4.6 空间点过程

空间点过程是随机几何理论(Stochastic Geometry)的核心内容之一，主要研究随机的空间对象以及它们在空间中的分布规律，可以应用于许多领域，包括通信设计、空间网络规划、网络安全等领域。通过分析空间点过程，可以获得网络中节点之间的距离分布，从而预测网络的性能；使用点过程建立无线网络模型，进而优化基站的位置和覆盖范围。尤其在通信系统的性能分析中有着广泛应用。主要回答以下问题：

1、 如何描述 1 维、2 维或者更高维度空间上一系列点的集合？
2、 空间中随机分布的点的统计特征是什么？
3、 如何估计空间中点的某些特性的统计平均？

4.6.1 数学基础

空间点过程除了需要了解随机过程的基础理论之外，还需要用到一些数学基础知识。下面首先介绍 d 维的球体（ball）、圆环域（annulus）的定义及其体积的计算方法。

定义 4.6.1 球体和环形域：一个半径为$r \in \mathbb{R}_+$、中心位于$c \in \mathbb{R}^d (d \in \mathbb{N})$的 d 维球体是：

$$b_d(c,r) \equiv \{x \in \mathbb{R}^d: |x-c| \le r\}$$

中心位于$c \in \mathbb{R}^d$半径为$0 < r_1 < r_2$的环形域是：

$$a_d(c,r_1,r_2) \equiv \{x \in \mathbb{R}^d: r_1 \le |x-c| \le r_2\}$$

一个点集$S \subset \mathbb{R}^d$的体积记为$|S|$。球体和环形域的体积通常采用以下方法计算得到。

Proposition 11.1 球体和环形域的体积：d 维球$b_d(c,r)$和环形域$a_d(c,r_1,r_2)$的体积为

$$|b_d(c,r)| = c_d r^d$$

$$|a_d(c,r_1,r_2)| = c_d(r_2^d - r_1^d)$$

其中，

$$c_d \equiv \begin{cases} \dfrac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}, & d\ is\ even \\ \dfrac{1}{d!}\pi^{\frac{d-1}{2}} 2^d (\dfrac{d-1}{2})!, & d\ is\ odd \end{cases}$$

三个常用的c_d是：$c_1 = 2$，$c_2 = \pi$，$c_3 = \frac{4}{3}\pi$。

在随机几何中，常常需要用到伽马函数$\Gamma(z)$。

定义 4.6.2 伽马函数$\Gamma(z)$：伽马函数和不完全伽马函数分别为

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t} dt$$

$$\Gamma(z, t_l, t_h) \equiv \int_{t_l}^{\mathrm{t_h}} t^{z-1}\, e^{-t} dt$$

其中，$z \in \mathbb{C}$且$0 \le t_l \le t_h \le \infty$。

对于$z \in \mathbb{N}$，$\Gamma(z, 0, \infty) = \Gamma(z)$，$\Gamma(z) = (z-1)!$。常常用到以下公式：

$$\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\delta) = \frac{\pi\delta}{sin(\pi\delta)}$$

此外，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$，$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$，对于$n \in \mathbb{N}$，$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$。

接下来介绍三个不等式，常用于统计量上下界的估计。

Jensen 不等式：对于随机变量 X，如果 f 是凸函数，则有

$$\mathbb{E}[f(x)] \ge f(\mathbb{E}[x])$$

Markov 不等式：给定一个非负的随机变量 X 和$t \in \mathbb{R}_+$，有

$$\mathbb{P}(X > t) \le \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

利用 Markov 不等式可以很容易得到 Chebychev 不等式。

Chebychev 不等式：给定一个随机变量 X 和$t \in \mathbb{R}_+$，有

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \le \frac{Var(X)}{t^2}$$

4.6.2　空间点过程

在空间中随机分布的点形成空间点过程。不同于一维点过程通过时间顺序来排列点的位置，空间点过程是通过分析落在单位区域内点的个数来定义。常见的空间点过程分为三类：

1、齐次泊松点过程：空间中点的位置相互独立且完全随机。

2、泊松簇过程：空间中的点之间相互吸引，在空间中的分布呈现出簇的状态。

3、硬核点过程：空间中的点分布呈现相互排斥的状态。

本书只介绍最简单的齐次泊松点过程。齐次泊松点过程简称为 HPPP (Homogeneous Poisson Point Process)，定义如下：

定义 4.6.3 齐次泊松点过程（HPPP）一个强度为$\lambda > 0$的 d 维空间上的 HPPP 是一系列随机可数点的集合$\Phi = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}^d$。如果满足以下两个条件，则该点过程$\Phi$称为齐次泊松点过程，简记为 HPPP Φ

1、在空间Φ中随机选择一系列互不相交的有界区域$B_1, B_2, \cdots, B_n$，在这些区域中点的个数为$\Phi(B_1), \Phi(B_2), \cdots, \Phi(B_n)$，则随机变量$\Phi(B_1), \Phi(B_2), \cdots, \Phi(B_n)$相互独立。

2、在空间中任意选择某个有界区域$B \subset \mathbb{R}^d$，则处于区域B内的点的数量$\Phi(\mathrm{B})$服从参数为$\lambda|B|$的泊松分布，$|B|$为有界区域B的体积，λ称为该齐次泊松点过程Φ的强度（Intensity）。即：

$$\Phi(\mathrm{B}) \sim \mathrm{Po}(\lambda|B|)$$

或等价为，

$$P[\Phi(\mathrm{B})=\mathrm{k}]=\frac{(\lambda|B|)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\mathrm{e}^{-\lambda|B|},\quad k\in\mathbb{R}_{+}$$

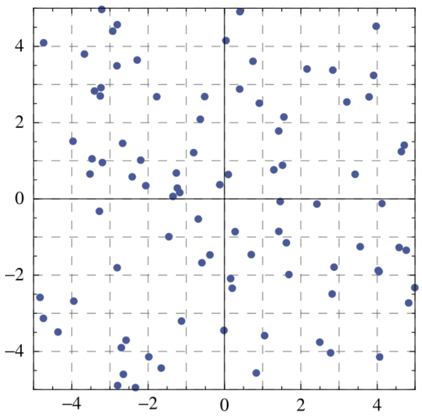

图 1 一个齐次泊松点过程的分布示例（$\lambda=1$）

图 1 是一个齐次泊松点过程的分布示例（$\lambda=1$）。齐次泊松点过程具有以下性质：

1、空间中的点相互独立，具有完全的随机性；

2、在不同区域内，单位面积内点的数量相同(平均)；

3、将点过程整体平移或旋转后，空间点的分布不变。

4.6.3 空间点过程的数学性质

空间点过程的距离分布、矩测度等是空间分析中经常涉及的性质。

在无线网络中，一对通信节点之间的连接性可以用节点之间的距离和信道的衰落特性来评估，因此距离分布估计十分重要。

对于一个 HPPP Φ，设$r_0<r_1<\cdots<r_{n-1}$分别表示Φ中的某一点与其最近邻居的距离、与第 2 近邻居的距离、与第 n 近邻居的距离。以下定理给出了距离分布的概率分布。

定理 4.6.1 给定任意二维的 HPPP Φ，强度为λ，则Φ中任意节点与其最近邻居的距离r_0的概率密度函数是

$$f_{r_0}(r)=2\pi\lambda re^{-\pi\lambda r^2},\quad r>0$$

证明：首先推导出距离r_0的分布函数$F_{r_0}(r)$。根据分布函数的定义，

$$F_{r_0}(r)=P(r_0\le r)=1-P(r_0>r)$$

其中事件$\{r_0>r\}$表示在以节点为圆心、r为半径的圆形区域$b(o,r)$内点的数量为 0。

根据 HPPP 的定义，有：

$$\begin{aligned}F_{r_0}(r)\quad&=1-P(r_0>r)\\&=1-P(\Phi(b(o,r))=0)\\&=1-e^{-\pi\lambda r^2}\end{aligned}$$

对$F_{r_0}(r)$求导可得r_0的概率密度函数为

$$f_{r_0}(r)=2\pi\lambda re^{-\pi\lambda r^2},\quad r>0$$

例 1 假设在一个很大的二维平面区域内随机部署了大量无线传感器节点，区域内节点的分布服从 HPPP 分布，且每平方公里面积内节点的平均数目为 1000，求相邻节点间距离的分布和平均值。

解：由题意可知，随机分布的无线传感器节点组成无线网络，服从二维的 HPPP Φ，强度为

$\lambda = 0.001$（单位面积内节点的平均数目）。根据定理 1，

$$f_{r_0}(r) = 0.006283 \times re^{-0.003141r^2}, \quad r > 0$$

求其期望可得相邻节点间的平均距离为

$$\mathbb{E}(r_0) = \int_0^\infty r \cdot 0.006283re^{-0.003141r^2}dr \approx 15.8154$$

同理，根据 HPPP 分布的定义，可得到第 n 近邻居的距离的概率分布。

定理 4.6.2. 给定强度为λ的二维 HPPP Φ，坐标原点 o 到Φ中各点的排序为$r_0 < r_1 < \cdots < r_{n-1}$，$r_{n-1}$表示点过程Φ中 o 到其第 n 近邻居的距离，则$r_{n-1}$的分布是

$$f_{r_{n-1}}(r) = e^{-\pi\lambda r^2}\frac{2(\pi\lambda r^2)^n}{r\Gamma(n)}, \quad r > 0$$

其中，$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}dt$为伽马函数。

证明：首先推导出距离r_{n-1}的分布函数$F_{r_{n-1}}(r)$。根据分布函数的定义，

$$F_{r_{n-1}}(r) = P(r_0 \le r) = 1 - P(r_{n-1} > r)$$

对于事件$\{r_{n-1} > r\}$，可等效表示为“在以原点为圆心、r为半径的圆形区域$b(o,r)$内点的数量不超过 n-1 个”。因此，根据 HPPP 的定义，$F_{r_{n-1}}(r)$可推导为：

$$F_{r_{n-1}}(r) = 1 - P\left\{\bigcup_{k=0}^{n-1}\Phi\big(\mathrm{b(o,r)}\big) = \mathrm{k}\right\} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\pi\lambda r^2)^k}{k!}e^{-\pi\lambda r^2}$$

对$F_{r_{n-1}}(r)$求导。可得概率密度函数为

$$f_{r_{n-1}}(r) = e^{-\pi\lambda r^2}\frac{2(\pi\lambda r^2)^n}{r\Gamma(n)}, \quad r > 0$$

同时，r_{n-1}的期望是

$$\mathbb{E}(r_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \cdot \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma(n)}$$

利用以上结论，可以估算例题 1 中节点到前六个最近邻居节点的平均距离分别为：

$\mathbb{E}(r_0) = 15.8114$，$\mathbb{E}(r_1) = 23.7171$，$\mathbb{E}(r_2) = 29.6464$，$\mathbb{E}(r_3) = 34.5874$，$\mathbb{E}(r_4) = 38.9108$，$\mathbb{E}(r_5) = 42.8019$。

对于更高维度的 HPPP Φ，距离分布的更一般形式由以下定理给出。

定理 4.6.3 在一个强度为λ的 d 维的 PPP $\Phi \in \mathbb{R}^d$中，节点与其第 n 近邻居的距离r_{n-1}的分布为

$$f_{r_{n-1}}(r) = e^{-\lambda c_d r^d}\frac{d(\lambda c_d r^d)^n}{r\Gamma(n)}, \quad r > 0$$

其中$c_d r^d$是半径为r的 d 维球体的体积（c_d的定义见前面的公式 1-1）。

随机变量的各阶矩体现了均值和方差等数字特征。实际中，通常关注点过程的一阶矩、二阶矩，尤其是点过程中点的函数之和与积的估计。下面介绍 Campbell 定理和概率生成函数(Probability Generation Function, PGFL)。这两个工具分别用于估计点过程中随机变量函数连加或连乘的期望，从而求解点过程的一些统计特性（图 3）。

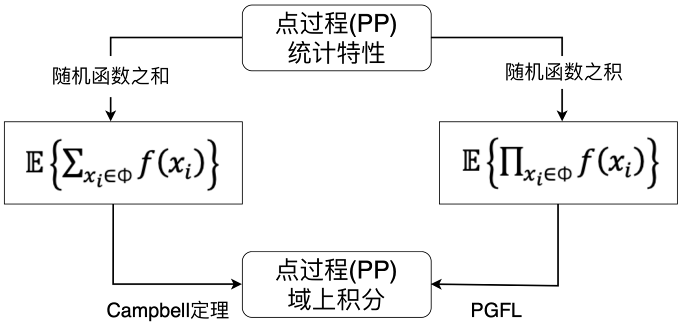

图 3 Campbell 定理和概率生成函数

Campbell 定理：对于任意非负的可测函数 f 和 $A \subseteq \mathbb{R}^2$上强度为λ的 HPPP Φ，有

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{x\in\Phi} f(x)\right\} = \lambda\int_A f(x)dx$$

$$Var\left\{\sum_{x\in\Phi} f(x)\right\} = \lambda\int_A f^2(x)dx$$

Campbell 定理常常用来估计点过程中随机变量函数之和的期望，如无线网络中的干扰信号强度估计。

例 3 在图 2 的无线网络模型中，网络节点随机分布在二维平面中，形成一个 HPPP Φ。假设接收节点x_j处于坐标原点 o，信号发送方x_i在距离 u 以外。x_j除了接收到x_i发送的信号以外，还会收到来自网络中其他发送节点的干扰信号。在设计无线网络时，为了使节点能正常收发消息，需要估计网络中节点接收到的总的干扰信号。

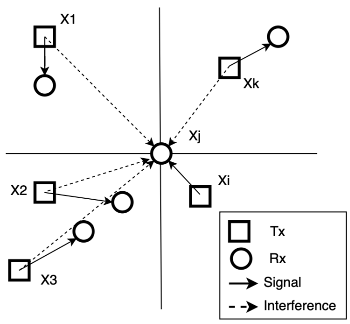

图 2 无线网络干扰信号模型

假设所有节点的发射功率相同，均为 P，则节点x_j收到的总的干扰信号为

$$I_{x_j} = \sum_{\mathrm{x_k}\in\Phi} \mathrm{P}\cdot \mathrm{l}(\mathrm{x_k},\mathrm{x_j}) = \sum_{\mathrm{x_k}\in\Phi} \mathrm{P}\cdot\frac{1}{1+\|\mathrm{x_k}-\mathrm{x_j}\|^{\alpha}}$$

其中，P 为节点的发射功率，$\mathrm{l}(\mathrm{x_k},\mathrm{x_j})$为路径衰减函数，$\|\mathrm{x_k}-\mathrm{x_j}\|$表示$\mathrm{x_k}$与$\mathrm{x_j}$之间的距离，α是衰减因子。

上式中，I_{x_j}是点过程 HPPP Φ中随机变量函数之和。I_{x_j}是一个随机变量，为了估计I_{x_j}的平均值，可以借助 Campbell 定理来计算I_{x_j}的期望。假设接收节点$\mathrm{x_j}$处于坐标原点，即$\mathrm{x_j}$的坐标为(0,0)，则有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I_{x_j}\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\mathrm{x_k}\in\Phi}\mathrm{P}\cdot\frac{1}{1+\|\mathrm{x_k}-\mathrm{x_j}\|^{\alpha}}\right) \\
&= \lambda\int_{\mathrm{x}\in\Phi}\mathrm{P}\cdot\frac{1}{1+\|x-\mathrm{x_j}\|^{\alpha}}dx \\
&= \lambda\iint_{(x,y)\in\Phi}\mathrm{P}\cdot\frac{1}{1+(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)^{\alpha/2}}dxdy
\end{aligned}
$$

假设在一个边长为 20000 米的正方形区域里随机部署了许多无线网络节点，且服从点过程 HPPP Φ，在某一时刻网络中的发送节点的密度为$\lambda=0.001$，即单位面积里发送节点的数量为 0.001，每个节点的发送功率相同，$\mathrm{P}=1$，衰减因子$\alpha=4$，采用数值积分的方法，可以估计出处于坐标原点的接收节点$\mathrm{x_j}$收到的干扰信号的期望为

$$\mathbb{E}\left(I_{x_j}\right)=0.0053$$

定义 4.6.4 泊松点过程 PGFL：给定一个点过程Φ和一个可测函数$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$，点过程$\Phi$的概率生成函数定义为

$$G_{x\in\Phi}[f(x)]=\mathbb{E}\left[\prod_{i\in\Phi}f(x_i)\right]$$

定理 4.6.4 对于非负的可测函数 f 和 $A\subseteq\mathbb{R}^d$上强度为λ的泊松点过程Φ，其 PGFL 为

$$G_{x\in\Phi}[f(x)]=exp\left\{-\lambda\int_{\mathbb{R}^d}\big(1-f(x)\big)dx\right\}$$

利用 PGFL，可以估计点过程中随机变量函数连乘的期望。

例 2. 假设在一个区域中随机分布了很多无线网络节点，这些节点在空间上服从二维的点过程 HPPP Φ，通过与相邻节点的通信进行数据长距离的数据传输，在逻辑上形成一个 Ad hoc 网络。考虑到无线节点的能量限制，为了节省能量，每个无线节点工作一段时间后进入休眠状态，休眠一段时间再唤醒，循环往复。网络节点相互独立，每个节点以概率 p 处于工作状态，以概率 1-p 处于休眠状态。现在给定一个节点 Tx，希望能估计该节点能把消息立即发送出去的概率。

设节点 Tx 能够通信的距离为 R，节点 Tx 要能把消息立即发送出去，需要在以 Tx 为圆心、R 为半径的圆形区域$b(Tx,R)$内存在未休眠的节点 Rx，否则，没有邻居节点来转发，节点 Tx 无法发送数据。因此，节点 Tx 能发送消息的概率为

$$P\{\text{Tx 成功发送数据}\}=1-\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{b}(\mathrm{T_X},\mathrm{R})}(1-p)$$

根据定理 4，节点能发送消息的概率的期望为

$$\mathbb{E}(P)=1-\mathbb{E}\left[\prod_{i\in\Phi}(1-p)\right]$$

$$=1-exp\left\{-\lambda\int_{\mathrm{b}(\mathrm{T_X},\mathrm{R})}pdx\right\}$$

$$=1-exp\{-\lambda\mathrm{p}\pi\mathrm{R}^2\}$$

习题：

1、在一个半径为 1000 米的二维圆形平面区域中，随机投放 1000 个无线通信节点，求两个相邻节点之间距离的分布。

2、对于一个参数为λ的二维齐次 Poisson 点过程 PPP Φ和此点过程上的一个非负可积函数 f(x)，写出此函数的连加和连乘期望的表达式，$\mathbb{E}\{\sum_{x\in\Phi} f(x)\}$和$\mathbb{E}[\prod_{x\in\Phi} f(x)]$。

参考文献：

1、Chiu S N , Stoyan D , Kendall W S ,et al. Stochastic Geometry and Its Applications [M]. Akademie-Verlag, 2013.

2、

3、

4、