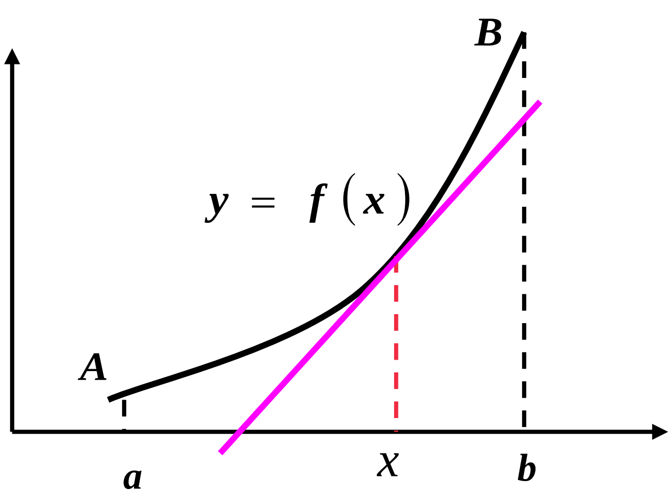
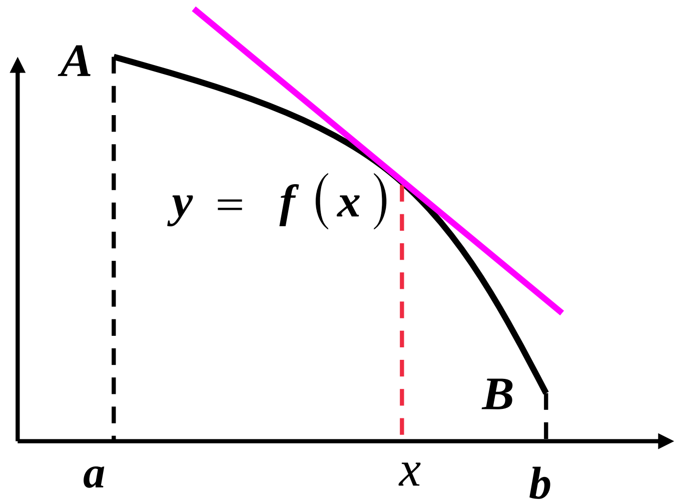
第四节 函数的单调性、极值和最大最小值

一、函数的单调性



$\forall x \in (a,b),\ f'(x) > 0$



$\forall x \in (a,b),\ f'(x) < 0$

问题：

反过来，若 $\forall x \in (a,b),\ f'(x) > 0,\quad f(x)\uparrow$?

若 $\forall x \in (a,b),\ f'(x) < 0,\quad f(x)\downarrow$?

函数的单调性的判定法

(1)若 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$,则 $f(x)$在 $[a,b]$上单调增加 .

(2)若 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) < 0$,则 $f(x)$在 $[a,b]$上单调减少 .

证 $(1)\forall x_1, x_2 \in [a,b]$,且 $x_1 < x_2$,

$\because \ f'(x) > 0$

$\therefore \ f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) < 0 \quad (x_1 < \xi < x_2)$

同样的方法可证（2）。

例1 判定 $y = x - \sin x$在 $[0, 2\pi]$上的单调性 .

解 $\forall x \in (0, 2\pi)$, $\quad y' = 1 - \cos x > 0$.

$\therefore \ y = x - \sin x$在 $[0, 2\pi]$上单调增加。

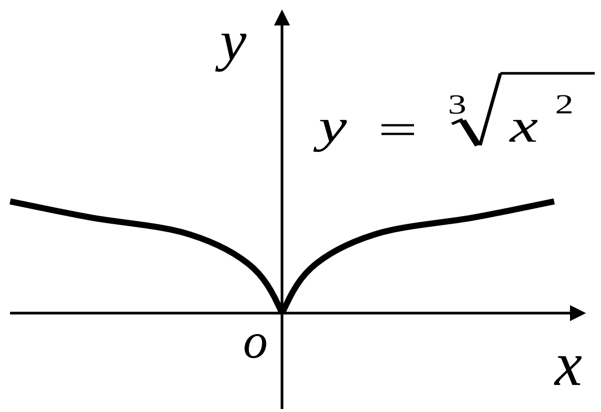
例2 讨论 $y=e^x-x-1$ 的单调性

解 定义域 $(-\infty,+\infty)$, $y'=e^x-1$, $x=0$ 时 $y'=0$,

$x\in(-\infty,0)$, $y'<0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少,

$x\in(0,+\infty)$, $y'>0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

例3 讨论 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性



解 定义域 $(-\infty,+\infty)$,

$$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

$x=0$ 时 y' 不 $\exists$;

$x<0$ 时, $y'<0$; $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少,

$x>0$ 时, $y'>0$. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

结论：若函数在其定义域上连续，除有限个点导数不存在的点外，导数存在且连续，则用 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$不存在的点划分$f(x)$ 的定义域区间，$f(x)$ 在这些部分区间上的单调性不变。

划分函数 $f(x)$的单调区间的步骤:

（1）确定函数定义域；

（2）求 $f'(x)$;

（3）令 $f'(x)=0$ ，求出它的根x_i;

（4）确定 $f(x)$ 的间断点、$f'(x)$不存在的点x_k;

（5）用 x_i、x_k把函数的定义域划分为单调区间；

（6）把以上结果制成表格。

例4 确定 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间

解 定义域 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

令 $y'=0$，得 $x=1,2$;

$x=1,2$将定义域 $(-\infty,+\infty)$划分为三个区间 $(-\infty,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

则 $f(x)$在 $(-\infty,1]$, $[2,+\infty)$上单调增加，在 $[1,2]$上单调减少.

例5 讨论 $y = x^3$ 的单调性

解 定义域 $(-\infty, +\infty)$

$y' = 3x^2 > 0$ （除去 $x = 0$）

$\therefore \ f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

结论： 若 $f'(x)$ 在某区间内的个别点处为零， 在其余各点均为正（或负）时，则 $f(x)$ 在该区间上仍是单调增加（或单调减少）的。

又例 讨论 $y = x + \cos x$ 的单调性

解 定义域 $(-\infty, +\infty)$

$y' = 1 - \sin x > 0$

（除去 $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时）

$\therefore \ f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

利用单调性证不等式

例6 证明 $x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

证 令 $f(x)=2\sqrt{x}-(3-\dfrac{1}{x})$,

则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1)$.

$\because$ 在$(1,+\infty)$内，$f'(x)>0$ $\therefore$ $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加 ，

$\therefore$ $x>1$时，$f(x)>f(1)=0$

即 $x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

例7 试证方程 $\sin x = x$ 只有一个实根

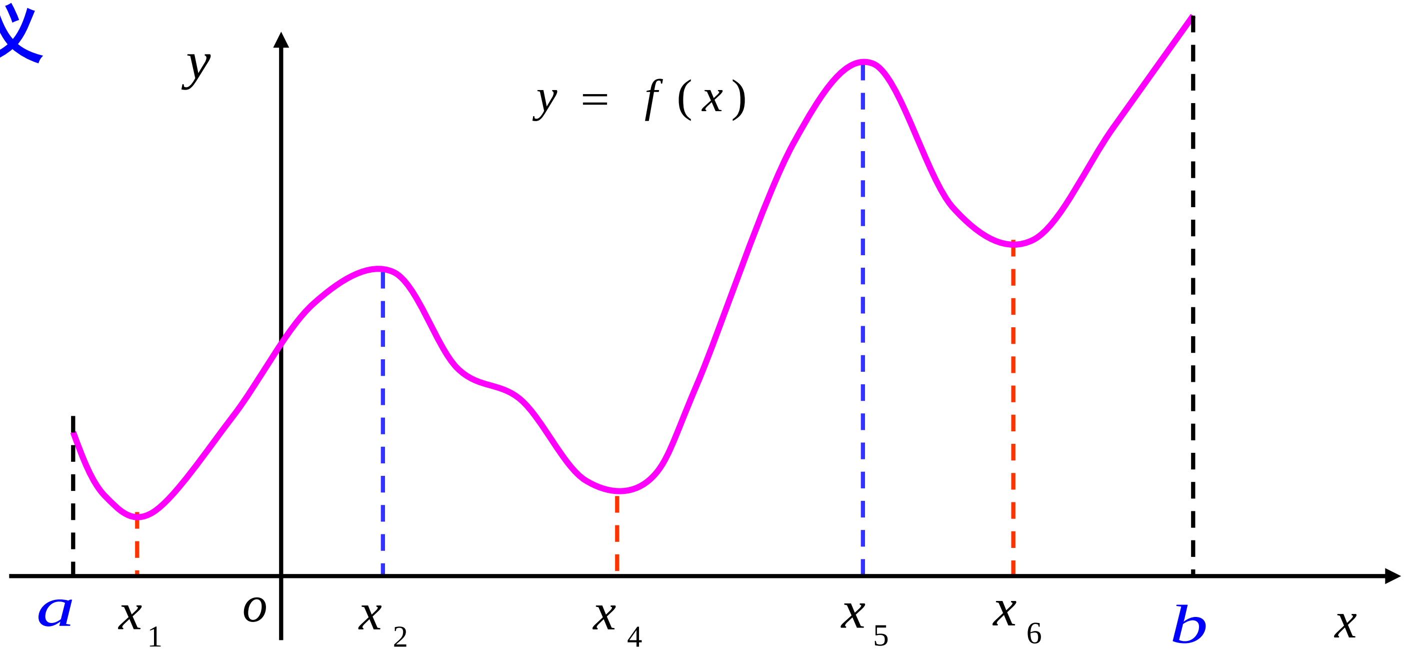
提示：设 $f(x)=\sin x - x$ ，$x=0$ 是一个根

$f'(x)=\cos x-1\le 0$

$f(x)$在（$-\infty,+\infty$）上单调减小

二、 函数的极值及其求法

极值定义



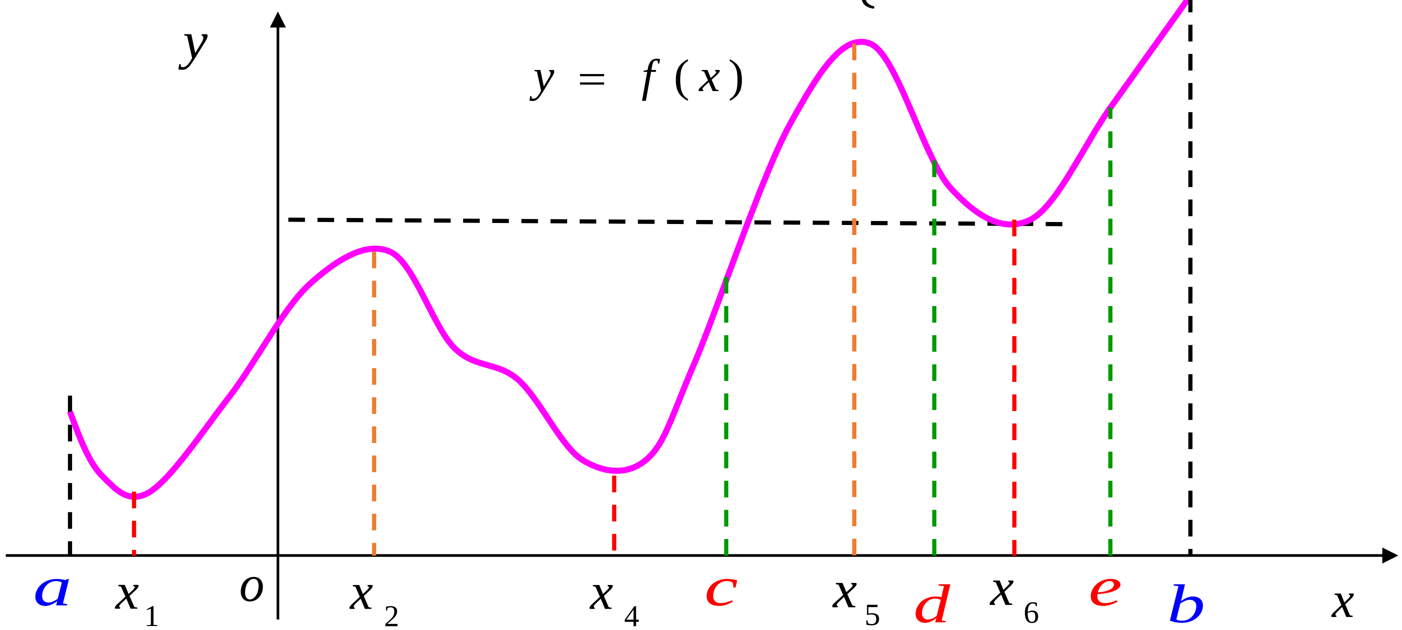
若 $\exists \overset{\circ}{U}(x_0,\delta), \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$,

则称 $f(x_0)$为极大 (小) 值， x_0为极大 (小) 值点 .

$f(x_2)$、$f(x_5)$ ——极大值， x_2、x_5 ——极大值点。

$f(x_1)$、$f(x_4)$、$f(x_6)$ ——极小值，x_1、x_4、x_6 —— 极小值点。

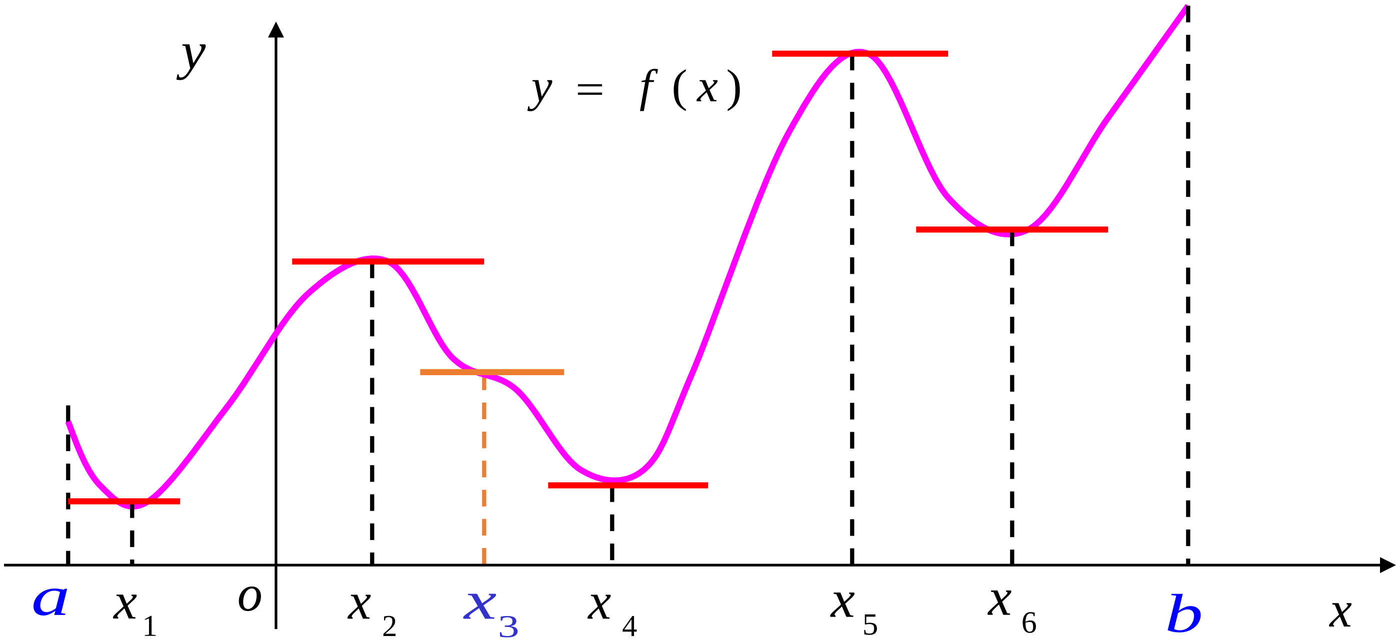
极值 $\begin{cases} \text{极大值} \\ \text{极小值} \end{cases}$　　极值点 $\begin{cases} \text{极大值点} \\ \text{极小值点} \end{cases}$



注：（1）函数的极大值和极小值是局部性的。如：$f(x_2) < f(x_6)$。

（2） 函数的极值只能在区间内部取得取得。

（3）若函数在某区间内部有唯一的极值点，则极大值一定是最大值，极小值一定是最小值。



定理1（必要条件）设 $f(x)$在 x_0点可导， $f(x_0)$为极值，则 $f'(x_0)=0$.

驻点：使导数为零的点（即方程 $f'(x)=0$ 的实根）。

可导函数的极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点。

问题：怎样才能从驻点中找出极值点?

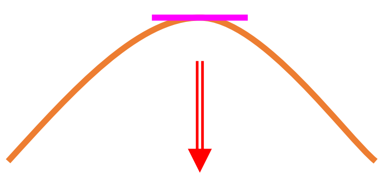
充分条件

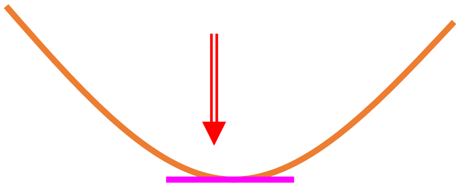
定理2（第一充分条件）

(1)在 x_0 左侧附近， $f'(x) > 0$；在 x_0 右侧附近 $f'(x) < 0$，则 $f(x_0)$为极大值 .

(2)在 x_0 左侧附近， $f'(x) < 0$；在 x_0 右侧附近 $f'(x) > 0$，则 $f(x_0)$为极小值。

（3）如果当 x 取 x_0 左右两侧邻近的值时， $f'(x)$恒为正或恒为负，那么函数 $f(x)$在 x_0 处没有极值。





定理3（第二充分条件） 设 $f''(x_0)$∃，$f'(x_0) = 0$，则

(1) $f''(x_0) < 0$时，$f(x_0)$为极大值 ；

(2) $f''(x_0) > 0$时，$f(x_0)$为极小值 .

证明: **(1)** $\because\ f''(x_0) < 0$ 即 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$

由极限的保号性可得,在x_0 的某邻域内有

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad (x \neq x_0)$$

又$\because\ f'(x_0) = 0$ $\therefore \dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0$

当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$,当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数$f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

同理可证**(2)**

(3) 例如: $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$

例1 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 (1) $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

(2) $x_1=-1,\ x_2=3$ 时， $y'=0$

法1

(3) $\left.\begin{array}{ll} x \text{ 在 } -1 \text{ 的左侧附近时，} & f'(x)>0 \\ x \text{ 在 } -1 \text{ 的右侧附近时，} & f'(x)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1)=10$ 为极大值。

$\left.\begin{array}{ll} x \text{ 在 } 3 \text{ 的左侧附近时，} & f'(x)<0 \\ x \text{ 在 } 3 \text{ 的右侧附近时，} & f'(x)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3)=-22$ 为极小值 .

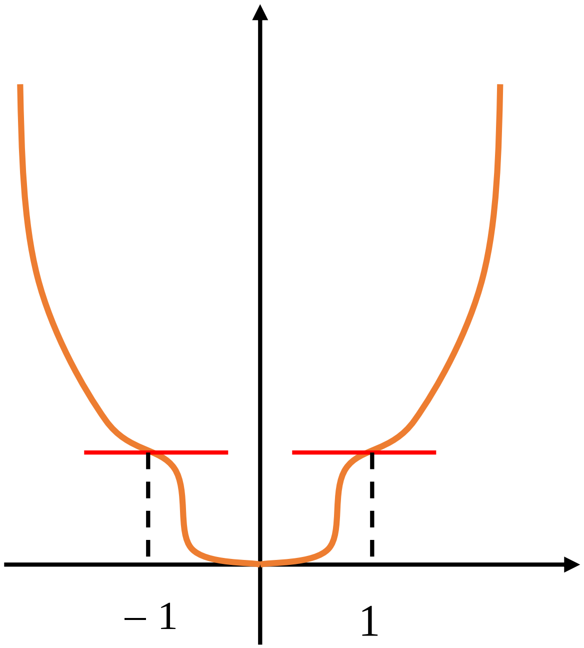
法2

(3) $f''(x)=6x-6$

$f''(-1)=-12<0 \quad \therefore f(-1)=10$ 为极大值 .

$f''(3)=12>0 \quad \therefore f(3)=-22$ 为极小值 .

例2 求 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.



解 (1) $f'(x)=6x(x^2-1)^2$

(2) $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$ 时，$y'=0$

(3) $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$

$f''(0)>0$，$\therefore f(0)=0$ 为极小值.

$f''(\pm1)=0$，法二失效，用法一!

x 在 -1 的左侧附近时，$f'(x)<0$

x 在 -1 的右侧附近时，$f'(x)<0$

$\therefore f(-1)$ 不是极值.

x 在 1 的左侧附近时，$f'(x)>0$

x 在 1 的右侧附近时，$f'(x)>0$

$\therefore f(1)$ 不是极值.

$x_1=-1,\ x_3=1$ 是函数的驻点。

例3 求 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值。

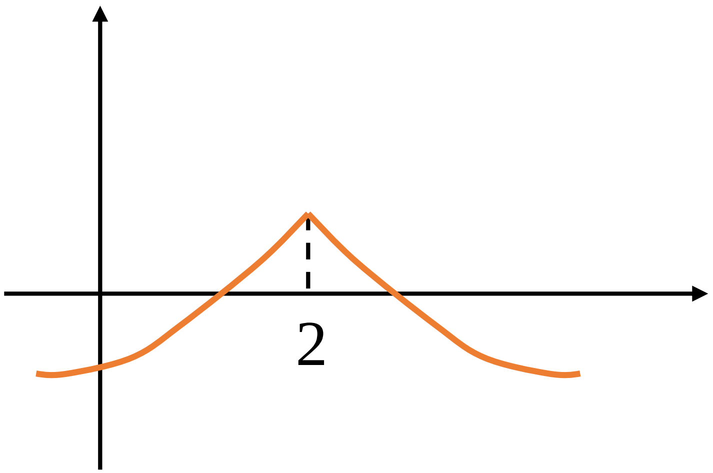
解 (1) $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}\neq 0$

(2) $x=2$ 时，$f'(x)$ 不存在 .

(3) $x\in(-\infty,2)$ 时，$f'(x)>0$

$x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$

$\therefore\ f(2)=1$ 为极大值 .



例4 如果 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，则这函数没有极值 .

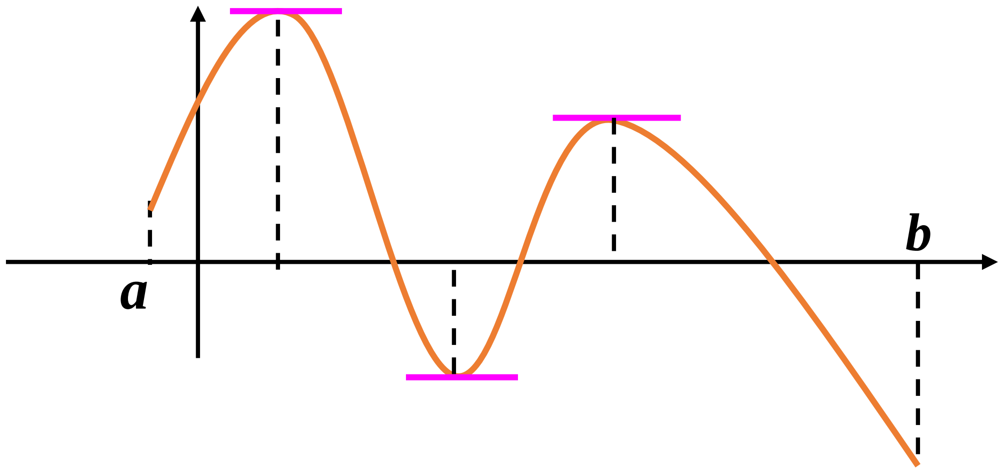
提示：$y'=3ax^2+2bx+c,\ \Delta=4(b^2-3ac)<0$

$a>0,\ y'>0,$ 原函数递增

$a<0,\ y'<0,$ 原函数递减

三、函数的最大值和最小值

1. $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，求最大值和最小值.



函数取得最值的点：

(1) 驻点；

(2) 区间端点。

例1 求$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$在$[-3,4]$上的最大值和最小值。

解 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$

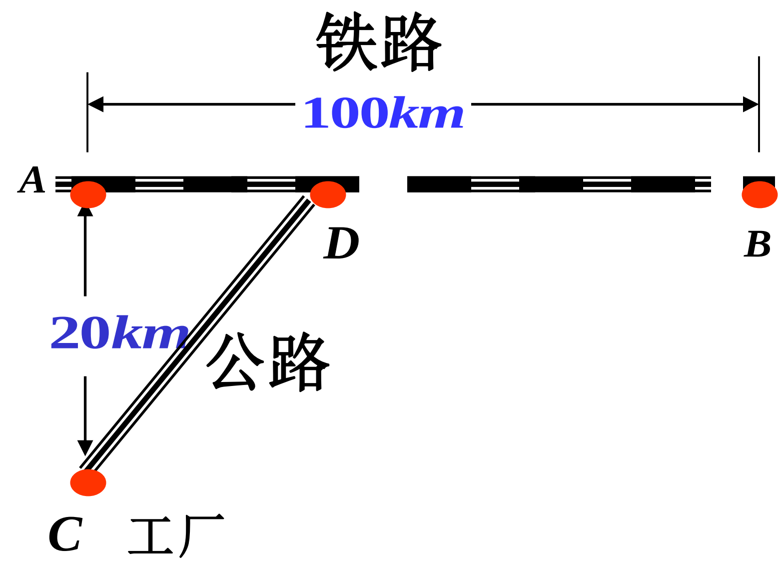
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$

令$f'(x) = 0$，得驻点$x = -2, 1$.

$f(-3) = 23$； $f(-2) = 34$； $f(1) = 7$； $f(4) = 142$.

比较得 $f(4) = 142$ 为最大值， $f(1) = 7$为最小值 .

2. 实际问题中的最大最小值问题



例2 已知铁路每公里货运的　　运费

与公路上每公里货运的　　运费

之比为 3:5,问 D 选何处，运费

最省？

解 设 $AD = x$，则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$，

运费 $y = 5k\sqrt{400 + x^2} + 3k(100 - x)$ $(0 \le x \le 100)$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right)$$

令 $y' = 0$，得 $x = 15\,(km)$.

$$y\big|_{x=0} = 400k,\quad y\big|_{x=15} = 380k,\quad y\big|_{x=100} = 500k\sqrt{1 + \frac{1}{5^2}}$$

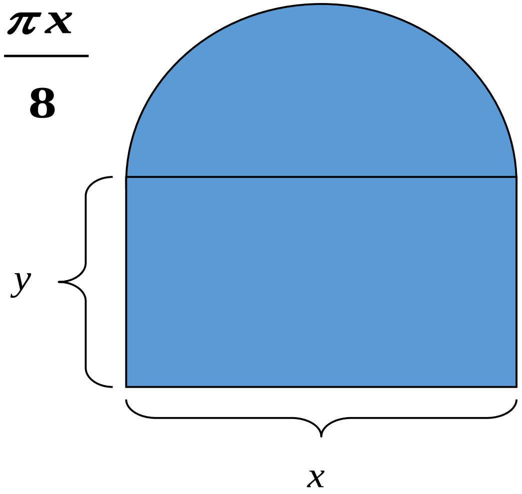
因此 $AD = x = 15\,km$ 时运费最省　.

注：

(1) 若函数在某区间内部有唯一的极值点，则极大值一定是函数在该区间上的最大值，极小值一定是最小值。

(2) 对实际问题，若 $f(x)$ 在定义域区间内部只有一个驻点 x_0，$f(x_0)$ 就是所要求的最大值或最小值。

例3.某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆截面的面积为$5m^2$.问底宽x为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？



解 周长 $l = \pi\dfrac{x}{2} + x + 2y$

$\because\ xy + \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = 5 \quad \therefore\ y = \dfrac{5 - \dfrac{\pi x^2}{8}}{x} = \dfrac{5}{x} - \dfrac{\pi x}{8}$

$\therefore\ l = \pi\dfrac{x}{2} + x + 2\left(\dfrac{5}{x} - \dfrac{\pi x}{8}\right) \quad (0 < x < +\infty)$

$\dfrac{dl}{dx} = \dfrac{\pi}{2} + 1 + 2\left(-\dfrac{5}{x^2} - \dfrac{\pi}{8}\right)$

令 $\dfrac{dl}{dx} = 0$，得 $x = \sqrt{\dfrac{40}{\pi + 4}}$.

由于最小周长一定存在，且在$(0,+\infty)$内取得，又驻点唯一，

$\therefore\ x = \sqrt{\dfrac{40}{\pi + 4}}$时，$l$最小 .