无穷小的比较

基本理论

当$x \to 0$时,$3x, x^2, \sin x, \tan x$都是无穷小,

而 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{3x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\sin x} = 1$

两个无穷小比的极限不同，反映了不同无穷小趋于零的“快慢”程度

在$x \to 0$的过程中,$x^2 \to 0$比$3x \to 0$“快些”,

反过来$3x \to 0$比$x^2 \to 0$“慢些”,

$\sin x \to 0$与$\tan x \to 0$“快慢相仿”

比较无穷小的这种“快慢”程度称为无穷小的比较

1.定义 设 α、β 是在同一个极限过程中的无穷小，且 $\alpha \neq 0$

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称 β 与 α 是同阶的无穷小，记为 $\beta = O(\alpha)$;

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 与 α 是等价的无穷小，记为 $\beta \sim \alpha$

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶的无穷小.

2.等价无穷小的充要条件

定理1: β 与 α 是等价无穷小 $\Longleftrightarrow$ $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

证: $\Rightarrow$ 设$\alpha\sim\beta$, 则 $\lim\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\dfrac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}-1=0$

$\therefore\ \beta-\alpha=o(\alpha)$,即$\beta=\alpha+o(\alpha)$.

$\Leftarrow$ 设$\beta=\alpha+o(\alpha)$, 则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\dfrac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1$

$\therefore\ \alpha\sim\beta$

3.等价无穷小代换定理

定理2 设 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在 , 则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

证: $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

上一节我们曾经计算

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

又例如

$$4.\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln e=1$$

$x \to 0$ 时，常用等价无穷小有

$$\sin x \sim x \qquad \tan x \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$e^x - 1 \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$$

例题 利用等价无穷小求极限

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{x\ln(1+3x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 3x}{x^2} = 3$$

$u \to 0$时，

$\ln(1+u) \sim u$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{x\ln(1+5x)}{\sin 7x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 5x}{7x^2} = \frac{5}{7}$$

$u \to 0$时，$\sin u \sim u$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x\cos\frac{1}{x})}{x\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x\cos\frac{1}{x}}{x\cos\frac{1}{x}} = 1$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{\frac{1}{2}x^2}=-2$

$u\to 0$时， $e^u-1\sim u$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

等价无穷小代换

$x\to 0$时 $,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$$6.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\sin x}=1$$

$$7.\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^{x}}-1}{x}$$

$x\to 0$时，

$a^{x}-1\approx x\ln a$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}=\ln a$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$ $\boxed{y = e^{\ln y}}$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})} = e$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot(\frac{1}{\cos x}-1)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

这说明 $\tan x - \sin x$ 是关于 x 的3阶无穷小

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+3x)}{x+\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\dfrac{\ln(1+3x)}{x}}$

$$=\frac{1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$$

错解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3x}{x+3x}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$$

$$11.\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1-\frac{1-\cos x}{3})}-1}{x}$$

$u\to 0$时， $e^{u}-1\sim u$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1-\frac{1-\cos x}{3})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\frac{1-\cos x}{3})}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1-\cos x}{3}}{x^{2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^{2}}{2}}{3x^{2}}=-\frac{1}{6}$$

$u\to 0$时，$\ln(1+u)\sim u$

$x\to 0$时， $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$

无穷小阶的讨论

1.设 $x \to 0$ 时，$e^{\tan x} - e^{\sin x}$ 是 x^n 同阶无穷小，则 n 为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^{n-1}}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{n-1}}=\frac{1}{2}$$

所以 $n-1=2$，即 $n=3$

C

2. 设当 $x \to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$是比 $(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，求 n的值.

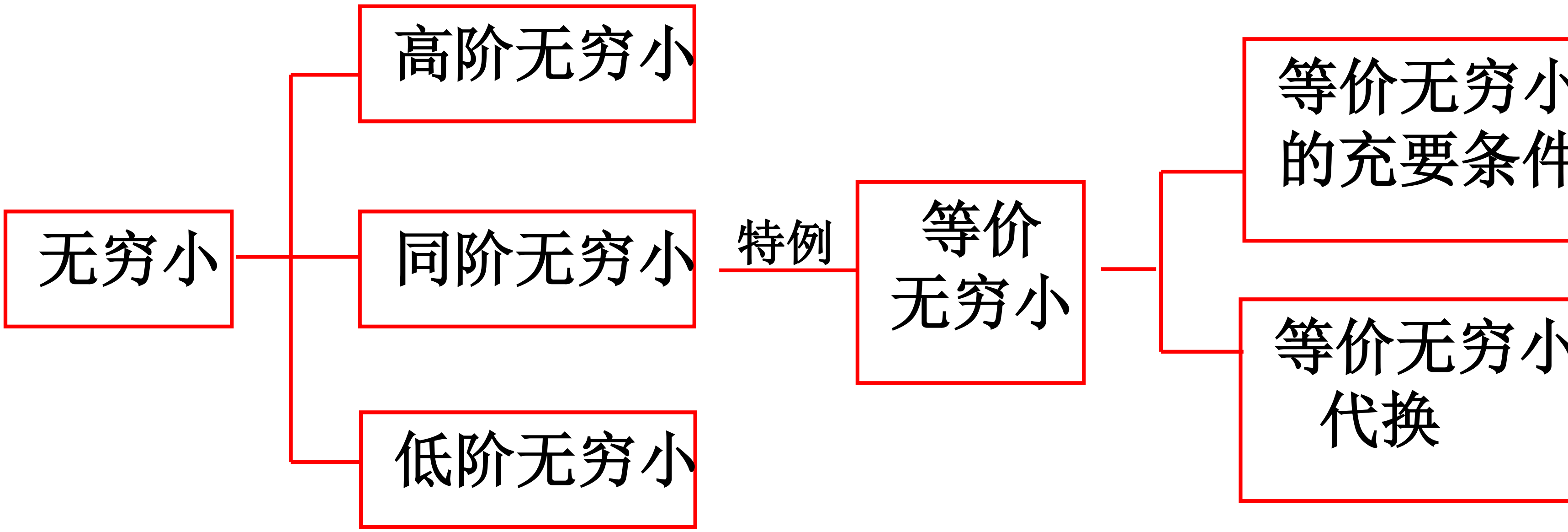
解 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-3}}=0 \quad\Rightarrow\quad n<3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0 \quad\Rightarrow\quad n>1$$

$$\therefore\ n=2$$

总结：无穷小的比较



思考题

求极限：$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + 2^x)\ln(1 + \frac{3}{x})$

思考题答案

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^{x})\ln(1+\frac{3}{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[2^{x}(1+2^{-x})\right]\ln(1+\frac{3}{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln 2+\ln(1+2^{-x})\right]\ln(1+\frac{3}{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\ln 2\cdot\ln(1+\frac{3}{x})+\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^{-x})\cdot\ln(1+\frac{3}{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\ln 2\cdot\frac{3}{x}+\lim_{x\to+\infty}2^{-x}\cdot\frac{3}{x}=3\ln 2+0=3\ln 2$$