学院　　专业　　级　　学号　　姓名

密　　封　　线

高等数学　ch5　常微分方程　测试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、选择题(每题 5 分，共 25 分)

1.函数 $y = C - \sin x$ (其中 C 是任意常数)是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sin x$ 的

(A) 通解　　(B) 特解

(C) 是解，但既非通解也非特解　　(D)不是解

2. 微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为

(A) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$　　(B) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$　　(C) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$　　(D) $y = \dfrac{2}{1+x^2}$

3. 微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$ 的特解是

(A) $y^2 = x - 1$　　(B) $y = x + 1$　　(C) $y^2 = x + 1$　　(D) $y^2 = x$

4. 具有特解 $y_1 = \mathrm{e}^{-x}, y_2 = 2x\mathrm{e}^{-x}, y_3 = 3\mathrm{e}^{x}$ 的三阶常系数线性微分方程是

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0$　　(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$　　(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

5. 设 y_1, y_2 是二阶常系数线性齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解，则由 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 能构成该方程的通解，其充分条件为______.

(A) $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$　　(B) $y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) \neq 0$

(C) $y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) = 0$　　(D) $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$

二、填空题(每题 5 分，共 25 分)

1. 设对任意 $x > 0$，曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x) =$ ____________.

2.微分方程 $xy' + y = 2\sqrt{xy}$ 的通解为____________.

3. 微分方程 $y' + y\tan x = \cos x$ 的通解为____________.

4. 微分方程 $y'' - y = \mathrm{e}^x + 1$ 的一个特解应具有形式(式中 a, b 为常数)____________.

5. 微分方程 $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{2}{x}$ 的通解为____________.

得分	阅卷人

三、计算、证明题(第 1-4 题 10 分，5-6 题每题 15 分，共 70 分)

1. 求通解 $y(1 + 2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x - 2(x - y)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y = 0$

2.证明下列函数 $y = \dfrac{1}{x}(C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ (C_1, C_2 为任意常数)是方程 $xy'' + 2y' - xy = \mathrm{e}^x$ 的通解.

学院 ________ 专业 ________ 级 ________ 学号 ________ 姓名 ________

3.证明：若$f(x)$满足方程$f'(x)=f(1-x)$，则必满足方程$f''(x)+f(x)=0$，并求方程$f'(x)=f(1-x)$的解.

4. 设$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中$f$为连续函数，求$f(x)$.

5.设函数$y=f(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$,其图形在$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x+1$在该点处的切线重合，求函数y的解析表达式.

6.设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，且$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\varphi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\varphi(t)$与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切，求函数$\varphi(t)$.

学院　　　　专业　　　　级　　　　学号　　　　姓名

四、附加题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=2$，求 $f(1)$.

2. 求以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程.

3. 求微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的特解.

4. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解，求 $y(x)$.

5. 求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.