二、二阶线性微分方程的解的结构

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x) \qquad (1)$$

及

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (2)$$

方程（1）叫做二阶线性微分方程。 方程（2）叫做对应于(1)的齐次线性微分方程。

定理 1 如果函数 $y_1(x)$与 $y_2(x)$是方程（2）的两个解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \qquad (3)$$

也是（2）的解，其中C_1、C_2 是任意常数。

说明：（1）齐次方程的解符合叠加原理;

（2）叠加解（3）不一定是方程（2）的通解。 只有当C_1与C_2相互独立， 即 C_1与 C_2无法合并时， （3）才是（2）的通解。

定理 2 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程（2）的 两个线性无关的特解，则（3）就是方程（2）的通解。

所谓 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关是指：$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数 .

一般的，设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ ，使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0$$

成立，则称这n个函数在区间I上线性相关； 否则称线性无关。

推广： n 阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x). \qquad （4）$$

若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \qquad （5）$$

的n 个线性无关的特解， 则

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ 就是方程（5）的通解。

例 1 解方程 $y''+y=0$.

解 容易验证: $y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sin x$ 是方程的两个特解,

并且这两个解线性无关,

所以方程的通解为: $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

分析: 一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

其通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

改写为 $y=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+Ce^{-\int P(x)dx}$

$y^*=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 是该方程的一个特解;

$Y=Ce^{-\int P(x)dx}$ 是对应齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解。

定理 3 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程（1）的一个特解，$Y(x)$是与（1）对应的齐次方程（2）的通解，那末

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是二阶非齐次线性微分方程（1）的通解。

例 2　解方程 $y'' + y = x^2$.

解　容易验证 $y^* = x^2 - 2$ 是所给方程的一个特解；

由例 1知：$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是对应齐次方程的通解。

所以所给方程的通解为：$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$。

定理 4 设非齐次线性方程（1）右端是几个函数之和，如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

而 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$ 及 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 的特解分别为 $y_1^*(x)$ 及 $y_2^*(x)$，则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 就是原方程的特解。

三、二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=0 \qquad (1)$$

其中p、q为常数。

指数函数 $y=e^{rx}$（适当地选取 r）最有可能是方程（1）的一个解。

把 $y=e^{rx}$ 代入方程（1），整理得

$$\left(r^2+pr+q\right)e^{rx}=0$$

（1）的特征方程: $r^2+pr+q=0$ （2）

只要r 满足方程（2）， $y=e^{rx}$ 就是（1）的一个特解。

（2）的根称为特征根.

（i）当特征方程有两个不相等的实根： $r_1 \neq r_2$

可得方程（1）的两个不相关的特解： $y = e^{r_1 x}$ 及 $y = e^{r_2 x}$，

由此得（1）的通解为：

$$\boxed{\frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{常数}.}$$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

（ii）当特征方程有两个相等的实根： $r_1 = r_2 = r$

可得方程（1）的一个特解： $y_1 = e^{rx}$

还需求出另一解 y_2，并且要求 y_2 / y_1 不是常数。

设 $y_2 / y_1 = u(x)$，即 $y_2 = e^{rx} u(x)$.

将 y_2、y_2' 和 y_2'' 代入微分方程（1），得

$$e^{rx}\left[\left(u'' + 2ru' + r^2 u\right) + p\left(u' + ru\right) + qu\right] = 0$$

可化为 $u'' + \quad 0 \quad u' + \quad 0 \quad u = 0$

由r是特征方程的根，得

$$u'' = 0, \qquad u' = C_1, \qquad u = C_1 x + C_2.$$

选取 $u = x$， 得方程（1）的另一特解为： $y_2 = xe^{rx}$

从而微分方程（1）通解为

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

即 $$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}.$$

（iii）特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta \quad (\beta \neq 0)$$

可得方程（1）的两个复数形式的解

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

由定理1: $\dfrac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x$ 为方程（1）的一个特解。

$\dfrac{y_1-y_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 也是方程（1）的一个特解。

于是得实数函数形式的通解为

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

二阶常系数齐次线性微分方程的通解如下表所示

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$.
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

例 1 求下列微分方程的通解

$(1)\ y''-2y'-3y=0$; $(2)\ y''+2y'+y=0$; $(3)\ y''-2y'+5y=0$.

解 （1）所给微分方程的特征方程为

$$r^2-2r-3=0$$

特征根为： $r_1=-1,\ r_2=3$

因此所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

（2）特征方程为

$$r^2+2r+1=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=r_2=-1$$

所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$.

（3）特征方程为

$$r^2-2r+5=0 \quad\Rightarrow\quad r_{1,2}=1\pm 2i$$

所求通解为 $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (3)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 为常数。

设 $y = e^{rx}$， 则 $y' = re^{rx}$， $y'' = r^2 e^{rx}$， $\cdots$， $y^{(n)} = r^n e^{rx}$.

将 y 及其各阶导数代入方程（3）中得

$$e^{rx}\left(r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n\right) = 0$$

（3）的特征方程： $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0 \qquad (4)$

若 r 是（4）的根， 函数 $y = e^{rx}$ 就是（3）的一个特解。

n 次代数方程有 n 个根，特征方程中的每一个根对应着通解中的一项，且每一项中都含有一个任意常数.

与特征方程的根对应的微分方程的解为

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项 Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
k 重实根 r	给出k 项 $(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$.
一对k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出$2k$ 项 $e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x\right]$

n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 齐次方程 n 个线性无关的解.

例 2　求下列方程的通解

$(1)\, y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$;　　$y^{(4)} + \beta^4 y = 0$.

解 （1）所给微分方程的特征方程为

$$r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$$

$$r^2\left(r^2 - 2r + 5\right) = 0$$

特征根为 $r_1 = r_2 = 0$; $r_{3,4} = 1 \pm 2i$

所求通解为 $y = C_1 + C_2 x + e^x\left(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x\right)$.

（2）特征方程为 $r^4 + \beta^4 = 0$

特征根为 $r_{1,2} = \dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$; $r_{3,4} = -\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

因此所求通解为 $$y = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1 \cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right) + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3 \cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right).$$

四、二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程一般式是

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (1)$$

其中p、q是常数。

由定理3，只要求出(1)的一个特解 y^*及(1)对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解Y， 即可求得(1)的通解： $y=Y+y^*$.

对 $f(x)$ 的下面两种最常见形式，采用待定系数法来求出 y^*。

(一) $f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$型

其中λ 为常数，$P_m(x)$是x 的一个m 次多项式：

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m.$$

推测： $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$ 可能是方程(1)的特解(其中Q(x)是某个多项式).

为了确定Q(x)，将 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$， $y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda Q(x) + Q'(x)]$

$$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)\right)$$

代入方程(1)并消去 $e^{\lambda x}$， 得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x) \quad (3)$$

讨论：

（i） 如果 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 即λ不是特 征根。要使(3)成立，

Q(x)应是一 个m 次多项式，不妨设

$$Q(x) = Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$$

代入(3)式，比较两端同次幂的系数即可确定 $b_i \ (i = 0, 1, 2 \cdots, m)$,

进而得(1)的特解 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$.

$$\left(Q(x)e^{\lambda x}\right)' = Q'(x)e^{\lambda x} + \lambda Q(x)e^{\lambda x}$$

$$= \left[Q'(x) + \lambda Q(x)\right]e^{\lambda x}$$

（ii）如果$\lambda^2+p\lambda+q=0$，且$2\lambda+p\neq 0$，即λ是特征方程的单根。

要使(3)成立， $Q'(x)$应是一个m次多项式， 令

$$Q(x)=xQ_m(x)$$

同样可以定出$Q_m(x)$的系数 b_i $(i=0,1,2\cdots,m)$，

（iii）如果$\lambda^2+p\lambda+q=0$且$2\lambda+p=0$，即λ是特征方程的重根。

要使(3)式成立，$Q''(x)$应是m次多项式. 令

$$Q(x)=x^2Q_m(x)$$

仍是比较(3)式两端的系数来确定$Q_m(x)$的系数。

总之， 当 $f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$ 时，方程(1)具有形如

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的特解， 其中$Q_m(x)$ 是与$P_m(x)$ 同次(m次)的多项式，

$$\text{其中}\quad k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是特征根}\\ 1 & \lambda\text{是特征方程的单根}\\ 2 & \lambda\text{是特征方程的重根}\end{cases}$$

例 1 求下列方程的通解

$$(1)\ y''-2y'-3y=3x+1; \qquad (2)\ y''-5y'+6y=xe^{2x}.$$

解 （1）对应齐次方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0$

所以特征根为：$r_1=-1, r_2=3$

于是齐次方程的通解为：$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

又 $f(x)=3x+1=(3x+1)e^{0\cdot x}$， λ=0不是特征根，

故原方程特解设为：$y^*=(b_0x+b_1)e^{0\cdot x}=b_0x+b_1$

代入所给方程，得 $-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1$

所以 $b_0=-1, \quad b_1=\dfrac{1}{3}$

于是得原方程的一个特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$

所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\dfrac{1}{3}$;

(2) $y''-5y'+6y=xe^{2x}$.

对应齐次方程的特征方程为; $r^2-5r+6=0\Rightarrow r_1=2, r_2=3$

于是齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

由于 $f(x)=xe^{2x}$, λ=2是特征方程的单根,

故原方程特解设为: $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$

代入所给方程,得 $-2b_0x+2b_0-b_1=x$

所以 $b_0=-\frac{1}{2}$, $b_1=-1$

于是得原方程的一个特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}$.

例 2.求微分方程的特解： $y''-3y'+2y=5$， $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$.

解　特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$， 特征根为 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=2$

对应齐次微分方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

设非齐次特解为 $y^*=A$， 代入原微分方程得 $A=\dfrac{5}{2}$

故通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{5}{2}$.

把 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$ 代入上式得 $C_1=-5$， $C_2=\dfrac{7}{2}$.

故所求特解为 $y=-5\mathrm{e}^{x}+\dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{5}{2}$.

(二) $f(x)=e^{\lambda x}[p_l(x)\cos\omega x+p_n(x)\sin\omega x]$ 型

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[p_l(x)\cos\omega x+p_n(x)\sin\omega x]$$

$$y^*=x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

其中$R_m^{(1)}(x)$, $R_m^{(2)}(x)$都是 m 次多项式， $m=\max\{l,n\}$，且

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是特征根}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是特征根}\end{cases}$$

例 3 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解。

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm i$

于是齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

由于 $f(x)=x\cos 2x, (\lambda=0, \omega=2, P_l(x)=x, P_n(x)=0$ 即 $m=1)$

$\lambda\pm i\omega=\pm 2i$ 不是特征方程的根，取 $k=0$,

故原方程特解设为：$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$

代入所给方程，$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[p_l(x)\cos\omega x+p_n(x)\sin\omega x]$

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

$$y^*=x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

所以 $a=-\frac{1}{3}, b=0, c=0, d=\frac{4}{9}$

于是得原方程的一个特解为 $y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$

所求通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.$

3.求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解　特征方程 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm i$

对应齐次微分方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

$f(x)=x\cos 2x$，$(\lambda=0,\omega=2,P_l(x)=x,P_n(x)=0$ 即 $m=1)$，

$\pm 2i$ 不是特征方程的根，

设非齐次特解为 $y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$，

则 $y^{*\prime}=(2cx+a+2b)\cos 2x+(-2ax-2b+c)\sin 2x$，

$y^{*\prime\prime}=(-4ax-4b+4c)\cos 2x-(4cx+4a+4d)\sin 2x$，

将 y^*，$y^{*\prime}$，$y^{*\prime\prime}$ 代入原微分方程，整理得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+4a+3d)\sin 2x=x\cos 2x$$

得 $\begin{cases} -3ax - 3b + 4c = x \\ 3cx + 3d + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \dfrac{4}{9} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y^* = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$$

故原微分方程的通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x.$

例 4 求方程 $y''-2y'+5y=e^{x}\sin 2x$ 的通解。

解 齐次方程的特征方程为 $r^{2}-2r+5=0 \Rightarrow r_{1,2}=1\pm 2i$

于是齐次方程的通解为 $Y=e^{x}(C_{1}\cos 2x+C_{2}\sin 2x)$

由于 $f(x)=e^{x}\sin 2x,(\lambda=1,\omega=2,P_{l}(x)=0,P_{n}(x)=1,m=0)$

$\lambda\pm i\omega=1\pm 2i$ 是特征方程的根，取 $k=1$,

故原方程特解设为： $y^{*}=xe^{x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$

代入所给方程，得 $A=-\frac{1}{4},\quad B=0$

于是得原方程的一个特解为 $y^{*}=-\frac{1}{4}xe^{x}\cos 2x$

所求通解为 $y=e^{x}(C_{1}\cos 2x+C_{2}\sin 2x)-\frac{1}{4}xe^{x}\cos 2x$

例 5 求方程 $y''+y=e^{x}+\cos x$ 的通解。

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^{2}+1=0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2}=\pm i$

齐次方程的通解为 $Y=C_{1}\cos x+C_{2}\sin x$

因为 $y''+y=e^{x}$ 应有 Ae^{x} 形式的特解；

$y''+y=\cos x$ 应有 $x(B\cos x+C\sin x)$ 形式的特解，

故特解应设为 $y^{*}=Ae^{x}+x(B\cos x+C\sin x)$

代入所给方程，得 $2Ae^{x}+2C\cos x-2B\sin x=e^{x}+\cos x$

由此求得 $A=\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}, B=0$

于是求得一个特解为 $y^{*}=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{x}{2}\sin x$

所求通解为 $y=(C_{1}\cos x+C_{2}\sin x)+\frac{1}{2}e^{x}+\frac{x}{2}\sin x.$