导数应用习题课1(构造辅助函数)(7个题)

1.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，

试证：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = -\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

2.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$.

试证：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = f'(\xi)$

3.设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 内可导，且 $f(\dfrac{\pi}{4})=0$.

证明：存在一点 $\xi \in (0,\dfrac{\pi}{4})$，使 $2f(\xi) + \sin 2\xi \; f'(\xi) = 0$.

4.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$.

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

5.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使 $f(b)-f(\xi)=f'(\xi)(\xi-a)$.

6.设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f(a)=f(b)$,

证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使 $f(a)-f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

7.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)\cdot f(b)>0$,

$f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$.试证至少有一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=f(\xi)$.

答案

1. 证　作辅助函数

$$\Phi(x) = x^2 f(x)$$

由已知条件可知，$\Phi(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件.

因此，至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使

$$\Phi'(\xi) = \xi^2 f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$$

由于$\xi \neq 0$，可知　$\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$

即

$$f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

2. 证明　构造函数$F(x) = f(x)(1-x)^2$，

则$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件至少存在一点$\xi \in (0,1)$，

使$F'(\xi) = 0$　即　$\xi \quad f'(\xi) + 2f(\xi) = f'(\xi)$

3. 证明　构造函数 $F(x) = f(x)\tan x$　则 $F(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{4}]$上满足罗尔定理条件，至少存在一点 $\xi \in (0,\dfrac{\pi}{4})$，使 $F'(\xi) = 0$，即　$f'(\xi)\tan\xi + f(\xi)\sec^2\xi = 0$

化简得　$2f(\xi) + \sin 2\xi \quad f'(\xi) = 0.$

4. 提示：构造辅助函数 $F(x) = xf(x)$

5. 提示：构造辅助函数 $F(x) = (x-a)f(x) - f(b)x.$

6. 提示：构造辅助函数 $F(x) = xf(x) - f(a)x.$

7. 证　设 $F(x)=f(a)e^{-x}f(x)$，

则　$F(a)=f^2(a)e^{-a}>0$，$F(\frac{a+b}{2})=f(a)f(\frac{a+b}{2})e^{\frac{a+b}{2}}<0$，

$F(b)=f(a)f(b)e^{-b}>0$

所以由零点定理知存在 $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$，$\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$，

使 $F(\xi_1)=0$，$F(\xi_2)=0$

再在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用罗尔定理得结果.