习题课5（定积分应用）14题

1.设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$, $f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $S_2=f(b)(b-a)$, $S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$. 则

(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_3<S_1$

2.

【594】曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为________.

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

3.位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$下方，$x$ 轴上方的无界图形的面积是________.

4. 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \, d\theta$ (B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \, d\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta} \, d\theta$ (D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

5.在第一象限内，求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点，使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴围成的图形面积最小，并求此最小面积

6.设函数 $f(x)$、$g(x)$满足条件：$f'(x)=g(x), g'(x)=f(x)$.又 $f(0)=0$, $g(x)\neq 0$. 试求由曲线 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 与 $x=0, x=t\ (t>0), y=1$ 所围成平面图形的面积.

7.求柱面$x^2+y^2=a^2$和$x^2+z^2=a^2$所围立体的体积.

8.求曲线$y=e^x$，$y=\sin x$，$x=0$和$x=1$所围成的图形绕x轴旋转所围成立体的体积.

9.圆盘 $(x-2)^2+y^2\le 1$ 绕y轴旋转而成的旋转体的体积。

10.过点$P(1,0)$作抛物线$y=\sqrt{x-2}$的切线，该切线与上述抛物线及x轴围成一平面图形，求此平面图形绕x轴旋转一周所围成旋转体的体积.

11.由摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线$y=2a$ 旋转所得旋转体的体积。

12.证明：由平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$\boxed{V=2\pi\int_a^b xf(x)dx}$$

13.求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长。

14.求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长,其中 $a>0$ 是常数.

答案

1.B

2.C

解　曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴交点为 $x=0,x=1,x=2$；

当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $1<x<2$ 时，$y>0$.

$$A=\int_0^2 |y|\mathrm{d}x=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x.$$

3.

解　$A=\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1.$

4. 解　双纽线的极坐标方程为 $r^2=\cos 2\theta$. 根据对称性，

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta.$$

故应选(A).

5. 解 设所求点为 $P(x,y)$,

因为 $y'=-2x\ (x>0)$，故过点 $P(x,y)$ 的切线方程为：$Y-y=-2x(X-x)$.

当 $X=0$ 时，得切线在 y 轴上的截距：$b=x^2+1$,

当 $Y=0$ 时，得切线在 x 轴上的截距：$a=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

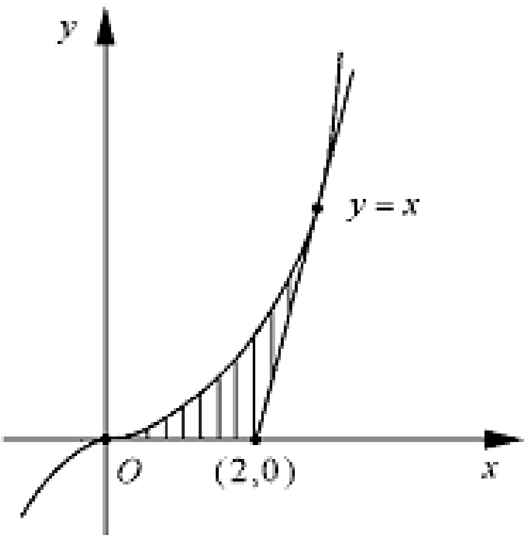
故所求面积为：$S(x)=\dfrac{1}{2}ab-\int_0^1\left(-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\left(x^3+2x+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2}{3}$,

$S'(x)=\dfrac{1}{4}\left(3x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\overset{令}{=}0$，得驻点：$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

再由 $S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$ 知 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$S(x_0)$ 取得极小值，且当 $0<x<1$ 时，仅有此一个极小值点，故此极小值点即为 $S(x)$ 在 $0<x<1$ 上的最小值.

又 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$y_0=\dfrac{2}{3}, S(\dfrac{1}{\sqrt{3}})=\dfrac{2}{9}\left(2\sqrt{3}-3\right)$.

所以，所求点为：$(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{3})$，所求最小面积为：$\dfrac{2}{9}\left(2\sqrt{3}-3\right)$.



6. 解　由 $f'(x)=g(x), g'(x)=f(x)$.可得 $g''(x)=g(x)$，因此

$$g(x)=C_1 e^{x}+C_2 e^{-x},\quad f(x)=C_1 e^{x}-C_2 e^{-x}$$

又由 $f(0)=0$ 知 $C_1=C_2$，由 $g(x)\neq 0$ 知 $C_1=C_2\neq 0$，则

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{C_1(e^{x}-e^{-x})}{C_1(e^{x}+e^{-x})}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}<1\quad(\text{当 } x>0 \text{ 时})$$

由此可得所求面积为

$$A(t)=\int_0^t\left(1-\frac{f(x)}{g(x)}\right)dx=\int_0^t\left(1-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)dx$$

$$=t-\ln(e^{x}+e^{-x})\Big|_0^t=t-\ln(e^{t}+e^{-t})+\ln 2=\ln 2-\ln(1+e^{-2t}).$$

7. 解　选取 y 为积分变量，由对称性识，只要求出其体积的 $\frac{1}{8}$ 即可

$y\in[0,a]$，在 $[0,y]$ 上坐标 y 处作垂直于 y 轴的平面，得所求柱体截面为正方形，边长为 $\sqrt{a^2-y^2}$，且 $A(y)=a^2-y^2$，于是

$$V=8\int_0^a A(y)dy=8\int_0^a (a^2-y^2)dy=\frac{16}{3}a^3$$

8.

解 如图 615 所示，因为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

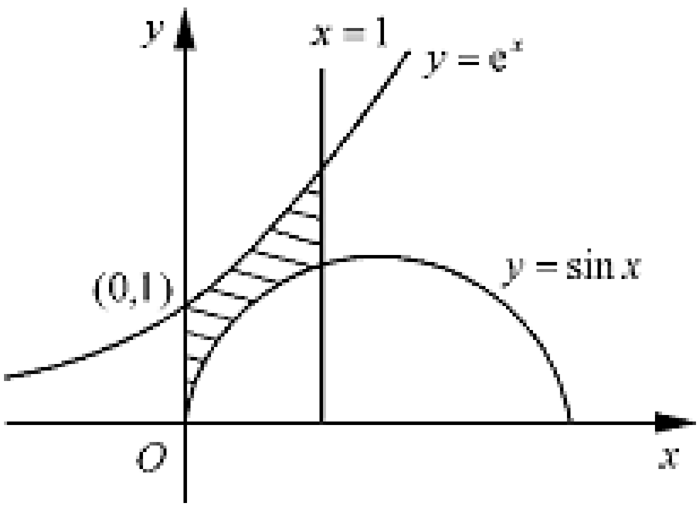
所以

$$V_x=\pi\int_0^1(\mathrm{e}^{2x}-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Bigg|_0^1$$

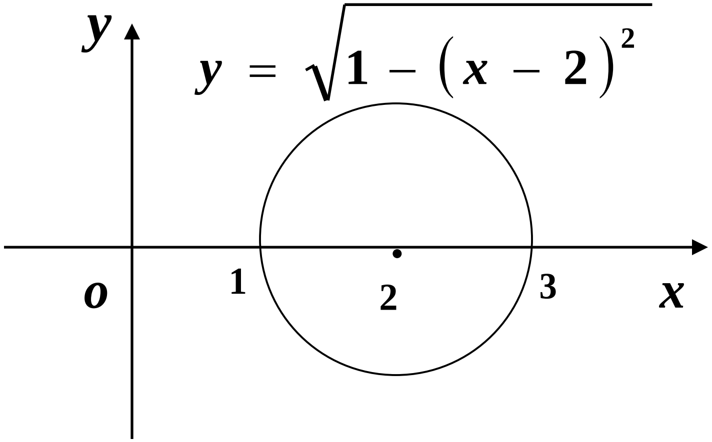
$$=\pi\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\right]$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2+\frac{1}{2}\sin 2\right)-1\right].$$



9.圆盘 $(x-2)^2+y^2 \le 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

解 所求体积为



$$V = 2\cdot 2\pi\int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx$$

令 $x-2=\sin t$,

则 $x=2+\sin t, dx=\cos t dt$.

$$x:1\to 3; t: -\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore V = 4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin t)\cos^2 t\,dt$$

奇函数

$$=4\pi\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,dt-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,dt\right)=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$$

$$=8\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi^2$$

10. 解 设所作切线与抛物线相切于点$\left(x_0, \sqrt{x_0 - 2}\right)$,因为

$$y'\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$$

故切线方程为 $y - \sqrt{x_0 - 2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x - x_0)$

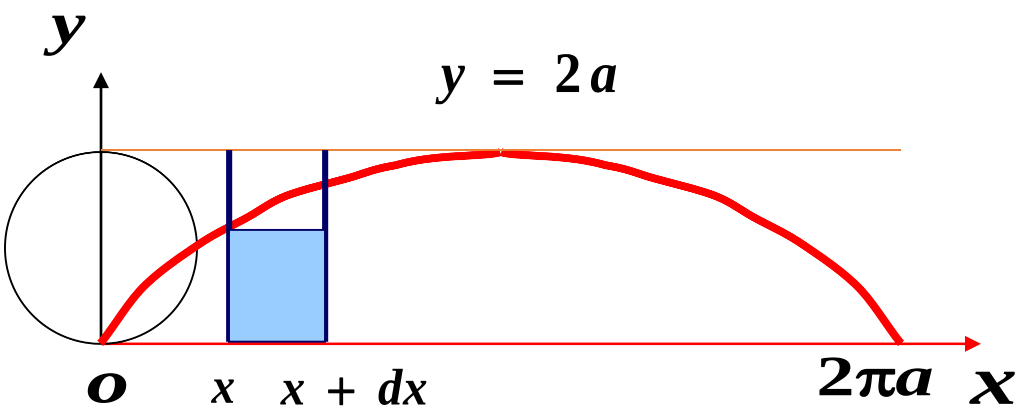
又因该切线过点$P(1,0)$,所以 $-\sqrt{x_0 - 2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1 - x_0)$

即 $x_0 = 3$,从而,切线的方程是 $y = \dfrac{1}{2}(x-1)$

因此,所求旋转体的体积 $V = \pi\int_1^3 \dfrac{1}{4}(x-1)^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_2^3 (x-2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{6}$

11.由摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 及 $y = 0$ 所围成的图形绕直线 $y = 2a$ 旋转所得旋转体的体积。

解 设 x为积分变量，积分区间为$[0,2\pi a]$，在$[0,2\pi a]$上任取小区间$[x, x+dx]$，则体积元素为



$$dV = \pi(2a)^2 dx - \pi(2a - y)^2 dx = \pi(4ay - y^2)dx$$

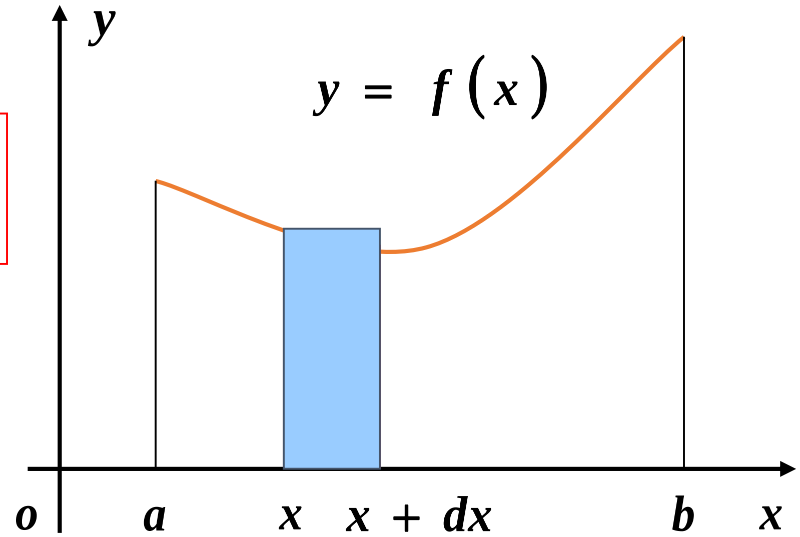
$$= \pi\left[4a^2(1 - \cos t) - a^2(1 - \cos t)^2\right] \cdot a(1 - \cos t)dt$$

$$= \pi a^3 (3 - 5\cos t + \cos^3 t + \cos^2 t)dt$$

$$\therefore V = \int_0^{2\pi} \pi a^3 (3 - 5\cos t + \cos^3 t + \cos^2 t)dt = 7\pi^2 a^3$$

12.证明：由平面图形 $0 \le a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$\boxed{V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx}$$



解　设 x 为积分变量，积分区间为 $[a,b]$，在 $[a,b]$ 上任取小区间 $[x, x+dx]$，则体积元素为

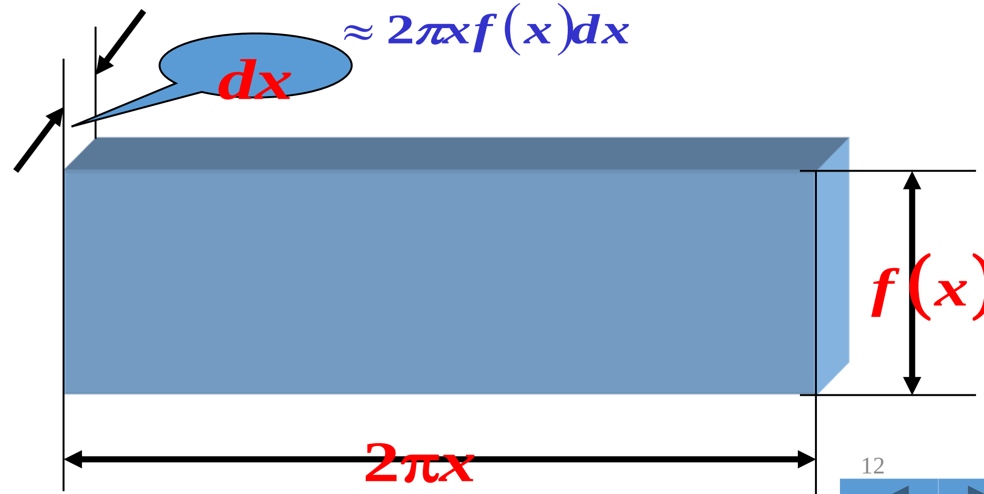
$$\Delta V = \pi(x+dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x)$$

$$= 2\pi x f(x)dx + \pi f(x)(dx)^2$$

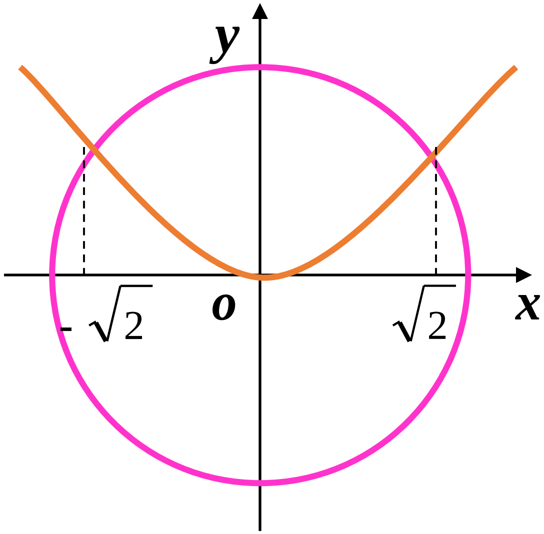
$$\approx 2\pi x f(x)dx$$

$$dV = 2\pi xf(x)dx$$

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$



13.求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长。



解　由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$

解得抛物线与圆的两个交点

$\left(-\sqrt{2},1\right)$、$\left(\sqrt{2},1\right)$。

$\because\ y'=x$

所以所求弧长为

$$L=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx=2\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

14.求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

解 $r'(\theta) = -a\sin\theta$，

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta = a\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\,d\theta = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

利用对称性知，所求心形线的全长

$$s = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\theta\,d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\ .$$