

第三节 高阶微分方程

一、可降阶的高阶微分方程

(一) $y'' = f(x)$ 型

特点：右端不含 y, y' 仅是 x 的函数

解法：将 y' 作为新的未知函数 降阶

$$\text{令 } z = y' \Rightarrow y'' = z' \quad \text{有}$$

$$z' = f(x) \quad \text{变量可分离的一阶方程}$$

$$\text{积分} \quad z = \int f(x) dx + c_1$$

$$\text{即} \quad y' = \int f(x) dx + c_1$$

$$\text{再积分} \quad y = \int [\int f(x) dx] dx + c_1 x + c_2$$

同理 对 n 阶方程 $y^{(n)} = f(x)$

令 $z = y^{(n-1)} \Rightarrow z' = f(x)$

积分得 $y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1$

如此连续积分 n 次即得原方程的
含有 n 个任意常数的通解

一般情况 $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)})$

特点: 不显含未知函数 y 及 $y', \dots, y^{(k-1)}$.

解法: 令 $y^{(k)} = z$

则 $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$.

z 的 $(n-k)$ 阶方程

$$z^{(n-k)} = f(x, z, \dots, z^{(n-k-1)}).$$

求得 z , 将 $y^{(k)} = z$ 连续积分 k 次, 可得通解.

1. $y^{(4)} = \sin x$

解 $y''' = -\cos x + c_1$

$$y'' = -\sin x + c_1 x + c_2$$

$$y' = \cos x + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$y = \sin x + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

2. 求方程 $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解.

解 设 $y^{(4)} = P(x)$, $y^{(5)} = P'(x)$

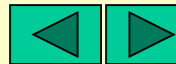
代入原方程 $xP' - P = 0$, ($P \neq 0$)

解线性方程, 得 $P = C_1 x$ 即 $y^{(4)} = C_1 x$,

两端积分, 得 $y''' = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$,

$$y = \frac{C_1}{120} x^5 + \frac{C_2}{6} x^3 + \frac{C_3}{2} x^2 + C_4 x + C_5,$$

原方程通解为 $y = d_1 x^5 + d_2 x^3 + d_3 x^2 + d_4 x + d_5$



(二) $y'' = f(x, y')$ 型

特点： 右端不含 y

解法： 降阶

令 $y' = p \Rightarrow y'' = p'$ 代入原方程得

$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$ 若已求得其通解为

$p = \varphi(x, c_1)$ 回代 $y' = p$ 得

$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1)$ 变量可分离的一阶方程

积分得 $y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2$

3. 解方程 $(1+x^2)y'' = 2xy', y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$

解 令 $y' = p \Rightarrow (1+x^2)p' = 2xp$

分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \ln p = \ln(1+x^2) + \ln c_1$$

即 $p = c_1(1+x^2) \Rightarrow y' = c_1(1+x^2)$

由 $y'|_{x=0} = 3$ 得 $c_1 = 3$

$$\Rightarrow y' = 3(1+x^2) \Rightarrow y = x^3 + 3x + c_2$$

由 $y|_{x=0} = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

故 $y = x^3 + 3x + 1$

4. 解方程 $y'' = 1 + (y')^2$

解 令 $y' = p \Rightarrow y'' = p' \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 1 + p^2$

$$\Rightarrow \frac{dp}{1 + p^2} = dx$$

$$\Rightarrow \arctan p = x + c_1$$

即 $p = \tan(x + c_1)$

$$\Rightarrow y = \int \tan(x + c_1) dx$$

$$= -\ln \cos(x + c_1) + c_2$$

(三) $y'' = f(y, y')$ 型 特点: 右端不含 x

$$\text{令 } y' = \frac{dy}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

由复合函数求导法则得 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

代入原方程得 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

这是一个关于 y, p 的一阶方程

若已求得它的通解为

$y' = p = \varphi(y, c_1)$ 变量可分离的一阶方程

积分得 $\int \frac{1}{\varphi(y, c_1)} dy = x + c_2$

即得原方程的通解

5. 解方程 $y'' = y' + (y')^3$

解 令 $y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$

$$\Rightarrow p \frac{dp}{dy} = p(1 + p^2)$$

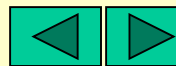
若 $p \neq 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \Rightarrow \arctan p = y + c_1$

即 $p = \tan(y + c_1) \Rightarrow \frac{dy}{\tan(y + c_1)} = dx$

积分得 $\ln \sin(y + c_1) = x + c_2$

即 $\sin(y + c_1) = c_2 e^x$ 或 $y = \arcsin(c_2 e^x) - c_1$

若 $p = 0$ 则 $y = c$ 包含在通解中



6. 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解一 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p \frac{dP}{dy}$,

代入原方程得 $y \cdot P \frac{dP}{dy} - P^2 = 0$, 即 $P(y \cdot \frac{dP}{dy} - P) = 0$,

由 $y \cdot \frac{dP}{dy} - P = 0$, 可得 $P = C_1 y$,

$\therefore \frac{dy}{dx} = C_1 y$, 通解为 $y = C_2 e^{c_1 x}$.

若 $p = 0$ 则 $y = c$ 包含在通解中

故原方程通解为 $y = C_2 e^{c_1 x}$.

解二 两端同乘不为积分因子 $\frac{1}{y^2}$,

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) = 0, \text{ 故 } y' = C_1 y,$$

从而通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

解三 原方程变为 $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$,

两边积分,得 $\ln y' = \ln y + \ln C_1$,

即 $y' = C_1 y$,

原方程通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

(四)恰当导数方程

特点 左端恰为某一函数 $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

对 x 的导数, 即 $\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$.

解法:

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C,$$

再设法求解这个方程.

7. 求方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解.

解 将方程写成 $\frac{d}{dx}(yy') = 0$,

故有 $yy' = C_1$, 即 $ydy = C_1dx$,

积分后得通解 $y^2 = C_1x + C_2$.

注意: 这一段技巧性较高, 关键是配导数的方程.

思考题

已知 $y_1 = 3$, $y_2 = 3 + x^2$, $y_3 = 3 + x^2 + e^x$

都是微分方程

$$(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6(x - 1)$$

的解, 求此方程所对应齐次方程的通解.

解答

$\because y_1, y_2, y_3$ 都是微分方程的解,

$\therefore y_3 - y_2 = e^x$, $y_2 - y_1 = x^2$, 是对应齐次方程的解,

$$\therefore \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{e^x}{x^2} \neq \text{常数}$$

\therefore 所求通解为 $y = C_1(y_3 - y_2) + C_2(y_2 - y_1)$

$$= C_1 e^x + C_2 x^2.$$

练 习 题

一、求下列各微分方程的通解：

$$1、y''' = xe^x;$$

$$2、y'' = 1 + y'^2;$$

$$3、y'' = (y')^3 + y';$$

$$4、y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0.$$

二、求下列各微分方程满足所给初始条件的特解：

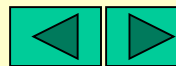
$$1、y^3 y'' + 1 = 0, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0;$$

$$2、y'' - ay'^2 = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -1;$$

$$3、y'' = 3\sqrt{y}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2.$$

三、试求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线

$$y = \frac{x}{2} + 1 \text{ 相切的积分曲线 .}$$



练习题答案

$$\text{一、 1、 } y = xe^x - 3e^x + \frac{C_1}{2}x + C_2x + C_3;$$

$$2、 y = -\ln \cos(x + C_1) + C_2;$$

$$3、 y = \arcsin(C_2e^x) + C_1;$$

$$4、 y = 1 - \frac{1}{C_1x + C_2x}.$$

$$\text{二、 1、 } y = \sqrt{2x - x^2};$$

$$2、 y = -\frac{1}{a}\ln(ax + 1);$$

$$3、 y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4.$$

$$\text{三、 } y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + 1.$$

