

二、二阶线性微分方程的解的结构

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \quad (1)$$

及

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

方程 (1) 叫做二阶线性微分方程。 方程 (2) 叫做对应于(1)的齐次线性微分方程。

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (2) 的两个解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (3)$$

也是 (2) 的解, 其中 C_1 、 C_2 是任意常数。

说明: (1) 齐次方程的解符合叠加原理;

(2) 叠加解 (3) 不一定是方程 (2) 的通解。 只有当 C_1 与 C_2 相互独立, 即 C_1 与 C_2 无法合并时, (3) 才是 (2) 的通解。

定理 2 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (2) 的两个线性无关的特解, 则 (3) 就是方程 (2) 的通解。

所谓 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ **线性无关** 是指: $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}$.

一般的, 设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 如果存在 n 个 **不全为零** 的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) \equiv 0$$

成立, 则称这 n 个函数在区间 I 上 **线性相关**; 否则称 **线性无关**。

推广: n 阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (4)$$

若 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (5)$$

的 n 个线性无关的特解, 则

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ 就是方程 (5) 的通解。²

例 1 解方程 $y'' + y = 0$.

解 容易验证: $y_1 = \cos x$ 与 $y_2 = \sin x$ 是方程的两个特解,
并且这两个解线性无关,

所以方程的通解为: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

分析: 一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

其通解为 $y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$

改写为 $y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + Ce^{-\int P(x)dx}$

$y^* = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$ 是该方程的一个特解;

$Y = Ce^{-\int P(x)dx}$ 是对应齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 的通解。

定理 3 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程 (1) 的一个特解,
 $Y(x)$ 是与 (1) 对应的齐次方程 (2) 的通解, 那末

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是二阶非齐次线性微分方程 (1) 的通解。

例 2 解方程 $y'' + y = x^2$.

解 容易验证 $y^* = x^2 - 2$ 是所给方程的一个特解;

由例 1 知: $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 是对应齐次方程的通解。

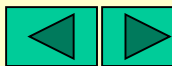
所以所给方程的通解为: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$.

定理 4 设非齐次线性方程 (1) 右端是几个函数之和, 如

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

而 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$ 及 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 的特解

分别为 $y_1^*(x)$ 及 $y_2^*(x)$, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 就是原方程的特解。



三、二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

其中 p 、 q 为常数。

指数函数 $y = e^{rx}$ (适当地选取 r) 最有可能是方程 (1) 的一个解。

把 $y = e^{rx}$ 代入方程 (1)，整理得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$(1) \text{ 的特征方程: } r^2 + pr + q = 0 \quad (2)$$

只要 r 满足方程 (2)， $y = e^{rx}$ 就是 (1) 的一个特解。

(2) 的根称为特征根。

(i) 当特征方程有两个不相等的实根: $r_1 \neq r_2$

可得方程 (1) 的两个不相关的特解: $y = e^{r_1 x}$ 及 $y = e^{r_2 x}$,

由此得 (1) 的通解为:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

$$\frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{常数}.$$

(ii) 当特征方程有两个相等的实根: $r_1 = r_2 = r$

可得方程 (1) 的一个特解: $y_1 = e^{rx}$

还需求出另一解 y_2 , 并且要求 y_2 / y_1 不是常数。

设 $y_2 / y_1 = u(x)$, 即 $y_2 = e^{rx} u(x)$.

将 y_2 、 y_2' 和 y_2'' 代入微分方程 (1), 得

$$e^{rx} \left[(u'' + 2ru' + r^2 u) + p(u' + ru) + qu \right] = 0$$

可化为 $u'' + 0 u' + 0 u = 0$

由 r 是特征方程的根, 得

$$u'' = 0, \quad u' = C_1, \quad u = C_1 x + C_2.$$

选取 $u=x$, 得方程 (1) 的另一特解为: $y_2 = xe^{rx}$

从而微分方程 (1) 通解为

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

即 $y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$

(iii) 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta \quad (\beta \neq 0)$$

可得方程 (1) 的两个复数形式的解

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

由定理1: $\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$ 为方程 (1) 的一个特解。

$\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$ 也是方程 (1) 的一个特解。

于是得实数函数形式的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

二阶常系数齐次线性微分方程的通解如下表所示

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$
两个相等的实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例 1 求下列微分方程的通解

$$(1) y'' - 2y' - 3y = 0; \quad (2) y'' + 2y' + y = 0; \quad (3) y'' - 2y' + 5y = 0.$$

解 (1) 所给微分方程的特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

特征根为: $r_1 = -1, r_2 = 3$

因此所求通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$

(2) 特征方程为

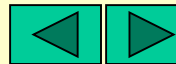
$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$$

所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}.$

(3) 特征方程为

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 2i$$

所求通解为 $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$



n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (3)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 为常数。

设 $y = e^{rx}$, 则 $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, \cdots , $y^{(n)} = r^n e^{rx}$.

将 y 及其各阶导数代入方程 (3) 中得

$$e^{rx} (r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n) = 0$$

(3) 的特征方程: $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0 \quad (4)$

若 r 是 (4) 的根, 函数 $y = e^{rx}$ 就是 (3) 的一个特解。

n 次代数方程有 n 个根, 特征方程中的每一个根对应着通解中的一项, 且每一项中都含有一个任意常数。

与特征方程的根对应的微分方程的解为

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项 Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出两项 $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项 $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})e^{rx}$.
一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出 $2k$ 项 $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x$ $+ (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

其中 y_1, y_2, \cdots, y_n 齐次方程 n 个线性无关的解.

例 2 求下列方程的通解

$$(1) y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0; \quad y^{(4)} + \beta^4 y = 0.$$

解 (1) 所给微分方程的特征方程为

$$r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 - 2r + 5) = 0$$

特征根为 $r_1 = r_2 = 0$; $r_{3,4} = 1 \pm 2i$

所求通解为 $y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$.

(2) 特征方程为 $r^4 + \beta^4 = 0$

特征根为 $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$; $r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

因此所求通解为 $y = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right)$
 $+ e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right).$



四、二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程一般式是

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

其中 p 、 q 是常数。

由定理3，只要求出(1)的一个特解 y^* 及(1)对应的齐次方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

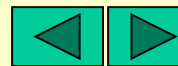
的通解 Y ，即可求得(1)的通解： $y = Y + y^*$ 。

对 $f(x)$ 的下面两种最常见形式，采用待定系数法来求出 y^* 。

(一) $f(x) = p_m(x)e^{\lambda x}$ 型

其中 λ 为常数， $P_m(x)$ 是 x 的一个 m 次多项式：

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m.$$



推测： $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$ 可能是方程(1)的特解(其中 $Q(x)$ 是某个多项式).

为了确定 $Q(x)$, 将 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$, $y^{*'} = e^{\lambda x} [\lambda Q(x) + Q'(x)]$

$$y^{*''} = e^{\lambda x} (\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x))$$

代入方程(1)并消去 $e^{\lambda x}$, 得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x) \quad (3)$$

讨论：

(i) 如果 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 即 λ 不是特征根。要使(3)成立,
 $Q(x)$ 应是一个 m 次多项式, 不妨设

$$Q(x) = Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$$

代入(3)式, 比较两端同次幂的系数即可确定 b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$),

进而得(1)的特解 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$. $(Q(x)e^{\lambda x})' = Q'(x)e^{\lambda x} + \lambda Q(x)e^{\lambda x}$
 $= [Q'(x) + \lambda Q(x)]e^{\lambda x}$

(ii) 如果 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 且 $2\lambda + p \neq 0$, 即 λ 是特征方程的单根。
 要使(3)成立, $Q'(x)$ 应是一个 m 次多项式, 令

$$Q(x) = xQ_m(x)$$

同样可以定出 $Q_m(x)$ 的系数 b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$),

(iii) 如果 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$, 即 λ 是特征方程的重根。

要使(3)式成立, $Q''(x)$ 应是 m 次多项式. 令

$$Q(x) = x^2 Q_m(x)$$

仍是比较(3)式两端的系数来确定 $Q_m(x)$ 的系数。

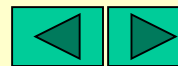
总之, 当 $f(x) = p_m(x)e^{\lambda x}$ 时, 方程(1)具有形如

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次(m 次)的多项式,

$$\text{其中 } k = \begin{cases} 0 & \lambda \text{ 不是特征根} \\ 1 & \lambda \text{ 是特征方程的单根} \\ 2 & \lambda \text{ 是特征方程的重根} \end{cases}$$



例 1 求下列方程的通解

$$(1) y'' - 2y' - 3y = 3x + 1; \quad (2) y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}.$$

解 (1) 对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$

所以特征根为: $r_1 = -1, r_2 = 3$

于是齐次方程的通解为: $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

又 $f(x) = 3x + 1 = (3x + 1)e^{0 \cdot x}$, $\lambda=0$ 不是特征根,

故原方程特解设为: $y^* = (b_0 x + b_1)e^{0 \cdot x} = b_0 x + b_1$

代入所给方程, 得 $-3b_0 x - 2b_0 - 3b_1 = 3x + 1$

所以 $b_0 = -1, b_1 = \frac{1}{3}$

于是得原方程的一个特解为 $y^* = -x + \frac{1}{3}$

所求通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{1}{3};$



$$(2) y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}.$$

对应齐次方程的特征方程为; $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 3$

于是齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

由于 $f(x) = xe^{2x}$, $\lambda=2$ 是特征方程的单根,

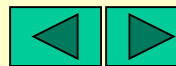
故原方程特解设为: $y^* = x(b_0 x + b_1)e^{2x}$

代入所给方程, 得 $-2b_0 x + 2b_0 - b_1 = x$

所以 $b_0 = -\frac{1}{2}, b_1 = -1$

于是得原方程的一个特解为 $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$

所求通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x}.$



例 2. 求微分方程的特解: $y'' - 3y' + 2y = 5$, $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$.

解 特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

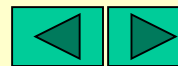
对应齐次微分方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

设非齐次特解为 $y^* = A$, 代入原微分方程得 $A = \frac{5}{2}$

故通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{2}$.

把 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 代入上式得 $C_1 = -5, C_2 = \frac{7}{2}$.

故所求特解为 $y = -5e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}$.



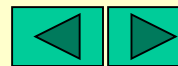
(二) $f(x) = e^{\lambda x} [p_l(x) \cos \omega x + p_n(x) \sin \omega x]$ 型

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [p_l(x) \cos \omega x + p_n(x) \sin \omega x]$$

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 都是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 且

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda \pm i\omega \text{ 不是特征根} \\ 1 & \lambda \pm i\omega \text{ 是特征根} \end{cases}$$



例 3 求方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的通解。

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$

于是齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

由于 $f(x) = x \cos 2x, (\lambda = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, P_n(x) = 0 \text{ 即 } m = 1)$

$\lambda \pm i\omega = \pm 2i$ 不是特征方程的根, 取 $k = 0$,

故原方程特解设为: $y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x$

代入所给方程, $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [p_l(x) \cos \omega x + p_n(x) \sin \omega x]$

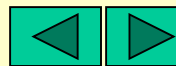
$$(-3ax - 3b + 4c) \cos 2x - (3cx + 3d + 4a) \sin 2x = x \cos 2x$$

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$$

$$\text{所以 } a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = 0, d = \frac{4}{9}$$

于是得原方程的一个特解为 $y^* = -\frac{1}{3} x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x$

所求通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$



3.求微分方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$

对应齐次微分方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

$f(x) = x \cos 2x$, ($\lambda = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, P_n(x) = 0$ 即 $m = 1$),
 $\pm 2i$ 不是特征方程的根,

设非齐次特解为 $y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x$,

则 $y^{*'} = (2cx + a + 2b) \cos 2x + (-2ax - 2b + c) \sin 2x$,

$y^{*''} = (-4ax - 4b + 4c) \cos 2x - (4cx + 4a + 4d) \sin 2x$,

将 y^* , $y^{*'}$, $y^{*''}$ 代入原微分方程, 整理得

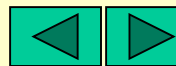
$$(-3ax - 3b + 4c) \cos 2x - (3cx + 4a + 3d) \sin 2x = x \cos 2x$$



$$\text{得 } \begin{cases} -3ax - 3b + 4c = x \\ 3cx + 3d + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x$$

故原微分方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x$.



例 4 求方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$ 的通解。

解 齐次方程的特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm 2i$

于是齐次方程的通解为 $Y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

由于 $f(x) = e^x \sin 2x, (\lambda = 1, \omega = 2, P_l(x) = 0, P_n(x) = 1, m = 0)$

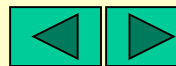
$\lambda \pm i\omega = 1 \pm 2i$ 是特征方程的根, 取 $k = 1$,

故原方程特解设为: $y^* = xe^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$

代入所给方程, 得 $A = -\frac{1}{4}, B = 0$

于是得原方程的一个特解为 $y^* = -\frac{1}{4}xe^x \cos 2x$

所求通解为 $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}xe^x \cos 2x$



例 5 求方程 $y'' + y = e^x + \cos x$ 的通解。

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$

齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

因为 $y'' + y = e^x$ 应有 Ae^x 形式的特解;

$y'' + y = \cos x$ 应有 $x(B \cos x + C \sin x)$ 形式的特解,

故特解应设为 $y^* = Ae^x + x(B \cos x + C \sin x)$

代入所给方程, 得 $2Ae^x + 2C \cos x - 2B \sin x = e^x + \cos x$

由此求得 $A = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}, B = 0$

于是求得一个特解为 $y^* = \frac{1}{2}e^x + \frac{x}{2}\sin x$

所求通解为 $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}e^x + \frac{x}{2}\sin x.$

