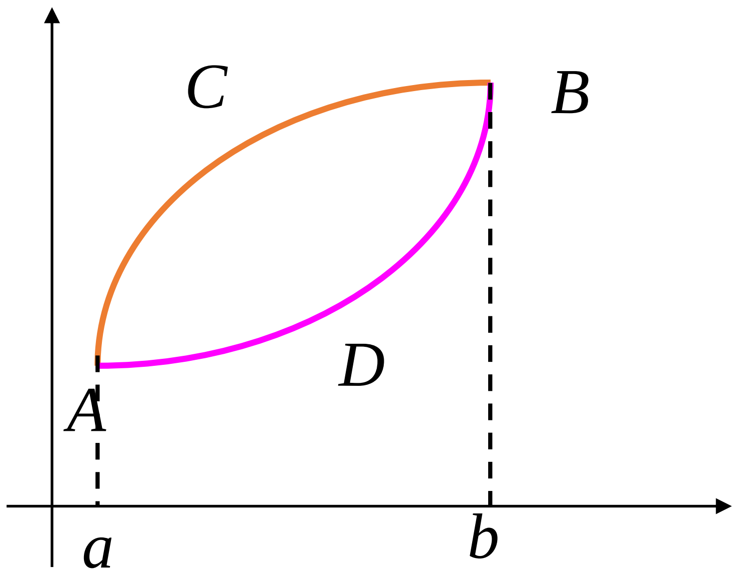
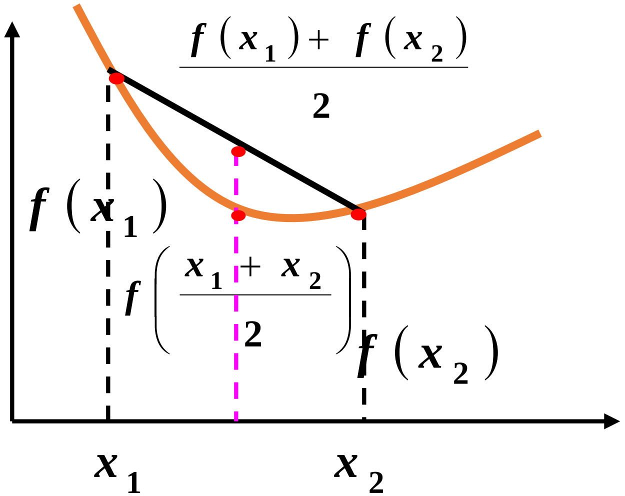
第五节 曲线的凹凸和函数作图



弧$\overset{\frown}{ACB}$与弧$\overset{\frown}{ADB}$的凹向不同。

1. 凹凸性的定义

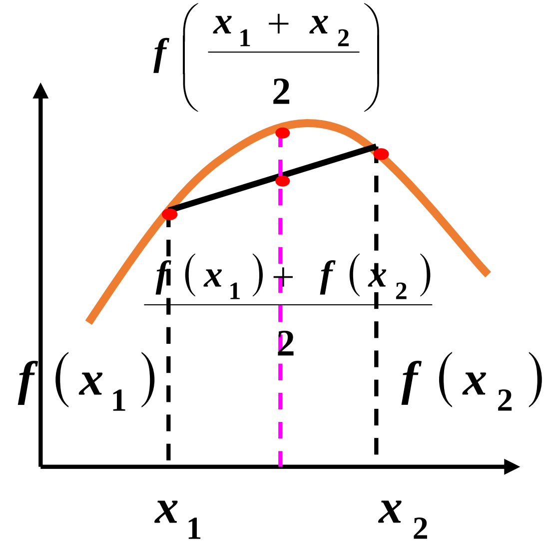


设 $f(x)$在区间 I上连续，

若 $\forall x_1, x_2 \in I$,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在I上的图形是凹的



设 $f(x)$在区间 I上连续，

若 $\forall x_1, x_2 \in I$,恒有

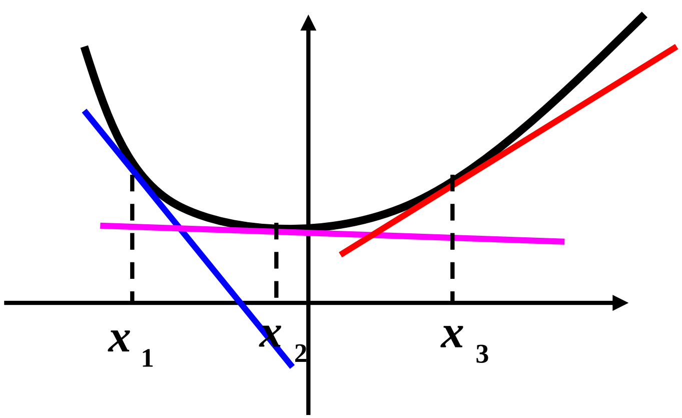
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在I上的图形是凸的;

若在某一区间内，函数图像总在曲线上任一点切线的上方，则称曲线在这区间内是**凹的**；

若在某一区间内，函数图像总在曲线上任一点切线的下方，则称曲线在这区间内是**凸的**；

在有些教材中，凹的（曲线）又叫“上凹”，凸的又叫“下凹”。

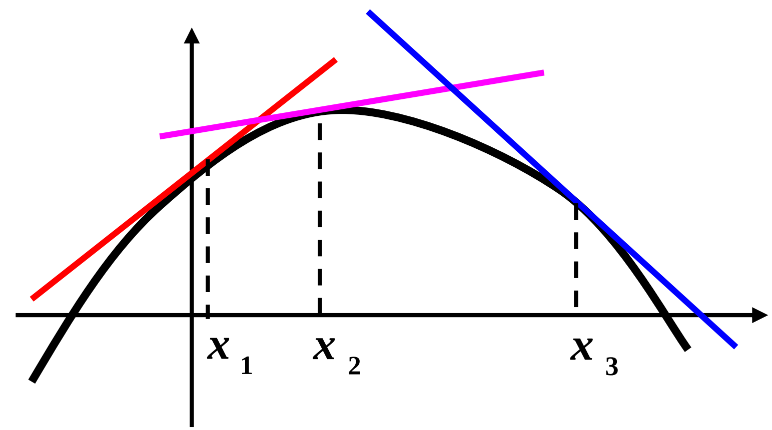


$\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2 < \tan\alpha_3$

$f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3)$,

$f'(x)$单调增加

$f''(x) > 0$



$\tan\alpha_1 > \tan\alpha_2 > \tan\alpha_3$

$f'(x_1) > f'(x_2) > f'(x_3)$,

$f'(x)$单调减少

$f''(x) < 0$

2. 判定定理:

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b)内具有一阶和二阶导数 ，

(1)若在 (a,b)内， $f''(x)>0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的；

(2)若在 (a,b)内， $f''(x)<0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的。

3、判定函数曲线凹凸的步骤:

（1）确定函数 $y=f(x)$的定义域；

（2）求 $f''(x)$,找出使 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点x_i ；

（3）用x_i把定义域划分成为小区间，在每个小区间上判定曲线的凹凸。

例1. 判断 $y=\ln x$的凹凸性 .

解 定义域 $(0,+\infty)$, $\because y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}<0$.

$\therefore$ 曲线是凸的 .

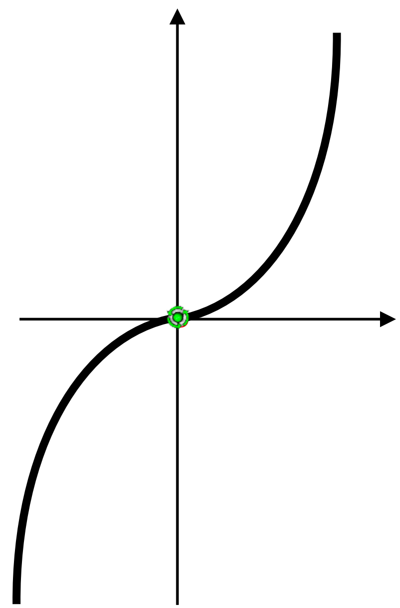
例2. 判断 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 定义域：$(-\infty, +\infty)$，且 $y' = 3x^2$，$y'' = 6x$，

当 $x = 0$ 时，$y'' = 0$.

$x < 0$ 时，$y'' < 0$，曲线在 $(-\infty, 0]$ 上是凸的；

$x > 0$ 时，$y'' > 0$，曲线在 $[0, +\infty)$ 上是凹的.



拐点：曲线由凸变凹（或由凹变凸）的分界点。

点 $(0,0)$ 是 $y = x^3$ 的拐点.

注意：

（1）拐点是曲线上的点，应由两个坐标表示（$x_0, f(x_0)$）.

（2）前面讲过的极值点，是取得极值时自变量的值，记为 $x = x_i$ 两者不同。

（3）作业中常见记法的错误：$x = 0$ 是 $y = x^3$ 的拐点；

或 $(0,0)$ 是 $y = x^4$ 的极值点.

例3. 求 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹凸的区间.

解 定义域：$(-\infty,+\infty)$,

$$y'=12x^3-12x^2,\qquad y''=36x^2-24x=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

令 $y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2}{3}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
曲线 y	$\cup$	$(0,1)$	$\cap$	$\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$	$\cup$

函数在 $(-\infty,0)$, $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 内是凹的；在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 内是凸的。

$\therefore\ (0,1)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$ 是拐点.

例4. 问曲线 $y = x^4$ 是否有拐点？

解 定义域：$(-\infty, +\infty)$，

$$y' = 4x^3, \qquad y'' = 12x^2.$$

显然当 $x = 0$ 时，$y'' = 0$，

但当 $x \neq 0$ 时，总有 $y'' > 0$.

因此，（0，0）不是这曲线的拐点。

即 曲线 $y = x^4$ 没有拐点，且它在（$-\infty, +\infty$）内是凹的。

例5 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点。

解 定义域：$(-\infty,+\infty)$，

当 $x\neq 0$ 时， $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，$y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$，

当 $x=0$ 时，y'，y'' 都不存在。

所以，y'' 在 $(-\infty,+\infty)$ 不连续且不具有零点。

但 $x=0$ 把 $(-\infty,+\infty)$ 分成两个部分区间：$(-\infty,0]$、$[0,+\infty)$.

$x\in(-\infty,0)$，$y''>0$， 曲线在 $(-\infty,0]$ 上是凹的。

$x\in(0,+\infty)$，$y''<0$， 曲线在 $[0,+\infty)$ 上是凸的。

则 $(0,0)$ 点是曲线的拐点。

下面的点可能对应着曲线的拐点：

（1）使 $y''=0$ 的点；

（2）使 y'' 不存在的点。

例6 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连续的导数，如果$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$,而$f'''(x_0)\neq 0$，试问$x=x_0$是否为极值点？为什么？又$(x_0, f(x_0))$是否为拐点？为什么？

解 由于$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连续的导数，

则$\lim\limits_{x\to x_0} f'''(x)=f'''(x_0)\neq 0$，不妨设$f'''(x_0)>0$，

由保号性定理,$\exists\delta>0$,使得当 $x\in U(x_0,\delta)$时， $f'''(x)>0$.

即在此区域内，$f''(x)$单调增加。而$f''(x_0)=0$，因此

当$x\in(x_0-\delta, x_0)$时， $f''(x)<0$；当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$时， $f''(x)>0$.

因此,$(x_0, f(x_0))$ 是拐点。

又当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$时， $f''(x)<0$， $f'(x)$单调减少 ，

且$f'(x_0)=0$,必有 $f'(x)>0$。

当$x\in(x_0, x_0+\delta)$时， $f''(x)>0$， $f'(x)$单调增加 ，

且$f'(x_0)=0$,必有 $f'(x)>0$。

因此$x=x_0$不是极值点。

二、曲线的渐近线

(1)、水平渐近线

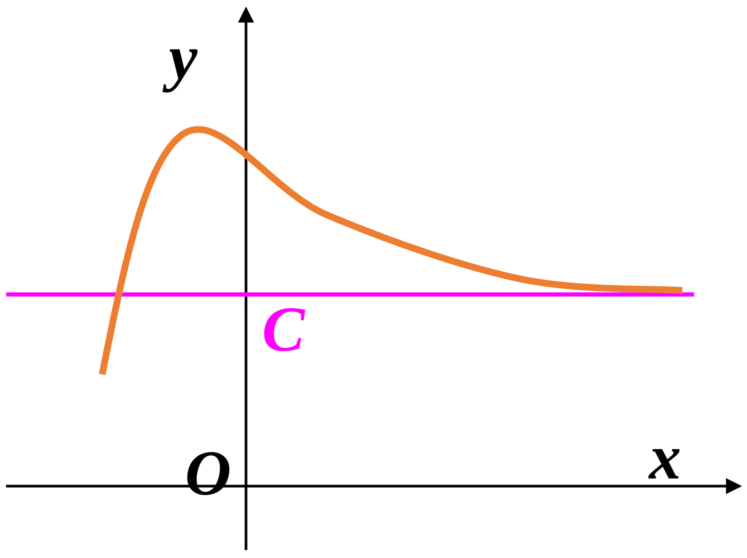
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=C$,（或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=C$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C$ ）

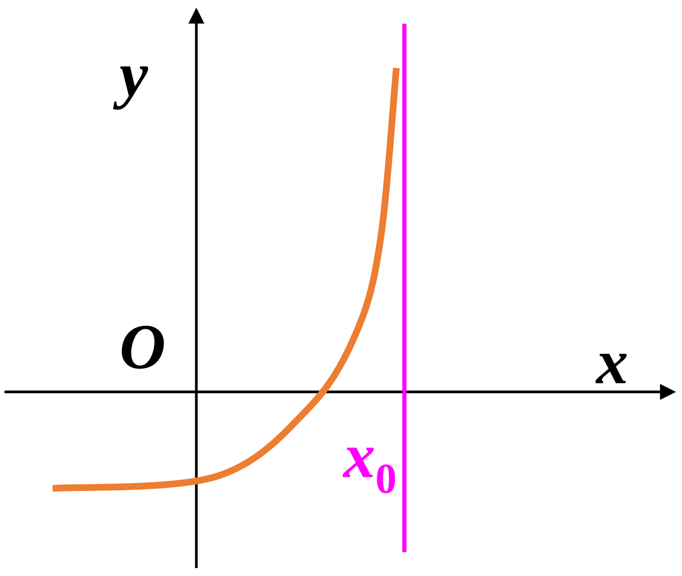
则 $y=C$ 是函数 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线

(2)、垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ （或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ ）

则 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线。





(3)、斜渐近线

若 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ （或 $\lim\limits_{x \to -\infty}$ ， $\lim\limits_{x \to \infty}$ ）

则 $y=ax+b$ 是函数 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线。

其中， $a=\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$； $b=\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x)-ax\right]$

1. 求 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的 渐 近 线 .

解 $\lim\limits_{x \to \infty}\left[1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}\right]=1$ $\therefore$ 曲线有水平渐近线： $y=1$

$\lim\limits_{x \to -3}\left[1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}\right]=\infty$ $\therefore$ 曲线有铅直渐近线： $x=-3$

2.求曲线 $y = x\ln(e+\frac{1}{x})$ $(x>0)$ 的斜渐近线方程.

解　设 $y = ax + b$ 为曲线的渐近线

则 $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x}) = 1$,

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x}) - x]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(e+t)-1}{t} = \frac{1}{e}$$

故渐近线方程为 $y = x + \frac{1}{e}$

三、函数作图

1. 一般步骤:

(1) 确定 $y=f(x)$的定义域，考察函数的奇偶性；求出 $f'(x)$、$f''(x)$.

(2) 求出 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$的全部实根，及 $f'(x)$, $f''(x)$不存在的点．并用这些点把定义域划分为几个部分区间．

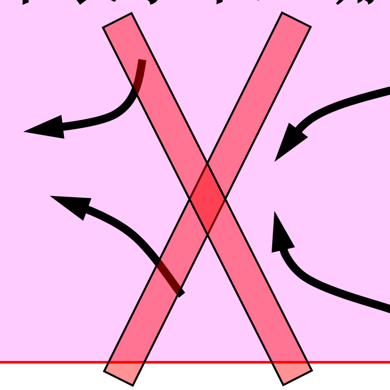
(3) 列表讨论 $f(x)$的性质．

(4) 确定水平、铅直渐近线以及其它变化趋势．

(5) 求出分界点(极值点、拐点)的坐标，为使图形准确些，还需补充一些点(与坐标轴的交点、较长区间加

(6) 描点作图．

以下表示不正确



注意，箭头方向是：箭尾在左，箭头在右；

4、应用举例：

例1. 画出 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 的图形 .

解 (1)定义域 $(-\infty, +\infty)$;

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$y'' = 6x - 2 = 2(3x-1)$$

(2)令 $y' = 0$, 得 $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 1$, 令 $y'' = 0$, 得 $x_3 = \frac{1}{3}$,

(3)列表讨论

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	—	—	0	+
$f''(x)$	—	—	—	0	+	+	+
$y = f(x)$ 的图形		极大值		拐点		极小值	

(4) $x \to +\infty$ 时，$y \to +\infty$； $x \to -\infty$ 时，$y \to -\infty$.

$$\lim_{x \to x_0}\left(x^3 - x^2 - x + 1\right) = x_0^3 - x_0^2 - x_0 + 1$$

所以该曲线既无水平渐近线，

也无铅直渐近线。

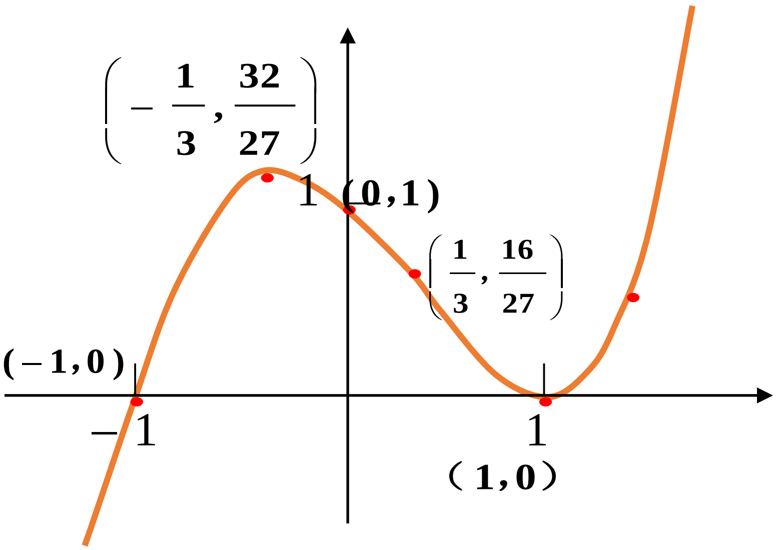
(5) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{32}{27}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{16}{27}$,

$f(1) = 0$

得到函数图形上三个点:

$\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{32}{27}\right)$、$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$、$(1, 0)$

另外 $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{8}$,



辅助点:

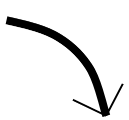
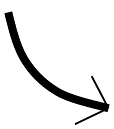
$(-1,0)$、$(0,1)$、$\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{8}\right)$

例2. 画出 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形 .

解 (1) 定义域 $(-\infty,+\infty)$, $\because\ f(x)$为偶函数, $\therefore$ 只需讨论 $[0,+\infty)$.

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}},\quad y''=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1),$$

(2)令 $y'=0$, 得 $x=0$, 令 $y''=0$, 得 $x=1$,

x	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	0	+
$y=f(x)$ 的图形	极大		拐点	

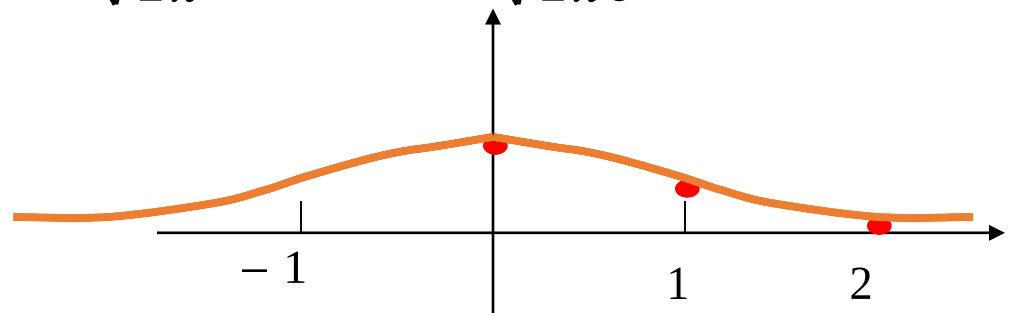
$$(4)\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0\quad \therefore\ y=0\text{为水平渐近线}.$$

$$(5)\because\ f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}},$$

得到曲线上的两个点: $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$、$\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$

另外 $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}$,

加辅助点 $\left(2,\frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}\right)$。



x	0	(0,1)	1	(1,+∞)
$f'(x)$	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	0	+
$f(x)$ 的图形	极大		拐点	

注:

（1）利用函数的奇偶性；

（2）补充点（0，$f(0)$），（2，$f(2)$）；

（3）有水平渐近线。

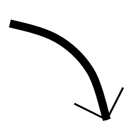
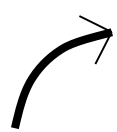
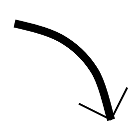
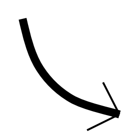
例3 画出 $y = 1 + \dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1) 定义域 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$. $y' = \dfrac{36(3-x)}{(x+3)^3}$. $y'' = \dfrac{72(x-6)}{(x+3)^4}$.

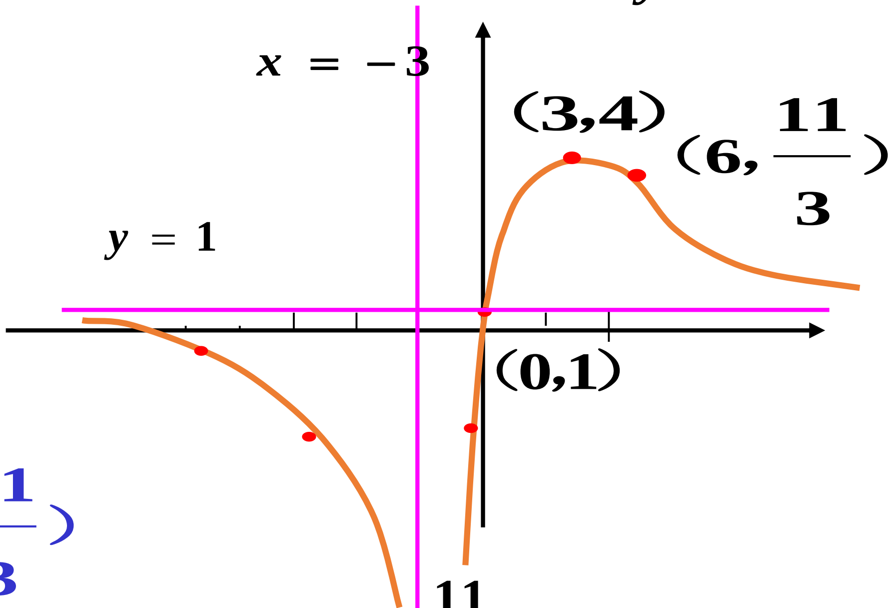
(2)令 $y' = 0$，得 $x = 3$； 令 $y'' = 0$，得 $x = 6$；

在 $x = -3$ 处，函数没有定义。

(3)列表讨论

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y = f(x)$ 的图形			极大值		拐点	

$$(4)\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{36x}{(x+3)^2}\right]=1$$ $\therefore$ 曲线有水平渐近线：$y=1$



又 $$\lim_{x\to-3}\left[1+\frac{36x}{(x+3)^2}\right]=\infty$$

$\therefore$ 曲线有铅直渐近线：$x=-3$

$(5)\ f(3)=4,\qquad f(6)=\dfrac{11}{3},$

得曲线上的点：$(3,4)$ 、 $\left(6,\dfrac{11}{3}\right)$

另外 $f(0)=1\ f(-1)=-8,\ f(-9)=-8,\ f(-15)=-\dfrac{11}{4}.$

辅助点：$(0,1)$ 、 $(-1,-8)$ 、 $(-9,-8)$ 、 $\left(-15,-\dfrac{11}{4}\right)$

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$			极大		拐点	