

### 三. 不定积分的分部积分法

#### 公式推导

设 $u(x)$ 及 $v(x)$ 具有连续导数, 则  $\int u dv = uv - \int v du$

证  $(uv)' = u'v + uv' \quad \therefore uv' = (uv)' - u'v$

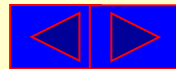
$$\text{则 } \int uv' dx = uv - \int v u' dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1. 求  $\int x \cos x dx$

解: 设  $x = u$ ,  $v' dx = \cos x dx = d \sin x = dv$ , 即  $\sin x = v$ .

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$



## 实际操作步骤:

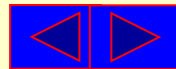
上例中，要凑出 $dv$ ，是个逆向思维的过程，这里试给出一个“程序”，使思维更加流畅。

- (1) 使用第一类换元积分法凑微分（见上节）
- (2) 如果结果可以用换元法解，则求出原函数；若不能积出，则试用分部积分公式代入。
- (3) 要注意优先凑微分的顺序：  
指数函数、弦函数 **优先于** 幂函数；  
幂函数 **优先于** 对数函数、反三角函数。

如，例1中：若先把 $x$ 凑微分，则有：

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int \cos x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \cdot \cos x - \int \frac{x^2}{2} d(\cos x) \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \cos x - \int \frac{x^2}{2} \cdot (-\sin x) dx = \frac{x^2 \sin x}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \sin x dx\end{aligned}$$

可以看出：最后面的积分与原来的积分属于同一种类型，而且幂函数因式的次数还增高了，积分结果将难以求出。



## 基本题型 I

被积函数是幂函数与指数函数或者弦函数的乘积，  
应该先将指数函数或者弦函数凑微分。

2. 求  $\int x \tan^2 x dx$

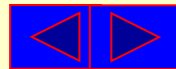
$$\begin{aligned}\text{解: } \int x \tan^2 x dx &= \int x (\sec^2 x - 1) dx = \int x \sec^2 x dx - \int x dx \\ &= \int x d \tan x - \frac{1}{2} x^2 = x \tan x - \int \tan x dx - \frac{1}{2} x^2 \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{1}{2} x^2 + C\end{aligned}$$

3. 求  $\int x e^x dx$

$$\text{解: } \int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

4. 求  $\int x^2 e^x dx$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int x^2 e^x dx &= \int x^2 d e^x = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C\end{aligned}$$



## 基本题型II

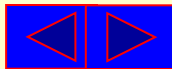
被积函数是幂函数与对数函数或者反三角函数的乘积，  
应该先将幂函数凑微分。

5. 求  $\int x \ln x dx$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int x \ln x dx &= \int \ln x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

6. 求  $\int 2x \arctan x dx$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int 2x \arctan x dx &= \int \arctan x dx^2 = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= x^2 \arctan x - \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = x^2 \arctan x - \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= x^2 \arctan x - (x - \arctan x) + C\end{aligned}$$

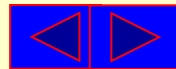


7. 求  $\int \arcsin x dx$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \arcsin x dx &= x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C \\ &= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

8. 求  $\int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \arctan x dx \\ &= \int \arctan x dx - \int \arctan x d \arctan x \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C\end{aligned}$$



被积函数是指数函数与弦函数的乘积，可选任一函数凑微分。

9. 求  $\int e^x \sin x dx$

解 **法1**  $\int e^x \sin x dx = -\int e^x d \cos x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$

$$= -e^x \cos x + \int e^x d \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

是不是优先凑微分的顺序出了问题？换过来试一下：

**法2**  $\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

$$= e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

两种方法都出现了“循环”，移项可以把该积分“解”出来。

$$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

**注意：**移项时应该给等式的右边添加任意常数  $C$

10. 求  $\int e^{2x} \cos 3x dx$

解  $I = \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int \cos 3x de^{2x}$

$$= \frac{1}{2} \left( e^{2x} \cos 3x + 3 \int e^{2x} \sin 3x dx \right)$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} \int \sin 3x de^{2x}$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} \sin 3x \cdot e^{2x} - \frac{3}{4} \cdot 3 \int \cos 3x \cdot e^{2x} dx$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} I$$

移项得  $I = \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + C$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

11. 求  $\int \sec^3 x dx$

$$\text{解 } \int \sec^3 x dx = \int \sec x \tan x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$$

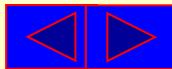
$$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \tan x|$$

移项、两边同除以系数，得

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$





12. 求  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

杂例

解 令  $\sqrt{x} = t$  则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt = 2e^t (t - 1) + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C$$

13. 求  $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$

分部积分法

解  $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int e^{\sin x} x \cos x dx - \int e^{\sin x} \tan x \sec x dx$$

$$= \int x d e^{\sin x} - \int e^{\sin x} d \sec x$$

$$= x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx - e^{\sin x} \sec x + \int \sec x e^{\sin x} \cos x dx$$

$$= e^{\sin x} (x - \sec x) + C$$

