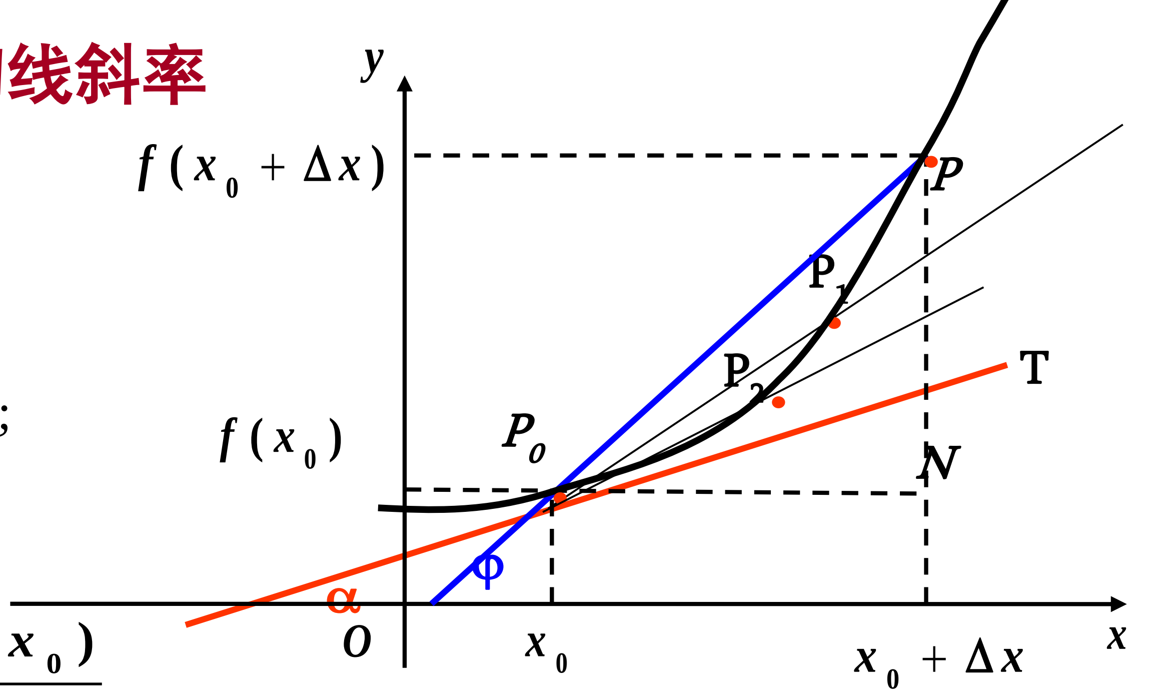
第二章 导数与微分

第一节 导数的概念

一、引入：平面曲线的切线斜率



（1） 当 x_0 有增量 Δx 时，

$y=f(x)$ 有增量

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

（2） 比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

是割线 P_0P 的斜率 k

（3） 当 $\Delta x\to 0$ 时，点 P 沿 $P_1, P_2\cdots$ 无限逼近 P_0，割线 P_0P 的极限位置就是切线 P_0T

（4） 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，这极限就是切线 P_0T 的斜率。

二、导数的定义

1、函数在点x_0处的导数定义：

设函数$y=f(x)$在x_0的某一邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，自变量在$U(x_0,\delta)$内从x_0变化到$x_0+\Delta x$时，相应的函数有增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

如果$\Delta x\to 0$时，比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限存在，则称函数$f(x)$在$x_0$处可导，

并称这个极限值为函数在x_0处的导数．记作：

$$f'(x_0),\ 或\ y'\big|_{x=x_0},\ 或\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\ 或\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

即
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

当上述极限不存在时，称函数$f(x)$在x_0不可导。

求导三步法：求增量、算比值、取极限。

注： 导数公式的其他表示形式：

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2.单侧导数：

左导数： 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称这极限为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左导数。记为 $f'_-(x_0)$.

右导数： 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称这极限为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的右导数。记为 $f'_+(x_0)$.

3.导数存在的充要条件：

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)$、$f'_+(x_0)$ 存在且相等.

4.在开区间（a,b）内可导及导函数：

如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都可导，

则称$f(x)$在区间(a,b)内可导.

此时,(a,b)内的每一点x都有唯一的导数值与之对应，

从而得到一个函数，称为$f(x)$的导函数，记为$f'(x)$.

即：$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \qquad x\in(a,b)$$

注意： (1)导函数表达式中，虽然x可以是(a,b)内的任意数值，但在求导过程中变量是Δx，x看作常数.

(2)$f'(x)$简称导数，$f'(x_0)$称为函数$f(x)$在x_0处的导数值.

(3) $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$

(4)如果在区间(a,b)的左端点$x=a$处有右导数,同时在右端点$x=b$处有左导数,在区间内的各点可导,则称函数在闭区间$[a,b]$上可导。

由定义求导数

1. 求函数 $f(x)=x^2$ 的导函数 $f'(x)$ 和在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$.

解： 1、求增量: $\forall x\in R$, 相应于 Δx 有

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

2、算比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

3、取极限:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

三步法

$$f'(x)=2x;\qquad f'(1)=2.$$

2.求函数 $f(x)=x^{n}(n$为正整数$)$在 $x=a$处的导数。

解 $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{n}-a^{n}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1}\right)=na^{n-1}.$$

在上面的例子中，将a换成x得 $f'(x)=nx^{n-1}$

即 $$\boxed{\left(x^{n}\right)'=nx^{n-1}}$$

更一般地，对于幂函数$y=x^{\mu}(\mu$为常数$)$，有

$$\boxed{\left(x^{\mu}\right)'=\mu x^{\mu-1}}$$

3. 求函数 $y=\sin x$的导数。

解: $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right]$

$= \cos x$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.}$$

4. 求函数 $f(x)=a^x,\ (a>0, a\neq 1)$的导数。

解 $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}$

$= a^x \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h} = a^x \ln a$

$h\to 0$时， $a^h-1\sim h\ln a$

$$\boxed{(a^x)' = a^x\ln a.} \qquad \boxed{(e^x)' = e^x.}$$

5. 求函数 $y=\ln x$ 的导数

当 $x \longrightarrow 0$ 时,

$\ln(1+x) \sim x$

解: $\forall x \in (0,+\infty)$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\text{即:对} \forall x > 0, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$1.(C)' = 0$$

$$2.(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$3.(\sin x)' = \cos x$$

$$4.(\cos x)' = -\sin x$$

$$5.(a^{x})' = a^{x}\ln a$$

$$6.(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$$

$$7.(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

导数定义推导

6. $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$， 求 $f'(0)$

解 $f'(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-0}{x}=1$

$f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x}=1$

$\therefore\ f'(0)=1$

7. 设 $f(x)=|x|\sin x$，求 $f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin x-0}{x}=0$

8.设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续，求 $f'(a)$.

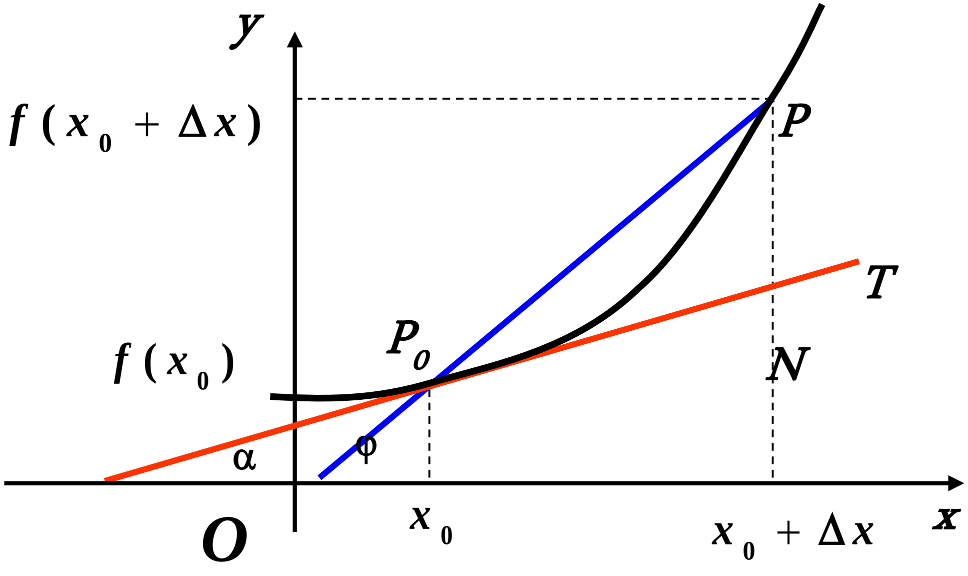
解 $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a).$$

三、导数的几何意义

$$\tan\varphi=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$



$$k=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=f'(x_0)$$

函数$f(x)$在x_0点的导数，就是曲线$f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率。

曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线方程为：

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

当$f'(x_0)\neq 0$时，在该点处的法线方程为：

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

9. 求曲线 $y=\ln x$上平行于直线$y=2x$的切线方程

解：设切点为$P_0(x_0, y_0)$

则在点 P_0处曲线的切线斜率为 $y'(x_0)$

$\because (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\quad \therefore y'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$

斜率为2

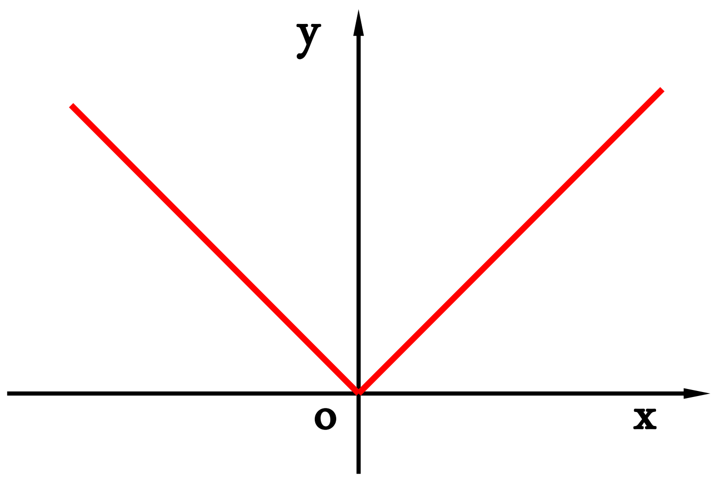
又因为P_0处的切线与已知直线 $y=2x$ 平行

$\therefore \dfrac{1}{x_0} = 2,$ 知 $x_0 = \dfrac{1}{2}, y_0 = \ln x_0 = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$

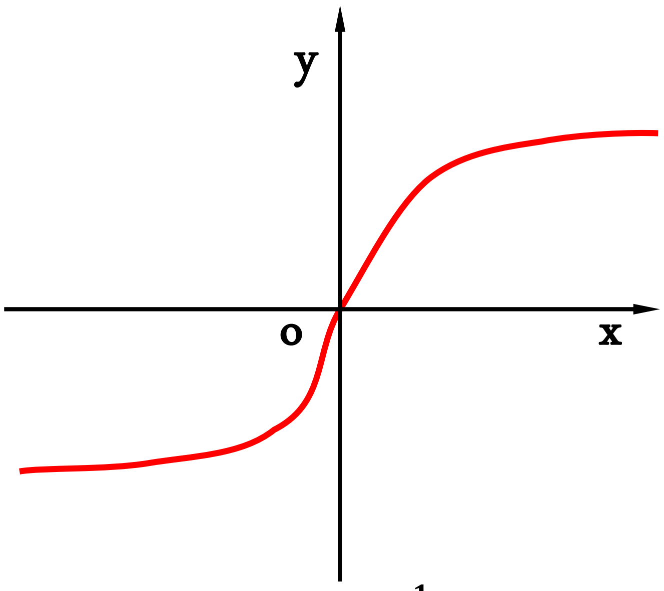
所求切线方程为： $y + \ln 2 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

问题： 函数在可导点的切线，可以由导数来表示其斜率；连续函数在它的不可导点，切线又是什么情况呢？

答案是： 没有切线，



$y = |x|$



$y = x^{\frac{1}{3}}$

10.设 $f(x)$是可导的偶函数，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=2$，则曲线 $y=f(x)$在点 $x=-1$处法线方程的斜率为 _______ .

解　由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(-x)=f(x)$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+2h)-f(-1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2=1$$

即在 $x=1$点处切线斜率为 -1

故 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处法线方程的斜率为 -1.

四、可导与连续的关系

极限与无穷小之间的关系

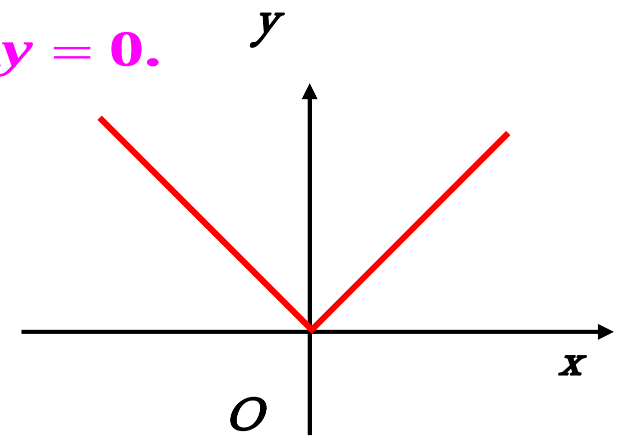
$f(x)$在x_0点可导 $\Rightarrow$ $f(x)$在x_0点连续。

$f(x)$在x_0点可导 $\not\Leftarrow$ $f(x)$在x_0点连续。

事实上， $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$， 则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)$，

即 $\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$， $\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

观察： $y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$

该函数在 $x=0$点不可导，但前面已知这个函数在 $x=0$点连续。

连续与可导关系的例题

11. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ x+1, & x<0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 点的连续性与可导性。

解:

因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1\ne f(0)$

所以，$f(x)$在 $x=0$点不连续，也就不可导。

$$\boxed{\text{可导}\Rightarrow\text{连续，不连续}\Rightarrow\text{不可导}}$$

12. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 点的连续性与可导性。

解： $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$

$\therefore$ $f(x)$在 $x=0$点连续。

由导数定义

$$\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x},$$

不存在 .

$\therefore$ $f(x)$在 $x=0$点不可导。

思考题

设 $f(x)$ 的定义域为所有非零实数之全体，对任何非零的实数 x、y，均有：$f(xy) = f(x) + f(y)$，且 $f'(1)$ 存在，证明：$f(x)$ 在 $x \neq 0$ 的所有点处是可导的.

思考 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$内

(A) 处处可导；　　(B) 恰有一不可导点；

(C) 恰有两个不可导点；　　(D) 至少有一个不可导点。

（2005年研究生入学试题 数学一）

解 当$|x|<1$ 时，$1<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}<\sqrt[n]{2}$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$，

当$|x|=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，

当$|x|>1$ 时，$|x|^3=\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}<\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=\sqrt[n]{2}|x|^3$，

$\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}|x|^3=|x|^3$，　$f(x)=|x|^3$.

即 $$f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1\\ 1, & -1\le x\le 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$$

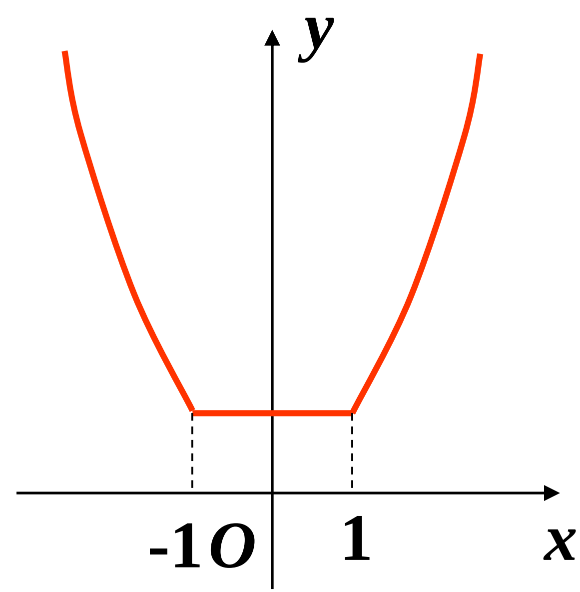
$$f'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-(-1+\Delta x)^3-1}{\Delta x}=-3$$

$$f'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1-1}{\Delta x}=0$$

$$f'_-(-1)\neq f'_+(-1),$$

所以 $f(x)$ 在 -1 处不可导。

同理 $f(x)$ 在 1 处也不可导。



注： 曲线上尖点处导数不存在。

$$f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1\\ 1, & -1\le x\le 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$$

C