六、广义积分

常义积分 有界函数在有限区间上的积分。

广义积分 $\begin{cases} \text{1. 积分区间为无穷区间（又称无穷积分）；} \\ \text{2. 被积函数为无界函数（又称瑕积分）.} \end{cases}$

（一） 无穷限的广义积分

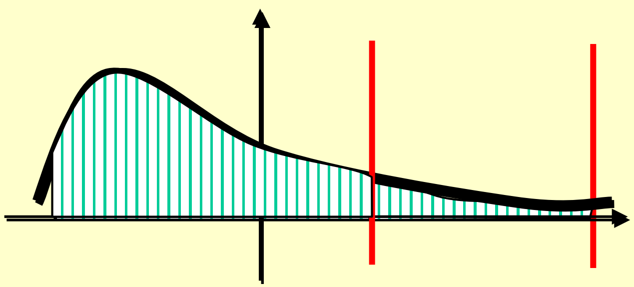
定义1 设 $f(x) \in C[a,+\infty), \forall b > a$. 如果

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \text{ 存在。}$$

则称这极限为$f(x)$在$[a,+\infty)$的广义积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$ (1)



这时也称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**；

如果上述极限（1）不存在，$f(x)$在$[a,+\infty)$上的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 就没有意义，则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，这时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不再表示数值了.

类似地　设$f(x) \in C(-\infty, b]$, $\forall a < b$. 如果

$$I_1 = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$ 存在。

则称这极限为$f(x)$在$(-\infty, b]$的广义积分。记作$\int_{-\infty}^b f(x)dx$,

即 $$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛;

如果上述极限不存在，则称广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散.

设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 如果广义积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称上述两广义积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 的广义积分，记作

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

即
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

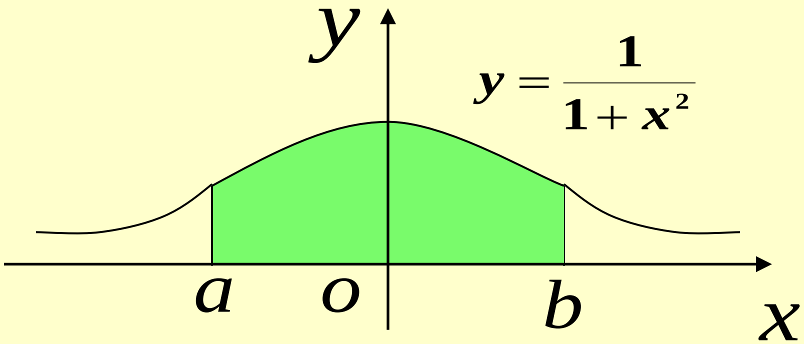
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx. \quad (3)$$

这时也称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；否则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

注: 两个广义积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 与 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 中有一个发散，广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例1 计算广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$



解　由 (3) 式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\arctan x\right]_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan x\right]_{0}^{b}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \arctan a + \lim_{b\to+\infty} \arctan b$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

注意：$$\lim_{b\to+\infty}[F(x)]_a^b=[F(x)]_a^{+\infty}$$

不能写作 $$[F(x)]_a^{+\infty}\cancel{=}F(+\infty)-F(a)$$

可写为 $$[F(x)]_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$$

即 $$\int_a^{+\infty}f(x)dx=[F(x)]_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$$

同理 $$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=[F(x)]_{-\infty}^{b}=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=[F(x)]_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

上例可写作：$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\pi$$

但不能写作：$$=\arctan(+\infty)\cancel{-}\arctan(-\infty)=\pi$$

例2 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt \quad (p>0)$.

解:

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-pt}dt$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b td(e^{-pt})$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[te^{-pt}\right]_0^b - \int_0^b e^{-pt}dt\right\}$$

$$= -\frac{1}{p}\left[te^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p^2}\left[e^{-pt}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{p}\left[\lim_{t\to+\infty} te^{-pt} - 0\right] - \frac{1}{p}\Big[\lim_{t\to+\infty}$$

$$= \frac{1}{p^2}.$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[F(x)\right]_a^b = \left[F(x)\right]_a^{+\infty}$$

$$\lim_{t\to+\infty} te^{-pt} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{pe^{pt}} = 0$$

例3　证明

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\quad (a>0)$$ 当$p>1$时收敛；当$p\le 1$时发散。

解：当 $p=1$ 时

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\left[\ln x\right]_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln a=+\infty;$$

当$p\neq 1$时

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

故：当$p>1$时，广义积分收敛于$\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$；

当$p\le 1$时，广义积分发散。

P15

（二）无界函数的广义积分（瑕积分）

定义2 设 $f(x) \in C(a,b]$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty.\forall \varepsilon>0,$

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在。

则称此极限为$f(x)$在$(a，b]$的广义积分，记为

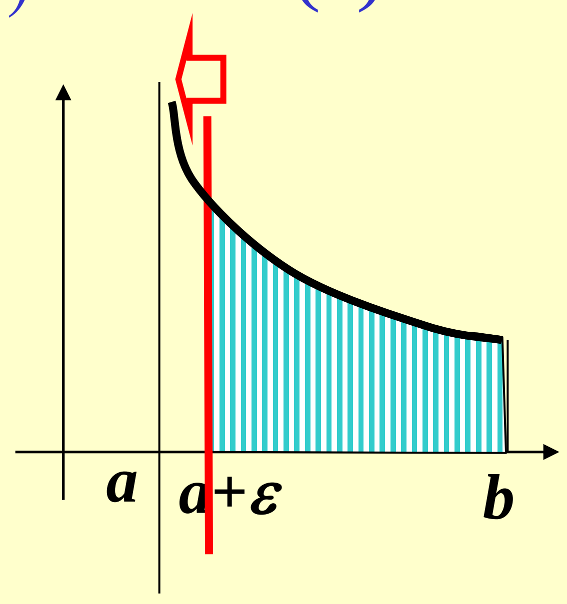
$$\int_a^b f(x)dx,$$

即： $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (4)$$

这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

如果上述极限 不存在,

则称广义积分$\int_a^b f(x)dx$ 发散.



类似地，设 $f(x)\in C[a,b)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. 若对$\forall\eta>0$, 极限

$$\lim_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx \text{ 存在，}$$

则称此极限为$f(x)$在$[a，b)$的广义积分, 记为

$$\int_a^b f(x)dx,$$

即：
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx \qquad (5)$$

这时也称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；

若上述极限不存在，则称广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

设：$f(x)\in C[a, c)\cup(c, b]$，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，

若两个广义积分$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$ $\boxed{\text{都收敛}}$，则定义

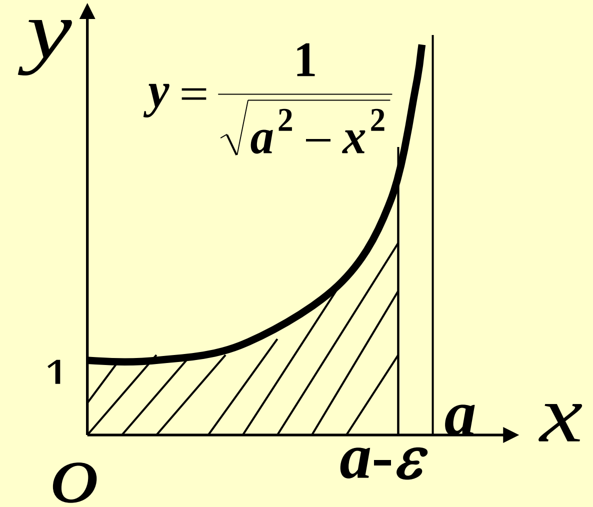
$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\\ &=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\eta\to+0}\int_{c+\eta}^b f(x)dx;\end{aligned}} \quad (6)$$

否则称广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

注：两个广义积分$\int_a^c f(x)dx$与$\int_c^b f(x)dx$中有一个发散

广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

例4 .计算广义积分 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$



解 $\because \lim\limits_{x\to a-0}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty,$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}-0\right]=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a=\frac{\pi}{2}.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$的几何意义是:

位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$之下，x轴之上，直线$x=0$与$x=1$之间

的图形面积。

例5 讨论广义积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 的收敛性。

解 $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^2}\in C[-1,0)\cup(0,1],\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$

$$\because \int_0^1\frac{1}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=+\infty,$$

所以广义积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ 发散，广义积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 也发散。

如果忽略了$x=0$是瑕点，就会有下面的错误做法：

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}\cancel{=}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2.$$

例6 求$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$. $\Longrightarrow$ 发散

解: $\because \int_0^1\frac{dx}{x^3}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{x^2}\right]_\varepsilon^1$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]=+\infty$$

$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$发散.

例7 求$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

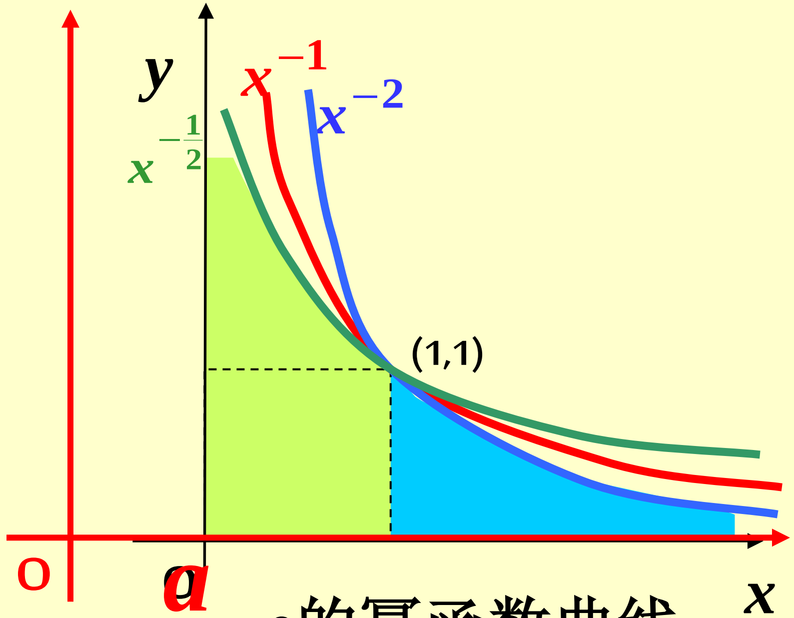
解: $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[2-2\sqrt{\varepsilon}\right]=2$$

p-积分与q-积分小结：

$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ $(q>0)$ 当$q<1$时 收敛；当$q\geq 1$时 发散。

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ 当$p>1$时 收敛；当$p\leq 1$时 发散。



$\alpha<0$的幂函数曲线

以“形象记忆法”描绘图像，与$1/x$图像比较，若“收口”收的快，则收敛。

对广义积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 的敛散性，可以类似地讨论。

例8　证明广义积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；当 $q \geq 1$ 时发散.

证　当 $q=1$ 时，$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\ln(x-a)\right]_{a+\varepsilon}^b = \ln(b-a) - \lim_{x \to a+0} \ln(x-a) = +\infty$$

当 $q \neq 1$ 时；

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q} - \lim_{x \to a+0}\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1, \\ +\infty, & q>1. \end{cases}$$

$\therefore \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；当 $q \geq 1$ 时发散.

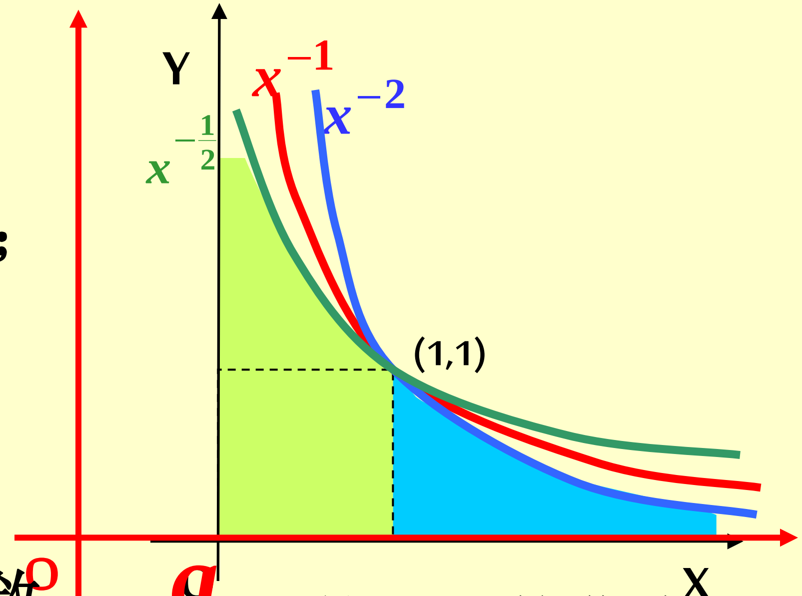
例9.下列结论正确的是

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛；

(B) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 都发散；

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 发散，$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛；

(D) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛，$\int_0^1\frac{dx}{x(x+1)}$ 发散。



α<0的幂函数曲线

（2005年研究生入学试题）

（D）