第 3 章

P93 习题 3.1

5. 对函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西公式(3.1.6).

解：函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内，$g'(x)=1-\sin x\neq 0$，故 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足柯西中值定理条件，从而至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

由

$$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi},$$

即 $\dfrac{\cos\frac{\xi}{2}+\sin\frac{\xi}{2}}{\cos\frac{\xi}{2}-\sin\frac{\xi}{2}}=\dfrac{2}{\pi-2}$，可得 $\tan\dfrac{\xi}{2}=\dfrac{4-\pi}{\pi}$，所以，$\xi=2n\pi+2\arctan\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 由题设，取 $n=0$，得 $\xi_0=2\arctan\dfrac{4-\pi}{\pi}$. 因 $0<\dfrac{4-\pi}{\pi}<1$，故 $\xi_0=2\arctan\left(\dfrac{4-\pi}{\pi}\right)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 因此，柯西中值定理对 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是正确的.

或者

由

$$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1}=\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi},$$

即

$$\frac{\pi}{2}-1=\frac{1}{\cos\xi}-\tan\xi=\sec\xi-\tan\xi=\pm\sqrt{1+\tan^2\xi}-\tan\xi,$$

$$\tan^2\xi+1=\tan^2\xi+2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\tan\xi+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2,\tan\xi=\frac{\pi-\frac{\pi^2}{4}}{\pi-2}\in(0,1)$$

则柯西公式成立.

山东大学高等数学

7. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中

$a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$。

解：$f(x)$在(a,b)内$f(x_1)=f(x_2)$且$f(x)$在(x_1,x_2)内连续且具有二阶导数，根据罗尔定理，则必存在ξ_1使 $f'(\xi_1)=0$

同理在 (x_2,x_1) 内必存在一ξ_2，使 $f'(\xi_2)=0$

且在(x_1,x_3)内$f'(x)$具有导数且连续，且存在ξ_1，ξ_2使$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

由罗尔定理可得必存在一ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$.

试证：必存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 因为 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续，所以 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，且在$[0,2]$上必有最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,\quad m\leqslant f(1)\leqslant M,\quad m\leqslant f(2)\leqslant M,$$

故 $m\leqslant\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M$. 由介值定理知，至少存在一点 $c\in[0,2]$，使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1.$$

因为 $f(c)=1=f(3)$，且 $f(x)$ 在$[c,3]$上连续，在$(c,3)$内可导，所以由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

9. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

证明：设$F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则$F'(x)=\dfrac{e^x(f'(x)-f(x))}{e^{2x}}\equiv 0$.$\therefore$当$-\infty<x<+\infty$时，有$F(x)\equiv C$，

又$F(0)=1$,$\therefore f(x)=e^x$.

10.设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=$

$\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},\quad 0<\theta<1.$$

证明：令 $g(x)=x^n$，在 $[0,x]$ 上由柯西定理得 $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$，

又因为 $f(0)=0$　$g(0)=0$　$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f'(\xi_1)}{nx^{n-1}}(0<\xi_1<x)$

同理在 $[0,\ \xi_1]$上，由柯西定理得

$$\frac{f'(\xi_1)}{nx^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{nx^{n-1}-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)x^{n-1}}\quad(0<\xi_2<\xi_1)$$

连续使用柯西定理得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(0<\xi_n<x)$$

即令 $\xi_n=\theta x\quad(0<\theta<1)$ 使 $\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1)$.

11. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$. 证明:**(1)** 存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $f(\eta)=g(\eta)$;(**2**)存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证 令 $h(x)=f(x)-g(x)$,则 $h(a)=h(b)=0$.

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a,b) 内的最大值 M 分别在 $\alpha\in(a,b)$, $\beta\in(a,b)$ 取得.

当 $\alpha=\beta$ 时,取 $\eta=\alpha$,则 $h(\eta)=0$.

当 $\alpha\neq\beta$ 时,

$$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)>0,\quad h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-M<0,$$

由介值定理,存在介于 α 与 β 之间的点 η,使得 $h(\eta)=0$.

综上,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $h(\eta)=0$. 因此由罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(a,\eta)$, $\xi_2\in(\eta,b)$,使得

$$h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0,$$

再由罗尔定理可知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $h''(\xi)=0$,即

$$f''(\xi)=g''(\xi).$$

12. 设 $x_1x_2>0$,证明:$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$,其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

证 令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,在 (x_1,x_2) 内可导,且 $g'(x)\neq0$. 由柯西中值定理知存在 $\xi\in(x_1,x_2)$,使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad \text{即}\quad \frac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=(1-\xi)e^{\xi},$$

也即 $x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$.

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=1$,试证:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

证 令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$$

由条件 $f(a)=f(b)=1$ 得

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)] \qquad ①$$

再令 $\varphi(x)=e^x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件。故存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi} \qquad ②$$

综合①，②两式，有 $\quad e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$

P99 习题 3.2

5.

讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x}{2x(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

从而 $f(x)$在$x=0$处连续.

6. 试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$， 其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

解

$$0=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+B+(B+2C)x+Cx^2)-A}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x\left[1+2B+2C+(B+4C)x+Cx^2\right]}{6x}$$

山东大学高等数学

从而得到 $\begin{cases} 1+B-A=0 \\ 1+2B+2C=0 \\ B+4C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=\dfrac{-2}{3} \\ C=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

7. 设 $f''(x)$ 存在，求证 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x)$

解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)\cdot 2-2f'(x+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}$$
$$=2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$
$$=2f''(x)-f''(x)=f''(x)$$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$， $f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

解

因为 $f(x)$ 的某邻域内具有一阶连续导数，则 $f(x)$ 不是常数函数

已知 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 是 $h\to 0$ 时比 h 高阶的无穷小，

即 $(a+b-1)f(0)=0$ 又已知 $f(0)\neq 0$，则 $a+b-1=0$

则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$，用洛必达法则，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=0$

则 $(a+2b)f'(0)=0$，已知 $f'(0)\neq 0$

即 $\begin{cases} a+2b=0 & ① \\ a+b-1=0 & ② \end{cases}$ 由①②联立得 $a=2,b=-1$.

9. 设

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-e^{-x}}{x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0, \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$，

（1） 求 $f'(x)$；

（2） 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

(1)解：①$x=0$时

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\mathrm{e}^{-x}}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$$

②$x\neq 0$时 $f'(x)=\left[\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right]'=\dfrac{xg'(x)-g(x)+(1+x)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

即 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(1+x)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}，& x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}，& x=0\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(1+x)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xg''(x)-x\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$

即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是连续的.

P108 习题 3.3

9. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，求 $f(0)$，$f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值.

解 因为

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)$，

所以，由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$ 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{f''(0)}{2}x^3+xo(x^2)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[(1+f(0))x+f'(0)x^2+(\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)\right]=\frac{1}{2},$$

所以 $1+f(0)=0$，$f'(0)=0$，$\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$.

故 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=\dfrac{4}{3}$.

注意： 此题不能直接通过洛必达法则来求解

山东大学高等数学

11. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 且$f''(x)>0$，证明$f(x)\ge x$．

证 因为$f(x)$连续且具有一阶导数，所以由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$知$f(0)=0$. 又

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1.$$

令$F(x)=f(x)-x$，则$F(0)=0$. 由于$F'(x)=f'(x)-1$，所以$F'(0)=0$. 又由$F''(x)=f''(x)>0$知，$F(0)$是$F(x)$的极小值和$F'(x)$单调. 故$F(x)$只有一个驻点，从而$F(0)$是$F(x)$的最小值. 因此$F(x)\geqslant F(0)=0$. 即$f(x)\geqslant x$.

12. 设$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$ 证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使$f'''(\xi)=3$．

证 由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中η介于0与x之间，$x\in[-1,1]$.

分别令$x=-1$和$x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\quad -1<\eta_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\quad 0<\eta_2<1.$$

两式相减，可得$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由$f'''(x)$的连续性，$f'''(x)$在闭区间$[\eta_1,\eta_2]$上有最大值和最小值，设它们分别为M和m，则有

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\leqslant M,$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点$\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$$

P116 习题 3.4

1. 求下列函数的极值

（**6**）函数$y=f(x)$由方程$x^3+y^3-3xy=0(x>0)$所确定，求其极值点

解：对方程$x^3+y^3-3xy=0$的两边对x求导

则为　$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$　解出　$y'=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$

当其取得极值时，$y'=0$　即　$x^2-y=0$　①　且　$x-y^2\neq 0$

将①代入方程得此时 $x=\sqrt[3]{2}$

（10） $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(t+1)^2 \\ y=\dfrac{1}{2}(t-1)^2 \end{cases}$　$(t\geq 0)$

解 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(t+1)^2 \\ y=\dfrac{1}{2}(t-1)^2 \end{cases}$　则　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 2(t-1)}{\frac{1}{2}\times 2(t+1)}=\dfrac{t-1}{t+1}$

当函数取极值时 $t-1=0$ 即 $t=1$

将 $t=1$ 代入参数方程得 $f(2)=0$ 又因为$t>1$时，$y'>0$；$t<1$时，$y'<0$.

则$f(2)=0$为极小值.

3. 利用单调性、极值（最值）证明下列不等式：

(1) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$；

令　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　则　$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

因为在$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时$\tan x>x$即　$\dfrac{\sin x}{\cos x}>x$　　$\sin x>x\cos x$则　$f'(x)<0$

则函数$f(x)$为单调递减函数

则 $f(x)>f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{2}{\pi}$　即　$\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$

(2) 设 p 是大于 **1** 的正整数，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，证明：对任意正数 x，

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geq x$$

证　令 $f(x)=\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}-x$，则 $f'(x)=x^{p-1}-1$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

因为 $f''(x)=(p-1)x^{p-2}$，则 $f''(1)=p-1>0$. 所以当 $x=1$ 时，$f(x)$取极小值，即最小值. 从而当 $x>0$ 时，有 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即$\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geqslant x$.

(3) 设 $0<a<b$，　证明不等式

山东大学高等数学

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

证 先证右边不等式.

设 $\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}\quad(x>a>0)$，因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$$

故当 $x>a$ 时，$\varphi(x)$ 单调减少，又 $\varphi(a)=0$，所以，当 $x>a$ 时，$\varphi(x)<\varphi(a)=0$，即

$$\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}},$$

从而当 $b>a>0$ 时，$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$，即 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

再证左边不等式.

证 设函数 $f(x)=\ln x\ (x>a>0)$，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},$$

由于 $0<a<\xi<b$，故 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$，从而 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$.

(4) 设 $e<a<b<e^2$，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$

证 对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\ a<\xi<b.$$

设 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当 $t>\mathrm{e}$ 时，$\varphi'(t)<0$，所以 $\varphi(t)$ 单调减少，从而

$$\varphi(\xi)>\varphi(\mathrm{e}^2),\quad 即\quad \frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}=\frac{2}{\mathrm{e}^2},$$

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

4. 证明函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

证 只需要证明 $f'(x)>0\ (x>0)$，由

$$f(x)=\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})},\quad f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right],$$

由于 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x$，考虑 $y=\ln x$ 在 $[x,1+x]$ 上满足拉格朗日定理，即存在 $x<\xi<x+1$，使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}.$$

由 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增.

7．设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$，问 a 为何值时，$t(a)$ 最小？并求最小值.

解　$f'(t)=a^t\ln a-a=0$

$a^t\ln a=a,\quad a^t=\dfrac{a}{\ln a},\quad t\ln a=\ln a-\ln\ln a$

$\therefore t(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$

考察函数 $t(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}$ 在 $a>1$ 时的最小值

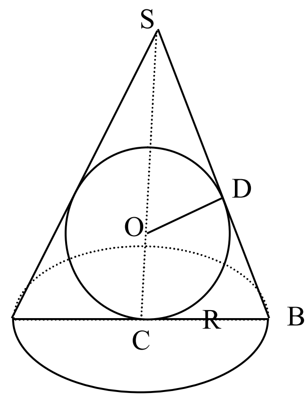
令 $t'(a)=-\dfrac{\frac{1}{a}\frac{1}{\ln a}\ln a-\frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2}=\dfrac{\frac{1}{a}\ln\ln a-\frac{1}{a}}{(\ln a)^2}=\dfrac{\ln\ln a-1}{a(\ln a)^2}=0$

得到　　$a=e^e$

当 $a>e^e$ 时，$t'(a)>0$，当 $a<e^e$ 时，$t'(a)<0$

$\therefore t(e^e)=1-\dfrac{\ln\ln e^e}{\ln e^e}=1-\dfrac{1}{e}$ 为极小值，也是最小值.

8．做半径为 r 的球的外切正圆锥，问此圆锥的高 h 为何值时，其体积 V 最小，并求出最小值.



解　设圆锥底面圆半径为 R

$SC=h,OC=OD=r,BC=R$

$\because \dfrac{BC}{SC}=\dfrac{OD}{SD}\qquad \therefore \dfrac{R}{h}=\dfrac{r}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}$

从而　$R=\dfrac{rh}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}}$

$\therefore$ 圆锥体的体积 $V(h)=\dfrac{\pi}{3}R^2h=\dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{h^2}{h-2r}\qquad (2r<h<+\infty)$

$V'(h)=\dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{h^2-4rh}{(h-2r)^2}\qquad$ 令 $V'(h)=0$，得 $h=4r,h=0$(舍去）

$\because$ 圆锥体的最小体积一定存在，且 $h=4r$ 是 $V(h)$）在 $(2r,+\infty)$ 内的唯一极值点，

山东大学高等数学

从而当 $h=4r$ 时，V 取最小值

$$V(4r)=\frac{\pi r^2}{3}\frac{(4r)^2}{(4r-2r)}=\frac{8\pi r^3}{3}$$

9. 从一块半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形后，再做成一个漏斗（见图 3.4.6）问留下的扇形的圆心角 φ 为多大时，做成的漏斗容积最大？

解：设角度为 φ 时的容积为 V，则漏斗的周长 $L=R\varphi$，则其底面半径 $x=\dfrac{R\varphi}{2\pi}$

$$h=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}}=R\frac{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}{2\pi}$$

则 $V=\dfrac{1}{3}\pi x^2h=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}\dfrac{R\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}{2\pi}=\dfrac{R^2\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}{24\pi^2}$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}[2\varphi\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}+\frac{\varphi^2(-2\varphi)}{2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}]=\frac{R^3}{24\pi^2}[\frac{2\varphi(4\pi^2-\varphi^2)-\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}]$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{8\varphi\pi^2-3\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}$$

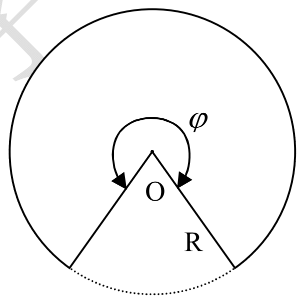


图 3.4.6

当 $V'=0$ 时，V 可取得极值. 解得 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

由题意 $\varphi=0$ 时取最小值0，$\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时取最大值

10．某商品进价为 a（元/件），根据以往经验，当销售价为 b（元/件）时，销售量为 c 件（a,b,c 均为正数，且 $b\geq\frac{4}{3}a$），市场调查表明，销售价每下降 10%，销售量可增加 40%. 现决定一次性降价，试问：当销售价为多少时，可获得最大利润？并求出最大利润.

解　设 p 表示降低后的销售价，x 为增加的销售量，$L(x)$ 为总利润

则 $\dfrac{x}{b-p}=\dfrac{0.4c}{0.1b}$　　则 $p=b-\dfrac{b}{4c}x$

从而　$L(x)=(b-\dfrac{b}{4c}x-a)(c+x)$

对 x 求导，得　$L'(x)=-\dfrac{b}{2c}x+\dfrac{3b}{4}-a$

令 $L'(x)=0$　得　$x_0=\dfrac{(3b-4a)c}{2b}$

由问题的实际意义　$L''(x_0)=-\dfrac{b}{2c}<0$　可知 x_0 为极大值点，也是最大值点

山东大学高等数学

故定价为 $p=b-(\frac{3}{8}b-\frac{a}{2})=\frac{5}{8}b+\frac{a}{2}$(元）时

得最大利润 $L(x_0)=\frac{c}{16b}(5b-4a)^2$(元）

P123 习题 3.5

2. 作出下列函数的图形

(1) $y=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$; (2) $y=\frac{x}{1+x^2}$; (3) $y=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$;

(4) $y=\ln(x^2+1)$; (5) $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$; (6) $y=(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解

(1) ① 函数无竖直渐近线. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}})=\lim\limits_{x\to\infty}x(1-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}})=\infty$，无水平渐近线.

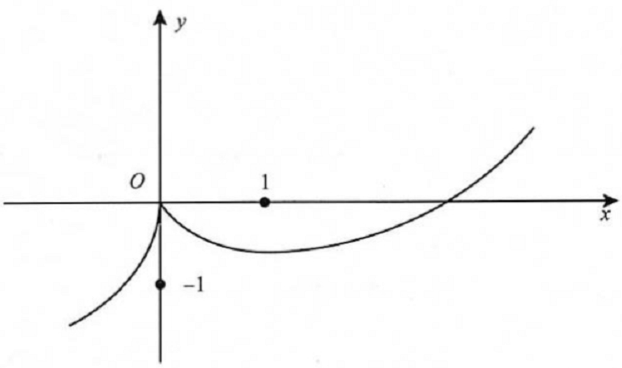
又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}})=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-x)=\infty$，$\therefore$ 无斜渐近线.

② $y'=1-x^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$，当$x_1=0$时$y'$不存在，令 $y'=0$，得$x_2=1$.

$y''=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$，当$x=0$时，$y''$不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	不存在	-	0	+
y''	+	不存在	+	+	+
y		(0,0)		极小值	

作图



山东大学高等数学

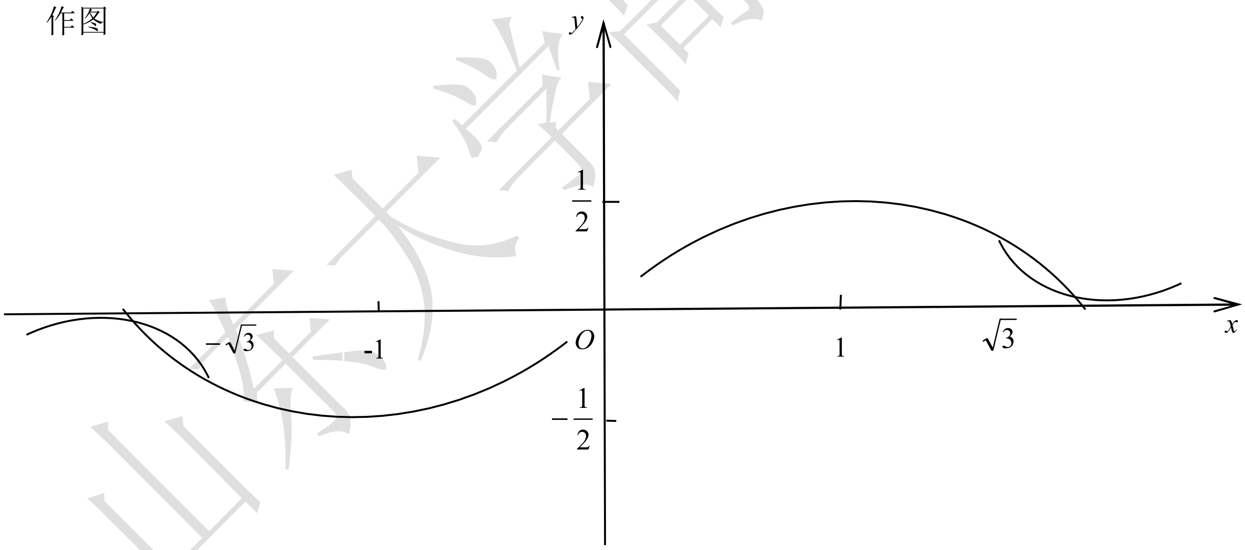
(2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$，$\therefore$ $y=0$ 是水平渐近线无数值渐近线. $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{1+x^2}}{x}=0$，$\therefore$ 无斜渐近线.

$y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，令 $y'=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=1$；

$y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$，令 $y''=0$，得 $x_3=\pm\sqrt{3}$，$x_4=0$.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	0	−	−	−	0	+
y	0		极大值 $y=\dfrac{1}{2}$		拐点 $(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$	

作图



(3) ① 函数 $y=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

而 $y'=-2(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$，$y''=-4(2x^2-4x+1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$.

② 令 $y'=0$ 得驻点 $x=1$；令 $y''=0$，得 $x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，根据上述点将区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成四个部分区间：

山东大学高等数学

$$(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}],[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1],[1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}),[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty).$$

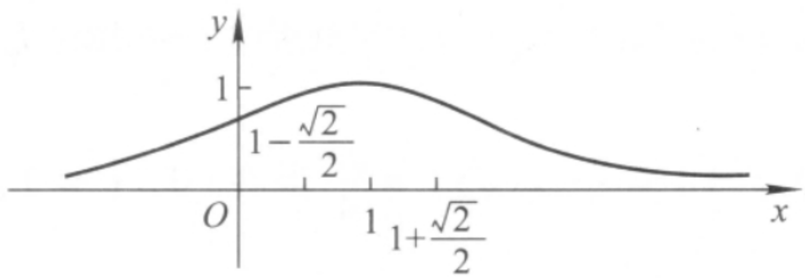
③ 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及极值点和拐点等如下表：

x	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$	1	$\left(1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形		拐点		$(1,1)$		拐点	

④ 由 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-(x-1)^2}=0$ 知图形有一条水平渐近线 $y=0$，图形无铅直渐近线及斜渐近线.

⑤ 由 $f(1)=1, f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}, f(0)=e^{-1}, f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，得图形上的点 $(1,1),\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right),(0,e^{-1}),\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

⑥ 作图：

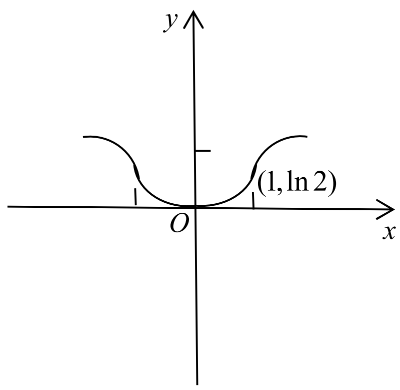


(4) 函数 $y=\ln(x^2+1)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是偶函数，$\therefore$ 只研究 $\{x\,|\,x\geq 0\}$ 部分.

$y'=\frac{2x}{x^2+1}$，$y''=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$，由 $y'=0$ 得 $x_1=0$，由 $y''=0$ 得 $x_2=\pm 1$.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	+	+	+
y''	+	+	0	−
y	极小值 $y=0$		拐点 $(1,\ln 2)$	

作图



(5) ① 函数 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 的定义域 $D=\left\{x \mid x\neq \dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},\ x\in\mathrm{R},\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}$. 由于 $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$ 是偶函数，它的图形关于 y 轴对称，且由于函数是以 2π 为周期的函数，因此可以只讨论 $[0,\ \pi]$ 部分的图形. 求出

$$y'=\frac{-\sin x\cos 2x+\cos x\cdot 2\sin 2x}{\cos^2(2x)}=\frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2(2x)},$$

$$y''=\frac{\cos x(3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3(2x)}.$$

② 令 $y'=0$，得 $x=0$，$x=\pi$；令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{2}$；又函数在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 处无定义. 根据这些点把区间 $[0,\ \pi]$ 分成四个部分区间：$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right],\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right),\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \pi\right]$.

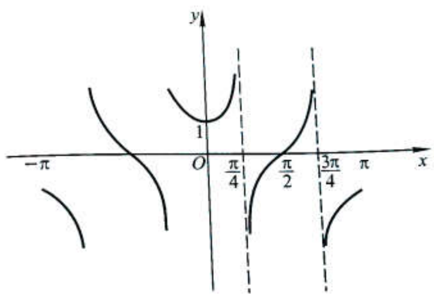
③ 在 $[0,\ \pi]$ 内得各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号，相应曲线弧的升降及凹凸，以及极值点和拐点等如下表：

x	0	$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\left(\dfrac{3\pi}{4},\ \pi\right)$	π
y'	0	+		+	+	+		+	0
y''	+	+		−	+	+		−	−
$y=f(x)$ 的图形	极小				拐点				极大

④ 由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi} =\infty$，知图形有两条铅直渐近线：$x=\dfrac{\pi}{4}$ 及 $x=\dfrac{3\pi}{4}$，图形无水平及斜渐近线.

⑤ 由 $f(0)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ 得图形上的点 $(0,1),\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

⑥ 利用图形对称性及函数的周期性，作图如下.



山东大学高等数学

(6) 函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

①$\because \lim\limits_{x\to 0+0}(x+6)e^{\frac{1}{x}}=+\infty(\lim\limits_{x\to 0-0}(x+6)e^{\frac{1}{x}}=0)$，$\therefore x=0$ 是竖直渐近线，

又 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+6)e^{\frac{1}{x}}=\infty$ 则无水平渐近线

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x(e^{\frac{1}{x}}-1)+6e^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+6\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=6+1=7.$$

$\therefore$斜渐近线为 $y=x+7$

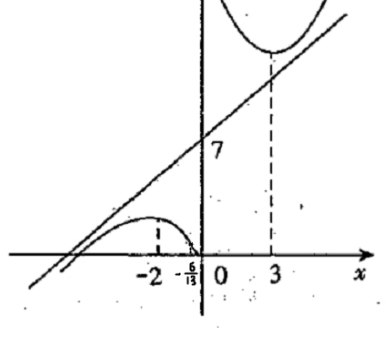
② $y'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x^2-x-6}{x^2}=e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{(x+2)(x-3)}{x^2}$，　　令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2$，$x_2=3$，

$y''=e^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{13x+6}{x^4}$，令 $y''=0$，得 $x_3=-\dfrac{6}{13}$.

列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-\frac{6}{13})$	$-\frac{6}{13}$	$(-\frac{6}{13},0)$	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+	+
y	↗	极大值 $y=\frac{4}{\sqrt{e}}$	↘	拐点 $\left(-\frac{6}{13},\frac{72}{13}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{e^{13}}}\right)$	↘	↘	极小值 $y=9\sqrt[3]{e}$	↗

作图



山东大学高等数学

3. 求曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程.

解

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left((2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1=2\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}-1$$

$$=1.$$

$\therefore$ 斜渐近线为 $y=2x+1$.

山东大学高等数学