西安电子科技大学网络与信息安全学院
信号与系统 实验报告

班　　级：_

学　　号：_

姓　　名：_

电子邮箱：_

指导教师：_

2024 年 **5** 月 **31** 日

实验题目：

1. 工程中常用的巴特沃斯(低通)滤波器，其通带内满足最大平坦的特性。巴特沃斯滤波器的模方函数为：

$$|H(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

其中，$\omega_c=500Hz$ 为截止频率，n 为滤波器阶数。试绘制出2~5阶巴特沃斯滤波器的幅频特性曲线，并对其特性进行分析。(提示：$|H(j\omega)|^2=H(j\omega)H^*(j\omega)=H(j\omega)H(-j\omega)$)

实验摘要

题目给出了一个频率响应函数的模方，要求绘制 **n=2-5** 时，频率特性曲线。

题目描述：

理论分析：$H(j\omega)$ 表示成 $H(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 的形式

那么 $|H(j\omega)|^2=|A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}|^2=A^2(\omega)$

所以幅频特性 $A(\omega)$ 就等于模方函数直接开根号 $\sqrt{|H(j\omega)|^2}$

理论上，阶数越大，滤波效果越好，体现在幅频特性曲线斜率更大

通过实验验证是否符合理论

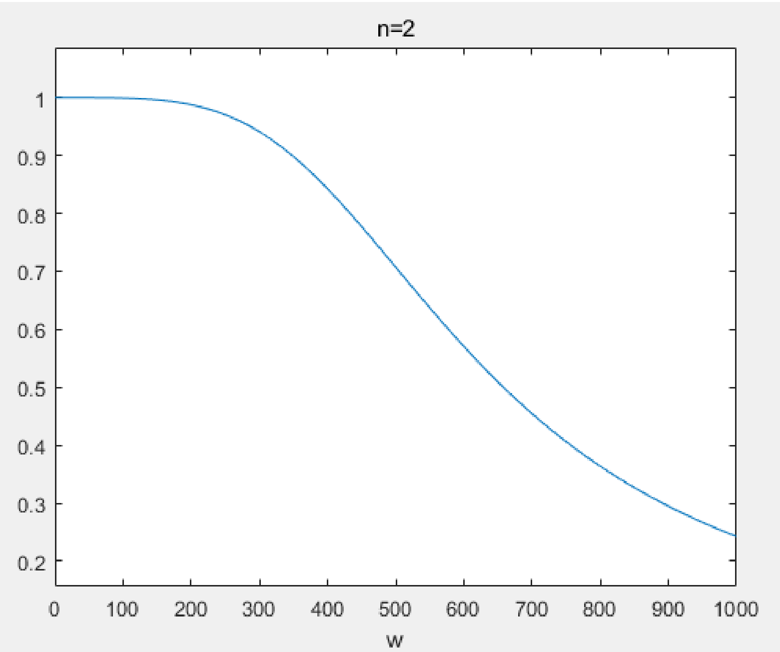
实验过程与分析

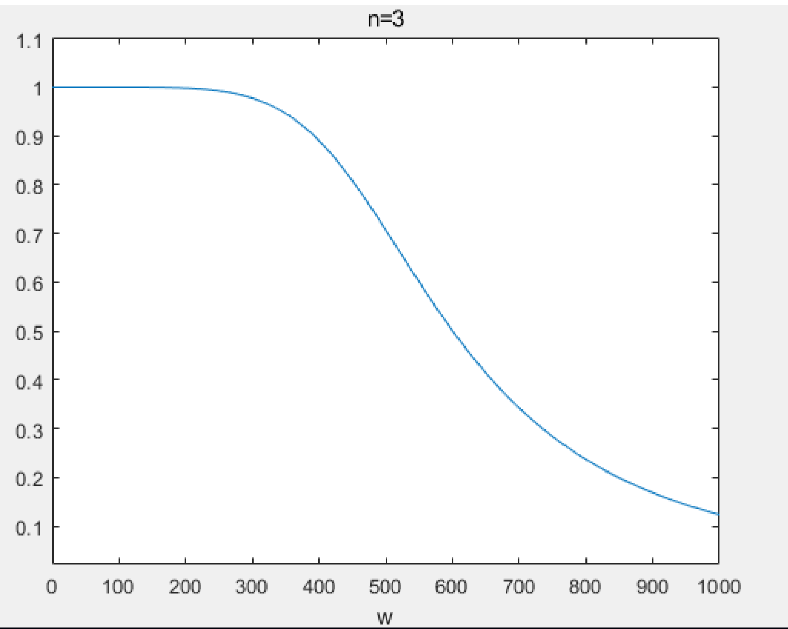
由上述分析，可以编出以下简单程序

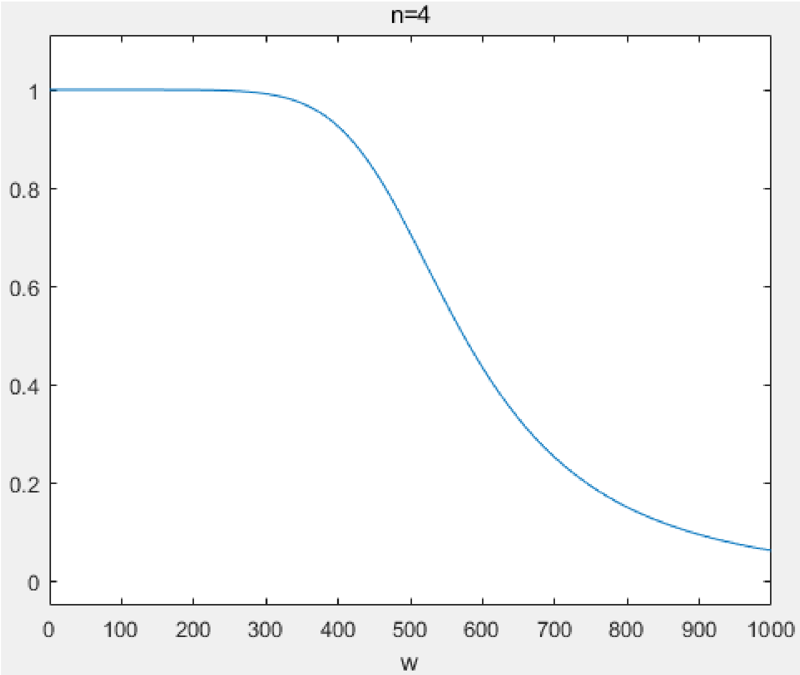
MATLAB 代码

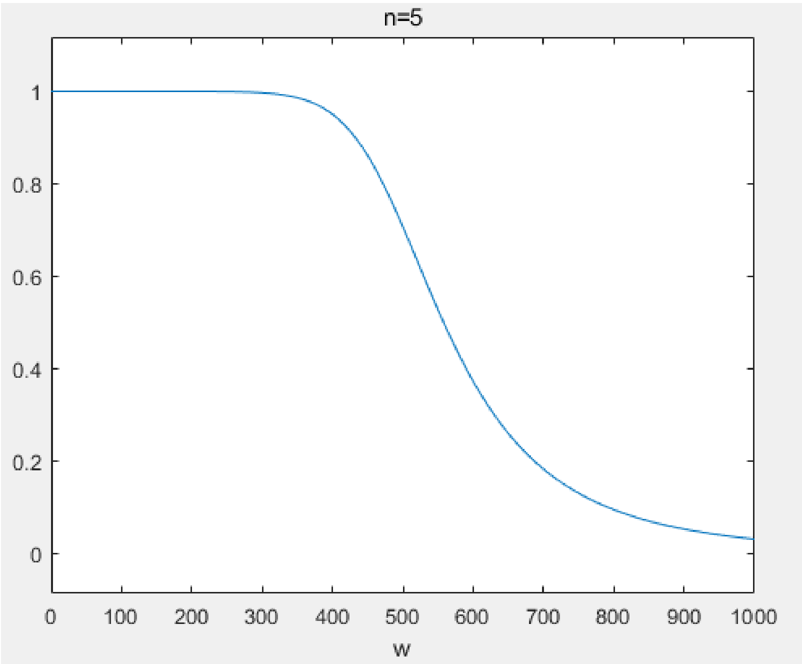
```
wc = 500;%截止频率，单位 Hz
n = 2; %阶数
syms w;
H = 1 / (1+ (w/wc)^(2*n));
A = sqrt(H);
ezplot(A,[0,1000])
title(['n=', num2str(n)]);
```

调整 **n** 的值从 **2** 到 **5**，依次画出以下图形：






n=4
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
w


n=5
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
w

实验总结:

这一题没有遇到什么 bug 和不会的地方。

由实验的结果可以分析得出：实验结果是符合理论的，滤波器阶数越大，滤波效果越好。高阶滤波器能够更精确地选择特定的频率范围：

1. 通频带内，通过效果更好，以 w=300Hz 和 400Hz 为例，
n=2 时，A(w)的值分别是 0.93 和 0.81
而 n=5 时，这两个值上升至 0.99 和 0.96.
看图也可以观察出，通频带内高阶滤波器更趋向于 y=1 这条直线。

2. 阻带内不要的成分削减更快，看图可以看出，高阶滤波器的幅频特性曲线斜率更大

参考文献:
滤波器的阶数影响着其在频率响应曲线上的斜率和频率选择特性。具体来说：

1. **斜率**：阶数越高的滤波器，在频率响应曲线上的变化越陡峭。这意味着高阶滤波器能够更快速地削弱或增强信号的频率成分。
2. **频率选择特性**：随着阶数的增加，滤波器的频率选择特性变得更加精确。高阶滤波器能够更精确地选择特定的频率范围，同时削弱其他频率成分的影响。
3. **相位响应**：高阶滤波器在频率响应上可能表现出更加复杂的相位特性。这可能对某些应用有影响，如信号处理或通信系统中需要考虑相位保持的情况。
4. **稳定性**：高阶滤波器通常更难设计和实现，可能更容易受到数值误差、噪声等因素的影响，导致稳定性方面的挑战。

实验题目：

2. 利用MATLAB函数laplace()求信号 $f(t)=\dfrac{1}{t+2}$ 的拉普拉斯变换。利用函数zplane()根据系统函数 $H_1(s)=\dfrac{s+2}{s^3+s^2+2s+6}$ 和 $H_2(s)=\dfrac{s^2+1}{3s^3+5s^2+4s+6}$ 画出零、极点分布，并判断系统的稳定性。

实验摘要

求拉普拉斯变换

用 **zplane()**画出两个系统函数的零、极点分布，并且判断系统稳定性

题目描述：

求拉普拉斯变换很简单。直接 **laplace(f)**就可以

鉴于两个系统函数都是真分式，直接用 **zplane** 就行，无需进行其他处理

实验过程与分析

(1)求 f(t)的拉普拉斯变换

MATLAB 代码

```
syms t;
f = 1/(t+2);
H = laplace(f);
```

求得结果如下

```
val =

exp(2*s)*expint(2*s)
```

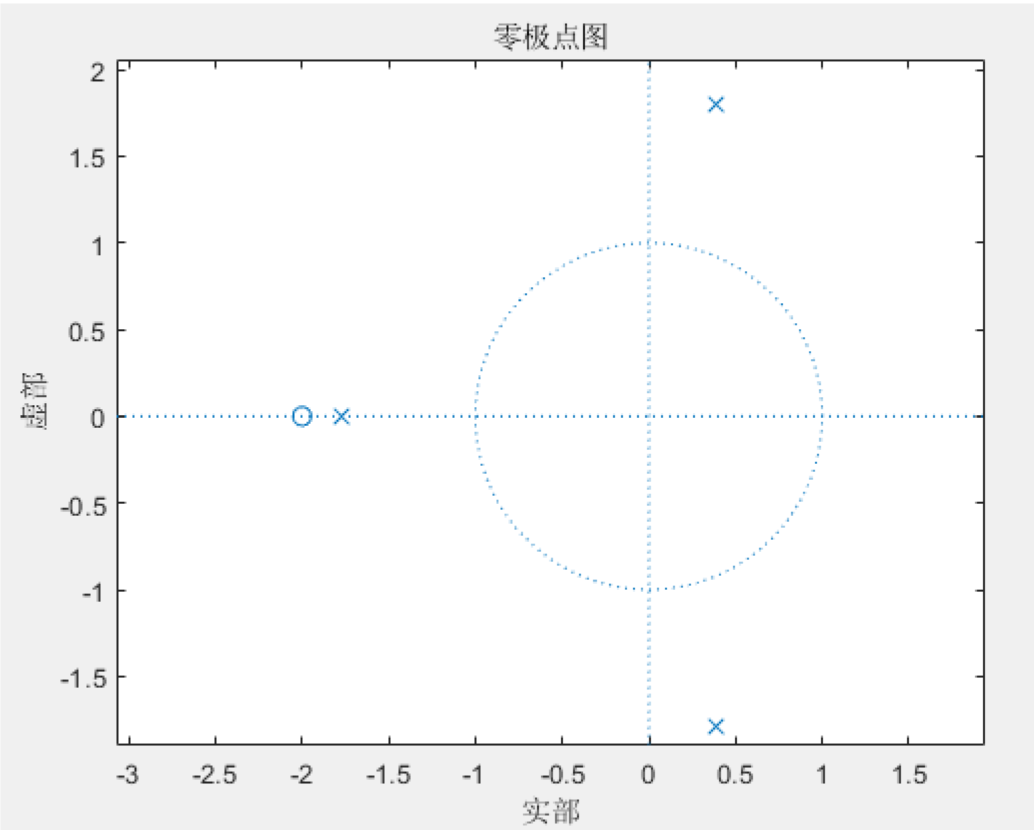
查阅资料知 **expint** 是指数积分函数，写成好看的结果， $H(s)=e^{2s}\int_{-\infty}^{2s}\frac{e^t}{t}dt$

(2)画出 $H_1(s)=\dfrac{s+2}{s^3+s^2+2s+6}$ 和 $H_2(s)=\dfrac{s^2+1}{3s^3+5s^2+4s+6}$ 的零极点分布

查阅资料，**zplane** 函数接受的是系统的分子和分母多项式的系数作为输入

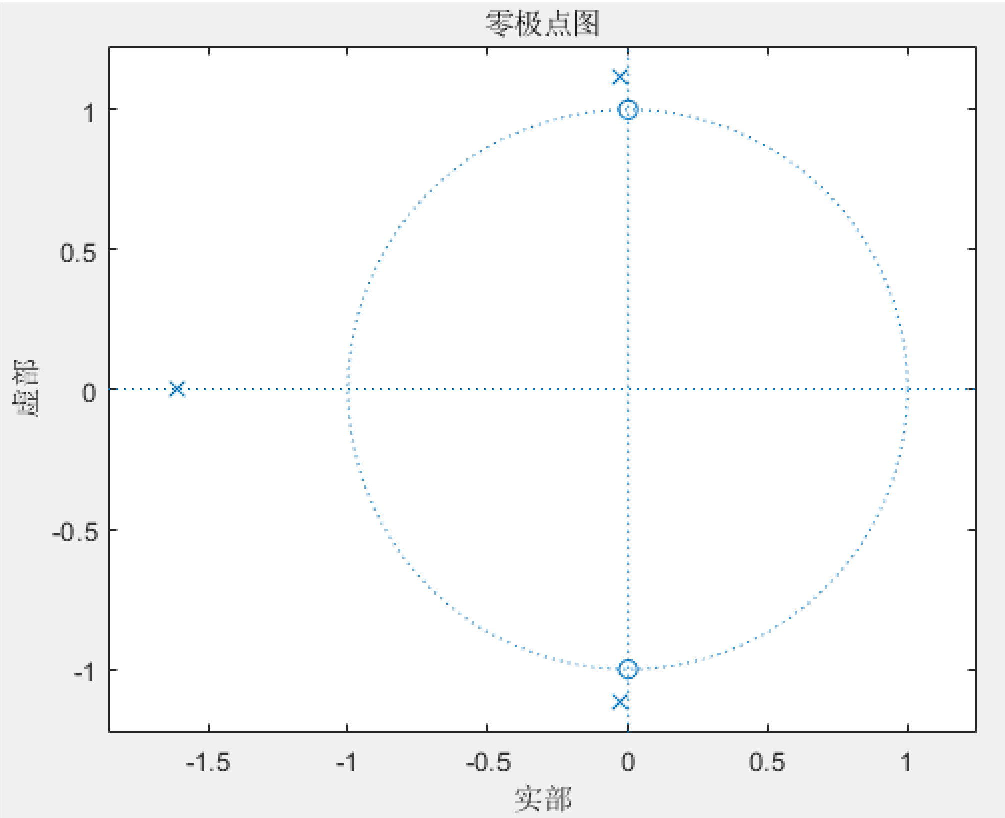
编写 **MATLAB** 代码如下

```
num = [0, 0, 1, 2];%分子系数
den = [1, 1, 2, 6];%分母系数
zplane(num,den);
```



对于另一个系统函数，只需改写 **num** 和 **den** 的值即可

```
num = [0, 1, 0, 1];%分子系数
den = [3, 5, 4, 6];%分母系数
zplane(num,den);
```



(3)分析稳定性

圆圈是零点，叉是极点

所有极点都在左半开平面才稳定

H1 的极点有两个在 **jw** 轴右侧

H2 的三个极点都在左半开平面。

所以，**H1** 是不稳定的，**H2** 是稳定的

实验总结:

在求 $f(t)=\dfrac{1}{t+2}$ 的拉普拉斯变换过程中，本想手算一遍，验证 **MATLAB** 计算的正确性。

我的想法是使用拉普拉斯变换的时移特性和频域积分特性

因为 $1\leftrightarrow\dfrac{1}{s}$

然后由自学内容的拉普拉斯变换频域积分性质 $\dfrac{f(t)}{t}\longleftrightarrow\int_s^{\infty}F(\eta)d\eta$

$\dfrac{1}{t}\leftrightarrow\int_s^{\infty}\dfrac{1}{s}ds$ ，然后应用时移特性

但这个积分是不收敛的，不知道该怎么做了

在使用 **zplane** 分析两个系统函数时，没有什么问题。

在这一题中学会了如何使用 **laplace()**和 **zplane()**分析问题，学会了如何正确使用传递函数

参考文献:

MATLAB 中的 zplane 函数用于绘制离散时间系统的极点和零点在复平面上的分布图。

具体来说，zplane 函数接受系统的分子和分母多项式的系数作为输入，并绘制这些多项式的极点（零点）在 z 平面上的分布图。在这个图中，单位圆表示频率为零的情况，圆外表示频率为无穷远的情况。通过观察极点和零点的位置，可以对系统的稳定性、振荡性以及频率响应进行初步的评估。

在 MATLAB 中，`laplace` 函数用于计算 Laplace 变换。Laplace 变换是一种重要的数学工具，常用于分析线性时不变系统在复频率域中的行为。`laplace` 函数的基本语法是：

matlab　　复制代码

```matlab
F = laplace(f)
```

其中：

- `f` 是一个符号表达式或者一个函数，表示要进行 Laplace 变换的输入。
- `F` 是 Laplace 变换的结果，通常也是一个符号表达式。

在 MATLAB 中，`expint` 函数是指数积分函数（Exponential Integral Function）。指数积分函数定义如下：

$$\text{expint}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt$$

其中，x 是输入参数。指数积分函数在科学和工程领域中经常出现，在各种数学和物理问题的解中都有应用。

实验题目：

3. 利用MATLAB函数ilaplace()、laplace()等求解系统函数为$H(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}$的系统的冲激响应、阶跃响应，以及激励$f(t)=\cos(20t)\varepsilon(t)$产生的零状态响应，给出运行结果并进行分析。

实验摘要

给出了系统函数，求冲激响应、阶跃响应、和激励产生的零状态响应

题目描述：

冲激响应$h(t)$和系统函数$H(s)$是拉普拉斯变换对，因此要求$h(t)$，只需对$H(s)$做拉普拉斯逆变换。

实验过程与分析

(1)理论分析

1.求冲激响应

$H(s)=\dfrac{s}{s^2+3s+2}$，可以对其分母做因式分解，然后待定系数

$$\frac{s}{s^2+3s+2}=\frac{a}{s+1}+\frac{b}{s+2}=\frac{a(s+2)+b(s+1)}{s^2+3s+2}=\frac{(a+b)s+(2a+b)}{s^2+3s+2}$$

系数对应相等，可以得到两个等式，**a+b=1，2a+b=0**

解出 **a=-1 ，b=2，**

也可以使用其他方法求 **a,b**

又因为：

$$\text{指数函数}\mathrm{e}^{-s_0 t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s+s_0}，\quad\sigma>-\mathrm{Re}[s_0]$$

所以，冲激响应 $h(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$

2.求阶跃响应

由 **LTI** 系统的特性，阶跃响应 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)dt$，所以本题 $g(t)=\int_{0}^{t}(-e^{-t}+2e^{-2t})dt$

计算可得阶跃响应 $g(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$

2. 求激励 $f(t)=\cos(20t)\varepsilon(t)$ 造成的零状态响应

可以用时域卷积或者，在 s 域乘一下再逆变换回来

$$\cos(20t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+400} \qquad F(s)=\frac{s}{s^2+400}$$

$$Y(s)=F(s)H(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}\cdot\frac{s}{s^2+400}$$

因式分解一下，$Y(s)=\dfrac{K_1}{s+1}+\dfrac{K_2}{s+2}+\dfrac{K_3}{s+20i}+\dfrac{K_4}{s-20i}$

接下来，求这些系数 K

$$K_1=\left[(s+1)Y(s)\right]_{s=-1}=\left[\frac{s^2}{(s+2)(s^2+400)}\right]_{s=-1}=\frac{1}{401}$$

同理，$K_2=\left[(s+2)Y(s)\right]_{s=-2}=\left[\dfrac{s^2}{(s+1)(s^2+400)}\right]_{s=-2}=\dfrac{4}{-1*404}=\dfrac{-1}{101}$

$K_3=\left[(s+20i)Y(s)\right]_{s=-20i}=\left[\dfrac{s^2}{(s^2+3s+2)(s-20i)}\right]_{s=-20i}$ 约为 $0.0036+0.0243i$

$K_4=K_3^*=0.0036-0.0243i$，约为$0.0246e^{-1.4215i}$

所以 $Y(s)$ 可以拉普拉斯逆变换为

$$y(t)_{理论}=\left[\frac{1}{401}e^{-t}-\frac{1}{101}e^{-2t}+0.0492\cos(20t-1.4215)\right]\varepsilon(t)$$

(2)MATLAB 求冲激响应

```
syms t;
syms s;

H = s / (s^2 + 3*s +2);
h = ilaplace(H,s,t)
```

运行结果

```
h =

2*exp(-2*t) - exp(-t)
```

，与上述理论分析吻合

(3)MATLAB 求阶跃响应

$g(t) = h(t) * \varepsilon(t) \quad \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

时域卷积定理

若因果函数 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_1$，

$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_2$，

则 $f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

由于 **MATLAB** 不便对 **syms** 变量表示的函数进行卷积、积分等操作。

可以先乘出阶跃响应的 **Laplace** 变换，然后逆变换一下，得到 $g(t)$

在上述代码的基础上，增加几行：

```
G = (1/s) * H;

g = ilaplace(G)
```

运行结果：

```
g =

exp(-t) - exp(-2*t)
```

与上述理论分析吻合。

(4)MATLAB 求 $f(t)=\cos(20t)\varepsilon(t)$ 造成的零状态响应

跟**(3)**中同理，在以上代码基础上，增加以下几行:

```
F = s / (s^2 + 400);
Y = H * F;
y = ilaplace(Y)
```

运行结果:

```
y =

(300*cos(20*t))/40501 + exp(-t)/401 - exp(-2*t)/101 + (1990*sin(20*t))/40501
```

写好看一点，$y(t)=-\frac{e^{-2t}}{101}+\frac{e^{-t}}{401}+\frac{300\cos 20t+1990\sin 20t}{40501}$

$\frac{300\cos 20t+1990\sin 20t}{40501}$,由辅助角公式，可以表示成$0.04968\cos(20t-1.422)$

所以

$$y(t)_{实验值}=\frac{e^{-t}}{401}-\frac{e^{-2t}}{101}+0.04968\cos(20t-1.422)$$

$$y(t)_{理论}=\left[\frac{e^{-t}}{401}-\frac{e^{-2t}}{101}+0.0492\cos(20t-1.4215)\right]\varepsilon(t)$$

与**(1)**中的理论完全相符

（在用手计算中只保留了 **2** 位，导致了些许误差，相对误差 **2%**）

(5)系统 **H(s)**对 **f(t)**幅度和相位的影响

由上述计算。刨除掉暂态分量，只看稳态分量，也就是$0.04968\cos(20t-1.422)$

系统使得激励的幅度乘上了 **0.04968(**约为 **0.05)**

使得相位落后了**-1.422(**约为 $-\frac{\pi}{2}$**)**

实验总结:

实验过程中没有遇到什么 bug 和问题

这次实验让我充分巩固复习了 Laplace 变换的性质、用法
学会了 MATLAB 中 ilaplace()的用法。也锻炼了用手计算拉普拉斯逆变换
掌握了理论和实践相结合的能力

参考文献：

时域卷积定理

若因果函数 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_1$，

$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$，$\mathrm{Re}[s]>\sigma_2$，

则 $f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

二、阶跃响应

激励为单位阶跃函数时，系统的零状态响应。

$g(t)= T[\{0\}, \varepsilon(t)]$

由于$\delta(t)$与$\varepsilon(t)$为微积分关系，故：

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad h(t)=\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

四、常见函数的拉普拉斯变换

1、 $\delta(t) \longleftrightarrow 1$，$\sigma > -\infty$ (整个s平面均收敛)

2、 $\varepsilon(t) \longleftrightarrow 1/s$，$\sigma > 0$

3、指数函数 $e^{-s_0 t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{s+s_0}$，$\sigma > -\mathrm{Re}[s_0]$

$$\cos\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2 \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin\omega_0 t = (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})/2j \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$e^{j\omega_0 t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-j\omega_0}, \quad e^{-j\omega_0 t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+j\omega_0}$$

（2）$F(s)$有共轭单极点(特征根为共轭单根($p_{1,2}=-\alpha\pm \mathrm{j}\beta$))

$$F_1(s)=\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}=\frac{|K_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{|K_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}$$

$$f_1(t)=[|K_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{j}\beta)t}+|K_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{j}\beta)t}]\varepsilon(t)$$

$$=|K_1|\mathrm{e}^{-\alpha t}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta t+\theta)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta t+\theta)}]\varepsilon(t)$$

$$\boxed{=2|K_1|\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)}$$

在 MATLAB 中，`ilaplace` 函数用于计算拉普拉斯变换的反变换。它的语法为：

matlab 复制代码

```matlab
f = ilaplace(F)
```

其中，`F` 是拉普拉斯域中的函数表达式，`f` 是其反变换结果。

例如，假设我们有一个拉普拉斯变换函数：

scss 复制代码

```scss
F(s) = 1 / (s^2 + 1)
```

要计算其反变换，可以这样做：

matlab 复制代码

```matlab
syms s t;
F = 1 / (s^2 + 1);  % 定义拉普拉斯变换函数

f = ilaplace(F);    % 计算反变换

disp(f);            % 显示结果
```

这将输出反变换的结果。记得，`ilaplace` 函数只能计算某些具体的拉普拉斯变换的反变换，对于复杂的函数可能无法给出解析解。