第五章　常微分方程

第一节 微分方程的基本概念

例 1 一曲线通过点（1，2），且在该曲线上任一点 M（x，y）处的切线的斜率为 2x，求这曲线的方程。

解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$ 根据导数的几何意义，

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad (1)$$

（1）式两端积分，得: $y = \int 2xdx$

即

$$y = x^2 + C \qquad (2)$$

把条件 “x=1，y=2”代入（2）式，得

$$C = 1$$

于是所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$

例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶，当制动时列车获得加速度-0.4米/秒^2，问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间内行驶了多少路程？

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米，$s = s(t)$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4 \qquad t = 0 \text{时}, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1 \qquad s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$$

代入条件后知 $C_1 = 20$, $C_2 = 0$ $\quad v = \dfrac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$

故 $s = -0.2t^2 + 20t,$

开始制动到列车完全停住共需 $t = \dfrac{20}{0.4} = 50$ (秒)，

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500 \text{ (米)}.$$

微分方程： 含有未知函数的导数（或微分）的方程。

常微分方程： 未知函数是一元函数的微分方程。

偏微分方程：未知函数是多元函数的微分方程。

微分方程的阶：

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

$x^2 y + y^2 \cos x - xy' + e^x y''' = 0$ 三阶微分方程。

$\frac{dy}{dx} = 2x$ 一阶微分方程。

如果函数 $y = \varphi(x)$ 代入微分方程后， 能使方程变为恒等式，则称 $y = \varphi(x)$ 为**微分方程的解**。

通解：解中含有任意常数，且**独立**的任意常数的个数等于微分方程的阶数。

特解：满足**初始条件**的解。

n 阶微分方程的初始条件是指如下的 n 个条件：

$$当 x = x_0 时，\quad y = y_0, y' = y_0', \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

或写作

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

这里 $x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的n+1个常数。

初值问题：求微分方程满足初始条件的特解的问题.

一般初值问题可写为：

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

微分方程的解的图形是一条曲线，称它为微分方程的积分曲线。

满足初始条件的特解就是通过点(x_0, y_0)的一条积分曲线。

例 3 验证:函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0} = A, \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$ 的特解.

解 $\because \dfrac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt, \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt,$

将 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 和 x 的表达式代入原方程,

$$-k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

故 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是原方程的解.

$$\because \ x\big|_{t=0} = A, \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0, \quad \therefore \ C_1 = A, \quad C_2 = 0.$$

所求特解为 $x = A \cos kt.$

思考题

函数 $y = 3e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的什么解？

解答

$\because\ y' = 6e^{2x}, \qquad y'' = 12e^{2x},$

$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4 \cdot 3e^{2x} = 0,$

$\because\ y = 3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.