二、微积分基本定理

用定义计算简单定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ —麻烦。寻求新方法。

(一)积分上限的函数及其导数

设 $f(x) \in C[a,b]$，且 $x \in [a,b]$，考察 $f(x)$ 在区间 $[a,x]$ 上的定积分

$$\int_a^x f(x)dx \longrightarrow \int_a^x f(t)dt$$

确定了一个 $[a,b]$ 上的函数，记作 $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b).$$

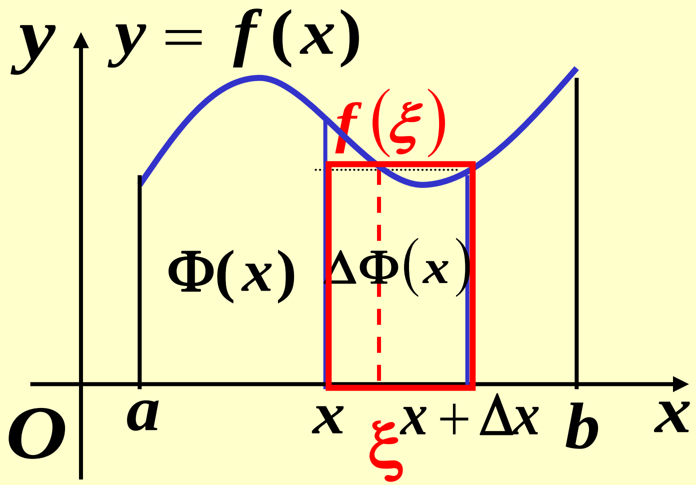
—— 积分上限函数

定理3 $f(x)\in C[a,b] \Rightarrow \Phi'(x)\exists,$

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)}$$

且 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad (a\le x\le b). \qquad (2)$

证 $\forall x\in(a,b)$，使得$x+\Delta x\in(a,b)$，



则 $\Phi(x+\Delta x)=\displaystyle\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$.

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x, \qquad \therefore \Delta\Phi=f(\xi)\Delta x,$$

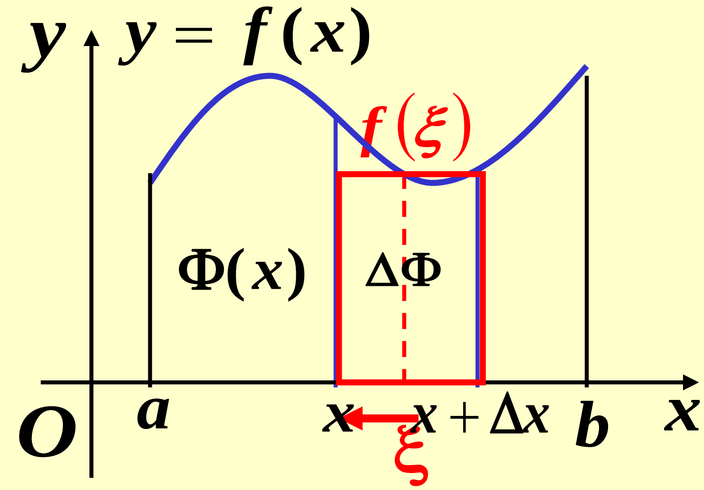
积分中值定理

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi).$$

$$\Delta x\to 0\Rightarrow \xi\to x,$$

$$\because\ f(x)\in C[a,b],$$

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).$$



$$\therefore\ \lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$$

$$=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).$$

定理4（原函数存在定理）

$$f(x)\in C[a,b],\Rightarrow \Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

意义： （1）肯定了连续函数的原函数是存在的；

（2）揭示了定积分与原函数之间的关系。

(二) 牛顿—莱布尼茨（Newton-leibniz）公式

定理5 $f(x)\in C[a,b], F'(x)=f(x) \Rightarrow$ 微积分基本定理

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)} \qquad (4)$$

证 $F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 也是$f(x)$的一个原函数，

$$\therefore F(x)-\Phi(x)=C \quad (a\le x\le b)$$

$$F(a)-\Phi(a)=C=F(b)-\Phi(b)$$

$$F(b)-F(a)=\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt$$

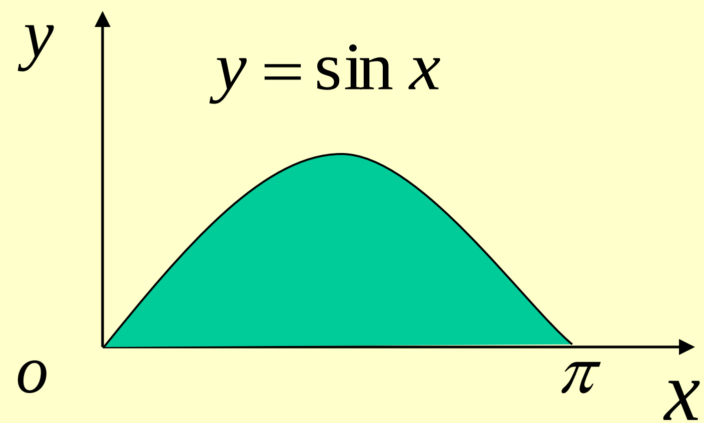
$$\therefore \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

证毕

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Newton-Leibniz 公式， 也称**微积分基本公式**。

1. 计算 $\int_0^1 x^2 dx$



解 $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$

2. 计算 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

解 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

3. 计算 $y = \sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形的面积。

解 $A = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) + (1) = 2$

注 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$不能使用牛顿-莱布尼兹公式

4.设$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1\\ 5, & 1<x\le 2\end{cases}$，求$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x\mathrm{d}x+\int_1^2 5\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^1+5x\Big|_1^2=6$

5.求$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{|\cos x|}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{-\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{1+\sin x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-2\sqrt{1+\sin x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}}=4\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{3}{2}}$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x & 0\le x\le\pi\\ 0 & x<0\text{或}x>\pi\end{cases}$，

求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

解 当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0.$

当 $0\le x\le\pi$ 时，

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{2}\sin t dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^x=\frac{1}{2}(1-\cos x)$$

当 $x>\pi$ 时，

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^\pi f(t)dt+\int_\pi^x f(t)dt=\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin t dt+\int_\pi^x 0dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^\pi=1$$

$$\therefore\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le\pi.\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

利用 N—L 公式求数列极限：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)}$$

7.　求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$ $\longrightarrow$ $f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx}$

解

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\arctan x\right]_0^1$$

$$=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

专题：积分上限函数的导数

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

$$1.\left(\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t\right)' = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

结论： 若 (1) $f(t) \in C[\alpha(x), \beta(x)]$,

(2) $\alpha(x), \beta(x)$在(a,b)内可导.

则 $$\frac{d}{dx}\left[\int_c^{\beta(x)} f(t)dt\right] = f[\beta(x)]\beta'(x) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\alpha(x)}^{c} f(t)dt\right] = -f[\alpha(x)]\alpha'(x) \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right] = f[\beta(x)]\beta'(x) - f[\alpha(x)]\alpha'(x) \qquad (3)$$

$$2.\left(\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t\right)'=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2x}$$

3. 求 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\sin x^2}{x^2}\left(x^2\right)'=\frac{2x\sin x^2}{x^2}=\frac{2\sin x^2}{x}$$

$$4.\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t\right)'$$

$$=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{2x}-\frac{\ln(1+x)}{x}$$