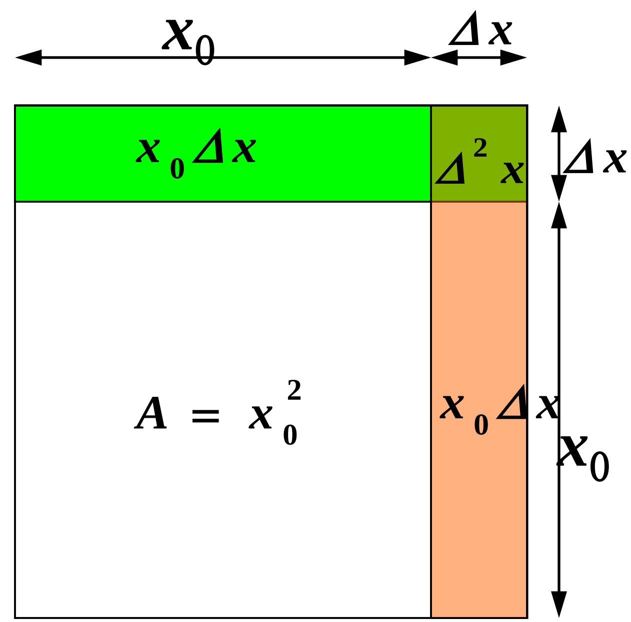
第四节　微分

一. 微分的定义：



1. 实例——函数增量的构成

正方形金属薄片，因受 热，边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，此时面积改变了多少？

解：正方形边长与面积 的函数关系为

$$A = x^2$$

当边长增量为 Δx 时，面积增量为

$$\Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = \boxed{2x_0\Delta x} + \boxed{(\Delta x)^2}$$

函数的增量由两部分构成：

1、等式右边第一项， Δx 的线性式，是函数增量 的主要部分。

2、第二项 $(\Delta x)^2$，当 $\Delta x\to 0$ 时，是 Δx 的高阶无穷小 .

2、微分的定义

定义　设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \tag{1}$$

其中A是不依赖于Δx的常数，而$o(\Delta x)$是比Δx高阶无穷小，那么称函数$y=f(x)$在点x_0是可微的，而$A\Delta x$叫做函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作dy，即：

$$\boxed{\mathrm{d}y = A\Delta x.}$$

若$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，则称$\mathrm{d}y = A\Delta x$为函数的微分.

$A\Delta x$：称为Δy的线性主部，即$\mathrm{d}y$。

$|\Delta x|$很小时，$\Delta y \approx \mathrm{d}y$

3、问题：函数可微的条件是什么？ $A=?$

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则有(1)成立，即

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

等式两端除以 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是，当 $\Delta x \to 0$ 时，由上式就得到

$$\boxed{f'(x_0)=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)\boxed{=A.}$$

因此，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，则 $f(x)$ 在点 x_0 也一定可导，且

$$A = f'(x_0).$$

反之，如果 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ 存在，

根据极限与无穷小的关系，上式可写为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,\quad (\Delta x \to 0, \alpha \to 0)$$

则 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$

因 $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$,且 $f'(x_0)$不依赖于 Δx，故上式相当于(1)式,

则 $f(x)$ 在点 x_0 可微。

4.函数可微的充要条件:

函数$y = f(x)$在x_0处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0处可导,且$A = f'(x_0)$.

函数在任意点的微分,称为函数的微分,记作 $\mathrm{d}y$或$\mathrm{d}f(x)$, 即

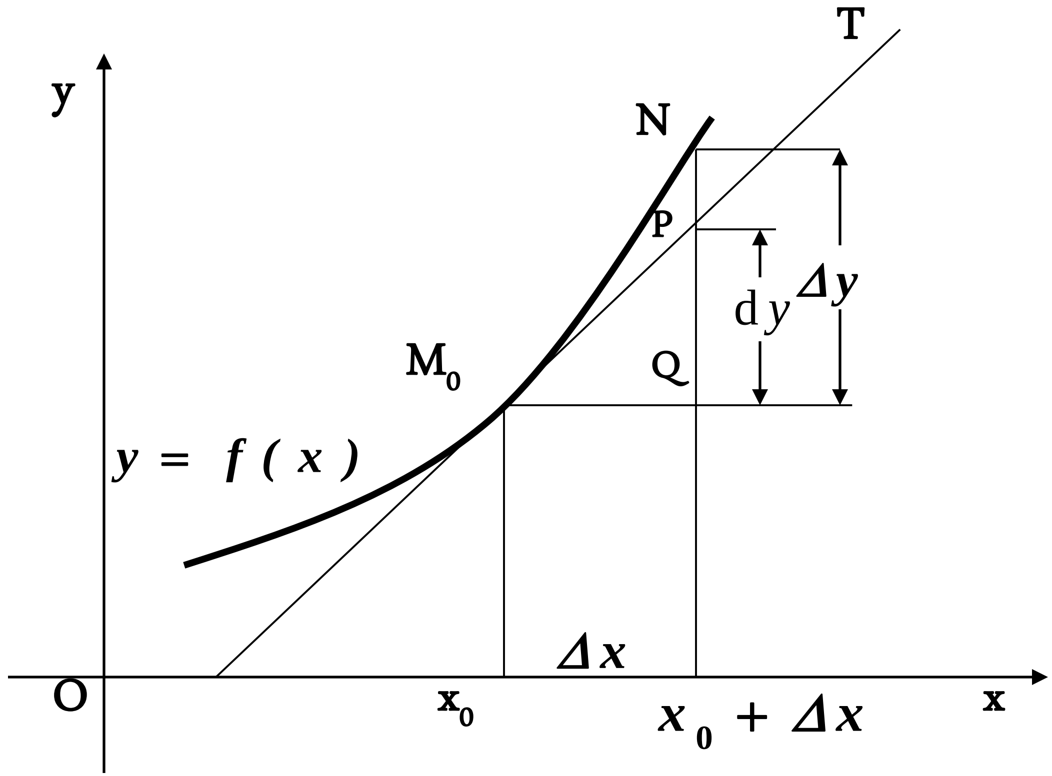
$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x.$$

如函数 $y = \cos x$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = (\cos x)'\Delta x = -\sin x\Delta x$$

显然，函数的微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ 与 x 和 Δx 有关。

5、微分的几何意义



注 意 :Δy是 曲 线 $y = f(x)$上 点 的 纵 坐 标 的 增 量 时 ，

dy就 是 曲 线 的 切 线 上 点 的 纵 坐 标 的 相 应 增 量 。

当$|\Delta x|$很小时，$dy \approx \Delta y.$

1. 求函数 $y = x^2$ 在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 处的微分。

解 函数 $y = x^2$ 在 $x = 1$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y = (x^2)'|_{x=1}\Delta x = 2\Delta x;$$

在 $x = 3$ 处的微分为

$$\mathrm{d}y = (x^2)'|_{x=3}\Delta x = 6\Delta x$$

2. 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2, \Delta x = 0.02$ 时的微分 .

解 先求函数在任意点的微分

$$\mathrm{d}y = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x.$$

再求函数当 $x = 2, \Delta x = 0.02$ 时的微分

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3\cdot 2^2\cdot 0.02 = 0.24.$$

3. $y=\cos^2 2x$ 求：$\mathrm{d}y,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\mathrm{d}y=2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\cdot \mathrm{d}x$$

$$=-2\sin 4x\mathrm{d}x \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2\sin 4x.$$

通常把自变量的增量称为自变量的微分.记作 $\mathrm{d}x$.

即 $$\mathrm{d}x=\Delta x$$

则函数 $y=f(x)$ 的微分又可记作： $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x.$

从而有：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x_0).$

这表明, 函数的微分与自变量的微分之商等于该函数的导数.

因此, 导数也叫“微商”.

二. 基本初等函数的微分公式与微分运算法则

1. 基本初等函数的微分公式

导数公式	微分公式
$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$,	$\mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$,
$(\sin x)' = \cos x$,	$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$,
$(\cos x)' = -\sin x$,	$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$,
$(\tan x)' = \sec^2 x$,	$\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x$,
$(\cot x)' = -\csc^2 x$,	$\mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x$,
$(\sec x)' = \sec x\tan x$,	$\mathrm{d}(\sec x) = \sec x\tan x\mathrm{d}x$,
$(\csc x)' = -\csc x\cot x$,	$\mathrm{d}(\csc x) = -\csc x\cot x\mathrm{d}x$,
$(a^x)' = a^x\ln a$,	$\mathrm{d}(a^x) = a^x\ln a\mathrm{d}x$,
$(\mathrm{e}^x)' = e^x$,	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}\mathrm{d}x,$$

$$(\ln)' = \frac{1}{x}, \qquad \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

$$(arc\ \cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

2.函数的和、差、积、商的微分法则

函数和、差、积、商的求导法则　　函数和、差、积、商的微分法则

$(u \pm v)' = u' \pm v'$,　　$d(u \pm v) = du \pm dv$,

$(Cu)' = Cu'$(C是常数),　　$d(Cu) = Cdu$(C是常数),

$(uv)' = u'v + uv'$,　　$d(uv) = vdu + udv$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$.　　$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}\ (v \neq 0)$.

3. 复合函数的微分法则——微分公式的形式不变性。

设 $y = f(u), u = \varphi(x)$都可导，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$的微分为：

$$dy = y'_x dx = f'(u)\varphi'(x)dx.\qquad du = \varphi'(x)dx$$

或写为：$dy = f'(u)du$ 或 $dy = y'_u du$

由此可见，无论是自变量还是中间变量的可微函数，微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变。这一性质叫做微分形式不变性。

微分的形式不变性可用于计算

利用微分的形式不变性，不仅可以求函数的微分，而且可以求导数，只要把微分运算进行到只剩自变量的微分，就能得到函数的导数。

3. $y=\cos^2 2x$ 求： $\mathrm{d}y,\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\cos^2 2x)=2\cos 2x\mathrm{d}(\cos 2x)$$

$$=2\cos 2x\cdot -\sin 2x\cdot \mathrm{d}(2x)$$

$$=2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\cdot \mathrm{d}x \quad =-2\sin 4x\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2\sin 4x.$$

4. **在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立。**

$$(1)\mathrm{d}(\_\_)=x\mathrm{d}x;(2)\mathrm{d}(\_\_)=\cos\omega t\mathrm{d}t$$

解: **(1)因为** $\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x.$

可见， $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(x^2\right)=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right),$

即， $\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=x\mathrm{d}x,$

(2)因为 $\mathrm{d}(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t\mathrm{d}t,$

可见，$\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}\left(\sin\omega t\right)=\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$

即， $\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t,$

一般地，有： $\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t\mathrm{d}t,$ (C为任意常数)

三、 微分在近似计算中的应用

$\because$ 在 $|\Delta x|$ 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, 即 $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx \mathrm{d}y$

$\therefore$ 微分在近似计算中主要有两方面的应用：

1、利用 x_0 点的微分，求函数的相应增量 Δy

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x \quad (\mathrm{d}x = \Delta x)$$

2、求 x_0 点附近的点 $x_0 + \Delta x$ 的函数值 $f(x_0+\Delta x)$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}y = f(x_0) + f'(x_0)\mathrm{d}x$$

例1: 用于研磨水泥原料用的铁球直径为 40 毫米，使用一段时间以后其直径缩小了 0.2毫米，试估计铁球体积减少了多少?

解: 体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $\therefore V' = 4\pi R^2 \quad \therefore \Delta V \approx V'\Delta R = 4\pi R^2 \Delta R$.

$\therefore$ 铁球的体积的改变量的近似值为:

$$\Delta V \approx 4\pi R^2 \Delta R \Big|_{\substack{R=20 \\ \Delta R=-0.1}} \approx 4 \times 3.14 \times 20^2 \times (-0.1) = -502.40 \ (\text{毫米}^3)$$

例2: 利用微分计算 $\sin 30^\circ 30'$ 近似值。

解: 设 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$; $30^\circ 30' = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}$

取 $x_0=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=\frac{\pi}{360}$，应用 (2)式得:

$$\sin 30^\circ 30' = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=0.5000+0.0076=0.5076$$

在 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x_0)\mathrm{d}x$ 式中，取 $x_0=0$ $\Delta x=x$ 得

$$\boxed{f(x)\approx f(0)+f'(0)x}$$

利用上式可导出工程上常用的几个公式（假定 $|x|$ 很小）：

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$;

(2) $\sin x\approx x$ （x 为弧度制）

(3) $\tan x\approx x$ （x 为弧度制）

(4) $e^x\approx 1+x$,

(5) $\ln(1+x)\approx x$.

例3 求 $\sqrt{1.05}$ 的近似值 .

解 $\sqrt{1.05} = \sqrt{1 + 0.05}$，利用近似公式 (1)得：

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.05 = 1.025 ,$$

如直接开方得： $\sqrt{1.05} \approx 1.02470$,

$\therefore$ 1.025 作 $\sqrt{1.05}$ 的近似值其误差不超过 0.001 .

例4 求 $\sqrt[3]{997}$ 的近似值 .

解 $$\sqrt[3]{997} = \sqrt[3]{1000\left(1 - \frac{3}{1000}\right)} = 10\sqrt[3]{1 + (-0.003)}$$

利用近似公式得：

$$\sqrt[3]{997} \approx 10\left[1 + \frac{1}{3} \cdot (-0.003)\right] = 9.99$$