第二节 导数的基本公式及运算法则

一、导数的四则运算法则

设 $u=u(x), v=v(x)$都在 x处可导，那么：

1．$(u \pm v)' = u' \pm v'$

2．$(uv)' = u'v + uv'$

3．当同时又有 $v(x) \neq 0$时，有

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

推论1、推论2

4．$(Cu)' = Cu'$

5．$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

利用求导法则求导举例

常数的导数为零

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + \underline{\sin\frac{\pi}{7} + \ln 2}$ 求: $f'(x)$; $f'(1)$

解: $f'(x) = 4x - 3$, $\quad f'(1) = 4 \times 1 - 3 = 1.$

2. $y = (\sin x - 2\cos x)\ln x$ 求: y'

解:
$$y' = (\sin x - 2\cos x)'\ln x + (\sin x - 2\cos x)\cdot(\ln x)'$$
$$= (\cos x + 2\sin x)\ln x + (\sin x - 2\cos x)\cdot\frac{1}{x}$$

3. 证明: $(\tan x)' = \sec^2 x$

解:
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x, \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x.$$

4. 证明：$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.（$a>0, a\neq 1$）

解： $$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

5. $y = \dfrac{1+\tan x}{\tan x} - 2\log_a x + x\sqrt{x}$，求：$\dfrac{dy}{dx}$

解： 由于：$\dfrac{1+\tan x}{\tan x} = \cot x + 1$

尽量避免使用商的求导公式

所以：$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x - \frac{2}{x\ln a} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

6. $g(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2}$ 求： $g'(x)$

先化简函数表达式，大大方便了计算。

解： 由于： $g(x)=x^2-2+x^{-2}$

所以： $g'(x)=2x-2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}(x^4-1)$

7. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$， 求 y'.

解： $y=b^a\cdot a^{-b}\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot x^{b-a}$,

$(uv)'=u'v+uv'$

$y'=b^a\cdot a^{-b}\cdot\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\ln\dfrac{a}{b}\cdot x^{b-a}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot(b-a)x^{b-a-1}\right]$

$8. y = xe^x \ln x$，求 y'.

解：

$$y' = e^x \ln x + xe^x \ln x + xe^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= e^x \ln x + xe^x \ln x + e^x$$

$$\boxed{(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'}$$

二、反函数求导法则

设：$x=\varphi(y)$单调连续并在点 y可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$

$x=\varphi(y)$的反函数 $y=f(x)$在对应点 x处可导，则

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \text{或者记为} \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注意： 1、这里反函数的记法，并不把自变量按习惯记作x.

2、反函数关系是相互的。

即：$x=\varphi(y)$是 $y=f(x)$的反函数，

$y=f(x)$也是 $x=\varphi(y)$的反函数。

1. $y=a^x$的反函数$x=\log_a y$在（0, +∞）内单调连续，

且$\forall x\in R$相应的$y\in(0,+\infty)$

把式中的y用x表示

解 已知 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y\ln a}$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=y\ln a=a^x\ln a$

2. $y=\arcsin x(|x|<1)$, 证明 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{(a^x)'=a^x\ln a}$$

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

证 $x=\sin y$, $\quad\dfrac{dx}{dy}=\cos y$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似可得 $$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1+\sin x}$, 求: $f'(x)$

解: $$f'(x) = \frac{(\arctan x)'(1+\sin x) - \arctan x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+\sin x) - \arctan x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin x) - (1+x^2)\arctan x \cos x}{(1+x^2)(1+\sin x)^2}$$

4. $y = 2^x \arccos x$, 求: y'

解: $$y' = 2^x \ln 2 \arccos x - \frac{2^x}{\sqrt{1-x^2}}$$

三、复合函数求导法则

函数 $u=\varphi(x)$在 x处可导， $y=f(u)$在与 x相应的点 u处可导，

则：复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在 x处可导，

且 $y'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$ 或者 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

证 由于 $y=f(u)$在点 u处可导，故 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha(\Delta u)$$

极限与无穷小的关系

$$\therefore \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u \qquad (*)$$

(*)式两端分别除以 Δx 得：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\because$ 函数 $u=\varphi(x)$在 x处可导, 两边取极限:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

或者写成: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

特别注意:

1. $f'(u)$或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$是对 u求导,

即: 把 u当作自变量使用求导公式;

2. 由此可以看出: 求导公式具有"形式可变性":

如:$(\sin u)' = \cos u$只有当u是自变量时才正确,

如果u是其它变量x的函数,则应有$(\sin u)' = \cos u\cdot u'_x$

3. 复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形。

以两个中间变量为例，设$y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad \text{而} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

故复合函数$y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.}$$

例题 $1.\ y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\left[\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1-2x^2\right)'=\frac{-4x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}}$$

$2.\ y=(2x-\tan x)^2$，求 y'

解 $$y'=2(2x-\tan x)\cdot(2x-\tan x)'=2(2x-\tan x)\cdot(2-\sec^2 x)$$

$3.\ f(x)=\sin nx\cos^n x\quad(n\in R)$，求 $f'(x)$.

解：$$f'(x)=\left(\sin nx\right)'\cdot\cos^n x+\sin nx\cdot(\cos^n x)'$$

$$=n\cos nx\cdot\cos^n x+\sin nx\cdot n\cos^{n-1}x\cdot(-\sin x)$$

注意化简!

$$=n\cos^{n-1}x(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)=n\cos^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$$

$$4.\ y = e^{\ln\sin\frac{1}{x}},\text{求 } y'$$

$$y = e^{u}, u = \ln v, v = \sin w, w = \frac{1}{x}$$

解

$$y' = \left(e^{\ln\sin\frac{1}{x}}\right)' = e^{\ln\sin\frac{1}{x}} \cdot \left(\ln\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$= e^{\ln\sin\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$\frac{dy}{du} = e^{u}, \frac{du}{dv} = \frac{1}{v},$$

$$\frac{dv}{dw} = \cos w, \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^{2}}$$

$$= e^{\ln\sin\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{u} \cdot \frac{1}{v} \cdot \cos w \cdot \left(-\frac{1}{x^{2}}\right)$$

$$= e^{\ln\sin\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^{2}}\right)$$

$5. y = \ln|x|$，求 y'

解： $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x \;, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

$\therefore\ x > 0$时，$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$x < 0$时，$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-x)' = \dfrac{1}{x}$

$6. f(x)$可导，$y = \ln|f(x)|$，求 y'

解： $y' = (\ln|f(x)|)' = \dfrac{1}{f(x)} f'(x)$

7. 函数 $y=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$, 求 y'

解: $(\ln\left|\sec x+\tan x\right|)'=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x+\tan x)'$

$$=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}=\sec x$$

8. $f(u),g(v)$都是可导函数, $y=f(\sin^2 x)+g(\cos^2 x)$, 求 y'.

以抽象形式给出的函数求导数

解: 记 $y_1=f(\sin^2 x)$ $\quad y_2=g(\cos^2 x)$

$$y_1'=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'=f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x$$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot\sin 2x$$

$$y_2'=g'(\cos^2 x)(-\sin 2x)$$

$$y'=f'(\sin^2 x)\cdot\sin 2x+g'(\cos^2 x)(-\sin 2x)$$

注: 若$y=f(\sin^2 x)$, 则$y'\neq f'(\sin^2 x)$. ?

四、初等函数的求导问题

1. 常用的基本初等函数的导数公式

(1) $(C)' = 0$,

(2) $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu - 1}$,

(3) $(\sin x)' = \cos x$,

(4) $(\cos x)' = -\sin x$,

(5) $(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

(6) $(\cot x)' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

(7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$,

(8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$,

(9) $(a^x)' = a^x \ln a$,

(10) $(e^x)' = e^x$,

(11) $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

(12) $(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

(14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

(15) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$,

(16) $(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x), v=v(x)$都可导，则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,　　(2) $(Cu)' = Cu'$(C是常数),

(3) $(uv)' = u'v + uv'$,　　(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$.

3. 复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$, 而 $u=\varphi(x)$且 $f(u)$及 $\varphi(x)$都可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 或 } y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

函数的求导法则

- 基本初等函数的求导公式
- 函数的和、差、积、商的求导法则
- 反函数的求导法则
- 复合函数的求导法则

思考题

已知 $y=\arctan e^{x}-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，求 $f'(x)$.