第二节　洛必达法则

1. 洛必达法则

设：（1）$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ （$\dfrac{0}{0}$型）

（2） 在 a 的去心邻域内 $f'(x)$、$g'(x)$ 存在，且 $g'(x) \neq 0$

（3） $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（$A$ 为有限数或者无穷大）

则： $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} (= A)}$

注意：

（1）定理对于其它的极限过程也成立，只是要把定理叙述中的区间作相应的变换。

（2）定理条件中，两个函数的极限同是无穷大时，定理依然成立。（称 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）

洛必达法则求极限举例：

(一) $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$

2. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x\ln(1-x)}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{-2x}=-\dfrac{1}{2}$

$$5.\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$$

解 $$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)\cdot(1+x)}{x^2}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

$$6.\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{x\sin^2 x}$$

解 $$I=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x-\sin x}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

(二) $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln x}{\ln(1+\dfrac{1}{x})}$

解 $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln x}{\ln(1+x)-\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)(x-1)}{1}=-1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-e^x}{x+e^x}$

解 $x\to+\infty$ 时， $I\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x}+1}=-1$

$x\to-\infty$ 时， $I\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-e^x}{1+e^x}=3$

$$3.\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

解 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{2}{x^3})}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$$

4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0$$

5. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$ $(n$ 为正整数 $,\lambda>0)$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot\cdots\cdot1\cdot x^{n-n}}{\lambda\cdot\cdots\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

$(n$**为正数? 如**$n=1.5)$

$x\to+\infty$ 时， $y=e^{\lambda x}(\lambda>0),y=x^{\alpha}(\alpha>0),y=\ln x$

都是无穷大,但增大速度不同， $e^{\lambda x}$最快， x^{α}次之，

$\ln x$与前两者比较最慢。

（三）$\infty-\infty$、$0\cdot\infty$

$$1.\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

解 $$I \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

2. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

解 $I \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim\limits_{t\to 0}[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t)] = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)} = \frac{1}{2}$$

4. 求 $\lim\limits_{x\to+0} x^n\ln x \ (n>0)$ $(0\cdot\infty)$

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^n\ln x = \lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-n}}$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{-x^n}{n} = 0$$

$$5.\ \lim_{x \to 1^+} \ln x \cdot \ln(x-1)$$

解
$$I \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}}$$

$$= -\lim_{x \to 1^+} \frac{(\ln x)^2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} -\lim_{x \to 1^+} \frac{2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}}{1} = 0$$

（四）1^{∞}、∞^{0}、0^{0}

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad \infty^{0}$

解 $I \overset{\infty^0}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$ $\quad \infty^{0}$

解 $I \overset{\infty^0}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^{x})}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^{x}}{x+e^{x}}}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}} = e$

$$3.\lim_{x\to\infty}\left[\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right]^{nx}\quad(a_1,a_2,\cdots,a_n>0)\qquad 1^{\infty}$$

解 $\ln y = nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\{nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n]\}$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}})-\ln n}{\frac{1}{x}}$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}}{(-\frac{1}{x^2})}\cdot[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1(-\frac{1}{x^2})+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n(-\frac{1}{x^2})]$$

$$= n\lim_{x\to\infty}\frac{a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}$$

$$= n\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} y = a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{2}{1+\ln x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln\sin x}{1+\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}2\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{\sin x}=2$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{2}{1+\ln x}}=\mathrm{e}^2$$

5. 求 $\lim\limits_{x\to +0} x^{x}$

解 设 $y = x^{x}$， $\ln y = x\ln x.$

$$\lim_{x\to +0}\ln y = \lim_{x\to +0} x\ln x = \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}} = -\lim_{x\to +0} x = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to +0} x^{x} = \lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to +0}\ln y} = 1$$

或 $$\lim_{x\to +0} x^{x} = \lim_{x\to +0}\exp(x\ln x) = \exp\left(\lim_{x\to +0} x\ln x\right) = 1$$

$\boxed{e^{x} \quad \text{又记作} \quad \exp(x)}$

幂指函数求极限的基本方法：

由对数基本公式和指数函数的连续性

$$\lim_{x\to \otimes} f(x) = \lim_{x\to \otimes}\exp\left[\ln f(x)\right] = \exp \lim_{x\to \otimes}\left[\ln f(x)\right]$$

应用洛必达法则求极限，还应当注意以下情况：

（1）不符合洛必达法则的条件，则不能用洛必达法则求极限。

不是未定式！
不符合条件(1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x}{3x-1}\cancel{=}\lim_{x\to 1}\frac{3}{3}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cos x\right)=1+0=1$$

但是，用洛必达法则计算则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}\cancel{=}\lim_{x\to\infty}(1-\sin x).$$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$不存在！

条件 ③ 不满足！

$\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$不存在，不能说明$\lim\frac{f(x)}{F(x)}$不存在。

也许用其它方法能够求出极限。

（2）用洛必达法则出现循环现象，及时改换别的方法。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\cdots$$

事实上， $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

（3）与其它求极限的方法综合运用，以简便为原则。

求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x\cos 3x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x\cos 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$ $(x\to0,\sin x\cos 3x\sim x)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$