第十二章　微分方程

一、基本内容

微分方程：　含有未知函数的导数（或微分）的方程。

微分方程 的阶：　微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。

通解：解中独立的任意常数的个数等于微分方程的阶数。

特解：满足初始条件的解。

一阶微分方程：

1．可分离变量的微分方程：　$g(y)dy = f(x)dx$

解法：$\int g(y)dy = \int f(x)dx \Longrightarrow G(y) = F(x) + C$

2．齐次方程：$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) \Longrightarrow x \cdot \dfrac{du}{dx} + u = \varphi(u)$

解法：令 $u = \dfrac{y}{x}$，$\Longrightarrow y = ux \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = x \cdot \dfrac{du}{dx} + u$

3. 一阶线性微分方程:非齐次与齐次

齐次: $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

解法: $$\frac{dy}{y}=-P(x)dx \Longrightarrow y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

非齐次: $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

解法:①常数变易法

②公式法: $$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

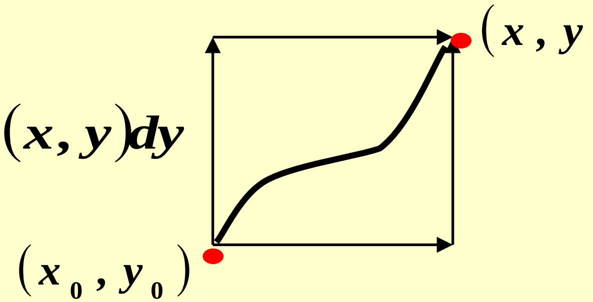
4. 伯努利方程 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n} \qquad (n\neq 0,1)$$

解法: $$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令: $$z=y^{1-n},\quad \frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

5. 全微分方程: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$



$\Longleftrightarrow\ du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$\Longleftrightarrow\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

解法: $(1)\,u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$

（2）若 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 引入积分因子 $\mu(x,y)\neq 0$, 使

$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=0$ 成为全微分方程.

可降阶的微分方程:

6. n 阶微分方程 $y^{(n)}=f(x)$

解法: 连续积分n 次.

7. $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

解法: 令 $y'=p(x)$,则 $y''=p'$. $\Longrightarrow$ $p'=f(x,p)$

设其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$ $\Longrightarrow$ $y'=\varphi(x,C_1)$

两端积分便得原方程的通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

8. $y'' = f(y, y')$型的微分方程

解法：令$y' = p(y)$，则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$.

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) \Longrightarrow y' = p = \phi(y, C_1)$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2$$

高阶微分方程：

9. 二阶常系数齐次线性微分方程： $y'' + py' + qy = 0$

特征方程$r^2 + pr + q = 0$ 的两个根	微分方程$y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
两个相等的实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$.
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

10. n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

特征方程: $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$

与特征方程的根对应的微分方程的解为

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项 Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出两项 $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k 重实根 r	给出k 项 $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})e^{rx}$.
一对k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出$2k$ 项 $e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})\cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1})\sin \beta x\right]$

11. 二阶常系数非齐次线性微分方程: $y''+py'+qy=f(x)$

解法: 先求对应的齐次方程的通解Y;

再求特解 y^*.

①当 $f(x)=p_m(x)e^{\lambda x}$ 时, $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是特征根}\\ 1 & \lambda\text{是特征方程的单根}\\ 2 & \lambda\text{是特征方程的重根}\end{cases}$$

②当 $f(x)=e^{\lambda x}[p_l(x)\cos\omega x+p_n(x)\sin\omega x]$时,

$$y^*=x^ke^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right],\quad m=max\{l,n\}.$$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是特征根}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是特征根}\end{cases}$$

二. 例题

1. 求下列微分方程的通解:

$(1)\ xy' + y = 2\sqrt{xy}$;

解: $y' = 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} - \dfrac{y}{x}$, 令 $u = \dfrac{y}{x}$, 则 $y' = u + x \cdot \dfrac{du}{dx}$,

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u} - u, \Longrightarrow \frac{du}{\sqrt{u} - u} = \frac{2}{x}dx,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{1-\sqrt{u}}\right)du = \frac{2}{x}dx, \Longrightarrow 2\sqrt{u} - 2\ln\left(1-\sqrt{u}\right) - 2\sqrt{u} = 2\ln x - 2\ln C$$

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{u}}du \quad \underline{\underline{\sqrt{u}=t}} \quad \int \frac{2t}{1-t}dt = \int \frac{2(t-1)+2}{1-t}dt = \int\left(\frac{2}{1-t} - 2\right)dt$$

$$= -2\ln(1-t) - 2t + C \quad \underline{\underline{t=\sqrt{u}}} \quad -2\ln\left(1-\sqrt{u}\right) - 2\sqrt{u} + C$$

$$\left(1-\sqrt{u}\right)x = C \Longrightarrow x - \sqrt{xy} = C$$

$(2)\ xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1)$;

解: $y' + \dfrac{1}{x\ln x}\cdot y = a\cdot\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)$ $\qquad P = \dfrac{1}{x\ln x}, Q = a\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

其对应的齐次方程为 $y' + \dfrac{1}{x\ln x}\cdot y = 0$

分离变量得 $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{1}{x\ln x}dx$

两边积分得 $\ln y = -\ln\ln x + \ln C \Rightarrow y = C\cdot\dfrac{1}{\ln x}$

设 $y = u(x)\dfrac{1}{\ln x}$ 为原方程的解, 代入原方程, 化简得

$$\frac{u'(x)}{\ln x} = a\cdot\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \Rightarrow u'(x) = a\cdot(\ln x + 1)$$

$$u(x) = a(x\ln x - x + x) + C = a\cdot x\ln x + C$$

所以方程的通解为 $y = ax + \dfrac{C}{\ln x}$

$$(3)\ \frac{dy}{dx}=\frac{y}{2(\ln y-x)};$$

解: $\frac{dx}{dy}+2\cdot\frac{x}{y}=2\cdot\frac{\ln y}{y}$, $\quad P=\frac{2}{y},Q=2\cdot\frac{\ln y}{y}.$

$$x=e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left(\int 2\cdot\frac{\ln y}{y}e^{\int\frac{2}{y}dy}dy+C\right)=\frac{1}{y^2}\left(2\int\frac{\ln y}{y}\cdot y^2dy+C\right)$$

$$=\frac{1}{y^2}\left(y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2+C\right)=\ln y-\frac{1}{2}+\frac{C}{y^2}$$

$$(4)\ \frac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0;$$ ------贝努里方程

解: $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$, $\Longrightarrow$ $-\frac{1}{2}\cdot\frac{d(y^{-2})}{dx}+xy^{-2}=x^3$, 令 $z=y^{-2}$,

则 $\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$, $\Longrightarrow$ $z=e^{\int 2xdx}\left(\int\left(-x^3e^{-\int 2xdx}\right)dx+C\right)$

所以 $y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1$, $\quad y=0$ 也是方程的解。

$(5)\ xdx + ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0;$

$$d\left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right] = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

解: $\dfrac{1}{2} d\left(x^2 + y^2\right) + d\left[\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)\right] = 0$

所以方程的通解为 $\dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) = C$

$(6)\ yy'' - y'^2 - 1 = 0;$

解: $y'' = \dfrac{1}{y}\left(y'^2 + 1\right),\quad$ 令 $y' = p(y),\quad$ 则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy},$

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y}\left(p^2 + 1\right) \Longrightarrow \frac{pdp}{p^2 + 1} = \frac{1}{y}dy, \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1 + p^2\right) = \ln y + \ln C_1 \Longrightarrow 1 + p^2 = \left(C_1 y\right)^2 \Longrightarrow y'^2 = \left(C_1 y\right)^2 - 1$$

$$\Longrightarrow y' = \pm\sqrt{\left(C_1 y\right)^2 - 1}$$

$$y' = \sqrt{(C_1 y)^2 - 1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dC_1 y}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \int dC_1 x$$

$$\Rightarrow archC_1 y = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = \frac{1}{C_1} ch(C_1 x + C_2)$$

同理： $y' = -\sqrt{(C_1 y)^2 - 1} \Rightarrow y = \frac{1}{C_1} ch(C_1 x + C_2)$

所以方程的通解为 $y = \frac{1}{C_1} ch(C_1 x + C_2)$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = arshx + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C = archx + C \end{aligned}}$$

$(7)\ y''+2y'+5y=\sin 2x;$

解: 其所对应的齐次方程为 $y''+2y'+5y=0$

特征方程 $r^2+2r+5=0 \Longrightarrow r_{1,2}=-1\pm 2i$

齐次方程的通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

$f(x)=\sin 2x,\ \lambda=0,\ \omega=2,\ P_l=0,\ P_n=1,\ m=0.$

$\lambda\pm\omega i=\pm 2i$ 不是特征方程的根， 则该方程的特解为

$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$，代入原方程，得

$(A+4B)\cos 2x+(B-4A)\sin 2x=\sin 2x,$

解得 $A=-\dfrac{4}{17},\ B=\dfrac{1}{17},\quad y^*=-\dfrac{4}{17}\cos 2x+\dfrac{1}{17}\sin 2x,$

所以方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{4}{17}\cos 2x+\frac{1}{17}\sin 2x.$$

$(8)\; y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4) = xe^x + 4x = f_1(x) + f_2(x)$

解:其所对应的齐次方程为 $y''' + y'' - 2y' = 0$

特征方程 $r^3 + r^2 - 2r = 0 \Longrightarrow r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -2$

齐次方程的通解为 $Y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x}$

$f_1(x) = xe^x$，$\lambda_1 = 1$是特征方程的根，则 $y_1^* = x(ax+b)e^x$，

代入方程$y''' + y'' - 2y' = xe^x$，得 $(6ax + 8a + 3b)e^x = xe^x$，

$\Longrightarrow a = \dfrac{1}{6}, b = -\dfrac{4}{9}$，$\therefore\ y_1^* = \left(\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{4}{9}x\right)e^x$.

$f_2(x) = 4x$，$\lambda_2 = 0$ 是特征方程的根，则 $y_2^* = x(cx+d)$，

代入方程 $y''' + y'' - 2y' = 4x$，得 $-4cx + 2c - 2d = 4x$

$\Longrightarrow c = -1, d = -1$，$\therefore\ y_2^* = -x^2 - x$，

$\therefore\ y^* = y_1^* + y_2^* = \left(\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{4}{9}x\right)e^{\lambda x} - x^2 - x$是方程的一个特解.

所以方程的通解为 $y = Y + y^*$

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解:

$(1)\ y^3 dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0,\qquad y\big|_{x=1} = 1;$

解: $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{2}{y}x = -\dfrac{2}{y^3}x^2$ ------贝努里方程

令 $z = x^{-1}$，则 $x = z^{-1}$, $\dfrac{dx}{dy} = -z^{-2}\dfrac{dz}{dy}$,

原方程化为 $\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{2}{y}\cdot z = \dfrac{2}{y^3}$

则 $z = e^{-\int \frac{2}{y}dy}\left(\int \dfrac{2}{y^3} e^{\int \frac{2}{y}dy} dy + C\right) = \dfrac{1}{y^2}(2\ln y + C)$

所以方程的通解为 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y^2}(2\ln y + C)$,

或 $y^2 = x(2\ln y + C)$. $x = 0$ 也是方程的解。

代入初始条件，得 $C = 1$

满足初始条件的特解为 $y^2 = x(2\ln y + 1)$.

$(2)\ y'' - ay'^2 = 0,\quad y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = -1$

解：法一 令 $y' = p(x)$，则原方程化为 $p' - ap^2 = 0$，

分离变量得 $\dfrac{dp}{p^2} = adx$，

两边积分，得 $-\dfrac{1}{p} = ax + C_1$，　即 $-\dfrac{1}{y'} = ax + C_1$，

代入初始条件 $y'\big|_{x=0} = -1$，得：$C_1 = 1$.

$\therefore\ y' = -\dfrac{1}{ax+1}$，即 $dy = -\dfrac{dx}{ax+1}$，

两边积分，得 $y = -\dfrac{1}{a}\ln(ax+1) + C_2$，

代入初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$，　得：$C_2 = 0$.

满足初始条件的特解为 $y = -\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)$.

法二 令 $y' = p(y)$, 则原方程化为 $p\dfrac{dp}{dy} - ap^2 = 0$,

由于 $y'\big|_{x=0} = -1$, 则 $\dfrac{dp}{dy} = ap$, $\Longrightarrow$ $\dfrac{dp}{p} = ady$,

两边积分，得 $\ln p = ay + C_1$, 即 $y' = C_1 e^{ay}$,

代入初始条件 $y'\big|_{x=0} = -1$, 得: $C_1 = -1$.

$\therefore\ y' = -e^{ay}$, 即 $-e^{-ay}dy = dx$,

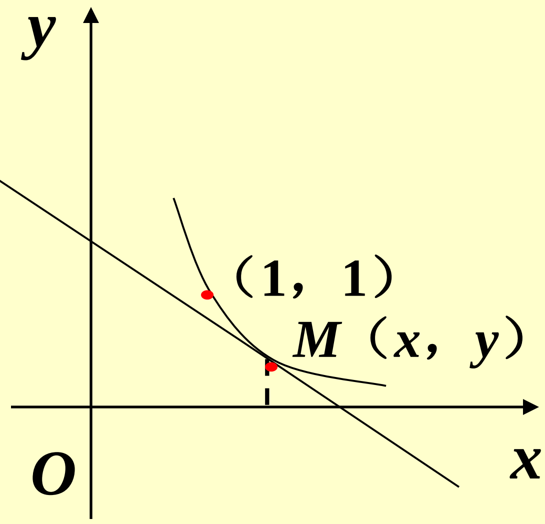
两边积分, 得 $\dfrac{1}{a}e^{-ay} = x + C_2$,

代入初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$, 得: $C_2 = \dfrac{1}{a}$.

满足初始条件的特解为 $\dfrac{1}{a}e^{-ay} = x + \dfrac{1}{a}$,

即 $y = -\dfrac{1}{a}\ln(ax + 1)$.

3. 已知某曲线经过点(1,1), 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求它的方程.



解　设$M(x,y)$为曲线上任意一点，

在该点处曲线的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

在纵轴上的截距为 $b=y-xy'.$

则 $x=y-xy'.$ $\Longrightarrow$ $y'=\dfrac{y}{x}-1$

令 $\dfrac{y}{x}=u$， 则 $y=ux$， $y'=u+xu'$， $\therefore\ u+xu'=u-1$，

$xu'=-1$， $u'=-\dfrac{1}{x}$ $\Longrightarrow$ $u=-\ln x+C$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{y}{x}=-\ln x+C$

$y=x(-\ln x+C)$. 代入初始条件 $y\big|_{x=1}=1$， 得 $C=1$.

所求曲线方程为 $y=x(1-\ln x)$.

4. 求满足下列方程的可导函数 $f(x)$

$(1)\ f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t dt = x + 1$

$(2)\ \int_0^x f(t)dt = x + \int_0^x tf(x-t)dt$

解 (1) 方程两边求导得

$$f'(x)\cos x - f(x)\sin x + 2f(x)\sin x = 1$$

$$f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) + f(x)\tan x = \sec x$$

$$f(x) = e^{-\int \tan x dx}\left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C\right) = \sin x + C\cos x$$

由 $f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t dt = x + 1$， 令 $x = 0$， 得 $f(0) = 1$.

即 $1 = \sin 0 + C\cos 0$， 得 $C = 1$.

$$\therefore\ f(x) = \sin x + \cos x$$

$$(2)\int_0^x f(t)dt = x + \int_0^x tf(x-t)dt$$

等式右边，令 $u = x - t$， 则 $t: 0 \to x$， $u: x \to 0.$

$$\int_0^x tf(x-t)dt = -\int_x^0 (x-u)f(u)du = \int_0^x (x-u)f(u)du$$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = x + x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

方程两边求导得 $f(x) = 1 + xf(x) + \int_0^x f(u)du - xf(x)$

即 $f(x) = 1 + \int_0^x f(u)du \Longrightarrow f(0) = 1$

方程两边求导得 $f'(x) = f(x)$

分离变量，得 $\dfrac{df(x)}{f(x)} = dx \Longrightarrow \ln|f(x)| = x + C'$

$f(x) = Ce^x.$ 代入初始条件得 $C = 1.$ $\therefore f(x) = e^x.$