第三节 高阶导数、隐函数求导、
由参数方程确定的函数的导数

一、高阶导数

概念：

定义： 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数，就把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**。

一般的：

函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数，叫做 n **阶导数**.

注意：

高阶导数所要研究的问题，并不是“接连多次求导”这么简单
实际上，所谓高阶导数的问题，是 “推出给定求导阶数，能直接
写出这阶导数的公式“。或称”高阶导数通项 “

高阶导数的符号：

在不同情况下，以方便和不容易引起误解为原则，可以采用不同的符号。见下表：

	y型		$f(x)$型		$\dfrac{dy}{dx}$型	
	导函数	x_0点导数	导函数	x_0点导数	导函数	x_0点导数
一阶	y'	$y'\big\vert_{x=x_0}$	$f'(x)$	$f'(x_0)$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg\vert_{x=x_0}$
二阶	y''	$y''\big\vert_{x=x_0}$	$f''(x)$	$f''(x_0)$	$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg\vert_{x=x_0}$
三阶	y'''	$y'''\big\vert_{x=x_0}$	$f'''(x)$	$f'''(x_0)$	$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$	$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\bigg\vert_{x=x_0}$
…	…	…	…	…	…	…
n阶	$y^{(n)}$	$y^{(n)}\big\vert_{x=x_0}$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$	$\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$	$\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\bigg\vert_{x=x_0}$

求高阶导数举例：

1. $y = ax + b$，求 y''.

解： $y' = a$， $y'' = 0$.

2. $s = \sin \omega t$，求 s''.

解： $s' = \omega \cos \omega t$， $s'' = -\omega^2 \sin \omega t$.

3. 求 $y = e^{ax}$、 $y = a^x$ 的 n 阶导数.

解 $y = e^{ax}$， $y' = ae^{ax}$， $y'' = a^2 e^{ax}$， $\cdots$， $\boxed{y^{(n)} = a^n e^{ax}.}$

$y = a^x$， $y' = a^x \ln a$， $y'' = a^x (\ln a)^2$， $\cdots$，

$$\boxed{y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.}$$

4. 求 n 次多项式 $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 的 n 阶导数 .

解: $y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}$,

$$y'' = n(n-1) a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \cdots + 3 \cdot 2 a_{n-3} x + 2 a_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y^{(n)} = n! a_0 .$$

5. 求 $y = \ln(1 + x)$ 的 n 阶导数 .

解

$$y = \ln(1+x), \quad y' = \frac{1}{1+x}, \quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad \cdots\cdots, \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} .$$

6. 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

解: $y=\sin x,$

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

即 $$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同样可求得 $$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

7. 求 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 的 n 阶导数 .

解:
$$f'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x)=+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{-\frac{5}{2}},$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}(x+1)^{-\frac{7}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n}}(x+1)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^{n}}(x+1)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

和，积的高阶导数:

由n阶导数的定义，不难得到

$$\boxed{(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}}$$

乘积函数$u(x)\cdot v(x)$的n阶导数公式——莱布尼茨($Leibniz$)公式

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

莱布尼兹公式可用数学归纳法给出证明

莱布尼兹公式可写成下面形式：$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}}$

记忆方法：二项式定理

$$(u+v)^n = u^n v^0 + n u^{n-1} v^1 + \frac{n(n-1)}{2!} u^{n-2} v^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} u^{n-k} v^k + \cdots + u^0 v^n .$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + u v^{(n)} .$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

8. $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解: 设 $u = e^{2x}, v = x^2$,

$$u' = 2e^{2x},\quad u'' = 2^2 e^{2x},\quad \cdots,\quad u^{(k)} = 2^k e^{2x} \quad (k = 1, 2, \cdots, 20),$$

$$v' = 2x,\quad v'' = 2,\quad v''' = 0,\ \cdots,\quad v^{(k)} = 0 \quad (k = 3, 4, \cdots, 20),$$

代入莱布尼兹公式,得

$$y^{(20)} = \left(x^2 e^{2x}\right)^{(20)}$$

$$= 2^{20}e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19}e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!}2^{18}e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20}e^{2x}\left(x^2 + 20x + 95\right).$$

常用的 n 阶公式

$$\left(e^{x}\right)^{(n)} = e^{x}$$

$$\left(a^{x}\right)^{(n)} = a^{x}(\ln a)^{n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}}.$$

莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

二、隐函数的导数

对由方程$F(x,y)=0$确定的函数$y=f(x)$求导数，可以将方程的两边分别对x求导数，然后把y'解出来.

1. 求由方程 $e^{x+2y}=xy+1$确定的隐函数的导数 $y'\big|_{(0,0)}$

解: 方程两边对x求导数：$e^{x+2y}(1+2y')=y+xy'$

其中$z=e^{x+2y}$是由$z=e^u$及$u=x+2y(x)$复合而成

$$(2e^{x+2y}-x)y'=y-e^{x+2y} \qquad \therefore\ y'=\frac{y-e^{x+2y}}{2e^{x+2y}-x}$$

$$\therefore\ y'\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{2}$$

特点：(1)结论一般为分式；(2)结论中含有既含x，也含y

2. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点（$2,\frac{3}{2}\sqrt{3}$）处的切线方程。

解

把椭圆方程的两边分别对 x 求导得:

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

从而，$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}.$

把 $x=2,y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 代入上式得：$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$

于是, 所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2).$

即：$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$

隐函数的高阶导数举例

3. 方程 $y = \tan(x+y)$ 确定函数 $y = f(x)$，求 y''.

解:

先求 y'：方程两边分别对 x 求导数：

$$y' = \left[\sec^2(x+y)\right](1+y') = (1+y^2)(1+y')$$

$y = \tan(x+y)$

解得：$y' = -\dfrac{1+y^2}{y^2} = -y^{-2} - 1 \quad (y \neq 0)$

两边再对x求导：$\boldsymbol{y'' = 2y^{-3}y'}$

把(1)式代入上式得：$y'' = -\dfrac{2}{y^3}\left(1 + \dfrac{1}{y^2}\right), \quad (y \neq 0)$

注 隐函数求高阶导数，多次将方程两边分别对x求导数，注意利用原方程和含一阶导数的方程，不断将结果化简。一般，隐函数的导数仍是隐式形式。

4.方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}\ (x>0, y>0)$，确定函数 $y=f(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $y^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{y}}$ $\quad \dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x,\quad y\ln y=x\ln x,$

避免商的求导公式

等式两边对 x 求导，得 $(\ln y+1)\dfrac{dy}{dx}=\ln x+1$

即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln x+1}{\ln y+1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}{(\ln y+1)^2}$$

$$=\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

对数求导法

应用于积、商、幂以及“幂指”形式的函数

应用步骤：

（1）对$y=f(x)$两边取对数：$\ln y = \ln f(x)$

（2）按照隐函数求导法对上式的两边求导数，等式的右边利用对数性质展开。

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (\ln f(x)\text{的展开式})'$$

（3）$y' = y\cdot(\ln f(x)\text{展开式})'$

注：待应用熟练后，可以直接由（3）求导，叙述为：

“由对数求导法 $y' = y(\ln f(x)\text{展开式})' = \cdots$”

5. 设 $y=(3x-1)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ 求 y'

解（一）：两边取对数得：

$$\ln y=\frac{5}{3}\ln(3x-1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x-2)$$

两边对x求导得：

$$\frac{1}{y}y'=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

则 $$y'=y\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}\right]$$

$$=(3x-1)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\left[\frac{5}{3x-1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-2)}\right]$$

解（二）：

由对数求导法

$$y' = y\left[\ln\left((3x-1)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\right)\right]'$$

$$= y\left[\frac{5}{3}\ln(3x-1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x-2)\right]'$$

$$= y\left[\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}\right]$$

$$= (3x-1)^{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\left[\frac{5}{3x-1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-2)}\right]$$

注：用对数求导法求函数的导数无须讨论 x 的取值范围。

幂指函数

6. 设 $y = x^{\cos 2x}\ (x > 0)$, 求 y'.

解: 由对数求导法

$$y' = y\left[\ln\left(x^{\cos 2x}\right)\right]'$$

$$= y(\cos 2x \cdot \ln x)'$$

$$= y\left[(\cos 2x)' \cdot \ln x + \cos 2x \cdot (\ln x)'\right]$$

$$= y\left[-2 \cdot \sin 2x \cdot \ln x + \cos 2x \cdot \frac{1}{x}\right]$$

$$= x^{\cos 2x}\left(\frac{\cos 2x}{x} - 2\sin 2x \ln x\right)$$

三、参数方程所确定的函数的导数

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in (\alpha, \beta)$ 唯一确定函数 $y = f(x)$

$\varphi(t), \psi(t)$可导，$\varphi(t) \neq 0$. 则函数 $y = f\left(x\right)$可导，且

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \ \left(t \in (\alpha, \beta)\right).}$$

1. 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ （a为常数）在 $t = \dfrac{\pi}{2}$时的切线方程 .

解: 切线上 ,对应于 $t = \dfrac{\pi}{2}$的点为 $\left(\dfrac{(\pi - 2)a}{2}, a\right)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[a(1-\cos t)]'_t}{[a(t-\sin t)]'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot\frac{t}{2},$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

因而，所求切线方程为 :

$$y - a = x - \frac{(\pi - 2)a}{2},$$

即: $x - y + \dfrac{(4-\pi)a}{2} = 0$

参数方程高阶求导法举例

2. 由 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(t \neq 2n\pi, n \in Z)$，求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[a(1-\cos t)]'_t}{[a(t-\sin t)]'_t} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \cot\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{(y')'_t}{x'_t}$$

$$= \frac{\left(\cot\frac{t}{2}\right)'_t}{[a(t-\sin t)]'_t} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\csc^2\frac{t}{2}}{a(1-\cos t)}$$

$$= -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

$$\csc^2\frac{t}{2} = \frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2}$$

思考题

设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 a 点的一个邻域内有 $(n-1)$ 阶连续导数，求 $f^{(n)}(x)$.