姓名　　学号　　级　　专业　　学院

密　封　线

高等数学 ch3　微分中值定理与导数应用　　测试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

得分	阅卷人

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1.设$f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是_____.

(A) $f(0)$是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$是极小值　　(B) $f(0)$是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$是极大值

(C) $f(0)$是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极大值　　(D) $f(0)$是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$也是极小值

2. 函数 $y=2\ln\frac{x+3}{x}-3$ 的水平渐近线方程为_____.

(A) $y=2$　(B) $y=1$　(C) $y=-3$　(D) $y=0$

3.设 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+1$ 的拐点，则______.

(A) $\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$　(B) $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$　(C) $\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$　(D) $\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$

4.设$f(x)$有二阶导数连续，且$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，

则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$______.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 设$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点$x=a$处______.

(A) $f(x)$的导数存在，且$f'(a)\neq 0$　(B) $f(x)$取得极大值

(C) $f(x)$取得极小值　　(D) $f(x)$的导数不存在

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1. 设 $f''(x)$ 在 $x=a$ 点附近连续，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=$_____.

2.$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x)=$_____.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=$_____.

4.$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=$______.

5.函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$在$(0,+\infty)$的单调性为_____.

得分	阅卷人

三、计算、证明题

(1-5 题每题 5 分，第 6-10 题每题 7 分，第 11 题 10 分，共 70 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<0\\ x\arctan x, & x\geq 0\end{cases}$，

求：(1) $f'(0)$; (2) 确定 $f(x)$ 的单调增减区间

2.求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x\cos\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

姓名______ 学号______ 级______ 专业______ 学院______

3.设 $x>0$，常数 $a>\mathrm{e}$，证明：$(a+x)^a<a^{a+x}$.

4.设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$.试证：至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=f'(\xi)$

5.设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解，若$f(x_0)>0$，且$f'(x_0)=0$，试判定x_0是否是$f(x)$的极值点？如果x_0为$f(x)$的极值点，是极大值点，还是极小值点？

6. 在抛物线$y=x^2$(第一象限部分，$0<x<8$)上求一点，使过该点的切线与直线 $y=0$, $x=8$相交所围成的三角形的面积为最大.

7.设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明:$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

姓名　　学号　　级　　专业　　学院

8.设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|<1$.又$f^2(0)+[f'(0)]^2=4$.
试证在（$-2,2$）内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

9.设函数$y=f(x)$的二阶导数连续，且$f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，
求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中$u$是曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线在$x$轴上的截距.

10.现要设计一个容积为V的圆柱体容器. 已知上下两底的材料费为单位面积a元，而侧面的材料费为单位面积b元. 试给出最节省的设计方案，即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？

11.设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.
证明:(1)存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi)=\xi$；(2)存在$\eta\in(0,\xi)$使得，$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

学院　　专业　　级　　学号　　姓名

四、附加题（1-3 题每题 4 分，4 题 8 分，共 20 分）

1.试确定常数 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$.

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的连续性.

3. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n\ge 3)$.

4. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，

求 $f(0), f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值.