单调有界准则
第二重要极限

二、单调有界准则及第二重要极限

前 面 讲 过： 数 列 收 敛 的 必 要 条 件 — 收 敛 数 列 必 有 界

反 过 来， 有 界 数 列 是 否 收 敛？

例：① $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$ ② $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$

准 则 II(单 调 有 界 原 理) 单 调 有 界 数 列 必 有 极 限

本结论包含两个方面：

(1) 单调增加有上界数列必有极限；

(2) (2) 单调减少有下界数列必有极限.

几何解释： 设数列单调增加，则只有两种情况：

(1) 沿数轴正向移动到无穷远

(2) 无限接近于某一定点，即数列以A为极限

由于数列单调增加有上界，故只可能发生第二种情况

例1 已知$x_1 = 10$，$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求该极限.

解 先证明单调性：$x_2 = \sqrt{6 + x_1} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow x_1 > x_2$.

设对某k，有$x_k > x_{k+1}$，则 $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} > \sqrt{6 + x_{k+1}} = x_{k+2}$

这说明数列$\{x_n\}$单调递减

再证有界性：　由$x_1 = 10$，且数列$\{x_n\}$单调递减知上界为10，

由$x_n > 0$得下界为0　根据单调有界数列必有极限知数列$\{x_n\}$极限存在

设$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，对等式$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$两端同时求极限得：

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \sqrt{6 + \lim_{n \to \infty} x_n} \qquad a = \sqrt{6 + a} \Rightarrow a = 3 \text{ 或 } a = -2 \text{（舍）}$$

例2 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$，证明$\{x_n\}$极限存在

证

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n+1)+k}=\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)+(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$\therefore\ x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}>0,$$ 故$\{x_n\}$单增

又 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$，所以$\{x_n\}$有上界， 下界为 $x_1=\frac{1}{2}$.

根据单调有界必有极限知$\{x_n\}$极限存在

利用单调有界原理结合夹逼准则推导出

第二重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}}$$

注：

(1) 该 极 限 为 1^{∞} 型

(2) $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u}=\mathrm{e}$　　$\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

等价形式

例题

1. $$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=\lim_{x\to\infty}[1+(-\frac{1}{x})]^{(-x)\cdot(-1)}$$

$\lim[f(x)]^{\alpha}=[\lim f(x)]^{\alpha}$

$$=\lim_{x\to\infty}\{[1+(-\frac{1}{x})]^{-x}\}^{-1}=\{\lim_{x\to\infty}[1+(-\frac{1}{x})]^{-x}\}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

2. $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{3x+5}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{3x}\cdot(1+\frac{1}{x})^{5}$$

乘积运算法则

$$=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}]^{3}\cdot[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})]^{5}=\mathrm{e}^{3}\cdot 1^{5}=\mathrm{e}^{3}$$

$$3.\quad \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}$$

$$\lim[f(x)]^{\alpha} = [\lim f(x)]^{\alpha}$$

$$= [\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2} \quad = e^{-2}$$

$$\boxed{\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e}$$

$$4.\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 6} = e^{6}$$

$$5.\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

$$6.\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1} = 1$$

$$7.\quad \lim_{x\to+\infty}\left[1-\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)-\ln x}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+x}{x}=0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\{1-2[\ln(1+x)-\ln x]\}^{\frac{1}{\ln(1+x)-\ln x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\{1-2[\ln(1+x)-\ln x]\}^{\frac{1}{-2[\ln(1+x)-\ln x]}\cdot(-2)}$$

$$= \mathrm{e}^{-2}$$

8. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{2t}$，则 $f(\ln 2)=$

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 0

解 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{2t}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\frac{t}{x}\cdot 2x}$

$$=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{\frac{t}{x}}\right]^{2x}=e^{2x}\qquad f(\ln 2)=4$$

B

代换的思想 —贯彻整个求极限的始终

已知 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{f(3x)} = 2$，求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(-2x)}{x}$.

解 $\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{f(3x)} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(u)}{u} = \dfrac{1}{6}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(-2x)}{x} = -2\lim_{x \to 0} \frac{f(-2x)}{-2x} = -\frac{1}{3}$$

专题——分段函数求极限

1.设 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1\ ,x>0\\ 0\ ,x=0,\\ -1,x<0\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sgn}(x)$

解

$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{sgn}(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\mathrm{sgn}(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{sgn}(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{sgn}(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sgn}(x)$不存在

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}, & x<1\\[2ex] \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{ax}{x-1}}, & x>1\end{cases}$，求 a 使 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在

解 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(1+\sqrt{2-x})}{x-1}=2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{ax}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{ax}{x-1}}$$

$$=\left[\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right]^{a}=\mathrm{e}^{a}$$

由 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 解得：$a=\ln 2$

3. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{\frac{1}{x}}+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x\sin\dfrac{1}{x})=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在,但不为∞

等价形式：

$\lim\limits_{x\to \infty} e^{x}$不存在,但不为$\infty$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 不存在

解 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1$

由于 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \neq \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, 所以 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$不存在

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

分段函数

解

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

思考题

设 $a_1 = 2, \cdots, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)\ \ (n = 1, 2, \cdots)$,

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求此极限.

【54】设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，其中 $a>0$，$x_0>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$，所以 $\{x_n\}$ 下方有界，

又因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{(\sqrt{a})^2}\right)=1$，所以 $\{x_n\}$ 单调减少. 根据单调有界数列必有极限知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，即 $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{a}{l}\right)$，所以 $l=\sqrt{a}$，

也即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

练习

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+k}\right)^{x}=e^{4}$，$k=$ ______ .

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{3}}=$ ______ .

3. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n}-1}{x^{n}+1}(x>0)$，求 $f(x)$.

4. $f(x)=\begin{cases}1-2x^{2} & x<-1\\ x^{3}, & -1\le x\le 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

练习答案

1. $k=-3$

2. $\frac{1}{2}$

3. $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1\\ 0, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$

4. $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\le x\le 8\\ \frac{x+16}{12}, & x>8\end{cases}$