第四节 连续

一、连续

定义1

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义2

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，

记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

在区间上每一点都连续的函数，叫做**该区间上的连续函数**，或者说**函数在该区间上连续。**

如函数 $y = \sin x, y = x^3 + 1, y = \ln x$ 是连续函数。

但 $y = \tan x, y = \dfrac{1}{x}$ 不是连续函数。

连续函数的图形是一条连续不间断的曲线。

例1 证明：函数 $y=\sin x$ 是连续函数。

证：设 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，当 x 有增量 Δx 时，则

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\because \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$$

$$\therefore |\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

又因为当 $\alpha\ne 0$ 时，$|\sin\alpha|<|\alpha|$

$$\therefore 0\le|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|=|\Delta x|$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，由夹逼准则得 $\Delta y\to 0.$

这就证明了 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

函数的间断点

设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义。

若函数$f(x)$有下列情形之一：

（1） 在 x_0没有定义；

（2）虽在x_0有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

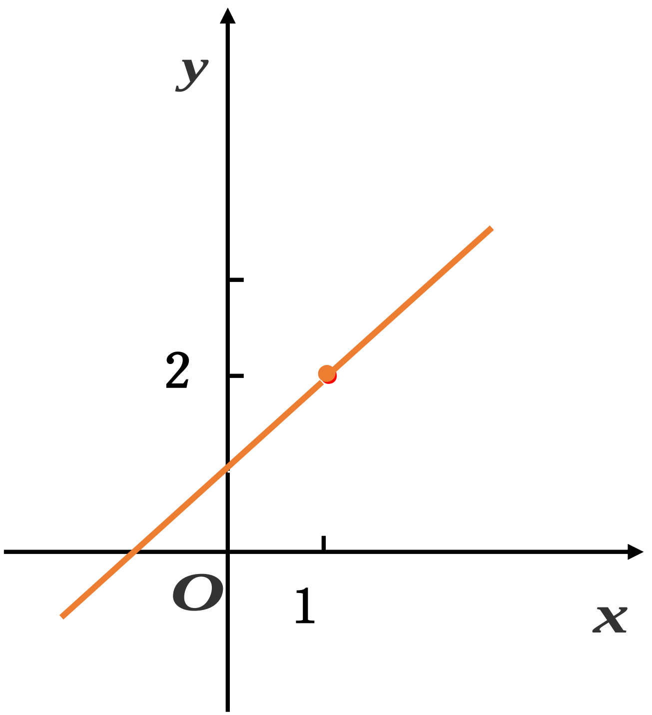
（3）虽在x_0有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$；

则函数$f(x)$在点x_0不连续，而点x_0称为函数$f(x)$的不连续点或间断点。

- 函数的间断点
  - 第一类间断点
  - 第二类间断点

函数间断点的几种常见类型：

例1 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 没有定义，所以 $x=1$ 为函数的间断点。



$$\because \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

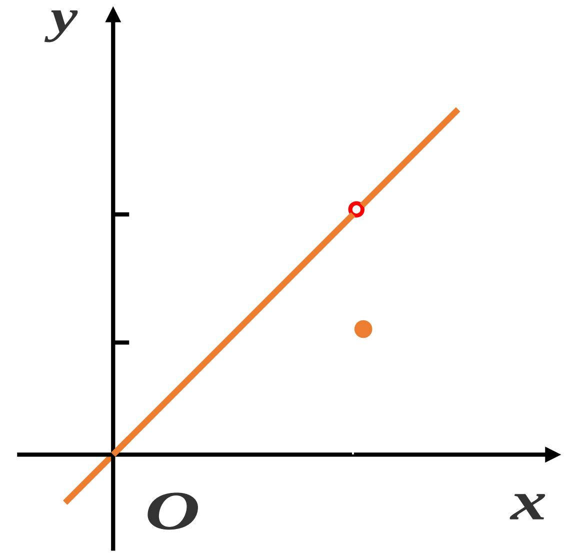
若补充定义：令 $x=1$ 时 $y=2$，

则该函数在 $x=1$ 处连续。

所以，$x=1$ 称为该函数的**可去间断点**。

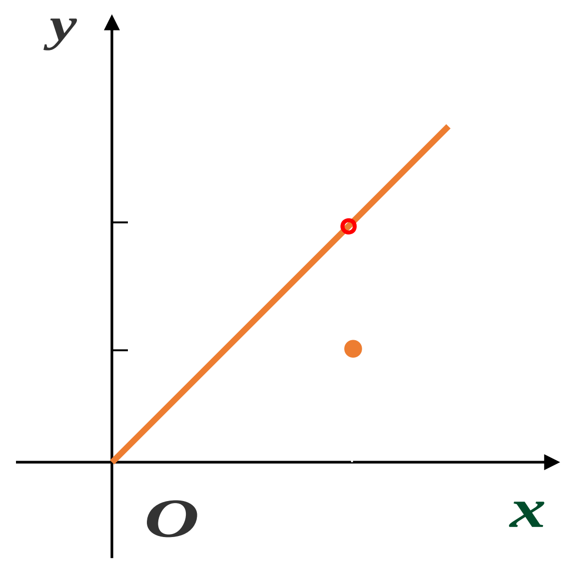
例2 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1,$ 而 $f(1) = \frac{1}{2}.$

改变函数的定义，令 $f(1) = 1$

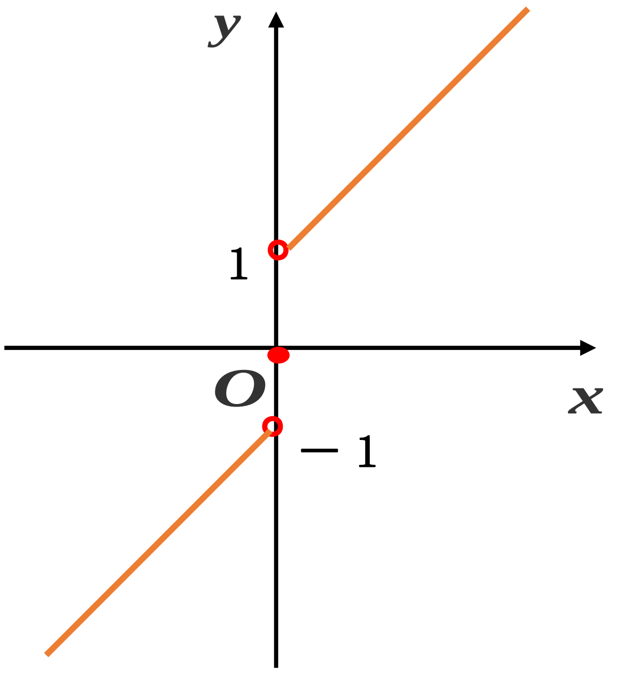


则该函数在 $x = 1$ 成为连续。

$x = 1$ 也称为该函数的**可去间断点**。

例3　函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$$



$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(x+1) = +1$$

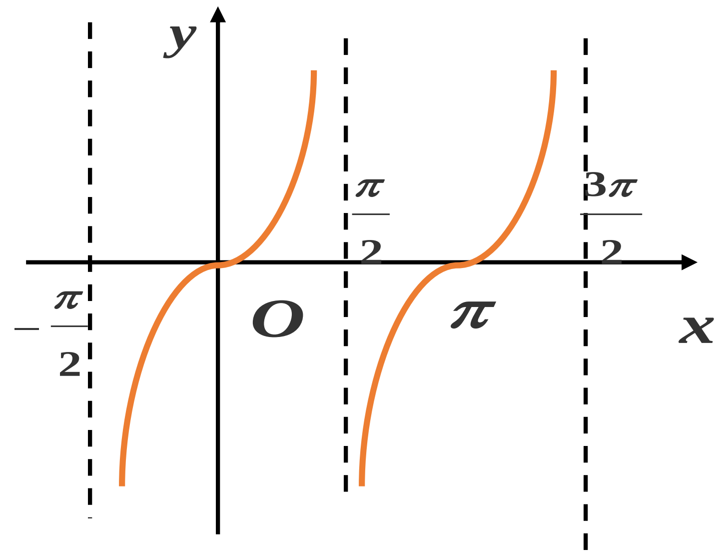
所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在。$x=0$称为该函数的**跳跃间断点**。

第一类间断点分为：可去间断点、跳跃间断点

例4　正切函数$y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义，

所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的间断点。

$\because \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x=\infty$



所以，称 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数 $y=\tan x$ 的无穷间断点。属于第二类间断点

例5　$y=\cos\dfrac{1}{x}$，$x=0$

当$x\to 0$时，函数在 -1 到 +1 之间变动无限多次，

所以 $x=0$ 是振荡间断点属于第二类间断点。

第二类间断点分为：无穷间断点、振荡间断点

例6 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$ 的连续性，若有间断点判断其类型。

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & |x|=1,\\ \infty, & |x|>1\end{cases}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 0, & x=-1\\ x, & -1<x<1\\ 0, & x=1\\ -x, & x>1\end{cases}$$

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}(-x)=1\neq f(-1)$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}x=-1\neq f(-1)$$

函数在$x=-1$处既不左连续，也不右连续。

$x=-1$是跳跃间断点

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}x=1\neq f(1)$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}(-x)=-1\neq f(1)$$

函数在 $x=1$处既不左连续,也不右连续。

$x=1$ 是跳跃间断点。

练习：讨论间断点类型

1. $y=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$

2. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x<0 \\ \ln(x+4), & x\ge 0 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1 \\ \dfrac{1}{x}-1, & -1<x\le 1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$

答案

1. $y=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$

解 $x=0$ "一"； $x=2$ 可去； $x=-2$ "二"

2. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x<0 \\ \ln(x+4), & x\geq 0 \end{cases}$

解 $x=0$ "二"

3. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq -1 \\ \dfrac{1}{x}-1, & -1<x\leq 1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$

解 $x=-1$ "一"； $x=0$ "二"； $x=1$ "一"

二、 连续函数的运算法则

连续函数的和、积及商的连续性

定理1、2 若函数$f(x)$、$g(x)$在x_0处连续，

则$f(x)\pm g(x)$、 $f(x)\cdot g(x)$在x_0处连续。

定理3 若函数$f(x)$、$g(x)$在x_0处连续。且$g(x_0)\neq 0$,

则在x_0处$\dfrac{f(x)}{g(x)}$连续。

例1 如$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$在它们的定义域内是连续的。

反函数、复合函数的连续性

定理4 如果$y=f(x)$在某区间上单调增加(减少)且连续，

则它的反函数$x=\varphi(y)$在对应区间上单调增加(减少)且连续

例2 $\because y=\sin x$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加且连续，

$\therefore$ 反函数$y=\arcsin x$在对应区间$[-1,1]$上单调增加且连续.

同样，$y=\arccos x$在$[-1,1]$上单调减少且连续，

$y=\arctan x$在区间$(-\infty,+\infty)$内单调增加且连续

$y=\operatorname{arc\,cot} x$在区间$(-\infty,+\infty)$内单调减少且连续.

综上，反三角函数$\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arc\,cot} x$

在它们的定义域内都连续

定理5 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 连续，则复合函数

$y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且等于 $f(a)$，

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)$. (1)

注： 1. 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{u\to a} f(u)=f(a)$, $\therefore$ (1)式又可写成：

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right] \qquad (2)$$

或

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a} f(u) \qquad (3)$$

2. （2）式表示在求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 时，极限符号与函数符号可以交换次序;

3. (3)式表示：作代换 $u=\varphi(x)$, 则求 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]$ 就化为求 $\lim\limits_{u\to a} f(u)$,

这里 $a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.

4. 把定理 5中的 $x\to x_0$ 换成 $x\to\infty$ 可得类似的定理.

例 3　求 $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$

解　$y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$ 由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = \dfrac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成，

$\because \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{6}$,

而函数 $y = \sqrt{u}$ 在点 $u = \dfrac{1}{6}$ 连续，

$$\therefore \lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

例 4　求：$\lim\limits_{x \to \infty} \cos \dfrac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}$

解：$\lim\limits_{x \to \infty} \cos \dfrac{(x^2-1)\pi}{x^2+1} = \cos\left[\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x^2-1)\pi}{x^2+1}\right] = \cos \pi = -1$

定理6 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，

则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也是连续的

例 5 讨论函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性.

解 $\because$ $y=\sin\frac{1}{x}$ 分解为 $y=\sin u, u=\frac{1}{x}$

而 $\sin u$ 在 $-\infty<u<+\infty$ 内连续，

$\frac{1}{x}$ 在 $-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$ 内是连续的，

$\therefore$ 函数 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内连续.

初等函数的连续性

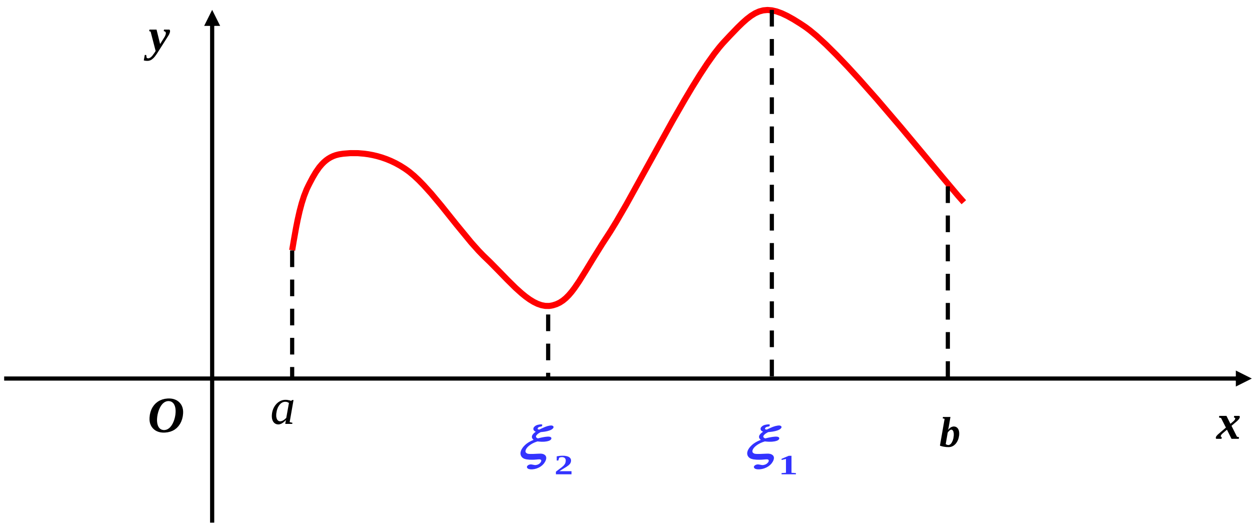
- 基本初等函数在它们的定义域内连续
- 一切初等函数在它们的定义区间内都是连续的

三、闭区间上的连续函数的性质

- 闭区间上连续函数的性质
  - 最大值与最小值定理
  - 有界性定理
  - 介值定理
  - 零点定理

最大值和最小值定理

定理1 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上一定有最大值和最小值



$\forall x \in [a,b]$

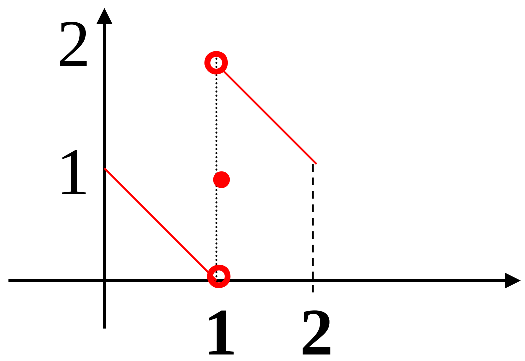
$f(\xi_1) \geq f(x)$

$f(\xi_2) \leq f(x)$

注： 若函数在开区间内连续，或在闭区间上有间断点，则函数在该区间上不一定有最大值或最小值

例如，$y = x$ 在 (a,b) 内连续，但在 (a,b) 内，既无最大值，也无最小值。（非闭区间）

例如　函数 $y = f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x+3, & 1 < x \le 2 \end{cases}$



$y = f(x)$ 有间断点 $x = 1$, 故在闭区间 $[a, b]$ 内既无最大值也无最小值.

有界性定理

定理2 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界。

证　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

则由定理 1 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定有最大值 M 和最小值 m,

使得 $\forall x \in [a, b]$ 都有 $m \le f(x) \le M$.

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有上界 M 和下界 m,

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

例 1 证明方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一的实根

证 存在性 设 $f(x) = x^3 + x - 1$,

显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,

且 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$.

$\therefore$ 由零点定理: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 0$

唯一性 $\forall x_1, x_2 \in (0,1)$, 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 + x_2 - 1 - (x_1^2 + x_1 - 1)$

$$= (x_2^2 - x_1^2) + (x_2 - x_1) > 0,$$

$\therefore$ $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调增加,

由以上证明可得:

方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的实根 .

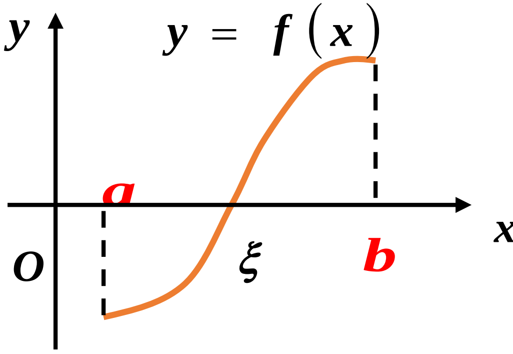
介值定理

定理3 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$，则对于A与B之间的任意一个数C，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值.

零点： 如果x_0使得$f(x_0)=0$，则x_0称为函数$f(x)$的零点

定理4 (零点定理)



设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，即$f(a)\cdot f(b)<0$，则$f(x)$在开区间(a,b)内至少有一个零点. 即至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$

例2. 证明 $x=e^{x-3}+1$至少有一个不超过 4 的正根 .

证：令 $f(x)=x-e^{x-3}-1$

显然 $f(x)$ 在闭区间$[0,4]$上连续, 且

$$f(0)=-e^{-3}-1<0$$

$$f(4)=4-e^{4-3}-1=3-e>0$$

根据零点定理，在开区间$(0,4)$内至少存在一点

$\xi\in(0,4)$, 使$f(\xi)=0$, 原命题得证 .

例3 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，则在$[x_1, x_n]$上必有$\xi$，使$f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

证 设 $f(x_{(1)}) = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$,

$$f(x_{(n)}) = \max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

则必有 $f(x_{(1)}) \le f(x_i) \le f(x_{(n)}), i = 1,2,\cdots,n.$

因此 $f(x_{(1)}) \le \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \le f(x_{(n)})$

在$[x_{(1)}, x_{(n)}]$ 或$[x_{(n)}, x_{(1)}]$上用介值定理，既存在一点

$\xi \in [x_{(1)}, x_{(n)}] \subset [x_1, x_n]$ 或 $\xi \in [x_{(n)}, x_{(1)}] \subset [x_1, x_n]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

思考题

证明多项式：$p(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1} \quad (a_0\neq 0)$ 至少有一个零点.

思考题答案

证　不妨设 $a_0 > 0$，

$$\because \lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right) = -\infty$$

$\therefore \exists X > 0$，使得 $p(X) > 0$，$p(-X) < 0$，

$\because p(x)$在$[-X, X]$上连续，

$\therefore$ 由零点定理知：至少存在一点 $\xi \in (-X, X)$，使得 $p(\xi) = 0$，

即多项式 $p(x)$至少存在一个零点.

专题：分段函数连续性

1. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ (x-1)^2, & x>0 \end{cases}$ 的连续性

解 $x<0$ 及 $x>0$ 连续 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

2. $f(x)=\begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x\ne 0 \\ \dfrac{1}{e}, & x=0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}=f(0)$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

3.已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=b$，若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，

则 $A=$ ______ .

解 $A=b+a.$

4. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ b, & x=0\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}+a, & x>0\end{cases}$，求 a，b，使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

解 $a=-2$，$b=0$

5. $f(x)$在 $x=2$连续， 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}\exists$，则 $f(2)=$ ______ .

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}\exists, \lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=3$$