导数习题课4(与定积分有关的3个综合题)

1.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$,

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

2.设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),

求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

3.设 $\begin{cases}x=\cos(t^2)\\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,\mathrm{d}u\end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值.

答案 1.解 （1） 由 $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{2}{x^2}(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos x^2}{1}=1$$

可知函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

(2)分别求 $f(x)$在 $x=0$处的左、右导数

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0-0}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\frac{2\cos x-2}{6x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-\sin x}{3}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt-1}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt-x}{x^2}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos x^2-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{-2x\sin x^2}{2}=0$$

由于左、右导数都等于零， 可见 $f(x)$在 $x=0$处可导.且 $f'(0)=0$.

2.由题设知 $f(0),\varphi(0)=0$. 令 $u=xt$，得 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x},(x\neq 0)$.

从而 $\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2},(x\neq 0)$.

由导数定义有

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0).$$

故 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3.因 $\dfrac{dx}{dt} = -2t\sin(t^2)$， $\dfrac{dy}{dt} = -2t^2\sin(t^2)$

所以 $\dfrac{dy}{dx} = t$ 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{\pi}{2}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{2t\sin(t^2)},\ \text{则}\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$