答案：第一章　函数、极限、连续测试题

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1.A　　2.B　　3.D　　4. C　　5.D

详细解答：

1.

由已知条件知 $f(-x)=-f(x), g(-x)=g(x)$.设 $F(x)=f[f(x)]$,则

$$F(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)].$$

所以 $f[f(x)]$为奇函数.

故应选（A）.

2.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$,所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$时，有$|a_n-a|<\varepsilon$,即

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

则

$$|a|-\varepsilon<|a_n|\le|a|+\varepsilon,$$

取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$,则知 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.

3.

解：取 $a_n=\dfrac{2}{n}, b_n=1, c_n=\dfrac{n}{2}, (n=1,2,\cdots)$

则选项(A)、(B)、(C)均可排除.

对于选项（D），由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_nc_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}=0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

4.

解：若 $\{x_n\}$单调，则由 $f(x)$在（$-\infty$, $+\infty$）内单调有界知,$\{f(x_n)\}$单调有界，因此 $\{f(x_n)\}$收敛.

5.

分析　$x\to 0$时，显然 $f(x)$是一个无穷小量，比较 $f(x)$与 x的阶数，需要根据极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$的值进行判别，这里只须知 $e^x-1\sim x(x\to 0)$就能判别本题，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}+e^{x\ln 3}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\cdot\ln 2+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln x}\cdot\ln 3=\ln 2+\ln 3\neq 1$$

故 $f(x)$与 x是同阶但非等价无穷小量，所以只有(D)项正确.

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1. $\frac{1}{3}$　　2. $\frac{1}{2}\ln a$　　3. 1　　4. e^2　　5. 1

详细解答：

1.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{3n+1})=\frac{1}{3}.$$

2.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\ln\left[a^1\cdot a^2\cdot\cdots a^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a.$

3.

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{\frac{1}{x}}+1)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x\sin\frac{1}{x})=1.$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1.$

4.

解：设 $y=\left[1+\ln(1+x)\right]^{\frac{2}{x}}$，则

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left[1+\ln(1+x)\right]}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=2$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\ln(1+x)\right]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}y$

$$=\lim_{x\to 0}\exp(\ln y)=\exp(\lim_{x\to 0}\ln y)=e^2$$

5.

解　由于 $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)\to 1$。

三、计算、证明题(1-10 题每题 6 分，第 11 题 10 分，共 70 分)

1.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x})=0+1=1$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x})=2-1=1$$

故　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

2.

解 $(x-1)^n = x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n$

$$\frac{1}{a} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2016}}{nx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1}}$$

$\therefore\ n-1 = 2016 \quad n = 2017$

$\frac{1}{a} = \frac{1}{n}\ \therefore\ a = 2017$

3.

$$解\ 原式 = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + \sin x}\,(\sqrt{4x^2 + x - 1} - x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}\,(\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x})} = 1.$$

4.

$$解：原式 = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$= \cdots =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-(x^{2^n})^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \qquad (|x|<1)$$

5.

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 1\right] = \lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1-\frac{1-\cos x}{3})} - 1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1-\frac{1-\cos x}{3})}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\frac{1-\cos x}{3})}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1-\cos x}{3}}{x^2} = -\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

6.

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{a^{-\frac{1}{x}} - 1}{a^{-\frac{1}{x}} + 1} = -1,\ \lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

所以 $x\to0$ 时极限不存在.

7.

解 $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-ax^2-x+4)=-1-a+1+4=4-a=0$

得 $a=4$，

从而 $b=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-1)(x-4)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)(x-4)=10$

$\therefore a=4$，$b=10$

8.

解 因为

$$\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^2\ln(1+x)}{x}=\mathrm{e}^2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$$=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\mathrm{e}^2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$

9.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$ 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x+\dfrac{f(x)}{x})=3$.

故有 $\dfrac{1}{x}\ln(1+x+\dfrac{f(x)}{x})=3+\alpha$，其中 $\alpha\to 0(x\to 0)$，即有

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x+3x}-1}{x}-1.$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x+3x}-1}{x}-1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\alpha+3)x}{x}-1=2$.

10.

解 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$；当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$.

$$故 f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ 1+x, & -1<x<1\\ 1, & x=1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为连续点.而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，所以 $x=1$ 为间断点.

11.

证（1）由于 $f_n(0) = -2 < 0$, $f_n(\frac{2}{n}) = (\frac{2}{n})^n > 0$,

故在 $[0,\frac{2}{n}]$ 上应用零点定理，$\exists a_n \in (0,\frac{2}{n}) \subset (0,+\infty)$, 使 $f_n(a_n)=0$.

又 $f_n'(x) = nx^{n-1} + n > 0, x \in (0,+\infty)$，因此 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增，

故在 $(0,+\infty)$ 上有唯一正根 a_n. ……5分

(2)由 $n \in N^*$，得 $0 \le \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} < 1$，$\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} < \frac{2}{n}$,

故 $f_n(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}) = (\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2})^n - \frac{2}{n} < 0$.

进一步得 $a_n \in (\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}, \frac{2}{n})$，因此 $(1+\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2})^n < (1+a_n)^n < (1+\frac{2}{n})^n$.

令 $n \to \infty$，则 $(1+\frac{2}{n})^n = (1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}\cdot 2} \to e^2$,

$(1+\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2})^n = (1+\frac{2n-2}{n^2})^{\frac{n^2}{2n-2}\cdot\frac{2n(n-1)}{n^2}} \to e^2$,

应用夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n = e^2$. ……10分

四、附加题（每题 4 分，共 20 分）

1.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\sin^2 x + e^x\right) - \ln e^x}{\ln\left(x^2 + e^{2x}\right) - \ln e^{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\sin^2 x / e^x + 1\right)}{\ln\left(x^2 / e^{2x} + 1\right)}$

做等价无穷小代换

上式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x / e^x}{x^2 / e^{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin^2 x}{x^2} = 1$

2. **解** 做等价无穷小代换

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{x^2\left(1-\cos x\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{x^2\,\dfrac{x^2}{2}} = 4$

3. **解** 当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)}{x\sin x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x^{n+1}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^{3-n}，\quad 故 n < 3$$

又 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}，\quad 故 n > 1$$

综上所述，$n=2$

4.解 $\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{2\times 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}$$

5.**解** 令$h(x)=f(x)+g(x)$由f,g定义可知$h(x)=\begin{cases}1-ax & x\le -1\\ x-1 & -1<x\le 0\\ x+1-b & x>0\end{cases}$

$h(x)$连续，故

$h(-1)=1+a=\lim_{x\to -1}h(x)=\lim_{x\to -1}x-1=-2$

$h(0)=0-1=\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}x+1-b=1-b$

因此$a=-3,b=2$