

高等数学 ch4 一元函数积分学 测试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、选择题(每题 3 分, 共 15 分)

1. 设  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{x} dx$ ,  $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$ , 则  $I_1, I_2, I_3$  的关系是 \_\_\_\_.
- (A)  $I_1 > I_2 > I_3$  (B)  $I_1 > I_3 > I_2$  (C)  $I_3 > I_1 > I_2$  (D)  $I_2 > I_1 > I_3$

2. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\int_0^x e^{u^2} du)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D)  $\frac{1}{2}$

3. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$ , 则  $\int_0^2 f(x-1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (A)  $1 + \cos 1 - \ln 2 + \ln 3$  (B)  $1 - \cos 1 + \ln 2 - \ln 3$   
(C) 0 (D)  $1 - \cos 1 - \ln 2 + \ln 3$

4. 设  $f(x)$  连续, 则  $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (A)  $f(x^2)$ . (B)  $f(x^2)$ . (C)  $xf(x^2)$  (D) 0

5. 已知  $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (A)  $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$  (B)  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$  (C)  $x^2 - \frac{4}{3}x + 1$  (D)  $x^2$

得分	阅卷人

二、填空题(每题 3 分, 共 15 分)

1. 不定积分  $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .
2.  $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .
3.  $\int_{-1}^1 (|x| + x) e^{-|x|} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 已知  $\int_0^{\ln a} e^x \sqrt{3 - 2e^x} dx = \frac{1}{3}$ , 则  $a$  的值为 \_\_\_\_.
5. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有连续的二阶导数, 且  $f(0) = 2, f(2) = 4, f'(2) = 6$ , 则  $\int_0^1 x f''(2x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

得分	阅卷人

三、计算、证明题(第 1 题 10 分, 2-11 题每题 6 分, 共 70 分)

1. 计算不定积分:
- (1)  $\int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx$ ; (2)  $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$ ; (3)  $\int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$ ;  
(4)  $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$ ; (5)  $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$ .

2. 计算不定积分: (1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x - \cos^{10} x}{4 - \sin x - \cos x} dx$ ; (2)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^4 x}{1 + e^x} dx$

3.求  $c$  的值, 使  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+c}{x-c} \right)^x = \int_{-\infty}^c t e^{2t} dt$ .

4.设函数  $g(x)$  连续, 且  $f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt$ , 求  $f'(x)$ .

5.设  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 且  $F(x) = \int_0^x (2t-x)f(t)dt$

试证: 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $F(x)$  也是偶函数.

6.设  $s > 0$ , 求  $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

7.求最小的实数  $C$ , 使得满足  $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$  的连续的函数  $f(x)$  都有  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C$ .

8. 在抛物线 $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 找一点 $P$ ，使经过 $P$ 的水平直线与抛物线和直线 $x = 0$ ， $x = 1$ 围成的区域的面积最小.

9. 设可微函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上有定义，其反函数为 $g(x)$ 且满足

$$\int_1^{f(x)} g(t) dt = \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 8), \text{ 试求 } f(x).$$

10. 设 $D_1$ 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$ ， $x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域；

$D_2$ 是由抛物线 $y = 2x^2$ 及直线 $y = 0$ ， $x = a$ 所围成的平面区域，其中 $0 < a < 2$

(1) 试求 $D_1$ 绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体体积 $V_1$ ； $D_2$ 绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体体积 $V_2$ ；

(2) 问当 $a$ 为何值时， $V_1 + V_2$ 取得最大值？试求此最大值.

11. 设 $f : [0, 1] \rightarrow [-a, b]$ 连续，且 $\int_0^1 f^2(x) dx = ab$ , 证明： $0 \leq \frac{\int_0^1 f(x) dx}{b-a} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^2$ .

四、附加题（每题 4 分，共 20 分）

1. 求不定积分  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ .

2. 设  $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ , 计算  $\int f(x) \mathrm{d}x$ .

3. 计算不定积分  $\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}) \mathrm{d}x \quad (x>0)$

4. 求圆  $x^2+(y-5)^2=16$  绕  $x$  轴旋转所得旋转体的体积.

5. 设  $f(x)=\ln x-\int_1^{\mathrm{e}} f(x) \mathrm{d} x$ , 证明:  $\int_1^{\mathrm{e}} f(x) \mathrm{d} x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ .