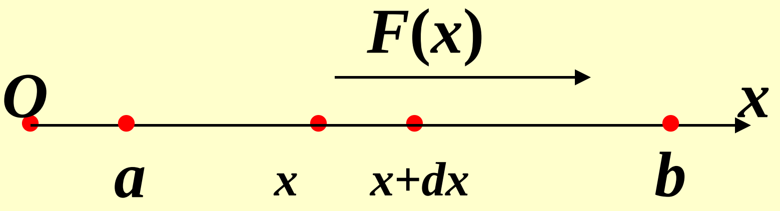
五、 功 水压力和引力

(一)变力沿直线段作功:

恒力作功: $W = F \cdot s$



设有一变力$F(x)$ 随位移x 而变，求它把物体由 a 移动到 b 所作的功。

取 x 为积分变量，它的变化区间为$[a,b]$,在此区间上任取小区间$[x, x+dx]$,在此小区间上变力所作的功近似等于以 x 点的力为恒力所作的功，这个小区间功的近似值即为**功元素**。

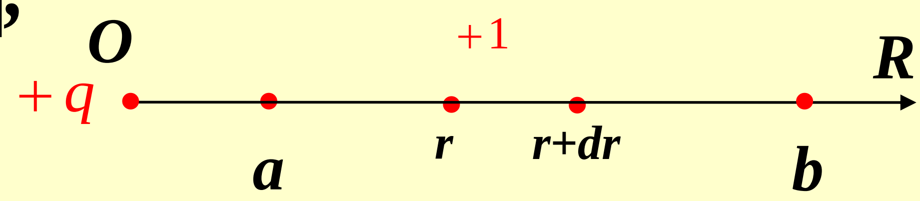
即**功元素为:** $dW = F(x)dx$

于是所求的**功为:** $W = \int_a^b F(x)dx$

例1 把一个带 $+q$ 电量的点电荷放在r轴上坐标原点 O 处，有一个单位正电荷放在距离原点 O 为r 的地方，当这个单位正电荷从 $r=a$ 沿 r 轴移动到 $r=b$ 时，求电场力对它所作的功。

解： 任一点r处单位点电荷受到的电场力为：$F=k\dfrac{q}{r^2}$

在$[a,b]$上任取小区间$[r,r+dr]$，



则功元素为：$dW=\dfrac{kq}{r^2}dr$

所以电场力所作的功为：

由物理学知：$F=k\dfrac{Q_1Q_2}{r^2}$

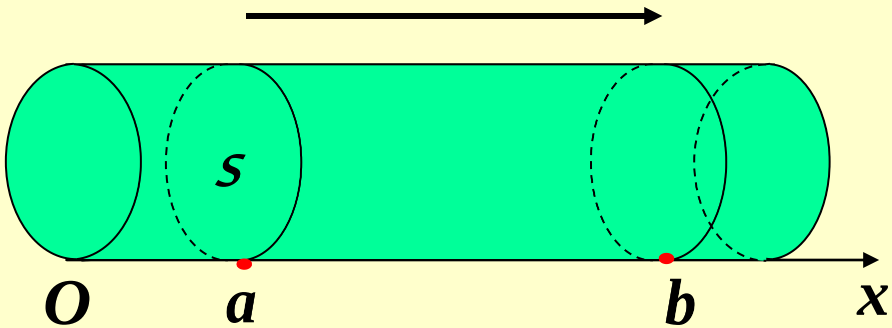
$$W=\int_a^b\frac{kq}{r^2}dr=kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

注 在计算电场中某点的电位时，要计算将单位正电荷从该点处（$r=a$）移到无穷远处时电场力所作的功。

$$V=\int_a^{+\infty}\frac{kq}{x^2}dx=\left[-\frac{kq}{x}\right]_a^{+\infty}=\frac{kq}{a}$$称为电场中a处的电位

例2 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量气体。在等温条件下，由于气体的膨胀，把容器中的一个活塞从点 a 处推移到点 b 处，计算在移动过程中，气体压力所作的功。

解 先利用题设把力表示为 x 的函数



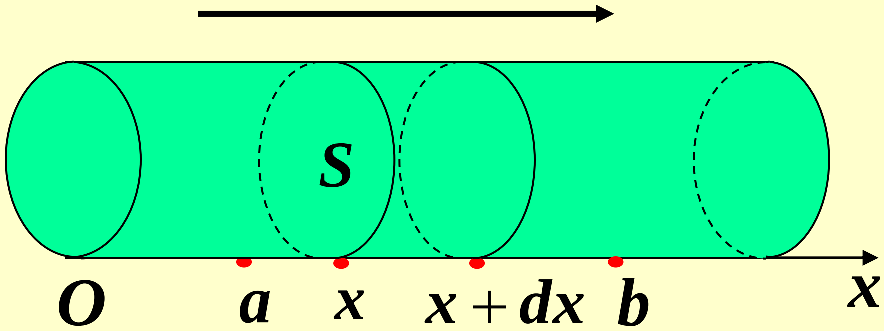
由物理学知道，

一定量的气体在等温条件下，

压强 p 与体积V 成反比， 即 $$P=\frac{k}{V}$$

因为 $V=xS$ 所以 $$P=\frac{k}{xS}$$

当活塞离O点 x 处，气体作用在活塞上的力为



$$F = pS = \frac{k}{xS} \cdot S = \frac{k}{x}$$

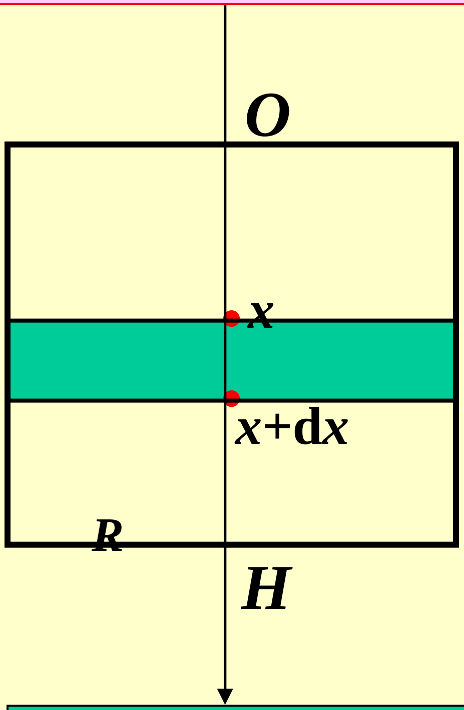
在 $[a,b]$上任取小区间 $[x, x+dx]$,

功元素为 $$dW = \frac{k}{x} dx$$

故所求的功为 $$W = \int_a^b \frac{k}{x} dx = k[\ln x]_a^b = k\ln\frac{b}{a}$$

例3* 一圆柱形的贮水桶高为 Hm，底圆半径为Rm，桶内盛满了水，试问要把桶内的水全部吸出至少需作多少功？

较原例题稍有变化



分析:把一个重量为 G的物体提高高度为 h，最少需作的功是： $W = Gh$

解 建立坐标系如图：

在[0，H]上任取小区间[$x,x+dx$]

得功元素：

$$dW = \rho g \cdot \pi R^2 dx \cdot x = 10^4 \pi R^2 x dx$$

水的密度 ρ为10^3kg/m^3 重力加速度 g取10m/s^2

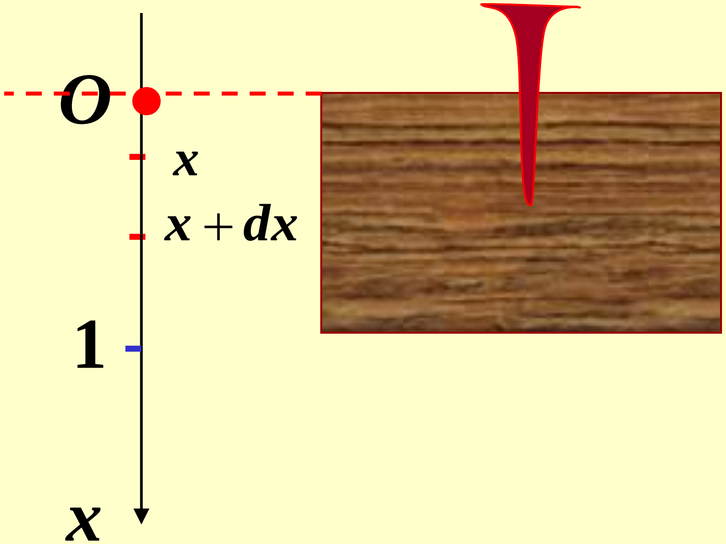
于是所求的功为：

$$W = 10^4 \int_0^H \pi R^2 x dx = 10^4 \pi R^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^H$$

$$= \frac{\pi}{2} R^2 H^2 \cdot 10^4 = 1.5708 \cdot 10^4 R^2 H^2 \quad (J)$$

例4 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入 1 厘米，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问铁锤打击第二次时，铁钉又击入多少？

习题6-5 5 作业纸 10



解 建立坐标系如图:

由于铁钉受到的阻力与其进入木板的深度成正比，当铁钉进入木板的深度为 x 时，所受到的阻力为

$$f = kx \quad （其中\ k\ 为比例系数）$$

在 $[0,1]$ 上任取小区间 $[x, x+dx]$，

则功元素为 $$dW = kxdx$$

第一次所做的功 $$W_1 = \int_0^1 dW = \int_0^1 kxdx = \frac{1}{2}k.$$

第二次锤击时又击入 $h$cm，则第二次所做的功为

$$W_2 = \int_1^{1+h} dW = \int_1^{1+h} kx dx = \frac{1}{2}k\left(h^2 + 2h\right).$$

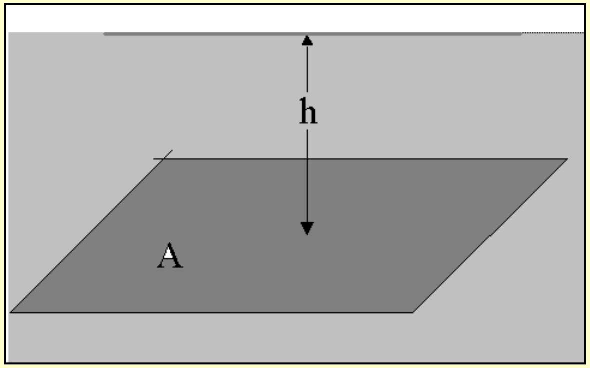
$$\because W_1 = W_2,$$

$$\therefore \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k\left(h^2 + 2h\right).$$

解得：$h = -1 \pm \sqrt{2}.$

舍去负值，则 $h = \sqrt{2} - 1.$

(二)液体的压力

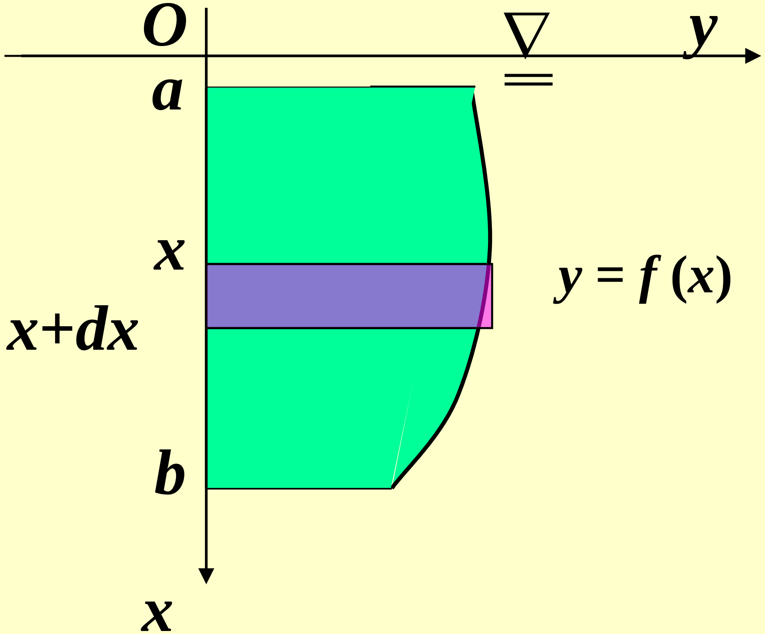


由物理学知道，一面积为A的平板水平地放置在液体深为h处，平板一侧所受液体的压力为：

$$P = pA = \rho g A h$$

其中，p是液体深为h处的压强，ρ是液体的密度。

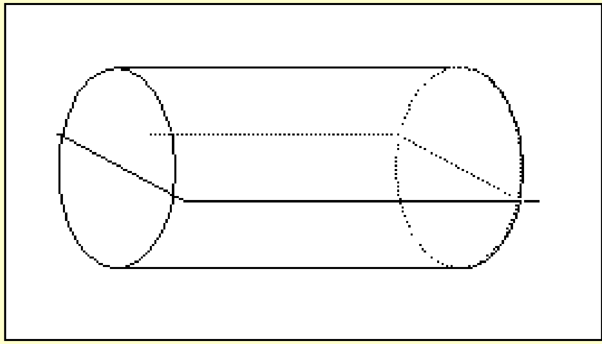
如右图垂直放在液体中的薄板，取深度x为积分变量，它的变化区间为$[a,b]$，在$[a,b]$上取代表区间$[x, x+dx]$,可以得到相应小窄条薄板一侧受到的液体压力元素：



$$dP = \rho g \cdot x \cdot f(x)dx$$

$$P = \int_a^b \rho g x f(x) dx$$

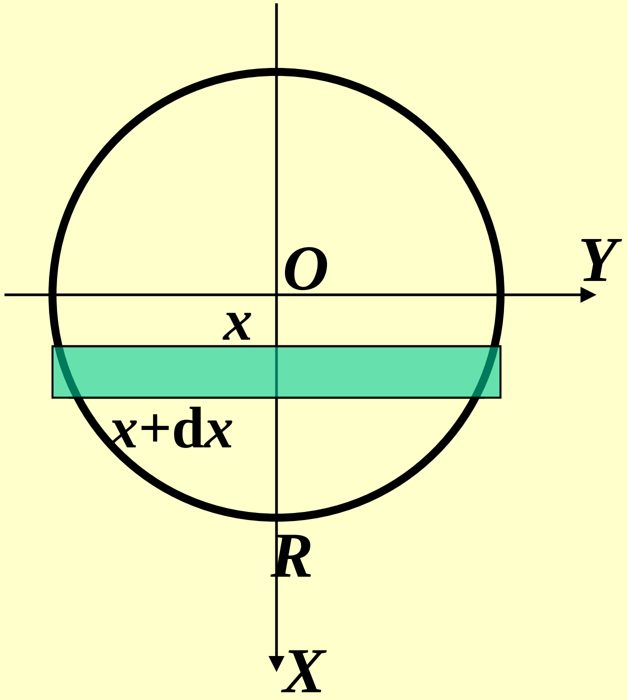
例5 一个横放着的圆柱形水桶，桶内盛有半桶水。设桶的底半径为 R，水的比重为ρ，计算桶的一个端面所受水的压力。



解: 建立如图所示的坐标系，

则圆的方程为：

$$x^2+y^2=R^2$$



在OX轴上任取小区间$[x,x+dx]$，

水桶相应于这一小区间的窄条所受水的压力的近似值即压力元素为

$$dP=\rho gx\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}dx$$ （ρgx为水深x处的压强）

于是所求水的压力为:

$$P=\int_0^R 2\rho g x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$=-\rho g\int_0^R (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}d(R^2-x^2)$$

$$=-\rho g\left[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R=\frac{2}{3}\rho g R^3$$

水的密度
10^3kg/m^3
在统一量纲计算时，值为1.

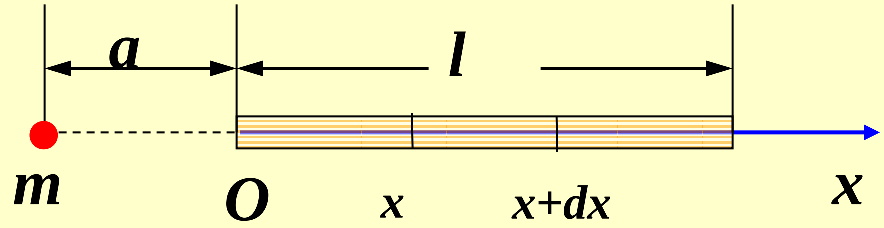
(三) 引力

从物理学知道，质量分别为 m_1, m_2 相距为 r 的两质点间的引力的大小为：

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$ (其中G 为引力常数)

补充例题：

设有一长为 l，质量为 M 的均匀细杆，另有一质量为 m 的质点与细杆在同一条直线上，它到杆的近端距离为 a，计算细杆对质点的引力。



解:建立坐标系如图。

以 x 为积分变量，在 $[0,l]$ 上

取小区间 $[x, x+dx]$,相应于这段杆长为 dx,

质量为 $\frac{M}{l}dx$, 且看作集中在 x 点处。由万有引力公式:

小段细杆对质点的引力元素是：$dF = \dfrac{Gm\frac{M}{l}}{(x+a)^2}dx$

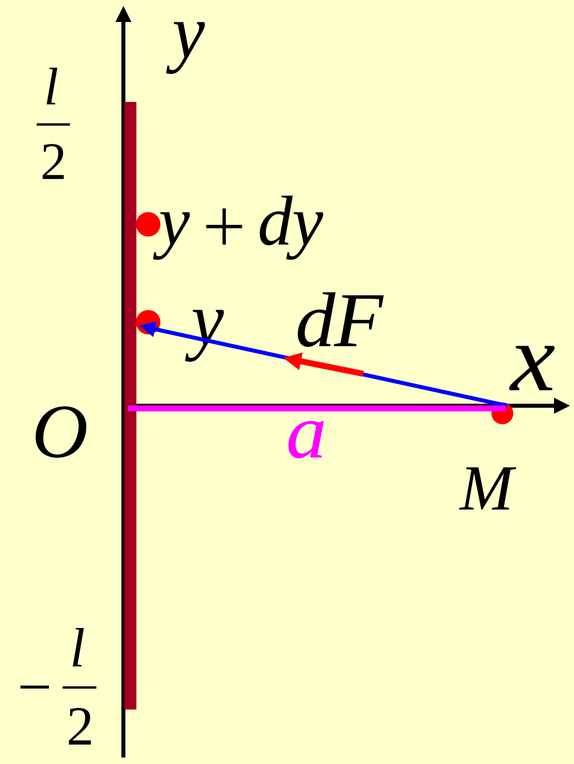
所以，细杆对质点的引力为：

$$F=\int_0^l G\frac{m\dfrac{M}{l}}{(x+a)^2}dx=\frac{GmM}{l}\int_0^l\frac{1}{(x+a)^2}dx$$

$$=\frac{GmM}{l}\left[-\frac{1}{x+a}\right]_0^l=\frac{GmM}{a(l+a)}.$$

注：这是一种较为简单的情况，如果质点与细杆不在一条直线上，则必须将引力分解为水平和垂直两个方向分力，然后分别相加。

例6 设有一长度为 l，线密度为 ρ 的均匀细直棒，在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，试计算该棒对质点的引力。



解 建立如图所示的坐标系，

在区间 $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ 上任取一小区间 $[y, y+dy]$，

在这个小区间的一段细棒看成是质点，

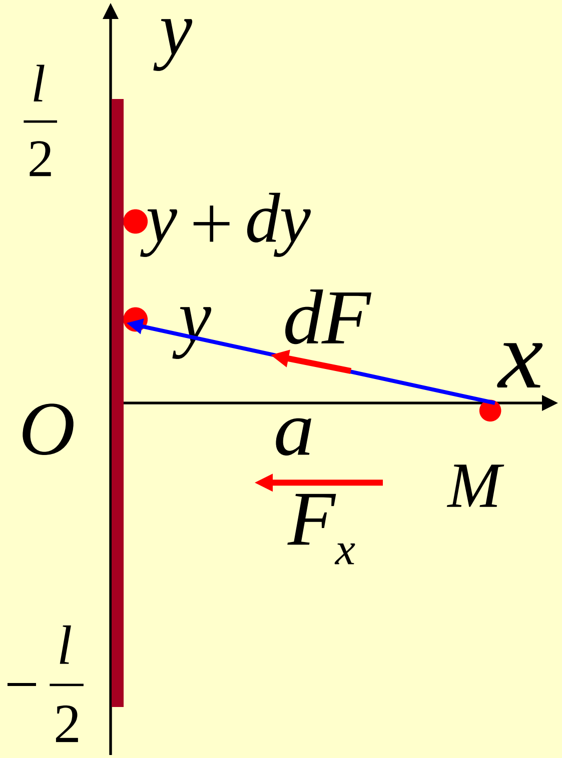
它对于质点 M 的引力（即引力元素）为：

$$dF = G\frac{m \cdot \rho dy}{a^2 + y^2}$$

dF在水平方向的分力的大小为：

$$dF_x = dF\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} = G\frac{a\rho m}{\left(a^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy$$

故细棒对质点的引力在水平方向的分力的大小为



$$F_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dF_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} G\frac{a\rho m}{\left(a^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy$$

$$= \frac{2G\rho m l}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$

（方向由 M 指向原点 O）

由于对称性，引力在铅直方向的分力为： $F_y = 0.$

当细棒的长度很大时，可视为 l 趋于无穷，此时引力大小

$$F = \frac{2G\rho m}{a}$$

方向与细棒垂直，且由 M 指向细棒。

第六节 平均值

一、函数的平均值

1、n 个数的算术平均值：

设有n个数y_1， y_2， $\dots y_n$

称 $\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ 为这n个数的算术平均值。

2、函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值的定义：

把区间$[a,b]$分成n等分，每个小区间的长度为$\dfrac{b-a}{n}$，

在每个小区间内取一点x_i，其相应的函数值为$f(x_i)$

则：$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$

是函数在区间$[a,b]$上平均值的近似值

分法越细，近似值的精确度越高。当分法无限变细的时候，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$就是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值。

即：
$$\overline{f(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

但是，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_i)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_i)=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{b-a}{n}$$
$$=\frac{1}{b-a}\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

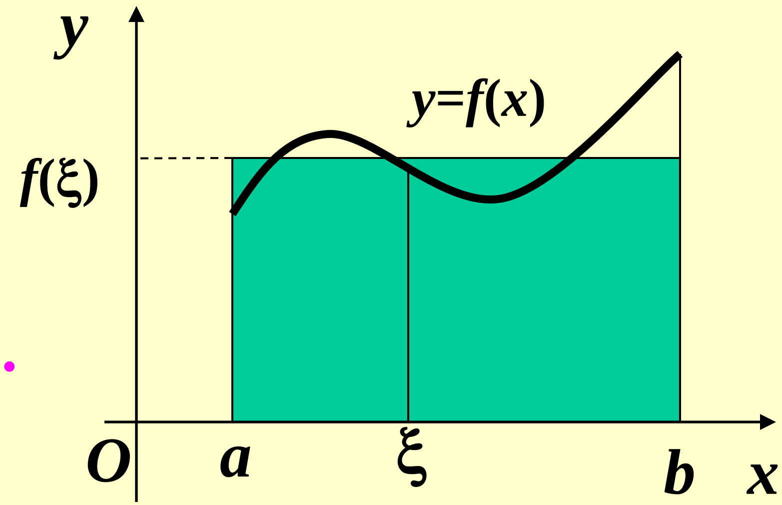
$$\boxed{\overline{f(x)}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

也可记作：
$$\boxed{\overline{y}_{[a,b]}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

定积分中值定理： $f(x)\in C[a,b]$，$\Rightarrow \exists\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a\le\xi\le b)$$

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



可以看出：**平均值的表达式**

正是定积分的中值定理中的 $f(\xi)$.

见右图.

例1 求从0到 T 秒这段时间内，自由落体运动的平均速度。

解： 平均速度就是速度函数的平均值。

自由落体运动的速度 $v=gt$

所以：$\bar{v}=\frac{1}{T-0}\int_0^T gtdt=\frac{1}{T}\left[\frac{gt^2}{2}\right]_0^T=\frac{1}{2}gT$

例2 计算纯电阻电路中正弦交流电 $i = I_m \sin\omega t$ 在一个周期上的功率的平均值（简称平均功率）。

解 设电阻为 R，那么电路中的电压为：

$$U = iR = I_m R\sin\omega t$$

从而功率： $p = iU = I_m^2 R\sin^2\omega t$

则功率在一个周期的区间 $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ 上的平均值为

$$\overline{p} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega} - 0}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 R\sin^2\omega t dt$$

$$= \frac{I_m^2 R}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{I_m^2 R}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1 - \cos 2\omega t) d(\omega t)$$

$$= \frac{I_m^2 R}{4\pi}\left[\omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{I_m^2 R}{4\pi}\cdot 2\pi = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{1}{2} I_m U_m$$

（其中，$U_m = I_m R$）

二. 均方根

1、周期性非恒定电流 $i(t)$ 的有效值的定义

当 $i(t)$ 在它的一个周期 T 内在负载电阻 R 上消耗的平均功率， 等于取固定值 I 的恒定电流在 R 上消耗的功率时，称这个 I 值为 $i(t)$ 的有效值。

2、周期性非恒定电流 $i(t)$ 的有效值的计算

固定值为 I 的电流在电阻 R 上消耗的功率为 I^2R

电流 $i(t)$ 在 R上消耗的功率为： $u(t)i(t)=i^2(t)R$

它在 [0，T] 上的平均值为： $\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt$

因此

$$I^2R=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt$$

从而非恒定电流 $i(t)$ 的有效值

$$\boxed{I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}}$$

正弦电流 $i(t)=I_m\sin\omega t$ 的有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}I_m^2\sin^2\omega t dt}=\sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t d(\omega t)}$$

$$=\sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi}\left[at-\frac{\sin 2\omega t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

3、$f(x)$ 在[a，b]上的均方根

我们把

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$$

$$\boxed{I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}}$$

叫做 $f(x)$ 在[a，b] 上的均方根。

所以，上述非恒定电流 $i(x)$的有效值，就是这电流在一个周期上的均方根。

小　结

1．变力$F(x)$沿直线有a到b所作的功：$W=\int_a^b F(x)dx$

2．水压力：$P=\int_a^b \rho g\cdot x\cdot f(x)dx$

3．引力。（参见例题）

4．函数$f(x)$在$[a，b]$上的平均值：

$$\overline{f(x)}=\bar{y}_{[a,b]}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

5．函数$f(x)$ 在$[a，b]$上

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b$$

作业：总习题六

作业纸：P45—46

学习指导：例6.19—6.25

例6.26—6.38选做

自测题