

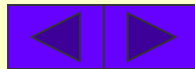
极限习题课4(连续)(7题)

1. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x < 0 \\ 3x, & 0 \leq x < 1 \\ e^{2ax} - e^{ax} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续, 求 a 的值.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, 问函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否连续?

若不连续, 修改函数在 $x = 1$ 处的定义, 使之连续..

3. 若 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 连续, 且 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 都成立, 试证 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.



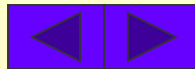
4. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 为连续函数，试确定 a 和 b 的值.

5. 已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} \quad (x > 0)$

(1) 求 $f(x)$; (2) 函数 $f(x)$ 在定义域内是否连续.

6. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) < a$ ， $f(b) > b$ ，证明：
在 $[a, b]$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi) = \xi$.

*7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (A 为常数)，
证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.



答案 $1. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{2ax} - e^{ax} + 1) = e^{2a} - e^a + 1$$

$$\therefore e^{2a} - e^a - 2 = 0 \quad (e^a - 2)(e^a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^a = 2 \Rightarrow a = \ln 2$$

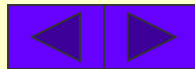
$$2. \text{ 解 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} \xrightarrow{t=x-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{1 - \cos \frac{\pi}{2}t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{1 - \cos \frac{\pi}{2}t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}t)^2} = -\frac{4}{\pi^2} \neq f(1)$$

故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 点不连续，若修改定义 $f(1) = -\frac{4}{\pi^2}$ ，则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续

$$3. f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x) + f(\Delta x)] = f(x) \Rightarrow \text{连续}$$



4. 解 当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = ax^2 + bx$ 当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$;

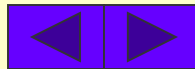
当 $x = 1$ 时, $f(1) = \frac{a+b+1}{2}$; 当 $x = -1$ 时, $f(-1) = \frac{a-b-1}{2}$.

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1 \\ \frac{a-b-1}{2}, & x = -1 \\ ax^2 + bx, & -1 < x < 1 \\ \frac{a+b+1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

由连续的定义知

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{a-b-1}{2} = -1 \\ \frac{a+b+1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$



$$5.(1) \text{ 当 } x < e \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^n + \ln \left[1 + \left(\frac{x}{e} \right)^n \right]}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{e} \right)^n}{n} = 1;$$

$$\text{当 } x > e \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x^n + \ln \left[1 + \left(\frac{e}{x} \right)^n \right]}{n} = \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{e}{x} \right)^n}{n} = \ln x,$$

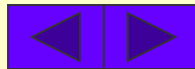
$$\text{当 } x = e \text{ 时, } f(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2 + n}{n} = 1,$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$$

(2) 由 $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = f(e)$ 知 $f(x)$ 在 $x = e$ 连续;

又当 $x < e$ 时, $f(x) = 1$ 连续; 当 $x \geq e$ 时, $f(x) = \ln x$ 连续.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.



6. 证 欲证 $f(\xi) = \xi$, 即证 $f(x) - x$ 以 ξ 为零点.

设 $F(x) = f(x) - x$, 显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 又

$$F(a) = f(a) - a < 0, F(b) = f(b) - b > 0,$$

根据零点定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$F(\xi) = 0, \text{即 } f(\xi) = \xi$$

*7. 解 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \therefore$ 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时,

$|f(x) - A| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 X_1 , 使 $|x| > X_1$ 时, $|f(x) - A| < 1$,

即 $A - 1 < f(x) < A + 1$.

$\because f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续 $\therefore f(x)$ 在 $[-X_1, X_1]$ 上有最大、小值,

即存在 a, b , 使 $a \leq f(x) \leq b$. 取 $m = \min\{A - 1, a\}, M = \max\{A + 1, b\}$,

则 $x \in [a, +\infty)$ 时, $m < f(x) < M$, 即 $f(x)$ 有界.

