第五章 常微分方程测试题

满分：120 分　时间：110 分钟

一、选择题(每题 5 分，共 25 分)

1.函数 $y=C-\sin x$ (其中 C 是任意常数)是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sin x$ 的

(A) 通解　　(B) 特解

(C) 是解，但既非通解也非特解　　(D)不是解

2. 微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解为

(A) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$　(B) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$　(C) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$　(D) $y=\dfrac{2}{1+x^2}$

3. 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是

(A) $y^2=x-1$　(B) $y=x+1$　(C) $y^2=x+1$　(D) $y^2=x$

4. 具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x}, y_2=2x\mathrm{e}^{-x}, y_3=3\mathrm{e}^{x}$ 的三阶常系数线性微分方程是

(A) $y'''-y''-y'+y=0$　(B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

5. 设 y_1, y_2 是二阶常系数线性齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解，则由 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 能构成该方程的通解，其充分条件为______.

(A) $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$　(B) $y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)\neq 0$

(C) $y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)=0$　(D) $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq 0$

二、填空题(每题 5 分，共 25 分)

1. 设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$______.

2.微分方程 $xy'+y=2\sqrt{xy}$ 的通解为______.

3. 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为______.

4. 微分方程 $y''-y=\mathrm{e}^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a, b 为常数)______.

5. 微分方程$y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$的通解为______. $y=(C_1+C_2\ln x)x+x\ln^2 x$

三、计算、证明题(第 1-4 题 10 分，5-6 题每题 15 分，共 70 分)

1. 求通解 $y(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x-2(x-y)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y=0$

2.证明下列函数$y=\frac{1}{x}(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x})+\frac{\mathrm{e}^x}{2}$($C_1,C_2$为任意常数)

是方程$xy''+2y'-xy=\mathrm{e}^x$的通解.

3.证明：若$f(x)$满足方程$f'(x)=f(1-x)$，则必满足方程

$f''(x)+f(x)=0$，并求方程$f'(x)=f(1-x)$的解.

4. 设$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中$f$为连续函数，求$f(x)$.

5.设函数$y=f(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$,其图形在$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点处的切线重合，求函数y的解析表达式.

6.设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\varphi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，且$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)}$,

其中$\varphi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\varphi(t)$与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切，

求函数$\varphi(t)$.

四、附加题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=2$，求 $f(1)$.

2. 求以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程.

3. **求**微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的特解.

4. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解，求 $y(x)$.

5. 求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^x$的通解.

答案：

第五章 常微分方程测试题

满分：120 分　时间：120 分钟

一、选择题(每题 5 分，共 25 分)

1.函数 $y=C\ -\sin x$ (其中 C 是任意常数)是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sin x$ 的

(A) 通解　　　　(B) 特解

(C) 是解，但既非通解也非特解　　　　(D)不是解

答案：C

解：$y=C-\sin x$为原微分方程的解，但因含任意常数，所以不是特解；又因为独立任意常数的个数只有一个，所以不是通解.

2. 微分方程$x^2y'+xy=y^2$满足初始条件$y|_{x=1}=1$的特解为

(A) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$　　(B) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$　　(C) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$　　(D) $y=\dfrac{2}{1+x^2}$

答案：A

解

把原式整理得$x^2y^{-2}y'+xy^{-1}=1$,此方程为贝努里方程.

令$y^{-1}=z$得一阶线性微分方程：$z'-\dfrac{1}{x}z=-\dfrac{1}{x^2}$,故

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x\left(\frac{1}{2x^2}+C\right)=\frac{1}{2x}+Cx,$$

该微分方程的通解为$y=\dfrac{2x}{1+2Cx^2}$. 把$y|_{x=1}=1$代入得$C=\dfrac{1}{2}$.

故特解为 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

3. 微分方程$yy''+(y')^2=0$满足初始条件$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$的特解是

(A) $y^2=x-1$　　(B) $y=x+1$　　(C) $y^2=x+1$　　(D) $y^2=x$

答案：　C

解

令$y'=p, y''=p\dfrac{dp}{dy}$,则原方程化为$p\left(y\dfrac{dp}{dy}+p\right)=0.$

(1) $p=0$得$y'=0$,与已知矛盾；

(2) $p\neq 0$时，有$y\dfrac{dp}{dy}+p=0$,解得$p=\dfrac{C_1}{y}.$

把$\begin{cases} y|_{x=0}=1, \\ y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$代入得$C_1=\dfrac{1}{2}$,即微分方程为$y'=\dfrac{1}{2y}.$

解得$y^2=x+C_2$,把$y|_{x=0}=1$代入得$C_2=1.$

所以应填$y=\sqrt{x+1}$ 或$y^2=x+1.$

4. 具有特解$y_1=\mathrm{e}^{-x}, y_2=2x\mathrm{e}^{-x}, y_3=3\mathrm{e}^{x}$的三阶常系数线性微分方程是

(A) $y'''-y''-y'+y=0$　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

答案:B

特征根为$r_1=r_2=-1, r_3=1$.所以特征方程为

$(r+1)^2(r-1)=r^3+r^2-r-1=0,$

对应微分方程为$y'''+y''-y'-y=0$,故选（B）

5. 设y_1, y_2是二阶常系数线性齐次方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的两个特解，则由$y_1(x)$与$y_2(x)$能构成该方程的通解，其充分条件为______.

(A) $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$　　(B) $y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)\neq 0$

(C) $y_1(x)y_2'(x)+y_2(x)y_1'(x)=0$　　(D) $y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq 0$

答案：D

解 由题意知$y_1(x)$与$y_2(x)$线性无关，即$\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\neq C.$

求导得，

$$\frac{y_2'(x)y_1(x)-y_2(x)y_1'(x)}{y_1^2(x)}\neq 0,\text{即}y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\neq 0.$$

二、填空题(每题 5 分，共 25 分)

1. 设对任意$x>0$，曲线$y=f(x)$上点$(x,f(x))$处的切线在 y 轴上的截距等于$\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$f(x)=$______.

$C_1\ln x+C_2$

解：曲线$y=f(x)$上点$(x,f(x))$处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x).$$

令$X=0$,得截距$Y=f(x)-xf'(x)$.由题意，知

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(x)-xf'(x),\text{即}\int_0^x f(t)dt=x\left[f(x)-xf'(x)\right]$$

上式对x求导，化简得$xf''(x)+f'(x)=0$.即$\dfrac{d}{dx}(xf'(x))=0$

积分得$xf'(x)=C_1$.因此

$$f(x)=C_1\ln x+C_2\text{（其中}C_1,C_2\text{为任意常数）}$$

2.微分方程$xy'+y=2\sqrt{xy}$的通解为______. $x-\sqrt{xy}=C$

$$y'=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x},\text{令}u=\frac{y}{x},\text{则}y'=u+x\cdot\frac{du}{dx},$$

$$u+x\cdot\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}-u,\to\frac{du}{\sqrt{u}-u}=\frac{2}{x}dx,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{1}{1-\sqrt{u}}\right)du=\frac{2}{x}dx,\to 2\sqrt{u}-2\ln(1-\sqrt{u})-2\sqrt{u}=2\ln x-2\ln C$$

$$\int\frac{1}{1-\sqrt{u}}du\underline{\underline{\sqrt{u}=t}}\int\frac{2t}{1-t}dt=\int\frac{2(t-1)+2}{1-t}dt=\int\left(\frac{2}{1-t}-2\right)dt$$

$$=-2\ln(1-t)-2t+C\underline{\underline{\sqrt{u}=t}}\ \ -2\ln(1-\sqrt{u})-2\sqrt{u}+C$$

$$(1-\sqrt{u})x=C\to x-\sqrt{xy}=C$$

3. 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为______. $y=(x+C)\cos x$

4. 微分方程$y''-y=\mathrm{e}^x+1$的一个特解应具有形式(式中a,b为常数)______. $ax\mathrm{e}^x+b$

5. 微分方程$y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$的通解为______. $y=(C_1+C_2\ln x)x+x\ln^2 x$

解：原方程化为：$x^2y''-xy'+y=2x\cdots\cdots$①

令$x=\mathrm{e}^t$，则$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}$， $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}=\frac{1}{x^2}(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,t^2}-\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t})$

则方程①化为:$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,t^2}-2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}+y=2\mathrm{e}^t\cdots\cdots$②

方程②的特征方程为：$r^2-2r+1=0$，解得特征根为：$r_{1,2}=1.$

设$y^*=(at+b)t\mathrm{e}^t$，解得$a=1$，$b=0$，从而$y^*=t^2\mathrm{e}^t$,

所以方程②的通解为：$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^t$,

把$x=\mathrm{e}^t$代入上式得原微分方程的通解为：$y=(C_1+C_2\ln x)x+x\ln^2 x.$

三、计算、证明题(第 1-4 题 10 分，5-6 题每题 15 分，共 70 分)

1. 求通解 $y(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x-2(x-y)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y=0$

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{(\frac{x}{y}-1)\cdot 2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}}{1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}}$

令 $u=\frac{x}{y}$ ，原方程化为 $u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{2(u-1)\mathrm{e}^u}{1+2\mathrm{e}^u}$ ，

分离变量 ：$\frac{(1+2\mathrm{e}^u)\mathrm{d}u}{u+2\mathrm{e}^u}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0$

积分得 $y(u+2\mathrm{e}^u)=c$ 代入得 $x+2y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=c$.

2.证明下列函数$y=\frac{1}{x}(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x})+\frac{\mathrm{e}^x}{2}(C_1,C_2$为任意常数)
是方程$xy''+2y'-xy=\mathrm{e}^x$的通解.

证明：记 $y_1=\frac{1}{x}e^x, y_2=\frac{1}{x}e^{-x}, y^*=\frac{e^x}{2}$

则 $y_1'=x^{-1}e^x-x^{-2}e^x, y_1''=x^{-1}e^x-2x^{-2}e^x+2x^{-3}e^x$
$y_2'=e^{-x}(-x^{-1}-x^{-2}), y_2''=e^{-x}(x^{-1}+2x^{-2}+2x^{-3})$

代入后y_1,y_2满足$xy''+2y'-xy=0$

且$\frac{y_1}{y_2}$不为常数，故$C_1y_1+C_2y_2$是齐次方程的通解.

而 $y^* = y^{*\prime} = y^{*\prime\prime} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$,

有 $xy^{*\prime\prime} + 2y^{*\prime} - xy^* = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(x + 2 - x) = \mathrm{e}^x$

即 $y^* = \frac{\mathrm{e}^x}{2}$ 是非齐次方程的特解，从而由线性微分方程解得结构定理知

$y = (C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x})/x + \frac{\mathrm{e}^x}{2}$ 是非齐次线性方程的通解.

3.证明：若$f(x)$满足方程$f'(x) = f(1-x)$，则必满足方程 $f''(x) + f(x) = 0$，并求方程$f'(x) = f(1-x)$的解.

解　证由于 $f'(x) = f(1-x)$

求导得 $f''(x) = f'(1-x)(-1) = -f'(1-x) = -f[1-(1-x)] = -f(x)$

故 $f''(x) + f(x) = 0$

其通解为 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$

又由于 $f'(x) = f(1-x)$

故 $-C_1\sin x + C_2\cos x = C_1\cos(1-x) + C_2\sin(1-x)$.

令 $x = 0$ 得 $C_2 = C_1\cos 1 + C_2\sin 1$

则 $C_2 = \frac{C_1\cos 1}{1-\sin 1} = \frac{C_1(1+\sin 1)}{\cos 1}$

从而方程 $f'(x) = f(1-x)$ 的解为

$f(x) = C_1(\cos x + \frac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x)$

4.

设$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中$f$为连续函数，求$f(x)$.

解：$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt,\ f''(x)=-\sin x-f(x)$

$f''(x)+f(x)=-\sin x$

特征方程为$r^2+1=0$,所以$r=\pm i$

设$y^*=x(A\cos x+B\sin x)$

$y^{*\prime}=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$

$y^{*\prime\prime}=-2A\sin x+2B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)$

代入原方程解得$A=\frac{1}{2}$，$B=0$，所以$y^*=\frac{1}{2}x\cos x$

所以通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

代入$f(0)=0,\ f'(0)=1$,得$C_1=0, C_2=\frac{1}{2}$

所以$y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$

5.设函数$y=f(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$,其图形在$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点处的切线重合，求函数y的解析表达式.

5. 解 $y''-3y'+2y=0$ 通解为 $\tilde{Y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$

令 $y''-3y'+2y=2e^x$ 特解为 $y^*=Axe^x$ ，代入方程知 $A=-2$ ，

故 $y^*=-2xe^x$ ，

故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$ 由题意 $y|_{x=0}=1$ $y'|_{x=0}=-1$ 知 $C_1=1$ ，$C_2=0$

所求函数为 $y=e^x-2xe^x$.

6.设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\varphi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，且$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，

其中$\varphi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\varphi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$在$t=1$处相切，

求函数$\varphi(t)$.

6.解：因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)}{2+2t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2+2t}\cdot\frac{(2+2t)\varphi''(t)-2\varphi'(t)}{(2+2t)^2}=\frac{(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4(1+t)^3},$$

由题设$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$,故$\frac{(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)}$,从而

$(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t)=3(1+t)^2$,

即$\varphi''(t)-\frac{1}{1+t}\varphi'(t)=3(1+t)$.

设$u=\varphi'(t)$,则有$u'-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$,故

$$u=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}[\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C_1]$$

$$=(1+t)[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}dt+C_1]=(1+t)(3t+C_1),$$

$$\varphi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=\int(3t^2+(3+C_1)t+C_1)dt=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

由曲线$y=\varphi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$在$t=1$处相切知$\varphi(1)=\frac{3}{2e},\varphi'(1)=\frac{2}{e}$,

所以$u|_{t=1}=\varphi'(1)=\frac{2}{e}$,由此知$C_1=\frac{1}{e}-3$.由$\varphi(1)=\frac{3}{2e}$,知$C_2=2$.于是

$$\varphi(t)=t^3+\frac{1}{2e}t^2+(\frac{1}{e}-3)t+2,t>-1.$$

四、附加题（每题 4 分，共 20 分）

1. 2e

2. $y'-y=2x-x^2$

3. $x\mathrm{e}^{2x+1}$

4. $y(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

5. $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)\mathrm{e}^x$