

第五章 常微分方程

第一节 微分方程的基本概念

例 1 一曲线通过点 $(1, 2)$ ，且在该曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$ ，求这曲线的方程。

解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$ 根据导数的几何意义，

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1)$$

(1) 式两端积分，得： $y = \int 2x dx$

即
$$y = x^2 + C \quad (2)$$

把条件 “ $x=1, y=2$ ” 代入 (2) 式，得

$$C = 1$$

于是所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$



例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶, 当制动时列车获得加速度 -0.4 米/秒², 问开始制动后多少时间列车才能停住? 以及列车在这段时间内行驶了多少路程?

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米, $s = s(t)$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \quad t = 0 \text{ 时}, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1 \quad s = -0.2t^2 + C_1t + C_2$$

$$\text{代入条件后知 } C_1 = 20, \quad C_2 = 0 \quad v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$$

$$\text{故 } s = -0.2t^2 + 20t,$$

$$\text{开始制动到列车完全停住共需 } t = \frac{20}{0.4} = 50 \text{ (秒),}$$

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500 \text{ (米).}$$

微分方程：含有未知函数的导数（或微分）的方程。

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程。

偏微分方程：未知函数是多元函数的微分方程。

微分方程的阶：

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。

$$x^2 y + y^2 \cos x - x y' + e^x y''' = 0 \quad \text{三阶微分方程。}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{一阶微分方程。}$$

如果函数 $y = \varphi(x)$ 代入微分方程后，能使方程变为恒等式，则称 $y = \varphi(x)$ 为**微分方程的解**。

通解：解中含有任意常数，且**独立**的任意常数的个数等于微分方程的阶数。

特解：满足**初始条件**的解。

n 阶微分方程的**初始条件**是指如下的 n 个条件:

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时, } y = y_0, y' = y'_0, \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

或写作

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y'_0, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)} \Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

这里 $x_0, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数。

初值问题: 求微分方程满足初始条件的特解的问题。

一般初值问题可写为:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \\ y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y'_0, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)} \Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

微分方程的解的图形是一条曲线, 称它为**微分方程的积分曲线**。

满足初始条件的特解就是通过点 (x_0, y_0) 的一条积分曲线。

例 3 验证:函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分

方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解. 并求满足初始条件

$x|_{t=0} = A, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 的特解.

解 $\because \frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt, \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt,$

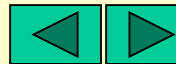
将 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ 和 x 的表达式代入原方程

$$-k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

故 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是原方程的解.

$$\because x|_{t=0} = A, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0, \therefore C_1 = A, C_2 = 0.$$

所求特解为 $x = A \cos kt.$



思考题

函数 $y = 3e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 4y = 0$

的什么解？

解答

$$\because y' = 6e^{2x}, \quad y'' = 12e^{2x},$$

$$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4 \cdot 3e^{2x} = 0,$$

$\because y = 3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.

