答案：第三章 中值定理与导数应用测试题

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1.解：$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，显然 $f'(0)=0$，$f'(\frac{\pi}{2})=0$，

又 $f''(x)=\cos x-x\sin x$，且 $f''(0)=1>0$，$f''(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$，所以 $f(0)$ 是极小值，

$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值．故应选(B)

2.解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}(2\ln\frac{x+3}{x}-3)=-3$,

所以 $y=-3$ 为 $y=2\ln\frac{x+3}{x}-3$ 的水平渐近线． 故应选 (C).

3.解 $y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$，若 $(1,3)$ 为曲线的拐点，则必满足

$y|_{x=1}=3$，$y''|_{x=1}=0$，即 $\begin{cases}a+b+1=3\\6a+2b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$． 选 A

4.解 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，所以 $f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(\xi)\sin^4 x}{2x^4}=3$. 选 D

5.解 因为 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}=0$，

即 $f'(a)=0$．又在 a 的某一去心邻域内有 $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，即 $f(x)-f(a)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极大值，所以只有(B)项正确．

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1.解 因为 $f''(x)$ 存在，则 $f'(x)$ 存在，利用洛必达法则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}=f''(a).$$ 故应填 $f''(a)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

3. 属于 $1^{+\infty}$ 型，可转化成 $e^{\ln f(x)}$ 形式求解.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot(-x^2)}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$

4. 解： $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{-1}\right]^x$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]x\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

5.解： $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]$

令 $g(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$， $g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减， 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]=0$

故对任意 $x\in(0,+\infty),g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0$

从而 $f'(x)>0(x>0)$,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增。

三、计算、证明题(1-10 题每题 6 分，第 11 题 10 分，共 70 分)

1.解 (1) $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x^3}{x}=0,$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}==\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\arctan x}{x}=0,$

由 $f_-'(0)=f_+'(0)$， 所以 $f'(0)=0$.

(2) 当 $x<0$ 时, $f'(x)=-3x^2<0$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0,$

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$， 减区间为 $(-\infty,0)$.

2.解 $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\cos\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\left[1-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right]}\cdot \mathrm{e}^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}\cdot \mathrm{e}^{x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right]}$

$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})+x-\frac{1}{2}+x^2\cdot o(\frac{1}{x^2})\right]} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

3.证 因为$y=\ln x$是单调增加函数，所以欲证明$(a+x)^a < a^{a+x}$，

只须证$a\ln(a+x) < (a+x)\ln a$.设$f(x)=(a+x)\ln a - a\ln(a+x)$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$内

连续且可导，又有 $f'(x)=\ln a-\frac{a}{a+x}$

因为 $\ln a>1, \frac{a}{a+x}<1$，故$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$内单调增加 .

而$f(0)=0$，所以$f(x)>0 (0<x<+\infty)$，

即$a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$，也即$(a+x)^a < a^{a+x}$.

4.证明 构造函数$F(x)=f(x)(1-x)^2$，则$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件

至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$F'(\xi)=0$ 即 ξ $f'(\xi)+2f(\xi)=f'(\xi)$

5.解 由于$y=f(x)$为$y''-2y'+4y=0$的解，从而

$f''(x)-2f'(x)+4f(x)=0$

特别的，当$f(x_0)>0$时，上述方程可以化为

$f''(x_0)+4f(x_0)=0$ $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$

由极值得第二充分条件可以得知，x_0为的极值点，且为极大值点. 即$f(x)$在

x_0点取得极大值.

6.解 设切点为 (x_0,x_0^2)，$x_0>0$，则切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$，

即 $y=2x_0x-x_0^2$,切线与 x 轴交点为 $(\frac{x_0}{2}, 0)$.

又当 $x=8$ 时，$y=2x_0\cdot 8-x_0^2=16x_0-x_0^2$，所以三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\times 底\times 高 = \frac{1}{2}(8-\frac{x_0}{2})(16x_0-x_0^2)=\frac{1}{4}(16-x_0)^2\cdot x_0,$$

$$S'=-\frac{1}{2}(16-x_0)x_0+\frac{1}{4}(16-x_0)^2=\frac{1}{4}(16-x_0)(16-3x_0).$$

令 $S'(x_0)=0$ ，得 $x_0=16$ （舍），$x_0=\frac{16}{3}$.

所以当 $x_0=\frac{16}{3}$ 时三角形面积最大.

7.证　设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}=\frac{2(x^3\cos x-\sin^3 x)}{x^3\sin^3 x},\tag{1}$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{\cos^{4/3}x+\dfrac{1}{3}\cos^{-2/3}x\sin^2 x}{\cos^{2/3}x}-1=\frac{2}{3}\cos^{2/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-4/3}x-1.$$

由均值不等式，得

$$\frac{2}{3}\cos^{2/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-4/3}x=\frac{1}{3}(\cos^{2/3}x+\cos^{2/3}x+\cos^{-4/3}x)>\sqrt[3]{\cos^{2/3}x\cdot\cos^{2/3}x\cdot\cos^{-4/3}x}=1.$$

所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x)>0$，从而 $\varphi(x)$ 单调递增.又 $\varphi(0)=0$，因此 $\varphi(x)>0$，即

$$x^3\cos x-\sin^3 x<0.$$

由(1)式得 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)=\dfrac{4}{\pi^2}$，

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x\tan^2 x}\right)=2\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{2}{3},$$

所以 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}.$$

8.证　在 $[-2,0]$ 和 $[0,2]$ 上分别对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，可知存在 $\xi_1\in(-2,0)$，$\xi_2\in(0,2)$，使得　$f'(\xi_1)=\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}$，$f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$.

由于 $|f(x)|<1$，所以 $|f'(\xi_1)|\le1,|f'(\xi_2)|\le1$.

设 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$，则　$|F(\xi_1)|\le2,|F(\xi_2)|\le2$.　①

由于 $F(0)=f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，且 $F(x)$ 为 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 上的连续函数，应用闭区间上连续函数的最大值定理，$F(x)$ 在 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 上必定能够取得最大值，设为 M，则当 ξ 为 $F(x)$ 的最大值点时，$M=F(\xi)\ge4$，由①式知 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)$，所以 ξ 必是 $F(x)$ 的极大值点.注意到 $F(x)$ 可导，由极值的必要条件可知

$$F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0.$$

由于 $F(\xi)=f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2\ge4,|f(\xi)|\le1$，可知 $f'(\xi)\ne0$.由上式知

$$f(\xi)+f''(\xi)=0.$$

9.解　曲线$y=f(x)$在点$p(x,f(x))$处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令$Y=0$，则有$X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此$u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，且有

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}(x-\frac{f(x)}{f'(x)})=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

由$f(x)$在$x=0$处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

得
$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2))}{u^3(\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

10.解　设圆柱体容器的高为h，上下底的半径为r，则有

$$\pi r^2h=V,\quad 或\ h=\frac{V}{\pi r^2},$$

所需费用为

$$F(r)=2a\pi r^2+2b\pi rh=2a\pi r^2+\frac{2bV}{r}.$$

显然
$$F'(r)=4a\pi r-\frac{2bV}{r^2},$$

那么，费用最少意味着$F'(r)=0$，也即$r^3=\dfrac{bV}{2a\pi}$.

这时高与底的直径之比为$\dfrac{h}{2r}=\dfrac{V}{2\pi r^3}=\dfrac{a}{b}$.

11.证　（1）令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,F(1)=-1<0$$

所以，存在一个$\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$.

（2）令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[f(x)-x\right]$，那么 $G(0)=G(\xi)=0$.

这样，存在一个 $\eta\in(0,\ \xi)$，使得 $G'(\eta)=0$，即

$$G'(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}\left[f'(\eta)-1\right]-\mathrm{e}^{-\eta}\left[f(\eta)-\eta\right]=0,$$

也即 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

四、附加题（1-3 题每题 4 分，4 题 8 分，共 20 分）

1.解　对左式使用洛必达法则，可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-(a+2bx)}{2x}=2$

若 $a\neq 1$ 则左式趋于无穷，故必有 $a=1$，使用洛必达法则可得

$$\text{左式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1+2bx)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2b}{2}=2$$

解得 $-1-2b=4$　即 $b=-\dfrac{5}{2}$

2.解　$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(1+x)}-1}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 0^-}f(x)$$

因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

3. 解

$$f^{(n)}(x)\Big|_{x=0}=2C_n^2\left[\ln(1+x)\right]^{(n-2)}\Big|_{x=0}=n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\Bigg|_{x=0}=(-1)^{n-3}\frac{n!}{n-2}$$

4.解　使用洛必达，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=\frac{1}{2}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos x+f(x)+xf'(x)\right]=0$，　即 $1+f(0)=0$，可得 $f(0)=-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)}{x^2}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+f'(x)}{2x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=-\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

这说明 $f'(0)=0$.

由 $-\dfrac{1}{6}+\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\right)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ 得　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{4}{3}$

根据导数定义　$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{4}{3}$