第二节　极限

一、数列极限

定义: 对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，不等式：$\left|x_n - a\right| < \varepsilon$ 都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

记作 $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a,}$ 或 $x_n \to a \ (n \to \infty)$.

如果数列没有极限，就说数列是发散的。

"$\varepsilon - N$"定义:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当} n > N, \text{恒有} \left|x_n - a\right| < \varepsilon, \text{ 则} \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

正确理解数列极限"$\varepsilon - N$"定义：

①$\varepsilon > 0$的任意给定性.ε是任意给定的正数，它是任意的，但一经给出，又可视为固定的，以便依ε来求出N，由于$\varepsilon > 0$的任意性，所以定义中的不等式$|x_n - a| < \varepsilon$可以改为

$|x_n - a| < k\varepsilon(k > 0$为常数）；$|x_n - a| < \varepsilon^2$；

$|x_n - a| < \dfrac{1}{M}$,（M为任意正整数）；$|x_n - a| \le \varepsilon$ 等等。

② N的相应存在性。N依赖于ε，通常记作$N(\varepsilon)$，但N并不是唯一的，$N(\varepsilon)$只是强调其依赖性的一个符号，并不是单值函数关系，这里N的存在性是重要的，一般不计较其大小。

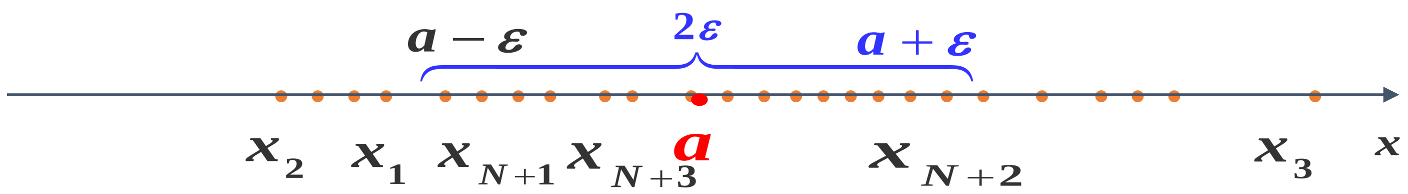
③ 定义中“当$n > N$时有$|x_n - a| < \varepsilon$”是指下标大于N的无穷多项x_n都落在数a的ε邻域内，即$\forall n > N, x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 也就是说在邻域$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$以外的只有数列的有限项，因此改变或增减数列的有限项不影响数列的收敛性。

数列极限的几何解释

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$, $\left| x_n - a \right| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

即N以后的所有项：x_{N+1}、x_{N+2}、x_{N+3}、$\cdots$、x_n、$\cdots$

都落在邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内，而只有有限项（至多只有$N$项)落在这个邻域以外.



有关数列收敛的性质

定理1（极限的唯一性）

设$\{x_n\}$是收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则极限值$a$唯一

定理2 （收敛数列的有界性）

如果数列$\{x_n\}$收敛，那末数列$\{x_n\}$一定有界

证　设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，根据定义：对$\varepsilon = 1$，存在正整数$N$，

当$n > N$，就有$|x_n - a| < 1$成立。$\therefore$ 当$n > N$时，

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|\}$，

都有$|x_n| \le M \quad (\forall n)$. $\therefore \{x_n\}$有界.

注： 有界数列不一定收敛. 无界数列必发散.

如数列：$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

子数列的概念：

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项，并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，这样得到的数列称为原数列$\{x_n\}$的<u>子数列</u>

子数列的表示：

在数列$\{x_n\}$中，第一次抽取x_{n_1}，第二次在x_{n_1}后抽取x_{n_2}，第三次在x_{n_2}后抽取$x_{n_3}, \cdots$，这样无休止地抽取下去，得到：

$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$，数列$\{x_{n_k}\}$就是数列$\{x_n\}$的一个子数列.

x_{n_k}在$\{x_{n_k}\}$是第k项，x_{n_k}在原数列$\{x_n\}$中是第n_k项，显然 $n_k \geq k$

收敛数列与其子数列的关系:

定理3 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,那末它的任一子数列也收敛,并且极限也是 a.

注:其逆反定理用于证明数列的发散

证: 设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

$$\because \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,就有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.

取 $K = N$,则当 $k > K$ 时,$n_k > k > K = N$

$\therefore$ 对上面的 $\varepsilon, \exists K$,当 $k > K$ 时,恒有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

注: 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限值,那么该数列就发散

例1 证明：数列$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$是发散的.

证 从数列中取所有奇数项组成子数列$\{x_{2k-1}\}$,

再取所有偶数项组成子数列$\{x_{2k}\}$,

显然 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}=1,\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}=-1,$

$\therefore \{x_n\}$的两个子数列虽然分别收敛,但极限值不相等

$\therefore$由定理3的逆否命题知：数列$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$是发散的

注:① **发散数列也可能有收敛的子数列.**

② **证明数列发散时，可采用下列两种方法:**

I) **找两个极限不相等的子数列;**

II) **找一个发散的子数列。**

例2 设$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$，证明数列$\{a_n\}$极限不存在。

证 设 $k\in Z$.

当 $n=4k$ 时，$a_{4k}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin\frac{4k\pi}{2}=0$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{4k}=0$;

当 $n=4k+1$ 时，

$$a_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(2k+\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{1}{4k+1}$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{4k+1}=1.$

所以$\{a_n\}$极限不存在。

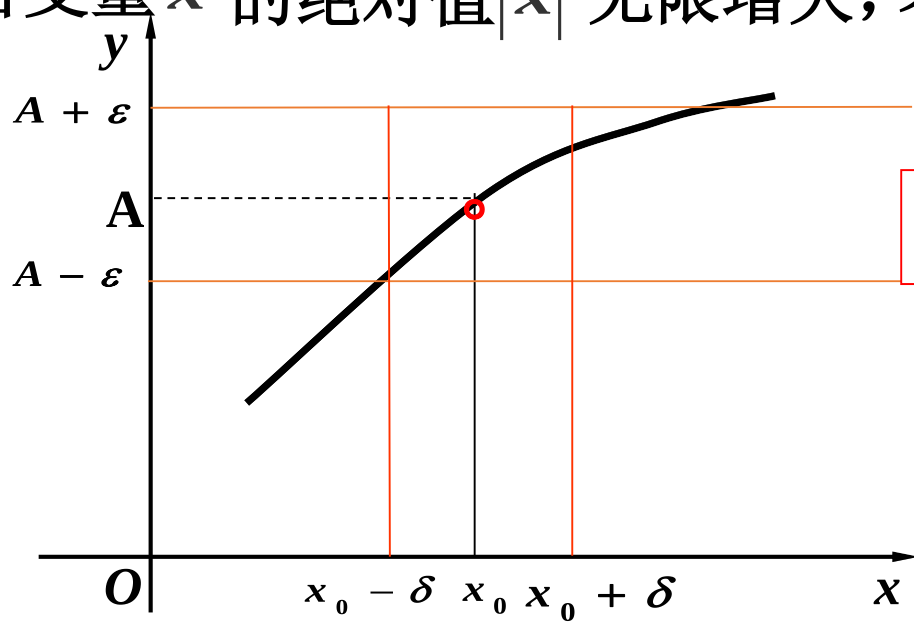
二、函数极限

在自变量的某个变化过程中,若对应的函数值无限接近于某个确定的常数，那么，这个确定的常数就叫做这一变化过程中函数的极限。—— 函数极限的描述性定义。

函数的自变量的变化过程可分为两种情况:

（1）自变量x无限接近有限值x_0,表示为 $x \to x_0$;

（2）自变量x 的绝对值$|x|$ 无限增大,表示为$x \to \infty$.



$x \to x_0$时， $f(x) \to A$

1. $x \to x_0$时$f(x)$的极限

函数极限的 $\varepsilon-\delta$定义:

设$f(x)$在点 x_0的某一去心邻域有定义，如果$\forall \varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有：$|f(x) - A| < \varepsilon$成立，则称当$x \to x_0$时，$f(x)$有极限 A，记作：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to x_0)$.

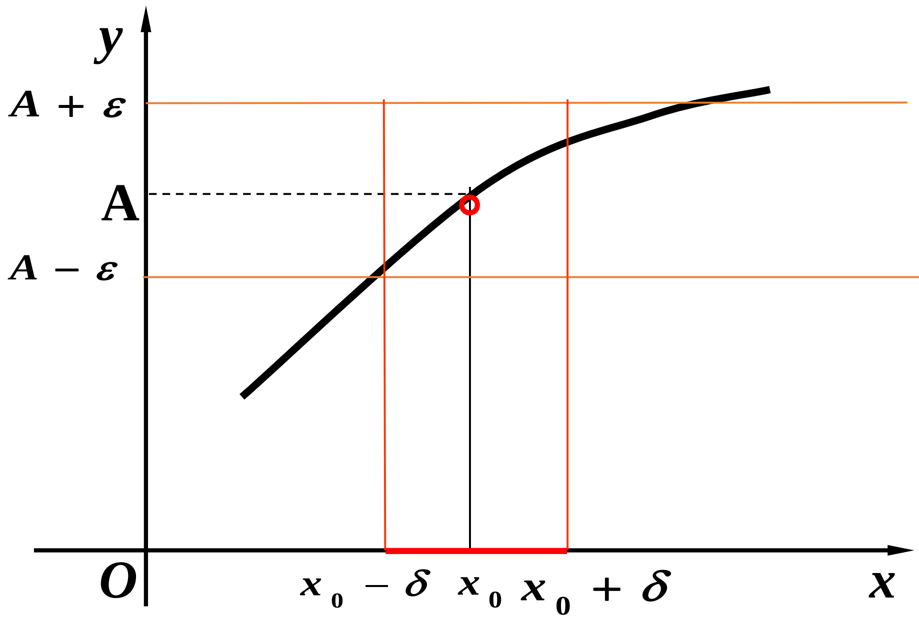
注1: $f(x)$在x_0处有无定义对$f(x)$当$x \to x_0$时,有否极限无关

注2: ε是任意无限小的正数，因此$|f(x) - A| < \varepsilon$才能表明$f(x)$无限接近于$A(x \to x_0)$.

注3:

正数δ与x无关，δ仅依赖于ε，但δ不是唯一的,比δ小的任何正数都可以

几何解释： $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$



$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时， 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$， 即

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

此式表明 $f(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 内既有上界，又有下界，即：$f(x)$ 局部有界。

2. 极限的局部保号性

定理1： 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 x_0 的某一去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0)$，$x\in \overset{o}{U}(x_0)$，就有：$f(x)>0$ 或 $\left(f(x)<0\right)$.

定理2： 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geq 0$（或 $f(x\leq 0)$），并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geq 0$（或 $A\leq 0$）.

问题： 比较定理1、2，注意“$>$”和“$\geq$”，为什么？

3. 左、右极限，函数极限存在的充分必要条件

左、右极限： $x \to x_0$ 意味着点 x 从 x_0 的左右两侧都无限趋近于 x_0.

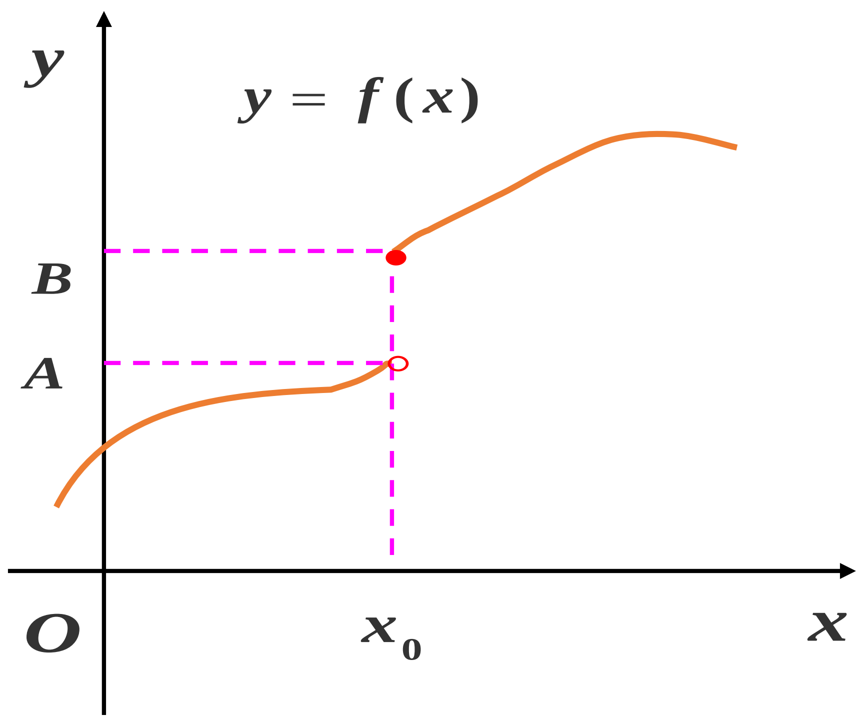
如果只考虑点 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0，记作 $x \to x_0 - 0$;

如果只考虑点 x 从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0，记作 $x \to x_0 + 0$.

当 $x \to x_0 - 0$ 时，$f(x) \to A$;

当 $x \to x_0 + 0$ 时，$f(x) \to B$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在!



极限存在的充要条件：

定理3：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$$

4. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

自变量的绝对值 $|x|$ 无限增大 $(x \to \infty)$ 时，函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 $A\left(f(x) \to A\right)$，则 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限.

-----描述性定义。

函数极限ε—X定义： 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一个正数时有定义.

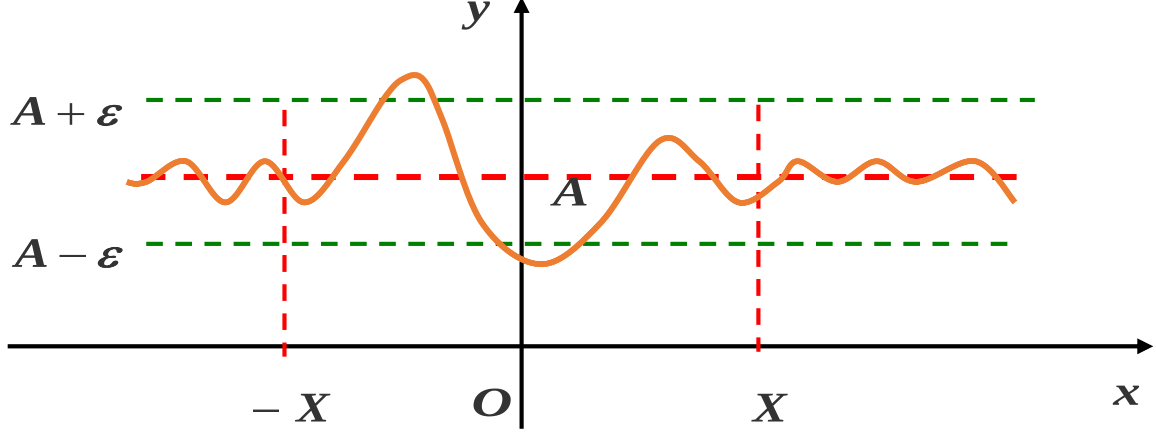
$\forall \varepsilon > 0$，总存在 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，恒有

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A (\text{当 } x \to \infty).$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$的几何意义：



单侧极限的定义：

$f(x) \to A($当$x \to +\infty)$的定义：

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$当$x > X,$恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立,则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{或} f(x) \to A(x \to +\infty).$$

$f(x) \to A($当$x \to -\infty)$的定义：

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$当$x < -X,$恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立,则

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \text{或} f(x) \to A(x \to -\infty).$$

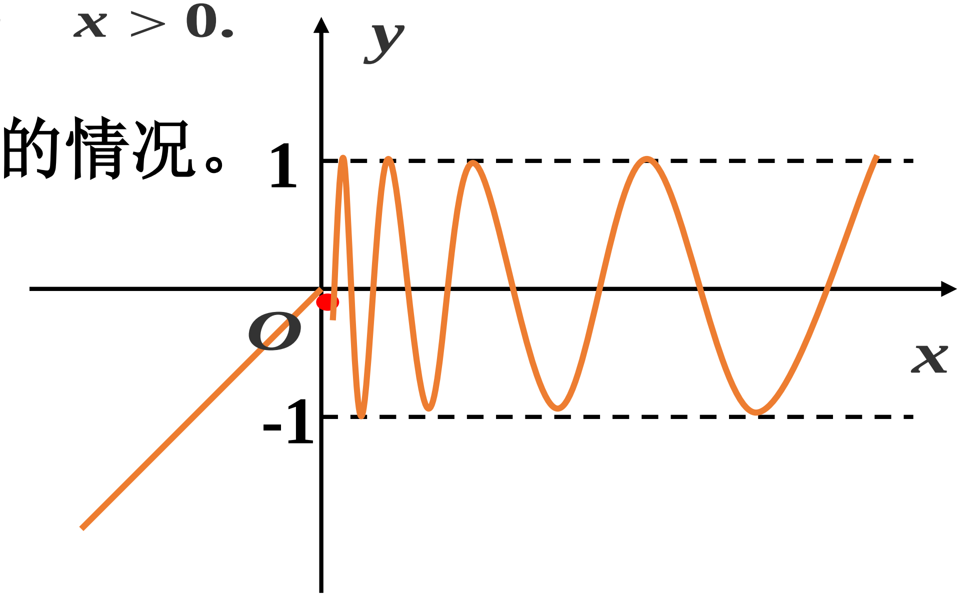
5.当$x \to \infty$时, $f(x) \to A$与两个单边极限的关系

定理： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

例1.讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \sin\dfrac{1}{x} & x>0. \end{cases}$$

当$x \to 0$时，函数$f(x)$的极限的情况。



因为:

$$f(0-0)=\lim_{x\to -0} f(x)$$

$$=\lim_{x\to -0} x = 0.$$

而当x从0的右边逼近于0时，函数值在-1与1之间振荡，即$f(0+0)$不存在。

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)\text{不存在.}$$

例2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 是否存在，为什么？

解： $\because\ f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0-0}(-1)=-1$

$$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{x}=1$$

$$\therefore\ f(0+0)\neq f(0-0).$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

5. 数列极限与函数极限之间的关系

（1） 数列是以正整数集为定义域的函数，即$a_n = f(n)$

因此数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$可以看成是函数$f(x)$ 当自变量取正整数n，并趋于正无穷大时的极限。

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，必有$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在。

反之，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$不存在，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$一定不存在。

（2）无论是数列极限还是函数极限，若存在，必唯一。

（3）收敛数列的有界性是整体概念，即若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，则对

$\forall n \in N, \exists M$, 使得$|a_n| < M$;

而对于函数$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则只能推得函数在x_0的某个邻域有界，即

$$\exists \overset{0}{U}(x_0, \delta), 及M, 使得对于\forall x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta), 有|f(x)| < M.$$

海因定理

设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$的充要条件是对于任意数列$x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$$

例3. 证明$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$不存在.

证 设$f(x)=x\sin x$，取$x_n=n\pi$及$y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

当$n\to\infty$时，$x_n\to\infty, y_n\to\infty$，而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} n\pi\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\infty,$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$ 不存在。

注：极限不存在的几种典型例子

①趋于 ∞， 如： $\lim\limits_{n\to\infty} n^2, \lim\limits_{x\to\infty} x, \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$

② 振荡，如：$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x, \lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$

③左、右极限不相等， 单侧极限不相等，如：

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{|x|}{x}=-1, \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x}=1.$ 所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$ 所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在。

思考题

$y = x\cos x$是否有界？是否为无穷大？