三. 不定积分的分部积分法

公式推导

设$u(x)$及$v(x)$具有连续导数,则 $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$

证 $(uv)' = u'v + uv'$ $\qquad \therefore uv' = (uv)' - u'v$

则 $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

1. 求$\int x\cos xdx$

解: 设 $x = u$, $v'dx = \cos xdx = d\sin x = dv$, 即 $\sin x = v$.

$$\int x\cos xdx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin xdx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

实际操作步骤：

上例中，要凑出*dv*，是个逆向思维的过程，这里试给出一个“程序”，使思维更加流畅。

（1）使用第一类换元积分法凑微分（见上节）

（2）如果结果可以用换元法解，则求出原函数；若不能积出，则试用分部积分公式代入。

（3）要注意优先凑微分的顺序：

指数函数、弦函数 *优先于* 幂函数；

幂函数 *优先于* 对数函数、反三角函数。

如，例1中：若先把x凑微分，则有：

$$\int x\cos x dx = \int \cos x d(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}\cdot\cos x - \int \frac{x^2}{2} d(\cos x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\cos x - \int \frac{x^2}{2}\cdot(-\sin x)dx = \frac{x^2\sin x}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \sin x dx$$

可以看出：最后面的积分与原来的积分属于同一种类型，而且幂函数因式的次数还增高了，积分结果将难以求出。

基本题型 I

被积函数是幂函数与指数函数或者弦函数的乘积，应该先将指数函数或者弦函数凑微分。

2. 求 $\int x\tan^2 x dx$

解：$\int x\tan^2 x dx = \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int x\sec^2 x dx - \int x dx$

$= \int x d\tan x - \frac{1}{2}x^2 = x\tan x - \int \tan x dx - \frac{1}{2}x^2$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + C$

3. 求 $\int xe^x dx$

解：$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

4. 求 $\int x^2 e^x dx$

解 $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx$

$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

基本题型Ⅱ

被积函数是幂函数与对数函数或者反三角函数的乘积，应该先将幂函数凑微分。

5. 求$\int x\ln x dx$

解 $$\int x\ln x dx=\int \ln x d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

6. 求$\int 2x\arctan x dx$

解 $$\int 2x\arctan x dx=\int\arctan x dx^2=x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=x^2\arctan x-\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=x^2\arctan x-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=x^2\arctan x-\left(x-\arctan x\right)+C$$

7. 求$\int \arcsin x dx$

解 $\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C$

$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

8. 求$\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx$

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \arctan x dx$

$= \int \arctan x dx - \int \arctan x d \arctan x$

$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} (\arctan x)^2$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$

基本题型Ⅲ 回归法

被积函数是指数函数与弦函数的乘积，可选任一函数凑微分。

9. 求 $\int e^x \sin x dx$

解 法1 $\int e^x \sin x dx = -\int e^x d\cos x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

$= -e^x \cos x + \int e^x d\sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

是不是优先凑微分的顺序出了问题？换过来试一下：

法2 $\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

$= e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$

两种方法都出现了“循环”，移项可以把该积分“解”出来。

$$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

注意：移项时应该给等式的右边添加任意常数 C

10. 求$\int e^{2x}\cos 3x dx$

解 $I=\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int \cos 3x de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2x}\cos 3x+3\int e^{2x}\sin 3x dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}\int \sin 3x de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}\sin 3x\cdot e^{2x}-\frac{3}{4}\cdot 3\int \cos 3x\cdot e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x-\frac{9}{4}I$$

移项得 $I=\frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x+C$

$$\boxed{\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx dx&=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C\\ \int e^{ax}\sin bx dx&=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+C\end{aligned}}$$

11. 求 $\int \sec^3 x dx$

解 $\int \sec^3 x dx = \int \sec x d\tan x$

$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \tan x|$

移项、两边同除以系数，得

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C$$

12. 求$\int e^{\sqrt{x}}dx$　　　　　　　　**杂例**

解　令$\sqrt{x}=t$　则　$x=t^2$,　　$dx=2tdt$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int te^t dt=2e^t(t-1)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

分部积分法

13.求$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$

解

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int e^{\sin x}x\cos x dx-\int e^{\sin x}\tan x\sec x dx$$

$$=\int x de^{\sin x}-\int e^{\sin x}d\sec x$$

$$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}dx-e^{\sin x}\sec x+\int \sec x e^{\sin x}\cos x dx$$

$$=e^{\sin x}(x-\sec x)+C$$