QQ群：sd高数能源20

657150438

# 高等数学（上册）

高等数学(1)

课程号：sd00920120

课序号：324

上课班级：能源20.1

能源20.2

能源20.3

山东大学　王玮

# 课前絮语

## 1、高等数学的重要性。

硕士研究生入学统考数学试卷分为三种：

工学：　　　　　　　数学一、数学二

经济学和管理学：　数学三

- 数学一：　高等数学，线性代数，概率论与数理统计
- 数学二：　高等数学，线性代数
- 数学三：　微积分，线性代数，概率论

数学一内容比例：

| | | |
|---|---|---|
| 高等数学 | 82分 | 约55% |
| 线性代数 | 34分 | 约22.5% |
| 概率论与数理统计 | 34分 | 约22.5% |

2、适应初等数学到高等数学的转变。

3、适应教学进度。

4、适应直接面授到多媒体教学的转变。

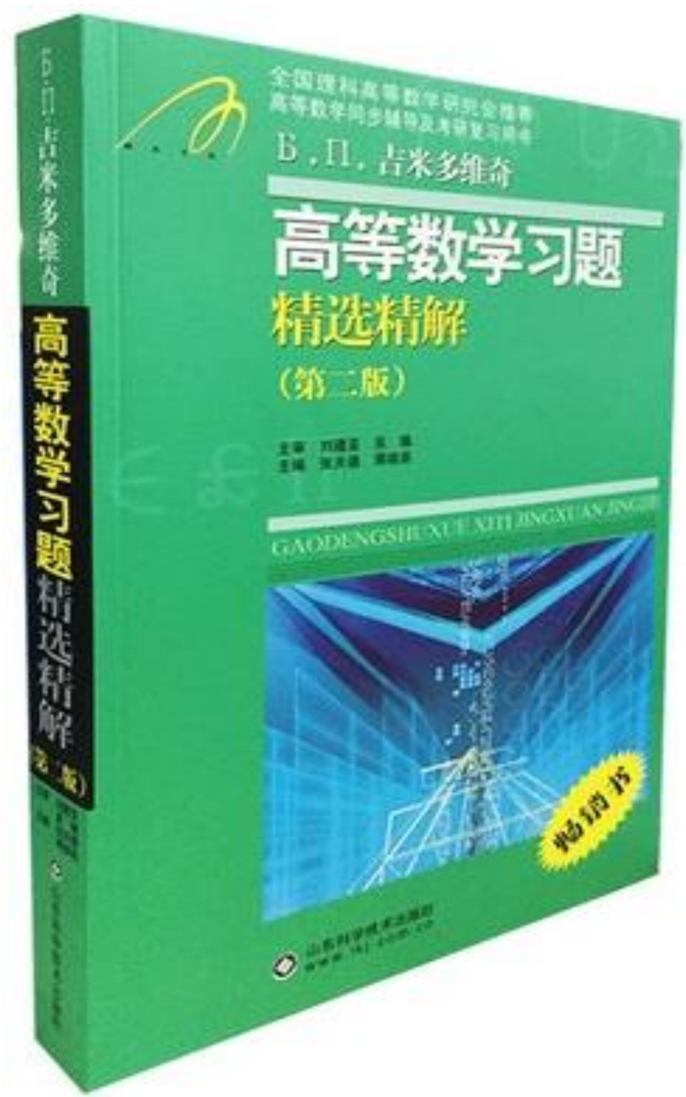
5、作业问题

6、参考书

学无止境，勤能补拙！

大学生数学竞赛（北大）

# 《吉米多维奇高等数学习题精选精解》

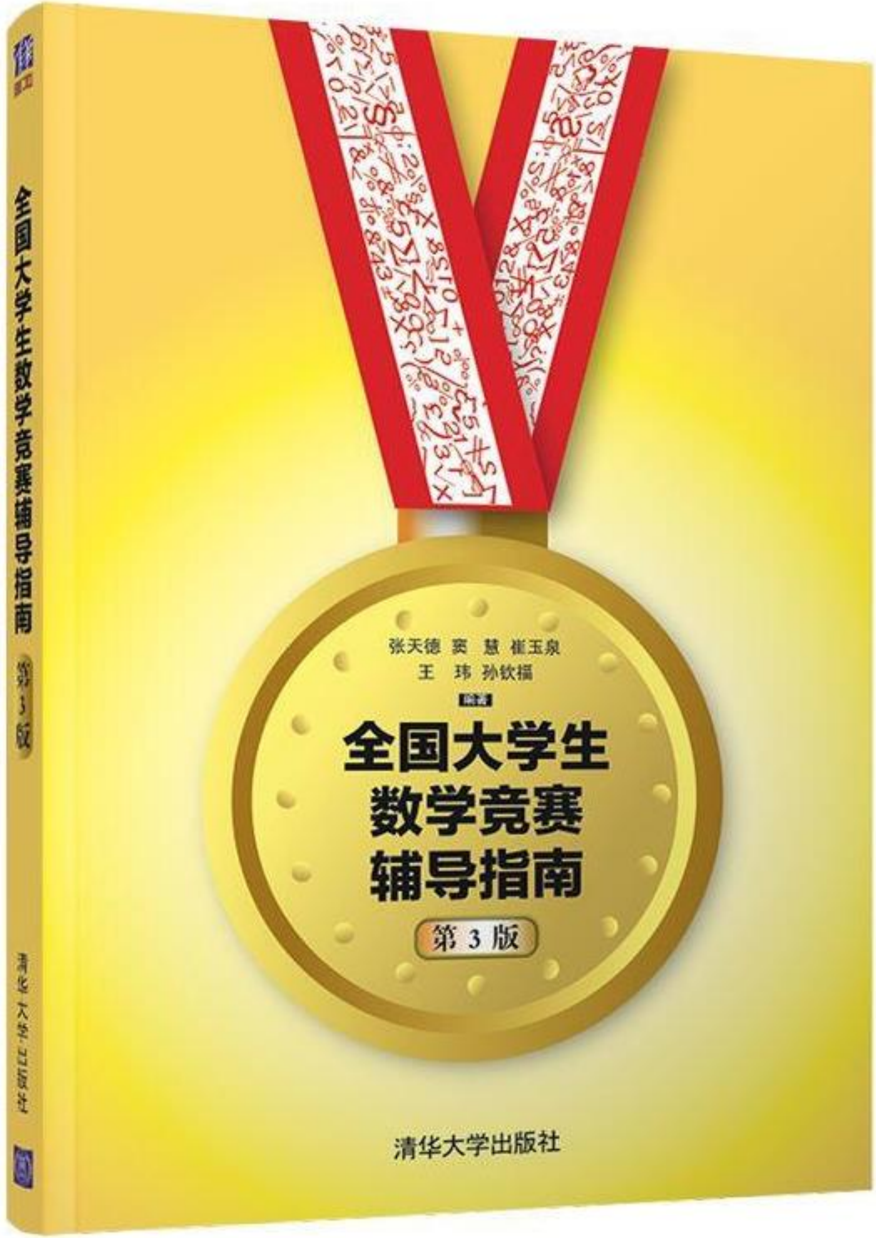


# 《高等数学辅导（同济七版）》


高等院校教材同步辅导
及考研复习用书
高等数学辅导
同济·七版
（上下册合订本）
张天德●主编
全新升级
年销量10万册《高等数学辅导》

# 《考研数学—高等数学600题》

竞赛参考书



中国大学MOOC　课程　名校　学·问　考研 新　客户端　搜索感兴趣的课程

SHANDONG UNIVERSITY

## 高等数学—微积分(1)　我是老师

山东大学《高等数学-微积分》曾为国家精品课程，由国家级教学团队精心打造的MOOC，通过主讲教师凝练课程内容精华，用生动的语言，典型的例题及MATLAB的实例演示，让你在愉悦的环境中强化记忆，让我们一起走进微积分的殿堂，相信如果你认真地走过这一殿堂，你一定会有无穷无尽的收获！


最后三月冲刺计划

### 课程概述

在当今科技飞速发展，特别是计算机科学及其应用日新月异的时代，数学科学已渗透到各个科技领域，学习任何一门科学都要用到许多数学知识，而其中最基本的则是微积分。高等数学--微积分是非数学各专业的一门必修课，学习任何一门近代数学或工程技术都必须先学微积分。

《高等数学-微积分》MOOC课程分为《高等数学-微积分（1）》和《高等数学-微积分（2）》共11章。

《高等数学-微积分（1）》由6章构成，主要内容包括：绪论——微积分的产生及基本思想、函数、极限与连续、导数、中值定理与导数应用、一元函数积分学（不定积分、定积分、定积分应用）及常微分方程。

《高等数学-微积分（2）》由5章构成，主要内容包括：无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分。

本课程每一章均配有一次习题课，讲解典型例题及综合性习题，为更好地适应当前应用型创新人才培养的

第4次开课

课程已进行至
3/17周

开课：9月19日 10:00
结束：2018年1月14日

5289人参加

已参加，进入学习

签到

网址： https://www.icourse163.org/course/SDU-190001

# 中国大学mooc

网址：

**https://www.icourse163.org/course/SDU-1002193002**


**中国大学mooc**

第1次开课

开课时间： 2018年10月08日 ~ 2018年12月31日

学时安排： 3-5小时每周


大学数学基础（1）

山东大学


大学数学基础（2）

山东大学

**https://www.icourse163.org/course/SDU-1002989008**

**https://www.icourse163.org/course/SDU-1002982005**

选课方式1：

首先在爱课程网注册　　昵称：sd土木一班+姓名

链接下列网址：大学数学基础（1）

**https://www.icourse163.org/course/SDU-1002989008**

**选课方式2：**

第一步在百度搜：中国大学慕课

第二步搜微积分课程中任一团队成员姓名，例如：王玮

第三步在中国大学慕课平台“爱课程网”注册.

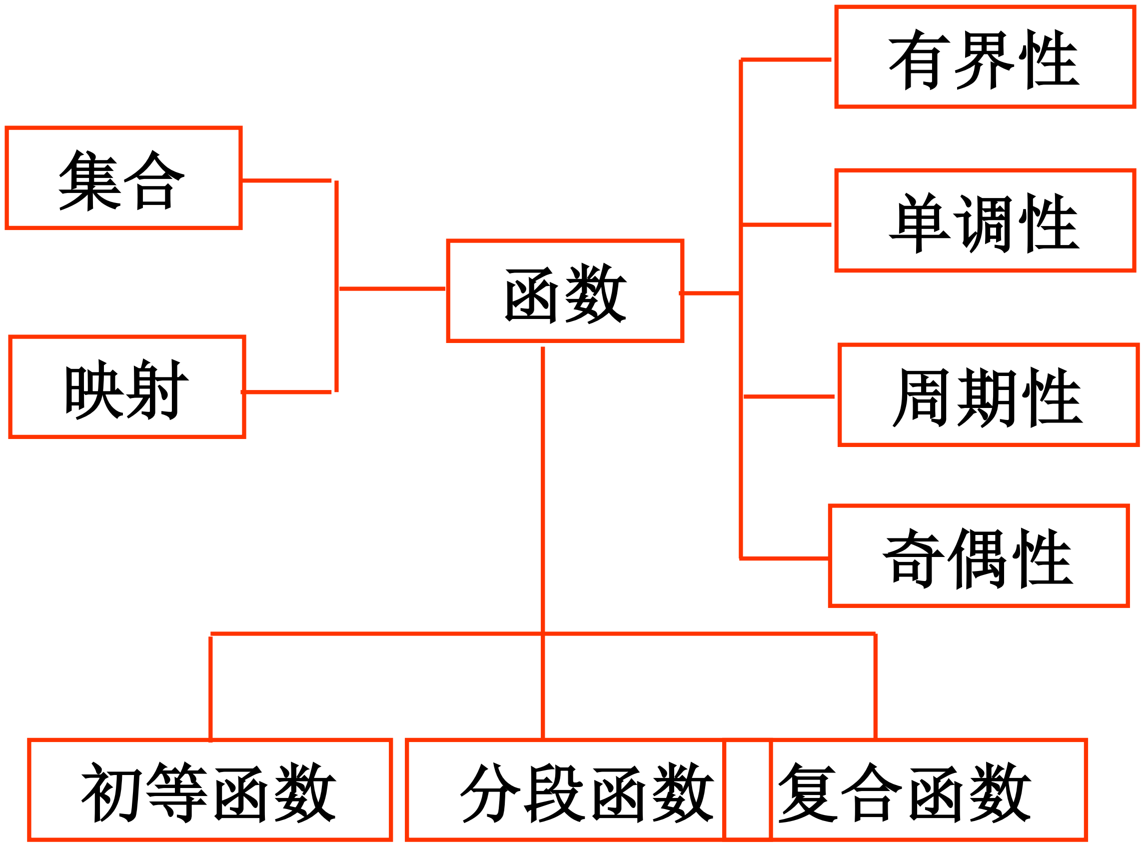
# 第一章　函数与极限

- 初等数学是常量数学，主要研究常量。
- 高等数学是变量数学，主要研究变量。
- 函数是变量之间的依赖关系

函数是高等数学的研究对象。极限的方法是研究函数的基本方法，贯穿于高等数学的始终，它是初等数学与高等数学的分水岭。因此理解函数的概念，掌握极限的理论是学好高等数学的基础。

本章先学习函数及其相关概念，介绍函数的基本性质和常见的初等函数；接着讨论数列、函数的极限，包括极限的定义和求几种不同形式极限的常用方法；然后介绍无穷小量和无穷大量，包括无穷小的比较；最后说明函数的连续性，并介绍利用连续函数的性质求解一些常见问题的方法。

# 第一节　函数



# 一、几个重要的概念：

## 1、邻域

以点$a$为中心的任何**开区间**称为点$a$的邻域,记为$U(a)$.

$\delta>0$,称集合$(a-\delta,a+\delta)$为**点$a$的$\delta$邻域**,记为$U(a,\delta)$.

$$U(a,\delta)=\{x\,\|x-a|<\delta\}.$$

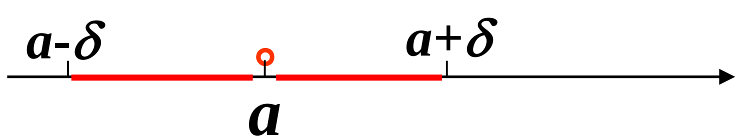

$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$

$a$叫做邻域的中心；

$\delta$叫做邻域的半径。

集合$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$称为**点$a$的去心$\delta$邻域**, 记为$\overset{\circ}{U}(a,\delta)$.

即 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$



## 2、分段函数

分段函数是由几个不同解析式表示的一个函数。不能把它看作多个函数。只不过在定义域的不同集合，有不同的解析式而已。

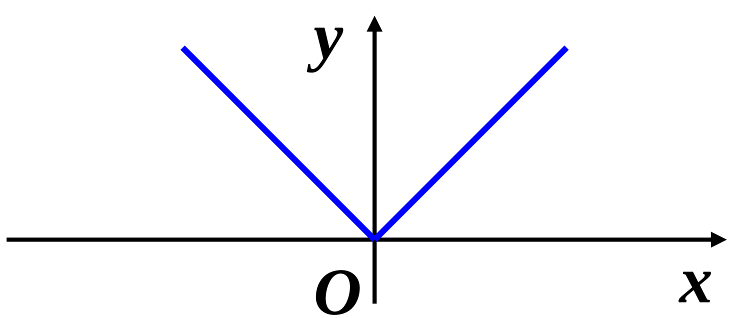
分段函数的定义域：是各个有定义的不同集合的并集。

要注意各段的分界点。

求分界点处的函数值要注意分界点在哪个区间。不同定义区间的自变量，按对应区间的函数表达式求函数值。

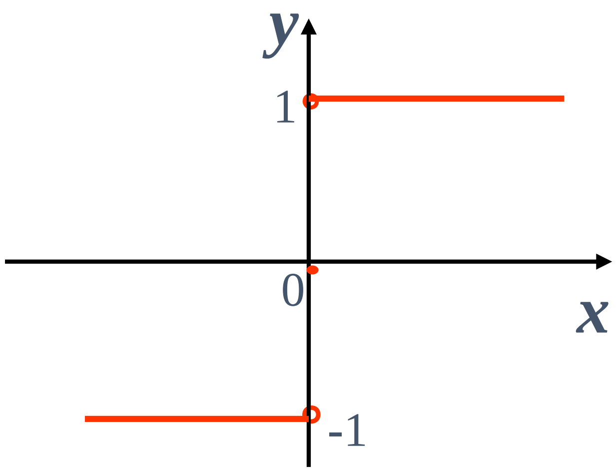
几个特殊的常用的分段函数：

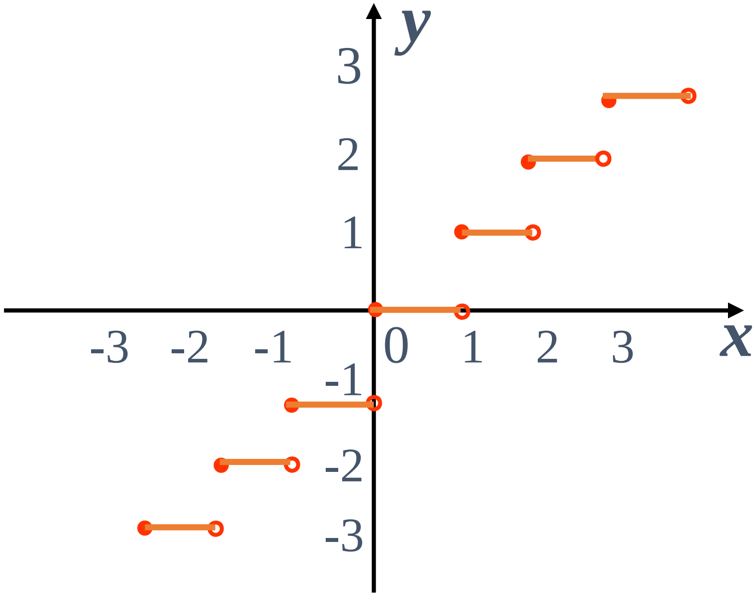
例1 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



例2　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当} x > 0, \\ 0, & \text{当} x = 0, \\ -1, & \text{当} x < 0 \end{cases}$$




阶梯曲线

例3　取整函数

$y = [x]$ (不超过 $x$ 的最大整数部分)

$$[-1.34] = -2; \qquad [\sqrt{2}] = 1; \qquad \left[\frac{5}{7}\right] = 0.$$

例4 狄利克雷函数：

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, \text{当 } x \text{ 是有理数} \\ 0, \text{当 } x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

注：1. 分段函数是一种特别重要的函数，它有几个不同的解析式

2. “分段”表示一个函数。所有解析式对应的定义域的并集是该函数的定义域。

3. 图像分段的函数不一定是分段函数，
分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线（曲面）。

## 3、函数的几种特性 （有界性、单调性、奇偶性、周期性）

**有界性：**

**上界：** 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$，数集 $\subset D$，如果$\exists$ 数 $K_1$，使得：$\forall x \in X$， 都有 $f(x) \le K_1$， 称 $f(x)$ 在 $X$ 上有上界。

**下界：** $\forall x \in X, \exists K_2$， 都有 $f(x) \ge K_2$，

称 $f(x)$ 在 $X$ 上有下界。

**有界：** $\forall x \in X, \exists M > 0$， 都有 $|f(x)| \le M$，

称 $f(x)$ 在 $X$ 上有界。

**无界：** $\forall M > 0, \exists x_0 \in X$， 使得 $|f(x_0)| > M$，

称 $f(x)$ 在 $X$ 上无界。

例如：$\sin x$在 $(-\infty,+\infty)$ 内， 1是它的一个上界,而大于1的任何数都是它的上界; -1是它的一个下界;

由$|\sin x| < 1$知，它是一个有界函数。

$\frac{1}{x}$在（0，1）内没有上界，但有下界，

所以在（0，1）内无界。

**定理：** $f(x)$ 在 $X$ 上有界 $\Leftrightarrow$ 在 $X$ 上 $f(x)$既有上界又下界。

## 奇偶性结论

两个奇函数的和或差仍为奇函数；

两个偶函数的和、差、积、商（除数不为0）仍是偶函数；

两个奇函数的积与商（除数不为0）为偶函数；

一个奇函数与一个偶函数的积与商（除数不为0）为奇函数。

## 周期性

设函数$f(x)$的定义域为$D$,如果存在一个正数$l$，使得对于任一$x \in D$,有$x \pm l \in D$,且$f(x \pm l) = f(x)$

则称$f(x)$为周期函数 称 $l$ 为周期( 一般指最小正周期 ).

**注: 周期函数不一定存在最小正周期 .**

例如：常数函数$f(x) = C$

或 狄里克雷函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{为有理数} \\ 0, & x \text{为无理数} \end{cases}$

## 4、反函数

**定义：**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$, 值域为 $W$ 则对于任意 $y_0\in W$, 必定有唯一 $x_0\in D$,使 $f(x_0)=y_0$，就说在w上确定了 $y=f(x)$ 的反函数，记作：$x=f^{-1}(y)$

相对于 $x=f^{-1}(y)$，$y=f(x)$ 称为**直接函数**。

**注：1.** 在同一个坐标系中，$x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f(x)$ 的图像是同一条曲线，只不过自变量所在的坐标轴不同。

**2.** 习惯上，总是以 $x$ 作为自变量，函数记做：$y=f^{-1}(x)$

在同一个坐标系中，$y=f^{-1}(x)$ 和 $y=f(x)$ 的图像是不同的两条曲线，它们关于直线 $y=x$ 对称。

## 5、复合函数

**定义:** 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 $D_f$，而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $Z_\varphi$，若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 $x$ 的复合函数.

$x \leftarrow$ 自变量，$u \leftarrow$ 中间变量，$y \leftarrow$ 因变量，

**注意:**

1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

$$Z_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$$ ——复合条件

例如 $y = \arcsin u,\ u = 2 + x^2;\quad y \neq \arcsin(2 + x^2)$

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

## 6. 五种基本初等函数与初等函数

### （1）基本初等函数：

常数函数、 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数
和反三角函数
统称为基本初等函数。

### （2）初等函数

基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所得到的可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

注：一般情况下，分段函数不是初等函数，
但是:

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

是初等函数。因为：$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 是 $y=\sqrt{u}, u=x^2$ 复合而成的。

# 三、例题

## 题型一　求函数的定义域

例1　求下列函数的定义域

$$(1)\ y=\ln\left(x^2-1\right)+\arcsin\frac{1}{x+1};$$

$$(2)\ y=\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}.$$

**解**　(1) 由题意，$x$ 应满足 $\begin{cases} x^2-1>0, \\ x+1\neq 0, \\ \left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leq 1. \end{cases}$

解不等式组得：$x\leq -2$ 或 $x\geq 0$ 。

所以函数的定义域为：$(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

（2）由题意

$$\begin{cases} \dfrac{5x-x^2}{4}>0, \\ \ln\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 0. \end{cases}$$

解得：$1\leq x\leq 4$

故函数的定义域为：

$1\leq x\leq 4$

**例2** 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geq 0$，求 $\varphi(x)$的定义域

**解** 由 $f(x)=e^{x^2}$ ,知 $f(\varphi(x))=e^{\varphi(x)^2}=1-x$ ，

由上面的等式解得 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$

又因为$\varphi(x)\geq 0$ ，所以$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

所以$\varphi(x)$ 的定义域为: $\ln(1-x)\geq 0$, 且 $1-x>0$ 即 $x\leq 0$.

## 题型二 求函数解析式

**例3** 设函数$f(x)$满足$af(x)+bf(1-x)=\frac{c}{x}$（$a,b,c$ 均为常数，且$|a|\neq|b|$），求$f(x)$.

**解** 令 $t=1-x$，则$x=1-t$.

所给等式变为：$af(1-t)+bf(t)=\frac{c}{1-t}$.

即$af(1-x)+bf(x)=\frac{c}{1-x}$.

解方程组
$$\begin{cases} af(x)+bf(1-x)=\dfrac{c}{x} \\ af(1-x)+bf(x)=\dfrac{c}{1-x} \end{cases}$$

得 $f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{ac}{x}-\dfrac{bc}{1-x}\right)$

**例4** 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$. 求 $f[g(x)]$、$g[f(x)]$.

**解** $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1;\\ 0, & |g(x)|=1;\\ -1, & |g(x)|>1,\end{cases}$

$$=\begin{cases}1, & e^x<1;\\ 0, & e^x=1;\\ -1, & e^x>1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0,\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}$$

$$=\begin{cases}e, & |x|<1;\\ 1, & |x|=1;\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1;\end{cases}$$

# 题型三 求复合函数的复合过程

例5. 写出下列函数的复合过程：

$1.\ y=\ln(1-x) \longrightarrow y=\ln u,\ u=1-x.$

$2.\ y=e^{\arctan\sqrt{x}} \longrightarrow y=e^{u},\ u=\arctan v,\ v=\sqrt{x}.$

$3.\ y=\sin^{2}(1-2x) \longrightarrow y=u^{2},\ u=\sin v,\ v=1-2x.$

(分解后的函数是：基本初等函数或其四则运算形式)

例6 设函数 $y=\arctan\left[a^{x}\sqrt{1-x^{2}}+\ln\left(x^{2}+2\right)\right]$，求函数的复合过程。

解 $y=\arctan u, \Longrightarrow u=u_1+u_2, \Longrightarrow u_1=vw, u_2=\ln t,$

$\Longrightarrow v=a^{x}, w=\sqrt{s}, t=x^{2}+2, \Longrightarrow s=1-x^{2}$

## 题型四 求反函数

例7 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\le x\le 2,\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

解 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2$. 解得 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-y}, -\infty<y<-1;$

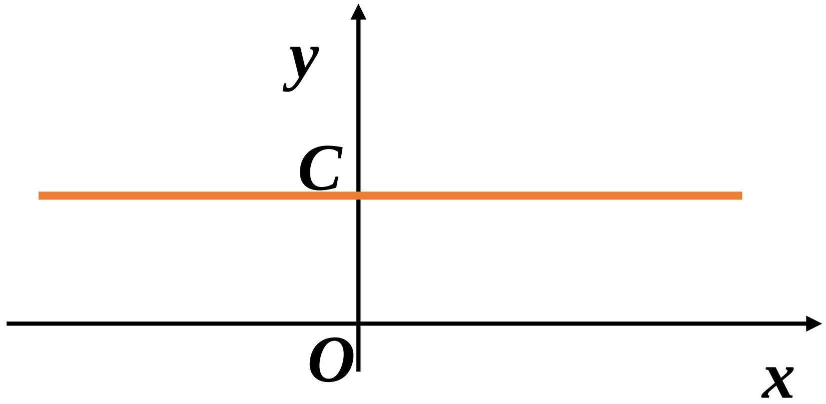
当 $-1\le x\le 2$ 时，$y=x^3$. 解得 $x=\sqrt[3]{y}, -1\le y\le 8;$

当 $x>2$ 时，$y=12x-16$. 解得 $x=\dfrac{y+16}{12}, 8<y<+\infty.$

所以反函数为 $y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}, & -\infty<x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\le x\le 8\ ,\\ \dfrac{x+16}{12}, & 8<x<+\infty\end{cases}$

## 题型五 函数特性讨论举例

例8 常数函数：$y = C$




显然，常数函数是有界的偶函数，无单调性，可以看作以任意常数为周期，当$C = 0$时， 是唯一的既奇又偶的函数。

例9　设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，且$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减少，证明：对任意两点$x_1>0, x_2>0$，有

$$f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$$

**证明**　不妨设$x_1\le x_2$，则有$\dfrac{f(x_2)}{x_2}\le\dfrac{f(x_1)}{x_1}$.

$$\therefore\ x_1 f(x_2)\le x_2 f(x_1).$$

又因为$x_2\le x_1+x_2$，$\therefore\ \dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\le\dfrac{f(x_2)}{x_2}$.

即　$x_2 f(x_1+x_2)\le(x_1+x_2)f(x_2)\le x_2 f(x_1)+x_2 f(x_2).$

所以 $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$

# 思考题

下列函数能否复合为函数 $y = f[g(x)]$，若能，写出其解析式、定义域、值域.

(1) $y = f(u) = \sqrt{u}$，$u = g(x) = x - x^2$

(2) $y = f(u) = \ln u$，$u = g(x) = \sin x - 1$

# 思考题答案

(1) $y = f[g(x)] = \sqrt{x - x^2}$

$x \in D = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$, $f(D) = [0, \frac{1}{2}]$

(2) 不能. $\because$ $g(x) = \sin x - 1 \le 0$

$g(x)$的值域与$f(u)$的定义域之交集是空集.

# 练习

1. $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{e-e^{(\frac{3x-1}{2})^2}}$ 定义域 ______.

2. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\lg(x-1)}}$ 定义域 ______.

3. $f(\log_a x)=\sqrt{x}$，则 $f(x)=$ ______. 定义域 ______.

$(a\neq 1,\ a>0)$

4. 判断 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 奇偶性.

5. 下列函数中非奇非偶

(A) $f(x)=3^{x}-3^{-x}$ (B) $f(x)=x(1-x)$

(C) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ (D) $f(x)=x^{2}\cos x$

6. $f(x)$ − 偶, $g(x)$ − 奇, 则 $F(x)=f(x)g(x)$ 奇偶性为 ______ .

7. $f(x)$满足：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则$f(x)$奇偶性如何？

8. $\varphi(x)$是$x$到离$x$最近整数的距离，求$\varphi(x)$表达式及图形.

9. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ______.

10. $f(x)=|x|+x, g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}$

则 $f(g(x))=$ ______，$g(f(x))=$ ______.

11. 已知 $2f(x^3)-f(x^{-3})=3x-1$，求 $f(x)$.

# 答案

1.$[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}]$　　2.$(1,\ 1.1)\cup(1.1,\ +\infty)$

3.$f(x)=a^{\frac{x}{2}}$. 定义域 $(-\infty,\ +\infty)$.　　4.奇函数

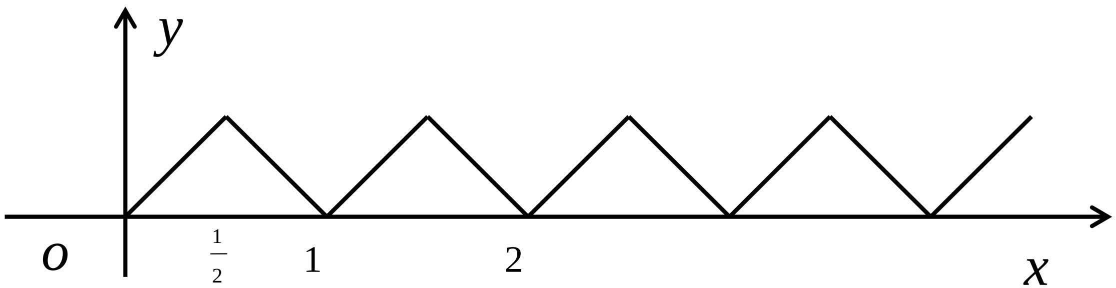
5.B　　6.奇函数

7.解：$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0.$

$0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$

$\therefore\ f(x)$为奇函数

8. $\varphi(x) = \begin{cases} x - n, n \le x < n + 0.5 \\ n + 1 - x, n + 0.5 \le x < n + 1 \end{cases}$




9. $f[f(x)] = 1$.

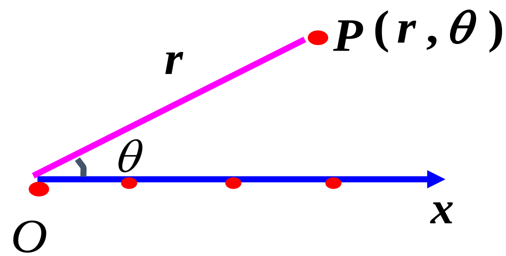
10. $f(g(x)) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x < 0 \\ 2x^2, \quad x \ge 0 \end{cases}$, $g(f(x)) = \begin{cases} 4x^2, \quad x \ge 0 \\ 0 \quad , \quad x < 0 \end{cases}$

11. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1$.

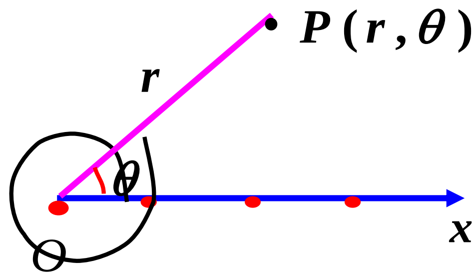
# 极坐标

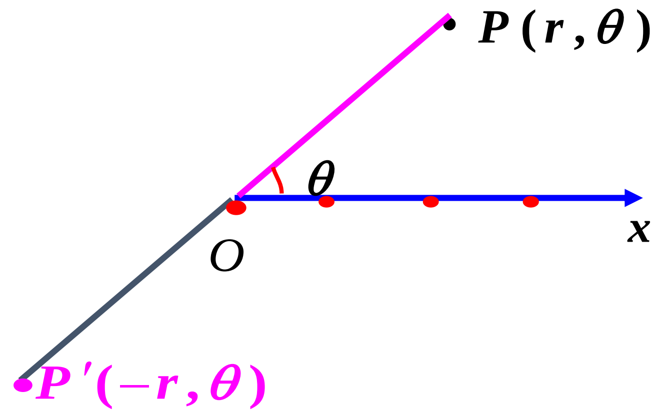
## 1. 极坐标系

在平面内任取一定点$O$，过$O$点引射线$Ox$，再规定一个长度单位及角度的正方向（通常取逆时针方向），这样就确定了一个**极坐标系**。其中，定点$O$叫做**极点**，射线$Ox$叫做**极轴**。




在极坐标系下，平面上任一点$P$的位置就可以用线段$OP$的长度$r$及从$Ox$到$OP$的角度$\theta$来确定。有序实数对$(r,\theta)$就称为$P$点的**极坐标**，记为$P(r,\theta)$。其中$r$叫做**极径**，$\theta$叫做**极角**。极点$O$的极径为0，极角可取任何值。




对于给定的极坐标$(r,\theta)$，平面上有唯一的点与之对应；但对于平面上的点$P(r,\theta)$，则$(r,\theta+2n\pi),(-r,\theta+(2n+1)\pi)(n\in Z)$都可以作为它的极坐标。因此，平面上的点与有序实数对$(r,\theta)$之间，一般没有一一对应的关系。

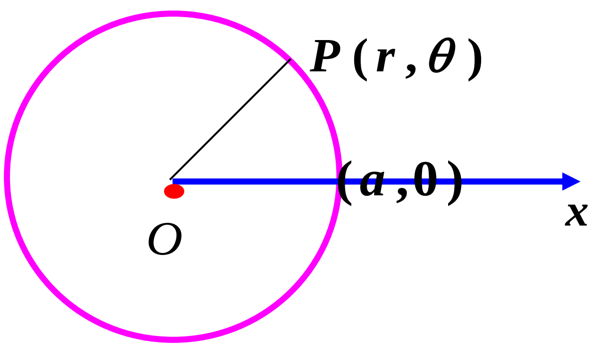
但若规定$r\geq 0, 0\leq\theta<2\pi$，除极点$O$外，平面上的点与极坐标之间就一一对应了。

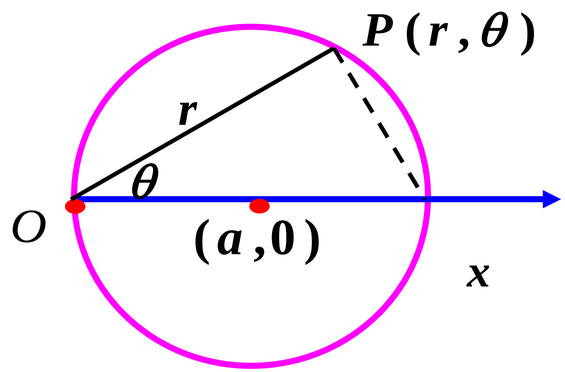
在通常情况下,我们**规定:**$r\geq 0$，而极角可以取任意实数。

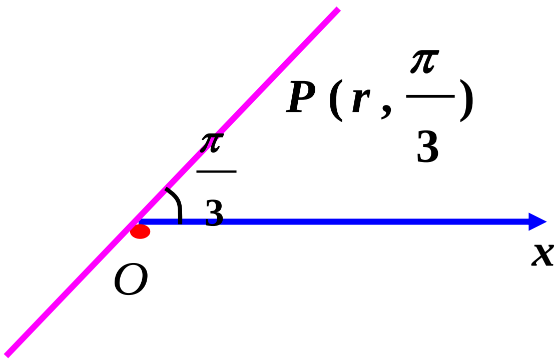
## 2．极坐标方程

曲线上点的极坐标$r$ 与$\theta$ 之间的关系可以用式$r = r(\theta)$表示，称$r = r(\theta)$为曲线的极坐标方程。

以极点$O$为圆心，以$a$为半径的的圆的极坐标方程：$r = a$.




以点$(a,0)$为圆心，以$a$为半径的的圆的极坐标方程$r = 2a\cos\theta$

过极点$O$，且与极轴的夹角为$\frac{\pi}{3}$的直线方程 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

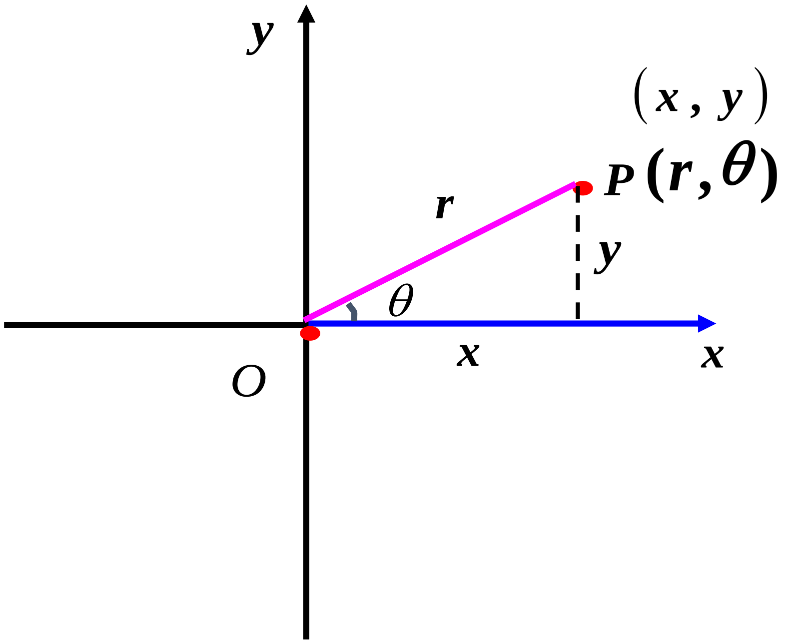
## 3．极坐标与直角坐标的关系

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$




以极点$O$为圆心，以$a$为半径的的圆的极坐标方程:$r = a$.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

以点$(a,0)$为圆心，以$a$为半径的的圆的极坐标方程$r = 2a\cos\theta$

$$r = 2a\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2a \cdot r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2ax$$