

导数应用习题课3(函数作图)(14题)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $f'''(x) > 0$, 且 $f''(0) = 0$. 则 $f'(1)$ 、 $f'(0)$ 、 $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序为

- (A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$
(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ (D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

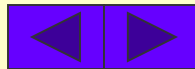
2. 证明: $e^x > 1 + x$ ($x \neq 0$).

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导, 且 $f(0) = 0$, $f''(x) > 0$.

试证: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单增.

4. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 则在点 $x = a$ 处

- (A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$ (B) $f(x)$ 取得极大值
(C) $f(x)$ 取得极小值 (D) $f(x)$ 的导数不存在



5. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

6. 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x_0) > 0$,

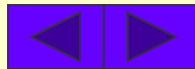
且 $f'(x_0) = 0$, 试判定 x_0 是否是 $f(x)$ 的极值点? 如果 x_0 为 $f(x)$

的极值点, 是极大值点, 还是极小值点?

7. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内存在连续的三阶导数,

且 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, 而 $f'''(x_0) \neq 0$,

试证 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点, 而 x_0 不是的极值点.



8.已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求

(1)函数的增减区间及极值;

(2)函数图形的凹凸区间及拐点;

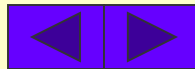
(3)函数图形的渐近线.

9.设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$,

则方程 $\int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt = 0$ 在区间内的根是

(A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 无穷多个

10.若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $0 < f(x) < 1$, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) \neq 1$. 证明: 方程 $f(x) = x$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一的根.



11. 设在 $[0, +\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数,

且 $f'(x) \geq k > 0$, $f(0) < 0$,

证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.

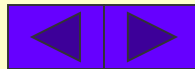
12. 讨论方程 $\ln x = ax$ ($a > 0$) 有几个实根,

并指出这些根所在的范围.

13. 证明: 当 $x > 0$, $y > 0$, 且 $x \neq y$ 时,

$$x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}.$$

14. 若 $0 \leq x \leq 1$, $p > 1$, 证明: $2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$.



答案

1. 解 由于 $f'''(x) > 0 \quad x \in (0,1)$ 知 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增. 即当 $x > 0$ 时, $f''(x) > f''(0) = 0$ 故 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增. 而函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 则至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)$$

再由 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增., 故当 $0 < \xi < 1$ 时有 $f'(0) < f'(\xi) < f'(1)$ 即 $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

故选 (B).

2. 证明: 设 $f(t) = e^t$, 在 $[0, x]$ 或 $[x, 0]$ 上, $e^x - e^0 = e^\xi(x - 0)$, 即 $e^x = 1 + xe^\xi$

当 $x > 0$ 时, $\xi > 0$, $e^\xi > 1$, 故 $e^x > 1 + x$;

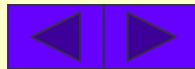
当 $x < 0$ 时, $\xi < 0$, $e^\xi < 1$, $xe^\xi > x$, 故 $e^x > 1 + x$;

3. 证明 设 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 则 $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

令 $G(x) = xf'(x) - f(x)$ $G'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) > 0$

故 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 内单增, 即当 $x > 0$ 时, 有 $G(x) > G(0) = 0$

所以 $F'(x) = \frac{G(x)}{x^2} > 0$ 即 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单增.



4.解 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} = 0$,

即 $f'(a) = 0$. 又在 a 的某一去心邻域内有 $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$, 即 $f(x) - f(a) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取极大值, 所以只有 (B) 项正确.

5. 解 在关系式中令 $x = 0$ 得: $f''(0) = 0$

$f''(x) = x - [f'(x)]^2$ 两边关于 x 求导得: $f'''(x) = 1 - 2f'(x)f''(x)$

令 $x = 0$, 则 $f'''(0) = 1 > 0$

故 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 拐点. 所以应选 (C).

6. 解 由于 $y = f(x)$ 为 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的解, 从而

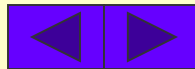
$$f''(x) - 2f'(x) + 4f(x) = 0$$

特别的, 当 $f(x_0) > 0$ 时, 上述方程可以化为

$$f''(x_0) + 4f(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$$

由极值得第二充分条件可以得知, x_0 为的极值点, 且为极大值点.

即 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值.



7. 解 不妨设 $f'''(x_0) > 0$,

$$f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0.$$

\therefore 根据保号性存在 x_0 的某邻域, 使: $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$,

即 $x > x_0$ 时, $f''(x) > 0$; $x < x_0$ 时, $f''(x) < 0$.

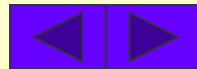
从而 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

$$\text{而 } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3,$$

$$\text{故 } f(x) - f(x_0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3,$$

即 $x > x_0$ 时, $f(x) > f(x_0)$; $x < x_0$ 时, $f(x) < f(x_0)$.

故 x_0 不是极值点.



8. 解 所给函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \quad \text{令 } y' = 0, \text{ 得驻点 } x = 0 \text{ 及 } x = 3$$

$$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4} \quad \text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0 \text{ 列表}$$

由此可知, (1) 函数的单调区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$, 单调减少区间为 $(1, 3)$;

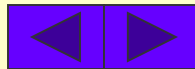
$$\text{极小值为 } y = \frac{27}{4}$$

(2) 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是凸的, 在区间 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(0, 0)$

(3) 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$ 知, $x = 1$ 是函数图形的铅直渐近线

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = 2$$

故 $y = x + 2$ 是函数图形的斜渐近线.



9. 解 令 $F(x) = \int_a^x f(t) \mathrm{d}t + \int_b^x \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t$

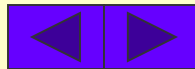
$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t = -\int_a^b \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t < 0, \quad F(b) = \int_a^b \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t > 0.$$

根据零点定理知，在 (a, b) 内至少存在一个根。

又因为 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2 > 0$ ，即 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调。

所以 $F(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且只有一个根。

所以应选 (B)。



10. 证明 由于 $0 < f(x) < 1$, 故 $f(x) - 1 < 0$.

设 $F(x) = f(x) - x$ 则 $F(1) = f(1) - 1 < 0$ $F(0) = f(0) > 0$

故由零点存在定理知至少存在一个 $\xi \in (0,1)$ 使 $F(\xi) = 0$.

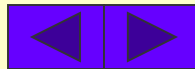
下证唯一性

设存在 $\xi_1 \neq \xi_2$ 使 $f(\xi_1) = \xi_1$ $f(\xi_2) = \xi_2$

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$

使 $f'(\xi) = \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = 1$ 此与 $f'(x) \neq 1$ 矛盾

故 方程 $f(x) = x$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的根.



11. 证 在 $[0, +\infty)$ 上, 由 $f'(x) \geq k$, 得 $\int_0^x f'(x) dx \geq \int_0^x k dx$.

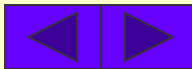
即 $f(x) \geq kx + f(0)$. 取 $x_1 > -\frac{f(0)}{k} > 0$, 有 $f(x_1) > k[-\frac{f(0)}{k}] + f(0) = 0$

因 $f'(x_1) > 0$, 由题设 $f(0) < 0$,

根据零点存在定理, 必存在 $x_0 \in (0, x_1)$, 使 $f(x_0) = 0$

因 $f'(x) \geq k > 0$, 故 $f(x)$ 严格单调增加, $x \in (0, +\infty)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.



12. 解 设 $f(x) = \ln x - ax$ ($a > 0$) $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$ 得驻点 $x = \frac{1}{a}$.

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$ 即 $f(x)$ 单增. 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$ 即 $f(x)$ 单减.

因此 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1$ 为 $f(x)$ 极大值, 亦为最大值.

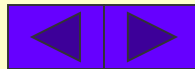
又可判断当 $x \rightarrow 0^+$ 或 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$.

从而依据连续函数的介值定理得

(1) 当 $f(\frac{1}{a}) > 0$ 即 $a < \frac{1}{e}$ 时, 曲线 $f(x)$ 与 x 轴在 $(0, \frac{1}{a})$ 与 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上各有一交点, 即有两个实根.

(2) 当 $f(\frac{1}{a}) = 0$ 即 $a = \frac{1}{e}$ 时, 曲线 $f(x)$ 与 x 轴仅有一交点, 即仅有一个实根.

(3) 当 $f(\frac{1}{a}) < 0$ 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, 曲线 $f(x)$ 与 x 轴无交点, 即无实根.



13. 证明 令 $f(x) = x \ln x$ $f'(x) = \ln x + 1$ $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ ($x > 0$)

故 $f(x)$ 在 (x, y) 或 (y, x) 上曲线弧是凹的.

$$\text{于是 } \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}[x \ln x + y \ln y] > \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2}$$

$$\text{所以 } x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

14. 证 令 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-p}. \text{ 当 } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

当 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ 时, $f'(x) > 0 \therefore f\left(\frac{1}{2}\right)$ 为极小值,

只此一个极值点,故也是最小值

$\therefore f(0) = f(1) = 1$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 1

$$\text{所以 } 2^{1-p} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

