第三节　高阶微分方程

一、可降阶的高阶微分方程

(一) $y'' = f(x)$ 型

特点： 右端不含 y, y' 仅是 x 的函数

解法： 将 y' 作为新的未知函数 降阶

令 $z = y' \Rightarrow y'' = z'$ 有

$z' = f(x)$ 变量可分离的一阶方程

积分 $z = \int f(x)dx + c_1$

即 $y' = \int f(x)dx + c_1$

再积分 $y = \int [\int f(x)dx]dx + c_1 x + c_2$

同理　对 n 阶方程　$y^{(n)} = f(x)$

令　$z = y^{(n-1)}$　$\Rightarrow z' = f(x)$

积分得　$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1$

如此连续积分n 次即得原方程的

含有n个任意常数的通解

一般情况　$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n-1)})$

特点:　不显含未知函数　y及 $y', \cdots, y^{(k-1)}$.

解法:　令 $y^{(k)} = z$

则 $y^{(k+1)} = z', \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$

z 的$(n-k)$阶方程

$$z^{(n-k)} = f(x, z, \cdots, z^{(n-k-1)}).$$

求得 z， 将 $y^{(k)} = z$ 连续积分k次，可得通解.

1. $y^{(4)} = \sin x$

解

$$y''' = -\cos x + c_1$$

$$y'' = -\sin x + c_1 x + c_2$$

$$y' = \cos x + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$y = \sin x + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

2. 求方程 $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解.

解 设 $y^{(4)} = P(x)$, $y^{(5)} = P'(x)$

代入原方程 $xP' - P = 0$, （$P \neq 0$）

解线性方程, 得 $P = C_1 x$ 即 $y^{(4)} = C_1 x$,

两端积分,得 $y''' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2$,

$$y = \frac{C_1}{120} x^5 + \frac{C_2}{6} x^3 + \frac{C_3}{2} x^2 + C_4 x + C_5 ,$$

原方程通解为 $y = d_1 x^5 + d_2 x^3 + d_3 x^2 + d_4 x + d_5$

(二) $y'' = f(x, y')$ 型

特点： 右端不含 y

解法： 降阶

令 $y' = p \quad \Rightarrow \quad y'' = p'$ 代入原方程得

$\dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$ 若已求得其通解为

$p = \varphi(x, c_1)$ 回代 $y' = p$ 得

$\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1)$ 变量可分离的一阶方程

积分得 $y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2$

3. 解方程 $(1+x^2)y''=2xy', y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=3$

解 令 $y'=p \Rightarrow (1+x^2)p'=2xp$

分离变量得 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \ln p=\ln(1+x^2)+\ln c_1$$

即 $p=c_1(1+x^2) \quad \Rightarrow y'=c_1(1+x^2)$

由 $y'\big|_{x=0}=3$ 得 $c_1=3$

$\Rightarrow y'=3(1+x^2) \quad \Rightarrow y=x^3+3x+c_2$

由 $y\big|_{x=0}=1 \Rightarrow c_2=1$

故 $y=x^3+3x+1$

4． 解方程 $y''=1+(y')^2$

解 令 $y'=p \Rightarrow y''=p' \quad \Rightarrow \dfrac{dp}{dx}=1+p^2$

$$\Rightarrow \frac{dp}{1+p^2}=dx$$

$$\Rightarrow \arctan p = x + c_1$$

即 $p=\tan(x+c_1)$

$$\Rightarrow y=\int \tan(x+c_1)dx$$

$$=-\ln\cos(x+c_1)+c_2$$

(三) $y'' = f(y, y')$ 型 特点：右端不含 x

令 $y' = \frac{dy}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx}$

由复合函数求导法则得 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

代入原方程得 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$

这是一个关于 y ，p 的一阶方程

若已求得它的通解为

$y' = p = \varphi(y, c_1)$ 变量可分离的一阶方程

积分得 $\int \frac{1}{\varphi(y, c_1)} dy = x + c_2$

即得原方程的通解

5. 解方程 $y'' = y' + (y')^3$

解 令 $y' = p \Rightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

$$\Rightarrow p\frac{dp}{dy} = p(1+p^2)$$

若 $p \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dp}{dy} = 1 + p^2 \Rightarrow \arctan p = y + c_1$

即 $p = \tan(y + c_1) \Rightarrow \dfrac{dy}{\tan(y + c_1)} = dx$

积分得 $\ln\sin(y + c_1) = x + c_2$

即 $\sin(y + c_1) = c_2 e^x$ 或 $y = \arcsin(c_2 e^x) - c_1$

若 $p = 0$ 则 $y = c$ 包含在通解中

6. 求方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解.

解一 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\dfrac{dP}{dy}$,

代入原方程得 $y\cdot P\dfrac{dP}{dy}-P^2=0$, 即 $P(y\cdot\dfrac{dP}{dy}-P)=0$,

由 $y\cdot\dfrac{dP}{dy}-P=0$, 可得 $P=C_1y$,

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=C_1y$, 通解为 $y=C_2e^{c_1x}$.

若 $p=0$ 则 $y=c$ 包含在通解中

故原方程通解为 $y=C_2e^{c_1x}$.

解二 两端同乘不为积分因子 $\dfrac{1}{y^2}$,

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0, \text{故 } y' = C_1 y,$$

从而通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

解三 原方程变为 $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{y'}{y}$,

两边积分,得 $\ln y' = \ln y + \ln C_1$,

即 $y' = C_1 y$,

原方程通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

(四)恰当导数方程

特点 左端恰为某一函数 $\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$

对 x 的导数，即 $\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = 0.$

解法:

$$\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = C,$$

再设法求解这个方程.

7. 求方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解.

解　将方程写成 $\dfrac{d}{dx}(yy') = 0,$

故有　$yy' = C_1,$　　　即　$ydy = C_1dx$,

积分后得通解　$y^2 = C_1x + C_2.$

注意: 这一段技巧性较高, 关键是配导数的方程.

思考题

已知 $y_1 = 3$， $y_2 = 3 + x^2$， $y_3 = 3 + x^2 + e^x$ 都是微分方程

$$(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6(x - 1)$$

的解，求此方程所对应齐次方程的通解.

解答

$\because$ y_1， y_2， y_3 都是微分方程的解,

$\therefore$ $y_3 - y_2 = e^x$， $y_2 - y_1 = x^2$,是对应齐次方程的解,

$\because$ $\dfrac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \dfrac{e^x}{x^2} \neq$ 常数

$\therefore$ 所求通解为 $y = C_1(y_3 - y_2) + C_2(y_2 - y_1)$

$$= C_1 e^x + C_2 x^2.$$

练 习 题

一、求下列各微分方程的通解:

1、$y''' = xe^x$;　　2、$y'' = 1 + y'^2$;

3、$y'' = (y')^3 + y'$;　　4、$y'' + \dfrac{2}{1-y}y'^2 = 0$.

二、求下列各微分方程满足所给初始条件的特解:

1、$y^3 y'' + 1 = 0$, $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$;

2、$y'' - ay'^2 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -1$;

3、$y'' = 3\sqrt{y}$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$.

三、试求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y = \dfrac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线.

练习题答案

一、1、 $y = xe^{x} - 3e^{x} + \frac{C_1}{2}x + C_2 x + C_3$；

2、 $y = -\ln\cos(x + C_1) + C_2$；

3、 $y = \arcsin(C_2 e^{x}) + C_1$；

4、 $y = 1 - \dfrac{1}{C_1 x + C_2 x}$.

二、1、 $y = \sqrt{2x - x^2}$；   2、 $y = -\frac{1}{a}\ln(ax + 1)$；

3、 $y = (\frac{1}{2}x + 1)^4$.

三、 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + 1$.