极限习题课2(两个准则) (5题)

1. 设 $a_1 = 2, \cdots, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求之

$$2. \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}\right)$$

3.求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$ 提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

$$4. \lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$$

5.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0$

答案

1. 解　因为 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$，所以 $\{a_n\}$ 下方有界，又因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{a_n^2})\leq\frac{1}{2}(1+1)=1$，所以 $\{a_n\}$ 单调减少，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，即 $l=\frac{1}{2}(l+\frac{1}{l})$，所以 $l=1$，

也即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

2. 解 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leq\frac{1}{n^2+n+2}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leq\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

所以由夹逼定理得：原式 $=\frac{1}{2}$

3. 解 $1<\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个}}=\sqrt[n]{n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$

4. 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$\because\ 0<\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}<\sin\dfrac{4}{2n}=\sin\dfrac{2}{n}$

由夹逼定理得 原式 $=0$

5.证明：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$

5. 证　令 $x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$

$$y_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

则有　$0<x_n<y_n$　$0<x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1}$

得　$0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，

由夹逼定理得　原式 $=0$