

第二节 几种常见的一阶微分方程

讨论一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 的一些解法。

一、可分离变量的微分方程：

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (1)$$

那末原方程叫做可分离变量的微分方程

假定 $g(y)$ 和 $f(x)$ 都是连续函数，

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C \quad (2)$$

(2) 称为微分方程 (1) 的**隐式解**，由于 (2) 式中含有任意常数，(2) 也称为微分方程 (1) 的**隐式通解**。

1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解。

解 将原方程分离变量得 $\frac{dy}{y} = 2x dx$

两端积分得 $\ln |y| = x^2 + C_1$ -----隐式通解

从而 $y = \pm e^{x^2 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^2}$

令 $C = \pm e^{C_1}$, 得通解为 $y = Ce^{x^2}$.

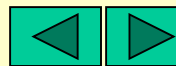
2. 求微分方程 $y' \sin x = y \ln y$ 满足初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 的特解。

解 将原方程分离变量得 $\frac{1}{y \ln y} dy = \frac{1}{\sin x} dx$

$$\frac{1}{\ln y} d(\ln y) = \csc x dx$$

两端积分得 $\ln |\ln y| = \ln |\csc x - \cot x| + \ln C$

即 $\ln y = C (\csc x - \cot x)$



练习1

1. $y' = 2x(1 + y)$

2. $\cos x \sin y dx - \sin x \cos y dy = 0$

3.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{x + xy^2}{y + x^2 y} \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

4. $3x^2 + 5x - 5y' = 0$

5. $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} - e^y)dy = 0$

6. $(y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0$

7.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6x^2 y^2}{y - x^3 y}$$

8. $y' - xy' = a(y^2 + y')$

答案

1. $y = Ce^{x^2} - 1$

2. $\sin x = C \sin y$

3. $1 + y^2 = 2(1 + x^2)$

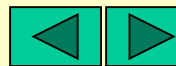
4. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + C$

5. $(e^x + 1)(e^y - 1) = C$

6. $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$

7. $C(1 - 2y^2)^{\frac{1}{4}} = 1 - x^3$

8. $y = \frac{1}{C + a \ln(1 - a - x)}$



二、齐次方程

定义 若 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 中的函数 $f(x, y)$ 可写成 $\frac{y}{x}$ 的函数,

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

则称这方程为**齐次方程**。

例如
$$(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$$

可改写为
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

故原方程为齐次方程。

在齐次方程 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 中, 令 $u = \frac{y}{x}$, 就化为变量可分离变量的方程。

3. 解方程 $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

解 原方程可写成: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$

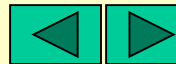
令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

原方程变为 $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1}$, 即 $x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1}$.

分离变量得 $\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}$

两端积分得 $u - \ln|u| + C = \ln|x| \longrightarrow \ln|xu| = u + C$

所给方程的通解为 $\ln|y| = \frac{y}{x} + C$



4. 求齐次方程满足初始条件的特解:

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1$$

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{du}{dx} + u$, 代入上式得

$$x \cdot \frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{3 - u^2}, \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u^3 - u}{3 - u^2},$$

分离变量得 $\frac{3 - u^2}{u^3 - u} du = \frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{3}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1} \right) du = \frac{dx}{x},$

两边积分得 $-\ln u^3 + \ln(u+1) + \ln(u-1) = \ln x + \ln C$

即 $\ln \left(\frac{u^2 - 1}{u^3 x} \right) = \ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2 - 1}{u^3 x} = C, \quad \text{即} \quad \frac{y^2 - x^2}{y^3} = C.$

由 $x = 0, y = 1$ 得: $C = 1. \quad \therefore y^2 - x^2 = y^3.$



练习2

$$1. x \frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{xy}$$

$$2. (x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

$$3. \frac{dx}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{y^2 + x^2}}\right)dy = 0$$

$$4. (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1$$

$$5. y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}, \quad y|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$$

答案

$$1. x + C = \sqrt{xy}$$

$$2. y^2 = x^2 \ln(Cx^2)$$

$$3. x + \sqrt{y^2 + x^2} = C$$

$$4. y^3 = y^2 - x^2$$

$$5. \sin \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x$$

三、一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

若 $Q(x) \neq 0$, $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ (1)

-----一阶非齐次线性微分方程

若 $Q(x) = 0$, $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ (2)

-----对应于 (1) 的齐次线性微分方程

方程 (2) 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

两边积分,

$$\int \frac{dy}{y} = \int -P(x)dx$$

得:

$$\ln |y| = -\int P(x)dx + C_1$$

其通解为:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

如何解 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$?

常数变易法:

设 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 为 (1) 的解, $u(x) = ?$

将 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入 (1), 得:

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)e^{-\int P(x)dx}[-P(x)] + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

即 $u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$, $u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$.

求得 (1) 的通解为:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

$Ce^{-\int P(x)dx}$ ————— 对应的齐次方程的通解

$e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$ ————— 该方程的特解

5. 求方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解。

解 法1 常数变易法

先求对应齐次方程的通解

对应齐次方程为 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0$

分离变量得 $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln C$

其通解为 $y = C(x+1)^2$.

设原方程通解为 $y = u(x)(x+1)^2$ (3)

则 $y' = u'(x+1)^2 + 2u(x+1)$ (4)

将 (3) 式与 (4) 式代入原方程, 整理得

$$u' = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

两端积分得，待定函数为

$$u = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

原方程通解为 $y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right]$

法2 公式法

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}, \quad P(x) = -\frac{2}{x+1}, \quad Q(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

$$= e^{\int \frac{2}{1+x} dx} \left(\int (1+x)^{\frac{5}{2}} e^{-\int \frac{2}{1+x} dx} dx + C \right)$$

$$= (1+x)^2 \left(\int (1+x)^{\frac{5}{2}} (1+x)^{-2} dx + C \right) = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right]$$

$$6. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$$

解

$$\frac{dx}{dy} - \cos y \cdot x = \sin 2y$$

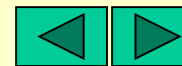
$$x = e^{-\int P(y)dy} \left[\int Q(y)e^{\int P(y)dy} dy + C \right]$$

$$= e^{\int \cos y dy} \left[\int \sin 2y e^{\int -\cos y dy} dy + C \right]$$

$$= e^{\sin y} \left[\int \sin 2y e^{-\sin y} dy + C \right]$$

$$= e^{\sin y} \left[-2(1 + \sin y)e^{-\sin y} + C \right]$$

$$= -2(1 + \sin y) + Ce^{\sin y}$$



伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1) \quad (6)$$

可化为 $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$

引入新的未知函数 $z = y^{1-n}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx},$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} y^n \frac{dz}{dx},$$

代入 (6) 式, 可将伯努利方程化为一阶线性微分方程:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

求出此方程的通解后, 以 y^{1-n} 代 z , 便得方程 (6) 的通解。

7. 求方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2$ 的通解。

解 令 $z = y^{1-2} = y^{-1}$,

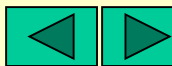
$$\text{得 } \frac{dz}{dx} + (1-2)\frac{1}{x}z = (1-2)a(\ln x)$$

$$\text{即 } \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -a(\ln x)$$

$$\text{该方程通解为 } z = x \left[C - \frac{a}{2}(\ln x)^2 \right]$$

$$\text{以 } y^{-1} \text{ 代 } z, \text{ 得所求方程通解为: } yx \left[C - \frac{a}{2}(\ln x)^2 \right] = 1$$

注 利用变量替换把一个较复杂的微分方程化为较简单的微分方程，是解微分方程的一种常用方法。



8. 解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$.

解 法1 把方程变形为 $\frac{dx}{dy} = x + y$,

$\frac{dx}{dy} - x = y, P(y) = -1, Q(y) = y$ 一阶线性微分方程 (解略)。

法2 令 $x + y = u$, 则 $y = u - x$, 代入原方程得 $\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}$

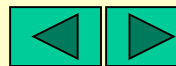
分离变量得 $\frac{u}{u+1} du = dx \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = dx$

两端积分得 $u - \ln|u+1| = x + C$

以 $u = x + y$ 代入即得原方程通解为

$$y - \ln|x+y+1| = +C$$

9. $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$ 提示: 令 $xy = u, y = \frac{1}{x} e^{Cx}$



练习3

$$1. (x^2 + 1)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$$

$$2. \frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$3. y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0$$

$$4. y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1, \quad y|_{x=1} = 0$$

$$5. y' + 2xy = 2x^3 y^3$$

$$6. y' = \cos(x - y)$$

$$7. (x + y)^2 y' = a^2$$

$$8. y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2 y^2)dy = 0$$

答案

$$1. y = (1 + x^2)(x + C)$$

$$2. s = C e^{-\sin t} + \sin t - 1$$

$$3. 2x \ln y = (\ln y)^2 + C$$

$$4. y = x^2 (1 - e^{\frac{1}{x}-1})$$

$$5. y^{-2} = C e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$$

$$6. -\cot \frac{x - y}{2} = x + C$$

$$7. y - a \arctan \frac{x + y}{a} = C$$

$$8. 2x^2 y^2 \ln y - 2xy - 1 = C x^2 y^2$$

