导数习题课1(14题)

1. 已知 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的导数存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}$

2. 求下列函数的导数

(1) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;　　(2) $y=\sqrt[x]{x}$;

(3) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cot x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\tan x}$;　　(4) $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$;

(5) $y=x+x^x+x^{x^x}$;　　(6) $y=\sqrt{\dfrac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}\ (a>b>0)$.

3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 有几个不可导的点？

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+bx, & x\ge 0 \end{cases}$，确定 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续并且可微.

5. 求下列函数 $f(x)$ 的$f_-'(0)$及右导数 $f_+'(0)$，又$f'(0)$是否存在？

（1） $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geq 0;\end{cases}$

（2） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^K\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, K是实数.问：

（1）当K为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导；

（2）当K为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处可导，但导函数不连续；

（3）当K为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处导函数连续。

7. 设函数 $y=f(x)$由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$， 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$

8. 设方程 $xy^2+\mathrm{e}^y=\cos(x+y^2)$ ， 求 y'。

9. 设 $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$ ，求 $y^{(n)}$。

10. 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ ， 求 $y^{(n)}$。

11. 设 $y=x^2\sin 2x$， 求 $y^{(50)}$.

12. 求下列参数方程所确定的函数的一阶导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

（1）$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$

13. 求由方程 $y^3 = x^2 + xy + y^2$ 所确定函数的微分 $\mathrm{d}y$

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x) > 0$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$，

且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， 求 $f(x)$.

答案

1. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\frac{1}{2}f'(3)$$

2.(1) $\sin x\ln\tan x$ (2) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

(3) $y'=-\cos 2x.$ (4) $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

(5) $y'=1+x^x(\ln x+1)+x^{x^x}\left[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}\right]$

(6) $\sqrt{\dfrac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}\cdot\dfrac{(a+b)(ab-x^2)}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$

3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 有几个不可导的点？

解 $f(x)=(x+1)(x-2)|x(x-1)(x+1)|$

可能出现不可导的点为 $x=-1, x=0, x=1$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)|x(x-1)(x+1)|-0}{x+1}=0$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x+1)(x-2)|x(x-1)(x+1)|-0}{x-1}=4$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x+1)(x-2)|x(x-1)(x+1)|-0}{x-1}=-4$$

$f'(1)$ 不存在

同理，$f'(0)$ 也不存在。 因此，函数有两个不可导的点。

4. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x<0 \\ a+bx, & x\geq 0 \end{cases}$，确定$a,b$，使$f(x)$在 $x=0$ 处连续并且可微.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+bx)=a,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{x}=1$$

欲使$f(x)$在x=0处连续，必须$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, 所以 $a=1$

又因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+bx)-1}{x}=b$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

所以 b=1 .

5.解（1）$f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\sinh-0}{h}=1$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)-0}{h}=1$$

$f'_-(0)=f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=1$.

（2）$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 不存在。

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{K}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，$K$是实数.问：

（1）当K为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导；

（2）当K为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处可导，但导函数不连续；

（3）当K为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处导函数连续。

解 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{K}\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{K-1}\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=\begin{cases}\text{不存在}, & \text{当 } K\le 1 \\ 0, & \text{当 } K>1\end{cases}$$

即 $$f'(0)=\begin{cases}\text{不存在}, & K\le 1 \\ 0, & K>1\end{cases}$$

当$K>1$时，$f(x)$的导函数为：

$$f'(x)=\begin{cases} Kx^{K-1}\cdot\sin\dfrac{1}{x}-x^{K-2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

为使$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(Kx^{K-1}\cdot\sin\dfrac{1}{x}-x^{K-2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)=f'(0)=0$

则取$K>2$即可．因此，函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{K}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

（1）当$K\le 1$时，$f(x)$在$x=0$处不可导；

（2）当$1<K\le 2$时，$f(x)$在$x=0$处可导，但导函数不连续；

（3）当$K>2$时，$f(x)$在$x=0$处导函数连续。

$$7.\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1$$

$$8.\ y' = -\frac{y^2 + \sin(x + y^2)}{2xy + e^y + 2y\sin(x + y^2)}$$

$$9.\ (-1)^n n!\left[\frac{8}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

$$10.\ y^{(n)} = \frac{3}{8}\cdot 4^n \cdot \cos(4x + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$11.\ 2^{50}(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x)$$

$$12.\ dy = \frac{2x + y}{3y^2 - x - 2y}dx$$

13. 求下列参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

（1）$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}$

解（1）$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{3as\cos\theta\sin^2\theta}{-3a\sin\theta\cos^2\theta} = -\tan\theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\tan\theta)'_\theta}{x'_\theta} = \frac{-\sec^2\theta}{-3a\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta$$

（2）$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{1}{t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求 $f(x)$.

解　设 $y=\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}$，则 $\ln y=\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}$，

$$\lim_{h\to 0}\ln y=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{f(x+hx)}{f(x)}=x\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{hx}$$

$$=x[\ln f(x)]',$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{x[\ln f(x)]'}=e^{\frac{1}{x}},$$ 即 $x[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}$.

$[\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x^2}$，$\ln f(x)=-\dfrac{1}{x}+C$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

则 $C=0$．所以 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.