

姓名

学号

密

封

线

班级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题(共 5 个题, 每题 4 分, 共 20 分, 将正确答案写在横线上)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln(1 + ax), & x > 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  可导, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  可导, 且  $f'(x_0) = 0$ , 则  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - 3t)}{t} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4.  $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 已知微分方程  $y'' + 4y = x \cos x$ , 则其通解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

得分	阅卷人

二、选择题(共 5 个题, 每题 4 分, 共 20 分, 将正确选项写在括号内)

6. 当  $x \rightarrow 1$  时, 函数  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$  的极限 ( ).

- (A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 为  $\infty$  (D) 不存在但不为  $\infty$

7. 设  $f(x) = x^2 \sin \frac{3}{x}$ ,  $g(x) = 3 \sin x$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( ).

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小  
C. 同阶无穷小但不等价 D. 等价无穷小

8. 设  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内具有连续的三阶导数, 若  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ , 且  $f^{(3)}(x_0) < 0$ , 则 ( ).  
(A)  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极大值 (B)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值  
(C)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值 (D)  $(x_0, f(x_0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点

9. 设  $f(x)$  是奇函数, 除  $x = 0$  外处处连续,  $x = 0$  是其第一类间断点, 则  $\int_0^x f(t) dt$  是 ( ).  
(A) 连续的奇函数 (B) 连续的偶函数  
(C) 在  $x = 0$  间断的奇函数 (D) 在  $x = 0$  间断的偶函数

10. 设非齐次线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x)$  有两个不同的解  $y_1(x), y_2(x)$ ,  $C$  为任意常数, 则该方程的通解是 ( ).  
(A)  $C[y_1(x) + y_2(x)]$  (B)  $C[y_1(x) - y_2(x)]$   
(C)  $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$  (D)  $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

得分	阅卷人

三、解答题(共 7 个题, 共 60 分)

11. (8分) 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 讨论  $f(x)$  的间断点并说明是哪一类间断点.



姓名

学号

班级

12. (8分) 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$  所确定, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=9}$ .

13. (8分) 设函数  $y = y(x)$  由方程  $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$  所确定, 试求  $y = y(x)$  的驻点, 并判定它是否为极值点.

14. (8分) 设可微函数  $f(x)$  满足:  $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^2}{2} + \int_0^x t f(x-t) dt$ , 求  $f(x)$

15. (8分) 已知函数  $f(x)$  在  $x = 0$  的某个邻域内有连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$ , 求  $f(0)$  及  $f'(0)$ .



姓名

学号

班级

16. (10分) 已知星形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$

- (1) 求星形线所围图形的面积;      (2) 求星形线绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积;  
(3) 求星形线的弧长.

17. (10分) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  连续, 在  $(0,1)$  内可微, 且  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 1$ .

证明: (1) 存在  $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ ;

(2) 存在  $\eta \in (0, \xi)$  使得,  $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$ .