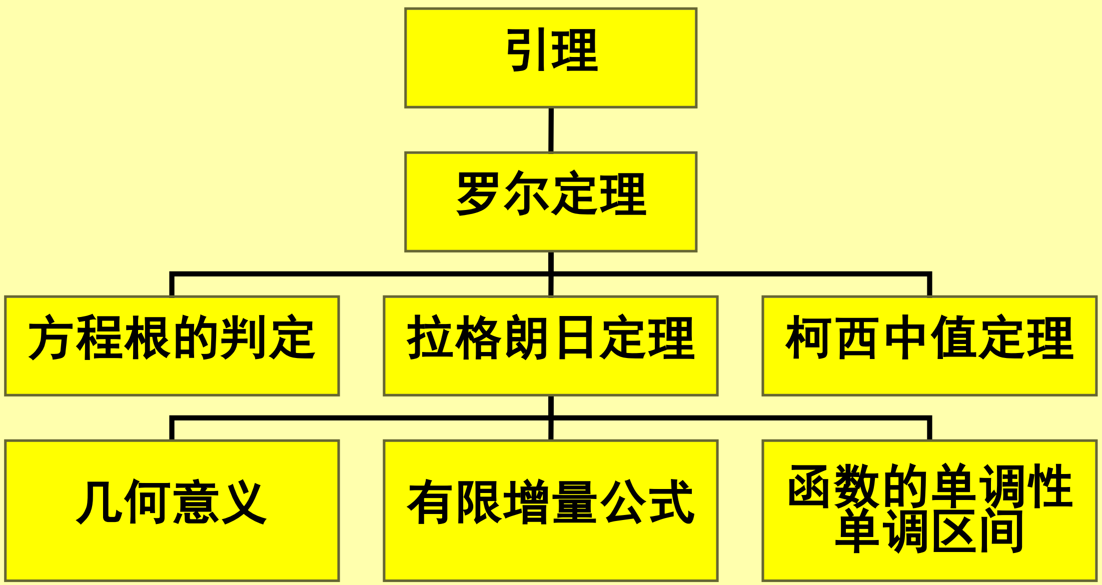
第三章　　中值定理和导数的应用

第一节　　微分中值定理



引理(费马定理）：若函数$y=f(x)$（1）在x_0的某邻域内有定义且在x_0 取得最值；（2）在x_0处可导。则$f'(x_0)=0$.

证：不妨设$f(x_0)$是x_0某邻域内的最

保号性定理

证明思路

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\Delta x<0\text{时}\\ \Delta x>0\text{时}\end{array}\right\} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$$

$$f_-'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$$

$\Delta x<0$

$$f_+'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$$

$\Delta x>0$

而在x_0点$f(x)$可导，必有：

$$f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$$

故 $$f'(x_0)=0$$

不妨设$f(x_0)$最大

$f_-'(x_0)\ge 0$

$f_+'(x_0)\le 0$

x_0处可导

$f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$

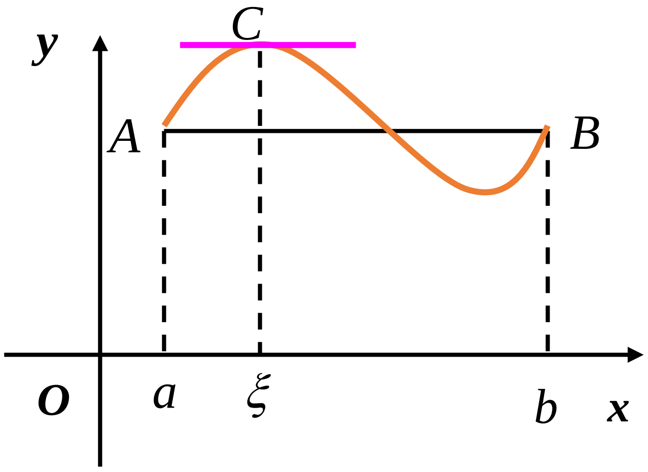
$f'(x_0)=0$

一、罗尔定理

条件：(1)若 $f(x)$在 $[a,b]$上连续；

(2)在 (a,b)内可导；

(3) $f(a) = f(b)$.



结论： 则至少有一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

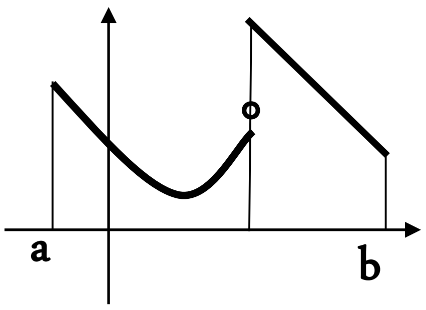
$$f'(\xi) = 0$$

注意：

（1）条件并非缺一不可；

（2）罗尔定理的条件充分而非必要。

证明的关键是： ξ是区间的内点；



条件: (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在 (a,b) 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$.

结论: 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=0$$

引理(费马定理)：

若函数 $y=f(x)$ （1）在 x_0 的某邻域内有定义且在 x_0 取得最值；（2）在 x_0 处可导。则 $f'(x_0)=0$.

证明思路:

M=m

f(x)=C

(a,b)内任意点可为ξ

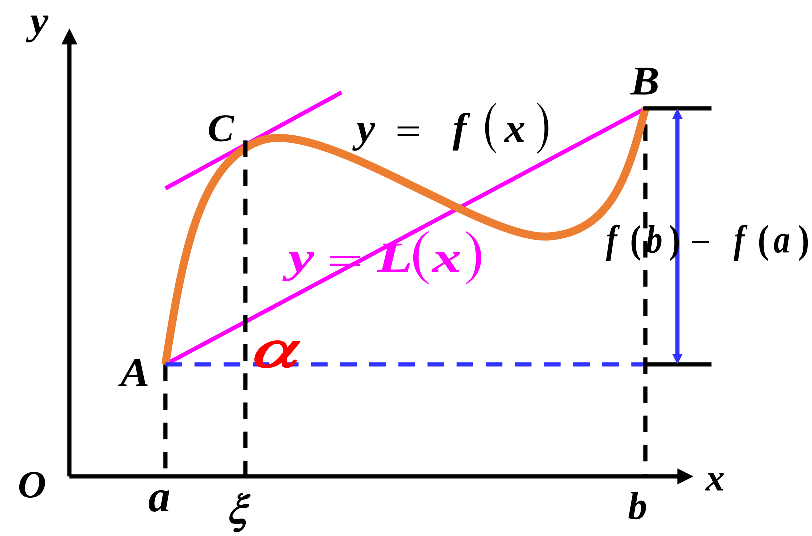
$M\neq m$

f(a)=f(b)

M,m不可能都在端点取得，设M由区间内某点取得

由引理可得结论

二、拉格朗日中值定理



条件： 若 $f(x)$在 $[a,b]$上连续，

$f(x)$在 (a,b)内可导，

结论： 至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

结论等价于： $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

或： $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

AB的方程为：

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$L(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$\varphi(x)=f(x)-L(x)$ 在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件，且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证　法一

构造函数:

$$\phi(x) = f(x) - L(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

显然　$\phi(a) = \phi(b) = 0$

且　$\phi'(x) = f'(x) - L'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\phi(x)$满足罗尔定理的条件

则必然$\exists\, \xi \in (a, b)$,　使得

$$\phi'(\xi) = f'(\xi) - L'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

即　$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

所以　$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)}$

法二：构造辅助函数

由 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 得 $f'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C \quad \Rightarrow f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x=C$

则设 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$

且有 $F(a)=F(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$

法一构造函数：

$$\phi(x)=f(x)-L(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

拉格朗日中值公式的其它形式

$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$　　ξ在 x 与 $x+\Delta x$ 之间

或　$\Delta y=f'(\xi)\Delta x$　　ξ在 x 与 $x+\Delta x$ 之间

或　$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$

$\because 0<\theta<1,$

$\therefore \theta$可以理解为“不到一个　”

$\therefore x+\theta\Delta x$ 则可以理解为

“加上不到一个 Δx”

自然，这点落在

区间 $(x, x+\Delta x)$ 内部

注意： 函数的微分是增量的近似公式

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

其中，x在区间的端点取值，dx则要很小，且$f'(x)$不为零。

而拉格朗日增量公式则是一个精确公式

$$\Delta y = f'(\xi)\Delta x$$

其中，ξ在区间的内部取值，

不要求 Δx（即：dx）很小，只要是有限量　就行。

而且，$f'(\xi)$也可以等于零。

因此，拉格朗日中值公式又叫做有限增量公式

推论1 若在区间I上$f'(x)=0$,则$f(x)$为常数.

证 $\forall x_1, x_2 \in I(x_1 < x_2)$, 则$f(x)$在$[x_1, x_2]$上满足拉格朗日定理的条件

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0, \quad (x_1<\xi<x_2).$$

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\therefore \ f(x)=C$$

推论2

若在区间I上$f'(x)=g'(x)$, 则$f(x)=g(x)+C$.

三、柯西中值定理

条件： 若 $f(x)$及 $F(x)$满足：

(1)在 $[a,b]$上连续，

(2)在 (a,b)内可导，

$(3)\forall x\in(a,b), F'(x)\neq 0,$

结论： 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得

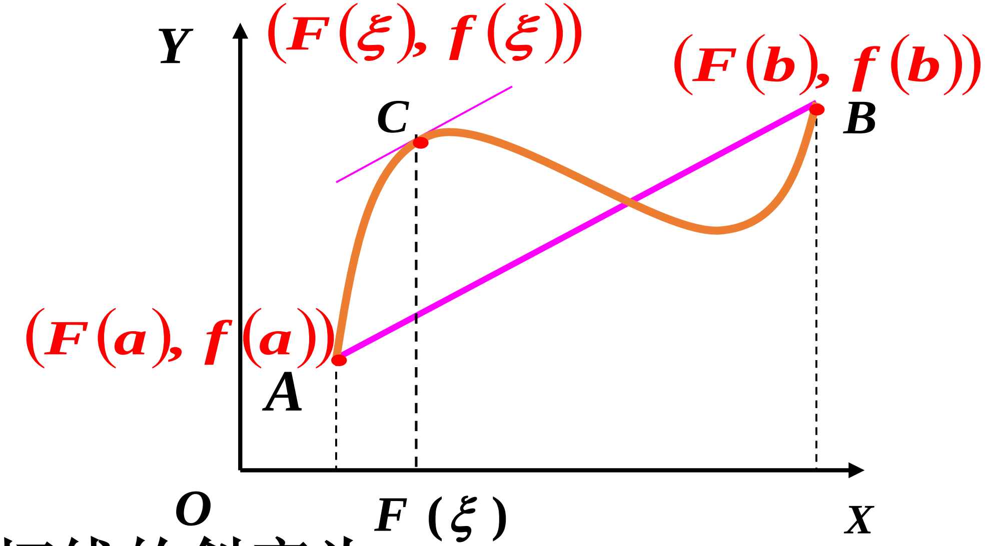
$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

柯西定理的几何意义

设曲线弧 AB 由参数方程

$$\begin{cases} X = F(x) \\ Y = f(x) \end{cases} \quad (a \le x \le b)$$

确定，其中 x 为参数。



则曲线上任一点（X,Y）处的切线的斜率为：

$$\frac{dY}{dX} = \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

弦AB的斜率为： $\dfrac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}$

假定点C对应于参数 $x = \xi$，那么曲线上点 C 处的切线平行于AB可表示为

$$\left.\frac{dY}{dX}\right|_{x=\xi} = \boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}}$$

注意：

（1）定理中的$f'(\xi)$，$F'(\xi)$是在同一点ξ处的导数值，所以下面的证明是错误的：

由定理的条件可知 $f(x)$、$F(x)$都满足拉格朗日定理的条件

故 $\exists\, \xi \in (a, b)$使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

两式相除得到定理的结论。

因为不能保证，两个函数由拉格朗日定理得到的是同一个点ξ.

（2）若$F(x)=x$，则成为柯西定理的特殊情况，与拉格朗日定理的形式相同。所以拉格朗日定理是柯西定理的特例。柯西定理则是拉格朗日定理的推广 。

（3）柯西定理的一个重要应用就是洛必达法则。

证：由拉格朗日中值定理：$\exists \eta \in (a,b)$，使得：

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)$$

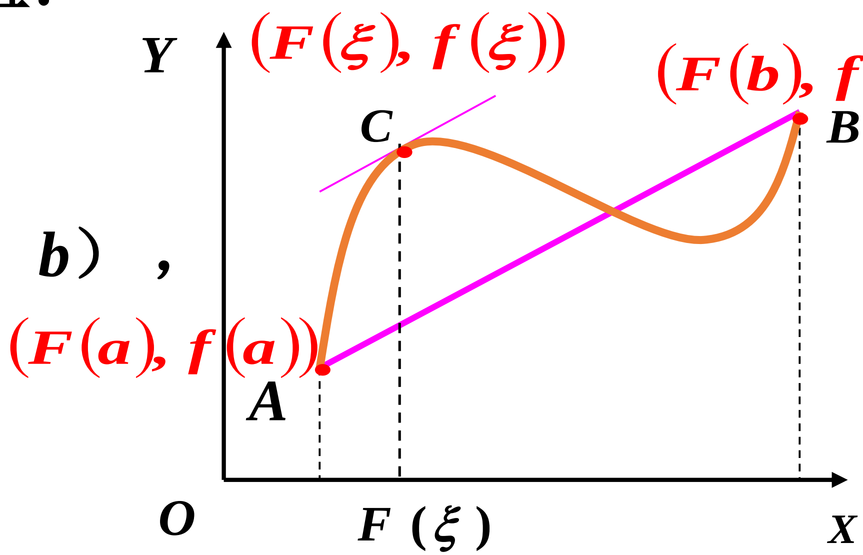
$\because$ 对 $\forall x \in (a,b)$ 已知 $F'(x)\neq 0$ $\quad \therefore F(b)-F(a)\neq 0$

引入辅助函数：

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\left[F(x)-F(a)\right]$$

$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的全部条件，且：

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(x)$$



由罗尔定理，至少存在一点ξ∈（a，b），使

$$\varphi'(\xi)=0,$$

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)=0$$

于是：

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

四. 例题:

1. 验证罗尔定理对函数 $y = \ln \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性。

解: 函数 $y = \ln \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导，

（函数 $y = \ln \sin x$ 是初等函数，且当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 时，$\sin x > 0$,

即 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 是 $y = \ln \sin x$ 定义域内的一部分； $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$.)

且 $\ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \sin \frac{5\pi}{6} = \ln \frac{1}{2}$.

令 $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

即 $\exists \xi = \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

(一)使用中值定理可讨论根的存在性

2．不用求函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间。

解　显然函数 $f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且 $f(1)=f(2)=0$，

由罗尔定理：$\exists\xi_1\in(1,2)$，使得$f'(\xi_1)=0$.

同理$\exists\xi_2\in(2,3),\xi_3\in(3,4)$，使得 $f'(\xi_2)=0$，$f'(\xi_3)=0$.

即 ξ_1、ξ_2、ξ_3都是方程 $f'(x)=0$ 的根。

注意到 $f'(x)=0$为三次方程，它最多有三个根。

我们已经找到它的三个实根ξ_1、ξ_2、ξ_3，

所以这三个根就是方程 $f'(x)=0$ 的全部根。

3. 设 $a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n = 0$，试证：在 $(0,1)$ 内存在 x 满足：

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$

证明

设 $f(x) = a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}$,

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

且 $f(0) = 0 = f(1)$,

由罗尔定理得：在 $(0,1)$ 内存在 x 满足：$f'(x) = 0$,

即 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$

(二)使用中值定理证明不等式

4. 证明当 $x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

证　设 $f(x)=\ln(1+x)$，显然，函数$f(x)$ 在$[0,x]$上满足拉格朗日定理的条件，即

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\qquad 0<\xi<x$$

由于 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$. 则

$$\therefore \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)=\frac{1}{1+\xi}x<x$$

5. 证明下列不等式：

$(1)\left|\arctan a - \arctan b\right| \le |a-b|$

(2)当 $x>1$时，$e^x > e\cdot x$

证 (1)令 $f(x)=\arctan x,\ x\in[a,b]$

由 $f(x)$在 $[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\qquad \xi\in(a,b).$$

即 $$\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\xi^2}(b-a)$$

所以 $$\left|\arctan a-\arctan b\right|=\frac{1}{1+\xi^2}|a-b|\le|a-b|$$

（2）令 $f(x)=e^x$

取区间$[1,x]$，由于函数 $f(x)$在$[1,x]$上连续，在$(1,x)$内可导，

所以 $$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),\qquad \xi\in(1,x).$$

即 $$e^x-e^1=e^{\xi}(x-1)>e(x-1)$$

因此 $$e^x>xe$$

6. 设 $a > b > 0, n > 1$, 证明

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

证 设 $f(x) = x^n, x \in [b,a]$.

则 $f(x)$在$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导，

故 $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b), \quad \xi \in (b,a).$

即 $a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a-b), \quad \xi \in (b,a).$

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a-b) < na^{n-1}(a-b)$$

7. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导，且

$f(a)=f(b)$. 证明至少存在一个$\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)>0$.

证明　因为 $f(a)=f(b)$ 且 $f(x)$不恒为常数,

所以至少存在一点 $c\in(a,b)$, 使得$f(c)\neq f(a)=f(b)$.

不妨设$f(c)>f(a)=f(b)$,

显然 $f(x)$在$[a,c]$上满足拉格朗日中值定理的条件,

于是至少存在一点 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

同理可证：$f(c)<f(a)=f(b)$的情形.

(三)构造辅助函数证明等式

8. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

分析： 将$f(\xi)+\xi f'(\xi)$ 中的ξ 换为x， 得 $f(x)+xf'(x)$,

令$F'(x)=f(x)+xf'(x)$, 得$F(x)=xf(x)$.

解 令 $F(x)=xf(x)$.

显然$F(x)$在 $[a,b]$上满足拉格朗日定理的条件,

至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$

即$bf(b)-af(a)=f(\xi)+\xi f'(\xi)(b-a)$.

$$\therefore\ \frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

9. 设 $f(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且$f(2)=0$.

试证：至少存在一个$\xi\in(1,2)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi\ln\xi}$

证明

构造函数$F(x)=f(x)\ln x$

则$F(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且$F(1)=F(2)=0$，

则由罗尔定理得至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使$F'(\xi)=0$，

即$f'(\xi)\ln\xi+\dfrac{f(\xi)}{\xi}=0$，即 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi\ln\xi}$.

10. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

分析：此题证明的关键是由题目中的结论构造出满足罗尔定理的函数。

将 $f'(\xi)=1$ 中的ξ 换为x，即 $f'(x)=1 \Rightarrow f(x)=x$，$\Rightarrow f(x)-x=0$，
令$F(x)=f(x)-x$

证明 令$F(x)=f(x)-x$，显然$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，

又$F(1)=f(1)-1=-1<0$， $F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

由零点定理可知，存在一点$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$， 使$F(\eta)=0$.

又 $F(0)=f(0)-0=0$，

对$F(x)$在$[0,\eta]$上应用罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，

使得$F'(\xi)=0$， 即 $f'(\xi)=1$.

(四)使用柯西定理证明

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b](0<a<b)$上连续，在(a,b)内可导，证明

$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\left(a^2+ab+b^2\right)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$$

证　设$F(x)=x^3$, 则 $f(x)$及 $F(x)$在 $[a,b]$上满足柯西定理的条件，

即至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}。$$

故 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\left(a^2+ab+b^2\right)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$$

12. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导，且 $f'(x)\neq 0$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$$

分析：上式变形为 $\dfrac{b-a}{e^b-e^a}\cdot f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$，右侧为 $f(x)$和e^x

导数的比值，因此设$g(x)=e^x$，应用柯西中值定理。

证 令$g(x)=e^x$，则 $f(x)$和 $g(x)$ 在 $[a,b]$上满足柯西中值定理的条件

因此必$\exists\,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$.

又 $f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，因此$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 由已知 $f'(x)\neq 0$，知 $f'(\eta)\neq 0$.

从而 $$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$$