导数习题课2(导数定义, 10个题)

1.设 $f(x)$在 x_0处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=$

(A) $-f'(x_0)$ (B) $f'(-x_0)$ (C) $f'(x_0)$ (D) $2f'(x_0)$

2.设函数 $f(x)$在 x_0可导，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=$

(A) $f'(x_0)$ (B) $-2f'(x_0)$ (C) ∞ (D) 不能确定

3.设 $f(x)$在 $x=0$处可导，且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(tx)-f(x)}{x}$

4.设 $f(x)$是定义在区间$[-1,1]$上的有界函数，且 $g(x)=f(x)\sin(x^2)$，求 $g'(0)$.

5.设 $f(x)$在点 x_0可导，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

6.设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$. 若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有

(A) $f(0)=0$　　(B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$　(D) $f(0)-f'(0)=0$

7.若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导.

8.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意 x_1,x_2，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，$f(x)=1+xg(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导.

9.设 $f(x)$ 的定义域为所有非零实数之全体，对任何非零的实数 x、y，均有：$f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)$ 存在.，证明：$f(x)$ 在 $x\neq 0$ 的所有点处是可导的.

10.已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 x_1、x_2，有 $|f(x_2)-f(x_1)|\le (x_2-x_1)^{\alpha}$　$(\alpha>1)$ 成立，证明 $f'(x)$ 处处存在并求出 $f'(x)$.

答案

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}=-f'(x_0)$

故选（A）.

2.由 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{t\to 0}[f(x_0+t)+f(x_0-3t)]=2f(x_0)$

当 $f(x_0)\neq 0$ 时，则有 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}=\infty$

当 $f(x_0)=0$ 时，则有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-3t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}+\frac{f(x_0-3t)-f(x_0)}{-3t}\cdot(-3)\right]$$

$$=f'(x_0)-3f'(x_0)=-2f'(x_0)$$

3. 由题设有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$,

当 $t=0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(tx)-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[-\dfrac{f(x)}{x}]=-f'(0)$;

当 $t\neq 0$时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(tx)-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tf(tx)}{tx}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=(t-1)f'(0)$.

4. $g'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)\sin(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)f(\Delta x)=0$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$

$=f(x_0)-x_0\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

$$6.\ F(x)=\begin{cases} f(x)(1-\sin x), & x<0 \\ f(0), & x=0 \\ f(x)(1+\sin x), & x>0 \end{cases}$$

$$F'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0^{-}}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=f'(0)-f(0)$$

$$F'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0^{+}}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=f'(0)+f(0)$$

若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必须 $F'_{-}(0)=F'_{+}(0)$. 则 $f(0)=0$.

因此应选（A）.

7．设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0\cdot A=0$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A.$$

8. 证明：任取 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x g(\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=f(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}g(\Delta x)=f(x_0)$$

由 x_0 的任意性，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导.

9. 证：对 $\forall x\neq 0$， $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\Delta x}\quad(\because\ f(1)=0)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}f'(1).$$

10. 证明 $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$

考虑 $0 \le \left|\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right| \le \left|\dfrac{(\Delta x)^{\alpha}}{\Delta x}\right| = (\Delta x)^{\alpha-1}$.

故当 $\Delta x \to 0$ 时，$\alpha > 1$ 由夹逼定理得 $f'(x_0) = 0$.