答案及评分标准：工科高等数学(1)期末试题

一、填空题(共 5 个题，每题 4 分，共 20 分，将正确答案写在横线上)

1. 6　　**2.** $e^{-\frac{1}{2}}$　　**3.** $-\dfrac{1}{x^2}(\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})e^{\tan\frac{1}{x}}$

4. 3　　**5.** $-\dfrac{1}{x\ln x}+C$

二、选择题(共 5 个题，每题 4 分，共 20 分，将正确选项写在括号内)

6.B　7.D　8. A　9. C　10. D

三、解答题(共 7 个题，共 60 分)

11.(8 分)

解 当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}+x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}(-\beta x^{-\beta-1})$

$=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

$$=\begin{cases}0 & \alpha>1\\ \text{不存在} & \alpha\le 1\end{cases}$$

所以 当$\alpha>1$时，$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　　$\cdots\cdots$4分

由 $f'(x)$ 在$x=0$ 点处连续,故 $\alpha-\beta-1>0,\ \alpha>\beta+1.$　　$\cdots\cdots$8分

12.(8 分)

解 (1) $\because\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$有界,$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$　$\therefore\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$　　$\cdots\cdots$3分

(2) 原极限$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x-3}{x}\right)}$

$=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{x}}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=(abc)^{\frac{1}{3}}$　　$\cdots\cdots$8分

13.(8 分)

解 令$u=x-t$，则$2\int_0^x f(x-t)dx=2\int_0^x f(u)du$，

故原方程化为$2\int_0^x f(u)du = f(x)+x-1$，　　　　　　　……3分

由条件知$\int_0^x f(u)du$连续，所以$f(x)=1-x+2\int_0^x f(u)du$连续，于是$\int_0^x f(u)du$可导，类似可知$f(x)$也可导，新方程两端对$x$求导，得$2f(x)=f'(x)+1$，这是一个带有初始条件$f(0)=1$的线性方程，解得$f(x)=\frac{1}{2}(1+e^{2x})$　　　　……8分

14.(8 分)

解　$y''-3y'+2y=0$ 通解为 $\tilde{Y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$

令 $y''-3y'+2y=2e^x$ 特解为 $y^*=Axe^x$ ，

代入方程知 $A=-2$ ，故 $y^*=-2xe^x$ ，

故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$　　　　　　……6分

由题意 $y|_{x=0}=1$ $y'|_{x=0}=-1$ 知 $C_1=1$ ，$C_2=0$

所求函数为 $y=e^x-2xe^x$.　　　　　　……8分

15.(8 分)

解　使用洛必达，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=\frac{1}{2}$$

则 $\lim_{x\to 0}\left[\cos x+f(x)+xf'(x)\right]=0$，即$1+f(0)=0$，可得$f(0)=-1$.　　……3分

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+f(x)}{x^2}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+f'(x)}{2x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=-\frac{1}{6}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{3})\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

这说明$f'(0)=0$.　　　　　　……5分

由$-\frac{1}{6}+(\frac{1}{6}+\frac{1}{3})\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{2}$ 得　$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{4}{3}$

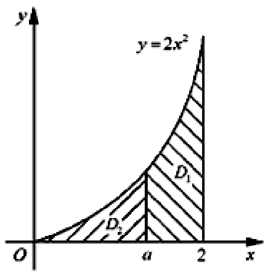
根据导数定义　$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\frac{4}{3}$　　　　……8分

16.(10 分)

解:(1)如图所示

$$V_1=\pi\int_0^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4 \quad \cdots\cdots 5分$$



(2) 设$V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4.$

由$V'=4\pi a^3(1-a)=0$得区间$(0,2)$内的唯一驻点$a=1$

当$0<a<1$时，$V'>0$; 当$a>1$时，$V'<0$

因此$a=1$是极大值点即最大值点.

此时，V_1+V_2取得最大值等于$\frac{129}{5}\pi$ ……10分

17.(10 分)

证　构造辅助函数$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x^2}f(x)$, ……5分

根据积分中值定理得 $\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{1-\eta^2}f(\eta)\cdot\frac{1}{3}$，其中$\eta\in(0,\frac{1}{3})$.

从而$f(1)=\mathrm{e}^{1-\eta^2}f(\eta)$，即$\mathrm{e}^{-1}f(1)=\mathrm{e}^{-\eta^2}f(\eta)$，也即$\varphi(\eta)=\varphi(1)$.

因为$\varphi(x)$在$[\eta,1]$上连续，在$(\eta,1)$内可导，且$\varphi(\eta)=\varphi(1)$,

由罗尔定理知，至少存在一点$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,

使得$\varphi'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$. ……10分