极限习题课3(等价无穷小代换)(5题)

1.设 $x \to 0$ 时，$e^{\tan x} - e^{x}$ 是 x^{n} 同阶无穷小，则 n 为

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^{2} \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin^{2} x + e^{x}) - x}{\ln(x^{2} + e^{2x}) - 2x}$$

4. $$\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + 2^{x}) \ln(1 + \frac{3}{x})$$

5.设 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \frac{f(x)}{\sin x})}{a^{x} - 1} = A \quad (a > 0, a \neq 1)$，求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^{2}}$.

答案

1\. 解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{x^{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(e^{\tan x-x}-1)}{x^{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^{n}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^{n-1}}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^{2}}{x^{n-1}}=\frac{1}{2}$$

所 以 $n-1=2$， 即 $n=3$ (C)

2\. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^{2}\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^{2}\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}]=\frac{1}{2}.$$

$$3.\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x)]-x}{\ln[\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{-2x}x^2)]-2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x)}{\ln(1+\mathrm{e}^{-2x}x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin^2 x}{\mathrm{e}^{-2x}x^2}=1$$

$$4.\lim_{x\to +\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})=\lim_{x\to +\infty}\left[\ln 2^x\left(2^{-x}+1\right)\right]\cdot\frac{3}{x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[x\ln 2+\ln(1+2^{-x})\right]\cdot\frac{3}{x}=3\ln 2+\lim_{x\to +\infty}2^{-x}\cdot\frac{3}{x}$$

$$=3\ln 2.$$

5. 解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1}=A$

所以 $\dfrac{\ln(1+\dfrac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1}=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$

$$\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})=(a^x-1)(A+\alpha)\Rightarrow\frac{f(x)}{\sin x}=\mathrm{e}^{(a^x-1)(A+\alpha)}-1$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sin x\cdot[\mathrm{e}^{(a^x-1)(A+\alpha)}-1]$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot[\mathrm{e}^{(a^x-1)(A+\alpha)}-1]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{(a^x-1)(A+\alpha)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)(A+\alpha)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a\cdot(A+\alpha)}{x}=\ln a\cdot\lim_{x\to 0}(A+\alpha)$$

$$=A\ln a$$