考研数学强化班

——高等数学

第三章 微分中值定理与导数应用

常考题型二　证明结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题

常考题型二　证明结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题

1. 假设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上有二阶导数，并且 $f(1)=f(2)=0$，

又 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$.

证明：在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F''(\xi)=0$.

解：$F(x)=(x-1)^2 f(x) \quad x\in[1,2]$

因为 $f(1)=f(2)=0$ 　　所以 $F(1)=F(2)=0$

故由罗尔定理可知：$\exists \xi_1 \in (1,2)$ 使 $F'(\xi_1)=0$

另外 $F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$ 　　$F'(1)=0$

$F'(x)$ 在 $[1,\xi_1]$ 上满足罗尔条件

故 $\exists \xi \in (1,\xi_1) \subset (1,2)$ 使 $F''(\xi)=0$.

2. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且曲线 $y=f(x)$

与联结两端点$A(a,f(a)),B(b,f(b))$的弦交于点C.

证明:在(a,b)内必有ξ，使$f''(\xi)=0$.

证明:设$C(c,f(c))$.

$f(x)$在$[a,c]$上连续，在(a,c)内二阶可导

在(a,c)内必有ξ_1 使$f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

$f(x)$在$[c,b]$上连续，在(c,b)内二阶可导

在(c,b)内必有ξ_2 使$f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$

由题意可知$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

故由罗尔定理，在(ξ_1,ξ_2)内必有ξ使$f''(\xi)=0$

3. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

试证(1)存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\eta)=\eta$;

(2)对任意实数λ,必存在$\xi\in(0,\eta)$使得$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

(1)证明：设$\varphi(x)=f(x)-x$ 在$[\frac{1}{2},1]$连续，

$$\varphi(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

$$\varphi(1)=f(1)-1=-1<0$$

$\varphi(\frac{1}{2})\varphi(1)<0$ 且$\varphi(x)$在$[\frac{1}{2},1]$连续

故由闭区间上连续函数的介值定理得

$\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$使 $\varphi(\eta)=0$ 即$f(\eta)=\eta$.

(2)证明：令对任意实数λ, 令$F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}[f(x)-x]$.

则$F(x)$在$[0,\eta]$上连续，在$\xi\in(0,\eta)$内可导，

且$F(0)=0$，$F(\eta)=\mathrm{e}^{-\lambda\eta}[f(\eta)-\eta]=0$

由罗尔定理得

$\exists\xi\in(0,\eta)$使得$F'(\xi)=-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]+\mathrm{e}^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1]=0$

即$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

考研数学强化班

——高等数学

第三章 微分中值定理与导数应用

常考题型二　证明结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题

END