答案：高数(一)A 卷

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

1. 1　　**2.** 2　　**3.** $\begin{cases} 0, & 若 f(x_0)=0 \\ \infty, & 若 f(x_0)\neq 0 \end{cases}$

4. $\sin x^2$　　**5.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

6. D　**7.** A　**8.** D　**9.** B　**10.** C

三、计算题（共 7 小题，共 60 分)

11. (8 分)

解　当 $|x|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$; 当 $|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0.$

故　$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ 1+x, & -1<x<1 \\ 1, & x=1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)=0$, 所以 $x=-1$ 为连续点. 而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ $=0$，所以 $x=1$ 为间断点.

$x=1$ 为第一类间断点

12.(8 分)

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2\mathrm{e}t}{1+2\ln t}$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{2\mathrm{e}t}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{\mathrm{e}}{2(1+2\ln t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}}{2}\cdot\frac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{4t}=-\frac{\mathrm{e}}{4t^2(1+2\ln t)^2}$$

当 $x=9$ 时，由 $x=1+2t^2$，则 $9=1+2t^2$，由因为 $t>1$，故 $t=2$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=9}=-\frac{\mathrm{e}}{16(1+2\ln 2)^2}$

13. (8 分)

解：对原方程两边关于x求导可得　$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0$ (*)

令$y'=0$,得$y=x$,将此代入原方程，有$2x^3-x^2-1=0$,从而得驻点$x=1$

(*) 式两边求导得

$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0$

因此，$y''|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$.故驻点（1 ，1）是$y=y(x)$的极小值点

14. (8 分)

解　令 $x-t=u$，则

$$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u,$$

故原方程化为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{2}+x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$

两端对 x 求导　$f(x)=x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，再次求导　$f'(x)=1+f(x)$.

解此方程得　$f(x)=C\mathrm{e}^x-1$. 因为 $f(0)=0$，所以 $C=1$，故 $f(x)=\mathrm{e}^x-1$.

15.(8 分)

解：当$x\to 0$时,应用麦克劳林公式有

$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x),\sin x=x+o(x^2)$

代入得　$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+o(x^2)+f(0)x+f'(0)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$

所以$f(0)=-1,\ f'(0)=2$

16. (10 分)

(1) $A=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\mathrm{d}t$

$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\dfrac{3}{8}\pi a^2$

$(2)\mathrm{V}_x=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(a\sin^3 t\right)^2\mathrm{d}a\cos^3 t=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$

$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^7 t-\sin^9 t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{32}{105}\pi a^3$

$(3)L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\mathrm{x}'\right)^2+\left(\mathrm{y}'\right)^2}\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin t\mathrm{d}t$

$=6a\left(\sin t\right)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$

17. (10 分)

证　（I）令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0$$

所以，存在一个$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi.$

（II）令$G(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[f(x)-x\right]$，那么$G(0)=G(\xi)=0.$

这样，存在一个$\eta\in(0，\xi)$，使得$G'(\eta)=0$，即

$$G'(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}\left[f'(\eta)-1\right]-\mathrm{e}^{-\eta}\left[f(\eta)-\eta\right]=0,$$

也即$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1.$