

## Ćwiczenie 7

### Metody pomiaru rezystancji i impedancji

#### 7.1. Wprowadzenie teoretyczne

##### 7.1.1. Podstawowe elementy obwodu elektrycznego

###### 7.1.1.1. Rezystancja

Rezystancja jest wielkością charakteryzującą rozpraszanie energii w obwodzie elektrycznym. Jest miarą oporu, z jakim element przeciwstawia się przepływowi prądu elektrycznego. W obwodach prądu stałego rezystancja  $R$  stanowi współczynnik proporcjonalności między natężeniem prądu  $I$  płynącego przez ten element a napięciem  $U$ , opisany prawem Ohma

$$U = RI . \quad (7.1)$$

Jednostką rezystancji jest ohm [ $\Omega$ ].

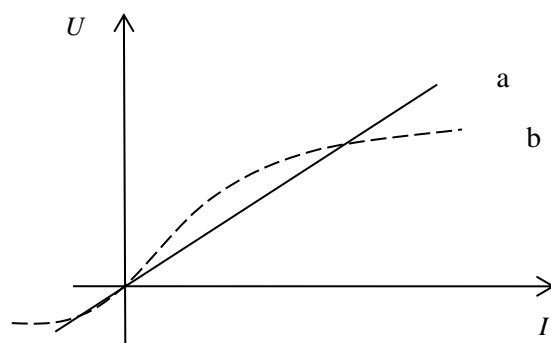
Rezystancja przewodu zależy od jego długości  $l$ , pola przekroju poprzecznego  $S$  oraz od materiału, z którego przewód został wykonany. Opisuje to zależność

$$R = \frac{\rho l}{S} . \quad (7.2)$$

Parametrem określającym właściwości przewodzące przewodnika jest rezystywność  $\rho$ . Im jest ona mniejsza, tym lepszym przewodnikiem jest dany materiał.

W obwodach prądu zmiennego rezystancja jest określana jako składowa czynna impedancji  $Z$ , a więc stanowi jej wartość rzeczywistą  $Re(Z)$ .

Wśród elementów rezystancyjnych można rozróżnić elementy liniowe i nieliniowe w zależności od kształtu charakterystyki prądowo-napięciowej (rys. 7.1).



**Rys. 7.1.** Charakterystyki prądowo-napięciowe  
a - rezystancji liniowej  
b - rezystancji nieliniowej

### 7.1.1.2. Indukcyjność

Indukcyjność  $L$  jest wielkością charakteryzującą zdolność elementów obwodu elektrycznego do gromadzenia energii w polu magnetycznym, określana w obwodzie liniowym jako

$$L = \frac{\Phi_m}{i}, \quad (7.3)$$

gdzie:

$\Phi_m$  - strumień skojarzony,

$i$  - wartość prądu przepływającego przez element.

Jest to podstawowa własność cewki. Jednostką indukcyjności jest Henr [H]. Wykorzystywane elementy indukcyjne zwykle są niewielkie, tzn. rzędu mH ( $10^{-3}\text{H}$ ) oraz  $\mu\text{H}$  ( $10^{-6}\text{H}$ ).

### 7.1.1.3. Pojemność

Pojemność  $C$  jest wielkością charakteryzującą zdolność elementów obwodu elektrycznego do gromadzenia energii w polu elektrycznym

$$C = \frac{Q}{u}, \quad (7.4)$$

gdzie

$Q$  - ładunek elektryczny,

$u$  - wartość spadku napięcia na elemencie.

Jest to podstawowa własność kondensatora. Jednostką pojemności jest Farad [F], a stosowany rząd wielkości kondensatorów to  $\mu\text{F}$  ( $10^{-6}\text{F}$ ),  $\text{nF}$  ( $10^{-9}\text{F}$ ) oraz  $\text{pF}$  ( $10^{-12}\text{F}$ ).

### 7.1.1.4. Impedancja

Impedancja jest wielkością charakteryzującą elementy elektroniczne w obwodach prądu zmiennego. Pojęcie impedancji opisuje oprócz rezystancji również parametry cewek indukcyjnych i kondensatorów.

Impedancja  $Z$  stanowi współczynnik proporcjonalności między prądem i napięciem sinusoidalnym, opisanym prawem Ohma

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}. \quad (7.5)$$

Wartości symboliczne  $\underline{U}$  i  $\underline{I}$  są liczbami zespolonym. Podstawiając do równania 7.5 symboliczne wartości skuteczne napięcia i prądu w postaci wykładniczej otrzymano wyrażenie na impedancję

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\Psi_U}}{Ie^{j\Psi_I}} = \frac{U}{I} e^{j(\Psi_U - \Psi_I)} = Ze^{j\varphi}, \quad (7.6)$$

gdzie

$$Z = \frac{U}{I} - \text{moduł impedancji,}$$

$$\varphi = \Psi_U - \Psi_I - \text{argument impedancji.}$$

Impedancja jest wypadkową składowej czynnej  $R$  (rezystancji) i składowej biernej  $X$  (reaktancji). Jej postać zespoloną można przedstawić w postaci algebraicznej, która dla ogólnego przypadku obwodu składającego się z połączonych szeregowo elementów  $RLC$  może być zapisana jako

$$\underline{Z} = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad (7.7)$$

Moduł impedancji wyraża się wzorem

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (7.8)$$

natomiast argument impedancyjny  $\varphi$  równy kątowi przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem i prądem można obliczyć z zależności

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}, \quad (7.9)$$

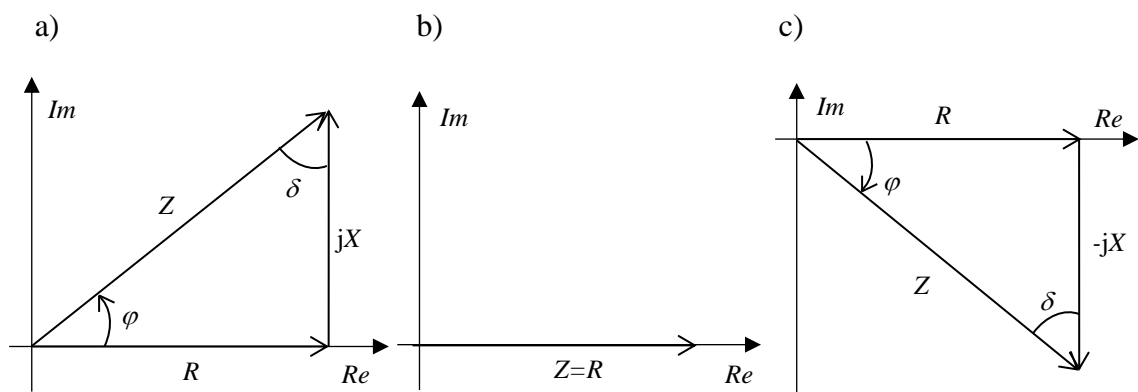
tangens kąta  $\delta$  określany jako współczynnik stratności jest równy

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R}{X}. \quad (7.10)$$

Impedancję można przedstawić geometrycznie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej za pomocą tzw. trójkąta impedancji (rys. 7.2).

W zależności od parametrów  $L$  i  $C$  oraz częstotliwości, można wyróżnić następujące przypadki:

- $X > 0$ , gdy  $X_L > X_C$ , a  $\varphi > 0$  – obwód ma charakter indukcyjny,
- $X = 0$ , gdy  $X_L = X_C$ , a  $\varphi = 0$  – obwód ma charakter rezystancyjny,
- $X < 0$ , gdy  $X_L < X_C$ , a  $\varphi < 0$  – obwód ma charakter pojemnościowy.

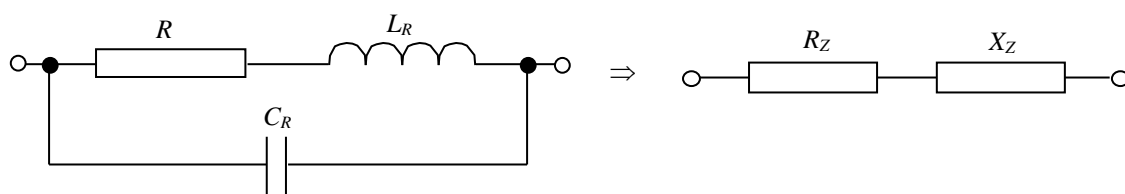


**Rys. 7.2.** Trójkąt impedancji dla obwodu o charakterze a) indukcyjnym RL b) rezystancyjnym c) pojemnościowym

Elementy obwodu (rezystor, kondensator i cewka indukcyjna), w których występuje tylko jeden proces energetyczny nazywa się elementami idealnymi. Zjawisko rozpraszania energii występuje dla rezystora, gromadzenie energii w polu magnetycznym jest charakterystyczne dla cewki, a gromadzenie energii w polu elektrycznym dla kondensatora. Właściwości oporników, kondensatorów i cewek indukcyjnych określa się nie tylko parametrami przedstawiającym ich główną cechę, czyli rezystancją  $R$ , pojemnością  $C$  i indukcyjnością  $L$  – ale też parametrami dodatkowym, zwanymi też resztkowymi lub pasożytniczymi. W związku z tym przedstawia się je często w postaci układów zastępczych. Mają one postać dwójników impedancyjnych i stanowią połączenie elementów idealnych. Wartości wielkości charakteryzujące elementy biernie są zmienne i zależą głównie od częstotliwości.

Przy badaniu parametrów dwójników biernych należy brać pod uwagę schematy zastępcze rzeczywistych elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .

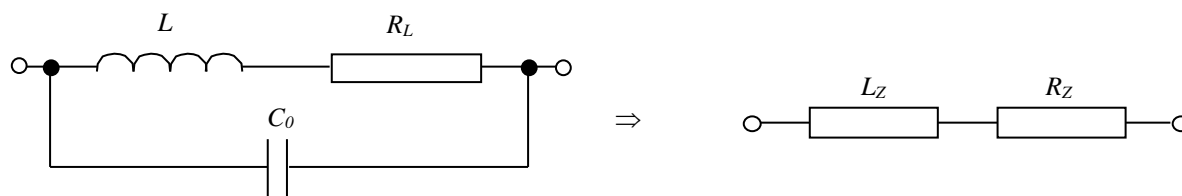
Dla prądu zmiennego opornik przedstawia się w postaci układu zastępczego (rys. 7.3) jako połączenie szeregowe rezystancji  $R$  i indukcyjności  $L$ , zbocznikowanego kondensatorem o pojemności  $C$ .



**Rys. 7.3.** Schemat zastępczy rezystancji

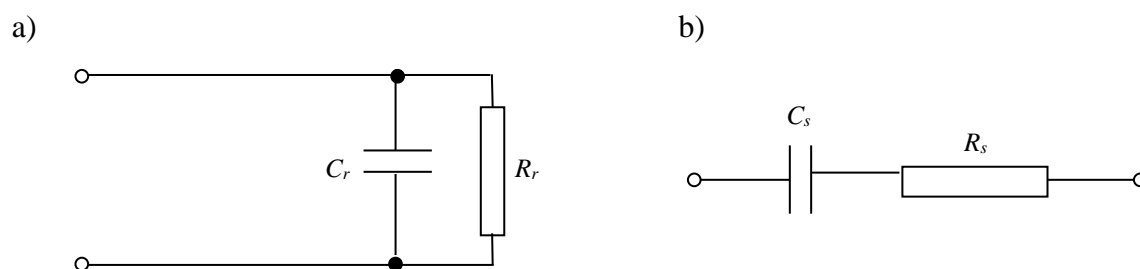
W cewkach indukcyjnych bezrdzeniowych straty energii wywołane są rezystancją uzwojenia. Dla małych częstotliwości najczęściej stosowanym schematem zastępczym cewki

jest indukcyjność  $L$  połączona szeregowo z rezystancją  $R$  związaną z rezystancją przewodnika, z którego została zrobiona cewka. Dla wyższych częstotliwości powstają dodatkowe straty energii ze względu na zjawisko powstawania m.in. prądów wirowych, czy też pojawienie się pojemności między zwojami cewki.



Rys. 7.4. Schemat zastępczy indukcyjności

W rzeczywistym kondensatorze, oprócz gromadzenia energii w polu elektrycznym, występuje też rozproszenie energii w postaci energii cieplnej. Straty energii występują na rezystancjach doprowadzeń, w dielektryku i izolacji, dlatego na schemacie zastępczym pojemności najczęściej przedstawia się jako równoległe połączenie idealnego kondensatora  $C$  i idealnego rezystora  $R$ , jak na rys. 7.5.



Rys. 7.5. Schemat zastępczy pojemności a) równoległy b) szeregowy

### 7.1.3. Współczynnik dobroci i stratności

W metodach pomiarowych impedancji pojawia się pojęcie dobroci  $Q$ , związane z układami rezonansowymi. Dobrocią obwodu rezonansowego  $Q$  nazywamy liczbę proporcjonalną do stosunku energii gromadzonej w elementach reaktancyjnych (energii pola elektrycznego  $W_e$  i energii pola magnetycznego  $W_m$ ) w rezonansie do energii zamienianej na ciepło  $W_T$  w czasie okresu przebiegu  $T$ :

$$Q = \frac{W_e + W_m}{W_T} 2\pi. \quad (7.11)$$

Dobroć jest to parametr określający ilościowo, ile razy napięcie podczas rezonansu wzrasta na elementach  $L$  i  $C$  w stosunku do napięcia zasilającego obwód. Dla dobrego

obwodu współczynnik ten powinien przyjmować duże wartości np. kilkaset. Jest to wielkość bezwymiarowa.

Pojęcie dobroci jest ściśle związane ze stratami zawsze występującymi w cewce.

Współczynnik dobroci cewki  $Q$ , charakterystyczny dla układów rezonansowych, można wyznaczyć ze wzoru dla zastępczego obwodu równoległego

$$Q = \frac{R_r}{\omega L_r} . \quad (7.12)$$

gdzie:

$R_r$  – rezystancja w układzie równoległym,

$L_r$  – indukcyjność w układzie równoległym,

albo dla obwodu szeregowego ze wzoru

$$Q = \frac{\omega L_s}{R_s} . \quad (7.13)$$

gdzie:

$R_s$  – rezystancja w układzie szeregowym,

$L_s$  – indukcyjność w układzie szeregowym.

W celu scharakteryzowania strat energii w rzeczywistym kondensatorze podaje się tangens kąta stratności  $\operatorname{tg} \delta$  lub częściej stratność kondensatora  $D$ . Jest to wartość kąta dopełniającego do  $90^\circ$  kąt przesunięcia fazowego  $\varphi$  między napięciem przyłożonym do kondensatora a prądem, który przez niego przepływa. Współczynnik ten określa stopień, w jakim kondensator rzeczywisty odbiega od idealnego.

Dla szeregowego schematu zastępczego stratność określana jest jako

$$D = \operatorname{tg} \delta = \omega R_s C_s , \quad (7.14)$$

gdzie:

$C_s$  – pojemność w układzie szeregowym.

Natomiast stratność kondensatora dla równoległego schematu zastępczego opisana jest jako

$$D = \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega R_r C_r} , \quad (7.15)$$

gdzie:

$C_r$  – pojemność w układzie równoległym.

Z definicji  $Q$  i  $D$  wynika, że między nimi zachodzi zależność odwrotnie proporcjonalna

$$D = \frac{1}{Q}, \quad (7.16)$$

więc stratność cewek może być też przedstawiana współczynnikiem stratności  $D$ .

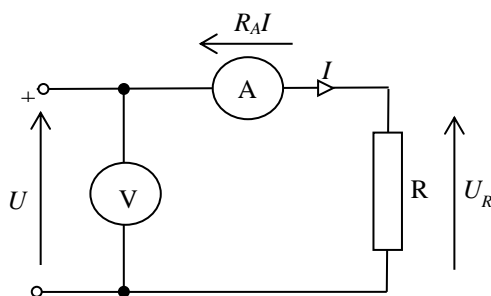
## 7.2. Metody pomiarowe

### 7.2.1. Metody pomiarowe przy prądzie stałym

#### 7.2.1.1. Metoda techniczna

Metoda techniczna polega na pomiarze prądu, napięcia i obliczeniu rezystancji wg prawa Ohma. Do przeprowadzenia pomiaru wymagany jest amperomierz i woltomierz. Woltomierz i amperomierz mogą być włączane na dwa sposoby.

Na rys. 7.6 przedstawiono połączenie układu dla przypadku włączenia woltomierza przed amperomierz. Metoda ta nazywana jest również metodą z poprawnie mierzonym prądem.



Rys. 7.6. Pomiar rezystancji za pomocą amperomierza i woltomierza włączonego przed amperomierz

Wartość rezystancji wyznaczona z zależności

$$R = \frac{U_R}{I}, \quad (7.17)$$

obarczona jest błędem, który wynika z pominięcia spadku napięcia na amperomierzu. Napięcie występujące na rezystancji  $U_R$  jest mniejsze od napięcia na zaciskach wejściowych o napięcie występujące na amperomierzu i wynosi

$$U_R = U - R_A I, \quad (7.18)$$

gdzie:

$R_A$  – rezystancja wewnętrzna amperomierza.

Stąd rezystancja mierzona  $R_m$  wynosi

$$R_m = \frac{U - R_A I}{I} = \frac{U}{I} - R_A = R - R_A. \quad (7.19)$$

Ten układ połączeń można stosować do mierzenia dużych rezystancji, gdy  $R \gg R_A$ .

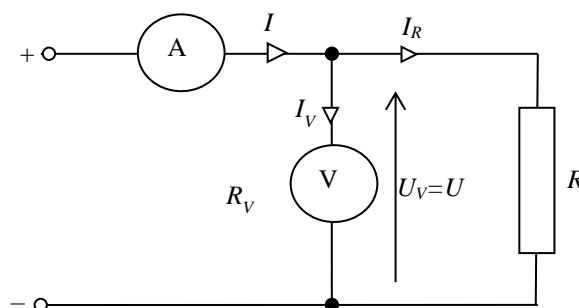
Względny błąd metody wyrażony jest wzorem

$$\delta_R = \frac{R_z - R}{R} = \frac{R_A + R - R}{R} = \frac{R_A}{R}, \quad (7.20)$$

gdzie:

$R_m = R_A + R$  – zmierzony opór zastępczy.

Na rys. 7.7 przedstawiono połączenie układu dla przypadku włączenia woltomierza za amperomierzem. Metoda ta nazywana jest również metodą z poprawnie mierzonym napięciem.



Rys. 7.7. Pomiar rezystancji za pomocą woltomierza włączonego za amperomierzem

Wartość rezystancji jest również obarczona błędem, który wynika z pominięcia prądu  $I_V$  płynącego przez woltomierz ( $R_V < \infty$ ). Prąd płynący przez rezystancję  $I_R$  jest mniejszy od prądu  $I$  w gałęzi głównej o wartość prądu płynącego przez woltomierz i wynosi

$$I_R = I - \frac{U}{R_V} \quad (7.21)$$

gdzie:

$R_V$  – rezystancja wewnętrzna woltomierza.

Ze wskazań amperomierza i woltomierza wyznacza się rezystancję odbiornika  $R$  na podstawie zależności



$$R = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}} \quad (7.22)$$

Ten układ połączeń można stosować do mierzenia małych rezystancji  $R \ll R_V$ , ponieważ wartość  $\frac{U}{R_V}$  występująca w mianowniku, określająca prąd płynący przez woltomierz, jest mała w stosunku do prądu płynącego przez amperomierz.

Względny błąd metody wyraża zależność

$$\delta_R = \frac{R_z - R}{R} = \frac{R_z}{R} - 1 = \frac{R_V}{R_V + R} - 1 = \frac{R_V - R_V - R}{R_V + R} = -\frac{R}{R_V + R}, \quad (7.23)$$

gdzie:

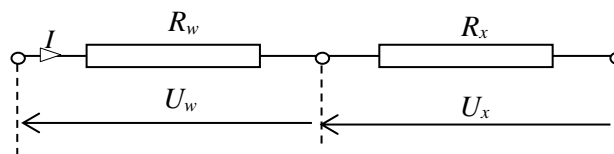
$$R_z = \frac{R_V \cdot R}{R_V + R} \text{ – zmierzony opór zastępczy.}$$

W praktyce układ pierwszy stosuje się do pomiaru rezystancji większych niż  $1 \Omega$ , natomiast układ drugi do pomiaru rezystancji mniejszych niż  $1 \Omega$ .

Metody pomiaru rezystancji opisane powyżej nazywają się pomiarem technicznym. Do zalet tej metody należy zaliczyć możliwość pomiaru rezystancji urządzeń podczas ich pracy.

### 7.2.1.2. Metoda porównawcza

W układzie pomiarowym, przedstawionym na rys. 7.8. połączono szeregowo dwa rezystory: wzorcowy  $R_w$  oraz rezystor badany  $R_x$ .



**Rys. 7.8. Układ do pomiaru rezystancji metodą porównawczą**

Mierząc spadek napięcia  $U_w$ , na rezystorze wzorcowym  $R_w$ , można wyznaczyć prąd płynący w obwodzie. Wynosi on

$$I = \frac{U_w}{R_w} \quad (7.24)$$

Wartość napięcia odłożona na rezystorze badanym wynosi

$$U_x = R_x I \quad (7.25)$$

Uwzględniając w równaniu 7.25 prąd wyznaczony z równania 7.24 otrzymano zależność pozwalającą na wyznaczenie szukanej rezystancji

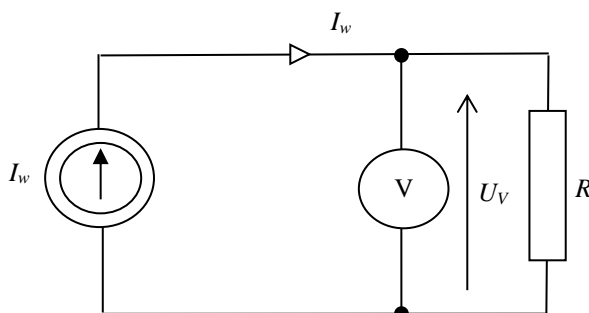
$$R_x = R_w \frac{U_x}{U_w} \quad (7.26)$$

Błąd pomiarowy metody jest równy sumie wartości względnych błędów rezystancji wzorcowej oraz błędów pomiaru spadku napięć na rezystorze badanym oraz wzorcowym.

$$\delta_{R_x} = \pm (\delta_{R_w} + \delta_{U_x} + \delta_{U_w}) \quad (7.27)$$

### 7.2.1.3. Metoda z zastosowaniem wzorcowych źródeł prądowych lub napięciowych

W układzie jak na rys. 7.9 prąd płynący przez rezystor mierzony jest wyznaczany pośrednio. Przy zastosowaniu źródła prądowego o znanym, stabilnym natężeniu prądu  $I_w$ , rezystancję  $R$  można wyznaczyć dokonując pomiaru spadku napięcia na niej.



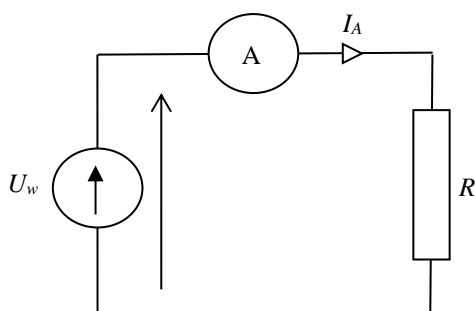
Rys. 7.9. Schemat układu do pomiaru rezystancji zasilanego z wzorcowego źródła prądowego

Rezystancję wyznacza się wówczas z następującej zależności

$$R = \frac{U_V}{I_w} = c \cdot U_V, \quad (7.28)$$

gdzie:  $c$  - współczynnik proporcjonalności między mierzoną rezystancją a spadkiem napięcia na rezystancji.

Podobny pomiar rezystancji można wykonać w układzie z wzorcowym źródłem napięciowym, przedstawionym na rys. 7.10



Rys. 7.10. Schemat układu do pomiaru rezystancji z wzorcowym źródłem napięciowym

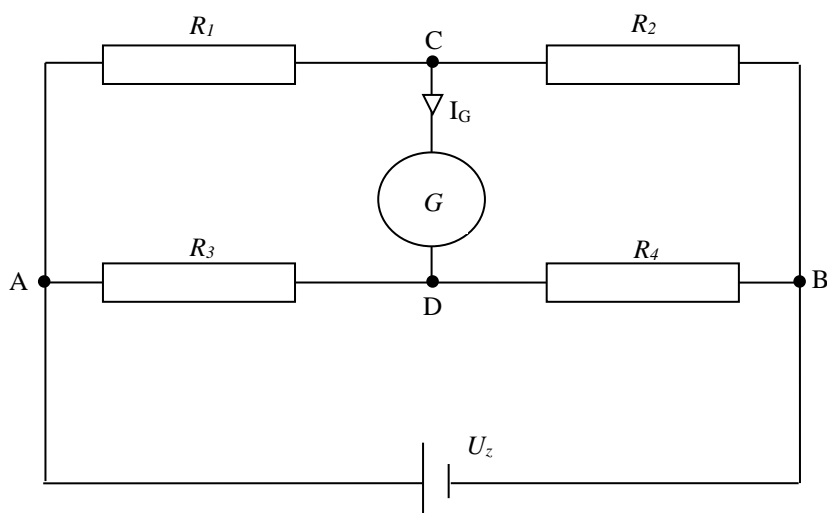
Rezystancję wyznacza się wówczas z następującej zależności

$$R = \frac{U_w}{I_A} = k \cdot \frac{1}{I_A}, \quad (7.29)$$

gdzie:  $k$  - współczynnik proporcjonalności wynikający z wartości napięcia wzorcowego źródła. Mierzona rezystancja jest odwrotnie proporcjonalna do przyływającego przez nią prądu.

#### 7.2.1.4. Metoda mostkowa (mostek Wheatstone'a)

Mostek Wheatstone'a umożliwia pomiar nieznannej rezystancji przez porównanie jej z rezystancjami oporników, dokładnie wywzorcowanych. Schemat mostka zamieszczono na rys. 7.11.



Rys. 7.11. Mostek Wheatstone'a

Mostek składa się z czterech ramion, na których znajdują się cztery rezystory  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ . Między punktem C i D znajduje się galwanometr. Przy odpowiednim doborze rezystancji ramion mostka przez galwanometr nie płynie prąd, a napięcie  $U_{CD}$  jest równe 0.

Stąd można zapisać równanie

$$R_1 R_4 - R_2 R_3 = 0 \quad (7.30)$$

Z powyższego wzoru wynika, że jest to metoda polegająca na pomiarze rezystancji w jednym z czterech ramion mostka, podczas gdy rezystancja w pozostałych trzech ramionach są znane.

Zakładając że zwykle rezystor  $R_1$  jest elementem o mierzonej rezystancji, otrzymano równanie

$$R_x = R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (7.31)$$

Jest to warunek równowagi mostka Wheastone'a. Mostki przeznaczone do pomiaru w stanie równowagi są nazywane mostkami zrównoważonymi.

Źródłem błędów pomiarowych jest ograniczona dokładność wykonania rezystorów w gałęziach mostka. Największa możliwa wartość tego błędu jest równa sumie wartości względnych błędów rezystancji w poszczególnych gałęziach mostka:

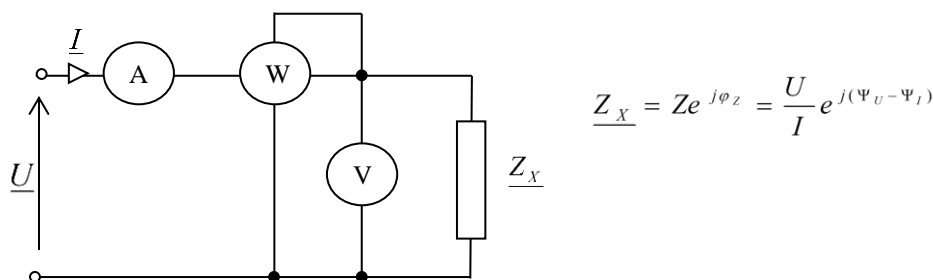
$$\delta_{R_x} = \pm(\delta_{R_2} + \delta_{R_3} + \delta_{R_4}) \quad (7.32)$$

Na dokładność pomiaru rezystancji wpływa również ograniczona czułości wskaźnika równowagi, siły termoelektryczne, zmiany rezystancji mierzonej oraz rezystancji gałęzi mostka wskutek zmian ich temperatury, rezystancji przewodów łączących i styków oraz upływność izolacji.

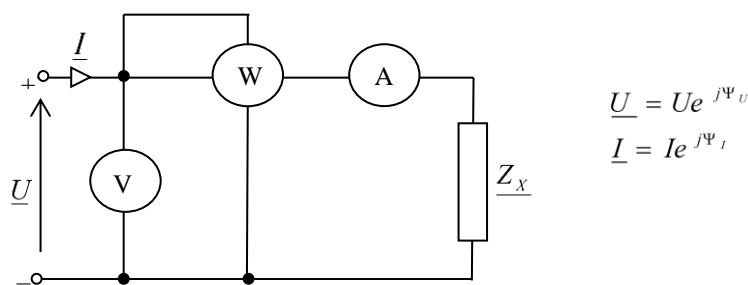
## 7.2.2. Metody pomiarowe przy prądzie przemiennym

### 7.2.2.1. Metoda techniczna

Podobnie, jak w przypadku pomiarów rezystancji metodą techniczną prądem stałym do pomiaru impedancji prądem przemiennym można stosować dwa układy pomiarowe: układ do pomiaru małych impedancji (rys. 7.12) oraz układ do pomiaru dużych impedancji (rys. 7.13).



Rys. 7.12. Schematy metody technicznej pomiaru małych impedancji



Rys. 7.13. Schematy metody technicznej pomiaru dużych impedancji

Ze wskazań woltomierza V i amperomierza A można wyznaczyć wartość modułu impedancji  $Z_X$ .

$$Z_X = \frac{U}{I} \quad (7.33)$$

Rezystancję  $R_X$ , będącą rzeczywistą częścią impedancji  $Z_X$ , wyznacza się pośrednio korzystając z pomiaru mocy czynnej  $P$  za pomocą watomierza.

$$R_X = \frac{P}{I^2} \quad (7.34)$$

Tak wyznaczona rezystancja, w przypadku cewki jest sumą rezystancji jej przewodów i rezystancji wynikającej ze strat energii w rdzeniu (straty na histerezę i prądy wirowe).

Jeżeli impedancja mierzona ma charakter indukcyjny, to wartość indukcyjności oblicza się ze wzoru

$$L_X = \frac{\sqrt{Z_X^2 - R_X^2}}{2\pi f} \quad (7.35)$$

Przy pomiarach impedancji o charakterze pojemnościowym, wartość pojemności określa zależność 7.37.

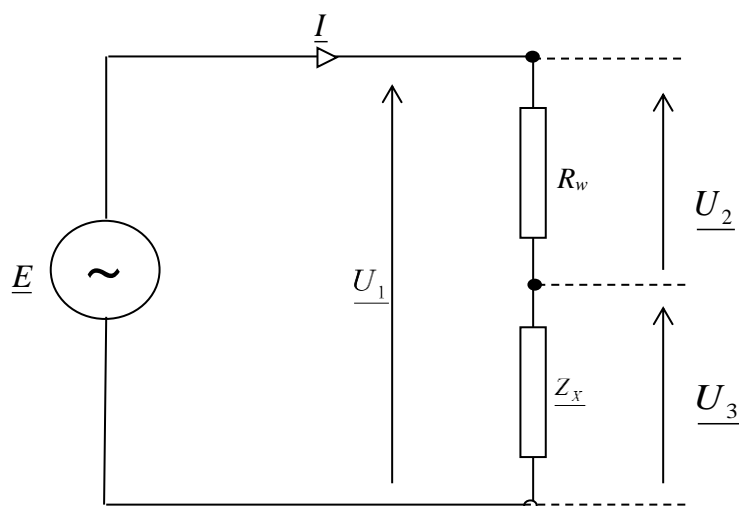
$$C_X = \frac{1}{2\pi f \sqrt{Z_X^2 - R_X^2}} \quad (7.36)$$

Kondensatory rzeczywiste dla małych częstotliwości (technicznych) są zbliżone do elementów idealnych, dlatego można przy pomiarach pojemności metodą techniczną pominąć rezystancję  $R_X$  kondensatora, wówczas

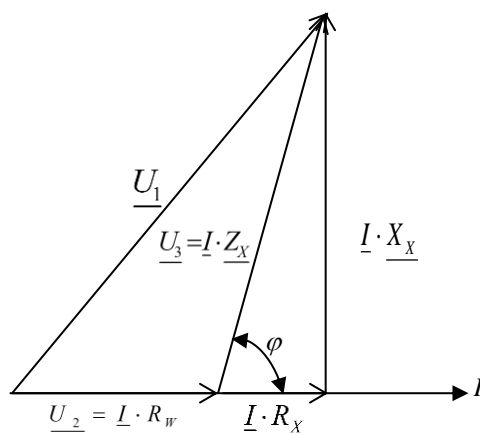
$$C_X = \frac{I}{2\pi f U} \quad (7.37)$$

### 7.2.2.2. Metoda trzech woltomierzy

Metoda polega na pomiarze trzech napięć: napięcia zasilającego układ  $\underline{U}_1$ , napięcia na rezystancji wzorcowej  $\underline{U}_2$  oraz napięcia na zaciskach badanej impedancji  $\underline{U}_3$ . Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 7.14.



Rys. 7.14. Schemat układu do pomiaru impedancji metodą trzech woltomierzy



Rys. 7.15. Wykres wektorowy układu do pomiaru impedancji metodą trzech woltomierzy

Na podstawie wykresu wektorowego, przedstawionego na rys. 7.15 można określić zależności matematyczne występujące pomiędzy napięciami:

$$U_1^2 = U_2^2 + U_3^2 - 2U_2 \cdot U_3 \cdot \cos \alpha = U_2^2 + U_3^2 + 2U_2 \cdot U_3 \cdot \cos \varphi, \quad (7.38)$$

gdzie

$\alpha$  – kąt między  $U_2$  i  $U_3$ ,  $\alpha = 180^\circ - \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{U_1^2 - U_2^2 - U_3^2}{2U_2 U_3},$$

Z wykresu wektorowego otrzymujemy:

$$I = \frac{U_2}{R_w} \quad (7.39)$$

$$R_x \cdot I = U_3 \cdot \cos \varphi, \quad (7.40)$$

$$R_x = \frac{U_3 \cdot \cos \varphi}{I} = R_w \frac{U_3}{U_2} \cdot \cos \varphi \quad (7.41)$$

Po przekształceniu powyższych wzorów mamy zależność

$$Z_x = \frac{U_3}{I} = \frac{U_3}{U_2} \cdot R_w \quad (7.42)$$

Stąd

$$R_x = Z_x \cdot \cos \varphi \quad (7.43)$$

$$X_x = \sqrt{Z_x^2 - R_x^2} \quad (7.44)$$

Najważniejszą wadą metody jest znaczny błąd wynikający z ilości mierników potrzebnych do pomiaru. Do ograniczenia tego błędu stosuje się mierniki o wysokiej klasie lub jeden miernik, gdyż napięcia nie muszą być mierzone równocześnie.

### 7.2.2.3. Metoda rezonansowa

Rezonans elektryczny, to taki stan obwodu, w którym częstotliwość wymuszenia jest równa częstotliwości własnej obwodu elektrycznego. Przy czym w obwodzie muszą pojawić się indukcyjności i pojemności oraz dobroć obwodu musi być większa od jedności ( $Q > 1$ ). Zjawisko rezonansu charakteryzuje się tym, że odpowiedzi układu na pobudzenie osiągają wartości ekstremalne. Częstotliwość własna prostych obwodów R, L, C określona jest zależnością:

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (7.45)$$

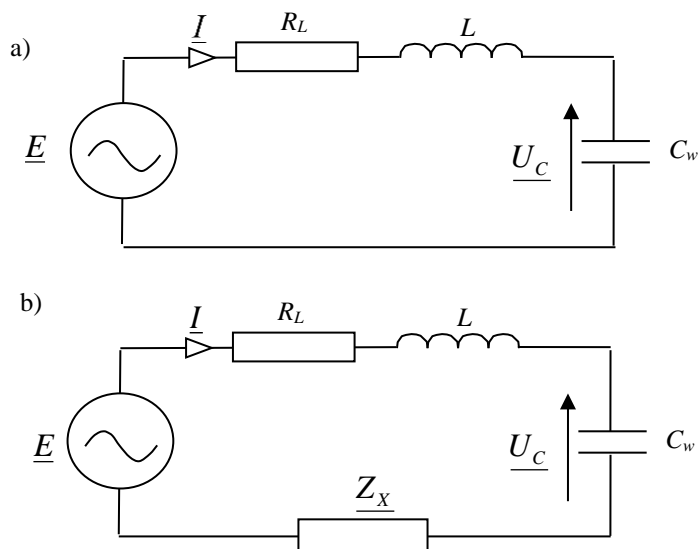
Skutkami wystąpienia zjawiska rezonansu w obwodzie szeregowym R,L,C są następujące zależności:

- Impedancja obwodu jest równa rezystancji ( $\underline{Z} = R$ ), czyli reaktancja obwodu jest równa zero ( $X = X_L - X_C = 0$ ),
- Prąd w obwodzie osiąga wartość maksymalną  $\underline{I} = \frac{U}{R}$ ,

- Napięcie na rezystancji obwodu jest równe napięciu przyłożonemu do obwodu  $\underline{U}_R = \underline{U}$ ,
- Suma geometryczna napięć na indukcyjności i pojemności obwodu jest równa zero  $\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0$ ,
- Napięcie na indukcyjności jest co do modułu równe napięciu na pojemności  $\underline{U}_L = \underline{U}_C$ ,
- Kąt przesunięcia fazowego między przyłożonym napięciem a prądem jest równy zero  $\varphi = 0$ .

Metody rezonansowe wykorzystują zjawisko rezonansu elektrycznego do wyznaczania składowych impedancji dwójnika. W obwodzie RLC zjawisko rezonansu może być wywołane przy stałych parametrach RLC, zmianą częstotliwości zasilania lub przy stałej wartości częstotliwości zasilania, zmianą wartości elementów  $L$  oraz  $C$ . W zależności od sposobu połączenia elementów RLC w obwodzie może wystąpić zjawisko rezonansu napięć (rezonans szeregowy) lub zjawisko rezonansu prądów (rezonans równoległy).

Schemat zastępczy układu do pomiaru składowych impedancji, wykorzystujący rezonans szeregowy, przedstawiono na rys. 7.16.



**Rys. 7.16. Schemat układu do pomiaru impedancji metodą rezonansową**

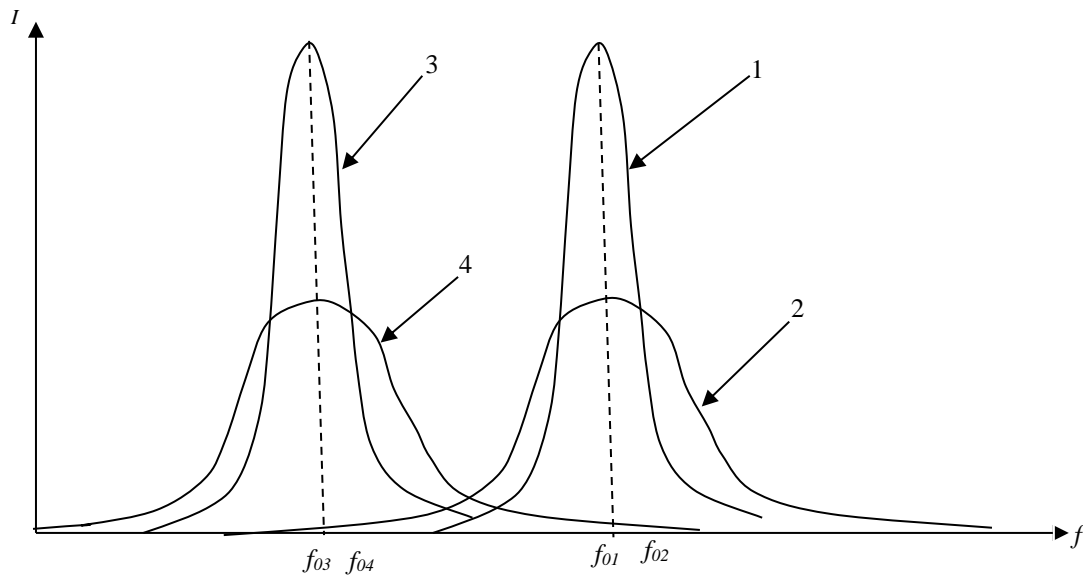
Układ realizujący metodę rezonansową może być sprowadzony do stanu rezonansu poprzez zmianę odpowiednio wzorcowej wartości pojemności (lub indukcyjności), a także poprzez zmianę częstotliwości. Częściej wykorzystuje się zmianę pojemności lub indukcyjności, ze względu na możliwość pomiaru wybranej składowej biernej przy założonej częstotliwości.

Metoda rezonansowa pomiaru składowych impedancji polega na pomiarze podstawowych parametrów obwodu rezonansowego: dobroci  $Q_o$ , pojemności kondensatora



wzorcowego  $C_w$ , częstotliwości rezonansowej  $f$ , napięcia odłożonego na kondensatorze  $u_c$  oraz napięcia zasilającego  $e$  przed (rys. 7.16a) i po włączeniu (rys. 7.16b) badanego dwójnika o impedancji  $\underline{Z}_x$ .

Analiza właściwości obwodu rezonansowego związana jest z krzywymi rezonansowymi, czyli zależnością napięcia i prądu od częstotliwości. W zależności od rodzaju i właściwości badanego dwójnika krzywe rezonansowe mają odmienny kształt, co pokazano na rys. 7.17.

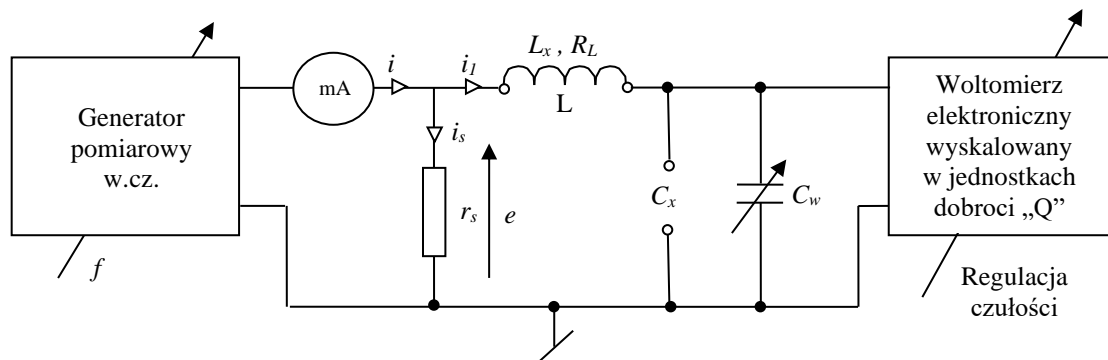


**Rys. 7.17. Krzywe rezonansowe dla obwodu szeregowego**

Krzywe rezonansowe dla obwodu szeregowego:

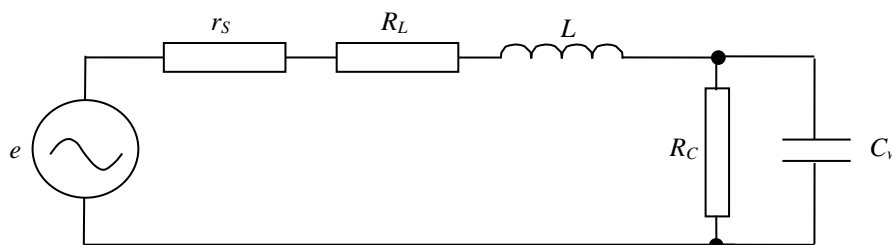
- 1) krzywa rezonansowa wzorcowego obwodu rezonansowego,
- 2) krzywa rezonansowa po włączeniu do obwodu rezonansowego impedancji  $\underline{Z}_x = R, X = 0$ ,
- 3) krzywa rezonansowa po włączeniu do obwodu rezonansowego impedancji  $\underline{Z}_x = jX, R = 0$ ,
- 4) krzywa rezonansowa po włączeniu do obwodu rezonansowego impedancji  $\underline{Z}_x = R + jX$ .

Przykładem przyrządu wykorzystującego metodę rezonansową do pomiaru parametrów dwójników biernych, jest Q-metr (miernik dobroci), którego schemat przedstawiono na rys. 7.18.



Rys. 7.18. Q-metr

Miernik wyposażono w generator przestrajany w szerokich granicach częstotliwości, który poprzez układ sprzęgający zasila szeregowy obwód rezonansowy. Obwodem sprzęgającym najczęściej jest rezystor o małej rezystancji. Elementem pojemnościowym jest wzorcowy kondensator powietrzny  $C_w$  o zmiennej pojemności wyposażony w podziałkę. Napięcie na kondensatorze mierzy woltomierz wywzorcowany w wartościach dobroci  $Q$ . Elementami  $L$ ,  $R_L$  są kolejno indukcyjność oraz rezystancja cewki wzorcowej (lub badanej przy pomiarach indukcyjności). Napięcie na kondensatorze  $C_w$  w chwili rezonansu, jest  $Q$ -krotnie większe od napięcia generatora pomiarowego.

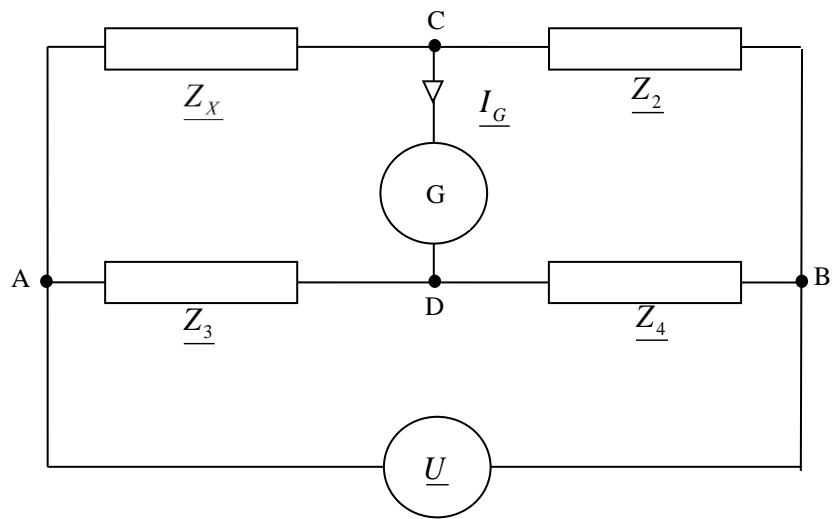


Rys. 7.19. Schemat zastępczy Q – metru

#### 7.2.2.4. Metoda mostkowa

Mostki prądu przemiennego mają zastosowanie w pomiarach parametrów elektrycznych cewek i kondensatorów, a także obwodów, w których występuje indukcyjność lub pojemność. W przeciwieństwie do mostków prądu stałego istnieje bardzo dużo układów mostkowych prądu przemiennego, różniących się między sobą rodzajem elementów umieszczonych w ramionach, przeznaczeniem, zakresem pomiaru itp.

Podstawowy układ mostka prądu przemiennego podano na rys. 7.20.



**Rys. 7.20. Układ mostka prądu przemiennego**

Ramiona mostka stanowią cztery impedancje  $\underline{Z}_X, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$ . Mostek zasilany jest napięciem sinusoidalnie przemiennym. Jako wskaźnik równowagi służy galwanometr prądu przemiennego. W stanie równowagi przez galwanometr prąd nie płynie ( $I_G=0$ ). Obowiązuje wtedy podstawowe wyrażenie opisujące stan równowagi mostków

$$\underline{Z}_X \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3, \quad (7.46)$$

gdzie

$\underline{Z}_X, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$  - impedancje ramion mostka prądu przemiennego.

Rozszerzając równie 7.46, otrzymano

$$\underline{Z}_X e^{j\varphi_X} \cdot \underline{Z}_4 e^{j\varphi_4} = \underline{Z}_2 e^{j\varphi_2} \cdot \underline{Z}_3 e^{j\varphi_3}. \quad (7.47)$$

Równanie 7.47 może być zastąpione dwoma równaniami, które muszą być spełnione jednocześnie:

$$\underline{Z}_X \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3, \quad (7.48)$$

$$\varphi_X + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \quad (7.49)$$

gdzie:

$\underline{Z}_X, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$  - moduły poszczególnych impedancji,

$\varphi_X, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  - kąty fazowe impedancji.

Przy znanych wartościach impedancji  $\underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$  otrzymujemy równanie określające wartość mierzonej impedancji  $\underline{Z}_X$

$$\underline{Z}_X = \underline{Z}_2 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \quad (7.50)$$

Większość spotykanych mostków w dwu ramionach ma rezystancję, np.  $\text{Re } \underline{Z}_3 = R_3$  oraz  $\text{Re } \underline{Z}_4 = R_4$ . Wtedy wyrażenie na impedancję  $Z_X$  w przypadku pomiaru indukcyjności może przyjąć postać:

$$Z_X = \sqrt{R_X^2 + (\omega L_X)^2} \quad (7.51)$$

W przypadku pomiaru pojemności wyrażenie (7.50) przyjmuje postać:

$$Z_X = \sqrt{R_X^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C_X}\right)^2} \quad (7.52)$$

Na podstawie wskazań mostka można określić zarówno  $R_X$  jak również  $L_X$  bądź  $C_X$ .

Z najczęściej spotykanych mostków prądu przemiennego można wymienić mostek Maxwella - do pomiaru indukcyjności oraz mostki Wiena i Scheringa - do pomiaru pojemności.

### 7.3. Badania laboratoryjne

Cel ćwiczenia:

- poznanie parametrów dwójników biernych,
- poznanie metod pomiaru parametrów dwójników biernych,
- zapoznanie z obsługą przyrządów do badania parametrów dwójników biernych .

Wykaz przyrządów na stanowisku pomiarowym

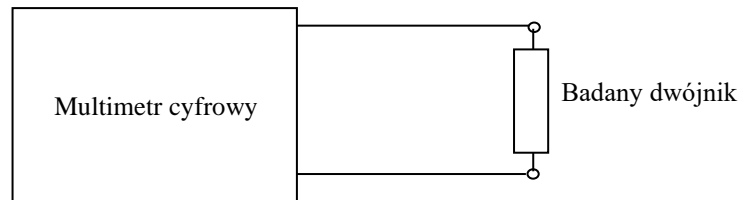
Lp.	Nazwa przyrządu
1	Multimetr cyfrowy
2	Mostek cyfrowy
3	Cyfrowy miernik impedancji
4	Rezystor dekadowy
5	Generator pomiarowy

## Przebieg ćwiczenia:

### 1. Zastosowanie multimetru cyfrowego

#### A) Pomiar parametrów wybranych elementów biernych

Do odpowiednich gniazd wejściowych multimetru cyfrowego dołączyć badany dwójnik zgodnie ze schematem, przedstawionym na rys. 7.21.



Rys. 7.21. Schemat układu do pomiaru parametrów dwójnika przy pomocy multimetru cyfrowego

a) Zmierzyć parametry wybranych wartości rezystora dekadowego.

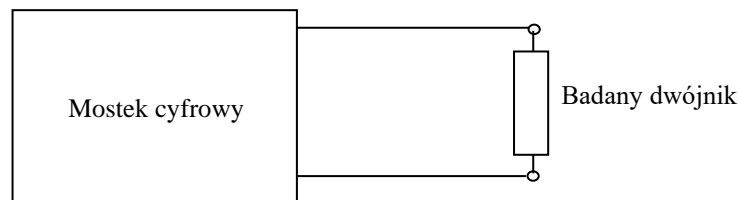
b) Zmierzyć parametry dwójników biernych.

Wyniki pomiarów zamieścić w tabeli.

### 2. Zastosowanie cyfrowego mostka

#### A) Pomiar parametrów wybranych elementów biernych

Wykonać odpowiednią procedurę kalibracyjną mostka cyfrowego. Do odpowiednich gniazd wejściowych mostka cyfrowego dołączyć badany dwójnik zgodnie ze schematem, przedstawionym na rys. 7.22.



Rys. 7.22. Schemat układu do pomiarów parametrów dwójnika przy pomocy mostka cyfrowego

a) Zmierzyć parametry wybranych wartości rezystora dekadowego dla zadanych częstotliwości.

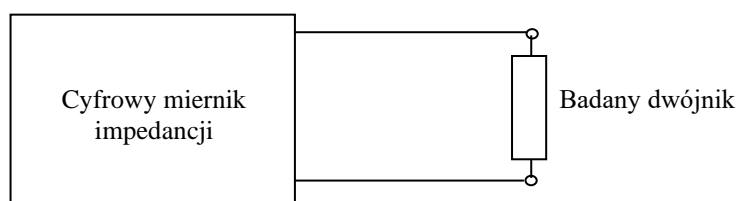
b) Zmierzyć parametry dwójników biernych dla zadanych częstotliwości.

Wyniki pomiarów zamieścić w tabeli.

### 3. Zastosowanie cyfrowego miernika impedancji

#### A) Pomiar parametrów wybranych elementów biernych

Do odpowiednich gniazd wejściowych cyfrowego miernika impedancji dołączyć badany dwójnik zgodnie ze schematem, przedstawionym na rys. 7.23.



**Rys. 7.23. Schemat układu do pomiarów parametrów dwójnika przy pomocy cyfrowego miernika impedancji**

a) Zmierzyć parametry wybranych wartości rezystora dekadowego dla zadanych częstotliwości.

b) Zmierzyć parametry dwójników biernych dla zadanych częstotliwości.

Wyniki pomiarów zamieścić w tabeli.

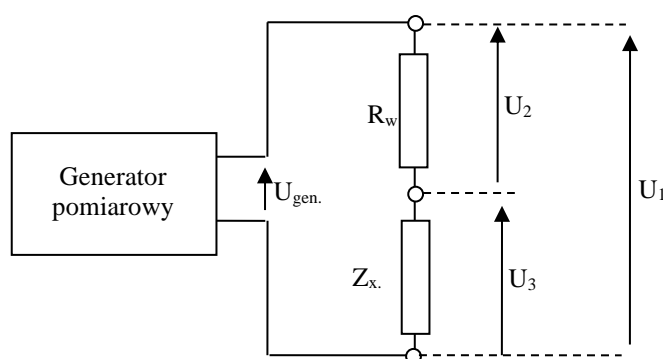
#### **4. Pomiary składowych impedancji nieznanego dwójnika**

*A) Pomiary składowych impedancji nieznanego dwójnika za pomocą cyfrowego miernika impedancji*

Połączyć układ jak w poprzednim zadaniu. Dla wartości częstotliwości podanych w tabeli wykonać pomiar modułu impedancji  $|Z_x|$  oraz kąta fazowego impedancji „ $\varphi$ ” przy pomocy cyfrowego miernika impedancji. Wyniki pomiarów zamieścić w tabeli.

*B) Pomiary składowych impedancji metodą trzech woltomierzy*

Połączyć układ jak na rys. 7.24.



**Rys. 7.24. Schemat układu do pomiarów składowych impedancji metodą trzech woltomierzy**

Dla zadanych częstotliwości wykonać pomiar napięcia  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  za pomocą woltomierza cyfrowego. Wyniki pomiarów zamieścić w tabeli.

### **Opracowanie sprawozdania:**

1. Wykonać odpowiednie obliczenia. Ich wyniki zamieścić w odpowiednich tabelach.  
Przedstawić przykłady przeprowadzonych obliczeń.
2. Zamieścić wymagane wykresy błędów (odpowiednio opisane).
3. Porównać wyniki pomiarów z danymi technicznymi.
4. Sformułować wnioski oraz spostrzeżenia wynikające z przeprowadzonych pomiarów i obserwacji.

### **Przykładowe pytania kontrolne:**

1. Parametry i schematy zastępcze elementów biernych w zakresie w.cz. i m.cz..
2. Klasyfikacja metod pomiaru parametrów dwójników biernych.
3. Pomiar rezystancji metodą techniczną (z wykorzystaniem amperomierza i woltomierza).
4. Mostek Wheatstone'a - budowa, zasada pracy, ocena dokładności pomiaru).
5. Zasada pracy mostków prądu zmiennego - warunki równowagi – na przykładzie mostka Maxwella-Wiena).
6. Metoda rezonansowa - własności obwodu rezonansowego, jego charakterystyki.
7. Miernik dobroci - zasada działania, budowa, ocena dokładności pomiaru.
8. Pomiar parametrów cewki indukcyjnej Q-metrem.
9. Wykorzystanie miernika dobroci do pomiaru parametrów kondensatorów.

### **7.4. Literatura**

1. A. Chwaleba, M. Poniński, A. Siedlecki: *Metrologia elektryczna*, Wyd. 10, WNT, 2010.
2. J. Dusza, G. Gortat, A. Leśniewski: *Podstawy miernictwa*, Ofic. Wyd. Politechniki Warszawskiej, 1998.
3. A. Jellonek, Z. Karkowski: *Miernictwo radiotechniczne*, WNT, 1972.
4. Z. Kuśmierek i in.: *Metrologia elektryczna i elektroniczna*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 1996.
5. J. Parchański: *Miernictwo elektryczne i elektroniczne*, WSiP, 1991.
6. A. Piłatowicz i in.: *Elektrotechnika i elektronika dla nieelektryków*, WNT, 2004.