第四章 一元函数积分学测试题

满分：100 分　时间：120 分钟

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{x}\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$，则 I_1，I_2，I_3 的关系是______.

(A) $I_1>I_2>I_3$ (B) $I_1>I_3>I_2$ (C) $I_3>I_1>I_2$ (D) $I_2>I_1>I_3$

2.极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2u^2}\mathrm{d}u}=$__________.

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) $\dfrac{1}{2}$

3. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，则$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=$______.

(A) $1+\cos 1-\ln 2+\ln 3$ (B) $1-\cos 1+\ln 2-\ln 3$

(C) 0 (D) $1-\cos 1-\ln 2+\ln 3$

4. 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$______.

(A) $f(x^2)$. (B) $f(x^2)$. (C) $xf(x^2)$ (D) 0

5.已知 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则$f(x)=$______.

(A) $x^2+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}$ (B) $x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$ (C) $x^2-\dfrac{4}{3}x+1$ (D) x^2

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1. 不定积分$\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=$__________.

2. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x=$_______.

3. $\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=$_______.

4. 已知 $\int_0^{\ln a}\mathrm{e}^x\sqrt{3-2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，则 a 的值为______.

5. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有连续的二阶导数,且$f(0)=2$, $f(2)=4$, $f'(2)=6$, 则 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x=$______.

三、计算、证明题(第 1 题 10 分，2-11 题每题 6 分，共 70 分)

1.计算不定积分：

(1) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$;； (2)$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$; (3)$\int \frac{\sin x\cdot\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

(4)$\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (5)$\int \frac{\arctan e^x}{e^x}\mathrm{d}x$.

2.计算不定积分:(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10} x-\cos^{10} x}{4-\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$; (2)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$

3.求 c 的值，使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\int_{-\infty}^{c} te^{2t}\mathrm{d}t$.

4.设函数 $g(x)$ 连续,且 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\mathrm{d}t$,求 $f'(x)$.

5.设 $f(x)\in C\ (-\infty\ ,\ +\infty)$,且 $F(x)=\int_0^x (2t-x)f(t)\mathrm{d}t$

试证：若 $f(x)$ 是偶函数,则 $F(x)$ 也是偶函数.

6.设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

7.求最小的实数C，使得满足$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数$f(x)$都有

$\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\le C$. (泰山学堂学生做)

8. 在抛物线$y=x^2(0\le x\le 1)$上找一点P ，使经过P的水平直线与抛物线和直线$x=0$ ，$x=1$围成的区域的面积最小.

9. 设可微函数$f(x)$在$x>0$上有定义，其反函数为$g(x)$且满足

$\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$,试求$f(x)$.

10. 设D_1是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a$ ，$x=2$及$y=0$所围成的平面区域；

D_2是由抛物线$y=2x^2$及直线$y=0$，$x=a$所围成的平面区域，其中$0<a<2$

(1) 试求D_1绕x轴旋转而成的旋转体体积V_1 ；D_2绕y轴旋转而成的旋转体体积V_2 ；

(2) 问当a为何值时，V_1+V_2取得最大值？试求此最大值.

11. 设$f:[0,1]\to[-a,b]$连续，且$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$,证明：

$$0\le\frac{\int_0^1 f(x)dx}{b-a}\le\frac{1}{4}(\frac{a+b}{a-b})^2.$$ (泰山学堂学生做)

四、附加题（每题 4 分，共 20 分）

1. 求不定积分$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. 设$f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，计算$\int f(x)\mathrm{d}x$.

3. 计算不定积分$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\mathrm{d}x \quad (x>0)$

4. 求圆$x^2+(y-5)^2=16$绕x轴旋转所得旋转体的体积.

5. 设$f(x)=\ln x-\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$，证明：$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

答案: 第四章 一元函数积分学测试题

一、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1.D　2.C　3. D　4.C　5.B

详解:

1.解 (D) 因为当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}(<1)$ 时，$\sqrt{x}>x>\sin x$，

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{x}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$，即 $I_2>I_1>I_3$.

2. 解　(C)　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0.$

3. 解 (D)　设 $x-1=t$,则

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x+\int_0^1\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-\ln(2-x)\Big|_{-1}^{0}-\cos x\Big|_0^1=-(\ln 2-\ln 3)-\cos 1+1=1-\cos 1-\ln 2+\ln 3.$$

4. 解 (C)　令 $x^2-t^2=u$,则$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{du}=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{du}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{du}=xf(x^2).$$

5. 解 (B)　记 $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x=a,\ \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x=b$，则 $f(x)=x^2-ax+2b$,

分别代入前两式得 $\int_0^2(x^2-ax+2b)\ \mathrm{d}x=a,\int_0^1(x^2-ax+2b)\ \mathrm{d}x=b$

积分得 $(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2+2bx)\Big|_0^2=a$

即 $3a-4b=\dfrac{8}{3}$　　①

$(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2+2bx)\Big|_0^1=b$,

即 $a-2b=\dfrac{2}{3}$.　　②

由 ①、② 两式得 $a=\dfrac{4}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$，故 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

二、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1.$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-\dfrac{1}{x})+C$　或　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C.$

2.$\dfrac{4}{3}$　　3. $2(1-2\mathrm{e}^{-1}$　　4.$\dfrac{3}{2}$　　5.$\dfrac{5}{2}$

详解：

1. 解 $I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2+(x-\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})+C.$

或者 $I=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C.$$

2.解 因为 $\sqrt{\sin x-\sin^3 x}=\sqrt{\sin x\cos^2 x}=|\cos x|\sqrt{\sin x}$，而 $\cos x$ 在积分区间$[0，\pi]$ 上有不同符号，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $|\cos x|=\cos x$ ，在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上 $|\cos x|=-\cos x$，故

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\mathrm{d}\sin x=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{3}(1-0)-\frac{2}{3}(0-1)=\frac{4}{3}.$$

3.解 $\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-2\int_0^1 x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-2[x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x]=2(1-2\mathrm{e}^{-1}).$$

4. 解 $\int_0^{\ln a}\mathrm{e}^x\sqrt{3-2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\ln a}\sqrt{3-2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(3-2\mathrm{e}^x)$

令 $3-2\mathrm{e}^x=t$，所以 $\int_0^{\ln a}\mathrm{e}^x\sqrt{3-2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_1^{3-2a}\sqrt{t}\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{3-2a}=-\frac{1}{3}\cdot[\sqrt{(3-2a)^3}-1],$$

由 $\int_0^{\ln a}\mathrm{e}^x\sqrt{3-2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，故 $-\frac{1}{3}\cdot[\sqrt{(3-2a)^3}-1]=\frac{1}{3}.$

即 $\sqrt{(3-2a)^3}=0$，也即 $3-2a=0$，故 $a=\frac{3}{2}.$

5.解　令　$2x=u$，则

$$\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{u}{2}f''(u)\frac{1}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\int_0^2 uf''(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\int_0^2 u\mathrm{d}f'(u)$$

$$=\frac{1}{4}(uf'(u)|_0^2-\int_0^2 f'(u)\mathrm{d}u)=\frac{1}{4}(2f'(2)-f(u)|_0^2)=\frac{5}{2}.$$

三、计算、证明题(第 1 题 10 分，2-11 题每题 6 分，共 70 分)

1. 解　(1)$\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}(x\ln x)=-\frac{1}{x\ln x}+\mathrm{C}$

(2)$\int\frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x(1+x\mathrm{e}^x)}$

$\underline{\underline{u=x\mathrm{e}^x}}\int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}=\int(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u})\mathrm{d}u=\ln\frac{u}{1+u}+\mathrm{C}=\ln\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x\mathrm{e}^x}+\mathrm{C}$

(3)$\int\frac{\sin x\cdot\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{(\cos^2 x+1-1)\cos x\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x}$

$=-\int(\cos x-\frac{\cos x}{1+\cos^2 x})\mathrm{dcosx}=-\frac{1}{2}[\cos^2 x-\ln(1+\cos^2 x)]+\mathrm{C}$

(4)$\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+x^2)\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\mathrm{C}$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\mathrm{C}$

(5)$\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\arctan\mathrm{e}^x$

$=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})+\mathrm{C}$

2. 解(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}\mathrm{d}x\ \underline{\underline{x=\frac{\pi}{2}-t}}\ -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^{10}t-\sin^{10}t}{4-\cos t-\sin t}\mathrm{d}t$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}\mathrm{d}x=0$$

(2)　$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\ \underline{\underline{x=-t}}\ -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin^4(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 t}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$

$\therefore\ 2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\pi,$

即　$I=\frac{3}{16}\pi.$

3. 解 因为左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1+\dfrac{c}{x}}{1-\dfrac{c}{x}}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{x}{c})^x}{(1-\frac{x}{c})^x}=\dfrac{e^c}{e^{-c}}=e^{2c}$

右边 $=\lim\limits_{b\to-\infty}\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt=\lim\limits_{b\to-\infty}\dfrac{1}{2}\int_b^c tde^{2t}=\lim\limits_{b\to-\infty}(\dfrac{1}{2}te^{2t}\Big|_b^c-\dfrac{1}{2}\int_b^c e^{2t}dt)$

$$=\lim_{b\to-\infty}(\frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{2}be^{2b}-\frac{1}{4}e^{2t}\Big|_b^c)=\lim_{b\to-\infty}(\frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{2}be^{2b}-\frac{1}{4}e^{2c}+\frac{1}{4}e^{2b})$$

$$=\frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{4}e^{2c}-\frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty}\frac{b}{e^{-2b}}+\frac{1}{4}\lim_{b\to-\infty}e^{2b}$$

$$=\frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{4}e^{2c}-\frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty}\frac{b}{e^{-2b}}=\frac{1}{2}(c-\frac{1}{2})e^{2c}$$

所以 $e^{2c}=\dfrac{1}{2}(c-\dfrac{1}{2})e^{2c}$，又 $e^{2c}\neq 0$，故 $\dfrac{1}{2}(c-\dfrac{1}{2})=1$，$c=\dfrac{5}{2}$.

4. 解 变限积分求导数时,若被积函数中含有积分上限 x,应先通过化简将 x 提到积分号外,再对被积函数只含积分变量 t 形式的积分求导.

因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2g(t)dt=\dfrac{x^2}{2}\int_0^x g(t)dt-x\int_0^x tg(t)dt+\dfrac{1}{2}\int_0^x t^2g(t)dt$

所以 $f'(x)=x\int_0^x g(t)dt+\dfrac{x^2}{2}g(x)-\int_0^x tg(t)dt-x^2g(x)+\dfrac{x^2}{2}g(x)$

$=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt.$

5. 证 $F(-x)=\int_0^{-x}(2t+x)f(t)dt\underline{\underline{t=-u}}\int_0^x(-2u+x)f(-u)d(-u)$

$$=\int_0^x(2u-x)f(-u)du=\int_0^x(2u-x)f(u)du$$

$$=\int_0^x(2t-x)f(t)dt=F(x)$$ 得证.

6.解：因为 $s>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}x^n=0$，所以

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^nde^{-sx}=-\frac{1}{s}\left[x^ne^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}dx^n\right]=\frac{n}{s}I_{n-1},$$

由此得到

$$I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\frac{n!}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

7. **解**　由于$\int_0^1\left|f(\sqrt{x})\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|f(t)2t\right|\mathrm{d}t\le 2\int_0^1\left|f(t)\right|\mathrm{d}t=2$

另一方面，取$f_n(x)=(n+1)x^n$，则$\int_0^1\left|f_n(x)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$，而

$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 tf_n(t)\mathrm{d}t=2\dfrac{n+1}{n+2}=2(1-\dfrac{1}{n+2})\to 2\ \ (n\to\infty)$，

因此最小的实数$C=2$.

8.解 区域 D 分成两部分 D_1 ，D_2，抛物线上点 P 的坐标为 $(t，t^2)(0\le t\le 1)$，则 D_1 的面积

$$A_1=\int_0^t(t^2-x^2)\mathrm{d}x=\left(t^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^t=\frac{2}{3}t^3,$$

D_2 的面积 $A_2=\int_t^1(x^2-t^2)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}-t^2x\right)\Big|_t^1=\dfrac{2t^3}{3}-t^2+\dfrac{1}{3}$.

所以 D 的面积 $A(t)=A_1+A_2=\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}(0\le t\le 1)$.

问题是求函数$A(t)$在区间$[0,1]$上的最小值.为此，先求$A(t)(0\le t\le 1)$的极值.

$$A'(t)=4t^2-2t，A''(t)=8t-2.$$

函数$A(t)$连续，无不可导点，在$(0,1)$中有惟一的驻点.$t_0=\dfrac{1}{2}$.由于$A''(t_0)=2>0$，

故t_0是极小值点，从而$A(t_0)=\dfrac{1}{4}$是$A(t)$在$(0,1)$上惟一的极小值，因此也是最小值，

这时的点P为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

9. 解：在原式中令$f(x)=1$得$x^{\frac{3}{2}}-8=0$,解得$x=4$,即$f(4)=1$.

设$t=f(x)$，反函数为$x=f^{-1}(t)$，故$g(t)=f^{-1}(t)$，则

$\int_1^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=\int_1^{f(x)}f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_4^x x\mathrm{d}f(x)(f(4)=1)$

$=xf(x)|_4^x-\int_4^x f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-4-\int_4^x f(x)\mathrm{d}x,$

于是$xf(x)-4-\int_4^x f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$.

两边对x求导得　$xf'(x)+f(x)-f(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$,

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，　$f(4)=1$.

积分得$f(x)=\sqrt{x}+C$,由$1=2+C$，解得$C=-1$,

于是所求函数为$f(x)=\sqrt{x}-1$.

10. 解 (1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{5}(32-a^5)\pi$

$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4$

(2) 设 $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$

由 $V'=4\pi a^3(1-a)=0$ 得区间 $(0,2)$ 内的唯一驻点 $a=1$.

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$; 当 $a>1$ 时，$V'<0$.因此 $a=1$ 是极大值点即最大值点，

此时 V_1+V_2 取得最大值且等于 $\frac{129}{5}\pi$.

11. 证：由$-a\le f(x)\le b$可得，$-\frac{a+b}{2}\le f(x)-\frac{b-a}{2}\le\frac{a+b}{2}$,

于是 $0\le(f(x)-\frac{b-a}{2})^2\le(\frac{a+b}{2})^2$.

所以 $0\le\int_0^1(f(x)-\frac{b-a}{2})^2dx\le(\frac{a+b}{2})^2$.

即$0\le\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-(b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{(b-a)^2}{4}\le\frac{(a+b)^2}{4}$.

将$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$代入上式，得

$0\le-(b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{(b+a)^2}{4}\le\frac{(b+a)^2}{4}$.

即$0\le(b-a)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b+a)^2}{4}$.

所以$0\le\frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b+a)^2}{4(b-a)^2}=\frac{1}{4}(\frac{a+b}{a-b})^2$.

四、附加题（每题 4 分，共 20 分）

1. $2(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln x+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x})+C$

2. $x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^{x})+C$

3. $x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C$

4. $160\pi^2$

5. 证明提示：设 $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x=I$ ，通过变形后解方程求定积分．请补充完整