第二节 几种常见的一阶微分方程

讨论一阶微分方程 $y' = f(x,y)$ 的一些解法。

一、可分离变量的微分方程:

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy = f(x)dx \qquad (1)$$

那末原方程叫做可分离变量的微分方程

假定 $g(y)$ 和 $f(x)$ 都是连续函数，

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\boxed{G(y) = F(x) + C} \qquad (2)$$

（2）称为微分方程（1）的隐式解， 由于（2）式中含有任意常数，（2）也称为微分方程（1）的隐式通解。

1. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解。

解 将原方程分离变量得 $\dfrac{dy}{y}=2xdx$

两端积分得 $\ln|y|=x^2+C_1$ ---------隐式通解

从而 $y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}$

令 $C=\pm e^{C_1}$， 得通解为 $y=Ce^{x^2}$.

2. 求微分方程 $y'\sin x=y\ln y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 的特解。

解 将原方程分离变量得 $\dfrac{1}{y\ln y}dy=\dfrac{1}{\sin x}dx$

$$\frac{1}{\ln y}d(\ln y)=\csc xdx$$

两端积分得 $\ln|\ln y|=\ln|\csc x-\cot x|+\ln C$

即 $\ln y=C(\csc x-\cot x)$

练习1

1. $y' = 2x(1+y)$

2. $\cos x \sin y \mathrm{d}x - \sin x \cos y \mathrm{d}y = 0$

3. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x+xy^2}{y+x^2y} \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$

4. $3x^2 + 5x - 5y' = 0$

5. $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$

6. $(y+1)^2 \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^3 = 0$

7. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2 - 6x^2y^2}{y - x^3 y}$

8. $y' - xy' = a(y^2 + y')$

答案

1. $y = C\mathrm{e}^{x^2} - 1$

2. $\sin x = C \sin y$

3. $1 + y^2 = 2(1 + x^2)$

4. $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{5}x^3 + C$

5. $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^y - 1) = C$

6. $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$

7. $C(1 - 2y^2)^{\frac{1}{4}} = 1 - x^3$

8. $y = \dfrac{1}{C + a\ln(1 - a - x)}$

二、齐次方程

定义 若 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 中的函数 $f(x, y)$ 可写成 $\frac{y}{x}$ 的函数，

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

则称这方程为齐次方程。

例如 $(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$

可改写为 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}$

故原方程为齐次方程 。

在齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 中，令 $u = \frac{y}{x}$，就化为变量可分离变量的方程。

3. 解方程 $y^2 + x^2 \dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$

解 原方程可写成: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x} - 1}$

令 $\dfrac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$

原方程变为 $u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^2}{u-1}$, 即 $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u}{u-1}$.

分离变量得 $\left(1 - \dfrac{1}{u}\right)du = \dfrac{dx}{x}$

两端积分得 $u - \ln|u| + C = \ln|x| \Longrightarrow \ln|xu| = u + C$

所给方程的通解为 $\ln|y| = \dfrac{y}{x} + C$

4. 求齐次方程满足初始条件的特解：

$$(y^2-3x^2)dy+2xydx=0,\ y|_{x=0}=1$$

解 (1)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{3x^2-y^2}\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{3-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=x\cdot\frac{du}{dx}+u$, 代入上式得

$$x\cdot\frac{du}{dx}+u=\frac{2u}{3-u^2},\ \Longrightarrow\ x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u^3-u}{3-u^2},$$

分离变量得 $\frac{3-u^2}{u^3-u}du=\frac{dx}{x}$, $\Longrightarrow$ $\left(-\frac{3}{u}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\right)du=\frac{dx}{x}$,

两边积分得 $-\ln u^3+\ln(u+1)+\ln(u-1)=\ln x+\ln C$

即 $\ln\left(\frac{u^2-1}{u^3x}\right)=\ln C$ $\Longrightarrow$ $\frac{u^2-1}{u^3x}=C$, 即 $\frac{y^2-x^2}{y^3}=C$.

由 $x=0, y=1$ 得: $C=1$. $\therefore\ y^2-x^2=y^3$.

练习2

$$1. x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 2\sqrt{xy}$$

$$2. (x^2 + y^2)\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y = 0$$

$$3. \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{y^2 + x^2}}\right)\mathrm{d}y = 0$$

$$4. (y^2 - 3x^2)\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x = 0, y|_{x=0} = 1$$

$$5. y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}, \quad y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$$

答案

$$1. x + C = \sqrt{xy}$$

$$2. y^2 = x^2\ln(Cx^2)$$

$$3. x + \sqrt{y^2 + x^2} = C$$

$$4. y^3 = y^2 - x^2$$

$$5. \sin\frac{y}{x} = \frac{1}{2}x$$

三、一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

若$Q(x)\neq 0$, $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ （1）

-------一阶非齐次线性微分方程

若$Q(x)=0$, $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ （2）

--------对应于（1）的齐次线性微分方程

方程（2）分离变量后得 $\frac{dy}{y}=-P(x)dx$

两边积分, $\int\frac{dy}{y}=\int -P(x)dx$

得: $\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1$

其通解为: $\boxed{y=Ce^{-\int P(x)dx}}$

$$\boxed{\text{如何解}\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)?}$$

常数变易法:

设 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 为（1）的解， $u(x)=?$

将 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入（1），得:

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)]+P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

即 $u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$， $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$

求得（1）的通解为:

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)}$$

$Ce^{-\int P(x)dx}$ —————— 对应的齐次方程的通解

$e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ ——— 该方程的特解

5. 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解 。

解 法1 常数变易法

先求对应齐次方程 的通解

对应齐次方程为 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$

分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}$ ⇨ $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln C$

其通解为 $y=C(x+1)^2$.

设原方程通解为 $y=u(x)(x+1)^2$ （3）

则 $y'=u'(x+1)^2+2u(x+1)$ （4）

将（3）式与（4）式 代入原方程，整理得

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

两端积分得，待定函数为

$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

原方程通解为 $y=(x+1)^{2}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$

法2　公式法

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}},\quad P(x)=-\frac{2}{x+1},\quad Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\int\frac{2}{1+x}dx}\left(\int(1+x)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{1+x}dx}dx+C\right)$$

$$=(1+x)^{2}\left(\int(1+x)^{\frac{5}{2}}(1+x)^{-2}dx+C\right)=(x+1)^{2}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

6. $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$$

解 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\cos y\cdot x=\sin 2y$$

$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left[\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\int \cos y\mathrm{d}y}\left[\int \sin 2y\mathrm{e}^{\int -\cos y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\sin y}\left[\int \sin 2y\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\sin y}\left[-2(1+\sin y)\mathrm{e}^{-\sin y}+C\right]$$

$$=-2(1+\sin y)+C\mathrm{e}^{\sin y}$$

伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1) \qquad （6）$$

可化为 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

引入新的未知函数 $z=y^{1-n}$，$\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}y^n\frac{dz}{dx},$$

代入（6）式，可将伯努利方程化为一阶线性微分方程：

$$\boxed{\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)}$$

求出此方程的通解后，以 y^{1-n} 代 z，便得方程（6）的通解。

7. 求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解。

解　令 $z=y^{1-2}=y^{-1}$,

得 $\frac{dz}{dx}+(1-2)\frac{1}{x}z=(1-2)a(\ln x)$

即 $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-a(\ln x)$

该方程通解为 $z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$

以 y^{-1} 代 z，得所求方程通解为: $yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$

注　利用变量替换把一个较复杂的微分方程化为较简单的微分方程，是解 微分方程的一种常用方法。

8. 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$.

解 法1 把方程变形为 $\dfrac{dx}{dy}=x+y$,

$$\frac{dx}{dy}-x=y, P(y)=-1, Q(y)=y$$ 一阶线性微分方程（解略）。

法2 令 $x+y=u$，则 $y=u-x$， 代入原方程得 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u+1}{u}$

分离变量得 $\dfrac{u}{u+1}du=dx \Rightarrow \left(1-\dfrac{1}{u+1}\right)du=dx$

两端积分得 $u-\ln|u+1|=x+C$

以 $u=x+y$ 代入即得原方程通解为

$$y-\ln|x+y+1|=+C$$

9. $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$ 提示：令 $xy=u$， $y=\dfrac{1}{x}e^{Cx}$

练习3

1. $(x^2+1)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

2. $\dfrac{ds}{dt} + s\cos t = \dfrac{1}{2}\sin 2t$

3. $y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0$

4. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1,\quad y|_{x=1} = 0$

5. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

6. $y' = \cos(x-y)$

7. $(x+y)^2 y' = a^2$

8. $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0$

答案

1. $y = (1+x^2)(x+C)$

2. $s = Ce^{-\sin t} + \sin t - 1$

3. $2x\ln y = (\ln y)^2 + C$

4. $y = x^2(1 - e^{\frac{1}{x}-1})$

5. $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$

6. $-\cot\dfrac{x-y}{2} = x + C$

7. $y - a\arctan\dfrac{x+y}{a} = C$

8. $2x^2y^2\ln y - 2xy - 1 = Cx^2y^2$