导数习题课3(分段函数的导数、高阶导数)

1.设 $f(x)=\begin{cases} g(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $g(0)=g'(0)=0$, 求 $f'(0)$.

2.设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$有二阶连续导数，

且 $g(0)=1$, $g'(0)=-1$.

(1)求 $f'(x)$;(2)讨论 $f'(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上的连续性.

3.设 $F(x)=\begin{cases} e^{x}\cos x, & x\leq 0 \\ ax^2+bx+c, & x>0 \end{cases}$,

试确定 a、b、c，使 $F(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上二阶可导.

4.已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则$f^{(n)}(x)=$ ____ .$(n\geq 2)$

5.设$y=\sin^4 x-\cos^4 x$，则$y^{(n)}=$ _______ .

6.设$y=\sin[f(x^2)]$，其中f具有二阶导数，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

7.设$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$在a点的一个邻域内有$(n-1)$阶连续导数，则$f^{(n)}(x)=$ ________ .

8.若$y=\left[f(x^2)\right]^{\frac{1}{x}}$，其中$f$为可微正值函数，求$dy$.

9.求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)$ $(n\geq 3)$.

10.设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf(\frac{2}{n})}$.

11.设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 所确定，

试求：$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

12.曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个三角形，记切点的横坐标

为 a，试求切线方程和此三角形面积.又问当切点沿曲线趋于无穷远时，

该面积变化趋势如何？

答案

1. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\cos\dfrac{1}{x}}{x}$.

因为 $g'(0)=0$.所以 $x\to 0$ 时，$\dfrac{g(x)-g(0)}{x}\to 0$.

根据无穷小与有界量乘积仍为无穷小量知 $f'(0)=0$

2.（1）当 $x\neq 0$时，有

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$$

当 $x=0$时,由导数定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{g''(0)-1}{2}$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$

(2)因为在 $x=0$ 处，有

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$

而 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处是连续函数， 所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数.

3. 显然当 $x \in (-\infty, 0)$ 及 $x \in (0, +\infty)$ 时，$F(x)$ 均为二阶可导函数

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导. 故 $F(x)$ 及 $F'(x)$ 在 $x=0$ 点必连续

$$F(0-0)=\lim_{x\to 0^-} e^x \cos x = 1 \quad F(0+0)=\lim_{x\to 0^+}(ax^2+bx+c)=c$$

故 $c=1$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\cos x-1}{x}\ \underline{\underline{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}}\ \lim_{x\to 0^-} e^x(\cos x-\sin x)=1.$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx+1-1}{x}=b \quad \text{故} \quad b=1.$$

$$F'(x)=\begin{cases} e^x(\cos x-\sin x) & x\le 0 \\ 2ax+b & x>0 \end{cases}$$

$$\bullet\ F''_-=\lim_{x\to 0^-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x(\cos x-\sin x)-1}{x}=0$$

$$F''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+1-1}{x}=2a \quad \text{故} \quad a=0$$

综上所述：当 $a=0$, $b=c=1$ 时，可使 $F(x)$ 在（$-\infty, +\infty$）上二阶可导.

4. $f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)=2[f(x)]^3$

$f'''(x)=3![f(x)]^2\cdot f'(x)=3![f(x)]^4$

假设 $f^{(n-1)}(x)=(n-1)![f(x)]^n$,

则 $f^{(n)}(x)=(n-1)!n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)=n![f(x)]^{n+1}$

5. $y=\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x,\ y'=2\sin 2x,$

$$y^{(n)}=2\cdot 2^{n-1}\sin(2x+\frac{n-1}{2}\pi)=2^n\sin(2x+\frac{n-1}{2}\pi)$$

故应填 $2^n\sin(2x+\frac{n-1}{2}\pi)$.

6. $\dfrac{dy}{dx}=2xf'(x^2)\cos[f(x^2)]$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\left\{f'(x^2)\cos[f(x^2)]+2x^2f''(x^2)\cos[f(x^2)-2x^2[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)\right\}$$

$=2f'(x^2)\cos[f(x^2)]+4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)]-[f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}$

7. 由莱布尼兹公式有

$$f^{(n-1)}(x)=[(x-a)^n\varphi(x)]^{(n-1)}$$

$$=(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{1}n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots$$

$$+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots 3(x-a)^2\varphi'(x)+n!(x-a)\varphi(x)$$

由此可知，$f^{(n-1)}(a)=0$，再由导数定义得

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^{1}n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots$$

$$+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots 3(x-a)\varphi'(x)+n!\varphi(x)]=n!\varphi(a)$$

8. 解 $y=[f(x^2)]^{\frac{1}{x}}$ $\ln y=\dfrac{\ln f(x^2)}{x}$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{x\cdot\dfrac{1}{f(x^2)}f'(x^2)\cdot 2x-\ln f(x^2)}{x^2}=\frac{2x^2f'(x^2)-f(x^2)\ln f(x^2)}{x^2f(x^2)}$$

$$=\frac{2f'(x^2)}{f(x^2)}-\frac{\ln f(x^2)}{x^2}$$ 故 $$dy=[f(x^2)]^{\frac{1}{x}}\left[\frac{2f'(x^2)}{f(x^2)}-\frac{\ln f(x^2)}{x^2}\right]dx.$$

9.由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}$$

及 $\left[\ln(1+x)\right]^{(k)} = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ （k 为整数）

得 $f^{(n)}(x) = x^2 \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$

所以 $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

10. 解 $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, 因 $(0,0)$ 为切点.

故 $f(0) = \sin 0 = 0$ $f'(0) = (\sin x)'\big|_{x=0} = 1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf(\frac{2}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\cdot\dfrac{f(\frac{2}{n}) - f(0)}{\frac{2}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2f'(0)} = \sqrt{2}$.

11.解　对方程组两边分别取微分，得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = (6t+2)\mathrm{d}t \\ \mathrm{e}^{y}\sin t\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{y}\cos t\mathrm{d}t - \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

则 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t+2, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{e}^{y}\cos t}{1-\mathrm{e}^{y}\sin t}$ 且 $y = \mathrm{e}^{y}\sin t + 1$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^{y}\cos t}{(1-\mathrm{e}^{y}\sin t)(6t+2)} = \frac{\mathrm{e}^{y}\cos t}{(2-y)(6t+2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{e}^{y}\cos t}{(2-y)(6t+2)}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{(2-y)(6t+2)\left(\mathrm{e}^{y}\cos t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \mathrm{e}^{y}\sin t\right)}{(2-y)^2(6t+2)^3} - \frac{\mathrm{e}^{y}\cos t\left[(2-y)6 - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(6t+2)\right]}{(2-y)^2(6t+2)^3}$$

由于 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \mathrm{e}$，$\left.y\right|_{t=0} = 1$，代入上式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0} = \frac{\mathrm{e}(2\mathrm{e}-3)}{4}$$

12. 由 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，得 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，则切点 $P(a,\frac{1}{\sqrt{a}})$处的切线方程为

$$y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a)$$

切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $Q(3a,0)$ 和 $R(0,\frac{3}{2\sqrt{a}})$

于是 ΔORQ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{2\sqrt{a}}=\frac{9}{4\sqrt{a}}$

当切点按 x 轴正方向趋于无穷远时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}S=+\infty$

当切点按 y 轴的方向趋于无穷远时，有 $\lim\limits_{a\to 0^+}S=0.$