第四章　一元函数积分学及其应用

第一节　不定积分的概念与性质

一、不定积分的概念与性质

(一) 原函数与不定积分的概念

1. 原函数的定义

$\forall x \in$ 区间 I，$F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$，则 $F(x)$

就称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在 I 上的原函数.

例 $(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\sin x + 1)' = \cos x$, $\quad (\sin x + C)' = \cos x$

$\therefore \sin x$, $\sin x + 1$, $\sin x + C$ 为 $\cos x$ 的原函数

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x) + C$ 为 $f(x)$ 的所有原函数

证 (i) $[F(x) + C]' = f(x)$

(ii) 设 $\Phi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,

则 $[\Phi(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0$ $\therefore \Phi(x) - F(x) = C$

2. 不定积分的定义

在区间I上，$f(x)$的所有原函数称为$f(x)$在区间I上的不定积分，记为$\int f(x)dx$

注： 不定积分是原函数集，不是一个函数。

所以 $$\int f(x)dx = F(x)+C$$

$\int$—积分号， $f(x)$ —被积函数， $f(x)dx$ — 被积表达式，

x— 积分变量。

例1 求$\int x^2 dx$.

解 $\because \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$， $\therefore \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$.

例2 求$\int \dfrac{1}{x} dx$.

解 $\because (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\therefore \int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + C$

例3 设曲线通过点（1，2），且其上任意点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍求此曲线的方程。

解 设所求曲线为 $y = f(x)$

由题意知 $\dfrac{dy}{dx} = 2x$， 即 $f'(x) = 2x$

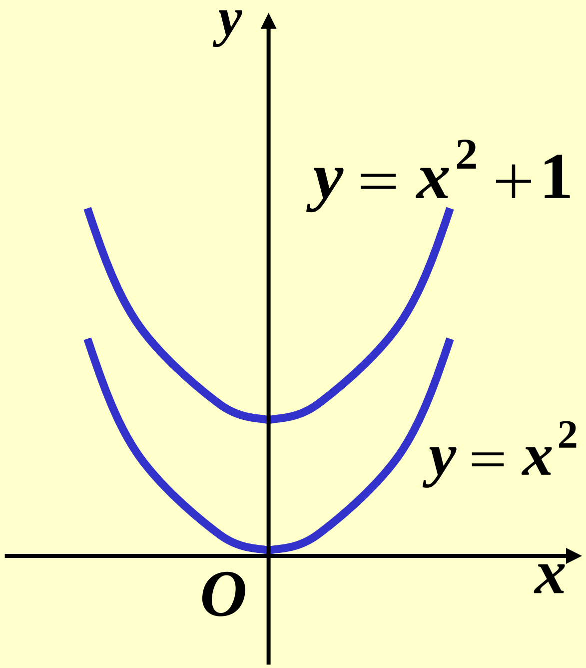
$$\therefore f(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

又曲线通过点（1，2），

$$\therefore 2 = 1 + C \qquad \therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 1$$

此曲线的方程为 $y = x^2 + 1$



函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线。**

不定积分与导数或微分的关系：

由于 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$的原函数，则

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x),$$

$$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx;$$

由于$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以

$$\int F'(x)dx=F(x)+C$$

$$\int dF(x)=F(x)+C$$

(二) 基本积分表

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

(三)不定积分的性质

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

例4 求$\int \sqrt{x}(x^2-5)dx.$

解 $\int \sqrt{x}(x^2-5)dx$

$$=\int (x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$=\int x^{\frac{5}{2}}dx-\int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

例5 求$\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx.$

解 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$

$$=\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx$$

$$=\int (x-3+3x^{-1}-x^{-2})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C$$

例6 求$\int (e^x - 3\cos x)dx$

解 $\int (e^x - 3\cos x)dx = e^x - 3\sin x + C$

例7 求$\int 2^x e^x dx$

解 $\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \dfrac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \dfrac{(2e)^x}{\ln 2 + 1} + C$

例8 求$\int \dfrac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$

解 $\int \dfrac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \dfrac{(1+x^2)+x}{x(1+x^2)}dx = \int \dfrac{1}{x}dx + \int \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$= \ln|x| + \arctan x + C$

例9 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

解 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx = \int (x^2-1)dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

例10 求 $\int \tan^2 x dx$

解 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C$

例11 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$

例12 求$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx$

解 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2}dx$

$\displaystyle= \int 4\csc^2 x dx = -4\cot x + C$

例13. 求$\int |x|\,\mathrm{d}x$

解

$$|x| = \begin{cases} -x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x, & x>0 \end{cases}$$

$$x<0\text{时}, \int |x|\,\mathrm{d}x = \int (-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$x>0\text{时}, \int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_2$$

由连续性知：$\lim\limits_{x\to 0^-}(-\frac{x^2}{2}+C_1) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{x^2}{2}+C_2)$得$C_1 = C_2$，记为$C$

$$\therefore \int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} + C, & x>0 \end{cases}$$