第二节 定积分

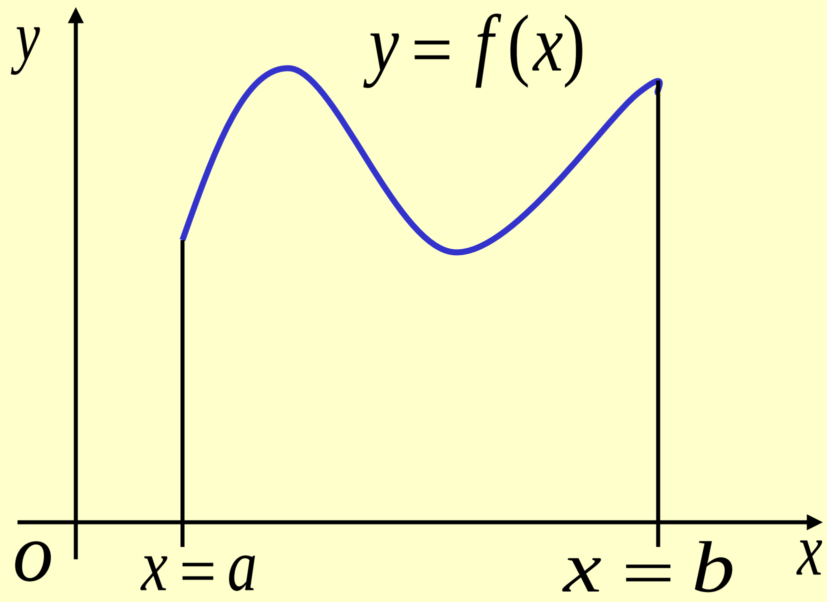
一、定积分及其基本性质

(一)定积分问题举例

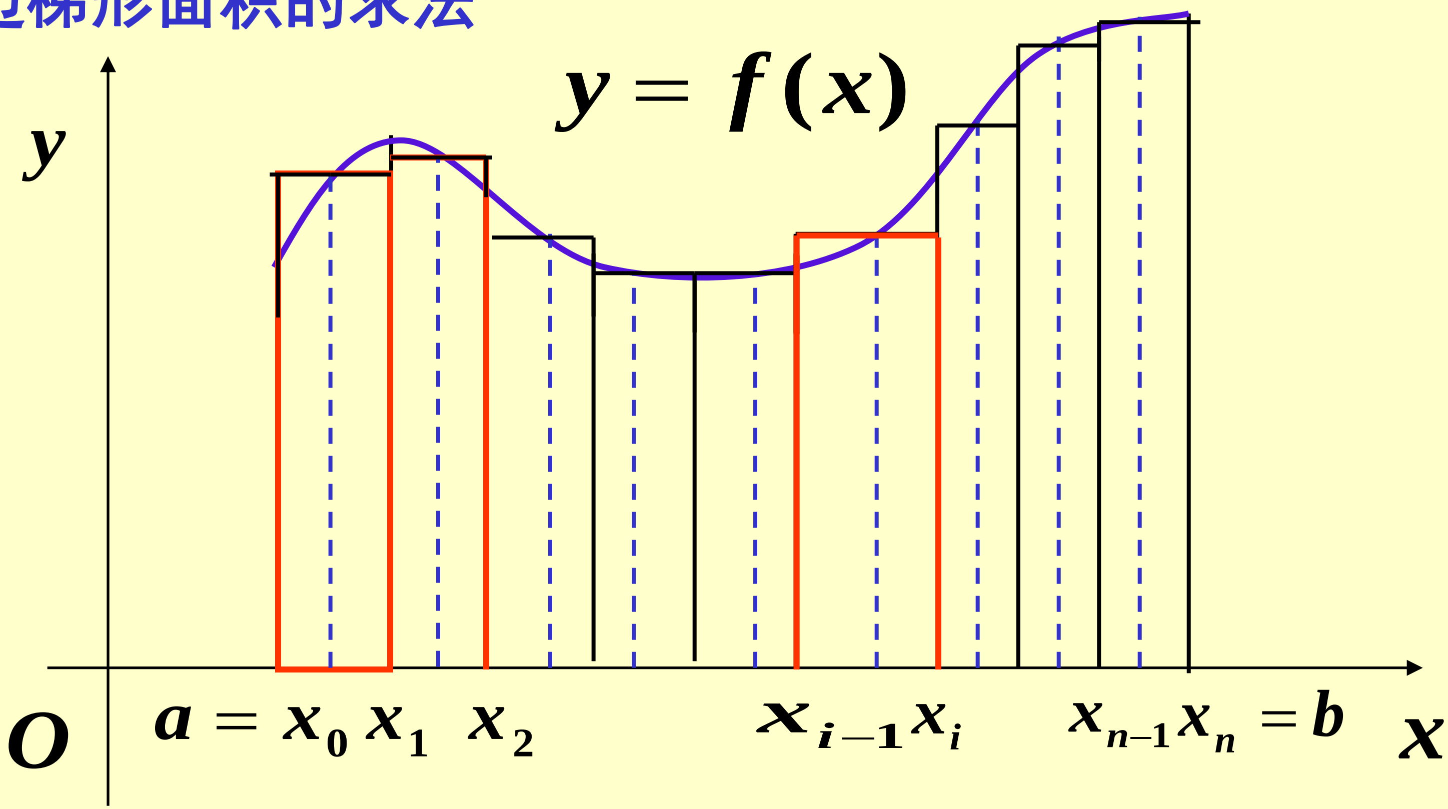
1. 曲边梯形的面积

曲边梯形的定义:

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负，连续。由直线 $x=a,\ x=b,\ y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为**曲边梯形**，其中曲线弧称为**曲边**。



曲边梯形面积的求法



(1) 分割 在区间$[a,b]$上任意插$n+1$个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots x_n = b,$$

把 $[a,b]$分成 n 个小区间：$[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\cdots n)$.

每 个小区间的长度 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\cdots n)$.

（2）近似代替

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

（3）求和

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

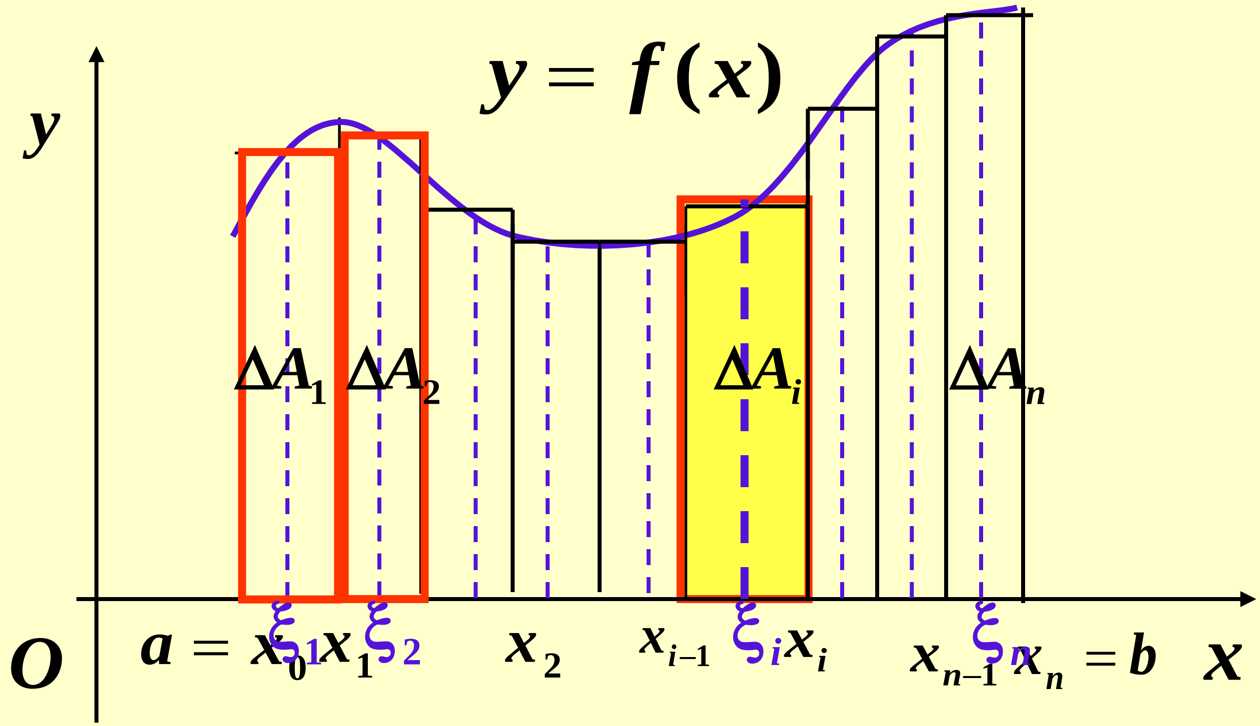


图5-2

(4) 取极限 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, $\lambda \to 0$,

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 变速直线运动的路程

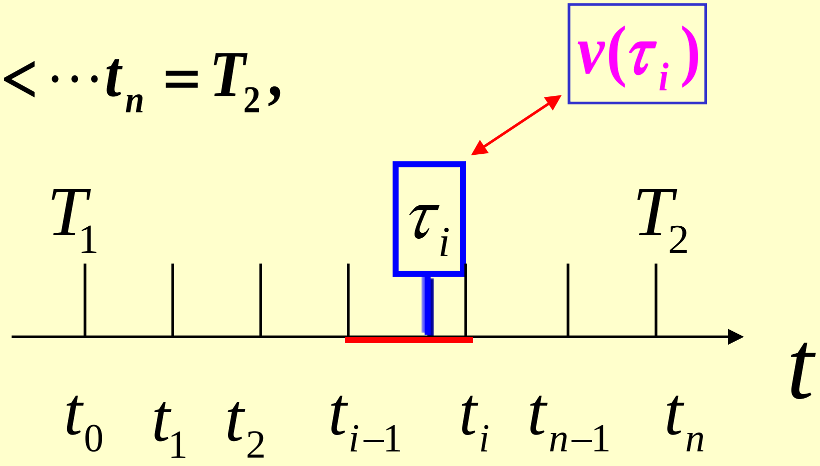
设物体作直线运动，已知速度$v = v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上的连续函数，且$v(t) \ge 0$，计算在这段时间内物体所经过的路程。

匀速直线运动：　路程=速度×时间.

（1）分割　$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots t_n = T_2$,

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$



（2）近似代替　$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）求和　$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）取极限　$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta t_i\}$,　$s = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

面积 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$ 路程 $s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt.$

(二)定积分的定义(和式的极限)

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots x_n=b,$$

把区间$[a,b]$分成 n个小区间：$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$

各小区间的长度依次为：$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1},$

任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$, 当 $\lambda\to 0$, 和 S总趋于确定的极限 I,

称这个极限为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$,

即

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i} \qquad (2)$$

a----积分下限, b----积分上限, $[a,b]$----积分区间.

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ —— $f(x)$的积分和。

注意:1、$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$ $\int_a^b x^2dx = \int_a^b u^2du$

2、如果 $f(x)$在 $[a,b]$上的定积分存在, 称 $f(x)$在$[a,b]$上可积.
且定积分与区间[a,b]的分法和ξ_i 的取法无关。

问题: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足什么条件, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定可积?

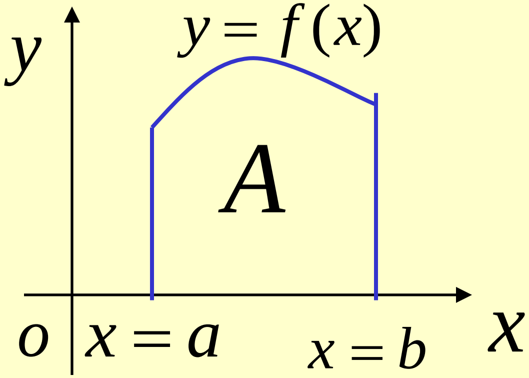
定积分存在的两个充分条件:

定理1 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

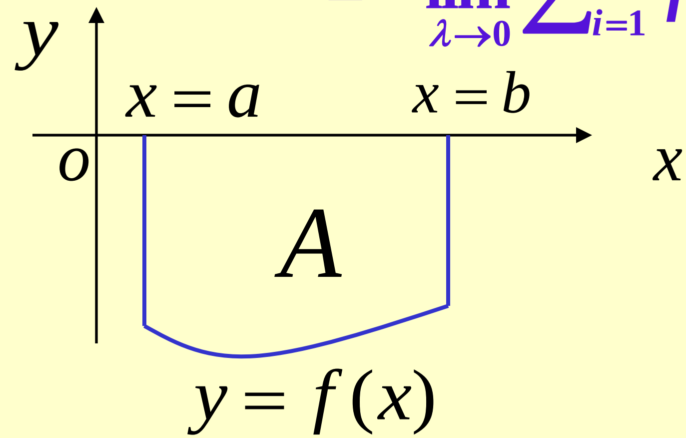
定理2 设 $f(x)$在区间 $[a,b]$上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

定积分的几何意义

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i$$
$$= -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



$$f(x)\ge 0, \int_a^b f(x)dx = A$$



$$f(x) < 0, \int_a^b f(x)dx = -A$$

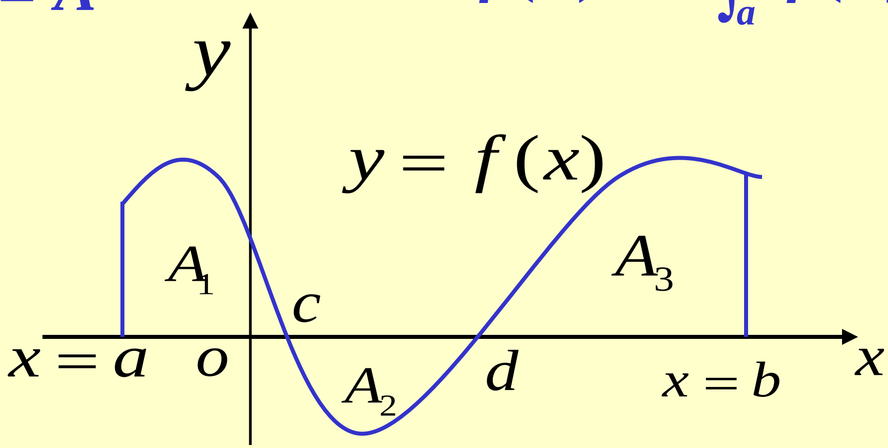


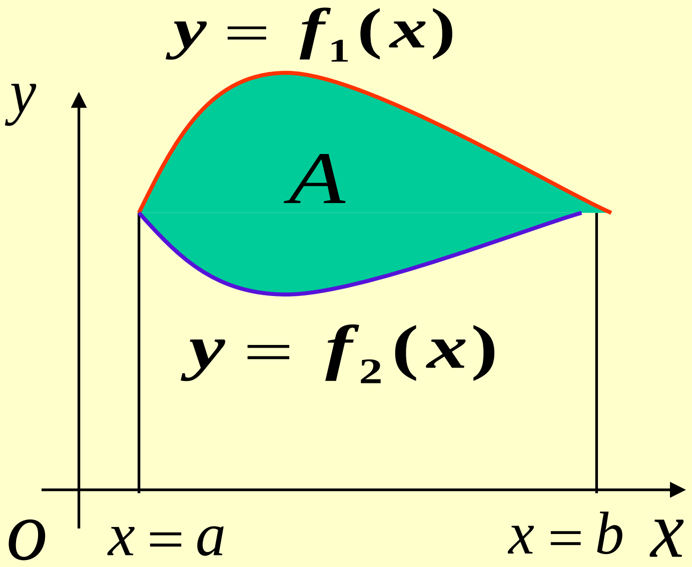
图5-6

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$$

两曲线围成的图形的面积：

$$A = A_1 - A_2$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$$



(三)定积分的基本性质

规定 (1) $a=b,\quad \int_a^b f(x)dx=0;$

(2) $a>b,\quad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

性质1 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

性质2 $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

性质3 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\quad (a<c<b)$

定积分对积分区间具有可加性

注：上式对 $a<b<c$ 也成立

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

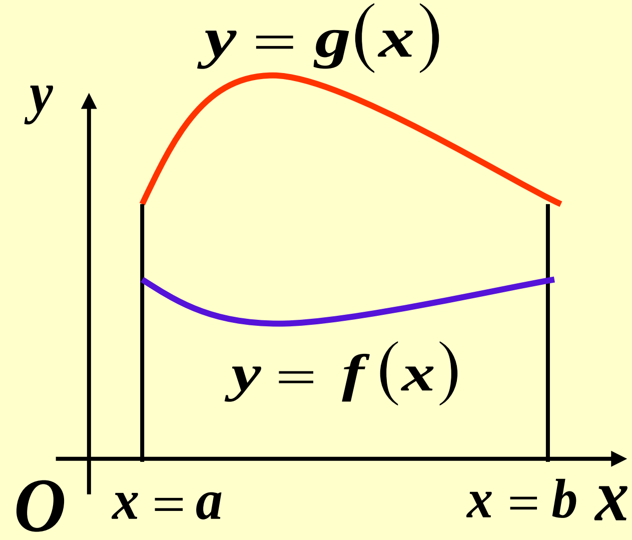
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

性质4 $\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a$

性质5 若$f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a < b)$.

推论1 若 $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a,b]$,

则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a < b)$.



推论 2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$.

性质6 **(估值不等式)**

设 $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x),\ m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

如 $6 = 2(4-1) \leq \int_1^4 (x^2+1)dx \leq 17(4-1) = 51$

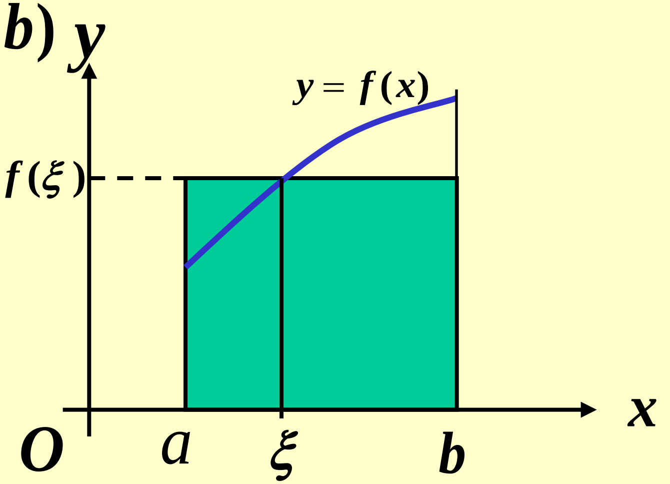
性质7 (定积分的中值定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$, $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a\le \xi \le b)$$

证　由性质6知 $m \le \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

由连续函数介值定理知: $\exists \xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ (a\le \xi \le b)$$



定积分中值定理的几何解释

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

(ξ在a与b之间) $a>b$或$a<b$都成立.

性质8 (定积分结果与积分变量无关)

即$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

例1 估计下列各积分的值

（1）$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$;　（2）$\int_0^2 e^{x^2-x}dx$

$\boxed{\text{解}}$（1）设 $y = x\arctan x$,

$$y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} > 0, x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right].$$

$x\arctan x$ 在 $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ 上单调递增，故

$$m = (x \cdot \arctan x)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},\quad M = (x \cdot \arctan x)\Big|_{x=\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \le \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx \le \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

即 $$\frac{\pi}{9} \le \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx \le \frac{2\pi}{3}$$

（2）记 $f(x)=e^{x^2-x},\ x\in[0,2]$，则 $f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$，

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=\dfrac{1}{2}$，

又 $f(\dfrac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$，$f(0)=1$，$f(2)=e^2$，

所以 $m=e^{-\frac{1}{4}}$，$M=e^2$

$$e^{-\frac{1}{4}}(2-0)\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le e^2(2-0)$$

即 $$2e^{-\frac{1}{4}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$$

例2 利用定义计算 $\int_0^1 x^2dx$

解 $\because f(x)=x^2\in C[0,1]\Rightarrow\int_0^1 x^2dx\exists$

$\int_0^1 x^2dx$与$[0,1]$的分法与点ξ_i取法无关.

把 $[0,1]$ n等份,分点为 $x_i=\frac{i}{n},\ i=0,1,2,\cdots,n,$

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n;$$

取区间的右端点：$\xi_i=x_i=\frac{i}{n},i=1,2,\cdots,n;$

并做乘积：$f(\xi_i)\Delta x_i=\xi_i^2\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{i^2}{n^3}$

求和：$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$\because\lambda=\frac{1}{n}$, 当$n\to\infty$ 时，$\lambda\to 0.$

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$$