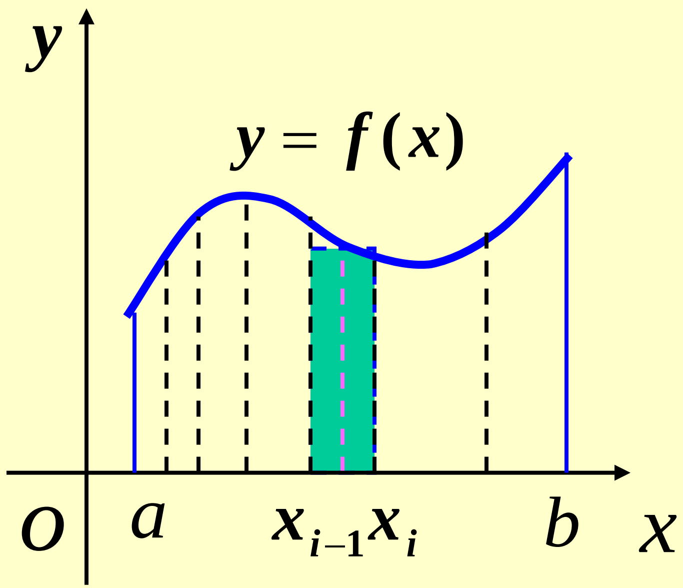
第4.3节 定积分的应用

一、定积分的元素法

求由 $x=a, x=b, y=0$ 和 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积A须经过以下四个步骤：

（1）分割：把 $[a,b]$ 分成n个小区间，设第i个小曲边梯形的面积为 ΔA_i，则：

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$



（2）近似替代：

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \ (x_{i-1}\le \xi_i \le x_i);$$

（3）求和：$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

（4）取极限：$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx;$

求A的积分表达式的步骤可简化如下：

（1）确定积分变量x及积分区间$[a，b]$；

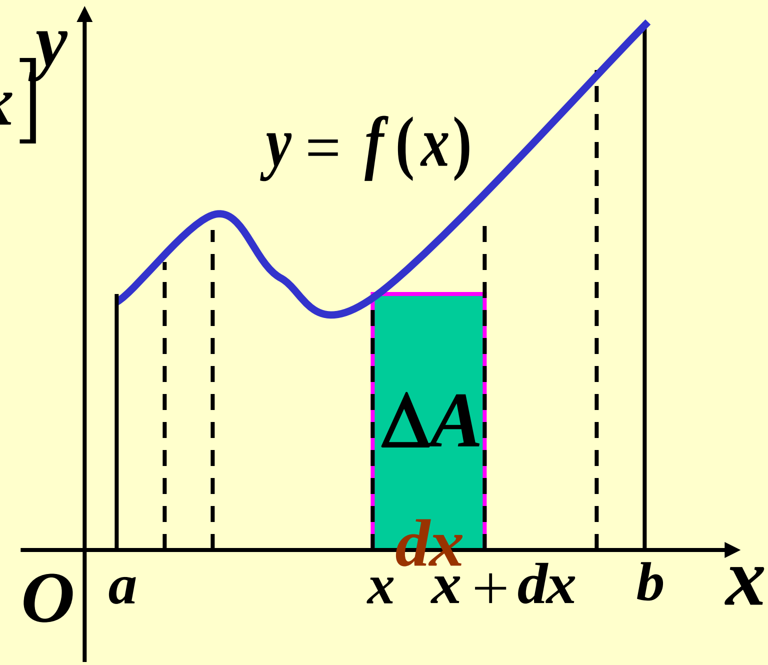
（2）在 $[a,b]$上任取小区间 $[x, x+dx]$

以 $f(x)dx$作为 ΔA的近似值。

即： $$\Delta A \approx f(x)dx$$

$f(x)dx$ 叫做面积元素, 记为

$$\boxed{dA = f(x)dx}$$



（3）写出A的积分表达式，即：$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$

一般地，如果某一实际问题中的所求量 U符合下列条件：

（1）U是与一个变量x的变化区间$[a, b]$有关的量；

（2）U对于区间$[a, b]$具有可加性；

（3）部分量ΔU_i的近似值可表为$f(\xi_i)\Delta x_i$ 那么这个量就可以用积分来表示。

具体步骤是：

（1）确定积分变量，和它的变化区间$[a,b]$；

（2）写出积分元素

$$\boxed{\Delta U \approx dU = f(x)dx}$$

（3）写出 U 的积分表达式，即：

$$\boxed{U = \int_a^b f(x)dx}$$

二、平面图形的面积

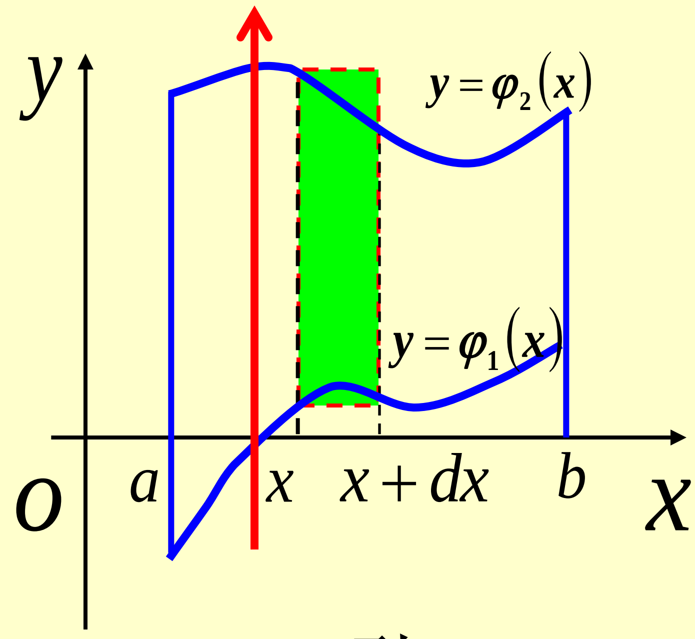
(一)直角坐标情形

x型　在$[a,b]$上任取小区间$[x,x+dx]$,

则　$$dA=[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$$

$$\therefore A=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$$

$y_{穿出}-y_{穿入}$



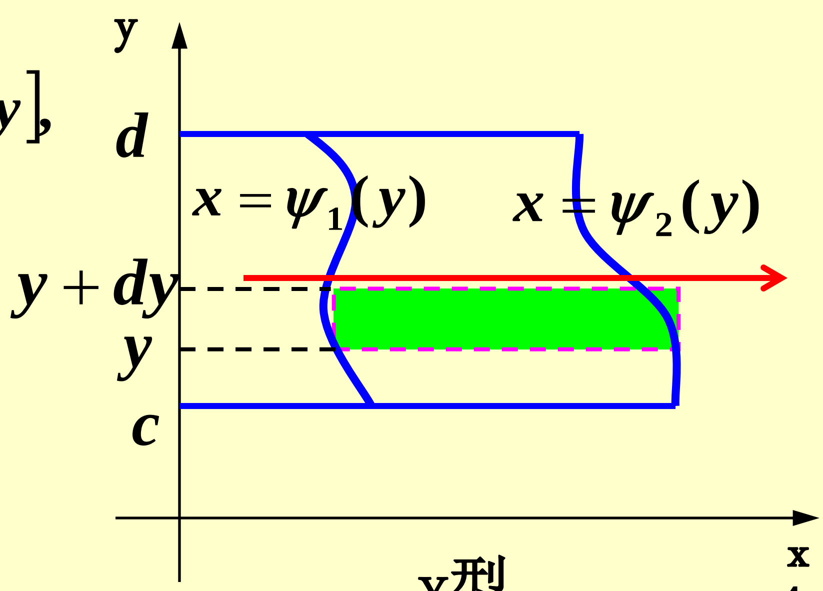
x型

Y型　在$[c,d]$上任取小区间$[y,y+dy]$,

则　$$dA=[\psi_2(y)-\psi_1(y)]dy$$

$$A=\int_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]dy$$

$x_{穿出}-x_{穿入}$

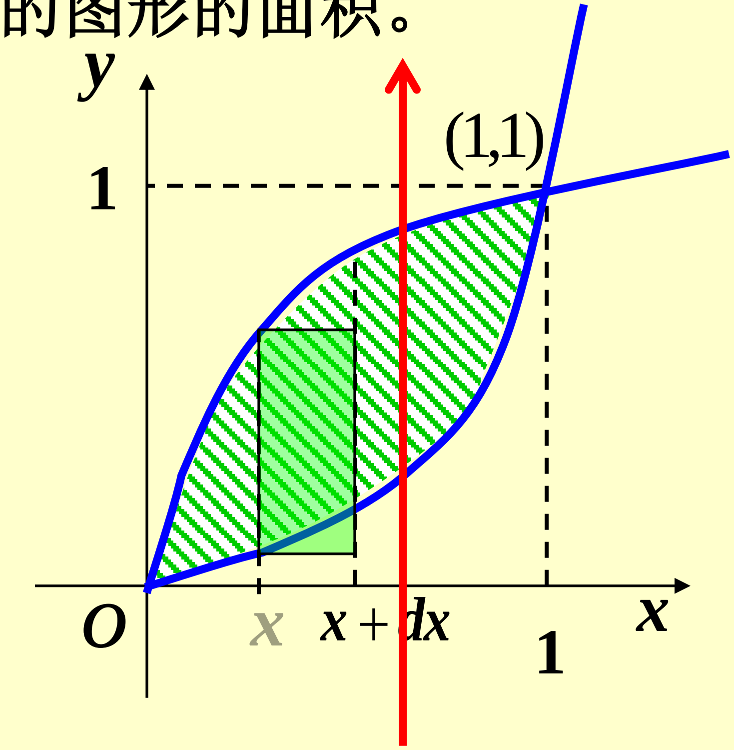


Y型

例 1 计算由 $y^2 = x, y = x^2$ 所围成的图形的面积。

解 解方程组

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$$



得抛物线的两个交点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$

取 x 为积分变量，积分区间为 $[0,1]$，

在 $[0,1]$ 上任取小区间 $[x, x+dx]$ ，

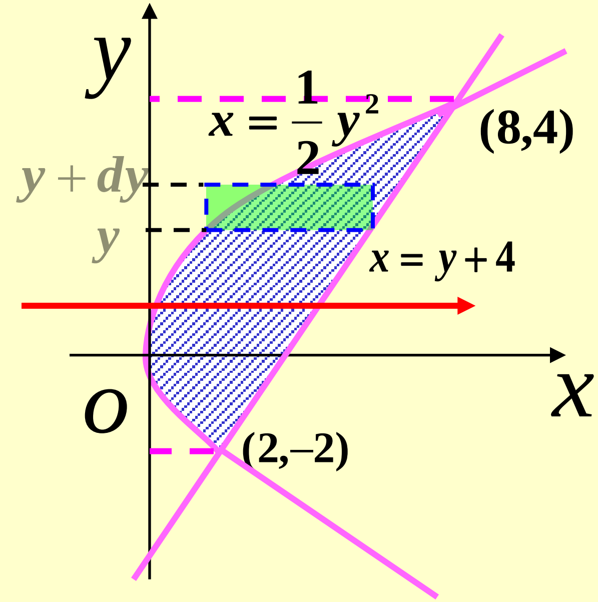
面积元素为 $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx.$

故所求面积为 $A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

注： 所求的面积可以看作是两个曲边梯形面积的差，即

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

例 2　计算抛物线　$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的图形的面积。

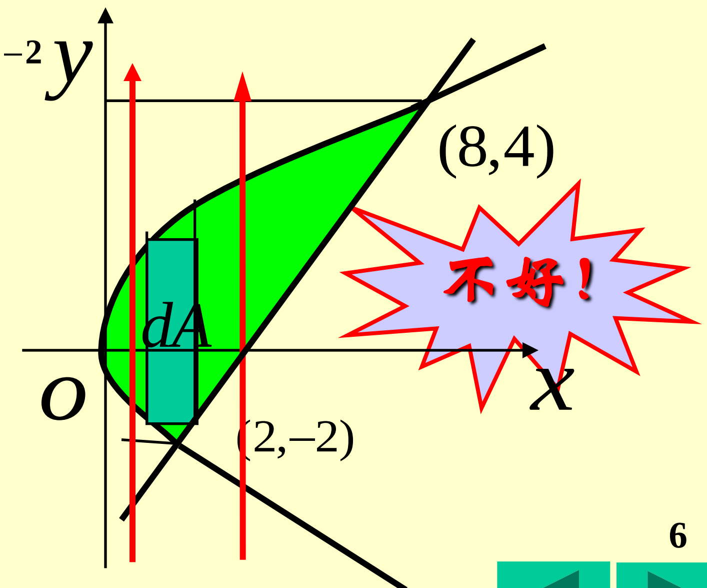


解（1） 解方程组 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$

得交点$(2,-2),(8,4)$,

$$dA=\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]dy$$

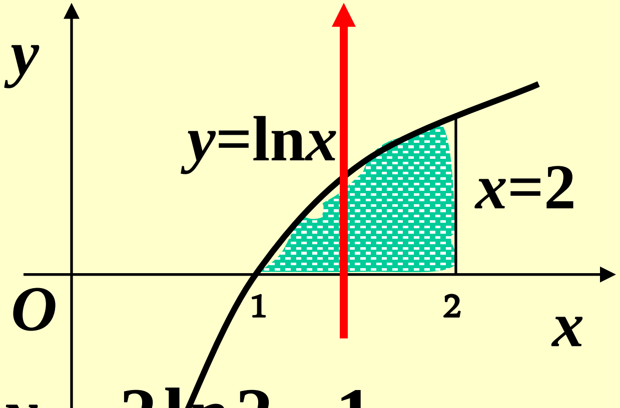
$$A=\int_{-2}^{4}\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]dy=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4}=18$$



注： 如果取x为积分变量

$$\therefore A=\int_0^8[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx$$

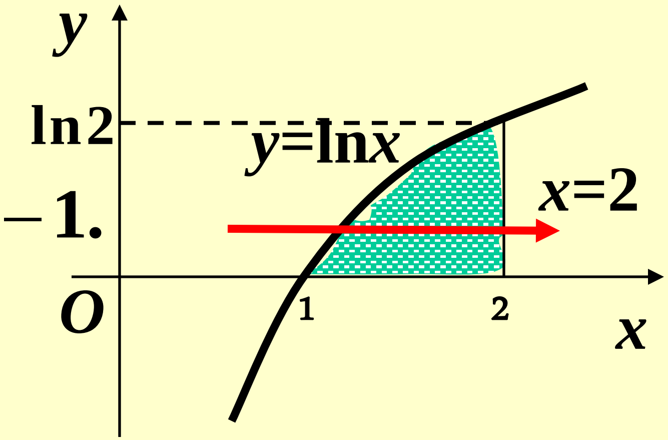
例3 求曲线 $y=\ln x$, $x=2$ 及 x 轴，所围成的平面图形的面积。



解：按x型：

$$A=\int_1^2[\ln x-0]dx=\left[x\ln x\right]_1^2-\int_1^2 x d\ln x=2\ln 2-1.$$

按Y型：



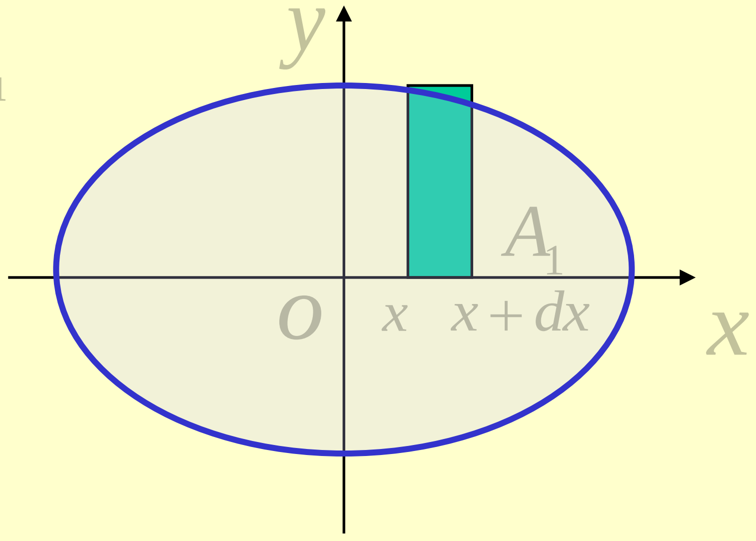
$$A=\int_0^{\ln 2}\left[2-e^y\right]dy=\left[2y-e^y\right]_0^{\ln 2}=2\ln 2-1.$$

例4　求$y=|\ln x|$与$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$x=\mathrm{e}$及$y=0$所围图形的面积.

解 $$A=\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}(-\ln x)\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

例5 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积。

解：设椭圆在第一象限部分的面积为 A_1



$$dA_1 = ydx$$

则椭圆的面积为 $A = 4A_1 = 4\int_0^a ydx$

利用椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

应用定积分换元法，令 $x = a\cos t$，则：

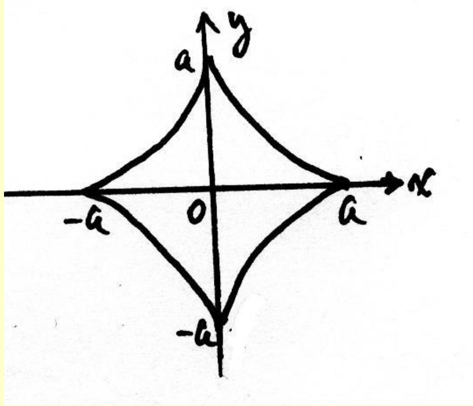
$$y = b\sin t, dx = -a\sin t dt,\ x = 0\ t = \frac{\pi}{2}; x = a, t = 0.$$

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 tdt$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt = \pi ab$$

当 $a = b$ 时，椭圆变为圆，$A = \pi a^2$。

例6　求星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$所围图形的面积.



解

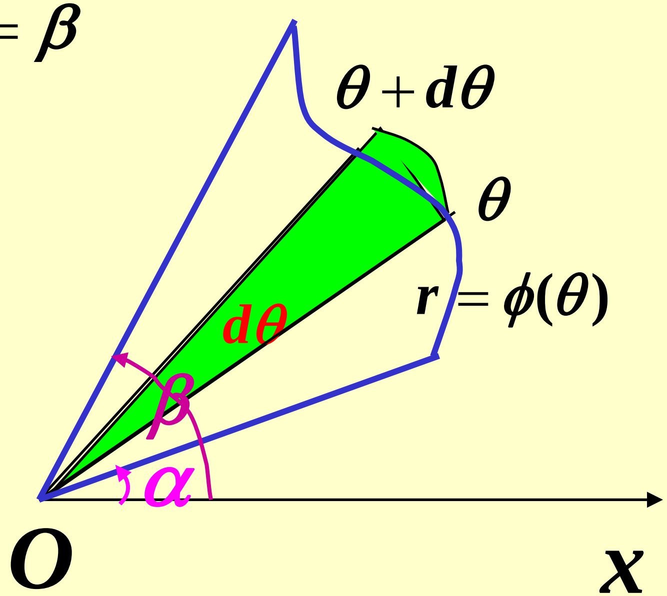
$$A = 4\int_0^a y\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2$$

(二) 极坐标情形

设由曲线 $r=\phi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成一图形（称为**曲边扇形**）。



假设 $\phi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且 $\phi(\theta)\geq 0$。

求这个曲边扇形的面积:

取极角 θ 为积分变量，积分区间为 $[\alpha,\beta]$，任取小区间$[\theta,\theta+d\theta]$。

扇形面积公式为

$$A=\frac{1}{2}R^2\theta$$

面积元素为：$dA=\dfrac{1}{2}[\phi(\theta)]^2d\theta$

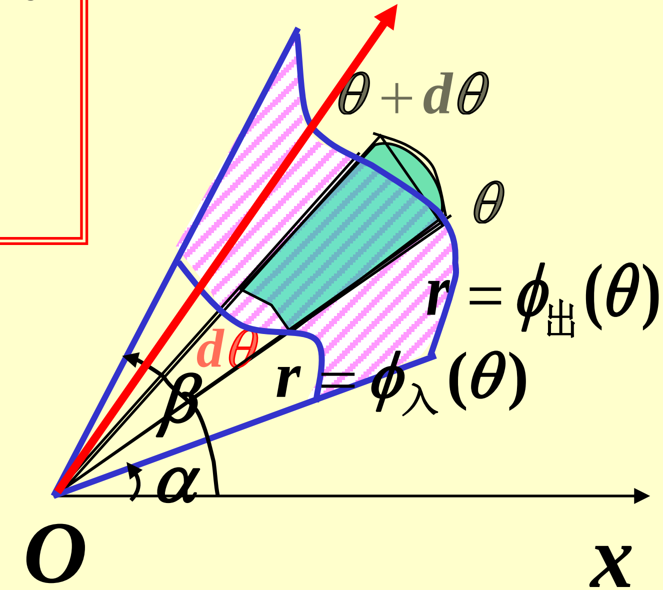
所以曲边扇形的面积为：

$$\boxed{A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[\phi(\theta)]^2d\theta}$$

极点在图形外（曲边环扇形）

面积元素: $$dA=\frac{1}{2}[\phi_{出}(\theta)]^2d\theta-\frac{1}{2}[\phi_{入}(\theta)]^2d\theta$$

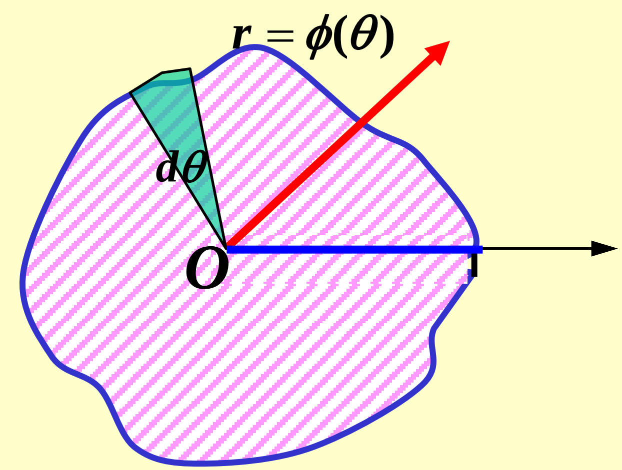
面积: $$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\phi_{出}{}^2(\theta)-\phi_{入}{}^2(\theta)\right]d\theta$$



极点在图形内部，可以想象沿着极轴把图形剪开到极点。于是可以看出：

面积元素为: $$dA=\frac{1}{2}\phi^2(\theta)d\theta$$

面积: $$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\phi^2(\theta)d\theta$$



例1 计算阿基米德螺线

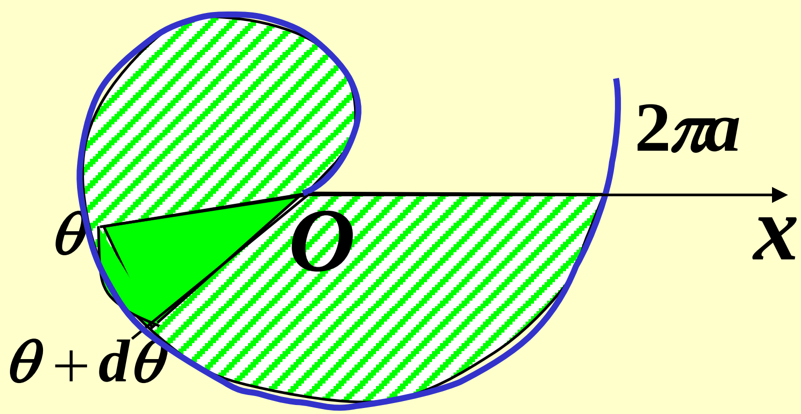
$$r = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从0 变到2π的一段弧与极轴所围成的图形的面积。

解: 积分变量为θ, 积分区间为

$[0,2\pi]$, 在此区间上任取小区间

$[\theta, \theta + d\theta]$, 面积元素为



$$dA = \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta$$

于是所求面积为:

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\theta^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

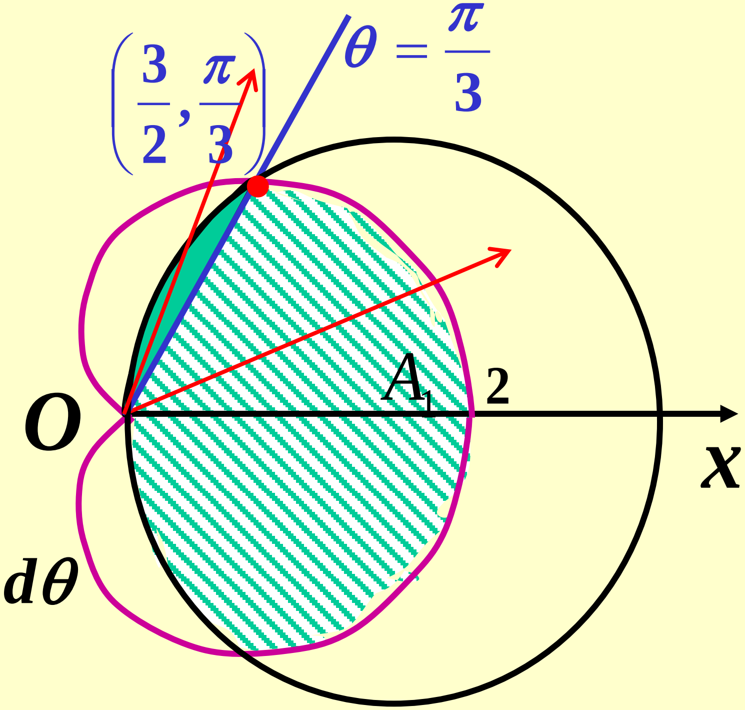
例2 计算 心形线 $r=1+\cos\theta$ 与圆 $r=3\cos\theta$

所围成的图形阴影部分的面积。

解 如图所示，这个图形关于极轴对称，设极轴以上部分图形面积为 A_1，所求图形的面积为 A.

解方程组：$\begin{cases} r=1+\cos\theta \\ r=3\cos\theta \end{cases}$

得交点 $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$.



$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{4}\pi.$$