的后继元集; 称 $\Gamma_D^-(v) = \{u | u \in V, \langle u, v \rangle \in E, u \neq v\}$ 为 v 的先驱元集; 称 $N_D(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$ 为 v 的邻域; 称 $\bar{N}_D(v) = N_D(v) \cup \{v\}$ 为 v 的闭邻域

16. 平行边: 无向图中, 若关联一对顶点的无向边多于 1 条, 则称这些边, 平行边条数称为重数; 有向图中, 还需要始点与终点相同, 则称. 含平行边的图称作多重图, 既不含平行边也不含环的图称作简单图.

17. 子图: 设 $G = \langle V, E \rangle, G' = \langle V', E' \rangle$ 为两个图 (同为无向或有向), 若 $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, 则有子图与母图, 记作 $G' \subseteq G$. 类似的, 有真子图. 若 $V' = V$, 则有生成子图. 设 $G = \langle V, E \rangle, V_1 \subset V, V_1 \neq \emptyset$, 称以 V_1 为顶点集, 以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成的边集 E_1 的图为 G 的 V_1 导出的子图, 记作 $G[V_1]$; E_1 导出的子图记作 $G[E_1]$, 同理

18. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图.

(1) 设 $e \in E$, 用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e , 称作删除边 e . 又设 $E' \subset E$, 用 $G - E'$ 表示删除这些边

(2) 设 $v \in V$, 用 $G - v$ 表示从 G 中去掉 v 及所关联的一切边, 称作删除顶点 v . 又设 $V' \subset V$, 从 G 中删除 V' 中所有的顶点, 称作删除 V'

(3) 设 $e = (u, v) \in G$, 用 $G \setminus e$ 表示从 G 中删除 e 后, 将 e 的两个端点 u, v 用一个新的顶点 w 代替, 并使 w 关联除了 e 之外 u, v 关联的所有边, 称作边 e 的收缩

(4) 设 $u, v \in V$ (u, v 可能相邻, 也可能并不), 用 $G \cup (u, v) \parallel G + (u, v)$ 表示在 u, v 之间加新边

在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边.

19. 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为不含孤立点的两个图 (它们同为无向图或同为有向图)

(1) 称以 $V_1 \cup V_2$ 为顶点集, 以 $E_1 \cup E_2$ 为边集的图为并图, 记作 $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$

(2) 称以 $E_1 - E_2$ 为边集, 以 $E_1 - E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的差图, 记作 $G_1 - G_2$

(3) 称以 $E_1 \cap E_2$ 为边集, 以 $E_1 \cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的交图, 记作 $G_1 \cap G_2$

(4) 称以 $E_1 \oplus E_2$ 为边集, 以 $E_1 \oplus E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的环和, 记作 $G_1 \oplus G_2$

(5) 环和即不交并集, $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$

(6) 若两个图顶点集不交, 称这两个图不交; 若边集不交, 称作边不交

20. 度数: 设 $G = \langle V, E \rangle$, 为无向图, 任意 $v \in V$, 将 v 作为边的端点的次数称作 v 的度数, 简称为度, 记作 $d_G(v)$ 。在不产生混淆时亦可记作 $d(v)$; 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图, 任意 $v \in V$, 将 v 作为边的始点的次数称为 v 的出度, 记作 $d_D^+(v)$, 简记作 $d^+(v)$; 同理, 有入度 $d_D^-(v)$, 简单记作 $d^-(v)$, 称 v 的度数 $d_D(v) = d^+(v) + d^-(v)$ (或简单记作 $d(v)$)

21. 最大(小)度: 在无向图 G 中, 令 $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$, $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$, 分别称作 G 的最大度与最小度。类似的, 有向图有 $\Delta(D), \delta(D), \Delta^+(D), \delta^+(D), \Delta^-(D), \delta^-(D)$, 如需简记, 去掉 (D) 即可

22. 悬挂顶点(边): 度数为 1 (与之关联)

奇(偶)度顶点: 度数为奇数(偶数)

23. 度数列: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一个 n 阶无向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 称 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$; 对于顶点标定的无向图, 它的度数列唯一。反之, 对于给定的非负整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, 若存在以 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集的 n 阶无向图 G , 使得 $d(v_i) = d_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则称 d 是可图化的。特别的, 若得到的图是简单图, 则称可简单图化。对有向图还有类似的出度列和入度列。

24. 同构: 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 是两个无向图, 若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2, s.t. \forall v_i, v_j \in V_1, (v_i, v_j) \in E_1 \Leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) \in E_2, (v_i, v_j)$ 和 $(f(v_i), f(v_j))$ 重数相同, 则称 G_1 与 G_2 同构, 记作 $G_1 \cong G_2$ 。对有向图还有类似的定义。

25. 彼得松图:

在图 5.2.2 中, (a) 称作彼得松(Peterson)图, (b), (c) 均与 (a) 同构。 (d), (e), (f) 各图彼此间都不同构。

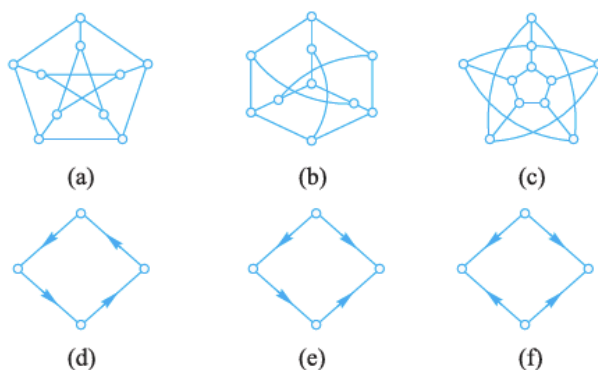
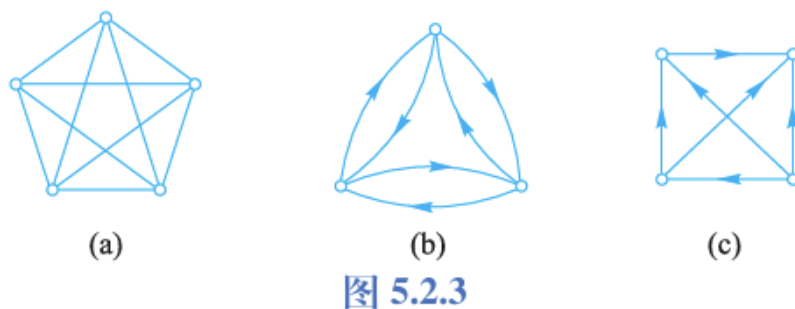


图 5.2.2

至今还没有找到判断两个图是否同构的便于检查的充分必要条件。显然阶数相同、边数相同、度数列相同等都是必要条件, 但都不是充分条件

26. 完全图: 设 G 为 n 阶无向简单图, $n \geq 1$, 若 G 中每个顶点均与其余的 $n - 1$ 个顶点相邻, 则称 n 阶无向完全图, 简称 n 阶完全图, 记作 K_n ; 同理有 n 阶有向完全图; 设 D 为 n 阶有向简单图, 若 D 的基图为 n 阶无向完全图 K_n , 则称 D 为 n 阶竞赛图

在图 5.2.3 中, (a) 为 K_5 , (b) 为 3 阶有向完全图, (c) 为 4 阶竞赛图.



易知, n 阶无向完全图, n 阶有向完全图, n 阶竞赛图的边数分别为 $\frac{n(n-1)}{2}$, $n(n-1)$, $\frac{n(n-1)}{2}$

27. k -正则图: 设 G 为 n 阶无向简单图, 若 $\forall v \in V(G), d(v) = k$.

由握手定理可知, n 阶 k -正则图中, 边数 $m = \frac{kn}{2}$, 因而当 k 为奇数时, n 必为偶数

28. 补图: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图, 令 $\bar{E} = \{(u, v) | u, v \in V, u \neq v, (u, v) \notin E\}$, 称 $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$ 为 G 的补图. 若 $G \cong \bar{G}$, 则称 G 为自补图

29. 通路和回路: 设 G 为无向标定图, G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \dots e_{j_l} v_{i_l}$ 称作 v_{i_0} 到 v_{i_l} 的通路, v_{i_0}, v_{i_l} 分别称作 Γ 的始点和终点, Γ 中边的条数称作长度. 若有 $v_{i_0} = v_{i_l}$, 称之为回路. 若 Γ 的所有边互不相同, 称为简单通路. 若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$, 称为简单回路. 若所有顶点 (除了 v_{i_0}, v_{i_l} 可能相同外) 互不相同, 所有边也互不相同, 称作初级通路/路径. 若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$, 称为初级回路/圈. 根据长度的奇偶性, 又有奇圈和偶圈 (简单无向图中, 圈的长度至少为 3). 若 Γ 中有边重复出现, 则称 Γ 为复杂通路. 若又有 $v_{i_0} = v_{i_l}$, 则称 Γ 为复杂回路. 有向图中情况是类似的, 只是要注意有向边方向的一致性. 在简单图中可以只用顶点序列表示通路 (回路)

30. 长度相同的圈都是同构的, 因此在同构意义下给定长度的圈只有一个. 在标定图中, 圈表示成顶点和边的标记序列. 只要两个标记序列不同, 就认为这两个圈不同, 称这两个圈在定义意义下不同

31. 连通: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $u, v \in V$ 之间存在通路, 则称 u, v 是连通的, 记作 $u \sim v$. 规定: $\forall v \in V, v \sim v$.

连通图: 若无向图 G 是平凡图或 G 中任何两个顶点都是连通的, 则称连通图, 否则非连通图.

32. 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, V_i 是 V 关于顶点之间的连通关系的一个等价类, 称导出子图 $G[V_i]$ 为 G 的一个连通分支, G 的连通分支数记作 $p(G)$. 由定义, 若 G 为连通图, 则 $p(G) = 1$; 若为非连通图, 则 $p(G) \geq 2$. 在所有 n 阶无向图中, n 阶零图是连通分支最多的, $p(N_n) = n$.

33. 设 u, v 为无向图 G 中任意两个顶点, 若 $u \sim v$, 则称 u, v 之间长度最短的通路为短程线, 其长度称为 u, v 的距离, 记作 $d(u, v)$. 当 u, v 不连通时, 规定 $d(u, v) = +\infty$

34. 割: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若存在 $V' \subset V, s.t. p(G - V') > p(G)$, 且对于 $\forall V'' \subset V'$, 均有 $p(G - V') = p(G)$, 则称 V' 是 G 的点割集. 若 $V' = \{v\}$, 则称 v 为割点

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $\exists E' \subseteq E, s.t. p(G - E') > p(G)$, 且对于 $\forall E'' \subset E', p(G - E'') = p(G)$, 则称 E' 是 G 的边割集, 或简称割集. 若 $E' = \{e\}$, 称为割边或桥

35. 连通度: 设 G 为无向连通图且不是完全图, 则称 $\kappa(G) = \min\{|V'| | V' \text{ 为 } G \text{ 的点割集}\}$ 为 G 的点连通度, 简称为连通度, $\kappa(G)$ 有时简记为 κ . 当 $n \geq 1$ 时, 规定完全图 K_n 的点连通度为

$n-1$, 非连通图的点连通度为 0。又若 $\kappa(G) \geq k$, 称 G 为 k -连通图, k 为自然数。若 G 为 k -连通图, $k \geq 1$, 则在 G 中删除任何 $k-1$ 个顶点后, 所得到的图一定还是连通的
同理, 有边连通度 $\lambda(G)$ 或 λ , r 边-连通图。若 G 为 r 边-连通图, 则在 G 中删除任何 $r-1$ 个边后, 所得到的图一定还是连通, K_n 边连通度为 $n-1$

36. 可达: 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为一个有向图, $\forall v_i, v_j \in V$, 若从 v_i 到 v_j 存在通路, 则称 v_i 可达 v_j , 记作 $v_i \rightarrow v_j$; 规定 $v_i \rightarrow v_i$ 。若 $v_i \rightarrow v_j$ 且 $v_j \rightarrow v_i$, 则称相互可达, 记作 $v_i \leftrightarrow v_j$

37. 短程线: 设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $\forall v_i, v_j \in V$, 若 $v_i \rightarrow v_j$, 则称 v_i 到 v_j 最短通路为短程线, 短程线长度称为距离, 记作 $d < v_i, v_j \rangle$, 与 $d(v_i, v_j)$ 相比, 除无对称性外, 具有一切性质

38. 强, 弱, 单连通图: 若有向图 $D = \langle V, E \rangle$ 的基图是连通图, 称为弱连通图, 简称连通图。若 $\forall v_i, v_j \in V, v_i \rightarrow v_j$ 和 $v_j \rightarrow v_i$ 至少成立其一, 则称单向连通图; 若 $\forall v_i, v_j \in V, v_i \leftrightarrow v_j$, 则称强连通图

39. 极大路径: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向图, Γ 为一条路径。若 Γ 始点和终点都不与 Γ 外的顶点相邻, 则称 Γ 为一条极大路径。

扩大路径法 (在涉及路径和圈的构造性证明中常用的方法): 任给一条路径, 如果它的始点或终点与路径外的某个顶点相邻, 就把它延伸到这个顶点。继续这一过程, 直到最后不能向外延伸为止, 最后总能得到一条极大路径。

40. 二部图: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若能将 V 划分为 V_1, V_2 (即 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$), 使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1 , 一个属于 V_2 , 则称为二部图 (或二分图, 偶图), 称 V_1, V_2 为互补顶点子集, 记作 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ 。又若是简单二部图, V_1 中每个顶点均与 V_2 中的所有顶点相邻, 则称为完全二部图, 即为 $K_{r,s}$, 其中 $r = |V_1|, s = |V_2|$ 。 $N_n (n \geq 2)$ 为二部图。

41. 有向图关联矩阵: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶 m 边无向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 定义 $n \times m$ 矩阵 $M(G) = (m_{ij})$, 其中 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 关联次数, 称 $M(G)$ 为 G 的关联矩阵。

42. 无向图关联矩阵: 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶 m 边有向图, 无环, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 定义 $n \times m$ 矩阵 $M(D) = (m_{ij})$, 其中 $m_{ij} = 1$, 若 v_i 为 e_j 的始点; $m_{ij} = -1$, 若 v_i 为 e_j 的终点; $m_{ij} = 0$, v_i, e_j 不关联, 称 $M(D)$ 为 D 的关联矩阵

43. 有向图的邻接矩阵: 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到 v_j 的边数, 定义 $n \times n$ 矩阵 $A(D) = (a_{ij}^{(1)})$, 称 $A(D)$ 为 D 的邻接矩阵

44. 可达矩阵: 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令 $p_{ij} = 1$, 若 $v_i \rightarrow v_j$; $p_{ij} = 0$, 否则。定义 $n \times n$ 矩阵 $P(D) = (p_{ij})_{n \times n}$, 称 $P(D)$ 为 D 的可达矩阵。

45. 只要计算出 B_{n-1} , 由 B_{n-1} 的元素 $b_{ij}^{(n-1)}$ 是否为 0, 即可判定 $v_i \rightarrow v_j$ 是否成立, 从而写出可达矩阵 $P(D)$; 不过 $p_{ii} \equiv 1$, 与 B_{n-1} 无关

46. 对无向图可以同样定义邻接矩阵和可达矩阵, 实际上只要将无向图的每条边改成两条反向有向边即可。定理 13 及推论仍然成立。与有向图的区别是, 无向图的邻接矩阵和可达矩阵都是对称的

47. 欧拉通路: 通过图中所有边恰好一次且一次行遍所有顶点的通路;

欧拉回路: 通过图中所有边恰好一次且一次行遍所有顶点的回路;

欧拉图：含有欧拉回路的图；

半欧拉图：含有欧拉通路但不含有欧拉回路的图

48. 规定平凡图是欧拉图

49.

二 • 公式定理

1. 握手定理：在任何无向图中，所有顶点度数之和等于边数的 2 倍；在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍，所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，都等于边数

【推论】：任何图中，奇度顶点个数是偶数

证：设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，令 $V_1 = \{v | v \in V, d(v) \text{ 为奇数} \}$ ， $V_2 = \{v | v \in V, d(v) \text{ 为偶数} \}$ ，则 $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。由握手定理， $2m = \sum_{v \in V} d(v)$ ，那么由于偶 + () = 偶，奇 * () = 偶，故 $|V_1|$ 必为偶数。

2. 非负整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 可图化 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n d_i$ 为偶数

证：由握手定理， \Rightarrow 显然；对于 \Leftarrow ，由已知可知， d 中有 $2k$ 个奇数，其中 $0 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$ 。不妨设它们为 $d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_{2k}$ 。如下构造以 d 为度数列的 n 阶无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ： $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，在点 v_r, v_{r+k} 之间连边， $r = 1, 2, \dots, k$ 。若 d_i 为偶数，令 $d'_i = d_i$ ；若 d_i 为奇数，令 $d'_i = d_i - 1$ ，得 $d' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_n)$ ，则 d'_i 均为偶数。再在 v_i 处画 $\frac{d'_i}{2}$ 条环， $i = 1, 2, \dots, n$ 。这就证明了 d 是可图化的。

3. 设 G 为任意 n 阶无向简单图，则 $\Delta(G) \leq n - 1$ 。

4. 在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v 存在通路，且 $u \neq v$ ，则从 u 到 v 存在长度 $\leq n - 1$ 的初级通路

证：设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \dots e_{j_l} v_{i_l}, v_{i_0} = u, v_{i_l} = v$ 。若 $l \leq n - 1$ ，成立；若 $l > n - 1$ ，此时 Γ 上顶点数大于 G ，于是必存在 $v_s = v_k$ ，那么我们删除这个回路，递归操作有限步后，必得到 $l \leq n - 1$

5. 在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的回路，则一定存在 v 到自身长度 $\leq n$ 的回路

【推论】：在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的简单回路，则一定存在 v 到自身长度 $\leq n$ 的初级回路

6. \forall 无向图 G ，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

7. 强连通图的判定定理：有向图 $D = \langle V, E \rangle$ 是强连通图 $\Leftrightarrow D$ 中存在经过每个顶点至少一次的回路

证： \Leftarrow 显然；对于 \Rightarrow ，设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，由 D 的强连通性， $v_i \rightarrow v_{i+1}, i = 1 \sim n - 1$ 。设 Γ_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路， $i = 1, 2, \dots, n - 1$ 。又因为 $v_n \rightarrow v_1$ ，设 Γ_n 为 v_n 到 v_1 的通路。于是，依次连接 $\Gamma_1 \sim \Gamma_n$ ，所得回路经过 D 中每个顶点至少一次

8. 单向连通图的判定定理：有向图 $D = \langle V, E \rangle$ 是单向连通图 $\Leftrightarrow D$ 中存在经过每个顶点至少一次的通路

9. 二部图的判定定理：设 $n \geq 2$ ，则 n 阶无向图 G 是二部图 $\Leftrightarrow G$ 中无奇圈

证: \Rightarrow : 若 G 中无圈, 成立; 若有圈, 设其一为 C , 下证 C 是偶圈。令 $C = v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_l}v_{i_1}, l \geq 2$, 不妨设 $v_{i_1} \in V_1$, 则让他们依次交替属于 $V_1, V_2, v_{i_l} \in V_2$, 因而 l 为偶数, 得证

\Leftarrow : 不妨设 G 为连通图, 否则可以对每个连通分支讨论, 孤立点可以根据需要分属 V_1, V_2 。设 v_0 为 G 中任一顶点, 令 $V_1 = \{v | v \in V(G), d(v_0, v) \text{ 为偶数}\}, V_2 = \{v | v \in V(G), d(v_0, v) \text{ 为奇数}\}$, 易知, $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$, 故只需证 V_1 中任意两顶点不相邻, V_2 中任意两顶点也不相邻。若 $\exists v_i, v_j \in V_1$ 相邻, 令 $e = (v_i, v_j)$, 设 v_0 到 v_i, v_j 短程线各为 $\Gamma_i, \Gamma_j, d(v_0, v_i), d(v_0, v_j)$ 都是偶数, 于是 Γ_i, Γ_j, e 构成一条长度为奇数的回路。这条回路可能是一条复杂回路, 可以分解成若干由 Γ_i, Γ_j 共有的边构成的回路(实际上是每条边重复一次的路径)和由 Γ_i, Γ_j 不共有的边及 e 构成的圈。由 Γ_i, Γ_j 共有的边构成的回路长度为偶数, 故在由 Γ_i, Γ_j 不共有的边及 e 构成的圈中一定有奇圈, 这与已知矛盾。类似可证 V_2 , 得证 G 为二部图。

10. $M(G)$ 的性质:

- (1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2$
- (2) $\sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i), i = 1, 2, \dots, n$
- (3) $\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = 2m$
- (4) 第 j 列和第 k 列相同 \Leftrightarrow 边 e_j, e_k 是平行边
- (5) $M(G)$ 中某行全为 0 \Leftrightarrow 该行对应的顶点是孤立点

11. $M(D)$ 的性质:

- (1) 每一列恰有一个 1 和一个 -1, 其余元素均为 0
- (2) 第 i 行中 1 的个数为 v_i 的出度, -1 的个数为 v_i 的入度
- (3) 平行边所对应的列相同

12. $A(D)$ 的性质:

- (1) $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j)$
- (2) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m$

13. 设 A 为有向图 D 的邻接矩阵, D 的顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则 A^l 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 的长为 l 的通路数, 其中 $a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 出发的长为 l 的回路数, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中所有顶点出发的长为 l 的通路数, 其中 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为所有顶点出发的长为 l 的回路数

证: 只需证明 $a_{ij}^{(l)}$ 为 v_i 到 v_j 的长为 l 的通路数。用数学归纳法证:

- 当 $l = 1$ 时, 显然成立;
- 假设当 $l = k$ 时结论成立, 即 $a_{ij}^{(k)}$ 为 v_i 到 v_j 的长为 k 的通路数。
- 考虑 $l = k + 1$ 时的情况, 有 $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^n a_{ir}^{(k)} a_{rj}^{(1)}$, 由假设知 $a_{ir}^{(k)}$ 为 v_i 到 v_r 的长为 k 的通路数, $a_{rj}^{(1)}$ 为 v_r 到 v_j 的长为 1 的通路数, 于是 $a_{ij}^{(k+1)}$ 为 v_i 到 v_j 的长为 $k + 1$ 的通路数, 得证

【推论】 设 $l \geq 1, B_l = A + A^2 + \dots + A^l$, 则 B_l 中元素之和为 D 中所有顶点出发的长不超过 l 的通路数; $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为所有顶点出发的长不超过 l 的回路数

14. 无向图 G 是欧拉图 $\Leftrightarrow G$ 为连通图且所有顶点均为偶度

证: \Rightarrow : 因为 G 为欧拉图, 故存在欧拉回路, 设其中任一条为 $C, \forall v_i, v_j \in V, v_i, v_j$ 都在 C 上, 因而二者连通, 故为连通图。又 $\forall v_i \in V, v_i$ 在 C 上每出现一次获得 2 度, 故无奇度顶点, 得证

\Leftarrow : 边数 $m \geq 1$, 对 m 做归纳证明:

- 当 $m = 1$ 时, G 只能是一个环, 显然成立;
- 假设当 $m = k (k \geq 1)$ 时结论成立; $\delta(G) \geq 2$, 可以证明 G 中必含圈, 设 C 为其一, 删除 C 的边, 得到子图 G' , 则 G' 中每个顶点度数均为偶数, G' 的每个连通分支均为欧拉图, 由归

纳假设， G' 中每个连通分支均含有欧拉回路。将这些欧拉回路与 C 连接起来，便得到 G 的欧拉回路，得证

15. 无向图 G 是半欧拉图 $\Leftrightarrow G$ 为连通图且恰有两个奇度顶点

证： \Rightarrow ：因为 G 为半欧拉图，故存在欧拉通路，设其中任一条为 $P = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \dots e_{j_l} v_{i_l}$, $l \geq 1$ ，则 v_{i_0}, v_{i_l} 均在 P 上，因而二者连通， $\forall v \in \{v_{i_0} \sim v_{i_l}\}$, v 在 P 上，因而 v, v_{i_0} 连通， v, v_{i_l} 连通，故为连通图。又 v_{i_0}, v_{i_l} 在 P 上各出现一次获得1度，其余顶点在 P 上每出现一次获得2度，故 v_{i_0}, v_{i_l} 为奇度顶点，其余顶点均为偶度顶点，得证

\Leftarrow ：设俩奇度顶点为 u_0, v_0 ，对 G 加新边 (u_0, v_0) , $G' = G \cup (u_0, v_0)$ ，则 G' 连通且无奇度顶点，故为欧拉图，由定理14， G' 中存在欧拉回路，去掉 (u_0, v_0) ，便得到 G 的欧拉通路，得证

16.

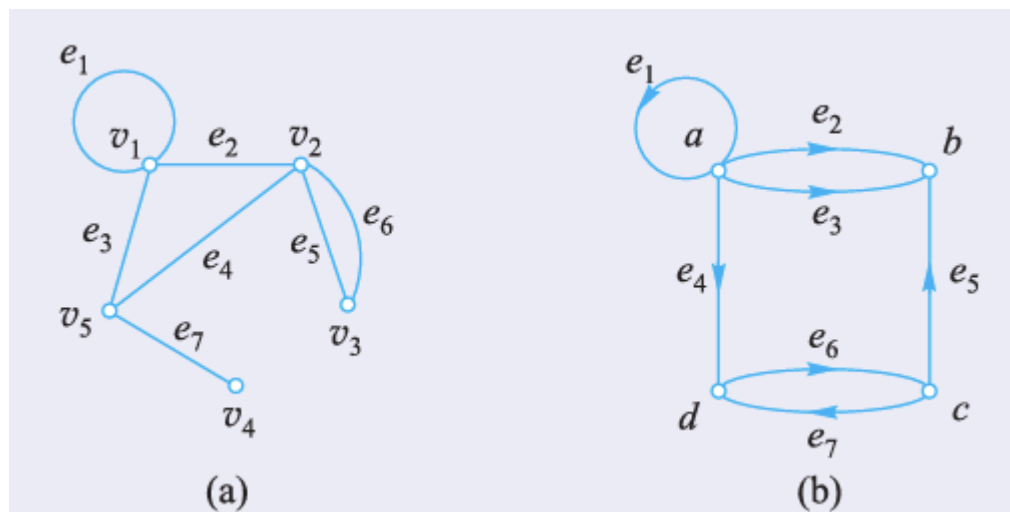
三 • 精选例题

1. (1) 给定无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$

(2) 给定有向图 $D = \langle V, E \rangle$ ，其中 $V = \{a, b, c, d\}$ $E = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, b \rangle\}$

画出 G, D 的图形

解：



2. 判断下列非负整数列哪些可图化，哪些可简单图化？

(1) (5, 5, 4, 4, 2, 1)

(2) (5, 4, 3, 2, 2)

(3) (3, 3, 3, 1)

(4) $(d_1, d_2, \dots, d_n), d_1 > d_2 > \dots > d_n \geq 1$ 且 $\sum_{i=1}^n d_i$ 为偶数

(5) (4, 4, 3, 3, 2, 2)

解：

(1) 否

(2) 可图化；否；因为假设可，由定理 $4\Delta(G) \leq 5 - 1 = 4$ ，而原列最大度是 5

(3) 可图化；否；因为假设可，设 $G = \langle V, E \rangle$ 以 $(3, 3, 3, 1)$ 为度数列，不妨设 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 3, d(v_4) = 1$ ，由于 $d(v_4) = 1$ ，因而 v_4 只能与 v_1, v_2, v_3 之一相邻，不妨设与 v_1 相邻，于是 v_2 只能与 v_1, v_3 相邻， v_3 只能与 v_1, v_2 相邻，不可能有 3 度，故不可

(4) 可图化；否；因为假设可，由定理 $4\Delta(G) \leq n - 1$ ，而 $d_1 \geq n$ ，故不可简单图化

(5) 可图化；可，举一例即可

3. (1) 画出 4 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图

(2) 画出 3 阶 2 条边的所有非同构的有向简单图

解：

(1) 由握手定理， $\sum_{i=1}^4 d_i = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 3 \times 2 = 6, \Delta(G) \leq 3$ ，于是所求无向简单图的度数列应满足的条件是，将 6 分成 4 个非负整数，每个整数均大于等于 0 且小于等于 3，并且奇数的个数为偶数，只有下面 3 种情况：(a) $3, 1, 1, 1$ (b) $2, 2, 1, 1$ (c) $2, 2, 2, 0$

(2) 由握手定理可知，所画有向简单图各顶点度数之和为 4，最大出度和最大入度均小于等于 2。度数列及入度出度列为：(a) 度数列 $1, 2, 1$: (a.1) 入度列为 $0, 1, 1$ ，出度列为 $1, 1, 0$ (a.2) 入度列为 $0, 2, 0$ ，出度列为 $1, 0, 1$ (a.3) 入度列为 $1, 0, 1$ ，出度列为 $0, 2, 0$ (b) 度数列为 $2, 2, 0$ ，入度列为 $1, 1, 0$ ，出度列为 $1, 1, 0$

4. 无向完全图 K_3 的顶点依次标定为 a, b, c ，在定义意义下有多少个不同的圈？

解：在同构意义下， K_3 中只有一个长为 3 的圈。但在定义意义下，不同起点（终点）的圈是不同的，顶点间排列顺序不同的圈也看成是不同的，因而 K_3 中有 $6(\frac{3!}{2})$ 个不同的长度为 3 的圈：abca, acba, bacb, bcab, cabc, cbac. 如果只考虑起点（终点）的差异，而不考虑顺时针和逆时针的差异，应该有 3 种不同的圈，当然它们的长度都是 3

5. 一个农夫带着一条狗，一只羊和一筐白菜来到河的南岸。河边有一条小船，小船一次只能运载农夫和他带的一样东西（狗、羊或白菜）。而在农夫不在场的情况下，狗和羊，羊和白菜不能放在一起，因为狗要咬羊，羊会吃白菜。问：农夫怎样才能把他的 3 样东西安全地运到河对岸？至少需要来回几次？

解：用顶点表示可能的状况。例如，(人狗羊菜, \emptyset) 表示人狗羊菜都在南岸，北岸什么也没有；(人羊, 狗菜) 表示人羊在南岸，狗菜在北岸。两个顶点之间有一条边当且仅当一次摆渡使表示的一种状态变成另一种状态。

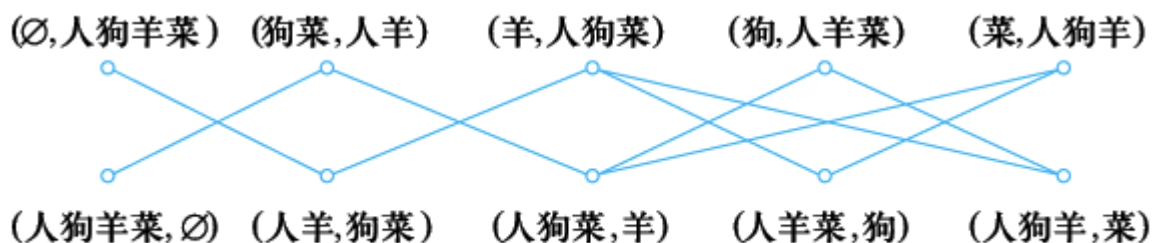
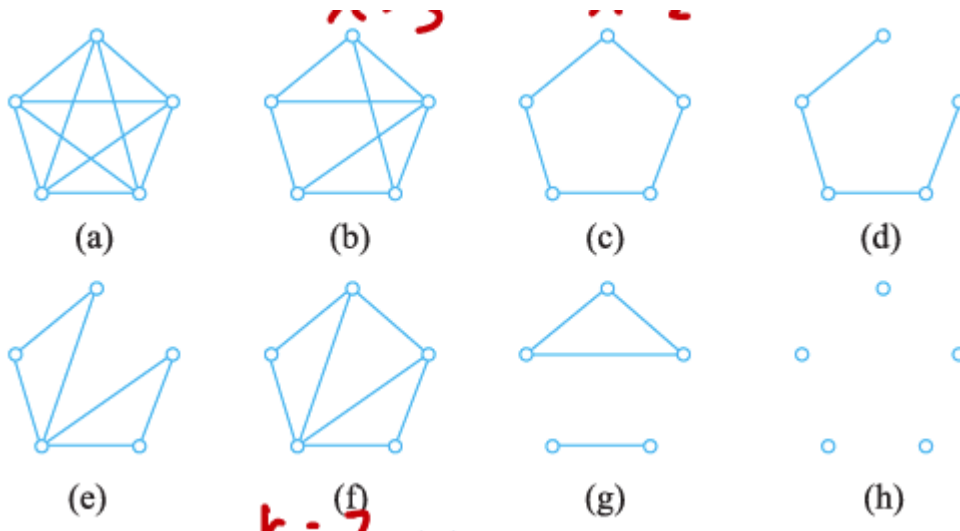


图 5.3.1

不难看出两条短程线长度都是 7。

6. 求下列各图的 κ, λ , 并指出各是几连通图及几边-连通图, 最后分别排序。



解:

$\kappa_1 = 4, \lambda_1 = 4$, 1, 2, 3, 4-连通图, 1, 2, 3, 4边-连通图

$\kappa_2 = 3, \lambda_2 = 3$, 1, 2, 3-连通图, 1, 2, 3边-连通图

$\kappa_3 = 2, \lambda_3 = 2$, 1, 2-连通图, 1, 2边-连通图

$\kappa_4 = 1, \lambda_4 = 1$, 1-连通图, 1边-连通图

$\kappa_5 = 1, \lambda_5 = 2$, 1-连通图, 1, 2边-连通图

$\kappa_6 = 2, \lambda_6 = 2$, 1, 2-连通图, 1, 2边-连通图

$\kappa_7 = 0, \lambda_7 = 0$, 0-连通图, 0边-连通图

$\kappa_8 = 0, \lambda_8 = 0$, 0-连通图, 0边-连通图

点连通程度: $a > b > c = f > d = e > g = h$

边连通程度: $a > b > c = e = f > d > g = h$

7. (1) 给出 $\kappa = \lambda = \delta$ 的无向简单图

(2) 给出 $\kappa < \lambda < \delta$ 的无向简单图

解:

(1) K_n, N_n

(2) 在两个 $K_n, n \geq 4$ 之间放置一个顶点 v , 并连接 v 与每一个 K_n 的两个顶点, 则 $\kappa = 1, \lambda = 2; \delta = \begin{cases} 3 & \text{if } n=4 \\ 4 & \text{if } n \geq 5 \end{cases}$

8. 设 G 为 $n(\geq 4)$ 阶无向简单图, $\delta(G) \geq 3$, 证明 G 中存在长度 ≥ 4 的圈

证:

证明 不妨设 G 是连通图, 否则, 因为 G 的各连通分支的最小度也都大于等于 3, 因而可对它的某个连通分支进行讨论. 设 u, v 为 G 中任意两个顶点, 由于 G 是连通图, 因而 u, v 之间存在通路. 由定理 5.2.5 的推论 5.2.2 可知 u, v 之间存在一条路径. 用扩大路径法扩大这条路径, 设最后得到的极大路径为 $\Gamma = v_0 v_1 \cdots v_l$. 由于 $\delta(G) \geq 3$, 必有 $l \geq 3$. 若 v_0 与 v_l 相邻, 则 $\Gamma \cup (v_0, v_l)$ 为长度大于等于 4 的圈. 否则, 由于 $d(v_0) \geq \delta(G) \geq 3$, 因而 v_0 除与 Γ 上的 v_1 相邻外, 还存在 Γ 上的顶点 v_k 和 $v_t, 1 < k < t < l$, 与 v_0 相邻. 于是, $v_0 v_1 \cdots v_k \cdots v_t v_0$ 为一个圈且长度大于等于 4 如图 5.3.6 所示. □



图 5.3.6

四. 课后习题

5.4 (1) 写出 (a) 中 v_1 的邻域, 闭邻域 $N(v_1), \bar{N}(v_1)$

(2) 写出 (b) 中 u_1 的先驱元集 $\Gamma^-(u_1)$, 后继元集 $\Gamma^+(u_1)$, 邻域 $N(u_1)$, 闭邻域 $\bar{N}(u_1)$

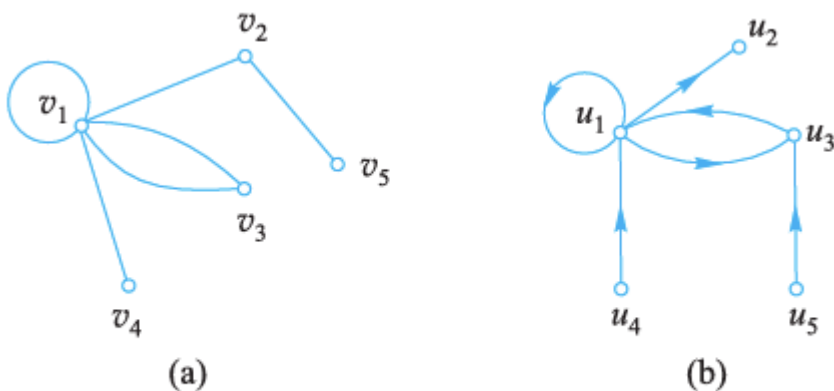


图 5.4.5

解: (1) $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}, \bar{N}(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

(2) $\Gamma^-(u_1) = \{u_3, u_4\}, \Gamma^+(u_1) = \{u_2, u_3\}, N(u_1) = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}, \bar{N}(u_1) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

5.7 已知有向图 D 的度数 $(2, 3, 2, 3)$, 出度 $(1, 2, 1, 1)$, 求 D 的入度列及 $\Delta(D), \delta(D), \Delta^+(D), \delta^+(D), \Delta^-(D), \delta^-(D)$

解: 入度列为 $(1, 1, 1, 2)$ $\Delta(D) = 3, \delta(D) = 2, \Delta^+(D) = 2, \delta^+(D) = 1, \Delta^-(D) = 2, \delta^-(D) = 1$

5.15 下列各数列中哪些是可简单图化的, 试给出两个非同构的简单图

(1) $(2, 3, 3, 5, 5, 6, 6)$

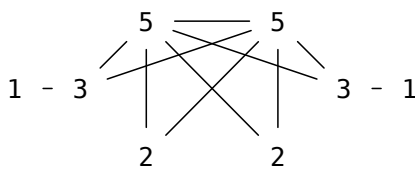
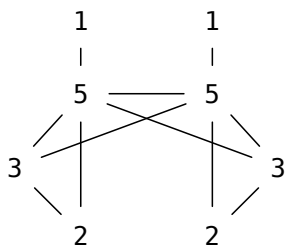
(2) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5)$

(3) $(2, 2, 2, 2, 3, 3)$

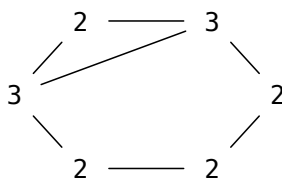
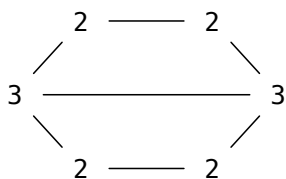
解:

(1) 不可；两个 6 度顶点只能与其余 5 个顶点相邻，此时 2 度顶点只能与两个 6 度顶点相邻，5 度顶点只能与两个 6 度顶点和三个 3 度顶点相邻，3 度顶点只能与两个 6 度顶点和一个 5 度顶点相邻，矛盾

(2) 可；



(3) 可；



5.21 无向图 G 如图所示

(1) 求 G 的全部点割集和边割集，并指出其中的割点和桥（割边）

(2) 求 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$

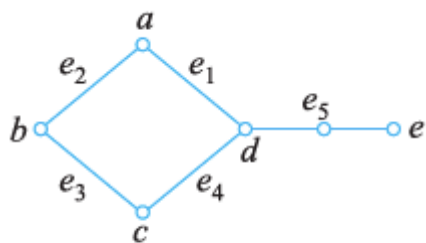


图 5.4.6

解：

(1) 点割集： $\{d\}, \{a, c\}$

边割集： $\{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}$

割点： d 桥： e_5

(2) $\kappa(G) = 1$, $\lambda(G) = 1$

5.43 有向图 D 如图所示。

(1) D 中有多少种非同构的圈，简单回路？

(2) 求 a 到 d 的短程线和距离 $d < a, d >$

(3) 求 d 到 a 的短程线和距离 $d < d, a >$

(4) 判断 D 是哪类连通图

(5) 对 D 的基图求解 (1) (2) (3)

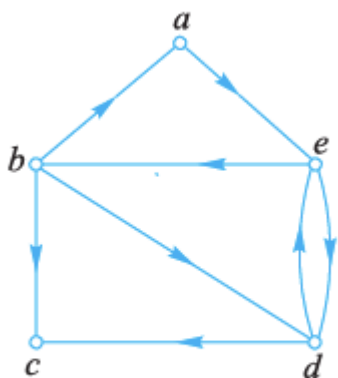


图 5.4.9

解：(1) 2 (长度为：d→e, 3: b→a→e→b、b→d→e→b);

3: d→e→d; b→a→e→b; b→d→e→b

(2) $a \rightarrow e \rightarrow d, d = 2$

(3) $d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow a, d = 3$

(4) 单向, 弱

(5) 非同构圈类型:

- 长度 2 (由多重边构成),
- 长度 3 (三角形),
- 长度 4 (四边形),
- 长度 5 (五边形)。

简单回路总数:

- 2-圈 1 个: (d, e, d) ,
- 三角形 3 个: $\{a, b, e\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d\}$,
- 四边形 2 个: $\{a, b, d, e\}, \{b, c, d, e\}$,
- 五边形 1 个: $\{a, b, c, d, e\}$ 。

a 到 d 的最短路及距离: $a - e - d$ 与 $a - b - d$, 距离 2。

d 到 a 的最短路及距离: $d - e - a$ 与 $d - b - a$, 距离 2。

5.50 设 G 是 n 阶 m 条边的无向连通图, 证明: $m \geq n - 1$

证:

- i). 当 $n = 1$ 时, $m = 0 = n - 1$, 成立; 当 $n = 2$ 时, $m \geq 1 = n - 1$, 成立
- ii). 假设当 $n = k$ 时, 结论成立, 即 k 阶连通图 G 中 $m \geq k - 1$, 现证当 $n = k + 1$ 时结论也成立。设 G 为 $k + 1$ 阶连通图, 边数为 m , 去掉 G 中一个顶点 v , 得到图 $G - v$, 则有以下两种情况:
 - ▶ (1) $G - v$ 仍然是连通图, 则由假设知 $G - v$ 边数 $m' \geq k - 1$, 因为 G 连通, v 在 G 中至少与 1 个顶点相连, 即 $d(v) \geq 1, m = m' + d(v) \geq k = (k + 1) - 1$, 结论成立
 - ▶ (2) G' 变成非连通图, 则 G' 有 t 个连通分支 G_1, G_2, \dots, G_t , 设第 i 个分量顶点数为 n_i , $(n_1 + n_2 + \dots + n_t) = k$; 边数为 m_i , 每个分量是连通的, 按照归纳假设 $m_i \geq n_i - 1$, 故 $m' = \sum_{i=1}^t m_i \geq \sum_{i=1}^t (n_i - 1) = k - t$ 。另一方面, 为使 G 在加入 v 后整体连通, v 至少与每个分量的一个顶点相连, 即 $d(v) \geq t$, 因此 $m = m' + d(v) \geq k - t + t = k = (k + 1) - 1$

- 结论成立

模块 3：集合论

一 • 基本概念

1. 集合：把一些事物汇集到一起组成一个整体
2. 表示方法：列举法，描述法
3. 三要素：确定性，互异性，无序性
4. 规定： \forall 集合 $A, A \notin A$
理发师悖论：构造 $S = \{x | x \notin x\}$ ，那么 $A \in A$?
5. 集合间的关系：子集，相等，空集
6. 空集的性质：是一切集合的子集，是唯一的
7. m 元子集：含有 n 个元素的集合简称为 n 元集，其含有 m ($\leq n$) 个元素的子集称作它的 m 元子集
8. 幂集：设 A 为集合，称 A 的全体子集构成集合，记作 $P(A)$ 或 2^A
9. 全集：在一个具体问题中，若所涉及集合都是某个集合的子集，称
10. 集合运算： $\cup \cap$
补集： $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
 $\cup_{i=1}^n A_i, \cap_{i=1}^n A_i$
11. 对称差： $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
12. 绝对补： $\sim A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$
13. 族：集合构成的集合， \mathcal{A}
广义并： $\cup \mathcal{A} = \{x | \exists A \in \mathcal{A}, s.t. x \in A\}$ 若 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\cup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
广义交： $\cap \mathcal{A} = \{x | \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$ 若 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\cap \mathcal{A} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$
 $\cup \mathcal{A} = \{x \in E | \exists A \in \mathcal{A}, s.t. x \in A\} = \emptyset$
 $\cap \mathcal{A} = \{x \in E | \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\} = E$
14. 集合运算优先顺序：绝对补，幂集，广义并/交优先
16. 有穷集的计数
- 韦恩图
17. 有序对：由两个元素 x 和 y (允许 $x=y$) 按照一定顺序排列成的二元组称作一个有序对或序偶，记作 $\langle x, y \rangle$ ，其中 x 是它的第一元素， y 是它的第二元素
18. 笛卡尔积：设 A, B 为集合，用 A 中元素为第一元素， B 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的笛卡儿积，记作 $A \times B$
19. 二元关系：若一集合满足以下条件之一：

- (1) 集合非空, 且它的元素都是有序对;
- (2) 集合是空集

那么称该集合为一个二元关系, 记作 R . 二元关系也可简称为关系. 对于二元关系 R , 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则记作 xRy ; 若 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则记作 $x \not R y$

设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作从 A 到 B 的二元关系, 特别当 $A=B$ 时称作 A 上的二元关系

大小为 n 的集合上有 2^{n^2} 个不同的二元关系

20. 空关系: 对于任何集合 A , 空集 \emptyset 是 $A \times A$ 的子集, 称作 A 上的空关系

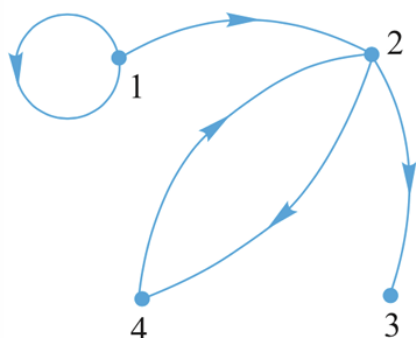
全域关系: $E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A$

恒等关系: $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$

22. 关系矩阵: 设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R 是 A 上的关系. $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, 令 $r_{ij} = \begin{cases} 1 & x_i R x_j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$,

则 R 的关系矩阵 $M_R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$

23. 关系图: 设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R 是 A 上的关系, R 的关系图, 记作 G_R , 如下构造: G_R 有 n 个顶点 x_1, x_2, \dots, x_n , 若 $\langle x_i, x_j \rangle \in R$, 那么在 G_R 中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边



24. 设 R 是二元关系

- 定义域 ($\text{dom}R$): R 中所有有序对的第一元素构成的集合
- 值域 ($\text{ran}R$): R 中所有有序对的第二元素构成的集合
- 域 ($\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R$)

25. 逆关系: $R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$

26. 复合: $F \circ G = \{ \langle x, z \rangle \mid \exists y, s.t. \langle x, y \rangle \in F, \langle y, z \rangle \in G \}$

27. 限制和像:

- R 在 A 上的限制, $R \upharpoonright A = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R, x \in A \}$
- A 在 R 下的像: $R[A] = \text{ran}(R \upharpoonright A)$

28. 本节所定义的关系运算中逆运算优先于其他运算, 而所有的关系运算都优先于集合运算, 对于没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序。

28. 关系的幂运算: 设 R 为 A 上的关系, n 为自然数, 则 R 的 n 次幂 R^n 定义为

- $R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

29. 幂运算计算方法:

- 集合表达式：右复合运算
- 关系矩阵：矩阵乘法（逻辑加）
- 关系图：算 n 步可达图

30. (反) 自反关系：设 r 是 A 上的关系

- 自反关系： $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R$
- 反自反关系： $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \notin R$

31. (反) 对称关系：

- 对称关系： $\forall \langle x, y \rangle \in R, \langle y, x \rangle \in R$
- 反对称关系： $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y$
- 例如， A 上的全域关系 E_A 、恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset 都是 A 上的对称关系。而恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset 也是 A 的上反对称关系，但全域关系 E_A 一般不是 A 上的反对称关系，除非 A 为单元集或空集

32. 传递关系：设 R 为 A 上的关系，若当 $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R$ ，必有 $\langle x, z \rangle \in R$ ，则称 R 为 A 上的传递关系

33. 设 R 是非空集合 A 上的关系， R 的自反（对称/传递）闭包是 A 上的关系 R' ，使得 R' 满足以下条件：

- (1) R' 自反（对称/传递）
- (2) $R \subseteq R'$
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反（对称/传递）关系 R'' ， $R' \subseteq R''$

一般将 R 的自反，对称，传递闭包分别记作 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

34. 在关系矩阵上构造闭包：

- (1) $M_r = M + I$
- (2) $M_s = M + M^T$
- (3) $M_t = M + M^2 + \dots$

35. 在关系图上构造闭包：

- (1) 自反：给每个顶点加环
- (2) 对称：给每条边加方向相反的边
- (3) 传递：按路径补边（只需考虑不大于顶点个数长度的路径）

36. 闭包运算能保持自反性、对称性，但对称闭包不一定保持传递性

37. 构造满足三个特性的闭包：传递闭包运算必须放在对称闭包之后， $tsr(R) = t(s(r(R)))$

38. 等价关系：设 R 为非空集合 A 上的关系，若 R 是自反，对称，和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。设 R 是一个等价关系，若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，则称 $x \sim y$

39. 等价类：设 R 为非空集合 A 上的等价关系， $\forall x \in A, [x]_R = \{y | y \in A, \langle x, y \rangle \in R\}$ 称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类，简记为 $[x]/\bar{x}$

40. 商集：设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记作 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$

41. 划分：设 A 为非空集合，若 A 的子集族 $\pi \subseteq P(A)$ 满足以下条件：

- (1) $\emptyset \notin \pi$
- (2) $\forall X, Y \in \pi$, 若 $X \neq Y$ ，则 $X \cap Y = \emptyset$
- (3) $\bigcup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个划分, 称 π 中的元素为 A 的划分块

42. 每个商集是一个划分

43. 等价关系与划分一一对应

44. n 元集有多少个等价关系? $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k, B_0 = B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52$

45. 偏序关系: 设 R 为非空集合 A 上的关系, 若 R 是自反, 反对称, 传递的, 称 R 为 A 上的。记作 \preceq 。若 $\langle x, y \rangle \in \preceq$, 则记作 $x \preceq y$, 读作 $x \leq y$

46. $\forall x, y \in A$, 定义

- (1) $x \prec y$, 若 $x \preceq y \wedge x \neq y$
- (2) x, y 是可比的, 若 $x \preceq y \vee y \preceq x$

47. 全序关系: 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系, 若 $\forall x, y \in A, x, y$ 都是可比的, 称 R 为 A 上的 \sim

48. 偏序集: $\langle A, \preceq \rangle$

49. 哈斯图: 表示偏序关系的有向图, 若 $x \prec y$, 则将 x 画在 y 的下方. 对于 A 中的两个不同元素 x 和 y , 如果 y 覆盖 x , 就用一条线段连接 x 和 y .

50. 覆盖: 设 $\langle A, \preceq \rangle$ 为偏序集, $\forall x, y \in A$, 若 $x \prec y \wedge \nexists z \in A, s.t. x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖 x

51. 偏序集中的特殊元素: 设 $\langle A, \preceq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$

- (1) 若对任意 $x \in B$, 均有 $y \preceq x$, 则称 y 为 B 的最小元
- (2) 若对任意 $x \in B$, 均有 $x \preceq y$, 则称 y 为 B 的最大元
- (3) 若对任意 $x \in B$, 当 $x \preceq y$, 必有 $x = y$, 则称 y 为 B 的极小元
- (4) 若对任意 $x \in B$, 当 $y \preceq x$, 必有 $x = y$, 则称 y 为 B 的极大元

三、示例说明

以“整除关系”(\leq 表示“整除”, 即 $a \leq b \iff a \mid b$)为例, 设

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, 考虑子集 $B \subseteq A$:

1. 例 1: $B = \{1, 2, 3, 6\}$

- 最小元: 1 (1 整除 B 中所有元素: $1 \leq 1, 1 \leq 2, 1 \leq 3, 1 \leq 6$)。
- 极小元: 1 (B 中没有比 1 更小的元素, 且 1 是最小元, 故也是极小元)。

2. 例 2: $B = \{2, 3, 6\}$

- 最小元: 不存在 (2 和 3 不可比, 2 不能整除 3, 3 也不能整除 2, 故没有元素能“小于等于” B 中所有元素)。
- 极小元: 2 和 3 (B 中没有比 2 小的元素, 也没有比 3 小的元素; 2 和 3 不可比, 因此都是极小元)。

3. 例 3: $B = \{4, 6, 12\}$

- 最小元: 不存在 (4 和 6 不可比, 4 不能整除 6, 6 也不能整除 4)。
- 极小元: 4 和 6 (B 中没有比 4 小的元素, 也没有比 6 小的元素; 4 和 6 不可比, 故都是极小元)。

52. 哈斯图中的孤立顶点既是极小元，也是极大元

53. 设 $\langle A, \preceq \rangle$ 为偏序集， $B \subseteq A, y \in A$

- (1) 若对任意 $x \in B, x \preceq y$ ，则称 y 为 B 的上界
- (2) 若对任意 $x \in B, y \preceq x$ ，则称 y 为 B 的下界
- (3) 令 $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$ ，称 C 的最小元为上确界
- (4) 令 $D = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$ ，称 D 的最大元为下确界

54. 函数的定义与性质：设 F 为二元关系，若 $\forall x \in \text{dom} F, \exists! y \in \text{ran} F, s.t. x F y$ ，则称 F 为函数。对于函数 F ，若有 $x F y$ ，则记作 $y = F(x)$ ，并称 y 为 F 在 x 的值

55. 设 F, G 为函数，若 $F \subseteq G \wedge G \subseteq F$ ，那么称函数 F, G 相等，记作 $F = G$

56. 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A ，读作 B 上 A ，即 $B^A = \{f | f : A \rightarrow B\}$

57. 函数的像和原像：设 $f : A \rightarrow B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$

- (1) 令 $f(A_1) = \{f(x) | x \in A_1\}$ ，称 $f(A_1)$ 为 A_1 在 f 下的像。特别的，当 $A_1 = A$ 时称 $f(A)$ 为函数的像
- (2) 令 $f^{-1}(B_1) = \{x | x \in A, f(x) \in B_1\}$ ，称 $f^{-1}(B_1)$ 为 B_1 在 f 下的原像

58. 设 $f : A \rightarrow B$

- (1) 若 $\text{ran} f = B$ ，则称 $f : A \rightarrow B$ 是满射
- (2) 若 $\forall y \in \text{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A, s.t. f(x) = y$ ，称单射
- (3) 若 f 既是单射又是满射，则称为双射

59.

二 • 公式定理

1. 集合运算性质：

• 摩根律：

- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- $\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$
- $\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

• 补充：

- $A \oplus B = B \oplus A$
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- $A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$
- $A \oplus A = \emptyset$
- $A \oplus \emptyset = A$

2. 容斥原理：设 S 有穷集， $P_1 \sim P_n$ 是 n 条性质。 S 中任何元素要么具有 P ，要么否。令 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，则 S 中不具有 $P_1 \sim P_n$ 的元素个数： $|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}| = |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

3. 笛卡尔积性质：无交换，结合律，但有分配律：

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

证: (1) $\subseteq: \forall \langle x, y \rangle \in A \times (B \cap C), x \in A, y \in B \cap C, \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C, \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$; 反之亦然, 略。

4. 关系运算性质:

- 设 F 是任意二元关系, 则
 - $(F^{-1})^{-1} = F$
 - $\text{dom } F^{-1} = \text{ran } F, \text{ran } F^{-1} = \text{dom } F$
- 设 F, G, H 是任意关系, 则
 - $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$
 - $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$
- 设 R 为 A 上的关系, 则
 - $R \circ I_A = R = I_A \circ R$
- 设 F, G, H 为任意关系, 则
 - $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$
 - $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$
 - $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$
 - $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$
 - 可以推广
- 设 F 为关系, A, B 为集合, 则
 - $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$
 - $F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$
 - $F \upharpoonright (A \cap B) = F \upharpoonright A \cap F \upharpoonright B$
 - $F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

5. 设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系, 则存在不相等的自然数 s, t , 使得 $R^s = R^t$ (抽屉原理)

6. 设 R 为 A 上的关系, $m, n \in N$, 则

- $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
- $(R^m)^n = R^{mn}$

证: (1) $\forall m \in N$, 对 n 用归纳法, 若 $n = 0, R^m \circ R^0 = R^{m+0}$; 假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则 $R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = R^{m+n} \circ R = R^{m+n+1}$, 归纳总结可得

(2) 同理

7. 设 R 是 A 上的关系, 若存在自然数 $s, t, s < t, s.t. R^s = R^t$, 则

- $\forall k \in N, R^{s+k} = R^{t+k}$
- $\forall k, i \in N, R^{s+kp+i} = R^{s+i}, p = t - s$
- 令 $S = \{R^0, R^1, \dots, R^{t-1}\}$, 则 $\forall q \in N, R^q \in S$

8. 集合性质的充要条件 设 R 为 A 上的关系, 则:

- (1) R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow I_A \cap R = \emptyset$
- (3) R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

9. 关系性质与关系矩阵与关系图

表示	性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$ 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji} = 0$	对 M^2 中 1 所在的位置, M 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 那么一定是一对方向相反的边 (无单边)	如果两个顶点之间有边, 那么一定是一条有向边 (无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 那么从 x_i 到 x_k 也有边

10. 关系性质与运算之间关系

运算	原有性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	×	×
$R_1 - R_2$	×	✓	✓	✓	×
$R_1 \circ R_2$	✓	×	×	×	×

11. 构造闭包的方法：设 R 为 A 上的关系，则有

- (1) $r(R) = R \cup R^0$
- (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$
- (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

证：

- (1) $I_A \subseteq r(R); R \subseteq r(R)$; 又有 $R \subseteq R'', I_A \subseteq R'', \forall \langle x, y \rangle \in R \cup I_A \subseteq R'' \cup R'' = R''$, 从而 $r(R) \subseteq R''$
- (2)
- (3)
 - ▶ 证 $R \cup R^2 \cup \dots \subseteq t(R) \Leftrightarrow \forall n, R^n \subseteq t(R)$: 归纳法, $n = 1$, 由闭包的包含性, $R \subseteq t(R)$; 假设 $R^k \subseteq t(R), \forall (x, z) \in R^{k+1} = R^k \circ R, \exists y, (x, y) \in R^k, (y, z) \in R, (x, y) \in t(R), (y, z) \in t(R), (x, z) \in t(R)$, 得证
 - ▶ 证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = S$, 只需证 S 是包含 R 的传递关系, 只需证 S 传递, $\forall (x, y) \wedge (y, z) \in S$, 必有 $(x, y) \in R^m, (y, z) \in R^n$, 则 $(x, z) \in R^{m+n} \subseteq S$, 得证

【推论】设 R 为有穷集上的关系，则 $\exists r \in N_+, s.t. t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^r$

12. 沃舍尔算法：考虑 $n+1$ 个矩阵序列 $M_0, M_1, \dots, M_n, M_k[i, j] = 1 \Leftrightarrow R$ 的关系图中存在一条 $x_i \rightarrow x_j$ 的路径，且这条路径除端点外中间只经过 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 中的顶点。则 M_0, M_n 各是 $R, t(R)$ 的关系矩阵

若已知 $M_k, M_{k+1}[i, j] = 1 \Leftrightarrow M_k[i, j] = 1 \vee (M_k[i, k+1] = 1 \wedge M_k[k+1, j] = 1) / M_k[i, j] + M_k[i, k+1] * M_k[k+1, j] = 1$

13. 闭包的性质：

- (1) 设 R 是非空集合 A 上的关系，则 R 是自反/对称/传递 $\Leftrightarrow r/s/t(R) = R$
- (2) 设 R_1, R_2 是非空集合 A 上的关系，且 $R_1 \subseteq R_2$ ，则 $x(R_1) \subseteq x(R_2), x = r \vee s \vee t$
- (3) 设 R 是非空集合 A 上的关系，则
 - (a) 若 R 自反， $s(R), t(R)$ 自反
 - (b) 若 R 对称， $r(R), t(R)$ 对称
 - (c) 若 R 传递， $r(R)$ 传递

14. 等价关系的性质：设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

- (1) $\forall x \in A, [x]$ 是 A 的非空子集
- (2) $\forall x, y \in A$ ，若 xRy ，则 $[x] = [y]$
- (3) $\forall x, y \in A$ ，若 x/Ry ，则 $[x] \cap [y] = \emptyset$
- (4) $\cup \{[x] | x \in A\} = A$

15. 若 $|A| = m, |B| = n$ ，则

- $|B^A| = n^m$
- 双射函数 $n!$
- 单射函数 $P(n, m)$
- 单调增函数
- 满射函数 $\sum_{r=0}^m (-1)^r C_m^r (m-r)^n$

16.

三 • 精选例题

1. 证明： $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

证： \subseteq ： $\forall x \in A - (B \cup C), x \in A \wedge x \notin B \cup C, x \in A, x \notin B, x \notin C, x \in A - B \wedge x \in A - C, x \in (A - B) \cap (A - C)$

\supseteq 翻过即可

2. 证： 已知其余定律，证明 $A \cup (A \cap B) = A$

证： $A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B) = A \cap (B \cup E) = A$

3. 证： $A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$

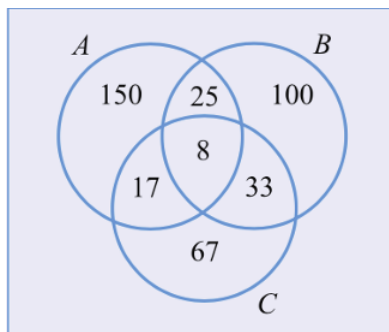
证： $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C), (A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C, \emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C$ ，得证

4. 求 $1 \sim 1000$ 之间同时不能被 5, 6, 8 整除的数的个数

解： 画韦恩图

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, |B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, |C| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125, |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{lcm}(5,6)} \right\rfloor = 33, |A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{lcm}(5,8)} \right\rfloor = 25, |B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{lcm}(6,8)} \right\rfloor = 41, |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{lcm}(5,6,8)} \right\rfloor = 8$$

故结果为 600



5. 证明：错排数 $D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$

证：设 S 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列集合， P_i 是其中 i 处在排列中的第 i 位的性质， A_i 是 S 中具有性质 P_i 的排列集合， $i = 1, 2, \dots, n$ 。错排数 D_n 就是 S 中不具有以上任一性质的排列数，显然

$$\begin{aligned}
 |S| &= n! \\
 |A_i| &= (n-1)! \\
 |A_i \cap A_j| &= (n-2)! \\
 |A_i \cap A_j \cap A_k| &= (n-3)! \\
 &\dots \\
 |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| &= 0! = 1 \\
 D_n &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| \\
 &= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \dots + (-1)^n C_n^n 0! \\
 &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]
 \end{aligned}$$

6. 判断：

- (1) 若 $A \times B = A \times C$ 则 $B = C$
- (2) $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$

解：(1) 错误，反例： $A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{2\}$

(2) 错误，反例： $A = B = \{1\}, C = \{2\}$

7. 设 $A = \{a, b, c, d\}, R = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>\}$ ，求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示

解：因为 R 的关系矩阵

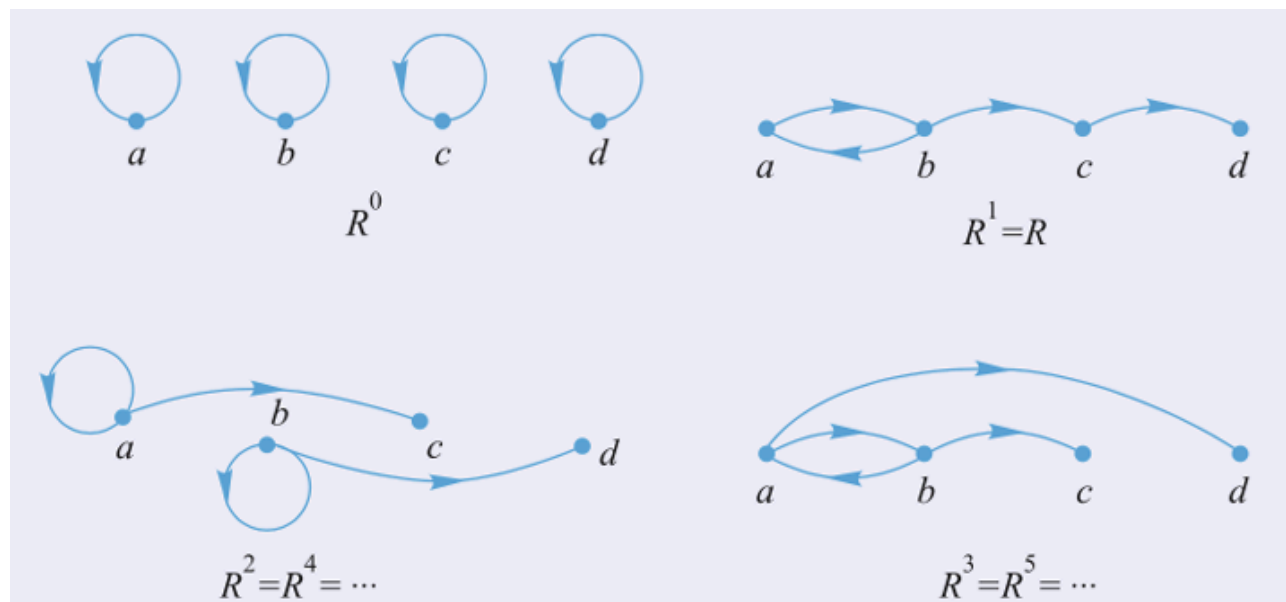
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

，故 R^2, R^3, R^4 的关系矩阵分别是

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注意到 $R^4 = R^2$ ，由此有 $R^2 = R^4 = \dots, R^3 = R^5 = \dots$ ，而 $R^0 = I_A$ ，至此，各次幂的关系矩阵均得到

关系图表示如下



8. 设 $A = \{a, b, d, e, f\}$, $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, d \rangle \}$ ，求出最小自然数 $m, n, s.t. m < n \wedge R^m = R^n$

解：由 R 定义可看出 A 中的元素可分为两组， $\{a, b\}, \{d, e, f\}$ ，他们在 R 的右复合运算下有如下变化规律：

$$\begin{aligned} a &\rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow \dots \\ d &\rightarrow e \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow \dots \end{aligned}$$

取最小公倍数 6，可得 $m = 0, n = 6$

9. 设 A 是集合， R_1, R_2 是 A 上的关系，证：

- (1) 若 R_1, R_2 是自反和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反和对称的
- (2) 若 R_1, R_2 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的

证：(1) 由题得 $I_A \subseteq R_1, R_2; R_1 = R_1^{-1}, R_2 = R_2^{-1}$ ；则

$$I_A \subseteq R_1 \cup R_2$$

是显然的；要证 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1 \cup R_2$ ，只需证 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ 若

$(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1}$ ，则 $(y, x) \in (R_1 \cup R_2)$ ，则 $(y, x) \in R_1 \vee (y, x) \in R_2$ ，则 $(x, y) \in R_1^{-1} \vee (x, y) \in R_2^{-1}$ ，则 $(x, y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ ；若 $(x, y) \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ ，则 $(y, x) \in R_1 \vee (y, x) \in R_2$ ，则 $(y, x) \in R_1 \cup R_2$ ，则 $(x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1}$ ，得证

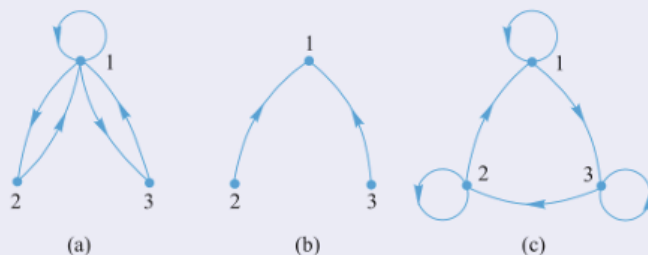
(2) 法一：假设 $(a, b), (b, c) \in R_1 \cap R_2$ ，则 $(a, b), (b, c) \in R_1 \wedge (a, b), (b, c) \in R_2$ 则 $(a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2, (a, c) \in R_1 \cap R_2$ ，得证

法二：由题得 $(R_1 \circ R_1) \subseteq R_1, (R_2 \circ R_2) \subseteq R_2$, 则 $(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq [R_1 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_2] \subseteq R_1 \cap R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \cap R_2$

10.

例 2.4.5

判断下图中关系的性质, 并说明理由.



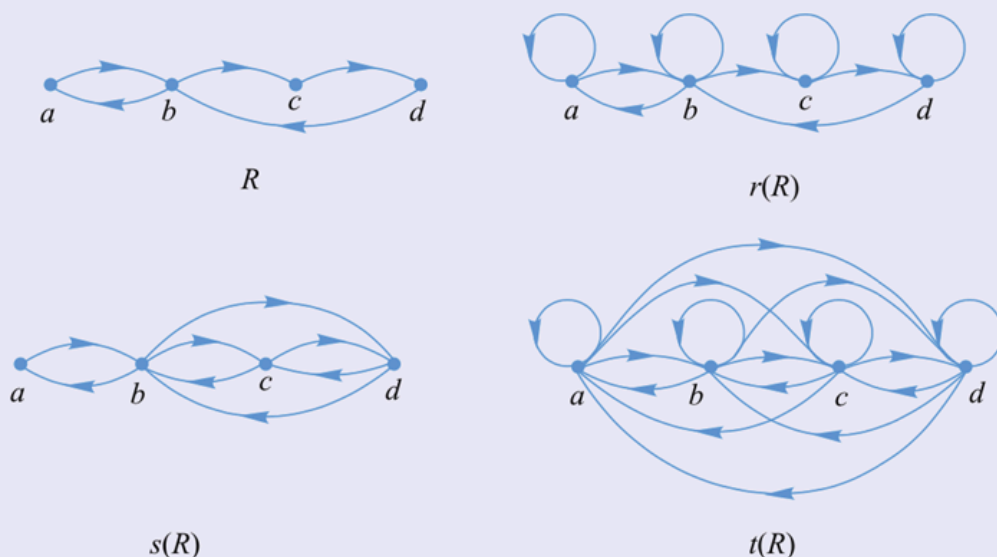
解:

- (a) 对称性
- (b) 反自反性, 反对称性, 传递性
- (c) 自反性, 反对称性

11.

例 2.5.1

设 $A = \{a, b, c, d\}, R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, b \rangle\}$, 则 R 和 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图如图 2.5.1 所示, 其中 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图就是使用上述方法直接从 R 的关系图得到的.

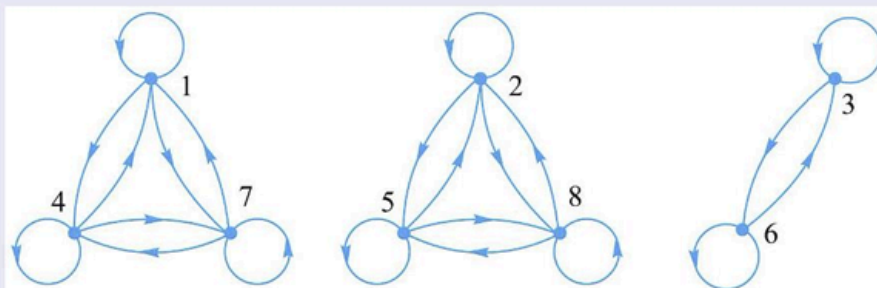


12.

例 2.6.1

设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R :

$R = \{\langle x, y \rangle | x, y \in A, x \equiv y \pmod{3}\}$, 其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 称作 x 与 y 模 3 相等. 不难验证 R 为 A 上的等价关系. 该关系的关系图如下图所示.



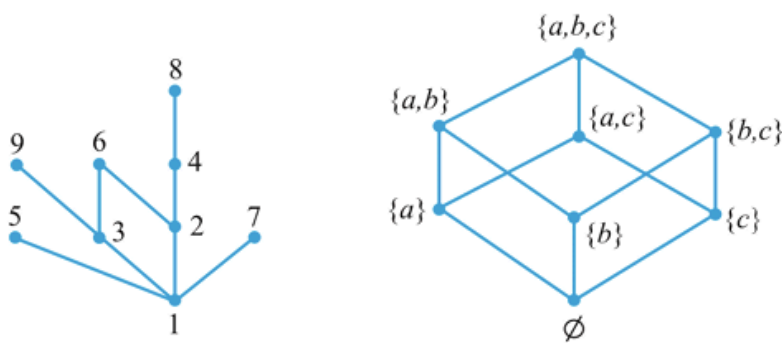
13.

例 2.7.1

画出偏序集 $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{\text{整除}} \rangle$ 和 $\langle P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图.

解

两个哈斯图如图 2.7.1 所示.



14.

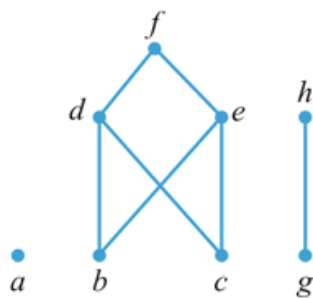


图 2.7.2

例 2.7.2

已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如图 2.7.2 所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.

解

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$R = \{\langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle\} \cup I_A.$$

□

四 · 课后作业

1.4 设 F 表示一年级大学生的集合, S 表示二年级大学生的集合, M 表示数学专业学生的集合, R 表示计算机专业学生的集合, T 表示选修离散数学课程学生的集合, G 表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合, H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合. 下列句子所对应的集合表达式分别是什么? 请从备选的答案中挑出来

- (1) 所有计算机专业二年级的学生在选修离散数学课程
- (2) 这些且只有这些选修离散数学课程的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很迟才睡觉
- (3) 选修离散数学课程的学生都没参加星期一晚上的音乐会
- (4) 这个音乐会只有大学一、二年级的学生参加
- (5) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加了音乐会

备选答案:

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| • 1. $T \subseteq G \cup H$ | 2. $G \cup H \subseteq T$ | 3. $S \cap R \subseteq T$ |
| • 4. $H = G \cup T$ | 5. $T \cap G = \emptyset$ | 6. $F \cup S \subseteq G$ |
| • 7. $G \subseteq F \cup S$ | 8. $S - (R \cup M) \subseteq G$ | 9. $G \subseteq S - (R \cap M)$ |

解: (1) 3

(2) 4

(3) 5

(4) 7

(5) 8

1.5 判断下列陈述是否正确

- (1) $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (2) $\emptyset \in \emptyset$
- (3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

- (5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
 (6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$
 (7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
 (8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

解: (1) ✓

(2) ✗

(3) ✓

(4) ✓

(5) ✓

(6) ✓

(7) ✓

(8) ✗

1.16 设集族 $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{\emptyset\}\}$, 计算下列各式

(1) $\cup \mathcal{A}$

(2) $\cap \mathcal{A}$

解: (1) $\cup \mathcal{A} = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} \cup \{1, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$

(2) $\cap \mathcal{A} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\} \cap \{1, 3\} \cap \emptyset = \emptyset$

1.38 设全集 E 为 n 元集, 按照某种给定顺序排列 $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。在计算机中可以用长为 n 的 0, 1 串表示 E 的子集。令 m 元子集 $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$, 则 A 所对应的 0-1 串为 $j_1 j_2 \dots j_n$, 其中 $j_k = \begin{cases} 1 & k=i_1, i_2, \dots, i_m \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$ 例如, 设 $E = \{1, 2, \dots, 8\}$, 则 $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{3, 7\}$ 对应的 0-1 串分别为 11001100, 00100010。

(1) 设 A 对应的 0-1 串分别为 10110010, 则 $\sim A$ 对应的 0-1 串是什么

(2) 设 A, B 对应的 0-1 串分别为 $i_1 i_2 \dots i_n, j_1 j_2 \dots j_n$, 且 $A \cup B, A \cap B, A - B, A \oplus B$ 对应的 0-1 串分别为 $a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 \dots b_n, c_1 c_2 \dots c_n, d_1 d_2 \dots d_n$, 求 $a_k, b_k, c_k, d_k, k = 1, 2, \dots, n$

解: (1) 01001101

(2) 容易看出, $a_k = \begin{cases} 1 & i_k + j_k \neq 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases} b_k = \begin{cases} 1 & i_k \cdot j_k \neq 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases} c_k = \begin{cases} 1 & i_k \cdot (1 - j_k) \neq 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

由于 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$, 设 $B - A$ 的对应 0-1 串为 $e_1 e_2 \dots e_k$, 则 $e_k = \begin{cases} 1 & (1 - i_k) \cdot j_k \neq 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

那么只有当 c_k, e_k 都为 0, d_k 才 = 0, 也就是 $i_k(1 - j_k) = 0 \wedge (1 - i_k)j_k = 0$, 即 $\begin{cases} i_k = 0 \\ j_k = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} i_k = 1 \\ j_k = 1 \end{cases}$

故 $d_k = \begin{cases} 1 & i_k + j_k = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

1.40 设 $\mathcal{A} = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, 计算

(1) $P(\mathcal{A})$

(2) $P(\cup \mathcal{A})$

(3) $\cup P(\mathcal{A})$

解: (1) $P(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$

(2) $\cup \mathcal{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, P(\cup \mathcal{A}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(3) $\cup P(\mathcal{A}) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

1.45 在 1 ~ 300 之间的整数中分别求满足以下条件的整数个数

(1) 同时能被 3, 5, 7 整除

(2) 不能被 3, 5, 7 整除

(3) 可被 3 整除, 不可被 5, 7 整除

(4) 可被 3, 5 整除, 不可被 7 整除

(5) 只被 3, 5, 7 之中的一个数整除

解: 画出 venn 图, 设被 3, 5, 7 整除的数分别为集合 A, B, C

$$|A| = \left\lfloor \frac{300}{3} \right\rfloor = 100$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor = 60$$

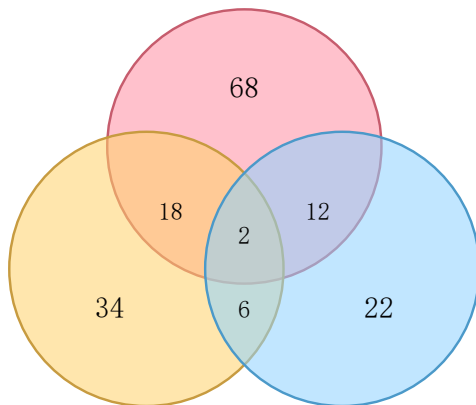
$$|C| = \left\lfloor \frac{300}{7} \right\rfloor = 42$$

$$|A \wedge B| = \left\lfloor \frac{300}{\text{lcm}(3,5)} \right\rfloor = 20$$

$$|A \wedge C| = \left\lfloor \frac{300}{\text{lcm}(3,7)} \right\rfloor = 14$$

$$|B \wedge C| = \left\lfloor \frac{300}{\text{lcm}(5,7)} \right\rfloor = 8$$

$$|A \wedge B \wedge C| = \left\lfloor \frac{300}{\text{lcm}(3,5,7)} \right\rfloor = 2$$



(1) 2

(2) 138

(3) 68

(4) 18

(5) 124

2.10 给定 Z^+ 上的关系 $R, S: \forall x, y \in Z^+$

$$xRy \Leftrightarrow x|y$$

$$xSy \Leftrightarrow 5x \leq y$$

对于下面的小题, 确定哪些有序对属于给定的关系

(1) $R \cup S; \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 17 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle$

(2) $R \cap S; \langle 3, 6 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 12 \rangle$

(3) $\sim R; \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 15 \rangle$

解: (1) $\langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 17 \rangle, \langle 0, 0 \rangle$

(2) $\langle 2, 12 \rangle$

(3) 没有

2.16 设 $A = \{a, b, c, d\}$, R_1, R_2 为 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, d \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle \}$$

求 $R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1, R_1^2, R_2^3$

解: (1) $\{ \langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle \}$

(2) $\{ \langle c, d \rangle \}$

(3) $\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle \}$

(4) $R_2^2 = \{ \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$

$R_2^3 = \{ \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle \}$

2.26 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, R 为 A 上的关系, R 的关系图如图

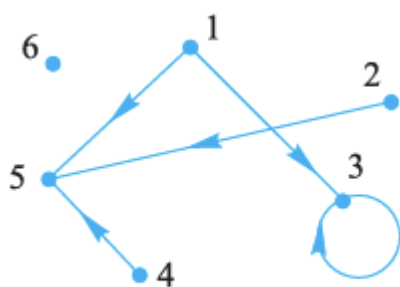


图 2.7.7

• (1) 求 R^2, R^3 的集合表达式

• (2) 求 $r(R), s(R), t(R)$

解:

• (1) 由图知 $R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \}$, 则 $R^2 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$, $R^3 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$

• (2)

▸ $r(R) = R \cup R^0 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle \}$

▸ $s(R) = R \cup R^{-1} = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 4 \rangle \}$

▸ 由于 $R^2 = R^3, t(R) = R \cup R^2 = R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \}$

2.31 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R 是 A 上的等价关系, 且 R 在 A 上所构成的等价类 $\{1\}, \{2, 3, 4\}$

• (1) 求 R

• (2) 求 $R \circ R^{-1}$

• (3) 求 R 的传递闭包

解:

• (1) 根据等价关系与等价类的对应关系:

▸ 等价类内的元素彼此等价 (满足对称性和传递性), 且每个元素与自身等价 (自反性)

▸ 不同等价类的元素之间没有关系。

▸ 因此, $\{1\} \leftrightarrow \{ \langle 1, 1 \rangle \}, \{2, 3, 4\} \leftrightarrow \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$

▸ $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$

- (2) $R^{-1} = R, R^2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \} = R$
- (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots = R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$

2.36 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, \forall \langle u, v \rangle, \langle x, y \rangle \in A \times A, \langle u, v \rangle R \langle x, y \rangle \Leftrightarrow u + y = x + v$

- (1) 证 R 是 $A \times A$ 上的等价关系
- (2) 确定由 R 引起的对 $A \times A$ 的划分

解:

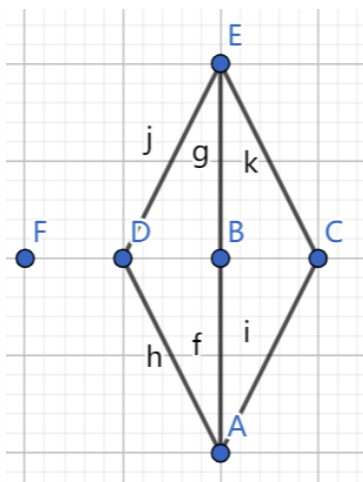
- (1)
 - 自反: $\forall \langle a, b \rangle \in A$, 由于 $a + b = b + a, \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle \in R$, 为自反关系
 - 对称: $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in R$, 则 $a + d = b + c, c + b = d + a$, 则 $\langle c, d \rangle, \langle a, b \rangle \in R$, 为对称关系
 - 传递: $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, d \rangle, \langle e, f \rangle \in R, a - b = c - d, c - d = e - f, a - b = e - f, \langle a, b \rangle, \langle e, f \rangle \in R$ 为对称关系
- (2) $A \times A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$, 则划分为 $\{ \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}, \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}, \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}, \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}, \{ \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}, \{ \langle 4, 1 \rangle \} \}$

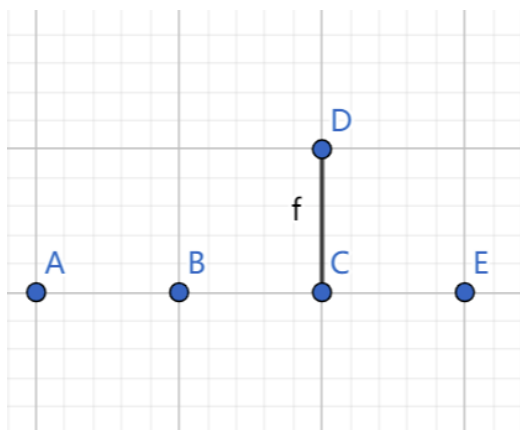
2.46 分别画出下列各偏序集 $\langle A, R_{\leq} \rangle$ 的哈斯图, 并找出 A 的极大元, 极小元, 最大元和最小元

- (1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}, R_{\leq} = \{ \langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle \} \cup I_A$
- (2) $A = \{a, b, c, d, e\}, R_{\leq} = \{ \langle c, d \rangle \} \cup I_A$

解:

- (1)
 - 首先剥离自反关系 I_A , 剩余非自反关系为: $\{ \langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle \}$
 - 根据传递性省略间接边 $a \rightarrow e: a \rightarrow d, a \rightarrow c, a \rightarrow b, b \rightarrow e, c \rightarrow e, d \rightarrow e$
 - 极大: E, F
 - 极小: A, F
 - 最大: 无
 - 最小: 无





- (2)
 - 首先剥离自反关系: $\{ \langle c, d \rangle \}$
 - 极大: A, B, D, E
 - 极小: A, B, C, E
 - 最大: 无
 - 最小: 无

2.49 设 $\langle A, R \rangle$ 为偏序集, 在 A 上定义新的关系 S 如下: $\forall x, y \in A, xSy = yRx$, 称 S 为 R 的对偶关系

- (1) 证: S 也是 A 上的偏序关系
- (2) 若 R 是整数集合上的小于等于关系, 那么 S 是什么关系? 若 R 是正整数集合上的整除关系, 那么 S 是什么关系?
- (3) 偏序集 $\langle A, R \rangle$ 和 $\langle A, S \rangle$ 中的极大极小最大最小元之间的关系

解:

- (1) 因为 R 是偏序关系, 故满足自反性, 反对称性, 传递性
 - $\forall x \in A, \langle x, x \rangle \in R, \text{又 } xSy = yRx, \langle x, x \rangle \in S, S$ 自反
 - $\forall \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R, x = y, \text{又 } xSy = yRx, \forall \langle y, x \rangle \in S \in \langle x, y \rangle \in S, x = y, S$ 反对称
 - $\forall \langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R, \langle x, z \rangle \in R, \text{又 } xSy = yRx, \text{则 } \forall \langle y, x \rangle, \langle z, y \rangle \in S, \langle z, x \rangle \in S, S$ 传递
 - 则 S 偏序关系
- (2)
 - $xRy \Leftrightarrow x \preceq y \Leftrightarrow ySx \Leftrightarrow y \preceq x$, 故为大于等于关系
 - $xRy \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow ySx \Leftrightarrow y \mid x$, 故为被整除
- (3) 同理, 相当于交换 x, y , 故 R 中极大, 极小, 最大, 最小分别对应 S 中极小, 极大, 最小, 最大

3.5 设 $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{1, 2, 3\}, f = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$, 判断下列陈述是否正确

- (1) f 是从 X 到 Y 的二元关系, 但不是 X 到 Y 的函数
- (2) f 是从 X 到 Y 的函数, 但不是满射, 单射
- (3) f 是从 X 到 Y 的满射, 但不是单射
- (4) f 是从 X 到 Y 的双射

解: f 中没有把 X 中的元素射完, 故不是映射, 当然也不是函数

- (1) ✓
- (2) ✗
- (3) ✗
- (4) ✗

3.12 设 $f: S \rightarrow T$, A, B 都是 S 的子集, 证:

- (1) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- (2) 举出反例 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 为何不是永远成立
- (3) 说明对于什么函数上述等号成立

解:

- (1) $\forall y \in f(A \cap B), \exists x \in A \cap B, s.t. f(x) = y, x \in A \wedge x \in B$, 故 $x \in f(A) \wedge x \in f(B), f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- (2) $A = \{1\}, B = \{2\}, f(1) = f(2) = 1$
- (3) 单射

3.14 设 S 为集合, A, B 是 S 的子集, χ_X 表示 X 的特征函数, 且 $\chi_A = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle d, 0 \rangle \}, \chi_B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle d, 1 \rangle \}$, 求 $\chi_{A \cap B}$

解:

- 由题得 $S = \{a, b, c, d\}, a, b \in A, c, d \in S - A; b, d \in B, a, c \in S - B, A \cap B = \{b\}, \chi_{A \cap B} = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle d, 0 \rangle \}$