【基本内容】

微分方程　含有未知函数的导数(或微分)的方程.

常微分方程　未知函数是一元函数的微分方程.

阶　微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

$$x^2 y + y^2 \cos x - xy' + e^x y''' = 0$$　三阶微分方程;

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2x$$　一阶微分方程.

解　如果某函数代入微分方程后，方程左右两端恒等，则称此函数为微分方程的解.

通解 如果微分方程的解中含有任意常数，且相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为通解.

特解 满足定解条件的解称为特解.

初始条件 n阶微分方程的初始条件：

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0}=y_0',\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

初值问题 求微分方程满足初始条件的特解的问题.

$$\begin{cases} F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0}=y_0',\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

积分曲线 微分方程通解的图形是积分曲线族.

一阶微分方程 $y' = f(x, y)$

可分离变量的微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C.$$ —隐式通解

1.求微分方程 $y'\sin x = y\ln y$ 满足初始条件 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}$ 的特解.

解　分离变量得 $$\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y = \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$$

即 $$\frac{1}{\ln y}\mathrm{d}(\ln y) = \csc x\mathrm{d}x$$

两端积分得 $$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + \ln C$$

则通解为 $$\ln y = C(\csc x - \cot x)$$ —隐式通解

1.求方程$(x+1)y'+1=2e^{-y}$的通解.

解　分离变量得：$\dfrac{dy}{2e^{-y}-1}=\dfrac{dx}{x+1}$,

等式两端同时积分得：$\ln\left(2-e^{y}\right)=-\ln(x+1)+\ln C$,

整理得该微分方程的通解为：$(x+1)(2-e^{y})=C$.

2.设可微函数 $u(t)$满足 $\frac{du(t)}{dt}=u(t)+\int_0^1 u(t)\,dt$及 $u(0)=1$，则 $u(t)=$ ______.

解　记 $A=\int_0^1 u(t)\,dt$，则 $\frac{du(t)}{dt}=u(t)+A$,

故应填 $\frac{2e^t-e+1}{3-e}$

分离变量得 $\frac{du}{u+A}=dt$,　积分得 $\ln(u+A)=t+\ln C$

整理得 $u=Ce^t-A$, 把 $u(0)=1$代入得 $C=A+1$.　$\therefore\ u(t)=(A+1)e^t-A$

上式两端积分 $\int_0^1 u(t)\,dt=(A+1)\int_0^1 e^t\,dt-A \quad\Rightarrow\quad A=(A+1)(e-1)-A$

解得 $A=\frac{e-1}{3-e}$　　故 $u(t)=(\frac{e-1}{3-e}+1)e^t-\frac{e-1}{3-e}=\frac{2e^t-e+1}{3-e}$.

3.设$y(x)$是区间$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$内的可导函数，且$y(1)=0$.点$P$是曲线$L:y=y(x)$上的任意一点，$L$在点$P$处的切线与$y$轴相交于$(0,\ Y_P)$，法线与$x$轴相交于点$(X_P,0)$. 若$X_P=Y_P$，求$L$上点的坐标$(x,y)$满足的方程.

解　曲线$L:y=y(x)$在点$P(x,y)$的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$,

令$X=0$，得$Y_P=y-xy'$.

曲线$L:y=y(x)$在点$P(x,y)$的法线方程为$y'(Y-y)=-X+x$,

令$Y=0$，得$X_P=x+yy'$.

由题意知$x+yy'=y-xy'$,　整理得$y'=\dfrac{y-x}{y+x}$　即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{y}{x}-1}{\dfrac{y}{x}+1}$.

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$. 点 P 是曲线 $L: y=y(x)$ 上的任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于 $(0, Y_P)$，法线与 x 轴相交于点 $(X_P, 0)$. 若 $X_P=Y_P$，求 L 上点的坐标 (x, y) 满足的方程.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}.$$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

代入上述方程并分离变量得 $\frac{1+u}{1+u^2}du=-\frac{1}{x}dx.$

两边积分，得 $\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln|x|+C$，

即 $\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C.$ 又曲线过点 $(1,0)$，所以 $C=0$，

于是曲线 L 上的点的坐标 (x,y) 满足的方程为 $\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0$

齐次微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

令 $\dfrac{y}{x}=u$， 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

$$\Rightarrow u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varphi(u)-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \int\frac{1}{\varphi(u)-u}\mathrm{d}u=\ln x+C$$

2.微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的特解为 ________.

解　整理方程得 $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，　令 $\dfrac{y}{x}=u$，　则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

代入微分方程得　$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$，

故应填 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$

整理并分离变量得　$\dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，

积分得 $\ln|\ln u-1|=\ln x+\ln C$ $\Rightarrow$ $\ln u-1=Cx$ $\Rightarrow$ $\ln\dfrac{y}{x}-1=Cx$

代入 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 可得　$C=2$　　所以特解为　$y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

一阶线性微分方程

一阶线性非齐次微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$$\boxed{\text{通解}\quad y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)}$$

一阶线性齐次微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$

$e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ ——一阶线性非齐次微分方程的特解

$Ce^{-\int P(x)dx}$ —对应齐次方程的通解

3.求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解 $P(x)=-\dfrac{2}{x+1}$, $Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)}=e^{\int\frac{2}{1+x}dx}\left[\int(1+x)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{1+x}dx}dx+C\right]$$

$$=(1+x)^2\left[\int(1+x)^{\frac{5}{2}}(1+x)^{-2}dx+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right].$$ 故通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$.

4. 求微分方程的通解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

解 $\dfrac{dx}{dy} - \cos y \cdot x = \sin 2y$

$$\boxed{x = e^{-\int P(y)dy}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right]}$$

$$= e^{\int \cos y dy}\left[\int \sin 2y e^{\int -\cos y dy}dy + C\right]$$

$$= e^{\sin y}\left[\int \sin 2y e^{-\sin y}dy + C\right]$$

$$= e^{\sin y}\left[-2(1+\sin y)e^{-\sin y} + C\right]$$

$$= -2(1+\sin y) + Ce^{\sin y}$$

故通解为 $x = -2(1+\sin y) + Ce^{\sin y}$

4.已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中$f(x)$是R上的连续函数.

(1) 若$f(x)=x$,求解方程的通解；

(2) 若$f(x)$是周期为T的函数，证明：方程存在唯一的以T为周期的解.

解 (1) $f(x)=x$时，方程化为$y'+y=x$，其通解为

$$y=e^{-x}\left(\int xe^{x}dx+C\right)=e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+C)=x-1+Ce^{-x}$$

(2) 方程 $y'+y=f(x)$ 的通解 $y=e^{-x}\left[\int e^{x}f(x)dx+C\right]$ 即 $y=e^{-x}\left[\int_0^{x}e^{t}f(t)dt+C\right]$

$$y(x+T)-y(x)=e^{-(x+T)}\left[\int_0^{x+T}e^{t}f(t)dt+C\right]-e^{-x}\left[\int_0^{x}e^{t}f(t)dt+C\right]$$

$$=e^{-x}\left[\frac{1}{e^{T}}\int_0^{x+T}e^{t}f(t)dt+\frac{1}{e^{T}}\cdot C\right]-e^{-x}\left[\int_0^{x}e^{t}f(t)dt+C\right]$$

$$=e^{-x}\left[\left(\frac{1}{e^{T}}-1\right)C+\frac{1}{e^{T}}\int_0^{x+T}e^{t}f(t)dt-\int_0^{x}e^{t}f(t)dt\right]$$

已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数.

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解.

$$y(x+T)-y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[(\frac{1}{\mathrm{e}^T}-1)C+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right]$$

因为 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，所以

$$\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_T^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$$

令 $t=u+T$，则 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x}\mathrm{e}^{u+T} f(u+T)\mathrm{d}u=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{x}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$$

从而 $y(x+T)-y(x)=\mathrm{e}^{-x}[(\frac{1}{\mathrm{e}^T}-1)C+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t]$

令 $\mathrm{e}^{-x}[(\frac{1}{\mathrm{e}^T}-1)C+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t]=0$，　解得 $C=\dfrac{1}{\mathrm{e}^T-1}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$

故方程存在唯一的以 T 为周期的解.

【基本内容】

贝努里方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n} \qquad (n\neq 0,1)$

可化为 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

令 $z=y^{1-n}$，

得 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ 一阶线性微分方程

欧拉方程 $$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是常数.

令 $x = e^t$，则 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right), \cdots\cdots$$

将它们代入原方程，欧拉方程就化为了常系数线性微分方程.

【典型例题】

1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解　令 $z=y^{-1}$，得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-a\ln x$

$$z=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[-\int a\ln x e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{\ln x}\left[-a\int\ln x\cdot e^{\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[-a\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$ 把 $z=y^{-1}$ 代回并整理得 $yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$

2. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + xy - x^3y^3 = 0$的通解.

解 $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$ 即 $y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3$

令 $z = y^{-2}$, 得 $\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$

$$z = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$= e^{\int 2x dx}\left[\int\left(-2x^3e^{-\int 2x dx}\right)dx + C\right] = Ce^{x^2} + x^2 + 1$$

把 $z = y^{-2}$ 代回并整理得 $y^{-2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1$.

【基本内容】

可降阶的高阶微分方程

(1) $y^{(n)} = f(x)$型

等式两端积分 $y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1$,

再积分 $y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1x + C_2$,

…… ……

(2) $y'' = f(x, y')$ 型　不显含 y.

令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，

则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

求得其解 $p = \varphi(x, C_1)$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$.

分离变量 $\mathrm{d}y = \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x$,.

积分得 $y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$.

(3) $y'' = f(y, y')$ 型　不显含 x

令 $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$，则 $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$，

则原方程化为 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$

求得其解 $p = \varphi(y, C_1)$，即 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$，

分离变量 $\dfrac{1}{\varphi(y, C_1)}dy = dx$，

积分得 $\displaystyle\int \frac{1}{\varphi(y, C_1)}dy = x + C_2$.

【典型例题】

1.求微分方程的解： $y^{(4)}=\sin x$.

解　积分得 $y'''=-\cos x+C_1$

再积分得 $y''=-\sin x+C_1x+C_2$

继续积分得 $y'=\cos x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$

故通解为 $y=\sin x+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4$.

通解为 $y=\sin x+d_1x^3+d_2x^2+d_3x+d_4$.

2.求特解：$(1+x^2)y''=2xy'$， $y\big|_{x=0}=1$， $y'\big|_{x=0}=3$.

解　令 $y'=p$，则 $y''=p'$ $\Rightarrow$ $(1+x^2)p'=2xp$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ $\Rightarrow$ $\ln p=\ln(1+x^2)+\ln C_1$

即 $p=C_1(1+x^2)$ $\Rightarrow$ $y'=C_1(1+x^2)$

由 $y'\big|_{x=0}=3$ 得 $C_1=3$ $\Rightarrow$ $y'=3(1+x^2)$

$\Rightarrow$ $y=x^3+3x+C_2$　　由 $y\big|_{x=0}=1\Rightarrow C_2=1$

故特解为 $y=x^3+3x+1$.

1.微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为 ________ .

解　令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得：$x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+3p=0$

分离变量得：$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{3}{x}\mathrm{d}x.$

两边积分得：$\ln p=-3\ln x+\ln C_2'$

即　$p=C_2'x^{-3}$，也即 $y'=C_2'x^{-3}$，

解得 $y=C_1+\dfrac{C_2}{x^2}$

故应填 $y=C_1+\dfrac{C_2}{x^2}$

2.求微分方程$y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的特解.

解　令$y'=p$，则$y''=p'$，原方程化为$p'(x+p^2)=p$，　即$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}-\dfrac{x}{p}=p$，

于是$x=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p}\left(\int p\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{p}\mathrm{d}p}\mathrm{d}p+C_1\right)=p\left(\int\mathrm{d}p+C_1\right)=p(p+C_1)$，

因$p\big|_{x=1}=y'(1)=1$，得$C_1=0$，故$p^2=x$．$\Rightarrow$ $p=\pm\sqrt{x}$，

由$y'(1)=1$知，应取$p=\sqrt{x}$，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x}$，　解得$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$，

由$y(1)=1$得$C_2=\dfrac{1}{3}$，故$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

3.求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解　设 $y' = p$，　则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，代入原方程得 $y \cdot p\dfrac{dp}{dy} - p^2 = 0$，

即 $p\left(y \cdot \dfrac{dp}{dy} - p\right) = 0$，　1° 若 $p = 0$，则 $y = C$；

2° 由 $y \cdot \dfrac{dp}{dy} - p = 0$，　可得 $p = C_1 y$，　$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx} = C_1 y$，

分离变量 $\dfrac{dy}{y} = C_1 dx$，　积分得 $\ln y = C_1 x + \ln C_2$，

整理得 $y = C_2 e^{C_1 x}$，　故原方程通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

4.微分方程$yy''+y'^2=0$满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

的特解是_______.

解法1　设 $y'=p$，　　则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入原方程得 $y\cdot p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$，　即 $p(y\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p)=0$,

1° 若 $p=0$，则 $y=C$，与已知矛盾；

2° 由 $y\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$，可得 $p=\dfrac{C_1}{y}$，把 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}$ 代入得 $C_1=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2y}$，　解得 $y^2=x+C_2$.

微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$.

的特解是 _______.

解得 $y^2 = x + C_2$.

把 $y\big|_{x=0} = 1$ 代入得 $C_2 = 1$. 故特解为 $y = \sqrt{x+1}$ 或 $y^2 = x + 1$.

解法 2 将方程写为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(yy') = 0$,

故有 $yy' = C$, 即 $y\mathrm{d}y = C\mathrm{d}x$, 即 $2y\mathrm{d}y = C_1\mathrm{d}x$,

积分得通解为 $y^2 = C_1 x + C_2$. 故特解为 $y = \sqrt{x+1}$ 或 $y^2 = x + 1$.

3.求方程 $yy''=2[(y')^2-y']$ 满足 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的特解.

解　令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，原方程可化为 $yp\dfrac{dp}{dy}=2(p^2-p)$，

即 $y\dfrac{dp}{dy}=2(p-1)$，(因为 $p\neq0$，否则与已知条件矛盾.) 分离变量得 $\dfrac{1}{p-1}dp=\dfrac{2}{y}dy$，

等式两端同时积分并化简得 $p-1=C_1y^2$，即 $y'=C_1y^2+1$.

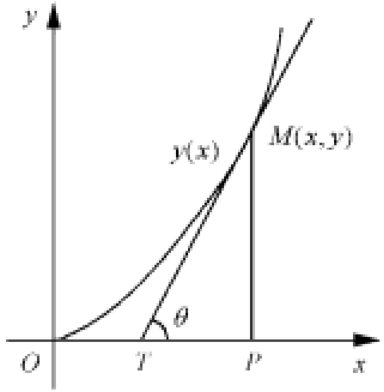
把初始条件 $y=1$时，$y'=2$代入上式得 $C_1=1$.

则方程化为 $\dfrac{dy}{dx}=y^2+1$，分离变量得 $\dfrac{dy}{y^2+1}=dx$，积分得 $\arctan y=x+C_2$，

即 $y=\tan(x+C_2)$，由 $y(0)=1$得 $C_2=\dfrac{\pi}{4}$，故微分方程的特解为 $y=\tan(x+\dfrac{\pi}{4})$.

4.已知某曲线在第一象限内且过原点，其上任一点M的切线MT，M的纵坐标MP，x轴所围成的三角形MPT的面积与曲边三角形OMP的面积之比恒为常数$k\left(k>\dfrac{1}{2}\right)$，又知道点$M$处的导数总为正，试求该曲线的方程.

解　设所求曲线为 $y(x)$，在其上任取一点 $M(x, y)(x>0, y>0)$



显见 $\dfrac{MP}{PT}=\tan\theta=y'$，则 $TP=\dfrac{MP}{y'}=\dfrac{y}{y'}$.

按题设条件知 $\dfrac{\frac{1}{2}MP\cdot TP}{\int_0^x y(t)\mathrm{d}t}=k$，$\Rightarrow \dfrac{y^2}{y'}=2k\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$.

已知某曲线在第一象限内且过原点，其上任一点M的切线MT，M的纵坐标MP，x轴所围成的三角形MPT的面积与曲边三角形OMP的面积之比恒为常数$k(k>\frac{1}{2})$，又知道点M处的导数总为正，试求该曲线的方程.

$$\frac{y^2}{y'}=2k\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$$

两边对 x 求导得 $\dfrac{2y(y')^2-y^2y''}{(y')^2}=2ky$,

即 $yy''+2(k-1)(y')^2=0$.

令 $y'=p$，则 $y''=p'=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

原方程可化为： $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(1-k)p^2$,

即 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(1-k)p$ $(p\neq 0$，否则与已知条件矛盾$)$.

已知某曲线在第一象限内且过原点，其上任一点 M 的切线 MT，M 的纵坐标 MP，x 轴所围成的三角形 MPT 的面积与曲边三角形 OMP 的面积之比恒为常数 $k\left(k>\dfrac{1}{2}\right)$，又知道点 M 处的导数总为正，试求该曲线的方程.

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(k-1)p$$

分离变量得 $\dfrac{1}{p}\mathrm{d}p=\dfrac{2(1-k)}{y}\mathrm{d}y$,

等式两端同时积分并化简得：$p=C_1y^{2(1-k)}$　即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y^{2(1-k)}$

再分离变量并积分得 $\dfrac{1}{2k-1}y^{2k-1}=C_1x+C_2$.

因曲线过原点，即 $y(0)=0$，得：$C_2=0$,

故所求曲线为 $y=C_1x^{\frac{1}{2k-1}}$.

二阶线性微分方程解的结构

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x) \quad ①$$

二阶线性非齐次微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \quad ②$$

二阶线性齐次微分方程

定理1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为方程②的两个解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是②的解，其中 C_1，C_2 为任意常数.

注 (1) 齐次方程的解符合叠加原理；

(2) $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 不一定是②的通解，只有当 C_1，C_2 相互独立，即 C_1，C_2 无法合并时，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 才是②的通解.

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \quad ②$$

定理 2　如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为方程②的两个线性无关的特解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是②的通解，其中 C_1，C_2 为任意常数.

线性无关　$y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关 $\Leftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$ 常数.

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，如果存在 n 个不全为零的常数 k_1，$k_2, \cdots$，k_n，使得当 $x\in I$ 时，恒有

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$$

则称这 n 个函数在区间 I 上线性相关，否则称为线性无关.

推广　n阶线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad ③$$

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad ④$$

若$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是其对应齐次方程④的$n$个线性无关的特解，

则④的通解为　$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x) \quad ①$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \quad ②$$

定理3　设$y^*(x)$是二阶非齐次线性微分方程①的一个特解，$Y(x)$是与①对应的齐次方程②的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程①的通解.

定理4　设非齐次线性微分方程①右端是两个函数之和，即

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x) \quad ⑤$$

而$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$及$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$的特解分别为$y_1^*(x)$及$y_2^*(x)$，则$y_1^*(x)+y_2^*(x)$就是微分方程⑤的特解.

线性微分方程解的结构

1.若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$ _______.

(A) $3x(1+x^2)$ (B) $-3x(1+x^2)$ (C) $\dfrac{x}{1+x^2}$ (D) $-\dfrac{x}{1+x^2}$

解 因为 $y_1(x)=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$ 和 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，所以 $y_2(x)-y_1(x)=2\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，

代入该齐次方程，得 $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+2p(x)\sqrt{1+x^2}=0$，故 $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$.

A

再将 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 代入原方程，可得

$$4x(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+x^2}[(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}]=q(x),$$

解得 $q(x)=3x(1+x^2)$.

2.已知 $y_1=3$，$y_2=3+x^2$，$y_3=3+e^x$是二阶线性非齐次方程的解，

求它的通解和该方程.

解　$y_2-y_1=x^2$，$y_3-y_1=e^x$ 是齐次方程的解 $\dfrac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\neq$ 常数

$\therefore$　$Y=C_1x^2+C_2e^x$ 为齐次方程的通解.　而 $y_1=3$是非齐次方程的特解，

故非齐次方程通解为：$y=C_1x^2+C_2e^x+3$　　①

对①求一、二阶导数，消去 C_1、C_2　$\begin{cases} y=C_1x^2+C_2e^x+3 \\ y'=2C_1x+C_2e^x \\ y''=2C_1+C_2e^x \end{cases}$

已知 $y_1=3$，$y_2=3+x^2$，$y_3=3+e^x$ 是二阶线性非齐次方程的解，求它的通解和该方程.

$$\begin{cases} y = C_1x^2 + C_2e^x + 3 & ① \\ y' = 2C_1x + C_2e^x & ② \\ y'' = 2C_1 + C_2e^x & ③ \end{cases}$$

① 得 $C_2e^x = y-(C_1x^2+3)$　　② 得 $C_2e^x = y'-2C_1x$

③ 得 $C_2e^x = y''-2C_1$

$y-(C_1x^2+3) = y'-2C_1x = y''-2C_1$　　$y'-2C_1x = y''-2C_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{y''-y'}{2(1-x)}$;

$y-(C_1x^2+3) = y'-2C_1x \Rightarrow y-y'-3 = C_1(x^2-2x)$

把 $C_1 = \dfrac{y''-y'}{2(1-x)}$ 代入上式得 $y-y'-3 = \dfrac{y''-y'}{2(1-x)}(x^2-2x)$

从而得 $2(1-x)(y-y'-3) = (y''-y')(x^2-2x)$

整理得 $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y = 6(1-x)$.

3.设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma \mathrm{e}^{x}$ 的一个特解为

$y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}$. 试确定常数 α，β，γ，并求该方程的通解.

解法一　由题设特解知原方程的特征根为 1 和 2，

所以特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$,

即 $r^{2}-3r+2=0$，于是 $\alpha=-3,\beta=2$

为确定 γ，只需将 $y_{1}=x\mathrm{e}^{x}$代入方程，得

$$(x+2)\mathrm{e}^{x}-3(x+1)\mathrm{e}^{x}+2x\mathrm{e}^{x}+2x\mathrm{e}^{x}=\gamma \mathrm{e}^{x},\quad \gamma=-1.$$

从而原方程的通解为　$y=C_{1}\mathrm{e}^{x}+C_{2}\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{x}$.

设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$. 试确定常数 α，β，γ，并求该方程的通解.

解法二　将 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$ 代入原方程，得

$$(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^{x}+(1+\alpha+\beta)xe^{x}=\gamma e^{x}$$

比较同类项的系数，有 $\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}$ 解方程组得 $\alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1,$

即原方程为 $y''-3y'+2y=-e^{x}$

它对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$

解之得特征根 $r_1=1$，$r_2=2$，故齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

由题设特解知原方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+[e^{2x}+(1+x)e^{x}]$,

即　$y=C_3e^{x}+C_4e^{2x}+xe^{x}$.

4.设 $y_1 = x$ 和 $y_2 = x\ln x$ 是二阶齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解，求 $P(x)$，$Q(x)$ 以及该方程的通解.

解　由 $y_1'=1$，$y_1''=0$，$y_2'=\ln x+1$，$y_2''=\dfrac{1}{x}$，代入方程得

$$\begin{cases} P(x)+xQ(x)=0 & ① \\ \dfrac{1}{x}+P(x)(\ln x+1)+Q(x)x\ln x=0 & ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x)+xQ(x)=0 & ① \\ (\ln x+1)\cdot P(x)+x\ln x\cdot Q(x)=-\dfrac{1}{x} & ② \end{cases}$$

$① \times \ln x - ②$ 得 $\quad -P(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow P(x)=-\dfrac{1}{x}$

把 $P(x)=-\dfrac{1}{x}$ 代入①得 $Q(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad \therefore$ 原方程为 $y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{1}{x^2}y=0$

又由于 $\dfrac{y_1}{y_2}=\ln x \neq$ 常数 $\qquad$ 故方程通解为 $y=C_1x+C_2\ln x.$

二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$（其中 p，q 为常数）

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$， 特征根记为 λ_1，λ_2.

(1) 若特征方程有两个不相等的实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，

则通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$；

(2) 若特征方程有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，

则通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda x}$；

(3) 若特征方程有一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha \pm i\beta$，$(\beta \neq 0)$

则通解为 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$$ (其中 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},p_n$ 为常数)

特征方程 $\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

特征根记为 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n.

n次代数方程在复数范围内有n个根，特征方程中每一个根对应着通解中的一项，且每一项都含有一个任意常数.

(1) 特征单根 λ，给出一项 $Ce^{\lambda x}$；

(2) 一对单复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，给出两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$；

n阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0\ (\text{其中 } p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},p_n \text{ 为常数})$$

(3) k重实根 λ，给出k项 $\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)e^{\lambda x}$;

(4) 一对k重复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，给出$2k$项

$$e^{\alpha x}\left[\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x\right].$$

通解 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$

其中$y_1,y_2,\cdots,y_n$是齐次方程n个线性无关的解.

【典型例题】

1. 求微分方程的通解：

(1) $y''-2y'-3y=0$；　　(2) $y''+4y'+4y=0$；

(3) $y''-2y'+5y=0$.

解　(1) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$，　特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=3$，

所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$；

(2) 特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$，　特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，

所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$；

(3) 特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+5=0$，　特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$，

所求通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

2.某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增加阻力，使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为9000kg的飞机，着陆时的水平速度为700km/h，经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k = 6.0\times 10^{6}$）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

解　根据牛顿第二定律得 $m\dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} = -k\dfrac{dx}{dt}$　即 $\dfrac{d^{2}x}{dt^{2}} + \dfrac{k}{m}\cdot\dfrac{dx}{dt} = 0$

特征方程 $\lambda^{2} + \dfrac{k}{m}\lambda = 0$　特征值 $\lambda_{1} = 0, \lambda_{2} = -\dfrac{k}{m}$

故 $x = C_{1} + C_{2}e^{-\frac{k}{m}t}$

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增加阻力，使飞机迅速减速并停下．现有一质量为9000kg的飞机，着陆时的水平速度为700km/h，经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为$k=6.0\times10^{6}$）．问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

$$x(t)=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

初始条件 $x\big|_{t=0}=0$，$v\big|_{t=0}=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.-\dfrac{kC_2}{m}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right|_{t=0}=v_0$

解得 $C_1==\dfrac{mv_0}{k}$，$C_2=-\dfrac{mv_0}{k}$ 故 $x(t)=\dfrac{mv_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$

当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\dfrac{mv_0}{k}=1.05(\mathrm{km})$

所以飞机滑行的最长距离是1.05km.

3. 在下列微分方程中，以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$($C_1$，$C_2$，$C_3$ 为任意常数)为通解的是

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$　　(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$　　(D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

解　特征根为 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_{2,3} = \pm 2\mathrm{i}$

对应特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2\mathrm{i})(\lambda - 2\mathrm{i}) = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$

D

微分方程为 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

4. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解，则该方程的通解为 $y=$ ______ .

解　$y_1-y_2=e^{3x}-e^x$，$y_2-y_3=e^x$

对应齐次微分方程的通解为　$y=C_1\left(e^{3x}-e^x\right)+C_2e^x$

非齐次微分方程的一个特解为　$y^*=-xe^{2x}$

故非齐次微分方程的通解为　$y=C_1\left(e^{3x}-e^x\right)+C_2e^x-xe^{2x}$

故应填 $C_1\left(e^{3x}-e^x\right)+C_2e^x-xe^{2x}$

$C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$

1.微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 ____.

解　特征方程为 $r^2+2r+5=0,$

特征根为 $r=-1\pm 2i.$

通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

2.若函数$f(x)$满足方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f'(x)=2e^{x}$，则$f(x)=$_______.

解　方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的特征方程为$\lambda^{2}+\lambda-2=0$，

解得$\lambda_{1}=-2$，$\lambda_{2}=1$.

所以$f(x)=C_{1}e^{-2x}+C_{2}e^{x}$，其中$C_{1}$，$C_{2}$为任意常数.

将$f(x)=C_{1}e^{-2x}+C_{2}e^{x}$代入方程$f''(x)+f'(x)=2e^{x}$

得 $5C_{1}e^{-2x}+2C_{2}e^{x}=2e^{x}$，所以$C_{1}=0$，$C_{2}=1$.　故$f(x)=e^{x}$.

故应填 e^{x}

3.若二阶常系数线性齐次微分方程$y''+ay'+by=0$的通解为$y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程$y''+ay'+by=x$满足条件$y(0)=2$，$y'(0)=0$的解为$y=$______.

解　由$y=(C_1+C_2x)e^x$知特征方程：$\lambda^2+a\lambda+b=(\lambda-1)^2=\lambda^2-2\lambda+1$，

所以$a=-2$，$b=1$.　　求解微分方程$y''-2y'+y=x$，

由题设条件设特解$y^*=cx+d$代入方程$y''-2y'+y=x$得$c=1$，$d=2$，即$y^*=x+2$.

所以通解为$y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，

由初始条件$y(0)=2$，$y'(0)=0$得$C_1=0$，$C_2=-1$，

所求解为$y=-xe^x+x+2=x(1-e^x)+2$.

故应填 $x(1-e^x)+2$.

【基本内容】

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$ （其中 p，q 为常数）

(1) $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$

特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$，其中 $k=\begin{cases}0, & \lambda\text{不是特征根}\\ 1, & \lambda\text{是特征方程的单根}\\ 2, & \lambda\text{是特征方程的重根}\end{cases}$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$ (其中 p, q 为常数)

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

特解 $y^*=x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$,

其中 $m=\max\{l,n\}$, $k=\begin{cases}0, & \lambda\pm i\omega \text{不是特征根}\\ 1, & \lambda\pm i\omega \text{是特征根}\end{cases}$

【典型例题】

1.求微分方程的特解：$y''-3y'+2y=5$，$y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$.

解　特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$

对应齐次微分方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

自由项 $f(x)=5e^{0\cdot x}$

设非齐次特解为 $y^*=x^0\cdot A\cdot e^{0\cdot x}$，即设 $y^*=A$，

代入原微分方程得 $A=\dfrac{5}{2}$　　故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{5}{2}$.

把 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$ 代入上式得 $C_1=-5$，$C_2=\dfrac{7}{2}$.

故所求特解为 $y=-5e^x+\dfrac{7}{2}e^{2x}+\dfrac{5}{2}$.

特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

2.求微分方程$y''+y=x\cos 2x$的通解.

解　特征方程$\lambda^2+1=0$，　特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$

对应齐次微分方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

自由项$f(x)=\mathrm{e}^{0\cdot x}(x\cos 2x+0\sin 2x)$

设非齐次特解为 $y^*=\mathrm{e}^{0\cdot x}[(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x]$,

则 $y^{*\prime}=(2cx+a+2b)\cos 2x+(-2ax-2b+c)\sin 2x$,

$y^{*\prime\prime}=(-4ax-4b+4c)\cos 2x-(4cx+4a+4d)\sin 2x$,

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right],$$

求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

将 y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ 代入原微分方程，整理得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+4a+3d)\sin 2x=x\cos 2x$$

得 $\begin{cases}-3ax-3b+4c=x\\3cx+4a+3d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3a=1\\-3b+4c=0\\3c=0\\4a+3d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\b=0\\c=0\\d=\dfrac{4}{9}\end{cases}$

$$\Rightarrow\ y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

故所求通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x.$

3.微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$的特解可设为$y^*=$ ______ .

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$$

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

解　特征方程$\lambda^2-4\lambda+8=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=2\pm 2i$

微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}$，设非齐次特解为 $y_1^*=Ae^{2x}$，

微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}\cos 2x$，

设非齐次特解为 $y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

故原微分方程的特解可设为 $y^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

C

4.设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}-\int_{0}^{x}(x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u$，其中 $\varphi(x)$为连续函数，求 $\varphi(x)$.

解　原方程化简得　$\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}-x\int_{0}^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{x}u\varphi(u)\mathrm{d}u$

关于 x 求导数 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x}-\int_{0}^{x}\varphi(u)\mathrm{d}u$　　再求导得　$\varphi''(x)+\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}$

该微分方程所对应齐次方程的特征方程为　$r^{2}+1=0$，　其特征根为 $r=\pm i$

所以齐次方程的通解为 $\Phi=C_{1}\cos x+C_{2}\sin x$

设 $\varphi''(x)+\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}$的特解为 $\varphi^{*}=A\mathrm{e}^{x}$，　代入方程，求得 $A=\dfrac{1}{2}$

故知　$\varphi(x)=C_{1}\cos x+C_{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$　又 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=1$，于是 $C_{1}=C_{2}=\dfrac{1}{2}$.

所以　$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$

5.利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^{x}$ 化简，并求出原方程的通解.

解法1　由 $u=y\cos x$ 两端对 x 求导得 $u'=y'\cos x-y\sin x$

$$u''=y''\cos x-2y'\sin x-y\cos x.$$

于是原方程化为 $u''+4u=\mathrm{e}^{x}$.

其通解 $u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{5}$，（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）.

从而原方程的通解为 $y=C_1\dfrac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{5\cos x}$.

利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^{x}$ 化简，并求出原方程的通解.

解法2　$y=u\sec x$，$y'=u'\sec x+u\sec x\tan x$，

$$y''=u''\sec x+2u'\sec x\tan x+u\sec x\tan^{2}x+u\sec^{3}x,$$

代入原方程得 $u''+4u=\mathrm{e}^{x}$.

其通解 $u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{5}$，　（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）.

从而原方程的通解为 $y=C_1\dfrac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{5\cos x}$.

常考题型五 微分方程的应用题

1. 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k>0$，求 $x(t)$.

解 由题设，有 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x), \\ x\big|_{t=0}=x_0. \end{cases}$ 由方程得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=k\mathrm{d}t$，

整理得 $\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{N-x}\right)\mathrm{d}x=k\mathrm{d}t$，两端积分得 $\ln\dfrac{x}{N-x}=kNt+\ln C$，

再整理 $\dfrac{x}{N-x}=C\mathrm{e}^{kNt}$，解得 $x=\dfrac{NC\mathrm{e}^{kNt}}{1+C\mathrm{e}^{kNt}}$，其中 C 为任意常数.

代入初始条件 $x(0)=x_0$，得 $x=\dfrac{Nx_0\mathrm{e}^{kNt}}{N-x_0+x_0\mathrm{e}^{kNt}}$.

2.设连续函数$f(x)$满足$f(x)=\sin ax-\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \quad (a>0)$，求$f(x)$.

解　令　$x-t=u$，则$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$

代入方程有：$f(x)=\sin ax-x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$　　令　$x=0$得　$f(0)=0$

关于x求导，有　$f'(x)=a\cos ax-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-xf(x)+xf(x)$

$\Rightarrow\ f'(x)=a\cos ax-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$　　令　$x=0$，$f'(0)=a$，

关于x再求导，$f''(x)+f(x)=-a^2\sin ax$

$f''(x)+f(x)=0$的特征方程为$r^2+1=0$，解得$r=\pm i$.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\sin ax-\int_0^x t f(x-t)\mathrm{d}t \quad (a>0)$，求 $f(x)$.

$f''(x)+f(x)=-a^2\sin ax$　　$r=\pm i$　　$f(0)=0,\ f'(0)=a$

(1) $a=1$ 时，设 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$，得 $A=\frac{1}{2},\ B=0$

$\therefore\quad f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$　　$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$

(2) $a\neq 1$ 时，$y^*=A\cos ax+B\sin ax$，得 $A=0,\ B=\frac{a^2}{a^2-1}$，$y^*=\frac{a^2}{a^2-1}\sin ax$

$\therefore\quad f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{a^2}{a^2-1}\sin ax$　　$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=-\frac{a}{a^2-1} \end{cases}$

$\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{a^2-1}(a^2\sin ax-a\sin x)$

3.设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限 _______.

(A) 不存在　　(B) 等于1　　(C) 等于2　　(D) 等于3

解　由 $y=y(x)$ 是微分方程特解知 $y''(x)=e^{3x}-py'(x)-qy(x)$,

使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}$$

C

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^{3x}-py'(x)-qy(x)}=\frac{2}{1-0-0}=2.$$

4.长为6米的链条自桌上无摩擦地向下滑动，假设运动开始时，链条自桌上垂下部分已有1米长，试问，需要多长时间，链条才全部滑离桌面？

解　取桌面为x轴的原点，x轴的方向垂直向下，设在时刻t时链条在桌面下端的长度为x，则$x = x(t)$，再设链条的线密度为ρ（ρ为常数），于是在时刻t，作用在链条的力是重力ρxg（g为重力加速度），

因此有 $6\rho\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t} = \rho xg$　　即 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}^2t} - \dfrac{g}{6}x = 0$，且满足$x(0) = 1$，$x'(0) = 0$.

由特征方程$r^2 - \dfrac{g}{6} = 0$，得特征根$r = \pm\sqrt{\dfrac{g}{6}}$，

于是方程的通解是$x = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}$，

长为6米的链条自桌上无摩擦地向下滑动，假设运动开始时，链条自桌上垂下部分已有1米长，试问，需要多长时间，链条才全部滑离桌面？

方程的通解是 $x = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}$，

再由 $x(0) = 1$，$x'(0) = 0$，可得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$，所以 $x = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}\right)$.

当 $x = 6$ 时，$\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}\right) = 6$，　记 $e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} = u$，则 $\frac{1}{2}(u + u^{-1}) = 6$

$\Rightarrow u^2 - 12u + 1 = 0 \Rightarrow u = 6 \pm \sqrt{35}$　　当 $x = 6$ 时，可得 $e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} = 6 + \sqrt{35}$.

所以，链条全部滑离桌面所需的时间为 $t = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(6 + \sqrt{35})$.

3. 欧拉方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0\ (x>0)$的通解为 ______.

解 令 $x=e^t$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{x^2}(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt})$

则原方程化为 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$ 特征方程为 $r^2+3r+2=0$，

解得特征根为：$r_1=-1$，$r_2=-2$. 通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$，

把 $x=e^t$代入上式得原微分方程的通解为：

$y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$ （C_1， C_2为任意常数）

故应填 $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$

4.求微分方程$y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$的通解.

解：原方程化为：$x^2y''-xy'+y=2x$ ①

令$x=e^t$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$

则方程①化为：$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=2e^t$ ②

方程②的特征方程为：$r^2-2r+1=0$，解得特征根为：$r_{1,2}=1$.

设$y^*=at^2e^t$，解得$a=1$，从而$y^*=t^2e^t$，

所以方程②的通解为：$y=(C_1+C_2t)e^t+t^2e^t$，

把$x=e^t$回代得原微分方程的通解为：$y=(C_1+C_2\ln x)x+x\ln^2 x$

常考题型六 微分方程的杂例

1.设 $F(x)$为$f(x)$的原函数，且当 $x\geq 0$时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$. 已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求$f(x)$.

解 由 $F'(x)=f(x)$有 $2F(x)F'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

两端积分 $\int 2F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int xe^x\mathrm{d}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x\mathrm{d}x=\frac{e^x}{1+x}+C$$

$\Rightarrow F^2(x)=\dfrac{e^x}{1+x}+C$， 由 $F(0)=1$得 $C=0$， 从而 $F(x)=\sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}}$ $(F(x)>0)$，

故 $f(x)=F'(x)=[e^{\frac{x}{2}}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}]'=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.

2.若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，$G(x)$是 $\dfrac{1}{f(x)}$的一个原函数，又 $F(x)G(x)=-1$，$f(0)=1$，求 $f(x)$.

解　将方程 $F(x)G(x)=-1$两端对 x 求导，得 $F'(x)G(x)+F(x)G'(x)=0$

由 $G(x)=-\dfrac{1}{F(x)}$及 $G'(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{F'(x)}$

得 $-\dfrac{F'(x)}{F(x)}+\dfrac{F(x)}{F'(x)}=0$　$\Rightarrow\left[F'(x)\right]^2=\left[F(x)\right]^2\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\pm F(x)$

积分得 $F(x)=C\mathrm{e}^{x}$ 或 $F(x)=C\mathrm{e}^{-x}$　解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{x}$ 或 $f(x)=-C\mathrm{e}^{-x}$.

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$ 或 $C=-1$　从而 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ 或 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

3.设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的一般表达式.

解　曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$

令 $X=0$ 得截距 $Y=f(x)-xf'(x)$.

由题意知 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)-xf'(x)$，即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\left[f(x)-xf'(x)\right]$.

上式对 x 求导，化简得 $xf''(x)+f'(x)=0$，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xf'(x)\right]=0$，

积分得 $xf'(x)=C_1$，因此 $f(x)=C_1\ln x+C_2$（其中 C_1, C_2 为任意常数).

4. 已知连续函数 $f(x)$满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = ax^2$.

(1) 求 $f(x)$; (2) 若 $f(x)$在区间 $[0,1]$上的平均值为 1，求 a 的值.

解 (1) 令 $u = x - t$， 则 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

由题设知 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u = ax^2$，

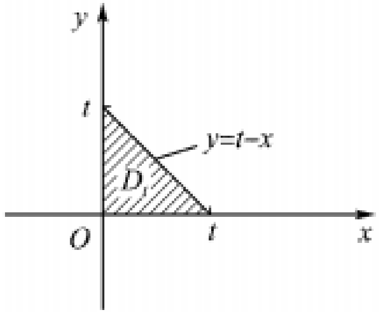
对上式两端求导得 $f(x) + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = 2ax$， 所以 $f(x)$可导， $f(0) = 0$，

且 $f'(x) + f(x) = 2a$. 于是 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\int 2a\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + C\right) = C\mathrm{e}^{-x} + 2a$，

由 $f(0) = 0$ 得 $C = -2a$， 从而 $f(x) = 2a(1-\mathrm{e}^{-x})$.

(2) $\int_0^1 2a(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = 1$， 得 $\dfrac{2a}{\mathrm{e}} = 1$， 故 $a = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$

5.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导数，$f(0)=1$，且 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_t=\{(x,y)\,|\,0\le y\le t-x, 0\le x\le t\}$ $(0<t\le 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.



解　由题意 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

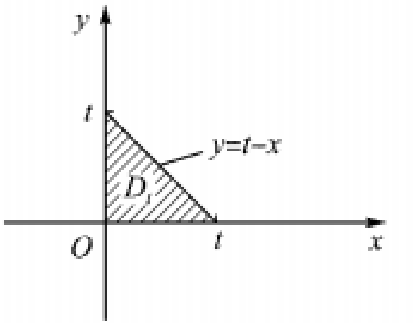
左端 $=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^t [f(t)-f(x)]\mathrm{d}x=tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$，

右端 $=\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}t^2 f(t)$，　从而有 $tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}t^2 f(t)$，

两边关于 t 求导，得 $tf'(t)=tf(t)+\frac{1}{2}t^2 f'(t)$，

设函数$f(x)$在区间[0，1]上有连续的导数，$f(0)=1$，且$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D_t=\{(x,y)\,|\,0\le y\le t-x, 0\le x\le t\}\ (0<t\le 1)$，求$f(x)$的表达式.

两边关于t求导，得 $tf'(t)=tf(t)+\dfrac{1}{2}t^2 f'(t)$，



整理得 $(t-\dfrac{1}{2}t^2)f'(t)=tf(t)$， 即 $(2-t)tf'(t)=2tf(t)$，

当$t\ne 0$时，$\dfrac{f'(t)}{f(t)}=\dfrac{2}{2-t}$， 解得 $f(t)=\dfrac{C}{(2-t)^2}$，

由$f(0)=1$，得$C=4$，即有$f(t)=\dfrac{4}{(2-t)^2}$，也就是$f(x)=\dfrac{4}{(2-x)^2}$.