习题课3（定积分证明） 10题

1.证明：(1) 若 $f(x)$为连续奇函数，则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数；

(2) 若 $f(x)$为连续偶函数，则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数；

(3) 若 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ (a\neq 0)$，结论成立吗？

2.设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且严格单增，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

3.设 $f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，且 $g(x)\neq 0, x\in[a,b]$.

试证：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$

4.设函数 $f(x)$ 为连续函数,证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du\right)dt .$$

5.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}, \qquad x\in[a,b].$$

证明

(1) $F'(x)\geq 2$.

(2)方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内只有一个根.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(0)$$

证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 c，使 $f'(c)=0$

7.设 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 有连续的导数，且 $f(0)=0$.

(1)研究 $F(x)$ 的连续性；

(2)求 $F'(x)$，并研究 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

8.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数 $f''(x)\leq 0$，

试证：$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \leq f(\frac{1}{3})$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且不变号.

证明至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使下式成立

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx}$$

（第一积分中值定理）.

10 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

（1）若在 $[a,b]$ 上，$f(x) \geq 0$，且 $\int_a^b f(x)dx = 0$，则在 $[a,b]$ 上，

$f(x) \equiv 0$.

（2）若在 $[a,b]$ 上，$f(x) \leq g(x)$ 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$，

则在 $[a,b]$ 上，$f(x) \equiv g(x)$.

答案

1.

(a) $\phi(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt \overset{t=-u}{=\!=\!=} -\int_0^{x}f(-u)\,du=\int_0^{x}f(u)\,du=\phi(x)$

(b) $\phi(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt \overset{t=-u}{=\!=\!=} -\int_0^{x}f(-u)\,du=-\int_0^{x}f(u)\,du=-\phi(x)$

(c) 若 $f(x)$ 为连续奇函数，则 $\phi(x)=\int_a^{x}f(t)\,dt$ $(a\neq 0)$ 为偶函数.

因 $\phi(x)=\int_a^{x}f(t)\,dt=\int_a^{0}f(t)\,dt+\int_0^{x}f(t)\,dt$ 偶函数+偶函数=偶函数

若 $f(x)$ 为连续偶函数，则 $\phi(x)=\int_a^{x}f(t)\,dt$ $(a\neq 0)$ 不再具有奇偶性.

因 $\phi(x)=\int_a^{x}f(t)\,dt=\int_a^{0}f(t)\,dt+\int_0^{x}f(t)\,dt$ 偶函数+奇函数不再具有奇偶性

2. 证 作辅助函数 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$

因为 $F'(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(a+x)f(x)-2xf(x)$

$$=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(a-x)f(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(x)\mathrm{d}t$$

$=\int_a^x [f(t)-f(x)]\mathrm{d}t<0$ (因为 $t\le x$, 且 $f(x)$ 单调递增,

即 $f(t)<f(x)$)

所以 $F(x)$单调递减, 又 $F(a)=0$, 由此可知 $F(b)<F(a)=0$,

即 $(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

3. 证明 设 $F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$, $G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(x)$, $G(x)$在$[a,b]$

上满足柯西中值定理条件, 则有 $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$

即至少存在一个 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

4.证 $\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt=\left[t\int_0^t f(u)du\right]_0^x-\int_0^x tf(t)dt$

$$=x\int_0^x f(u)du-0-\int_0^x tf(t)dt$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

5.证(1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2$

(2)由于$F(x)$在$[a,b]$上连续，且

$$F(a)=\int_a^a f(t)dt+\int_b^a\frac{dt}{f(t)}<0;$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_b^b\frac{dt}{f(t)}>0.$$

$\therefore\ F(x)=0$ 在区间(a,b) 内有根，又由于 $F'(x)\geq 2>0$，

$\therefore\ F(x)=0$ 在区间(a,b) 内只有一个根.

6.证明 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，要证明在$(0,1)$内至少存在一点 c，使 $f'(c)=0$，一般常用罗尔定理。

但这里缺少条件 $f(a)=f(b)$，注意到由积分中值定理

$$3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(\xi)\left(\xi \in \left[\frac{2}{3},1\right]\right) \quad \therefore f(\xi)=f(0)$$

由积分中值定理知，至少存在一点$\xi \in \left[\frac{2}{3},1\right]$，使

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)dx = f(\xi)(1-\frac{2}{3})$$

即$f(\xi)=f(0)$. 故$f(x)$在$[0,\xi]$上满足罗尔定理的条件，

所以$\exists c \in (0,\xi) \subset (0,1)$, 使得 $f'(c)=0$.

7. 解 (1) 当 $x \neq 0$ 时，$F(x)$显然连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{2x}=\frac{1}{2}f(0)=0 \ \therefore F(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续.}$$

(2)当 $x \neq 0$时，

$$F'(x) = \left[\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2} \right]_x' = \frac{x^2 \cdot x \cdot f(x) - 2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^4}$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \right]$$

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{xf(x)}{3x^2} = \frac{1}{3} f'(0) \quad \left(f(0) = 0 \right)$$

即 $F'(0) = \frac{1}{3} f'(0)$，而

$$\lim_{x \to 0} F'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot f(x) - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2xf(x) + x^2 \cdot f'(x) - 2xf(x)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{3} = \frac{1}{3} f'(0) = F'(0) \quad \left(因为 f'(x) 连续 \right)$$

故 $F'(x)$在 $x = 0$处连续.

8. 解　把函数 $f(t)$ 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 处展为 Taylor 公式得：

$$f(t)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(t-\frac{1}{3}\right)^2\leq f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

令 $t=x^2$，则有 $f(x^2)\leq f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{3}\right)$，

不等式两端关于 x 积分得：

$$\int_0^x f(x^2)\mathrm{d}x\leq f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\int_0^1\mathrm{d}x+f'\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{3}\right).$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且不变号. 证明至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使下式成立

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx}$$

(第一积分中值定理).

分析：只要证 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$

证　若 $g(x) \equiv 0$，等式显然成立.

若 $g(x) \neq 0$，不妨假设 $g(x) > 0$，则 $\int_a^b g(x)dx > 0$.

$\because$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，

则 $m \le f(x) \le M$.

$\therefore mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$

等式两端同时积分得：

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

从而

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M$$

对 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上使用介值定理得：

至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$ 结论得证

10. 设$f(x)$及$g(x)$在$[a,b]$上连续，证明

（1）若在$[a,b]$上，$f(x)\geq 0$，且$\int_a^b f(x)dx=0$，则在$[a,b]$上，$f(x)\equiv 0$.

（2）若在$[a,b]$上，$f(x)\leq g(x)$ 且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$，则在$[a,b]$上，$f(x)\equiv g(x)$.

证明 （1）用反证法 假设在$[a,b]$上 $f(x)\not\equiv 0$，

则至少存在某点x_0，使$f(x_0)>0$（不妨设$x_0\in(a,b)$，若x_0是区间端点证明类似），

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\exists\delta>0$，使得$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$，都有$f(x)>c>0$（$c$是某个常数），因此

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta}f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b}f(x)dx$$

$$\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}cdx=2c\delta>0$$

这与假设$\int_a^b f(x)dx=0$矛盾，命题得证。

（2）由$g(x)-f(x)\geq 0$，根据(1)的结论成立