

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、填空题(共 5 个题, 每题 4 分, 共 20 分, 将正确答案写在横线上)

1. 已知函数 $f(x)$ 满足: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)} \cdot \sin 2x - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$, 其中 f 可导, 且 $f'(0) \neq 0$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 不定积分 $\int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

得分	阅卷人

二、选择题(共 5 个题, 每题 4 分, 共 20 分, 将正确选项写在括号内)

6. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, ().
 (A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小 (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小
 (C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

7. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - 3t)}{t} = (\quad)$.
 (A) $f'(x_0)$ (B) $-2f'(x_0)$ (C) ∞ (D) 不能确定

8. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \right] = (\quad)$.

- (A) $xf(x^2)$ (B) $-xf(x^2)$ (C) $2xf(x^2)$ (D) $-2x(x^2)$

9. 设 $f(x) = \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$, 则 $\int_0^{\pi} f(x) dx = (\quad)$

- (A) 1 (B) 2 (C) -2 (D) -1

10. 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 下列命题中正确的是 ().

- (A) $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值 (B) $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值
 (C) $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值 (D) $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值

得分	阅卷人

三、解答题(共 7 个题, 共 60 分)

11. (8分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} (\beta > 0)$, 试讨论在什么条件下, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

姓名

学号

班级

12. (8分) 求极限: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a, b, c > 0$.

13. (8分) 设 $f(x)$ 可微, 已知 $2 \int_0^x f(x-t) dt = f(x) + x - 1$, 求函数 $f(x)$.

14. (8分) 设 $y = f(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 其图形在 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点处的切线重合, 求 $y = f(x)$ 的解析表达式.

15. (8分) 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$, 求 $f(0)$, $f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值.

姓名

学号

班级

16. (10分) 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$, $x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域;

D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$, $x=a$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ;

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 并求此最大值.

17. (10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = 3 \int_0^1 e^{1-x^2} f(x) dx$

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.