极限习题课1（极限四则运算法则）（9题）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

3. $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$

5. 设 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求常数 a,b.

6.设 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 有有限极限值 b，

试求常数 a 及极限值 b.

7.设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ ____ .

8.已知 n 为正整数，a 为某常数，$a\neq 0$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{1999}}{x^n-(x-1)^n}=\dfrac{1}{a}$，求 n 和 a.

9.设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则

(A) $b=4d$ (B) $b=-4d$ (C) $a=4c$ (D) $a=-4c$

答案

1. 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+n}+\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. 解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}$

3. 解 $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1+2+\cdots+n} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{2}{n(n+1)} = 2\lim\limits_{N\to\infty}(1-\dfrac{1}{N+1}) = 2.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n^4}{4}}{n^3} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+n^2}{n^3} = \dfrac{1}{2}.$

5. 解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+k)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+k)}{(x+1)}=\dfrac{2+k}{3}=2\Rightarrow k=4$

$\therefore\ x^2+ax+b=(x-2)(x+4)=x^2+2x-8\Rightarrow a=2, b=-8$

6. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-ax^2-x+4)=-1-a+1+4=4-a=0$ 得 $a=4$

$$b=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-1)(x-4)=10$$

7. 左 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}\cdot 3a+a}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3a}{x-a})^{a}=e^{3a}$$

$\because\ e^{3a}=8\ \therefore\ a=\ln 2$

8. 解 $(x-1)^n = x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n$

$$\frac{1}{a} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1999}}{nx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n+1}}$$

$\therefore\ n-1=1999 \quad n=2000 \qquad \frac{1}{a}=\frac{1}{n}\ \therefore\ a=2000$

9. 左 $= \lim_{x\to0}\dfrac{a\dfrac{\tan x}{x}+b\dfrac{1-\cos x}{x}}{c\cdot\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+d\dfrac{1-e^{-x^2}}{x}} = \dfrac{a\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}+b\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}}{c\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+d\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x}}$

$= \dfrac{a\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}+b\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x}}{c\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x}{x}+d\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}} = -\dfrac{a}{2c}$ 由 $-\dfrac{a}{2c}=2$ 得 $a=-4c$ (D)