

Ćwiczenie 8

Pomiary zniekształceń nieliniowych i analiza widmowa sygnałów

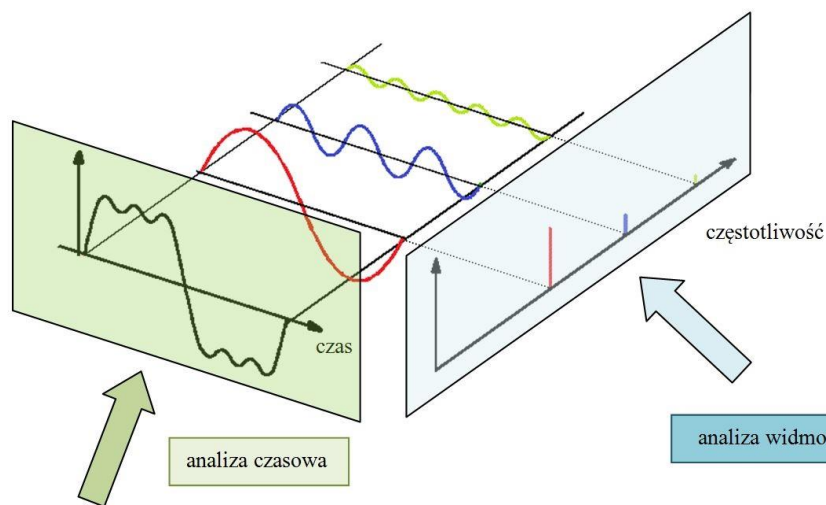
8.1. Wprowadzenie – widmowa reprezentacja sygnałów

Przebiegi elektryczne, którymi zajmuje się elektrotechnika i elektronika mogą być analizowane w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości. Analiza przebiegu w dziedzinie czasu to analiza postaci i parametrów funkcji opisującej zależność najczęściej napięcia lub prądu od czasu. Podstawowym narzędziem służącym do przeprowadzenia eksperymentów tego typu jest oscyloskop. Dzięki analizie przeprowadzanej za jego pomocą możliwe są pomiary szeregu parametrów jak czas narastania i opadania, amplituda i okres oscylacji pojawiających się na zboczach impulsów i wiele innych. Analiza przeprowadzana w dziedzinie czasu jest jednak współcześnie bardzo często uzupełniana lub nawet zastępowana analizą widmową, która daje osobie wykonującej pomiary dodatkowe możliwości bardziej dogłębnego poznania własności badanego przebiegu. Stąd na przykład większość produkowanych współcześnie oscyloskopów cyfrowych posiada dodatkową opcję właśnie analizy widmowej. Zakres zastosowań analizy widmowej obejmuje pomiary wykonywane na potrzeby oceny modulacji, zniekształceń wnoszonych przez odbiorniki i nadajniki w systemach łączności oraz pomiary szumów wytwarzanych przez urządzenia.

Podstawą analizy widmowej jest teoria Fouriera, zgodnie z którą występujące w praktyce przebiegi elektryczne mogą być ekwiwalentnie zastąpione sumą przebiegów sinusoidalnych (zwanych harmonicznymi) o ściśle określonych parametrach, do których należą: częstotliwość, amplituda i faza początkowa. Zestawienie wszystkich amplitud przebiegów sinusoidalnych tworzących badany przebieg elektryczny oraz ich faz początkowych w funkcji częstotliwości tworzy tzw. widma, kolejno – amplitudowe i fazowe. Celem analizy widmowej jest wyznaczenie widma i ocena własności przebiegu przez pryzmat takiej właśnie reprezentacji. W wyniku analizy widmowej eksperymentator poznaje składowe harmoniczne tworzące sygnał, tzn. określa w sposób ilościowy wymienione wyżej ich parametry. Porównanie zobrazowania uzyskiwanego w analizie czasowej i widmowej dla przypadku widma amplitudowego przedstawia rys. 8.1.

Niestety, teoria Fouriera nie zapewnia uniwersalnego narzędzia możliwego do wykorzystania przy wyznaczaniu widma dowolnego przebiegu elektrycznego. Wprost przeciwnie – wprowadza różne metody, zależne od klasy przebiegu czasowego. Inne metody będą obowiązywały dla przebiegów okresowych, inne dla przebiegów jednokrotnych a jeszcze inne dla przebiegów dyskretnych, uzyskiwanych za pomocą próbkowania. Poszczególne metody są rozpatrywane w kategoriach teoretycznych za pomocą przekształceń matematycznych tworzących tzw. pary

transformat Fouriera. Pary transformat umożliwiają przejście z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości (transformata prosta) i z powrotem – z dziedziny częstotliwości do dziedziny czasu (transformata odwrotna).



Rys. 8.1. Ilustracja różnicy i związków pomiędzy analizą czasową a analizą widmową (przedstawione widmo jest widmem amplitudowym)

Praktyczna implementacja w przyrządach pomiarowych transformat prostych dostarcza narzędzi nazywanych analizatorami widma. Analizatory te dzielą się na analizatory analogowe i cyfrowe. Pierwsze z nich pracują w czasie rzeczywistym, przez co ograniczone są w zasadzie do badania przebiegów wykazujących okresowość, która zapewnia ciągłość analizy i zobrazowania. Ich podstawową zaletą jest szeroki zakres częstotliwości pracy, dzięki czemu wykorzystywane są w licznych zastosowaniach obejmujących produkcję i serwis sprzętu telekomunikacyjnego i teleinformatycznego, radarowego, systemów telewizji kablowej, telefonii komórkowej, diagnostyce interferencji elektromagnetycznych EMI itp. Analizatory cyfrowe, dzięki próbkowaniu przebiegu i zapisu wartości jego próbek do pamięci, umożliwiają dodatkowo analizę widmową przebiegów jednokrotnych. Wyznaczanie widma w analizatorze cyfrowym odbywa się na drodze operacji matematycznych wykonywanych przez maszynę cyfrową (mikroprocesor). Zaawansowane konstrukcje cyfrowe zapewniają tym samym również analizę widmową przebiegów o charakterze losowym oraz przebiegów o widmie zmiennym w czasie. Ze względu na ograniczone moce obliczeniowe współczesnej techniki mikroprocesorowej, zakres częstotliwości pracy analizatorów cyfrowych jest jednak znacznie mniejszy od zakresu analizatorów analogowych.

Większość produkowanych współcześnie analizatorów widma ogranicza się do wyznaczenia widma amplitudowego, stąd określenie „widmo” w praktyce najczęściej odnosi się właśnie do tego pojęcia. Oddzielną klasę przyrządów, których zasada działania odwołuje się do pojęcia widma stanowią mierniki zniekształceń nieliniowych. W przeciwieństwie do analizatorów widma,

dostarczają one dla danego przebiegu jednej liczbowej miary, opisującej w sposób globalny stopień jego niepodobieństwa do przebiegu sinusoidalnego.

8.2. Analogowe analizatory widma

8.2.1. Podstawy matematyczne

Parą transformat Fouriera, dającą matematyczne podstawy konstrukcji analogowych analizatorów widma jest, wprowadzana na kursie obwodów i sygnałów elektrycznych, para transformat dla przebiegu ciągłego okresowego. Reprezentacja Fouriera przebiegu $u(t)$ okresowego o pulsacji ω_0 (która jest powiązana z częstotliwością za pomocą zależności $\omega_0 = 2\pi f_0$), formalnie wyrażona transformatą odwrotną, przyjmuje wówczas postać szeregu mogącego występować w jednej z trzech alternatywnych wersji:

- szereg trygonometryczny

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad (8.1)$$

- szereg sinusoidalny

$$u(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad (8.2)$$

- szereg wykładniczy

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (8.3)$$

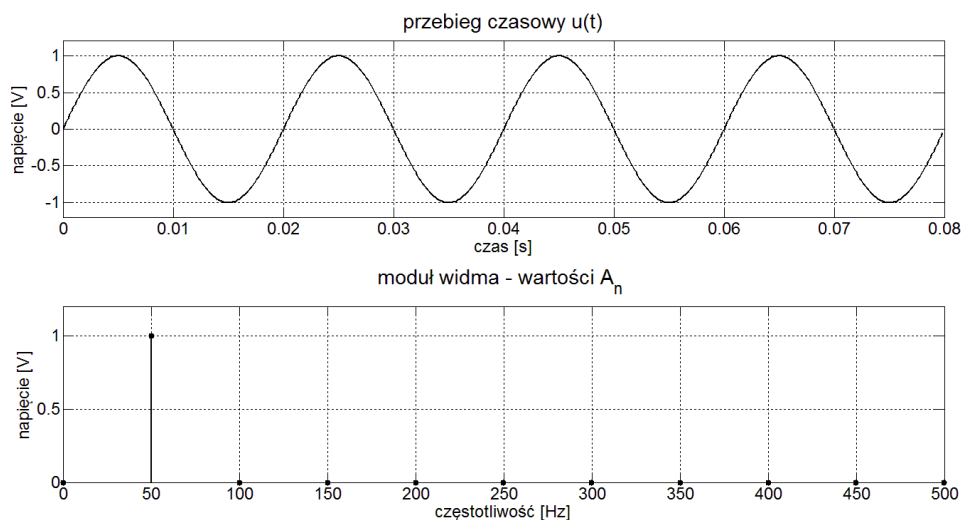
Z powyższych postaci wynika, że aby uzyskać rozpatrywany przebieg okresowy $u(t)$ o pulsacji ω_0 , należy wykonać operację sumowania nieskończonej liczby harmonicznym przebiegów rzeczywistych (szeregu harmonicznym) – wzory (8.1) i (8.2) lub harmonicznym przebiegów zespolonych – wzór (8.3) o pulsacjach przyjmujących wartości $k\omega_0$ będące całkowitą wielokrotnością pulsacji badanego przebiegu ω_0 . Z uwagi na tę wielokrotność, uzyskiwane widma są nazywane widmami dyskretnymi (prążkowymi). Informacji o tym, jakich należy użyć amplitud w szeregach (8.1), (8.2) i (8.3) oraz dodatkowo faz początkowych w szeregu sinusoidalnym (8.2) dostarcza formalnie transformata prosta, która bazuje na analizowanym sygnale $u(t)$ i dla przedstawionych powyżej wersji transformat odwrotnych jest wyrażona następującymi wzorami:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega_0 t \cdot dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega_0 t \cdot dt \quad (8.4)$$

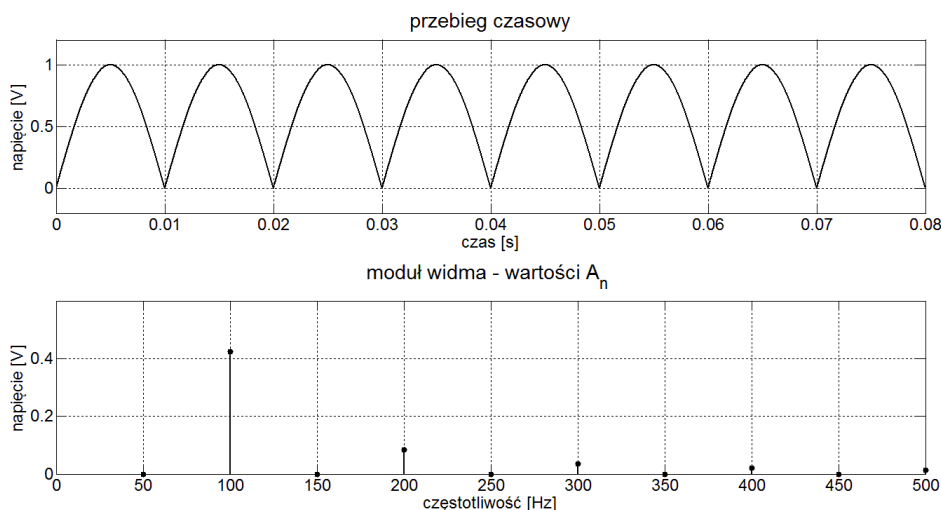
$$A_0 = a_0, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \quad (8.5)$$

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}. \quad (8.6)$$

Przykładowe wyniki rozwinięcia w szeregi sinusoidalne (8.2) sygnałów o zadanej postaci czasowej $u(t)$, czyli wyniki ich analiz widmowych zrealizowanych w oparciu o wzór (8.5) na A_n , przedstawiają rysunki 8.2 i 8.3.



Rys. 8.2. Przebieg czasowy napięcia sinusoidalnego o częstotliwości 50 Hz i odpowiadające mu widmo amplitudowe. Zwraca uwagę fakt, że widmo idealnego przebiegu sinusoidalnego posiada dokładnie jeden prążek na częstotliwości będącej odwrotnością jego okresu

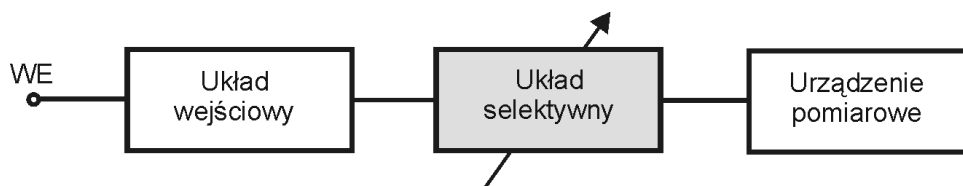


Rys. 8.3. Przebieg czasowy napięcia sinusoidalnego z rys. 8.2 po wyprostowaniu i odpowiadające mu widmo amplitudowe. Zwraca uwagę fakt, że analiza widmowa wykrywa zwiększenie częstotliwości przebiegu do 100 Hz z tytułu prostowania oraz obecność wyższych harmonicznych (200 Hz, 300 Hz, 400 Hz itd.) z tytułu odkształcenia badanego przebiegu od przebiegu sinusoidalnego

8.2.2. Konstrukcje analogowych analizatorów widma

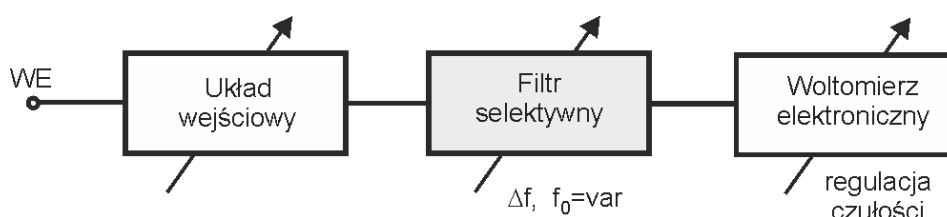
Ogólna idea budowy analizatorów analogowych polega na zastosowaniu analogowego układu selektywnego (wykorzystującego wąskopasmowy filtr pasmowo-przepustowy), którego

przeznaczeniem jest wyizolowanie harmonicznyc h o interesujących eksperymentatora częstotliwościach a następnie na pomiarze ich parametrów jak to zostało przedstawione na rys. 8.4.



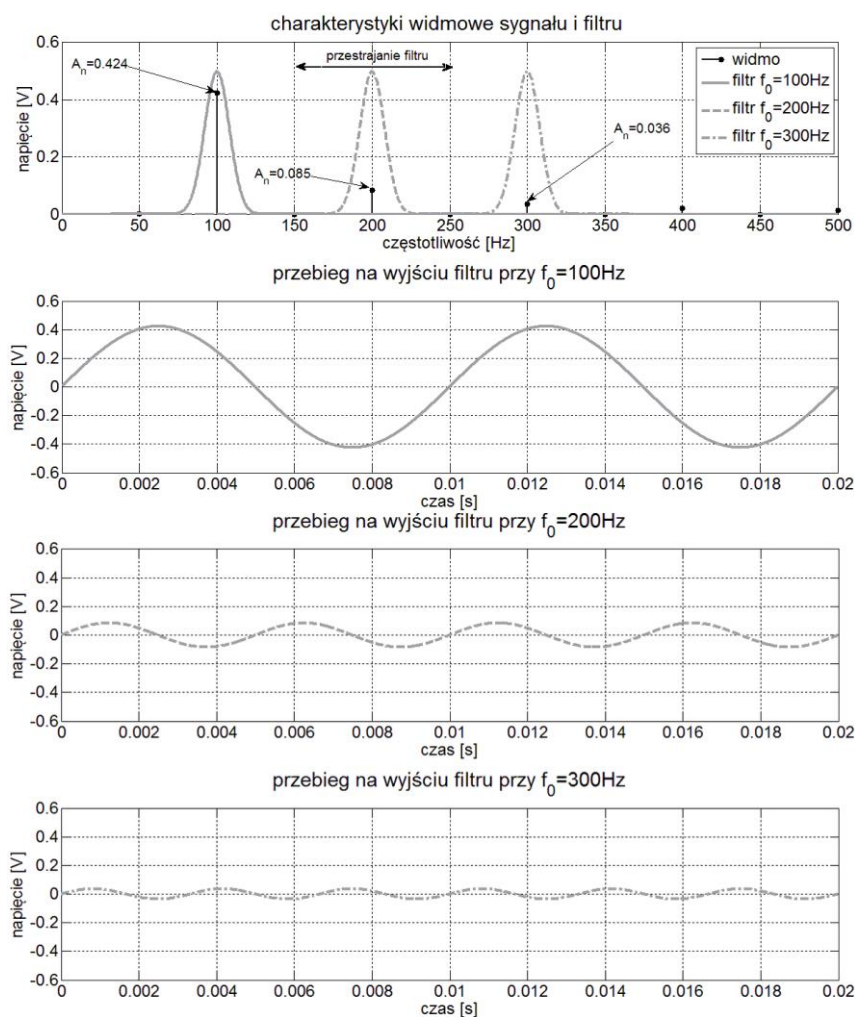
Rys. 8.4. Ogólna idea działania analogowego analizatora widma

Rolą układu wejściowego jest zapewnienie odpowiedniego dopasowania przyrządu do badanego układu oraz wymaganej czułości. Jako urządzenie pomiarowe może być stosowany woltomierz lub odpowiednioysterowana lampa oscyloskopowa (najczęściej wbudowana w przyrząd). Rozwiązania koncepcyjnie najprostsze, w których układem selektywnym jest pojedynczy przestrajany ręcznie filtr pasmowo-przepustowy – rys. 8.5 lub nawet zestaw filtrów przestrajanych w podzakresach, są współcześnie rzadko stosowane i występują w konstrukcjach selektywnych woltomierzy, zwanych też analizatorami harmonicznymi. Idea pomiaru wykonywanego takim urządzeniem jest przedstawiona na rys. 8.6.



Rys. 8.5. Struktura blokowa analizatora harmonicznyc h

Dokonując przestrojenia częstotliwość filtru f_0 należy znaleźć lokalne, maksymalne wskazania woltomierza elektronicznego. W zależności od rozwiązania będą to wartości skuteczne lub szczytowe kolejnych harmonicznyc h. Odczytu wartości ich częstotliwości dokonuje się z regulatora filtru. Dokładność pomiaru napięcia będzie zależała od dokładności woltomierza, pasma przenoszenia filtru oraz od dokładności dostrojenia filtru do częstotliwości harmonicznej (dokładność ustawienia maksymalnego wskazania woltomierza). Dokładność pomiaru częstotliwości poszczególnych składowyc h widma będzie z kolei zależeć od dokładności skalowania regulatora filtru i również od dokładności jego dostrojenia do częstotliwości harmonicznej. Powodem małej popularności takich rozwiązań, oprócz kłopotliwego dostrajania do harmonicznyc h, są problemy z konstrukcją filtru, którego własności nie powinny zmieniać się w zakresie częstotliwości przestrajania. Filtry takie mają złożoną strukturę, która sprawia, że koszt całego urządzenia jest wysoki.

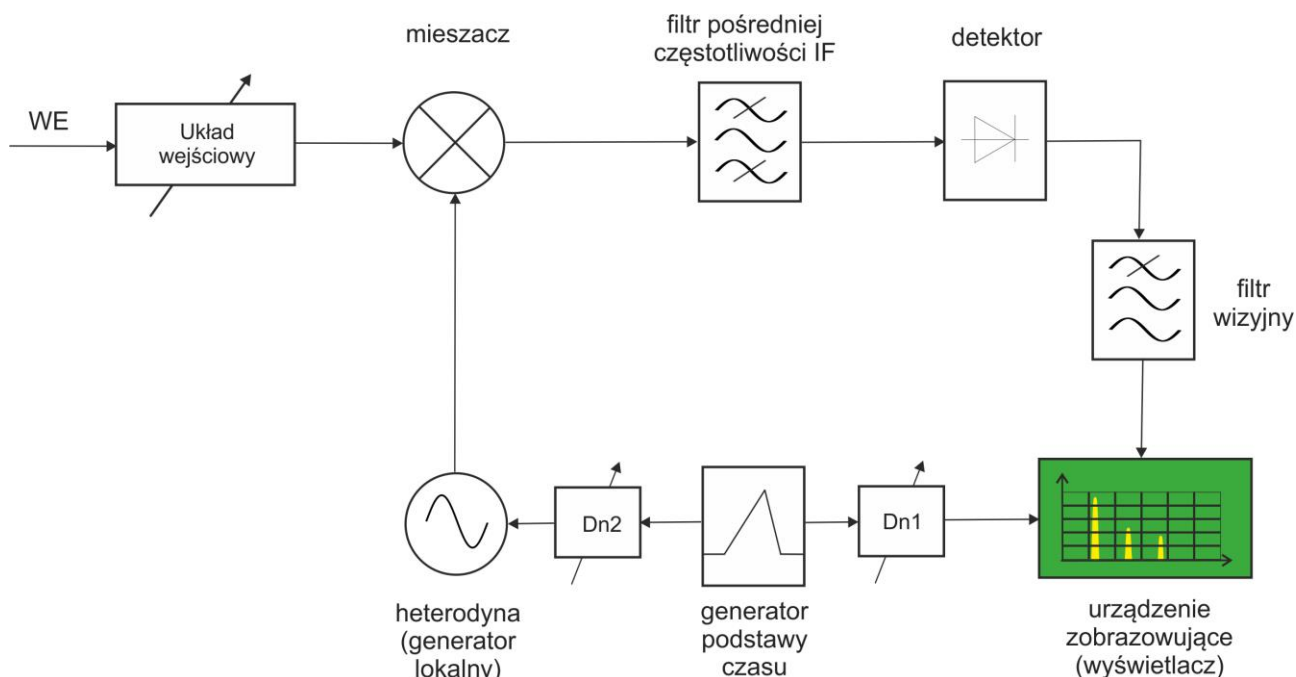


Rys. 8.6. Przebiegi ilustrujące zasadę działania analizatora harmonicznego

Znacznie łatwiejszym, a przez to tańszym rozwiązaniem jest rozwiązanie, w którym zasada pracy jest odwrócona: stosuje się prosty filtr pasmowo-przepustowy, zwany filtrem pośredniej częstotliwości, skonstruowany na jedną częstotliwość środkową, na wejście którego podawany jest sygnał badany o „przesuwany” w dziedzinie częstotliwości widmie. Strukturę takiego analizatora przedstawia rys. 8.7.

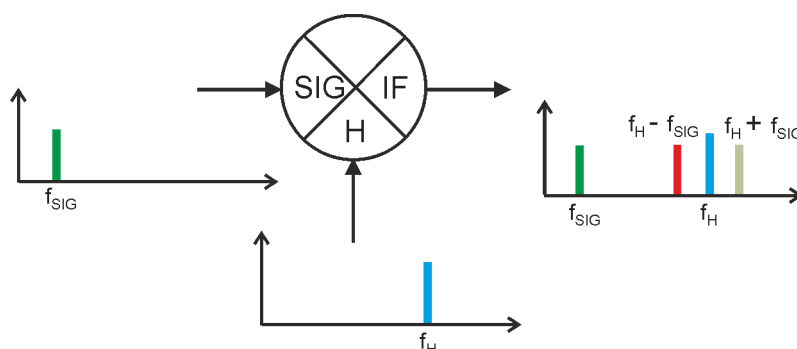
Aby zrozumieć zasadę działania przedstawionego urządzenia, wygodnie jest w pierwszym kroku prześledzić funkcjonowanie jego poszczególnych bloków, do których należą: generator podstawy czasu i generator lokalny zwany heterodyną, mieszacz, filtr pośredniej częstotliwości IF (ang. *Intermediate Filter*), detektor, filtr wizyjny i urządzenie zobrazowujące.

Generator lokalny (wbudowany w przyrząd) to generator przestrajany napięciem (VCO), który wraz z generatorem podstawy czasu odpowiadają za proces przestrajania analizatora. Częstotliwość sygnału wyjściowego generatora lokalnego podlega zmianie i zależy wprost proporcjonalnie od piłokształtnego napięcia generatora podstawy czasu.



Rys. 8.7. Struktura analogowego analizatora widma z przemianą częstotliwości

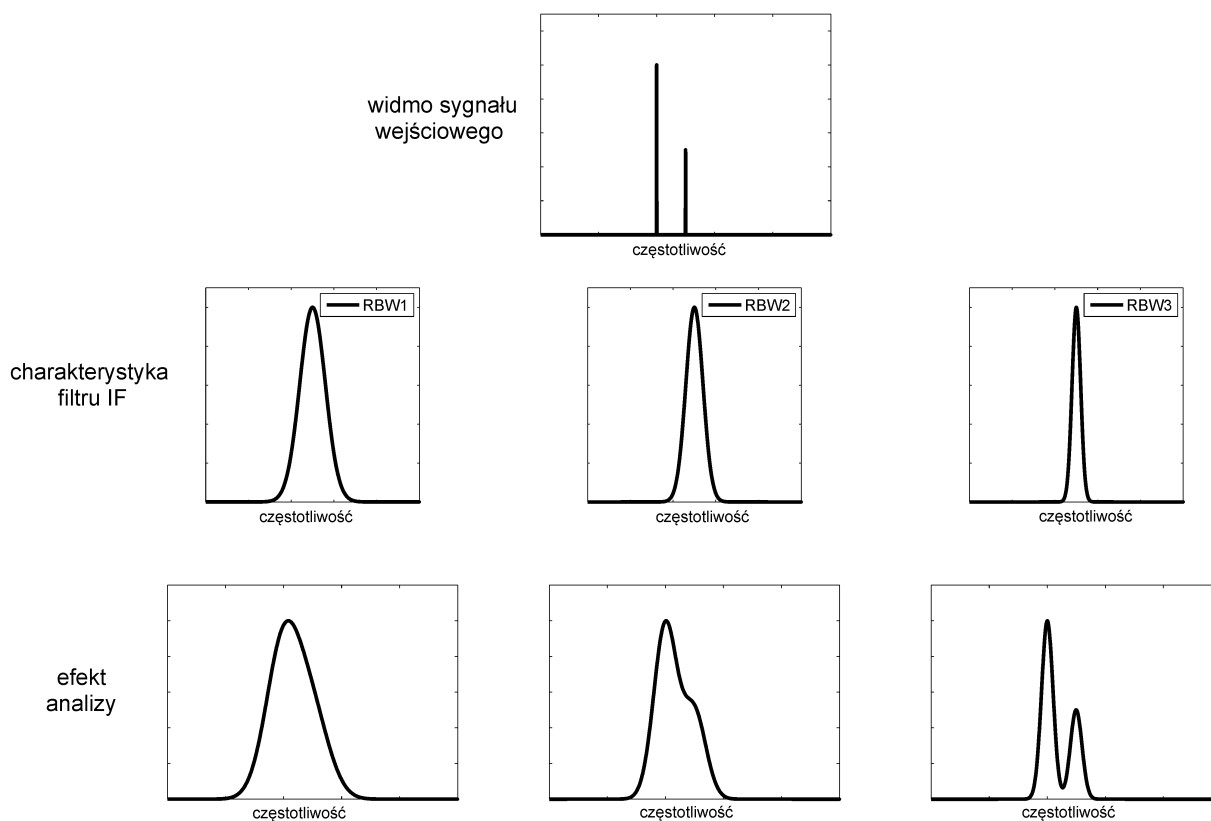
Mieszacz jest nieliniowym urządzeniem dwuwejściowym, którego zadaniem jest przeniesienie sygnału na inną częstotliwość. Do jednego z wejść dołączany jest analizowany przebieg, a do drugiego przebieg pochodzący z lokalnego generatora. Nieliniowość mieszacza sprawia, że na jego wyjściu pojawiają się przebiegi o częstotliwościach, które nie wystąpiły na wejściu. Oprócz składowych o częstotliwości przebiegów oryginalnych podawanych na wejścia f_{sig} i f_H , na wyjściu wystąpią również składowe o częstotliwości sumacyjnej ($f_H + f_{\text{sig}}$) oraz różnicowej ($f_H - f_{\text{sig}}$) – rys. 8.8. Jak się okaże, to właśnie składowa o częstotliwości różnicowej ma istotne znaczenie w funkcjonowaniu analizatora. Składowa ta jest nazywana sygnałem o częstotliwości pośredniej.



Rys. 8.8. Ilustracja funkcjonalności mieszacza

Filtr pośredniej częstotliwości IF jest filtrem pasmowo-przepustowym pełniącym rolę „okna” dla wykrywanych harmoniczných. Jego podstawowym parametrem jest szerokość pasma, często

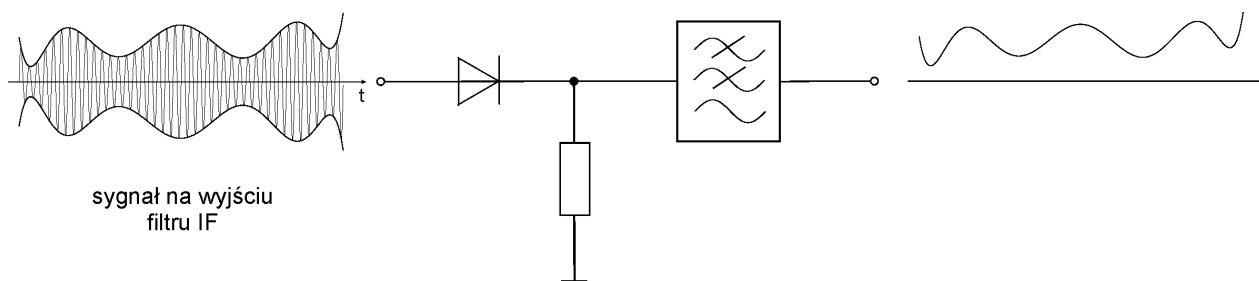
oznaczana na płytach czołowych analizatorów za pomocą skrótu RBW (ang. *Resolution Band Width*). W analizatorze występuje najczęściej możliwość wyboru spośród kilku filtrów o zróżnicowanych szerokościach RBW, co daje możliwość eksperymentalnego ustalenia pewnego kompromisu pomiędzy rozdzielczością w dziedzinie częstotliwości (zdolnością do wykrycia położonych blisko siebie składowych widma) a szybkością analizy. Należy mieć na uwadze fakt – rys. 8.9, że filtry o małej wartości RBW oferują lepszą selektywność (i z reguły lepszy stosunek sygnał-szum), ale kosztem szybkości analizy i tym samym szybkości odświeżania obrazu na ekranie wyświetlacza, np. lampy oscyloskopowej. Powodem jest czas trwania stanów nieustalonych w odpowiedzi filtru związany z koniecznością ładowania i rozładowania występujących w nim pojemności. Czas ten jest tym większy, im mniejsza jest szerokość pasma. Filtry o krótkim czasie trwania stanów nieustalonych mają szerokie pasmo przez co składowe widma występujące blisko siebie na osi częstotliwości będą na urządzeniu zobrazowującym „zlewać się” w jeden szeroki prążek.



Rys. 8.9. Ilustracja wpływu parametru RBW na zobrazowanie w analogowym analizatorze widma

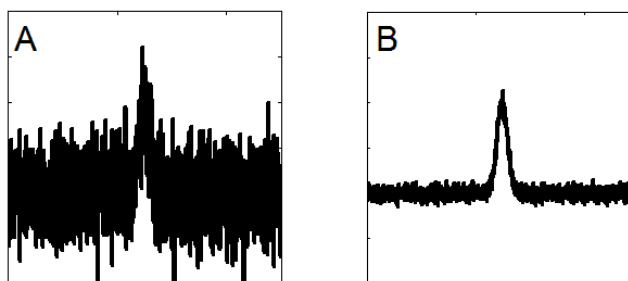
Detektor w klasycznych rozwiązaniach analizatorów analogowych jest detektorem obwiedni. Jego najprostszy układ, przedstawiony na rys. 8.10, składa się z diody, obciążenia rezystancyjnego oraz filtru dolnoprzepustowego. Dioda eliminuje („obcina”) napięcie ujemne a filtr dolnoprzepustowy wydziela z tak powstałego sygnału składową o najmniejszej częstotliwości. Dzięki temu, w przedstawionym przypadku przetwarzania sygnału z modulowaną amplitudą, sygnał odpowiedzi

detektora odtwarza jego obwiednię a nie wartość chwilową. W analizatorze analogowym dobiera się szerokość pasma filtru pośredniej częstotliwości tak, aby rozróżnić poszczególne harmoniczne występujące w sygnale (p. rys. 8.9). Odpowiedzią detektora obwiedni na sygnał harmoniczny będzie napięcie stałe o wartości równej amplitudzie tej harmonicznej.



Rys. 8.10. Struktura najprostszego detektora obwiedni

Filtr wizyjny (ang. *video filter*), poprzedzający wzmacniacz wizyjny redukuje wpływ szumów zawartych w analizowanym sygnale na zobrazowanie prążków widma. Jest to filtr dolnoprzepustowy umieszczony za detektorem obwiedni, którego częstotliwość graniczna jest mniejsza niż szerokość pasma filtru IF. Dzięki temu system zobrazowania nie nadąża za szybkimi zmianami obwiedni sygnału pośredniej częstotliwości spowodowanymi obecnością szumów w analizowanym sygnale. Efektem jest uzyskanie wygładzenia zobrazowania widma na ekranie lampy oscyloskopowej (śladu wykreślanego przez strumień). Niektóre z analizatorów oferują możliwość regulacji szerokości pasma filtru wizyjnego, co jest szczególnie istotne przy zobrazowaniu widma przebiegu silnie zaszumionego. Szerokość ta określana jest często na płytach czołowych za pomocą skrótów VBW (ang. *Video Band Width*). Dobór filtru o małym pasmie zapewnia wówczas zmniejszenie wartości międzyszczytowej w zobrazowaniu widma dając możliwość skutecznego wykrycia sygnałów występujących na tle szumów – rys. 8.11.



Rys. 8.11. Efekt wpływu szerokości pasma filtru wizyjnego na zobrazowanie widma sygnału zaszumionego: A – duża wartość VBW, B – mała wartość VBW

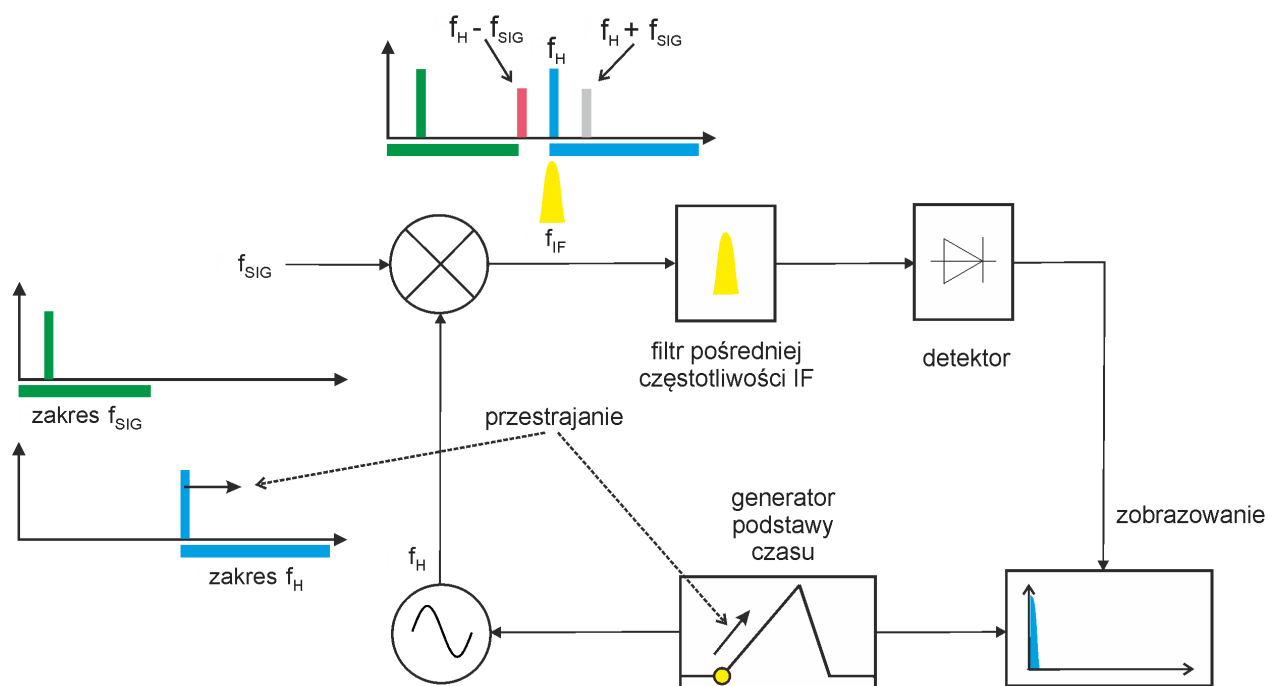
Działanie analizatora przedstawionego na rys. 8.7, uwzględniające własności powyższych bloków, można opisać w sposób następujący (przyjmując dla uproszczenia, że sygnał analizowany jest

sygnałem harmonicznym o częstotliwości f_{sig}). Sygnał wejściowy podlega operacji mieszania w mieszaczu z sygnałem generatora lokalnego, którego częstotliwość f_H zmienia się wraz ze zmianą napięcia generatora podstawy czasu, sterującego jednocześnie poziomym odchyleniem plamki na ekranie lampy oscyloskopowej. Do zmiany zakresu częstotliwości generatora lokalnego służy dzielnik napięcia DN1, natomiast dzielnik napięcia DN2 reguluje szerokość obrazu. Kierunek poziomy na ekranie odpowiada osi częstotliwości. Efekt mieszania w mieszaczu to sygnały harmoniczne o częstotliwościach f_{sig} i f_H , $(f_H + f_{\text{sig}})$ oraz $(f_H - f_{\text{sig}})$. Jeżeli zostanie poprawnie skonstruowany filtr IF oraz poprawnie dobrany zakres zmian częstotliwości heterodyny, to przesuwaną się na osi częstotliwości składowa $(f_H - f_{\text{sig}})$ osiągnie w pewnym momencie wartość częstotliwości środkowej filtru IF. Będzie to skutkowało obecnością napięcia stałego na wyjściu detektora oraz filtru wizyjnego i tym samym odchyleniem strumienia lampy oscyloskopowej w kierunku pionowym. Na ekranie lampy, w wyniku jednoczesnego działania napięcia z generatora podstawy czasu i napięcia na wyjściu filtru wizyjnego powstanie obraz prążka odpowiadającego częstotliwości analizowanego sygnału. Jeżeli sygnał wejściowy będzie zawierał wiele harmoniczných, to opisane powyżej operacje będą zachodzić dla każdej z nich. O wartości częstotliwości środkowej filtru IF oraz zakresie zmian częstotliwości heterodyny decyduje zakres pracy całego urządzenia (zakres analizy w dziedzinie częstotliwości). Należy przede wszystkim zauważyć, że częstotliwość filtru IF powinna być większa od zakresu pracy. W przeciwnym przypadku, gdyby np. dla zakresu $0 \div 3$ GHz ustalić częstotliwość filtru IF równą 1 GHz, to przy obecności w analizowanym sygnale składowej o częstotliwości $f_{\text{sig}} = 1$ GHz następowałoby jej ciągłe przenoszenie przez filtr IF i wynik na ekranie lampy oscyloskopowej byłby praktycznie niezależny od częstotliwości (p. ilustracja działania mieszacza na rys. 8.8). Ustalenie dla przyjętego powyżej zakresu pracy wartości częstotliwości filtru IF na poziomie np. 5 GHz zmienia całkowicie sytuację. Jeżeli częstotliwość startowa heterodyny wyniesie również 5 GHz, to przestrajając ją do wartości $5 \text{ GHz} + 3 \text{ GHz} = 8 \text{ GHz}$ uzyska się pokrycie zakładanego zakresu przestrajania $0 \div 3$ GHz. Można to uzasadnić prostymi obliczeniami, bazującymi na oczywistym założeniu, że częstotliwość składowej różnicowej musi być równa częstotliwości środkowej filtru IF $(f_H - f_{\text{sig}}) = f_0$. Dokonując przekształcenia tej zależności do postaci równania na przestrajanie heterodyny:

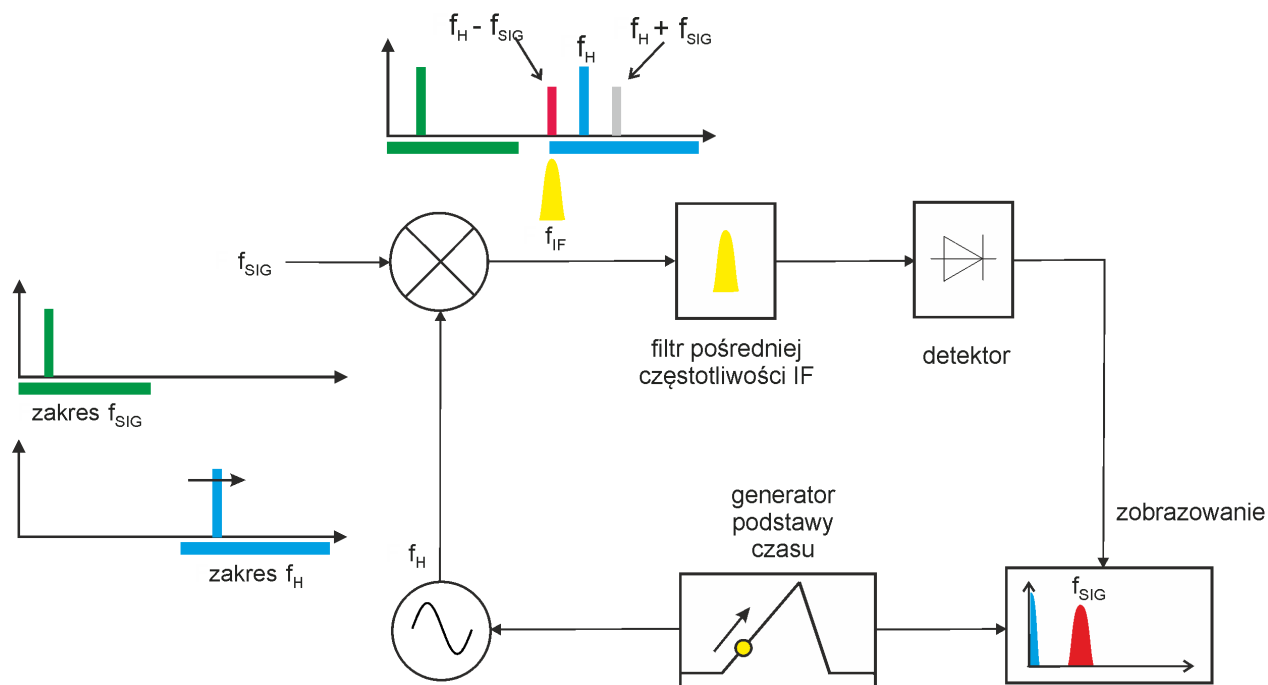
$$f_H = f_0 + f_{\text{sig}} \quad (8.5)$$

otrzymuje się, że niezerową odpowiedź na wyjściu filtru IF przy częstotliwości sygnału $f_{\text{sig}} = 0$ Hz można uzyskać przy $f_H = 0 + 5 \text{ GHz}$ a odpowiedź na wyjściu filtru IF przy częstotliwości sygnału $f_{\text{sig}} = 3 \text{ GHz}$ przy $f_H = 3 \text{ GHz} + 5 \text{ GHz} = 8 \text{ GHz}$. Zakres pracy heterodyny $5 \div 8 \text{ GHz}$ zapewni tym samym analizę widmową sygnału wejściowego w zakresie $0 \div 3 \text{ GHz}$. Negatywną konsekwencją rozpoczęcia pracy heterodyny od częstotliwości równej częstotliwości środkowej filtru IF (np.

5 GHz w powyższym przykładzie) jest przenoszenie przez filtr IF produktu mieszania o częstotliwości f_H – rys. 8.12.



Rys. 8.12. Ilustracja zakresu analizowanych częstotliwości, zakresu pracy heterodyny i zobrazowania dla przypadku rozpoczęcia pracy heterodyny od częstotliwości f_{IF}



Rys. 8.13. Ilustracja działania analizatora z przemianą częstotliwości

Oznacza to, że na ekranie analizatora pojawia się prążek w okolicach częstotliwości zerowej (składowa DC) nawet wtedy, jeśli w sygnale składowa stała nie występuje. Dlatego w praktyce zakres analizatorów z przemianą częstotliwości nie zaczyna się od zerowej częstotliwości (np. w

serii Agilent ESA-L jest to 9 kHz). Na rys. 8.13 przedstawiono dodatkowo przypadek odpowiadający częstotliwości heterodyny, przy której produkt przemiany częstotliwości ($f_H - f_{sig}$) jest równy dokładnie wartości częstotliwości pośredniej – na ekranie analizatora pojawi się prążek na częstotliwości odpowiadającej częstotliwości analizowanego sygnału f_{sig} .

Przedstawiony materiał ma charakter poglądowy i nie opisuje wszystkich szczegółów konstrukcji analogowych analizatorów widma. Celem uzyskania wysokich rozdzielczości w dziedzinie częstotliwości, w niektórych analizatorach stosuje się filtry IF o wartości RBW rzędu nawet pojedynczych herców. Uzyskanie filtrów o tak małej szerokości pasma przy częstotliwości środkowej rzędu np. 5 GHz jest bardzo trudne, stąd praktyczne rozwiązania zawierają kilka stopni przemiany częstotliwości (kilka mieszaczy), które umożliwiają obniżenie wartości częstotliwości pośredniej.

8.3. Cyfrowe analizatory widma

8.3.1. Podstawy matematyczne

Podstawę matematyczną rozwiązań cyfrowych stanowi rozwinięcie dyskretnego sygnału okresowego, w praktyce uzyskiwanego na drodze zastosowania przetwornika A/C, w dyskretny szereg Fouriera. Zależność (8.3) obowiązującą dla ciągłych przebiegów okresowych można uogólnić na przebiegi dyskretny przyjmując, że dyskretny sygnał okresowy może być utworzony na drodze sumowania dyskretnych przebiegów harmonicznnych. Po dyskretyzacji z okresem T_p , dającej dokładnie N próbek w okresie T_0 otrzymuje się, że czas ciągły t przechodzi w czas dyskretny nT_p a pulsacja ω_0 przyjmuje postać:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{NT_p}. \quad (8.6)$$

W konsekwencji, zapis eksponencjalny w (8.3) redukuje się do postaci:

$$e^{jk\omega_0 t} = e^{jk \frac{2\pi}{NT_p} nT_p} = e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (8.7)$$

dostarczając następującej modyfikacji postaci rozwinięcia (8.3) dla sygnału dyskretnego:

$$u(nT_p) = u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (8.8)$$

Należy zauważyć, że eksponent (8.6) jest funkcją okresową względem k :

$$e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = e^{j \frac{2\pi}{N} (k+rN)n}, \quad (8.9)$$

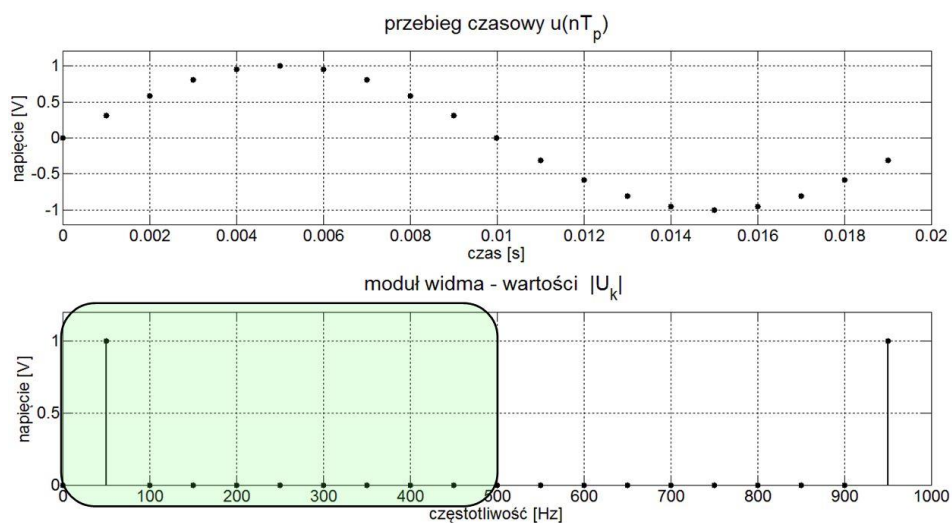
czyli posiadającą tylko N różnych wartości. Jeżeli każda z nich w sumie (8.8) zostanie wyciągnięta przed nawiasy, które będą zawierać sumy tych c_k , które odpowiadają każdej z tych N różnych wartości, to zależność (8.8) przyjmie postać:

$$u(nT_p) = u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (8.8)$$

Wynika z niej, że wartości U_k reprezentują amplitudy N dyskretnych i zespolonych przebiegów harmonicznnych, które składają się na dyskretny przebieg $u(n)$. Szereg (8.8) nosi nazwę dyskretnego szeregu Fouriera dyskretnego sygnału okresowego a jego współczynniki U_k mogą być i są interpretowane jako widmo sygnału dyskretnego okresowego. Wartości widma można obliczyć na podstawie próbek sygnału. Odpowiednie przekształcenia zależności (8.8) dostarczają następującego wzoru:

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (8.9)$$

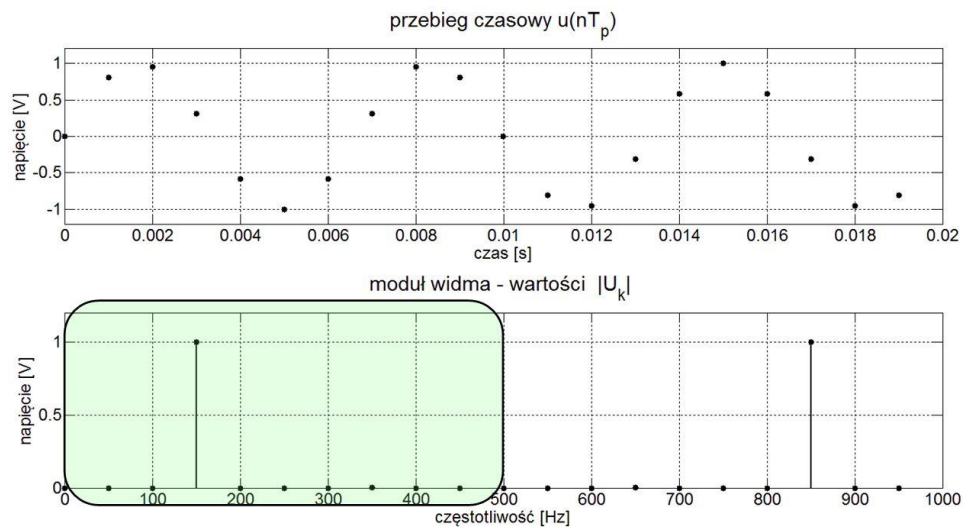
Należy zauważyć, że transformata (8.9) ma kapitalne znaczenie dla obliczeń wykonywanych przez maszynę cyfrową: wykorzystuje skończoną liczbę próbek sygnału pobranych w okresie (sumowanie od $n=0$ do $n=N-1$) i generuje skończoną liczbę próbek widma. Własność ta sprawia, że jest to jedyna metoda wykorzystywana w praktyce do obliczeń przez cyfrowe analizatory widma. Specyfikę wyników obliczeń oferowanych przez (8.9) dla przypadku analizy przebiegu sinusoidalnego przedstawiają rysunki 8.14 i 8.15, na których numer próbki widma – k został zastąpiony wartością częstotliwości.



Rys. 8.14. Przebieg czasowy o częstotliwości 50 Hz i jego widmo amplitudowe (zaznaczony obszar to zobrazowanie cyfrowego analizatora widma)

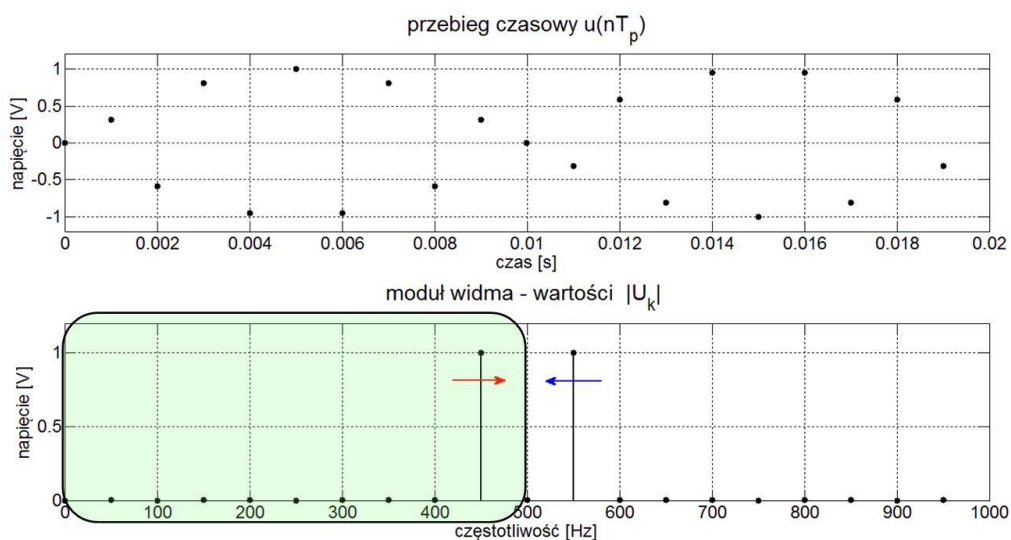
Przedstawione wykresy zostały osiągnięte przy częstotliwości próbkowania $f_p = 1000$ Hz. Widać na nich, że widmo uzyskane metodą cyfrową charakteryzuje się symetrią względem połowy częstotliwości próbkowania (czyli tutaj 500Hz), ale rozpatrywane w przedziale od 0 Hz do $f_p/2$ dostarcza poprawnej informacji o składzie spektralnym przebiegu. Stąd zakres wyświetlanych na ekranie analizatora częstotliwości będzie ograniczony co najwyżej do $f_p/2$ (postać ekranu na

przedstawionych wykresach symbolizuje dorysowany prostokąt). Efektem istniejącej symetrii widma jest możliwość powstania pewnego przekłamania, zwanego aliasingiem.

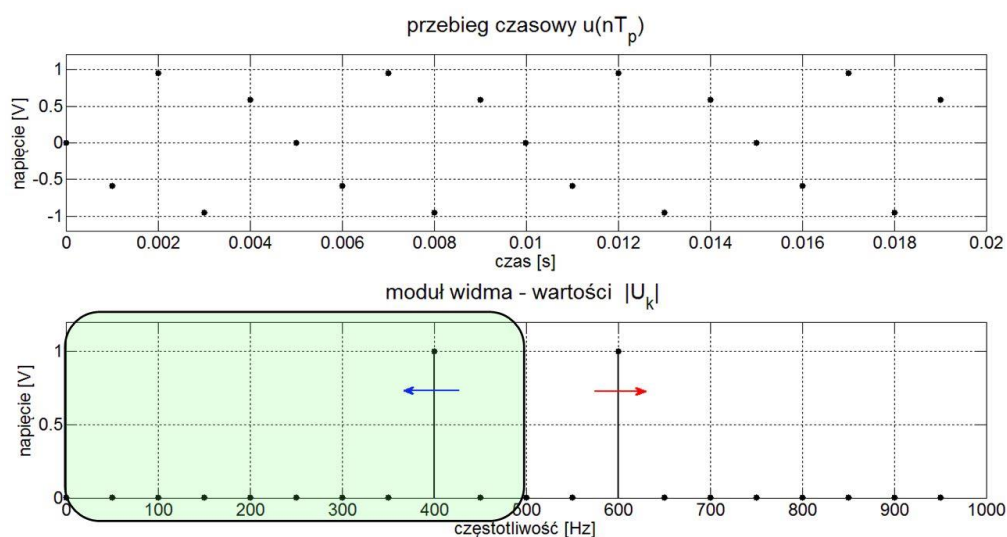


Rys. 8.15. Przebieg czasowy o częstotliwości 150Hz i jego widmo amplitudowe

Na rysunkach 8.16 i 8.17 przedstawiono wyniki analizy widmowej przebiegów o rosnącej częstotliwości. Wzrost częstotliwości sygnału powyżej progowej wartości $f_p/2$ skutkuje przeniknięciem do zakresu od 0Hz do $f_p/2$ składowej z lustrzanego odbicia widma, które zafałszowuje interpretację. Aby uniknąć zjawiska aliasingu konieczne jest stosowanie odpowiedniej wartości częstotliwości próbkowania lub wykorzystanie filtra dolnoprzepustowego (zwanego filtrem antyaliasingowym), który nie dopuści do próbkowania przebiegów o częstotliwości większej niż $f_p/2$.

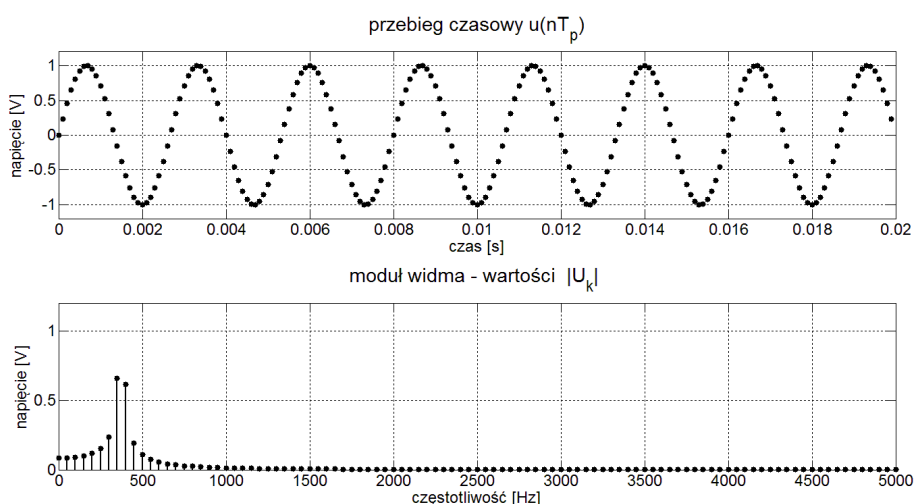


Rys. 8.16. Przebieg czasowy o częstotliwości 450Hz i jego widmo amplitudowe – poprawna interpretacja w zakresie od 0Hz do $f_p/2$



Rys. 8.17. Przebieg czasowy o częstotliwości 600 Hz i jego widmo amplitudowe – błędna interpretacja w zakresie od 0 Hz do $f_p/2$

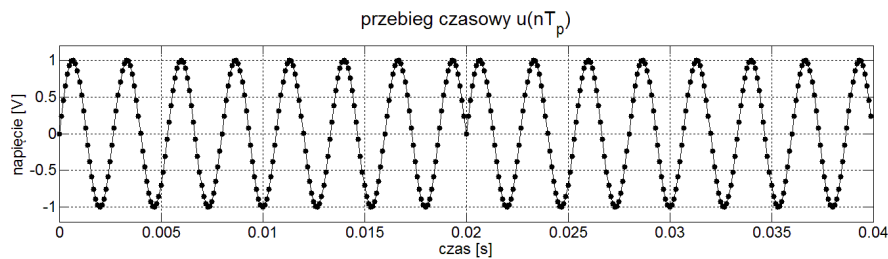
Oprócz zjawiska aliasingu należy dodatkowo pamiętać, że warunek, aby liczba próbek pobranych do obliczeń objęła dokładnie okres sygnału (lub jego całkowitą wielokrotność) jest warunkiem niemożliwym do spełnienia w ogólnym przypadku. Z tego względu zależność (8.9), stosowana do analizy widmowej przebiegu o dowolnym okresie, jest nazywana dyskretnym przekształceniem Fouriera DFT (ang. *Discrete Fourier Transform*). Konsekwencją braku objęcia przez rekord danych, na którym wykonywane są obliczenia całkowitej liczby okresów przebiegu jest tzw. zjawisko przecieku.



Rys. 8.18. Rekord danych, obejmujący 7,5 okresu przebiegu o częstotliwości 375Hz i jego widmo amplitudowe przy zastosowaniu okna prostokątnego

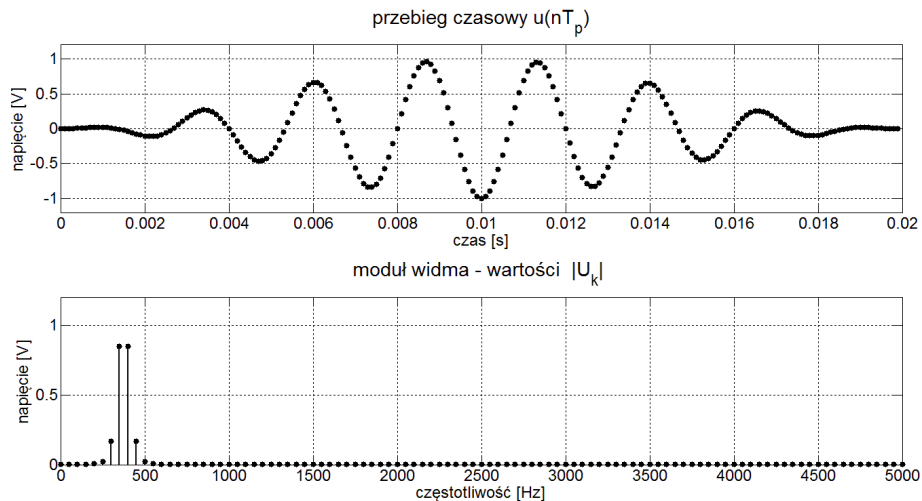
Rysunek 8.18 ilustruje przypadek uzyskany przy zwiększonej w stosunku do dotychczas rozważanej częstotliwości próbkowania (przyjęto 10 kHz), w którym rekord danych branych do obliczeń objął siedem i pół okresu. Zgodnie z przedstawionymi wyżej własnościami, metoda DFT traktuje rekord danych jako jeden okres przebiegu. Ze względu na powstającą wówczas nieciągłość

pomiędzy tak powstałymi „okresami” – rys. 8.19, widmo przebiegu ulega naturalnemu poszerzeniu, traktowanemu jako przeciek energii z prążka głównego do sąsiednich obszarów.



Rys. 8.19. Postać przebiegu okresowego dla którego wyznaczana jest dyskretna transformata Fouriera przy założeniu, że rekord danych branych do analizy jest przedstawiony na rys. 8.18 (dla poprawy czytelności rysunku próbki sygnału połączono odcinkami)

Stosowaną w praktyce metodą, która minimalizuje zjawisko przecieku w widmie jest tzw. okienkowanie sygnału przed poddaniem go transformacji DFT. Polega ono na przeprowadzeniu operacji mnożenia przez funkcję wagową, której końce mają wartości zbliżone do zera. W traktowanym przez metodę jako okresowy sygnale znikają nieciągłości i stopień poszerzenia widma jest mniejszy. Na rys. 8.20 przedstawiono przypadek wykorzystania jednego z rodzajów okien – okna Hanninga. Brak okienkowania oznacza formalnie zastosowanie okna o kształcie prostokątnym (rys. 8.18).



Rys. 8.20. Rekord danych i widmo amplitudowe uzyskane przy zastosowaniu okna Hanninga do przebiegu z rys. 8.18

Szczegółowa analiza zależności (8.9) wskazuje na jeszcze jeden istotny aspekt cyfrowej analizy widmowej, tym razem aspekt obliczeniowy. Wyznaczenie N próbek widma wymaga, oprócz operacji sumowania, przeprowadzenia N^2 mnożeń zespolonych (każda z próbek widma powstaje po wykonaniu mnożenia N próbek sygnału przez eksponencjalne współczynniki). Przy długich rekordach danych uniemożliwia to wykonywanie analizy widmowej w czasie rzeczywistym. Metodą na skrócenie liczby obliczeń jest zastosowanie wydajnego obliczeniowo

algorytmu FFT (ang. *Fast Fourier Transform*). Jego ogólna idea zasadza się na spostrzeżeniu, że wykonanie dwu transformat DFT rekordów danych o połowę krótszych niż rekord oryginalny wymaga mniejszej liczby mnożeń (bezpośrednim powodem jest okresowość współczynnika eksponencjalnego w (8.9)). Podstawowy algorytm FFT wymaga, aby długość rekordu danych była potęgą liczby 2 (wymóg dzielenia na coraz krótsze rekordy aż do uzyskania transformaty 2-punktowej) oferując liczbę mnożeń określoną przez wyrażenie $N \cdot \log_2 N$ a nie przez N^2 , jak w zwykłej DFT. Dla rekordu danych o długości np. $N = 1024$ oznacza to wykonanie ok. 10 000 mnożeń zamiast miliona.

8.3.2. Budowa cyfrowego analizatora widma

Uproszczony schemat blokowy cyfrowego analizatora widma przedstawiono na rysunku 8.21. Układy wejściowe zapewniają odpowiednią czułość i impedancję wejściową. Zbudowane są z dzielników napięcia i wzmacniaczy pomiarowych. W bloku tym znajduje się również filtr antyaliasingowy ograniczający częstotliwość maksymalną badanego sygnału zgodnie z teorią o próbkowaniu.



Rys. 8.21. Struktura blokowa cyfrowego analizatora widma

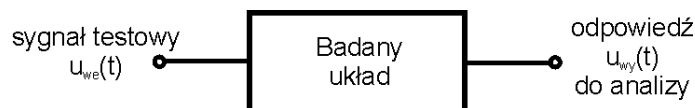
Przetwornik A/C próbkuję sygnał badany i przetwarza go na postać cyfrową. Sygnał cyfrowy (ciąg próbek) zostaje zapamiętany w pamięci cyfrowej. System mikroprocesorowy przeprowadza obliczenia według algorytmu FFT i wynik transformacji przekazuje na system zobrazowania.

8.4. Mierniki zniekształceń

8.4.1. Podstawy teoretyczne pomiaru zniekształceń

Pod pojęciem kształtu sygnału elektrycznego, rozumie się najczęściej zależność matematyczną opisującą jego zachowanie się w czasie. Niepożądane zmiany lub modyfikacje tej zależności są powodowane właściwościami układów generacyjnych, transmisyjnych, odbiorczych oraz układów przetwarzania i noszą nazwę zniekształceń. Mogą one powodować przekłamanie informacji przenoszonej przez sygnał a nawet jej utratę. W metrologii zniekształcenia sygnału pomiarowego mogą zwiększyć błędy pomiaru. Miarą zniekształceń wnoszonych przez układy jest wyrażona w sposób ilościowy rozbieżność między sygnałem rzeczywistym a teoretycznym. Ze

względem na łatwość przeprowadzenia pomiaru oraz interpretację wyników – rys. 8.22, do wyznaczenia zniekształceń na drodze eksperymentalnej stosuje się pewne sygnały testowe, stanowiące dla badanego układu sygnały wymuszające.



Rys. 8.22. Idea pomiaru zniekształceń wnoszonych przez układ

Ocenie jakościowej np. za pomocą oscyloskopu oraz ilościowej, dokonywanej za pomocą dedykowanych do tego celu przyrządów pomiarowych, podlega wówczas odpowiedź układu. Jako sygnały testowe najczęściej są wykorzystywane sygnały harmoniczne (sinusoidalne).

Zniekształcenia sygnału dzieli się na liniowe i nieliniowe. Zniekształcenia liniowe powstają w liniowych układach elektronicznych, których transmitancja widmowa jest zależna od częstotliwości. Obecność zniekształceń tego typu może powodować zmianę amplitudy testowego sygnału sinusoidalnego (są to zniekształcenia amplitudowe) oraz zmiany fazy (zniekształcenia fazowe), ale bez zmiany jego kształtu. Innymi słowy, jeżeli na wejście badanego układu liniowego, wnoszącego wyłącznie zniekształcenia liniowe podane zostanie wymuszenie w postaci:

$$u_{we}(t) = U_{m0} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.10)$$

to jego odpowiedź będzie opisana zależnością:

$$u_{wy}(t) = U_{m1} \sin(\omega_0 t + \varphi_1), \quad (8.11)$$

przy czym z tytułu zniekształceń liniowych zachodzi:

$$U_{m0} \neq U_{m1}, \quad \varphi_0 \neq \varphi_1. \quad (8.12)$$

Zmiana kształtu testowego sygnału sinusoidalnego jest domeną układów zawierających elementy nieliniowe. Zgodnie z teorią Fouriera, której zarys przedstawiono powyżej, konsekwencją tej zmiany (odkształcenia) jest pojawienie się w odpowiedzi dodatkowych składowych harmonicznych o częstotliwościach, które nie występują w wymuszeniu. W szczególności, jeżeli sygnałem wymuszającym będzie dla układu nieliniowego napięcie opisane zależnością (8.10), to odpowiedź będzie kształtowana sumą harmonicznych o pulsacjach będących całkowitą wielokrotnością pulsacji wymuszenia:

$$u_{wy}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{mn} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n). \quad (8.13)$$

Do ilościowej oceny zniekształceń nieliniowych wprowadzanych przez układ elektroniczny służą współczynniki zawartości poszczególnych harmonicznych h_n oraz współczynnik zawartości harmonicznych h (lub h_1), zwany również współczynnikiem zniekształceń nieliniowych.

Definicje powyższych wielkości są następujące:

$$h_n = \frac{U_n}{U_1} = \frac{U_{mn}}{U_{m1}} \quad (8.14)$$

$$h = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}} \cdot 100\% = \frac{U_{sk(2,3,4,\dots)}}{U_{sk(1,2,3,\dots)}} \cdot 100\%, \quad (8.15)$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}{U_1^2}} \cdot 100\% = \frac{U_{sk(2,3,4,\dots)}}{U_{sk1}} \cdot 100\% \quad (8.16)$$

Występujące we wzorach symbole oznaczają:

U_1, U_n – wartości skuteczne n -tych harmoniczych,

$U_{sk(1,2,3,4,\dots)}$ – wartość skuteczna badanego napięcia,

$U_{sk(2,3,4,\dots)}$ – wartość skuteczna napięcia złożonego z harmoniczych od drugiej wzwyż.

Można w prosty sposób wykazać, że zależności między h i h_1 dają się wyrazić następującymi wzorami:

$$h = \frac{h_1}{\sqrt{1+h_1^2}}, \quad h_1 = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \quad (8.17)$$

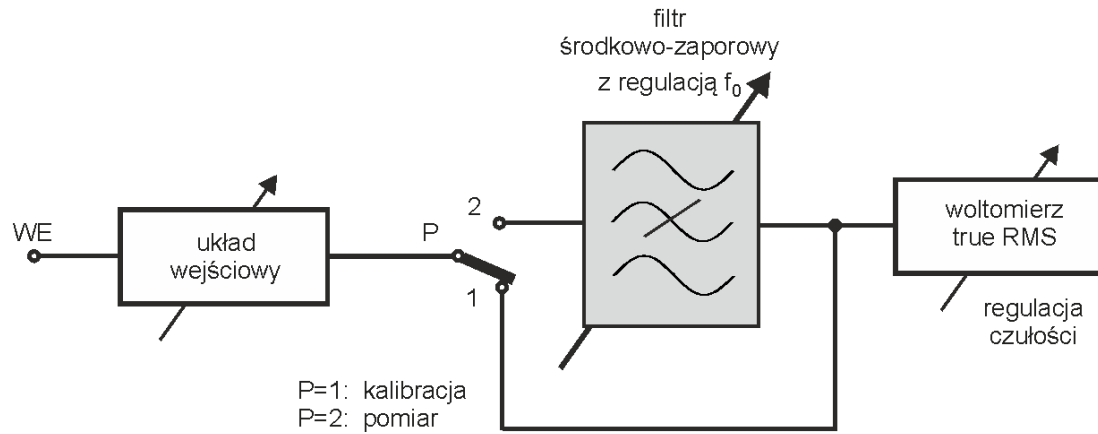
Do poziomu ok. 20% zawartości harmoniczych oba współczynniki są praktycznie takie same.

8.4.2. Pomiar zniekształceń nieliniowych

Pomiar zawartości harmoniczych wg wzorów (8.15) lub (8.16) można formalnie przeprowadzić mierząc poszczególne składowe harmoniczne za pomocą analizatora widma i wykonując odpowiednie obliczenia. Do bezpośredniego pomiaru współczynnika zniekształceń nieliniowych stosuje się specjalne przyrządy pomiarowe – mierniki zniekształceń nieliniowych (ang. *distortion meter*). Schemat funkcjonalny jednego z rozwiązań takiego przyrządu, pracującego wg tzw. metody eliminacji składowej podstawowej, przedstawia rys. 8.23.

Przyrząd składa się z układów wejściowych, filtru środkowo-zaporowego (FŚZ) i woltomierza wartości skutecznej (woltomierza elektronicznego reagującego na wartość skuteczną napięcia). Zasada pracy miernika zniekształceń nieliniowych oparta jest na definicji h^* .

* Inną metodą pomiaru zniekształceń nieliniowych jest metoda kompensacji składowej podstawowej, oparta na definicji „ h_1 ”.



Rys. 8.23. Struktura blokowa typowego miernika zniekształceń nieliniowych

Pomiar polega na dwukrotnym pomiarze wartości skutecznej napięcia woltomierzem wyskalowanym w procentach według następującej procedury.

- 1) Przełącznik P w położeniu 1 (kalibracja): regulatorem napięcia w układzie wejściowym należy ustawić wskazanie woltomierza na $U_{Vmax} = 100\%$ (wskazanie maksymalne); woltomierz wysterowany jest wówczas wartością skuteczną całego przebiegu:

$$U_{P1} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2} = U_{sk} = U_{Vmax} \text{ (wskazanie 100\%)}$$

- 2) Przełącznik P w położeniu 2 (pomiar): regulatorem częstotliwości środkowej f_0 filtru FŚZ należy dobrać taką wartość, aby odfiltrować z przebiegu składową podstawową, co wystąpi przy minimalnym wskazaniu woltomierza; woltomierz wysterowany będzie wówczas wartością skuteczną wyższych harmonicznych począwszy od drugiej:

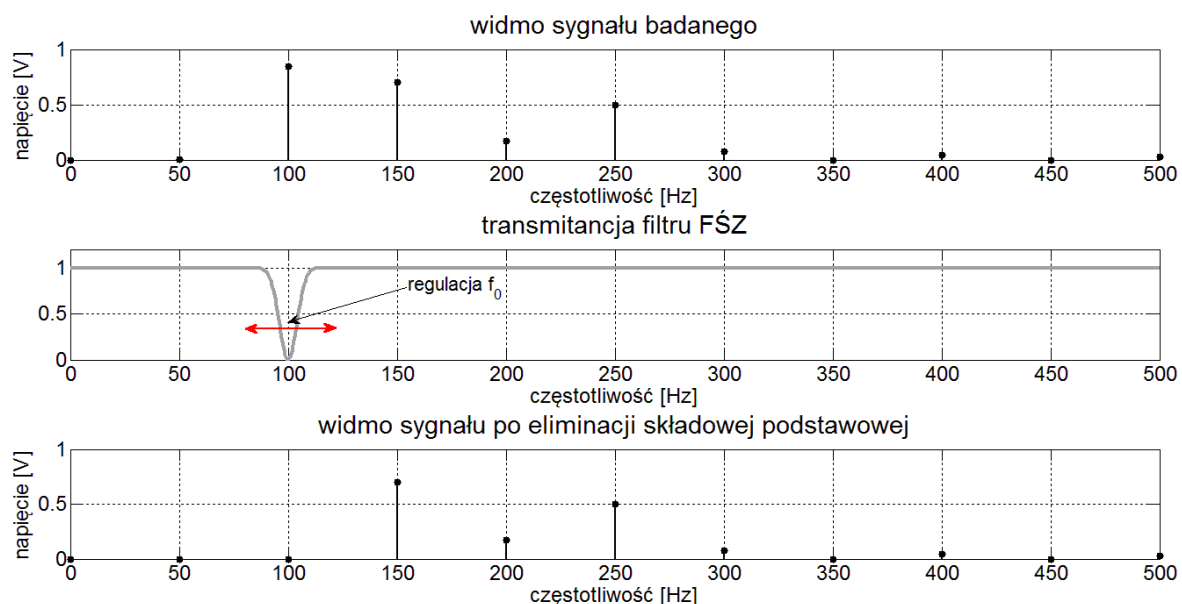
$$U_{P2} = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2} = U_{min} = U_{sk(2,3,\dots,n)} \text{ (wskazanie minimalne w \%)}. \text{}$$

W fazie kalibracji wskazanie woltomierza wyskalowanego w procentach ustalone zostało przebiegiem, który zawierał również składową podstawową na wartość 100%. Eliminacja składowej podstawowej sprawiła, że uzyskane w procentach wskazanie w fazie pomiaru reprezentuje bezpośrednio wartość współczynnika zawartości harmonicznych w procentach, zgodnie z zależnościami:

$$h = \frac{U_{sk(2,3,\dots,n)}}{U_{sk}} = \frac{U_{P2}[\%]}{100\%} \quad (8.18)$$

$$U_{P2}[\%] = h \cdot 100\%. \quad (8.19)$$

Rysunek 8.24 ilustruje proces modyfikacji widma przebiegu badanego przy eliminacji składowej podstawowej prezentowaną metodą.



Rys. 8.24. Ilustracja eliminacji składowej podstawowej przy pomiarze zniekształceń nieliniowych

8.5. Badania laboratoryjne

Cel ćwiczenia:

- zapoznanie studentów z zasadami posługiwania się miernikiem zniekształceń nieliniowych,
- zapoznanie studentów z zasadami posługiwania się cyfrowym analizatorem widma,
- zapoznanie studentów z zasadami posługiwania się analogowym analizatorem widma z przemianą częstotliwości.

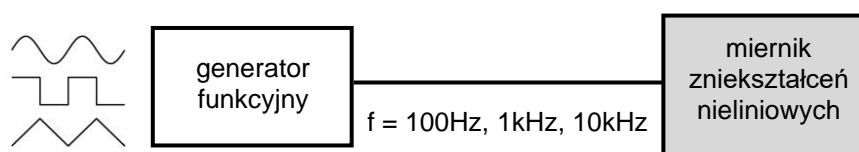
Wykaz przyrządów na stanowisku pomiarowym

Lp.	Nazwa przyrządu
1	Miernik zniekształceń nieliniowych
2	Oscyloskop cyfrowy z opcją cyfrowej analizy widmowej za pomocą FFT
3	Analogowy analizator widma z przemianą częstotliwości
4	Generator funkcyjny
5	Generator impulsów prostokątnych

Przebieg ćwiczenia:

1. Pomiary współczynnika zawartości harmonicznych (zniekształceń nieliniowych)

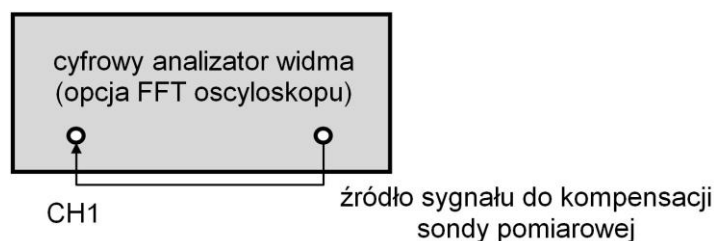
W układzie jak na rys. 8.25 wykonywane będą pomiary zawartości harmonicznych sygnałów generatora z wykorzystaniem miernika zniekształceń nieliniowych pracującego wg metody eliminacji składowej podstawowej, przedstawionej na rys. 8.23. Do badań wykorzystane zostaną sygnały testowe o różnych częstotliwościach i znanych kształtach (sinusoidalny, prostokątny, trójkątny), dla których współczynnik zawartości harmonicznych będzie wyznaczony na drodze teoretycznej i porównany z wynikami wykonanych badań eksperymentalnych.



Rys. 8.25. Schemat układu do pomiaru zawartości harmonicznych w sygnale generatora

2. Zapoznanie z pracą cyfrowego analizatora widma

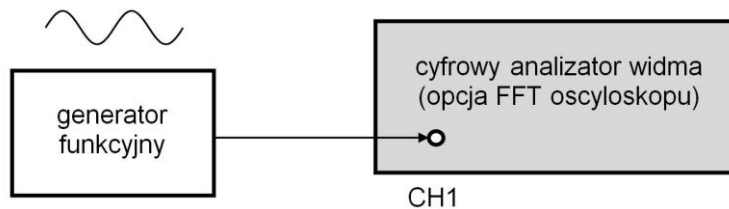
W układzie jak na rys. 8.26 wykonywane będą prace zmierzające do uzyskania zobrazowania przebiegu czasowego wewnętrznego sygnału testowego oscyloskopu oraz jego widma amplitudowego uzyskanego za pomocą algorytmu dyskretnego przekształcenia Fouriera DFT (FFT), omówionego w podrozdziale 8.3.1. W zakres zadań wejdzie przeprowadzenie jakościowej oceny zjawiska przecieku i aliasingu w widmie, oceny sposobu wyświetlania informacji na ekranie analizatora oraz wykonywanie ćwiczeń z posługiwania się kursorami i pomiarami automatycznymi.



Rys. 8.26. Schemat układu przeznaczonego do zapoznania się z pracą cyfrowego analizatora widma (opcja oscyloskopu cyfrowego)

3. Sprawdzenie właściwości okien wycinających

W układzie jak na rys. 8.27 wykonywane będą badania zmierzające do oceny porównawczej własności okien czasowych oferowanych przez dostępny na stanowisku oscyloskop cyfrowy z opcją analizatora widma. Ideę okien czasowych w analizie widmowej przedstawia podrozdział 8.3.1. Do badań wykorzystany zostanie zewnętrzny sinusoidalny sygnał testowy o zadanej częstotliwości, którego widma uzyskane z wykorzystaniem okna prostokątnego, Hanninga, Hamminga i Blackmana będą podlegały pomiarom porównawczym z wykorzystaniem kursorów.



Rys. 8.27. Schemat układu przeznaczonego do sprawdzenia własności okien czasowych w analizie widmowej

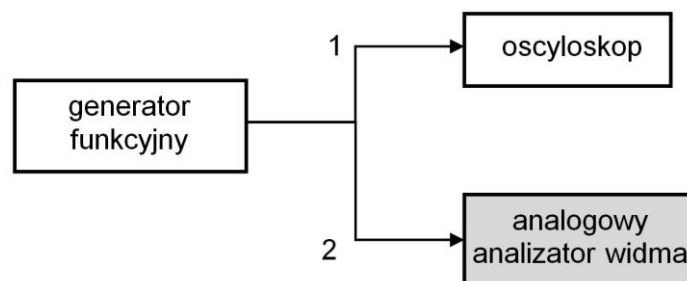
4. Analiza widmowa w zakresie m.cz. (zastosowanie cyfrowego analizatora widma)

W układzie jak na rys. 8.27 wykonywane będą prace ukierunkowane na nauczanie przeprowadzenia ilościowej analizy widmowej sygnałów testowych o małych częstotliwościach, wykorzystywanych w punkcie pierwszym ćwiczeń. Program badań obejmie wyznaczenie częstotliwości oraz amplitud poszczególnych harmoniczných, zamianę wartości wyrażonych w dBV na wartości wyrażone w woltach oraz wykorzystanie tych ostatnich do obliczenia współczynnika zawartości harmoniczných, którego wartość będzie porównana z wartością uzyskaną eksperymentalnie za pomocą miernika zniekształceń nieliniowych.

5. Analizator widma z przemianą częstotliwości

A) Zapoznanie z pracą analizatora widma

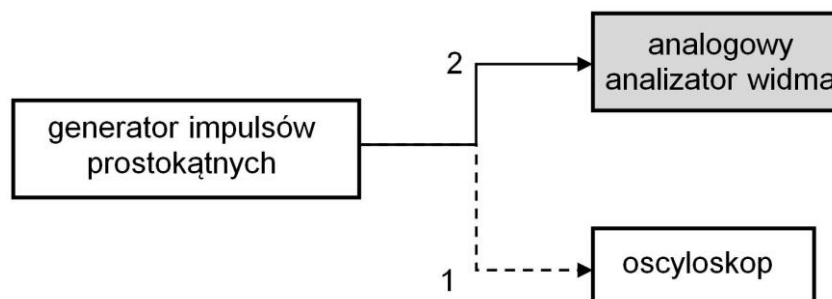
W układzie jak na rys. 8.28 wykonywane będą prace ukierunkowane na naukę wykorzystania w pomiarach analogowego analizatora widma z przemianą częstotliwości w analizie widmowej sygnałów o dużych częstotliwościach (rzędu pojedynczych megaherców). Podstawy matematyczne działania oraz budowa takich analizatorów zostały przedstawione w rozdziale 8.2. Program ćwiczeń obejmie prezentację zasad dołączania sygnału do wejścia analizatora poprzez tłumik oraz prezentację zasad doboru szerokości pasma RBW filtru pośredniej częstotliwości omówionego w podrozdziale 8.2.2.



Rys. 8.28. Schemat układu przeznaczonego do zapoznania się z pracą analogowego analizatora widma z przemianą częstotliwości

B) Analiza widmowa sygnałów impulsowych

W układzie jak na rys. 8.29 wykonywane będą badania postaci widma sygnału impulsowego o przerywistości (odwrotność współczynnika wypełnienia) regulowanej za pomocą zmiany okresu oraz za pomocą zmiany czasu trwania impulsu.



Rys. 8.29. Schemat układu przeznaczonego do badania widma sygnałów impulsowych

Przykładowe pytania kontrolne:

1. Definicje " h " i " h_1 ".
2. Metody pomiaru współczynnika zniekształceń nieliniowych.
3. Miernik współczynnika zniekształceń nieliniowych.
4. Rozkład sygnału okresowego na szereg Fouriera.
5. Przekształcenie Fouriera.
6. Dyskretne przekształcenie Fouriera (oraz FFT).
7. Analizator harmonicznym z regulowanym filtrem.
8. Analizator widma z przemianą częstotliwości.
9. Cyfrowy analizator widma.

8.6. Literatura

1. A. Chwaleba, M. Poniński, A. Siedlecki: *Metrologia elektryczna*, Wyd. 11, WNT, 2014.
2. M. Stabrowski: *Miernictwo elektryczne: cyfrowa technika pomiarowa*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1994.
3. M. Stabrowski: *Cyfrowe przyrządy pomiarowe*, Wydawnictwo PWN, Warszawa, 2002.
4. Notka aplikacyjna Nr 150 firmy Agilent, *Spectrum Analysis Basics*, źródło internetowe <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5952-0292.pdf>.