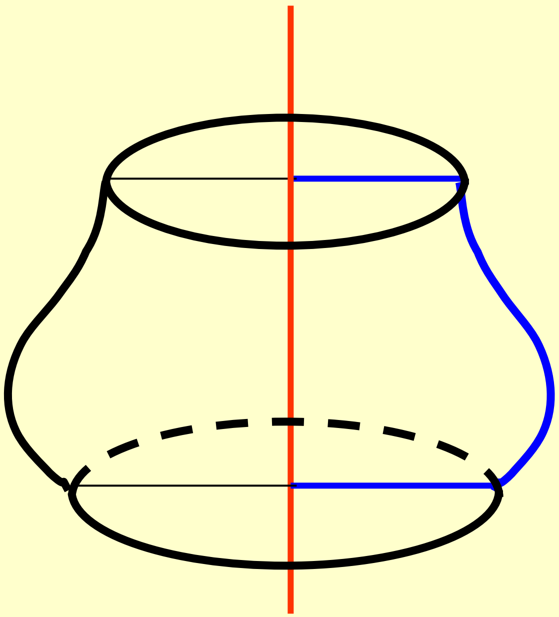
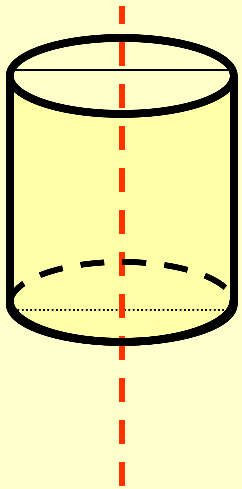
# 三、体积

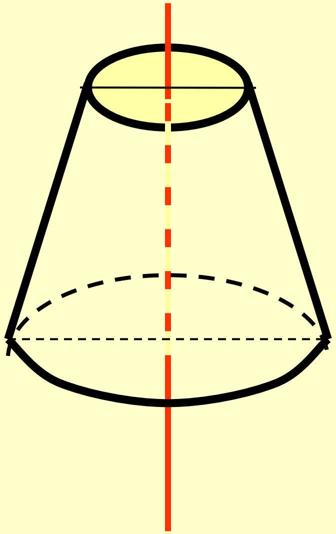
## （一）旋转体的体积

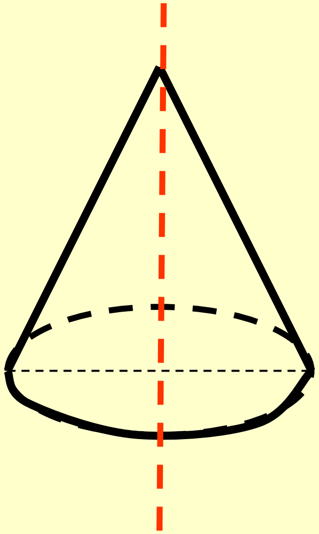
**旋转体**就是由一个平面图形绕平面内一条直线旋转一周而成的立体，这直线叫做旋转轴。

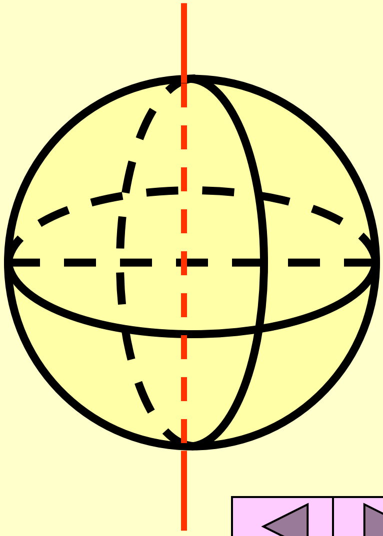
如图所示圆柱体、圆台体、圆锥、及球体都是旋转体。





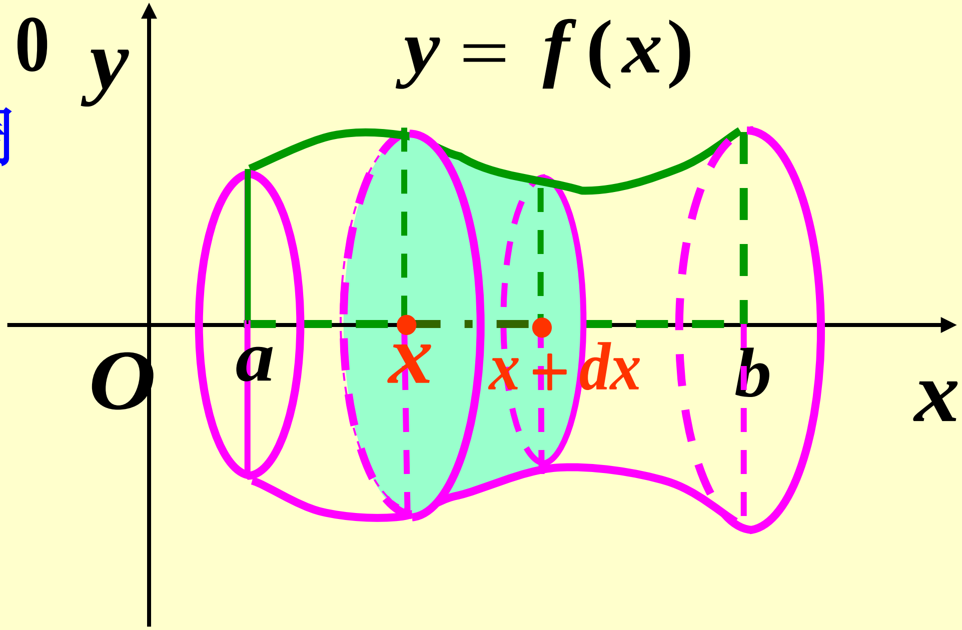






求由 $y=f(x), x=a, x=b, y=0$ 围成的曲边梯形绕 $x$ 轴旋转一周而成的立体的体积。

积分变量为 $x$，积分区间为 $[a,b]$，在 $[a,b]$ 上任取小区间 $[x,x+dx]$，相应的窄曲边梯形绕 $x$ 轴旋转而成的薄片的体积，

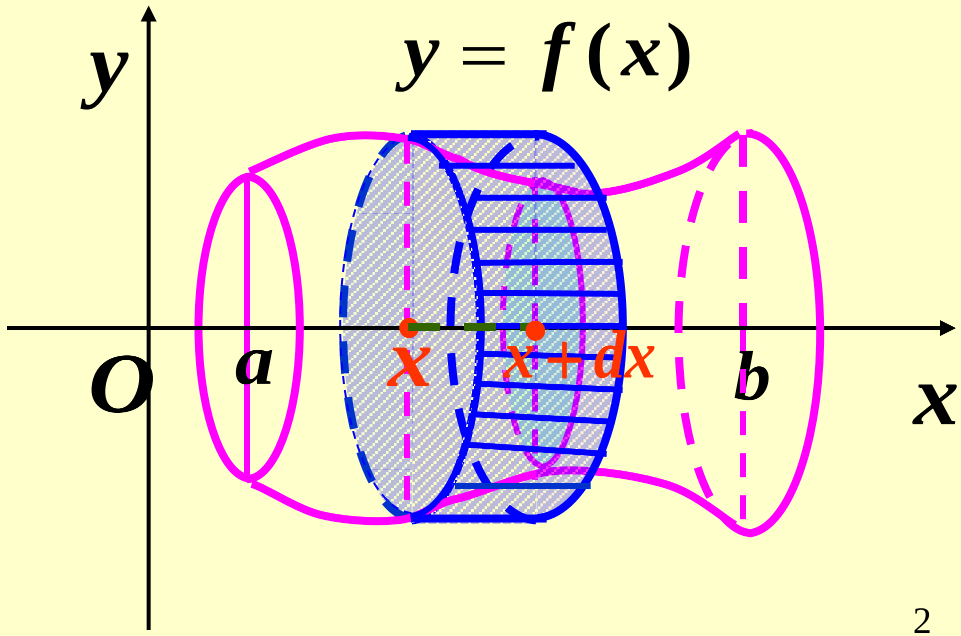



用圆柱体的体积近似代替，

圆柱体的体积即**体积元素**：

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx$$

所以 $$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

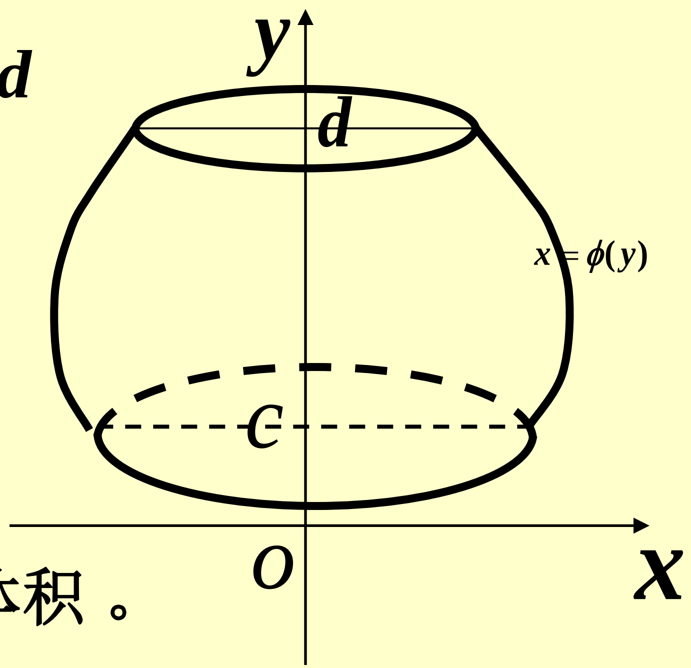


由曲线 $x=\phi(y)$ 和直线 $y=c, y=d$

与 $y$ 轴所围成的曲边梯形，绕 $y$ 轴

旋转一周而成的旋转体的体积为：

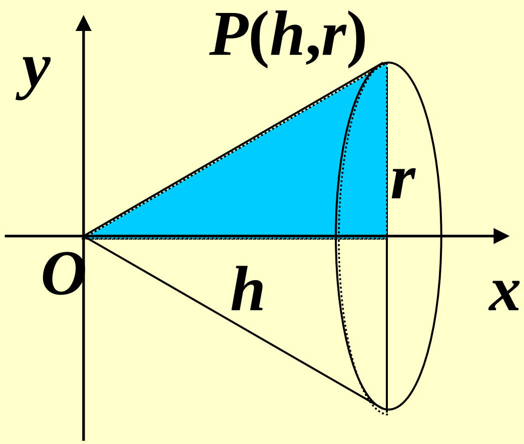
$$V=\pi\int_c^d[\phi(y)]^2dy$$




例1 求以 $r$ 为底半径，$h$ 为高的圆锥的体积 。

解： 建立坐标系如图

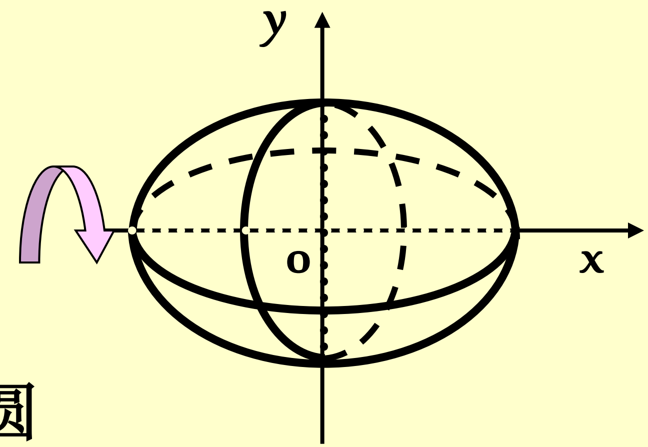
$OP$ 的直线方程为： $y=\dfrac{r}{h}x$




于是所求圆锥体的体积为：

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi r^2h}{3}$$

**例2** 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕x轴旋转而成的旋转体（叫做旋转椭球体）的体积。




**解：** 这个椭球体可以看作是由上半个椭圆及 $x$ 轴围成的图形绕 $x$ 轴旋转而成的立体，

上半个椭圆的方程为： $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

所以： $V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

若绕 $y$ 轴旋转

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

当 $a=b$ 时，旋转椭球体就成为半径为 $a$ 的球体,它的体积为

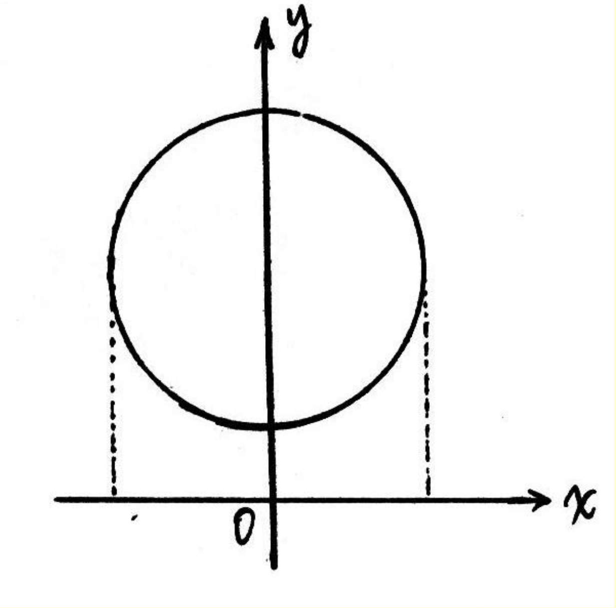
$$V=\frac{4}{3}\pi a^3$$

例3. 求由圆$x^2+(y-a)^2=R^2 (0<R<a)$绕$x$轴旋转一周所得立体的体积.

解 $V=2[\int_0^R \pi(a+\sqrt{R^2-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_0^R \pi(a-\sqrt{R^2-x^2})^2\mathrm{d}x]$

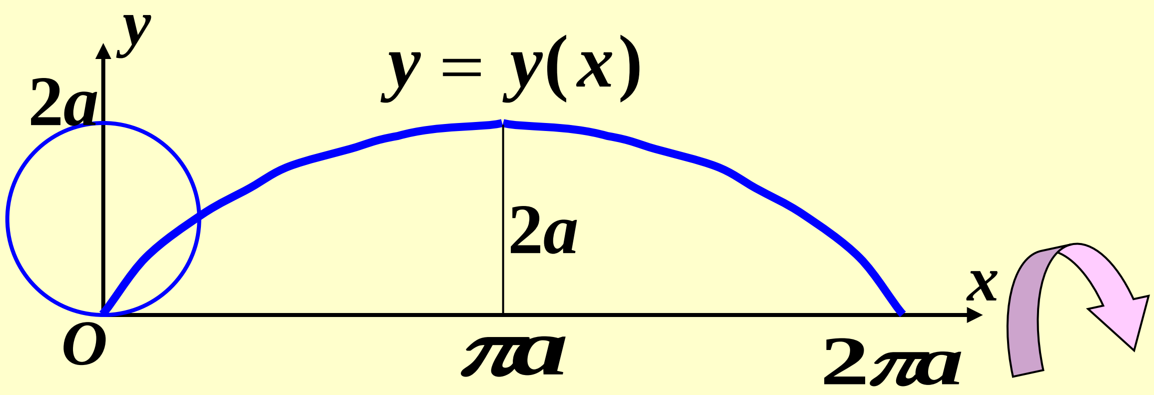
$=8\pi a\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$

$=8\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2 t\mathrm{d}t=2\pi^2 aR^2$



**例4** 计算由摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 参数方程情形

的一拱、直线 $y=0$所围成的图形绕$x$轴轴旋转而成的旋转体的体积。




**解:** 图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x)dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt = 5\pi^2 a^3$$

令$x = a(t-\sin t)$,
$y = a(1-\cos t)$.
则$dx = a(1-\cos t)dt$
当$x=0$时，$t=0$
当$x=2\pi a$时，$t=2\pi$

## （二）平行截面面积为已知的立体的体积

用 $A(x)$ 表示过点 $x$ 且垂直于 $x$ 轴的截面面积（已知）。

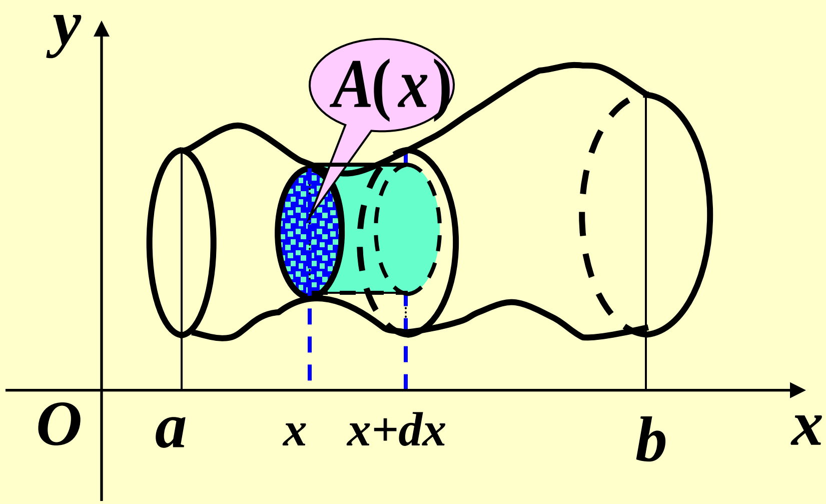
积分变量为 $x$，积分区间为 $[a,b]$，

在 $[a,b]$ 上任取小区间 $[x, x+dx]$，

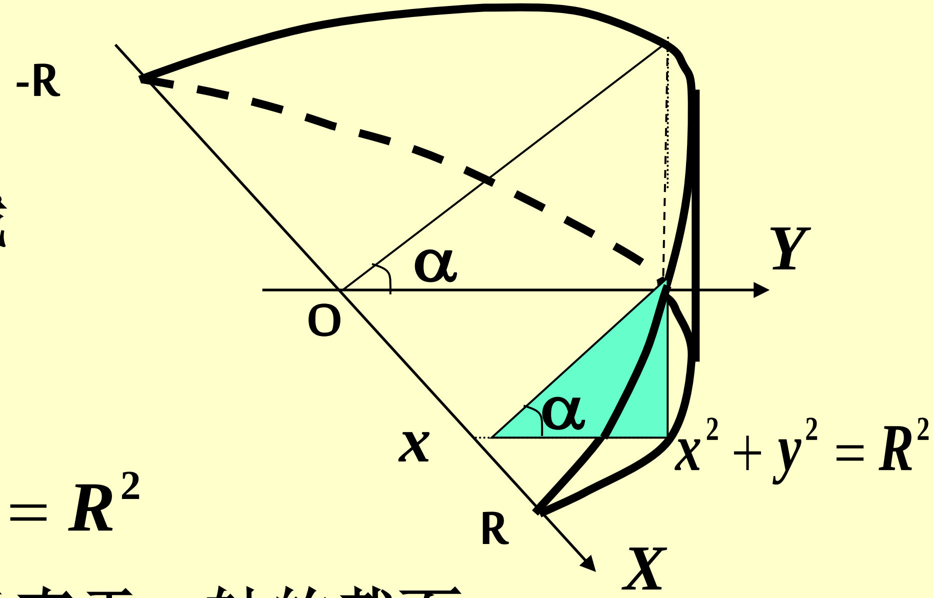
则体积元素为:

$$dV = A(x)dx$$

所以 $$V = \int_a^b A(x)dx$$



**例5**　一平面经过半径为$R$的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角$\alpha$，计算这平面截圆柱体所得立体的体积。




**解:** 建立直角坐标系如图:

则底圆的方程为: $x^2+y^2=R^2$

过任意点 $x\in[-R,R]$, 作垂直于 $x$ 轴的截面,

截面为一直角三角形,它的两条直角边的长分别为$\sqrt{R^2-x^2}$,

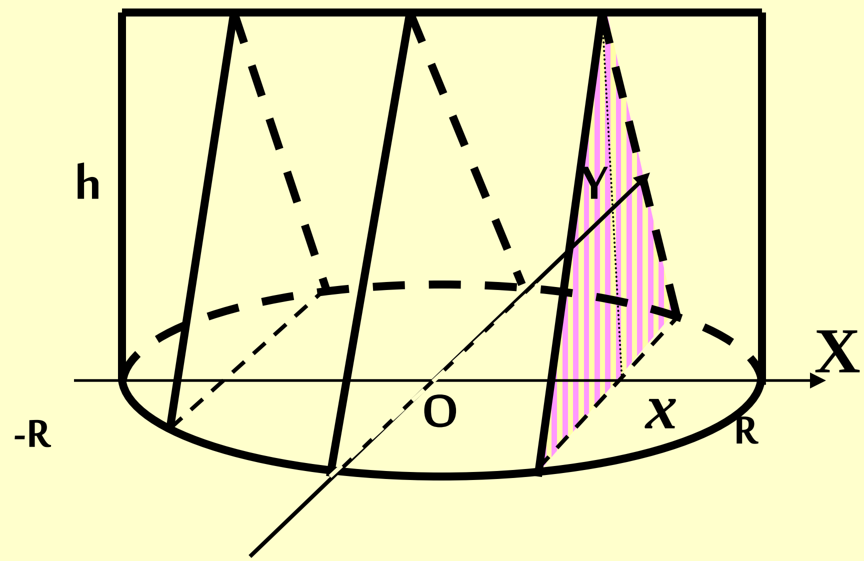
及 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$, 因而截面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

于是所求立体体积为:

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\frac{1}{2}\tan\alpha\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

**例6** 求以半径为$R$的圆为底，平行且等于底圆直径的线段为顶、高为$h$的正劈锥体的体积。




**解：** 建立底面直角坐标系如图，使 $x$ 轴与正劈锥的顶平行，

则底圆的方程为： $x^2 + y^2 = R^2$

过 $x$轴上的点 $x$ 作垂直于 $x$ 轴的平面，截正劈锥体得等腰三角形。

这截面的面积为： $A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}$

于是所求正劈锥体得体积为：

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)dx = h\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx$$

$$= 2R^2 h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^2 h}{2}$$

**正劈锥体的体积等于同底同高的圆柱体体积的一半。**

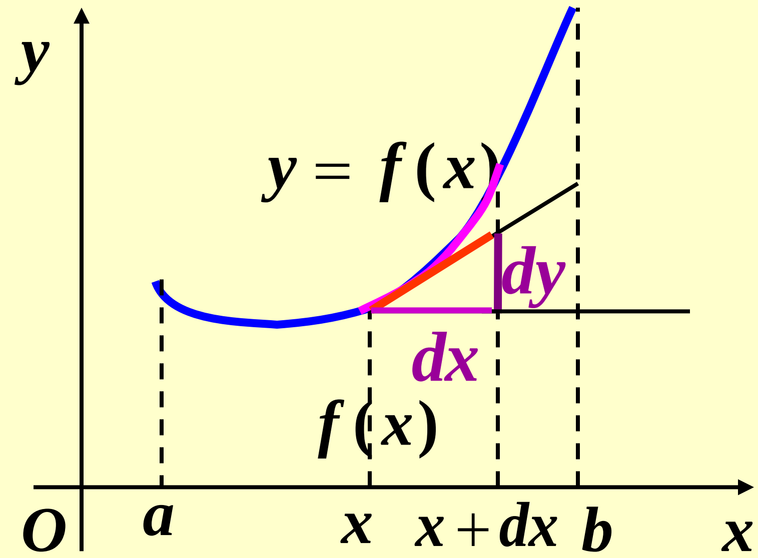
# 四、平面曲线的弧长

## （一）直角坐标情形

设曲线弧由

$$y = f(x)\ (a \le x \le b)$$

给出， 其中$f$（$x$）在$[a, b]$上上具有一阶连续导数，现在来计算这**曲线弧的长度**。




在$[a,b]$上任取小区间$[x, x+dx]$, 从而得**弧长元素**:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$ ---弧微分公式

于是所求**弧长为** $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

例1　计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于 $x$ 从 $a$ 到 $b$的一段弧的长度。

解

$$\because\ y' = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore ds = \sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}dx = \sqrt{1+x}dx$$

因此所求弧长为:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+x}dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}\right]$$

## （二）参数方程情形

设曲线弧由参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

给出，其中 $\phi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数。

现在来计算这**曲线弧的长度**。

取 $t$ 为积分变量，它的变化区间为 $[\alpha, \beta]$，

**弧长元素为:**

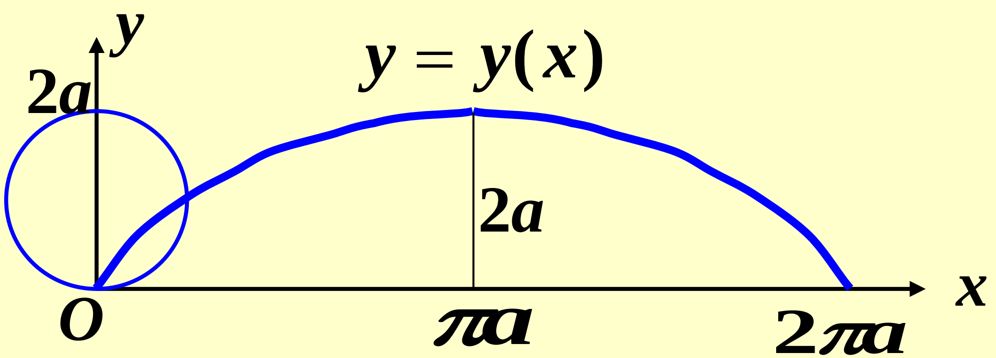
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\phi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2}$$

$$= \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

于是所求**弧长为**

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

**例2** 计算摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$ 的一拱 $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的长度。




**解:** $\because \begin{cases} x' = a(1-\cos\theta) \\ y' = a\sin\theta \end{cases}$

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\therefore\ s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

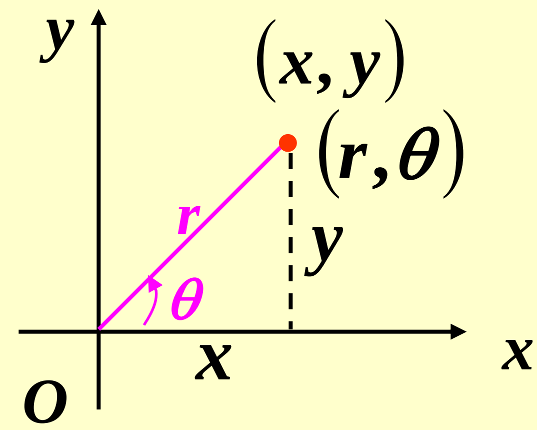
## （三）极坐标情形

可看作以$\theta$为参数的情形

设曲线弧由极坐标方程 $r = r(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$ 给出，其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数。

现在来计算这曲线弧的长度，由直角坐标与极坐标的关系可得：

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta = r(\theta)\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$



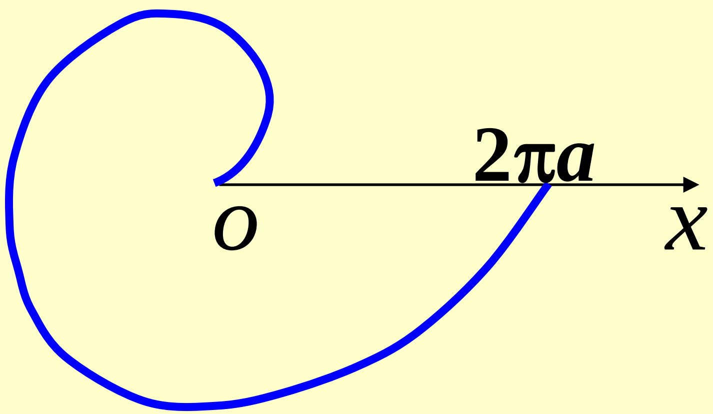

$$\begin{cases} x' = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \\ y' = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

**弧长元素为：** $ds = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\,d\theta = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$

**所求弧长为：** $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$

**例3** 求阿基米德螺线 $r = a\theta, (a>0)$ 相应于 $\theta$ 从 0 到 $2\pi$ 一段的弧长。

解 $r' = a$




弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,d\theta$$

$$= a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

于是所求弧长为

$$s = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$$

$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right]$$