习题课2(定积分计算)17题

1.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则有

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

2.若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$ ______.

3.设 $f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx$，求 $f(x)$.

4.$\int_{-2}^{2}\max(x,x^2)dx$

5.已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$，设 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \quad (0\le x\le 2)$，则 $F(x)$ 为

(A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1 \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1 \\ x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0\le x<1 \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1 \\ x-1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

6.设 $f(x)$ 为已知的连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x$，其中 $t>0$，$s>0$.

则 I 的值

(A) 依赖于 s 和 t (B) 依赖于 s,t,x

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s (D) 依赖于 s,不依赖于 t

7.设$f(x)$连续，且积分$\int_0^1 [f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t$的结果与$x$无关，试求$f(x)$

8.求$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \quad (x \geq 0)$，其中当$x \geq 0$时，$f(x)=x$，

而$g(x)=\begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

9.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

10.$\int_2^4 \dfrac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$

11.$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x \sin^4 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$

12.求 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$， 其中 $f(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$.

13.$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$

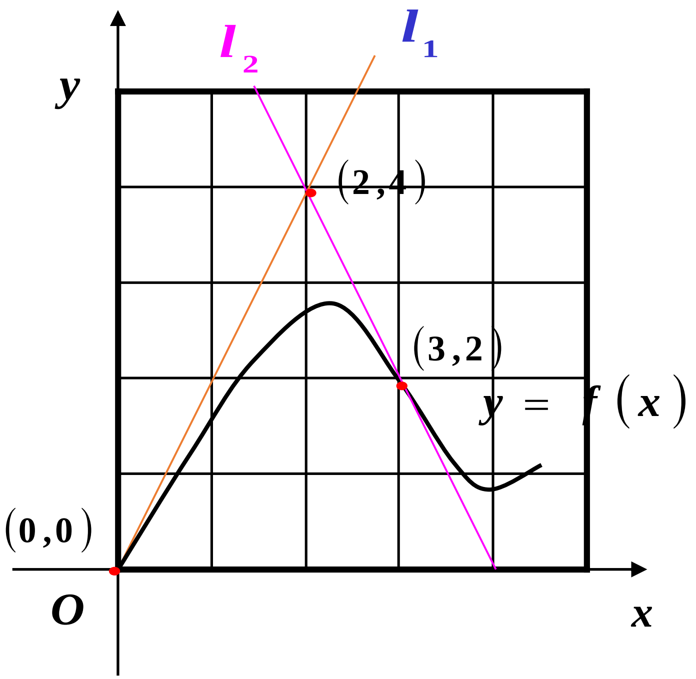
14.$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$

15.$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$

16.$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left|x-x^2\right|}}$

17. 如图，曲线C的方程为$y=f(x)$，点（3，2）是它的一个拐点，直线l_1与l_2分别是曲线C在点$(0,0)$与点$(3,2)$处的切线，其交点为$(2,4)$。设函数$f(x)$具有三阶连续导数，计算定积分：

$$\int_0^3 (x^2+x) f'''(x)dx .$$



答案

1. 解　根据定积分的性质知：$M=0, N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0$,

$P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0$，故　$P<M<N$.所以应选(D).

2. 解　记 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=I$, 则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\ I$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+I\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

故　$I=\dfrac{\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x}{1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4-\pi}$

所以应填　$\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

3. 解法一　$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$　两端同乘 $\cos x$ 并从 0 到 π 积分得

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=-2$$

则　$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=x+2.$

解法二　由　$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$　求导得　$f'(x)=1$, 则

$$f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=x-f(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x-0+0-\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=x+2$$

4. 解　因为　$\max(x,x^2)=\begin{cases} x^2, & -2\le x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ x^2, & 1\le x<2 \end{cases}$

于是　$\int_{-2}^{2}\max(x,x^2)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{11}{2}$

5. 解 当 $0 \le x \le 1$ 时，$F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}$;

当 $1 \le x \le 2$ 时，$F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x \mathrm{d}t=x-1$. 所以应选(D).

6.令 $tx=u$， 则 $t\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$

$I=t\int_0^s f(u)\frac{1}{t}\mathrm{d}u=\int_0^s f(u)\mathrm{d}u$ 应选(D) .

7. 解 $\int_0^1 [f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt)$

$$\overset{u=xt}{=} f(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$\because \int_0^1 [f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t$与 x无关. 故上式对x求导得 $f'(x)+f(x)=0$

$\therefore f(x)=C\cdot \mathrm{e}^{-x}$

8. 解　令　$u = x - t$，则　$du = -dt$

于是　$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt = -\int_x^0 f(x-u)g(u)du$$

$$= \int_0^x f(x-u)g(u)du = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

当　$0 \le x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x (x-t)\sin t dt = x - \sin x$

当　$x \ge \frac{\pi}{2}$ 时，$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-t)\sin t dt + 0 = x - 1$

所以　$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt = \begin{cases} x - \sin x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ x - 1, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

9. 解 记 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$, 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$,

则 $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$,

从而 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$,

所以 $I=\frac{\pi}{4}$

10. 解 $I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$

$$\overset{9-x=t+3}{=}-\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}dt$$

$$=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx,$$

$\therefore\ 2I=\int_2^4 dx=2$, 即 $I=1$.

11. 解 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}\sin^{4}x}{1+e^{x}}dx \underline{\underline{x=-t}} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}\sin^{4}(-t)}{1+e^{-t}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{4}t}{1+e^{t}}dt$

$\therefore\ 2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{x}\sin^{4}x}{1+e^{x}}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{4}x}{1+e^{x}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx=\frac{3}{8}\pi,$

即 $I=\frac{3}{16}\pi.$

12. 解 $\int_{0}^{\pi}f(x)dx=xf(x)-\int_{0}^{\pi}xf'(x)dx=\pi\int_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}dx$

$=\int_{0}^{\pi}\frac{\pi-x}{\pi-x}\sin x\,dx=\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=2.$

13. 解 $\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^{4}\sqrt{x^{2}-2x}} \underline{\underline{x-1=\sec t}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^{4}t\tan t}$

$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^{2}\theta\right)=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$$14.\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

15. 解：$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$

$$=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\mathrm{e}^x}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_0^{+\infty}=\ln 2$$

16. 解　注意到被积函数内有绝对值号且 $x=1$ 是其无穷断点，故

$$\text{原式}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

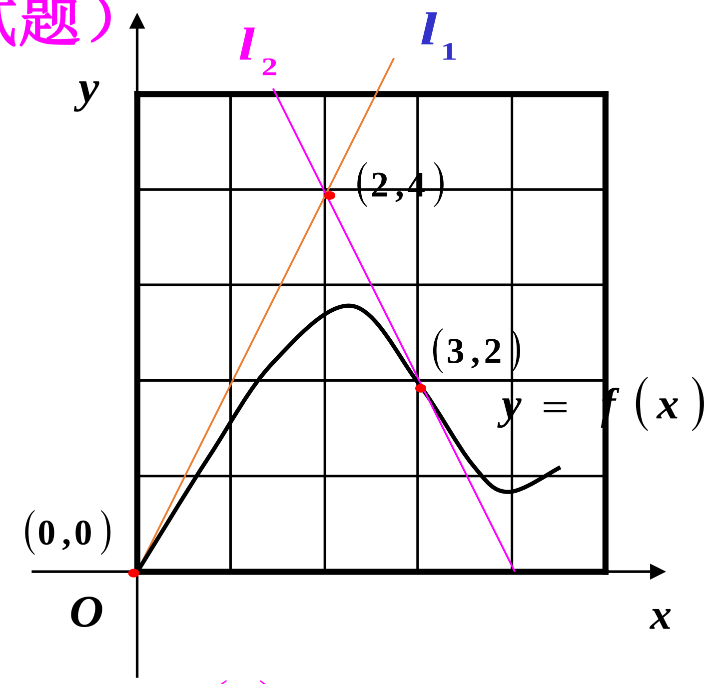
$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

因此 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left|x-x^2\right|}}=\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

17. 如图，曲线C的方程为$y=f(x)$，点（3，2）是它的一个拐点，直线l_1与l_2分别是曲线C在点(0,0)与点(3,2)处的切线，其交点为(2,4)。设函数$f(x)$具有三阶连续导数，计算定积分：

$\int_0^3 (x^2+x) f'''(x)dx$.（2005年研究生入学试题）



解 $$\int_0^3 (x^2+x) f'''(x)dx = \int_0^3 (x^2+x) d f''(x)$$

$$= \left[(x^2+x) f''(x)\right]_0^3 - \int_0^3 (2x+1) f''(x)dx$$

$$= -\int_0^3 (2x+1) f''(x)dx$$

$$= -(2x+1) f'(x)\Big|_0^3 + 2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$= -[7\times(-2) - 1\times 2] + 2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$= 16 + 2f(x)\Big|_0^3 = 20$$

$f''(3)=0$

$f'(3)=k_{l_2}=-2$

$f'(0)=k_{l_1}=2$