极限习题课4(连续)(7题)

1.若 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 3x, & 0\le x<1 \\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\ge 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，求 a 的值.

2.设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\ne 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$，问函数 $f(x)$在 $x=1$处是否连续？

若不连续，修改函数在 $x=1$处的定义，使之连续..

3.若 $f(x)$在点 $x=0$连续，且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$都成立，试证 $f(x)$为 $(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

4.设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^{2}+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，试确定 a 和 b 的值.

5.已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{n}+x^{n})}{n}\quad(x>0)$

(1) 求 $f(x)$; (2) 函数 $f(x)$ 在定义域内是否连续.

6.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，证明：在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

*7.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ （A 为常数），证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

答案 $1.\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x=3$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(e^{2ax}-e^{ax}+1)=e^{2a}-e^{a}+1$$

$$\therefore\ e^{2a}-e^{a}-2=0\quad (e^{a}-2)(e^{a}+1)=0$$

$$\Rightarrow\ e^{a}=2\Rightarrow a=\ln 2$$

2. 解 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}\ \underline{\underline{t=x-1}}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\cos t}{1-\cos\dfrac{\pi}{2}t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos t-1)]}{1-\cos\dfrac{\pi}{2}t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}t)^2}=-\frac{4}{\pi^2}\neq f(1)$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 点不连续，若修改定义 $f(1)=-\dfrac{4}{\pi^2}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

$$3.f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)]=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]=f(x)\Rightarrow \text{连续}$$

4. 解 当 $|x|<1$ 时，$f(x)=ax^2+bx$ 当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$；

当 $x=1$ 时，$f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}$；当 $x=-1$ 时，$f(-1)=\dfrac{a-b-1}{2}$.

故 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-1\\[2ex] \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1\\[2ex] ax^2+bx, & -1<x<1\\[2ex] \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\[2ex] \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$$

由连续的定义知 $$\begin{cases}f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\end{cases},$$ 即 $$\begin{cases}\dfrac{a-b-1}{2}=-1\\[2ex] \dfrac{a+b+1}{2}=1\end{cases}$$

$\therefore\quad a=0, b=1$

5.(1) 当 $x<\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln \mathrm{e}^n+\ln\left[1+\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)^n\right]}{n}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)^n}{n}=1;$

当 $x>\mathrm{e}$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x^n+\ln\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{e}}{x}\right)^n\right]}{n}=\ln x+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\mathrm{e}}{x}\right)^n}{n}=\ln x,$

当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(\mathrm{e})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 2+n}{n}=1,$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}1, & x\le \mathrm{e}\\ \ln x, & x>\mathrm{e}\end{cases}$$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^+}f(x)=f(\mathrm{e})$ 知 $f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$连续；

又当 $x<\mathrm{e}$ 时，$f(x)=1$ 连续；当 $x\ge \mathrm{e}$时，$f(x)=\ln x$ 连续.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

6. 证　欲证 $f(\xi)=\xi$，即证 $f(x)-x$ 以 ξ 为零点.

设 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又

$F(a)=f(a)-a<0, F(b)=f(b)-b>0$,

根据零点定理，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$

*7. 解 $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\therefore$ 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，

$|f(x)-A|<\varepsilon$.. 取 $\varepsilon=1$，则存在 X_1，使 $|x|>X_1$ 时，$|f(x)-A|<1$,

即 $A-1<f(x)<A+1$.

$\because$ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续 $\therefore$ $f(x)$ 在 $[-X_1,X_1]$ 上有最大、小值，

即存在 a、b，使 $a\le f(x)\le b$. 取 $m=\min\{A-1,a\}, M=\max\{A+1,b\}$,

则 $x\in[a,+\infty)$ 时，$m<f(x)<M$，即 $f(x)$ 有界.