导数应用习题课3(函数作图)(14题)

1.设函数$f(x)$在$[0,1]$上满足$f'''(x)>0$，且$f''(0)=0$.则$f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$的大小顺序为

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

2. 证明：$e^x>1+x\ (x\neq 0)$.

3.设函数$f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且$f(0)=0$, $f''(x)>0$.

试证：$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,1)$上单增.

4.设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点$x=a$处

(A) $f(x)$的导数存在，且$f'(a)\neq 0$　(B) $f(x)$取得极大值

(C) $f(x)$取得极小值　(D) $f(x)$的导数不存在

5.设函数$f(x)$满足关系式$f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且$f'(0)=0$，则

(A) $f(0)$是$f(x)$的极大值

(B) $f(0)$是$f(x)$的极小值

(C) 点$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

(D) $f(0)$不是$f(x)$的极值，点$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

6.设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解，若$f(x_0)>0$，且$f'(x_0)=0$，试判定x_0是否是$f(x)$的极值点？如果x_0为$f(x)$的极值点，是极大值点，还是极小值点？

7.设$f(x)$在x_0的某一邻域内存在连续的三阶导数，

且$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，而$f'''(x_0)\neq 0$，

试证$(x_0,f(x_0))$是曲线的拐点，而x_0不是的极值点.

8.已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(1)函数的增减区间及极值；

(2)函数图形的凹凸区间及拐点；

(3)函数图形的渐近线.

9.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，

则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在区间内的根是

(A) 0个　(B) 1个　(C) 2个　(D) 无穷多个

10.若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0<f(x)<1$，在 $(0,1)$ 内可导，

且 $f'(x)\neq 1$. 证明：方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的根.

11.设在$[0,+\infty)$上函数$f(x)$有连续导数，

且$f'(x) \geq k > 0$，$f(0) < 0$，

证明：$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点.

12.讨论方程$\ln x = ax \quad (a > 0)$有几个实根，

并指出这些根所在的范围.

13.证明：当$x > 0$，$y > 0$，且$x \neq y$时，

$$x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}.$$

14.若$0 \leq x \leq 1$，$p > 1$，证明：$2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$.

答案

1. 解　由于 $f'''(x) > 0 \quad x \in (0,1)$知　$f''(x)$在$(0,1)$上单增. 即当$x > 0$时，$f''(x) > f''(0) = 0$

故$f'(x)$在$(0,1)$上单增.而函数$f(x)$在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理条件，则至少存在

一点$\xi \in (0,1)$使　$$f(1) - f(0) = f'(\xi)$$

再由$f'(x)$在$(0,1)$上单增.，故当$0 < \xi < 1$时有　$f'(0) < f'(\xi) < f'(1)$

即　$f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

故选(B).

2. 证明：设$f(t) = e^t$,在$[0,x]$或$[x,0]$上，$e^x - e^0 = e^{\xi}(x-0)$，即$e^x = 1 + xe^{\xi}$

当　$x > 0$　时，$\xi > 0$，$e^{\xi} > 1$，故　$e^x > 1 + x$;

当　$x < 0$　时，$\xi < 0$，$e^{\xi} < 1$，$xe^{\xi} > x$，故　$e^x > 1 + x$;

3. 证明　设$F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$　则$F'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

令$G(x) = xf'(x) - f(x)$　$G'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) > 0$

故$G(x)$在$(0,1)$内单增，即当$x > 0$时，有$G(x) > G(0) = 0$

所以　$F'(x) = \dfrac{G(x)}{x^2} > 0$　即　$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,1)$上单增.

4.解 因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)}=0$，

即 $f'(a)=0$. 又在 a的某一去心邻域内有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，即 $f(x)-f(a)<0$，

所以 $f(x)$在 $x=a$处取极大值，所以只有(B)项正确.

5. 解 在关系式中令 $x=0$得：$f''(0)=0$

$f''(x)=x-[f'(x)]^2$ 两边关于 x求导得：$f'''(x)=1-2f'(x)f''(x)$

令 $x=0$ ，则 $f'''(0)=1>0$

故 $(0, f(0))$是曲线 $y=f(x)$拐点. 所以应选 (C).

6. 解 由于 $y=f(x)$为 $y''-2y'+4y=0$的解，从而

$f''(x)-2f'(x)+4f(x)=0$

特别的，当 $f(x_0)>0$时，上述方程可以化为

$f''(x_0)+4f(x_0)=0$ $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$

由极值得第二充分条件可以得知，x_0为的极值点，且为极大值点.

即 $f(x)$在 x_0点取得极大值.

7. 解 不妨设 $f'''(x_0) > 0$,

$$f'''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0.$$

$\therefore$ 根据保号性存在 x_0 的某邻域，使：$\dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$,

即 $x > x_0$ 时，$f''(x) > 0$; $x < x_0$ 时，$f''(x) < 0$.

从而 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

而 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$,

故 $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$,

即 $x > x_0$ 时，$f(x) > f(x_0)$; $x < x_0$ 时，$f(x) < f(x_0)$.

故 x_0 不是极值点.

8. 解　所给函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$y'=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$ 令 $y'=0$，得驻点 $x=0$ 及 $x=3$

$$y''=\frac{6x}{(x-1)^4}$$ 令 $y''=0$，得 $x=0$　列表

由此可知，(1)函数的单调区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$，单调减少区间为 $(1,3)$；

极小值为 $y=\dfrac{27}{4}$

(2)函数图形在区间 $(-\infty,0)$ 内是凸的，在区间 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 内是凹的，

拐点为 $(0,0)$

(3)由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$ 知，$x=1$ 是函数图形的铅直渐近线

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{y}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$　$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=2$

故 $y=x+2$ 是函数图形的斜渐近线.

9. 解　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$

$F(a)=\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0$，$F(b)=\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t>0$.

根据零点定理知，在 (a,b) 内至少存在一个根 .

又因为 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2>0$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内单调 .

所以 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且只有一个根 .

所以应选 (B) .

10. 证明 由于 $0 < f(x) < 1$，故 $f(x) - 1 < 0$.

设 $F(x) = f(x) - x$ 则 $F(1) = f(1) - 1 < 0$ $F(0) = f(0) > 0$

故由零点存在定理知至少存在一个 $\xi \in (0,1)$ 使 $F(\xi) = 0$.

下证唯一性

设存在 $\xi_1 \neq \xi_2$ 使 $f(\xi_1) = \xi_1$ $f(\xi_2) = \xi_2$

由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$

使 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = 1$ 此与 $f'(x) \neq 1$ 矛盾

故方程 $f(x) = x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的根.

11. 证　在 $[0,+\infty)$ 上，由 $f'(x) \geq k$，得 $\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^x k\mathrm{d}x$.

即 $f(x) \geq kx + f(0)$. 取 $x_1 > -\dfrac{f(0)}{k} > 0$，有 $f(x_1) > k[-\dfrac{f(0)}{k}] + f(0) = 0$

因 $f'(x_1) > 0$，由题设 $f(0) < 0$，

根据零点存在定理，必存在 $x_0 \in (0, x_1)$，使 $f(x_0) = 0$

因 $f'(x) \geq k > 0$，故 $f(x)$ 严格单调增加，$x \in (0,+\infty)$.

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

12. 解　设 $f(x)=\ln x-ax\quad(a>0)\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$ 得驻点 $x=\dfrac{1}{a}$.

当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$ 即 $f(x)$ 单增. 当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$ 即 $f(x)$ 单减.

因此 $f(\dfrac{1}{a})=\ln\dfrac{1}{a}-1$ 为 $f(x)$ 极大值，亦为最大值.

又可判断当 $x\to 0^+$ 或 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$.

从而依据连续函数的介值定理得

(1)当 $f(\dfrac{1}{a})>0$ 即 $a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，曲线 $f(x)$ 与 x 轴在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 与 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上各有一交点，即有两个实根.

(2)当 $f(\dfrac{1}{a})=0$ 即 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，曲线 $f(x)$ 与 x 轴仅有一交点，即仅有一个实根.

(3)当 $f(\dfrac{1}{a})<0$ 即 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，曲线 $f(x)$ 与 x 轴无交点，即无实根.

13. 证明　令 $f(x)=x\ln x$　$f'(x)=\ln x+1$　$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0\quad(x>0)$

故 $f(x)$在(x,y)或(y,x)上曲线弧是凹的.

于是 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\dfrac{x+y}{2})$

$$\frac{1}{2}[x\ln x+y\ln y]>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$$

所以 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$.

14. 证　令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，则 $f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$

$f'(\dfrac{1}{2})=0$, $f(\dfrac{1}{2})=\alpha^{1-p}$. 当 $0\le x<\dfrac{1}{2}$时，$f'(x)<0$.

当 $\dfrac{1}{2}<x\le 1$时，$f'(x)>0$. $\therefore$ $f(\dfrac{1}{2})$为极小值,

只此一个极值点,故也是最小值

$\because$ $f(0)=f(1)=1$，所以 $f(x)$的最大值为1

所以 $2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le 1$.