# 考研数学强化班
## ——高等数学

## 第三章 微分中值定理与导数应用

常考题型五　证明有两个中值 $\xi$，$\eta$ $(\xi \neq \eta)$ 满足的某种关系式的命题

## 常考题型五　证明有两个中值$\xi$，$\eta(\xi\neq\eta)$满足的某种关系式的命题

1.设 $0\le a<b$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，

证明：在$(a,b)$内必有$\xi$与$\eta$,使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证明：$\exists\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

要证$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$,只需证$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

即$\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

令$g(x)=x^2$,则由柯西中值定理得

$\exists \xi \in (a,b)$使得 $$\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$得证

从而原命题得证.

2.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$.

试证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

证：设 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，

由拉格朗日中值定理得

$\exists\,\eta\in(a,b)$ 使得 $\varphi'(\eta)=\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$

即 $e^{\eta}f(\eta)+e^{\eta}f'(\eta)=\dfrac{e^{b}f(b)-e^{a}f(a)}{b-a}$

又 $f(a)=f(b)=1$

故 $e^{\eta}f(\eta)+e^{\eta}f'(\eta)=\dfrac{e^{b}-e^{a}}{b-a}$

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x}$，则在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，

由拉格朗日中值定理得

$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}=\dfrac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}{b-a}$

故 $\mathrm{e}^{\eta}f(\eta)+\mathrm{e}^{\eta}f'(\eta)=\mathrm{e}^{\xi}$

所以存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

# 常考题型六 利用构造辅助函数证明等式

1.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，试证：

至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = -\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

证：设 $\varphi(x)=x^2 f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

又 $f(1)=0$ 得 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$

故由罗尔定理得

$\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $\varphi'(\xi)=0$

即 $2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$

故至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = -\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

2.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$.试证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=f'(\xi)$.

证明：构造函数 $F(x)=f(x)(1-x)^2$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件

所以至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$

即 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=f'(\xi)$

3.设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 内可导，且 $f(\frac{\pi}{4})=0$.

证明：存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$，使 $2f(\xi)+\sin 2\xi\ f'(\xi)=0$.

证明：构造函数 $F(x)=f(x)\tan x$

则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上满足罗尔定理条件，

至少存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$，使 $F'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)\tan\xi+f(\xi)\sec^2\xi=0$

化简得 $2f(\xi)+\sin 2\xi\ f'(\xi)=0$.

4.设 $f(x)$在 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx.$

试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

证： 设 $F(x)=xf(x)$

由积分中值定理，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$，使

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F(\eta)$$

由已知条件有 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}F(\eta)=F(\eta)$

由于 $F(1)=f(1)=F(\eta)$，并且 $F(x)$在$[\eta,1]$上连续，在$(\eta,1)$内可导

故由罗尔定理可知

存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0,1)$，使得 $F'(\xi) = 0$.

即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

# 考研数学强化班
# ——高等数学

## 第三章 微分中值定理与导数应用

常考题型五 证明有两个中值 $\xi$，$\eta\ (\xi \neq \eta)$ 满足的某种关系式的命题

**END**