第二章 导数与微分测试题

满分：100 分　时间：120 分钟

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1. 下列命题正确的是(　　)

(A) $f(x)$在点x_0连续的充要条件是$f(x)$在点x_0可导

(B) 若$f'(x)=x^2$(偶函数)，则$f(x)$必是奇函数

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$(常数)，则$f'(0)=a$

(D) 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\ln(1-x^2)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则$f'(0)=-1$

2. 设$f(x)$在x_0处可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=$(　　)

(A) $-f'(x_0)$　(B) $f'(-x_0)$　(C) $f'(x_0)$　(D) $2f'(x_0)$

3. 设函数$f(x)$在x_0可导，则$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=$(　　)

(A) $f'(x_0)$　(B) $-2f'(x_0)$　(C) ∞　(D) 不能确定

4. 曲线$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$在点$(0,1)$处的法线方程为(　　)

(A) $y+2x-1=0$　(B) $y-2x-1=0$　(C) $y+2x+1=0$　(D) $y+2x-2=0$

5. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中$n$为正数，则 $f'(0)=$(　　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　(B) $(-1)^n(n-1)!$　(C) $(-1)^{n-1}n!$　(D) $(-1)^n n!$

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1. 设函数 $y=f(x)$由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$ _____ .

2. 设方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ _____ .

3. 设$y=y(x)$是有方程$\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$确定的隐函数，则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ____ .

4. 已知 $f(x)=(1+x^2)^{\tan x}$，则 $f'(x)=$ _________ .

5. 设函数 $f(x)$在$x=2$的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则$f'''(2)=$ _________ .

三、计算、证明题(1-10 题每题 6 分，第 11 题 10 分，共 70 分)

1．设 $f'(x)=\sin\sqrt{x}\ (x>0)$，又 $y=f(e^{2x}\cdot x^2)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导(即 $f'(0)$ 存在)，且 $f(x)=f(0)+2x+a(x)$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(x)}{x}=0$ ，求 $f'(0)$.

3.已知 $\begin{cases} x=\ln(1+e^{2t}), \\ y=t-\arctan e^{t}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4.试确定常数 a、b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} 1+\ln(1-2x), & x\le 0 \\ a+be^{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，并求出此时的 $f'(x)$.

5.若 $f(1)=0$，$f'(1)$存在，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

6.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且对任意x_1,x_2，有$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，$f(x)=1+xg(x)$,其中$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$，证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处可导.

7.已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定．设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\dfrac{dz}{dx}\Big|_{x=0}$，$\dfrac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

8.设$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $(\beta>0)$，试讨论在什么条件下，$f'(x)$在$x=0$处连续.

9.设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，试讨论$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的不可导点.

10. 设$y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$，求$y^{(n)}\ (n\ge 2)$.

11. 设对任意实数 $0<\lambda<1$，有 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

试证：若 $x_1<x_2$ 且在点 x_1、x_2 处可导，则有

$$f'(x_1)\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge f'(x_2)$$

四、附加题（1-3 题每题 4 分，4 题 8 分，共 20 分）

1. 设函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，求 $f'(-1)$.

2. 已知 $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$，求 y'.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，求 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

4.（Ⅰ）设函数 $u(x)$，$v(x)$ 可导，利用导数定义证明：

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

（Ⅱ）设函数 $u_1(x)$，$u_2(x)$，$u_3(x)$，$\cdots$，$u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，

写出 $f(x)$ 的求导公式.

答案:

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1.D　　2.A　　3.D　　4.A

5.A

详细解答:

5.

解：$f'(x)=e^{x}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+(e^{x}-1)(2e^{2x})(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots$

$(e^{x}-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(ne^{nx})$

当 $x=0$时 $e^{x}-1=0$

故 $f'(0)=1\bullet(1-2)(1-3)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1. 2　　**2.** $-\dfrac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}$　　**3.** $\dfrac{2(x^{2}+y^{2})}{(x-y)^{3}}$

4. $(1+x^{2})^{\tan x}[\sec^{2}x\ln(1+x^{2})+\dfrac{2x}{1+x^{2}}\tan x]$.　　**5.** $2e^{3}$

详细解答:

1.

解：将 $x=0$代入方程得

$$\cos 0=-\ln f(0)+0+1,$$

即 $\ln f(0)=0,\therefore f(0)=1$.

方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$两端同时对 x

求导得

$$-[f(x)+xf'(x)]\cdot\sin[xf(x)]+\frac{f'(x)}{f(x)}-1=0.$$

将 $x=0$代入上式得 $f'(0)=1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{1}{2}(\frac{2}{n}-0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0)=2.$$

2.解　方程两边对　x　求导，得　$e^{xy}\cdot(y+xy')+2yy'=-\sin x$

整理得　$(xe^{xy}+2y)y'=-ye^{xy}-\sin x$,

从而　$y'=-\dfrac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}$.

3.解　对方程两边对x求导

$$\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}=e^{\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2},\quad 即\ \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=e^{\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2+y^2}$$

把$\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$带入上式得$x+yy'=xy'-y$，所以$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}$$

把$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$带入上式，得$y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

【评注】计算本题一阶导数时，也可先对方程两边取对数再求导，这样计算比较简单：$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\ln e^{\arctan\frac{y}{x}}$，即　$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$

对方程两边对x求导：$\dfrac{1}{2}\quad\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\dfrac{xy'-y}{x^2}$，解得　$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

4.解　两边取对数，得　$\ln y=\tan x\cdot\ln(1+x^2)$,

等式两端同时关于　x　求导得　　$\dfrac{y'}{y}=\sec^2 x\ln(1+x^2)+\dfrac{\tan x\cdot 2x}{1+x^2}$,

所以　$y'=(1+x^2)^{\tan x}[\sec^2 x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x}{1+x^2}\tan x]$.

5.

解：由$f'(x)=e^{f(x)}$,得

$f''(x)=e^{f(x)}f'(x)=[e^{f(x)}]^2$

$f'''(x)=e^{f(x)}[f'(x)]^2+e^{f(x)}f''(x)$

$\qquad=e^{f(x)}[e^{f(x)}]^2+e^{f(x)}[e^{f(x)}]^2$

$\qquad=2[e^{f(x)}]^3$

所以$f'''(2)=2[e^{f(2)}]^3=2e^3$

三、计算、证明题(1-10 题每题 6 分，第 11 题 10 分，共 70 分)

1.解　对　x　求导得　$y'=f'(e^{2x}\cdot x^2)\cdot(2x^2e^{2x}+2xe^{2x})$,

由已知　$f'(x)=\sin\sqrt{x}$　$(x>0)$，则　$f'(x^2e^{2x})=\sin\sqrt{x^2e^{2x}}=\sin(xe^x)$,

所以　$y'=2xe^{2x}(x+1)\cdot\sin(xe^x)$.

2．解　由已知条件知当 $x\neq 0$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2+\dfrac{\alpha(x)}{x}$,

当$x\to 0$时取极限，则有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(x)}{x}=2$.从而由导数定义得 $f'(0)=2$.

3.解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}{\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}=\frac{1+\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}}{2\mathrm{e}^{2t}}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t}+1-\mathrm{e}^{-t}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{1}{2}\left(-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\right)}{\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}=\frac{1}{4}\left(-2\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\right).$$

4.

解：因要使函数$f(x)$在$x=0$处可导，故$f(x)$在$x=0$处连续，即

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=1,$$

得$a+b=1$,即当$a+b=1$时，函数$f(x)$在$x=0$处连续.

由导数定义及$a+b=1$，有

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{[1+\ln(1-2x)]-1}{x}=-2,$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(a+b\mathrm{e}^{x})-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{b(\mathrm{e}^{x}-1)}{x}=b.$$

要使$f(x)$在$x=0$处可导，应有$b=f_+'(0)=f_-'(0)=-2$,故$a=3$.

即当$a=3,b=-2$时，函数$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=-2$.于是

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{1-2x}, & x\le 0\\ -2\mathrm{e}^{x}, & x>0\end{cases}.$$

5.解 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=3\cdot f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).$$

6.证　任取 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x g(\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}g(\Delta x)=f(x_0)$$

由 x_0 的任意性，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导.

7.

解：在 $y-xe^{y-1}=1$ 中，令 $x=0$ 得 $y=1$.

在 $y-xe^{y-1}=1$ 两边对 x 求导得

$$y'-e^{y-1}-xy'e^{y-1}=0, \qquad （1）$$

即 $(2-y)y'-e^{y-1}=0$.

由 $x=0, y=1$，得 $y'|_{x=0}=1$.

在（1）式两边对 x 求导得 $(2-y)y''-y'^2-e^{y-1}y'=0$.

由 $x=0$ 时，$y=1, y'=1$ 得 $y''|_{x=0}=2$.

因为 $\dfrac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)(\dfrac{y'}{y}-\cos x)$，故 $\dfrac{dz}{dx}|_{x=0}=0$.

又 $\dfrac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)(\dfrac{y'}{y}-\cos x)^2+f'(\ln y-\sin x)[\dfrac{y''}{y}-\dfrac{(y')^2}{y^2}+\sin x]$,

所以 $\dfrac{d^2z}{dx^2}|_{x=0}=f'(0)(2-1)=1$.

8.解　当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}+x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}(-\beta x^{-\beta-1})$

$$=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

$$=\begin{cases}0 & \alpha>1\\ \text{不存在} & \alpha\le 1\end{cases}$$

所以当 $\alpha>1$ 时，$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$

由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，故 $\alpha-\beta-1>0$，$\alpha>\beta+1$.

9.

解：由于当 $|x|<1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1;$

当 $|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=2^0=1;$

当 $|x|>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{|x|^{3n}}}=|x|^3$.

所以 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ |x|^3, & |x|>1\end{cases}$ ，即 $f(x)=\begin{cases}-x^3, x<-1,\\ 1, -1\le x\le 1,\\ x^3, x>1.\end{cases}$

显然当 $|x|<1$及 $|x|>1$时，$f(x)$均可导.

在 $x=-1$处. $f_-'(-1)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-x^3-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}-(x^2-x+1)=-3$

$$f_+'(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1-1}{x+1}=0$$

显然 $f_-'(-1)\ne f_+'(-1)$，因此 $f(x)$在 $x=-1$处不可导.

在 $x=1$处. $f_+'(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x+1)=3,$

$$f_-'(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,$$

由 $f_-'(1)=0\ne 3=f_+'(1)$知，$f(x)$在 $x=1$处也不可导

10. 解 $y=x+3+\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

$\therefore\quad y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\dfrac{8}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\quad (n\ge 2)$

11. 解 证明 由 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\ge \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ (1)

得 $f[x_2+\lambda(x_1-x_2)]\ge\lambda[f(x_1)-f(x_2)]+f(x_2)$

$\Rightarrow\ \dfrac{f[x_2+\lambda(x_1-x_2)]-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)}\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ …… 5分

当 $\lambda\to 0$时，不等式两端同时取极限，得

$\lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{f[x_2+\lambda(x_1-x_2)]-f(x_2)}{\lambda(x_1-x_2)}\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Rightarrow f'(x_2)\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$

(1)式中令 $1-\lambda=\mu$, 可得 $f'(x_1)\ge\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$ …… 10分

四、附加题

1. $f'(-1)=-(n-1)!$

解：由

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x+1)'\left[x(x+2)(x+3)\cdots(x+n)\right] \\
&\quad + (x+1)\left[x(x+2)(x+3)\cdots(x+n)\right]' \\
&= \left[x(x+2)(x+3)\cdots(x+n)\right] \\
&\quad + (x+1)\left[x(x+2)(x+3)\cdots(x+n)\right]'
\end{aligned}
$$

可知

$$
\begin{aligned}
f'(-1) &= \left[(-1)(-1+2)(-1+3)\cdots(-1+n)\right]+0 \\
&= -(n-1)!
\end{aligned}
$$

2. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

解：直接求导

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\left(e^x+\frac{1}{2}\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2e^{2x}\right) \\
&= \frac{e^x+\left(1+e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{2x}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} \\
&= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}
\end{aligned}
$$

3. $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=(\ln 2-1)\,\mathrm{d}x$

解： 原方程等价于 $xy\ln 2=\ln(x+y)$

两边同时求微分 $(xdy+ydx)\ln 2=\dfrac{dx+dy}{x+y}$

在原方程中令 $x=0$ 可得 $y=1$

代入上式则有

$dy=(\ln 2-1)dx$

4.（I） 证明略

（II） 由数学归纳法易得

$$
f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)
$$