

Diskontinuirani konačni elementi za eliptičku jednadžbu

PETRA BRČIĆ*

petrabrcic94@gmail.com

20. kolovoza 2020.

Sažetak: Ovaj rad se bavi diskontinuiranom Galerkinovom metodom za rješavanje općenitog oblika eliptičke jednadžbe. Najprije ćemo se baviti teorijom zatim će biti dana i numerička metoda kao i algoritam. Na kraju će biti nekoliko primjera koji ilustriraju metodu i usporedba s nekim drugim metodama kao npr. vrlo popularnom metodom konačnih elemenata.

Ključni pojmovi: Diskontinuirana Galerkinova metoda, Metoda konačnih elemenata, Soboljevi prostori, Slabo rješenje, Dune : : PDELab.

SADRŽAJ

1	Modelni problem	2
1.1	Slabo rješenje	2
2	Razlomljeni prostori Soboljeva	3
2.1	Skokovi i usrednjenja	3
3	Varijacijska formulacija	4
3.1	Konzistentnost	5
4	Prostor konačnih elemenata	5
4.1	Referentni elementi - Fizički elementi	5
4.2	Bazne funkcije	7
4.3	Numerička kvadratura	8
5	DG Shema	9
6	Svojstva	9
6.1	Koercitivnost bilinearnih formi	9

*diplomski studij Primijenjene Matematike, PMF Zagreb

6.2	Neprekidnost bilinearnih formi	10
6.3	Lokalno očuvanje mase	10
6.4	Egzistencija i jedinstvenost DG rješenja	11
7	Implementacija DG metode koristeći Dune: :PDELab	11
8	Numerički eksperimenti	13
8.1	Glatko rješenje	13
8.2	Singularno rješenje	14
9	Zašto DG?	15

1. MODELNI PROBLEM

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. poligonalna domena. Neka je rub domene $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, gdje je $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ te neka je n jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Za dane $f \in L^2(\Omega)$, $g_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$, $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ promatramo sljedeću eliptičku zadaću

$$(P) \begin{cases} -\nabla \cdot (K \nabla p) + \alpha p &= f & \text{u } \Omega, & (1) \\ p &= g_D & \text{na } \Gamma_D, & (2) \\ K \nabla p \cdot n &= g_N & \text{na } \Gamma_N. & (3) \end{cases}$$

Koeficijent $K = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ je matrica koja je simetrična, pozitivno definitna i uniformno ograničena odozgo i odozdo, tj. postoje dvije pozitivne konstante K_0 i K_1 takve da vrijedi

$$K_0 x \cdot x \leq K x \cdot x \leq K_1 x \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Drugi koeficijent α je nenegativna skalarna funkcija. Jednadžba (2) je Dirichletov rubni uvjet, a (3) Neumannov. Derivacija u smjeru normale ili fluks je zadan na Γ_N .

Problem (P) ima rješenje $p \in C^2(\overline{\Omega})$ zvano jako rješenje uz dodatne uvjete na glatkoću danih podataka f , g_D , g_N , K i α .

1.1. Slabo rješenje

Radi jednostavnosti pretpostavimo da je $\partial\Omega = \Gamma_D$. Iz teorema o tragu znamo da postoji proširenje od $g_D \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ u Ω . Neka je $p_D \in H^1(\Omega)$ to proširenje

$$p_D = g_D \text{ na } \partial\Omega.$$

Varijacijska ili slaba formulacija problema (P) glasi:

Naći $p = p_d + w$ gdje je $w \in H_0^1(\Omega)$ takav da vrijedi

$$\int_{\Omega} (K \nabla w \cdot \nabla v + \alpha w v) = \int_{\Omega} f v - \int_{\Omega} (K \nabla p_D \cdot \nabla v + \alpha p_D v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Rješenje p problema (P) se naziva slabo rješenje. Egzistencija i jedinstvenost od w slijede kao posljedica Lax-Milgramovog teorema.

Ako je $\partial\Omega = \Gamma_N$ i $\alpha = 0$, slabo rješenje je jedinstveno do na aditivnu konstantu, uz to treba biti zadovoljen uvjet kompatibilnosti $\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} g_N = 0$ kojeg dobijemo integriranjem jednadžbe (1) po Ω i primijenom Greenovog teorema.

2. RAZLOMLJENI PROSTORI SOBOLJEVA

Razlomljeni prostori Soboljeva su prirodni prostori za rad s diskontinuiranim Galerkinovim metodama. Ovi prostori jako ovise o particiji domene. Neka je Ω poligonalna domena podijeljena na elemente E , gdje je E trokut ili pravokutnik u 2D, tetraedar ili četverostrana prizma u 3D. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je mreža konformna i označimo ju s ε_h , gdje je h maksimalni dijamaetar elemenata. Također pretpostavimo da je mreža regularna, to znači da ako je h_E dijametar od E i ρ_E maksimalni dijametar kugle upisane elementu E , tada postoji konstanta $\rho > 0$ takva da je

$$\frac{h_E}{\rho_E} \leq \rho, \quad \forall E \in \varepsilon_h.$$

Definiramo razlomljeni Soboljev prostor za bilo koji broj $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\varepsilon_h) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \forall E \in \varepsilon_h, v|_E \in H^s(E) \right\},$$

opskrbljen razlomljenom Soboljevom normom

$$\|v\|_{H^s(\varepsilon_h)} = \left(\sum_{E \in \varepsilon_h} \|v\|_{H^s(E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preciznije, koristit ćemo razlomljenu gradijentu polunormu:

$$\|\nabla v\|_{H^0(\varepsilon_h)} = \left(\sum_{E \in \varepsilon_h} \|\nabla v\|_{L^2(E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Očito imamo $H^s(\Omega) \subset H^s(\varepsilon_h)$ i $H^{s+1}(\varepsilon_h) \subset H^s(\varepsilon_h)$.

2.1. Skokovi i usrednjenja

Označimo s Γ_h skup unutarnjih bridova (stranica) subdvizije ε_h . Sa svakim bridom (stranicom) e vežemo jediničnu vjansku normalu n_e . Ako je e na granici $\partial\Omega$ tada je n_e vjanska normala na $\partial\Omega$. Ako su E_1^e i E_2^e dva susjedna elementa koji dijele stranu e , onda postoje dva traga od v duž e . Možemo zbrojiti ili

oduzeti te veličine pa dobivamo usrednjenje i skok od v . Pretpostavljamo da je n_e jedinična normala orijentirana iz E_1^e u E_2^e :

$$\begin{cases} \{v\} &= \frac{1}{2}(v|_{E_1^e}) + \frac{1}{2}(v|_{E_2^e}), \\ [v] &= (v|_{E_1^e}) - (v|_{E_2^e}) \end{cases} \quad \forall e = \partial E_1^e \cap \partial E_2^e.$$

Proširujemo definicije skoka i usrednjenja i na stranice koje pripadaju $\partial\Omega$:

$$\{v\} = [v] = (v|_{E_1^e}), \quad \forall e \in \partial E_1^e \cap \partial\Omega.$$

3. VARIJACIJSKA FORMULACIJA

Pretpostavljamo da je $s > \frac{3}{2}$. Uvodimo dvije bilinearne forme $J_0^{\sigma_0, \beta_0}, J_1^{\sigma_1, \beta_1} : H^s(\varepsilon_h) \times H^s(\varepsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$ koje penaliziraju skok funkcije i normalne derivacije:

$$\begin{aligned} J_0^{\sigma_0, \beta_0}(v, w) &= \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\sigma_e^0}{|e|^{\beta_0}} \int_e [v] [w], \\ J_1^{\sigma_1, \beta_1}(v, w) &= \sum_{e \in \Gamma_h} \frac{\sigma_e^1}{|e|^{\beta_1}} \int_e [K \nabla v \cdot n_e] [K \nabla w \cdot n_e]. \end{aligned}$$

Parametri $\sigma_e^0, \sigma_e^1 \geq 0$ su realni brojevi koje nazivamo parametri penalizacije. Potencije $\beta_0, \beta_1 > 0$ ovise o dimenziji d . Svi parametri će biti specificirani kasnije. Vrijedi

$$|e| \leq h_E^{d-1} \leq h^{d-1}.$$

Sada definiramo DG bilinearnu formu $a_\epsilon : H^s(\varepsilon_h) \times H^s(\varepsilon_h) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(v, w) &= \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E K \nabla v \cdot \nabla w + \int_\Omega \alpha v w \\ &\quad - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e \{K \nabla v \cdot n_e\} [w] + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e \{K \nabla w \cdot n_e\} [v] \\ &\quad + J_0^{\sigma_0, \beta_0}(v, w) + J_1^{\sigma_1, \beta_1}(v, w). \end{aligned}$$

Bilinearna forma a_ϵ sadrži parametar ϵ koji poprima vrijednosti $-1, 0, 1$. Vrijedi da je a_ϵ simetrična ako je $\epsilon = -1$ i nesimetrična u suprotnom.

Također, definiramo i linearnu formu

$$L(v) = \int_\Omega f v + \epsilon \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(K \nabla v \cdot n_e + \frac{\sigma_e^0}{|e|^{\beta_0}} v \right) g_D + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e v g_N.$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost i nejednakost traga impliciraju da su svi integrali u formama dobro definirani za funkcije koje pripadaju prostoru $H^s(\varepsilon_h)$ za bilo koji $s > \frac{3}{2}$. Općenita DG varijacijska formulacija problema (P) glasi:

Naći $p \in H^s(\varepsilon_h)$, $s > \frac{3}{2}$ takav da

$$a_\epsilon(p, v) = L(v), \quad \forall v \in H^s(\varepsilon_h). \quad (4)$$

3.1. Konzistentnost

Sljedeća propozicija uspostavlja ekvivalenciju između modelnog problema i varijacijske formulacije.

Propozicija 3.1. *Neka je $s > \frac{3}{2}$. Pretpostavimo da slabo rješenje problema (P) pripada prostoru $H^s(\varepsilon_h)$; tada p zadovoljava varijacijski problem (4). Obratno, ako $p \in H^1(\Omega) \cap H^s(\varepsilon_h)$ zadovoljava (4), tada je p rješenje problema (P).*

Dokaz. Dokaz se može naći na stranici 30 knjige [1]. □

4. PROSTOR KONAČNIH ELEMENATA

Promatramo konačnodimenzionalne potprostore razlomljenih Soboljevih prosora $H^s(\varepsilon_h)$ za $s > \frac{3}{2}$. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Potprostor konačnih elemenata je

$$\mathcal{D}_k(\varepsilon_h) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall E \in \varepsilon_h, v|_E \in \mathbb{P}_k(E)\},$$

gdje je $\mathbb{P}_k(E)$ oznaka za prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog k . Funkcije prosora $\mathcal{D}_k(\varepsilon_h)$ ćemo nazivati test funkcijama. Primijetimo da su test funkcije diskontinuirane duž rubova (stranica) mreže.

Kao i kod klasične metode konačnih elemenata, svaki element mreže E (još ga nazivamo i fizički element) se preslikava na referentni element \hat{E} i sav račun se vrši na referentnom elementu. Sljedeća potpoglavlja uvode trokute, pravokutnike i tetraedre kao referentne elemente.

4.1. Referentni elementi - Fizički elementi

Pri implementaciji DG metode, radi efektivnosti, računamo volumne doprinose na referentnom elementu.

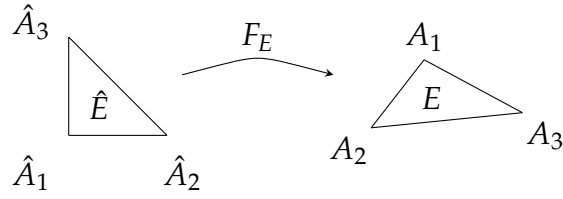
Trokut

Sastoji je od trokuta \hat{E} s vrhovima $\hat{A}_1(0,0)$, $\hat{A}_2(1,0)$, $\hat{A}_3(0,1)$. Za dani fizički element E postoji afino preslikavanje F_E sa referentnog elementa na E . Ako E ima vrhove $A_i(x_i, y_i)$ za $i = 1, 2, 3$ tada je preslikavanje F_E definirano s

$$F_E \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}), \quad y = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y})$$

gdje su

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}. \end{aligned}$$



Preslikvanje možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_E \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = B_E \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + b_E,$$

gdje je B_E 2×2 matrica i b_E vektor koje možemo lako dobiti u sljedećem obliku

$$B_E = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, \quad b_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Determinanta od B_E se koristi u računanju integrala. Ako je $|E|$ označava površinu od E , tada vrijedi $\det(B_E) = 2|E|$. Preslikavanje F_E predstavlja zamijenu varijabli

$$\hat{v} = v \circ F_E.$$

Drugim riječima, $\hat{v}(\hat{x}, \hat{y}) = v(x, y)$.

Četverokut

Sastoji se od kvadrata \hat{E} s vrhovima $\hat{A}_1(-1, -1)$, $\hat{A}_2(1, 1)$, $\hat{A}_3(1, 1)$, $\hat{A}_4(-1, 1)$. Ako E ima vrhove $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ transformacijsko preslikavanje $F_E : \hat{E} \rightarrow E$ je definirano sa

$$F_E \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x = \sum_{i=1}^4 x_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}), \quad y = \sum_{i=1}^4 y_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y})$$

gdje su

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y}), \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y}), \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y}), \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y}). \end{aligned}$$

Preslikavanje F_E je afino ako je fizički element paralelogram. U općenitijem slučaju definiramo B_E kao Jacobijevu matricu preslikavanja F_E

$$B_E = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix}.$$

Da bi preslikavanje F_E bilo invertibilno, dovoljno je da je determinanta od B_E raličita od nule. To je slučaj za E konveksan.

Tetraedar

Sastoji se od tetraedra \hat{E} s vrhovima $\hat{A}_1(0,0,0)$, $\hat{A}_2(1,0,0)$, $\hat{A}_3(0,1,0)$, $\hat{A}_4(0,0,1)$. Postoji afino preslikavanje $F_E : \hat{E} \rightarrow E$, definirano po koordinatama vrhova $A_i(x_i, y_i)$:

$$F_E \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), \quad y = \sum_{i=1}^4 y_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), \quad z = \sum_{i=1}^4 z_i \hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}),$$

gdje su

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}, \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x}, \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y}, \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{z}. \end{aligned}$$

Sva svojstva koja vrijede za referentni trokut vrijede i za referentni tetraedar.

Napomena 4.1. Konačnodimenzionalan prostor elemenata DG metode $\mathcal{D}_k(\varepsilon_h)$ je porostor diskontinuiranih polinoma definiranih na fizičkom elementu, dakle ne na referentnom elementu. u praksi ćemo, u slučaju trokuta i paralelograma u 2D te tetraedra i paralelepipeda u 3D, izabrati prostor

$$\tilde{\mathcal{D}}_k(\varepsilon_h) = \{v \in L^2(\Omega) : \forall E \in \varepsilon_h, v \circ F_E \in \mathbb{P}_k(\hat{E})\}.$$

Na takvim elementima, aproksimacijski rezultati na $\mathcal{D}_k(\varepsilon_h)$ i $\tilde{\mathcal{D}}_k(\varepsilon_h)$ su jednaki. Međutim, u slučaju općenitih četverostranih prizmi, prostor $\mathbb{P}_k(\hat{E})$ nema optimalna aproksimacijska svojstva, no $\mathbb{P}_k(E)$ ima.

Dakle, za općnite mreže, možemo izabrati $\mathbb{P}_k(E)$ te raditi račun na svakom fizičkom elementu ili možemo izabrati prostor $\mathbb{Q}_k(\hat{E})$, gdje \mathbb{Q}_k označava prostor polinoma stupnja manjeg od k u svakom smjeru.

4.2. Bazne funkcije

Zbog nedostatka neprekidnosti između elemenata mreže za testne funkcije, bazne funkcije za $\mathcal{D}_k(\varepsilon_h)$ imaju nosač od jednog elementa. Pišemo

$$\mathcal{D}_k(\varepsilon_h) = \text{span}\{\phi_i^E : 1 \leq i \leq N_{loc}, E \in \varepsilon_h\}$$

gdje je

$$\phi_i^E(x) = \begin{cases} \hat{\phi}_i \circ F_E(x), & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Lokalne bazne funkcije $(\hat{\phi}_i)_{1 \leq i \leq N_{loc}}$ su definirane na referentnom elementu. U [1] predlažu korištenje u 2D:

$$\hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^I \hat{y}^J, \quad I + J = i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Na taj način dobijemo lokalnu dimenziju $N_{loc} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Npr, imamo

- Po dijelovima linearne:

$$\hat{\phi}_0(\hat{x}, \hat{y}) = 1, \quad \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}, \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}.$$

- Po dijelovima kvadratne:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_0(\hat{x}, \hat{y}) &= 1, \quad \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}, \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}, \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}^2, \quad \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}\hat{y}, \quad \hat{\phi}_5(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}^2. \end{aligned}$$

Slično, u 3D definiramo

$$\hat{\phi}_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{x}^I \hat{y}^J \hat{z}^K, \quad I + J + K = i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Ovo daje lokalnu dimenziju $N_{loc} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.

Fleksibilnost DG metode nam omogućava da lako možemo promijeniti bazne funkcije. Npr., možemo koristiti Legendrove polinome ili neke druge polinome koji zadovoljavaju željeni uvjet ortogonalnosti.

4.3. Numerička kvadratura

1D

Integral na segmetu se računa tako da se najprije preslika fizički rub na segment $(-1, 1)$, što je ustvari referentni element u 1D. Zatim se integral aproksimira korištenjem numeričkog kvadrturnog pravila na intervalu $(-1, 1)$ kao npr. Gaussovo pravilo.

2D

Integral funkcije \hat{v} definirane na referentnom elementu \hat{E} se može izračunati pomoću:

$$\int_E v = \int_{\hat{E}} v \circ F_E \det(B_E) = 2|E| \int_{\hat{E}} \hat{v}.$$

Integral se zatim aproksimira pomoću

$$\int_E v \approx 2|E| \sum_{j=1}^{Q_D} w_j \hat{v}(s_{x,j}, s_{y,j}).$$

Ako integrand uključuje vektorsku funkciju w i gradijent od v , imamo

$$\begin{aligned} \int_E \nabla v \cdot w &= 2|E| \int_{\hat{E}} (B_E^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v} \cdot \hat{w} \\ &\approx 2|E| \sum_{j=1}^{Q_D} w_j (B_E^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v}(s_{x,j}, s_{y,j}) \cdot \hat{w}(s_{x,j}, s_{y,j}). \end{aligned}$$

Slično, ako integrand sadrži gradijent od v i w imamo

$$\int_E \nabla v \cdot \nabla w \approx 2|E| \sum_{j=1}^{Q_D} w_j (B_E^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v}(s_{x,j}, s_{y,j}) \cdot (B_E^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{w}(s_{x,j}, s_{y,j}).$$

5. DG SHEMA

Općenita DG metoda konačnih elemenata glasi:

Naći $P_h \in \mathcal{D}_k(\varepsilon_h)$ takvu da

$$a_\epsilon(P_h, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{D}_k(\varepsilon_h). \quad (DG)$$

- Ako je $\epsilon = -1$, metoda se naziva Simetrična Interiorna Penalizacijska Galerkinova (SIPG). Ova metoda konvergira ako je penalizacijski parametar σ_e^0 dovoljno velik.
- Ako je $\epsilon = +1$, metoda se naziva Nesimetrična Interiorna Penalizacijska Galerkinova (NIPG). Ova metoda konvergira za bilo koju nenegativnu vrijednost parametra σ_e^0 . Ova metoda također uključuje slučaj σ_e^0 koja se pojavljuje kao OBB metoda u literaturi.
- Ako je $\epsilon = 0$, metoda se naziva Inkompletna Interiorna Penalizacijska Galerkinova (IIPG). Konvergira pod istim uvjetima kao SIPG.
- Član $J_1^{\sigma_1, \beta_1}$ je dodatni stabilizacijski član. Analiza metode je neovisna o ovom članu pa možemo pretpostavljati, radi jednostavnosti, da je $\sigma_e^1 = 0$ za svaki e .

6. SVOJSTVA

6.1. Koercitivnost bilinearnih formi

Za DG bilinearnu formu imamo

$$\begin{aligned} a_\epsilon(v, v) &= \sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E K(\nabla v)^2 + \int_\Omega \alpha v^2 \\ &\quad + (\epsilon - 1) \sum_{e \in \Gamma_h \cap \Gamma_D} \int_e \{K \nabla \cdot n_e\} [v] + J_0^{\sigma_0, \beta_0}(v, v). \end{aligned}$$

Definiramo energetska normu na $\mathcal{D}_k(\varepsilon_h)$ sa

$$\|v\|_\epsilon = \left(\sum_{E \in \varepsilon_h} \int_E K \nabla v \cdot \nabla v + \int_\Omega \alpha v^2 + J_0^{\sigma_0, \beta_0}(v, v) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ovo je zaista norma za $\sigma_e^0 > 0$ za svaki e . Koercitivnost imamo odmah zadovoljenu ako je $\epsilon = 1$, tada je koercitivna konstanta $\kappa = 1$ i vrijedi

$$\|v\|_\epsilon^2 = a_\epsilon(v, v), \quad \forall v \in \mathcal{D}_k(\epsilon_h).$$

U slučaju gdje je $\epsilon = -1$ ili $\epsilon = 0$ nakon podužeg računa, koji se može naći u [1] na stranici 38, dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned} a_\epsilon(v, v) \geq & \left(1 - \frac{\delta}{2}|1 - \epsilon|\right) \sum_{E \in \epsilon_h} \|K^{\frac{1}{2}} \nabla v\|_{L^2(E)}^2 \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\sigma_e^0 - \frac{C_t^2 K_1^2 n_0}{2\delta K_0} |1 - \epsilon|}{|e|^{\beta_0}} \|[v]\|_{L^2(e)}^2. \end{aligned}$$

Odabirom $\delta = 1$ kada je $\epsilon = 0$ i $\delta = \frac{1}{2}$ kada je $\epsilon = -1$, dovoljno velikog σ_e^0 (npr. $\sigma_e^0 \geq (C_t^2 K_1^2 n_0 / K_0)$ kada je $\epsilon = 0$ i $\sigma_e^0 \geq (2C_t^2 K_1^2 n_0 / K_0)$ kada je $\epsilon = -1$, ovdje je n_0 oznaka za maksimalan broj susjeda koji može imati jedan element mreže), imamo ocjenu s konstantnom koercitivnosti $\kappa = \frac{1}{2}$

$$a_\epsilon(v, v) \geq \kappa \|v\|_\epsilon^2.$$

6.2. Nепrekidnost bilinearnih formi

Ako je $\sigma_e^0 > 0$ za svaki e , onda je bilinearna forma a_e nепrekidna u prostoru $\mathcal{D}_k(\epsilon_h)$ opskrbljenom energetsom normom $\|\cdot\|_\epsilon$

$$a_e(v, w) \leq M \|v\|_\epsilon \|w\|_\epsilon.$$

Međutim, bilinearna forma nije nепrekidna na općem prostoru $H^s(\epsilon_h)$ s obzirom na energetska normu.

6.3. Lokalno očuvanje mase

Zanimljivo svojstvo koje prirodno dolazi s DG metodama je svojstvo očuvanja mase na svakom elementu mreže. Zbog manjka nепrekidnosti između elemenata možemo izabrati test funkciju $v \in \mathcal{D}_k(\epsilon_h)$ koja je jednaka nekoj drugoj konstanti na svakom elementu. Ako fiksiramo element E koji pripada interioru domene i izaberemo $v = 1$ na E i $v = 0$ na ostalim elementima, metoda (DG) se reducira na

$$\int_E \alpha P_h - \sum_{e \in \partial E} \int_e \{K \nabla P_h \cdot n_e\} [v] + \sum_{e \in \partial E} \frac{\sigma_e^0}{|e|^{\beta_0}} \int_e [P_h] [v] = \int_E f.$$

Što je ekvivalentno sa

$$\int_E (\alpha P_h - f) + \sum_{e \in \partial E} \frac{\sigma_e^0}{|e|^{\beta_0}} \int_e (P_h|_E - P_h|_{\mathcal{N}(e;E)}) = \int_{\partial E} \{K \nabla P_h \cdot n_E\},$$

gdje je $\mathcal{N}(e; E)$ oznaka za element mreže ϵ_h koji je susjed elementu E preko ruba e . Tako smo dobili jednadžbu ravnoteže na elementu E .

6.4. Egzistencija i jedinstvenost DG rješenja

Lema 6.1. *Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:*

- (i) U NIPG: $k \geq 1$ i ili je $\alpha > 0$ ili je $\sigma_e^0 > 0$ za svaki e ;
- (ii) U SIPG ili IIPG: $k \geq 1$ i σ_e^0 je ograničen odozdo velikom konstantom za svaki e ;
- (iii) U NIPG: $k \geq 2$ i $\sigma_e^0 = 0$ za sve e i $\alpha = 0$.

Tada, DG rješenje P_h postoji i jedinstveno je.

Dokaz. Jer je problem (DG) konačnodimenzionalan linearan, egzistencija je ekvivalentna jedinstvenosti. Pretpostavimo da su P_h^1 i P_h^2 dva rješenja. Njihovu razliku označimo s $w_h = P_h^1 - P_h^2$ i ona zadovoljava

$$a_\epsilon(w_h, w_h) = 0.$$

Zbog koercitivnosti forme a_ϵ imamo $\|w_h\|_\epsilon = 0$. Očito u slučaju (i) i (ii) to implicira da je $w_h = 0$ jer je $\|\cdot\|_\epsilon$ norma. Slučaj (iii) nije tako jednostavan. Možemo samo zaključiti da je w_h po dijelovima konstanta na svakom elementu $E \in \mathcal{E}_h$. Kako bi pokazali da je w_h konstanta globalno na Ω moramo konstruirati test funkciju v na svakom danom elementu E takvu da je veličina $\int_E K \nabla v \cdot n_e$ dana na jednom bridu (stranici) od E i iščezava na svim ostalim bridovima (stranicama). Ako je K konstanta na svakom E možemo konstruirati test funkciju na svakom trokutu, paralelogramu, ili tetraedru. Ako K nije konstanta na svakom E , moramo dodatno pretpostaviti da je h dovoljno malen. \square

7. IMPLEMENTACIJA DG METODE KORISTEĆI Dune::PDELab

Objasnimo sada kako je realizirana DG metoda za naše primjere koji su navedeni u sljedećem poglavlju. Korištene su dvije poznate vrste mreže Dune::YaspGrid i Dune::AluGrid. Sama konstrukcija mreže nam je već poznata s nastave, pa se time ovdje nećemo baviti.

Konstrukcija prostora konačnih elemenata se vrši na način da iz ponuđenih prostora odaberemo onaj koji odgovara našem problemu i odabranoj mreži. Npr. u 2D slučaju kod korištenja Dune::YaspGrid-a odgovarajući prostor se odabire sa

```
1 typedef Dune::PDELab::QkDGLocalFiniteElementMap<Grid::ctype, Real, degree, dim>
   FEMDG;
2 FEMDG femdg;
```

ili u 2D slučaju sa simpleksima i nekonfornom Dune::AluGrid mrežom možemo koristiti sljedeće

```
1 typedef Dune::PDELab::OPBLocalFiniteElementMap<Grid::ctype, Real, degree, dim, Dune
   ::GeometryType::simplex> FEMDG;
2 FEMDG femdg;
```

Konstrukcija prostora konačnih elemenata se vrši na sljedeći način

```

1 typedef Dune::PDELab::NoConstraints CON;
2 typedef Dune::PDELab::ISTL::VectorBackend<Dune::PDELab::ISTL::Blocking::fixed,
   blocksize> VBE;
3 typedef Dune::PDELab::GridFunctionSpace<GV,FEM,CON,VBE> GFS;
4 GFS gfs(gv,fem);

```

Primijetimo da ovdje koristimo varijablu `blocksize` što nismo radili do sada na nastavi, ona se zadaje ovisno o elementima koje koristimo. Primjeti su dani respektivno na gore navedene

```

1 const int blocksize = Dune::QkStuff::QkSize<degree,dim>::value;

te

```

```

1 const int blocksize = Dune::PB::PkSize<degree,dim>::value;

```

Više o ovim alatima se može pročitati u dokumentaciji Dune-a na [2].

Objasnimo sada navažniji dio koji određuje našu metodu, a to je kreiranje operatora. Operator za naš problem je dan sa `Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDG<>` i njega možemo koristiti za naše primjere. Možemo vidjeti kako izgleda primjer postavljanja argumenata za poziv operatora

```

1 Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDGMethod::Type m;
2 if (method=="SIPG") m = Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDGMethod::SIPG;
3 if (method=="NIPG") m = Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDGMethod::NIPG;
4 Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDGWeights::Type w;
5 if (weights=="ON") w = Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDGWeights::weightsOn;
6 if (weights=="OFF") w = Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDGWeights::weightsOff;
7 typedef Dune::PDELab::ConvectionDiffusionDG<Problem,FEM> LOP;
8 LOP lop(problem,m,w,alpha);

```

Što se tiče samog operatora više se naravno može vidjeti u `Dune::PDELab`-ovom kodu, no važno je napomenuti da ovdje trebamo proći i samo po unutarnjim stranicama što smo mogli vidjeti iz slabe formulacije problema, dakle "dignuta" je zastavica za `alpha_skeleton` što nismo imali prilike vidjeti još na nastavi. S obzirom da je operator zaista lijepo napisan, predlažem nakon otvaranja u Qt Creator-u otići na poziv i CTRL+lijevi klik i pogledati kako izgleda taj kod. Kažimo još samo da se ϵ postavlja unutar koda ovisno o odabranoj metodi sa sljedećim kodom gdje je defaultna metoda NIPG

```

1 theta = 1.0;
2 if (method==ConvectionDiffusionDGMethod::SIPG) theta = -1.0;
3 if (method==ConvectionDiffusionDGMethod::NIPG) theta = 0.0;

```

Još je jedino ostalo postaviti rješavač ovisno o metodi. Ovdje možemo vidjeti koji su rješavači pogodni za koju metodu.

```

1 int ls_verbosity = 2;
2 if (method=="SIPG"){
3     typedef Dune::PDELab::ISTLBackend_SEQ_CG_ILU0 LS;
4     LS ls(10000,ls_verbosity);
5     typedef Dune::PDELab::StationaryLinearProblemSolver<GO,LS,U> SLP;
6     SLP slp(go,ls,u,1e-12);
7     slp.apply();
8 }

```

```

9 else{
10     //typedef Dune::PDELab::ISTLBackend_SEQ_BCGS_AMG_SSOR<GFS> LS;
11     //LS ls(2,10000,ls_verbosity);
12     typedef Dune::PDELab::ISTLBackend_SEQ_BCGS_ILU0 LS;
13     LS ls(10000,ls_verbosity);
14     typedef Dune::PDELab::StationaryLinearProblemSolver<G0,LS,U> SLP;
15     SLP slp(go,ls,u,1e-12);
16     slp.apply();
17 }

```

Na kraju preostaje ispisati rješenje što radimo na standardni način koristeći `Dune::SubsamplingVTKWriter<>`.

8. NUMERIČKI EKSPERIMENTI

Rješavamo problem (P) na jediničnom kvadratu gdje je $K = I$, $\alpha = 0$ i Dirichletov uvjet je zadan na cijelom rubu ($\Gamma_D = \partial\Omega$). Pogledat ćemo konvergenciju numeričkih rješenja za glatka i ne glatka egzaktna rješenja za svaku DG metodu koju smo opisali ranije. Variramo stupanj polinoma $k = 1, 2, 3$. Grešku ćemo označiti s

$$e_h = p - P_h.$$

Računat ćemo L^2 normu greške $\|e_h\|_{L^2(\Omega)}$. Penalizacijski parametar σ_e^0 je jednak konstanti σ na svim unutarnjim stranicama. Na rubovima, penalizacijski parametar je jednak 2σ za IIPG i SIPG, te σ za NIPG.

8.1. Glatko rješenje

Neka je egzaktno rješenje

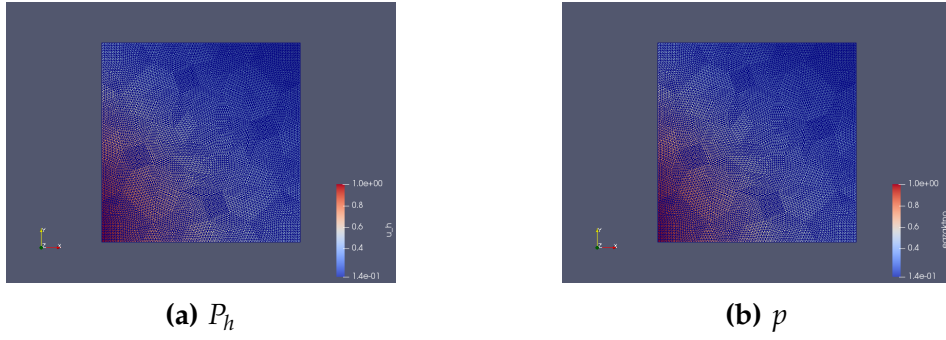
$$p(x, y) = e^{-x-y^2}, \quad \forall (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1).$$

Za superpenalizacijski parametar uzimamo 1. Rezultati koje dobivamo su

	k	β_0	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	rate
NIPG	1	1	$9.853 \cdot 10^{-5}$	0.64548
	2	1	$1.440 \cdot 10^{-6}$	0.713259
	3	1	$7.922 \cdot 10^{-9}$	0.753275
	2	0	$3.401 \cdot 10^{-6}$	0.540652
	3	0	$2.271 \cdot 10^{-8}$	0.621627
SIPG	1	6	$1.179 \cdot 10^{-4}$	0.878401
	2	18	$1.172 \cdot 10^{-6}$	0.900932
	3	36	$7.447 \cdot 10^{-9}$	0.929766

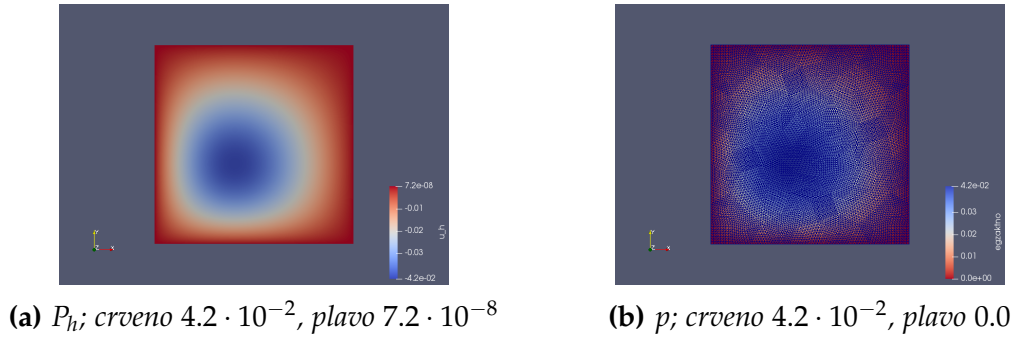
Neka je sada superpenalizacijski parametar $\beta_0 = 3$. Pogledat ćemo drugačije glatko egzaktno rješenje tako da je njegova Dirichletova vrijednost jednaka stupnju polinoma k . Egzaktno rješenje je dano sa

$$p(x, y) = x(x-1)y(y-1)e^{-x^2-y^2}, \quad \forall (x, y) \in (0, 1)^2.$$



Slika 1: Primjer 1 za NIPG i $k = 3$ te $\beta_0 = 1$; crveno 1, plavo $1.4 \cdot 10^{-1}$

	k	β_0	$\ e_h\ _{L^2(\Omega)}$	rate
NIPG	1	1	$4.03 \cdot 10^{-2}$	0.667953
	2	1	$4.029 \cdot 10^{-2}$	0.724675
	3	1	$4.029 \cdot 10^{-2}$	0.759196



Slika 2: Primjer 2 za NIPG i $k = 3$ te $\beta_0 = 1$

8.2. Singularno rješenje

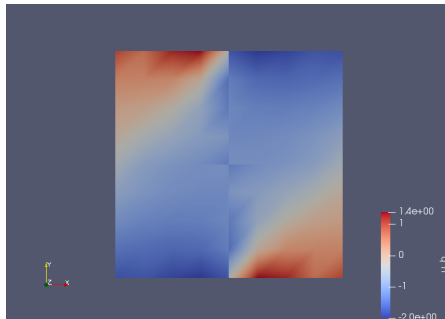
Neka je $p \in H^{1+\delta}(\Omega)$, $0 < \delta < 1$ rješenje. Promatramo domenu $\Omega = (-1, 1)^2$ podijeljenu na 4 poddomene Ω_i tako da je $\Omega_1 = (0, 1)^2$, $\Omega_2 = (-1, 0) \times (0, 1)$, $\Omega_3 = (-1, 0)^2$ i $\Omega_4 = (0, 1) \times (-1, 0)$. Rješavamo problem (P) gdje je $\alpha = 0$, $f = 0$ i $\Gamma_D = \partial\Omega$. Matrica koeficijenata K je jednaka $K_i I$ na svakoj poddomeni Ω_i . Pretpostavljamo da je $K_1 = K_3 = 5$ i $K_2 = K_4 = 1$. Egzaktno rješenje je dano u polarnim koordinatama sa

$$p(r, \theta) = r^\delta (a_i \sin(\delta\theta) + b_i \cos(\delta\theta)) \quad \text{na } \Omega_i$$

gdje je $\delta = .05354409456$ te te koeficijenti:

$$a_1 = 0.4472135955, a_2 = -0.7453559925, a_3 = -0.9441175905, a_4 = -2.401702643, \\ b_1 = 1, b_2 = 2.333333333, b_3 = 0.5555555555, b_4 = -0.4814814814.$$

Egzaktno rješenje je singularno u ishodištu, u smislu da nema definiran gradijent u $(0,0)$. Koristimo NIPG bez penalizacije i stupnja polinoma 3. Dobivamo sljedeću aproksimaciju.



Slika 3: P_h ; crveno 1.4, plavo -2.0

9. ZAŠTO DG?

Možemo se pitati zašto bi netko koristio DG metodu prije nego neke od ostalih metoda koje smo do sada upoznali. Prvo ćemo reći zašto bi netko uopće koristio bilo koju od metoda koje smo raditi.

Idealno, željeli bi riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu numerički. Ona opisuje neki fizikalan sustav. Što točnije i brže možemo riješiti problem to je metoda bolja. U kontekstu ove usporedbe pitat ćemo se kako metode koje smo radili na nastavi, MKD (Metoda konačnih diferencija), MKV (Metoda konačnih volumena) i MKE (Metoda konačnih elemenata), se ponašaju kada povećavamo red rješenja. Ovo nas zanima jer inače povećavanje reda rješenja može rezultirati efikasnijom metodom, pogotovo za glatke funkcije.

Počnimo sa MKD. MKD nije eksplicitno konzervativna i da bi prešli na veći red moramo koristiti više točaka za računanje sheme što može biti otežano kod korištenja nestrukturiranih mreža.

MKE se lako proširuju na viši red, ali nisu baš adekvatne za hiperboličke probleme. Također, problematični su i diskontinuiteti rješenja.

MKV nam daje konstantno rješenje na volumenu, kako bi prešli na viši red morali bi koristiti puno više točaka, kao kod MKD. One nižeg reda podržavaju nestrukturirane mreže, no povećavanjem reda gubimo fleksibilnost metode.

Dakle, što DG radi bolje od drugih? DG metoda je eksplicitno konzervativna te je također dobro prilagođena za rješavanje hiperboličnih problema. Dobro podnosi diskontinuitete te može koristiti nestrukturirane mreže čak i pri povećanju reda. Dodatno, lokalna priroda rješenja dozvoljava paralelizaciju za

kompleksnije probleme te možemo koristiti funkcije numeričkog fluksa (kao kod MKV) kako bi dočarali fizikalno ponašanje sustava.

LITERATURA

- [1] Beatrice Riviere. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory of implementation*. (Siam, 2008)
- [2] Dune <https://www.dune-project.org/>.
- [3] <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nrpdj/html/index.html>. (predavanja)