بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السلطان مولاي سليمان
Université Sultan Moulay Slimane

ENSA KHOURIBGA
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES

Optimisation par Essaim de Particules (PSO)

Présentés par:

Ismail Essbiti
Abdelaziz Karroum
Youness Elmeki
Nizar Bennani
Oussama Qouti

Supervisé par:
Prof. Hamza KHALFI

Plan

Qu'est-ce qu'une Métaheuristique ?

- Algorithme d'optimisation guidé par des heuristiques.
- Utilisé pour résoudre des problèmes complexes où les méthodes classiques échouent.
- Exemples : Algorithmes Génétiques (GA), Recuit Simulé (SA), Optimisation par Essaim de Particules (PSO).

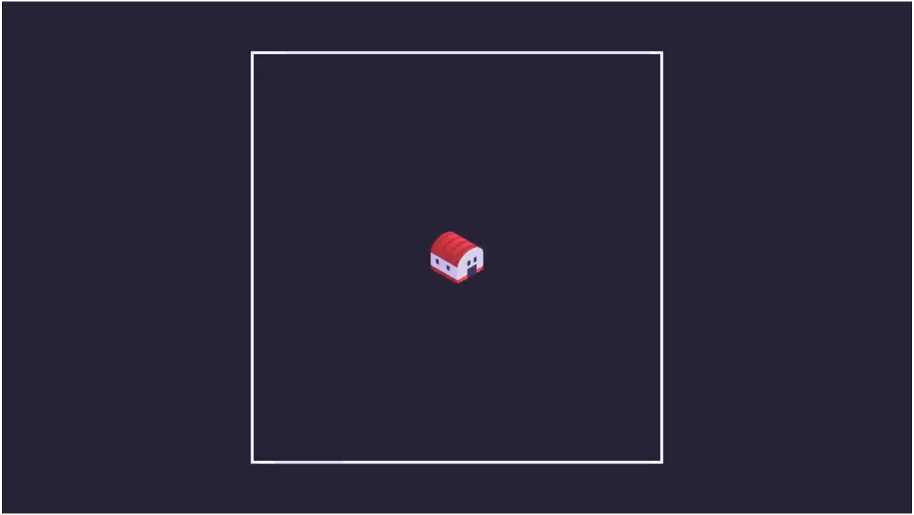
Origine de l'Algorithme PSO

- Inspiré du comportement des essaims naturels (oiseaux, poissons).
- Développé par Kennedy et Eberhart en 1995.
- Modélise la recherche collective d'un optimum dans un espace de solutions.

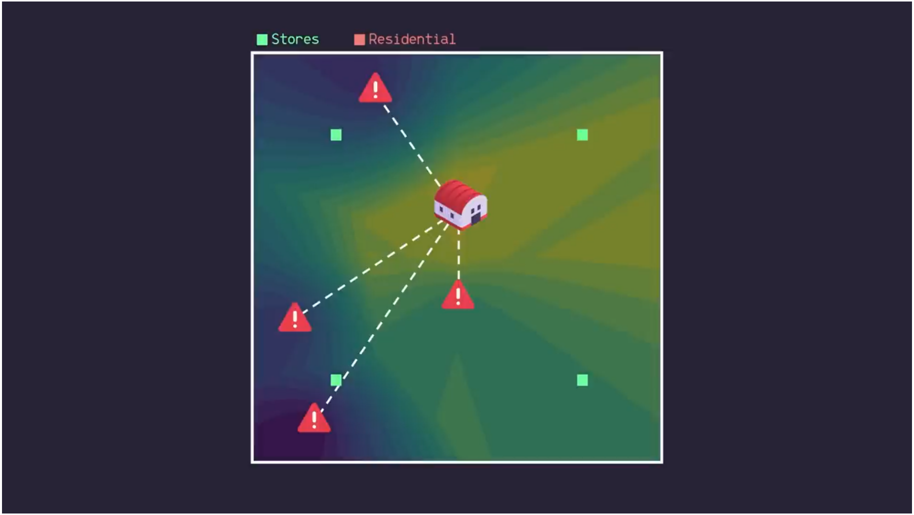
Figure: Comportement collectif d'un essaim d'oiseaux.

Plan

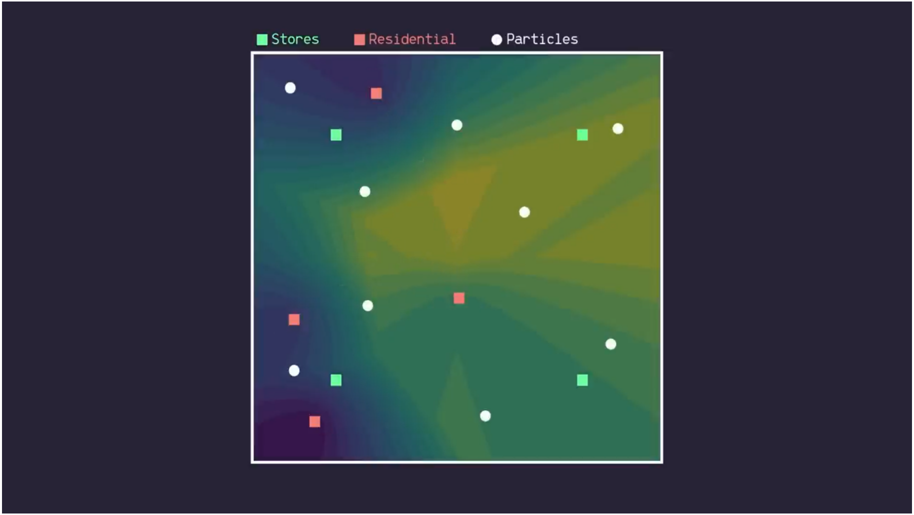
Compréhension Intuitive du PSO



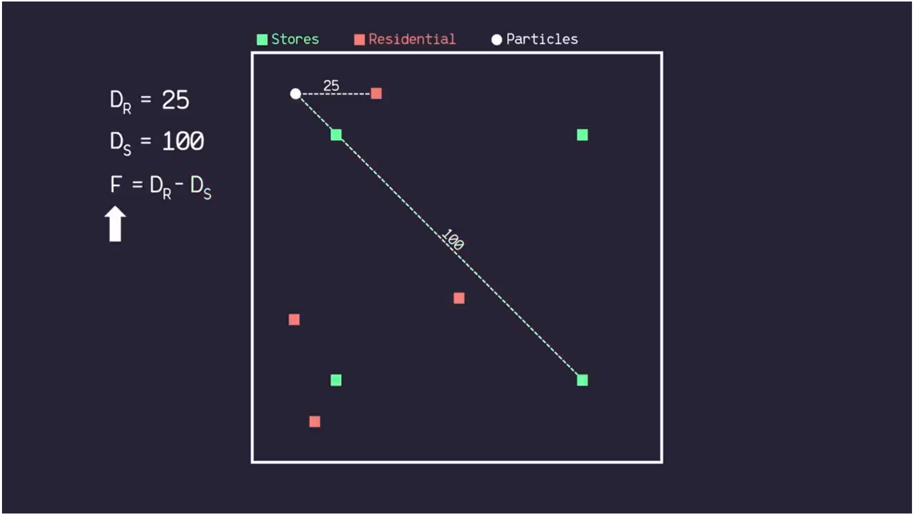
Compréhension Intuitive du PSO



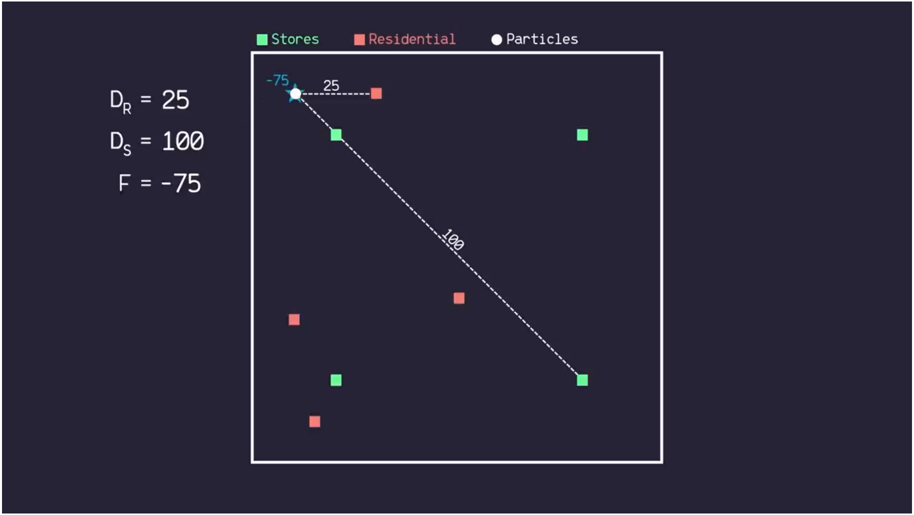
Compréhension Intuitive du PSO



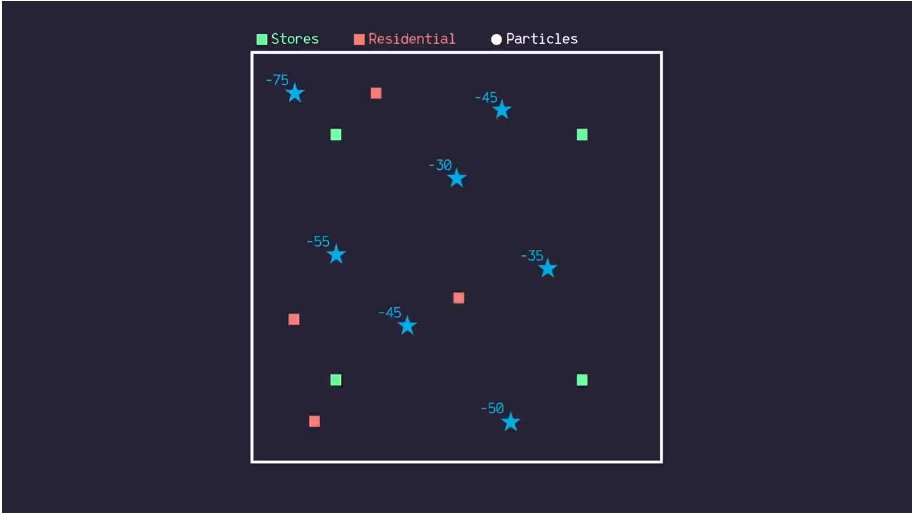
Compréhension Intuitive du PSO



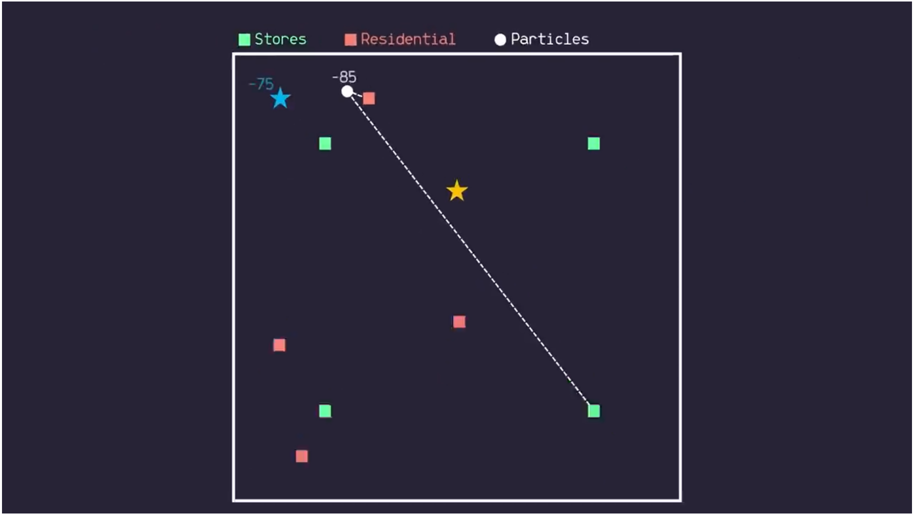
Compréhension Intuitive du PSO



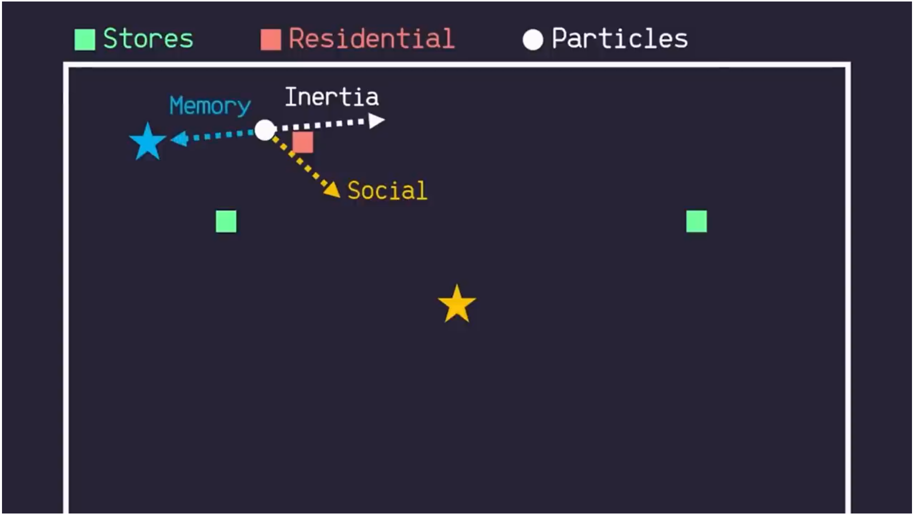
Compréhension Intuitive du PSO



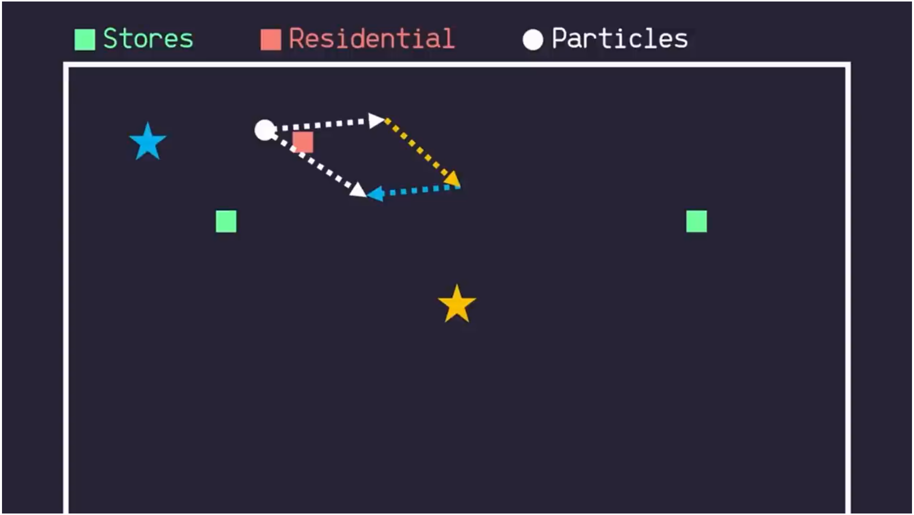
Compréhension Intuitive du PSO



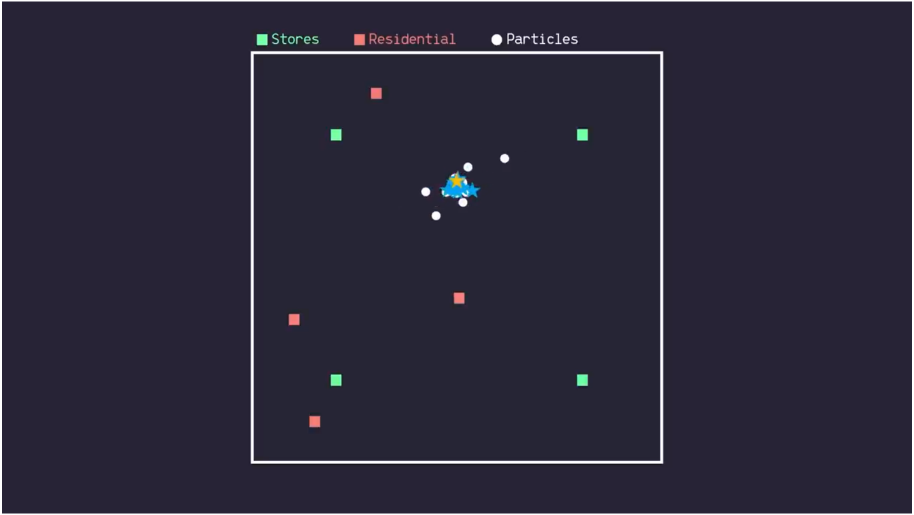
Compréhension Intuitive du PSO



Compréhension Intuitive du PSO



Compréhension Intuitive du PSO



Plan

Représentation Mathématique

- Position d'une particule i à l'itération t : $\mathbf{x}_i(t)$.
- Vitesse de la particule i à l'itération t : $\mathbf{v}_i(t)$.
- Meilleure position personnelle : $\mathbf{p}_i^{\text{best}}$.
- Meilleure position globale : $\mathbf{g}^{\text{best}}$.

Représentation Mathématique

Mise à jour de la vitesse :

$$\mathbf{v}_i(t+1) = w \cdot \mathbf{v}_i(t) + c_1 \cdot r_1 \cdot (\mathbf{p}_i^{\text{best}} - \mathbf{x}_i(t)) + c_2 \cdot r_2 \cdot (\mathbf{g}^{\text{best}} - \mathbf{x}_i(t))$$

où :

- $\mathbf{v}_i(t+1)$: Nouvelle vitesse de la particule i à l'itération $t+1$
- w : Facteur d'inertie contrôlant l'impact de la vitesse précédente
- $\mathbf{v}_i(t)$: Vitesse actuelle de la particule i
- c_1 : Poids du terme cognitif
- r_1 : Nombre aléatoire entre 0 et 1
- $\mathbf{p}_i^{\text{best}}$: Meilleure position personnelle de la particule i
- $\mathbf{x}_i(t)$: Position actuelle de la particule i
- c_2 : Poids du terme social
- r_2 : Autre nombre aléatoire entre 0 et 1
- $\mathbf{g}^{\text{best}}$: Meilleure position globale

Représentation Mathématique

Mise à jour de la position : $\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1)$

où :

$\mathbf{x}_i(t+1)$: Nouvelle position de la particule i à l'itération $t+1$,

$\mathbf{x}_i(t)$: Position actuelle de la particule i,

$\mathbf{v}_i(t+1)$: Nouvelle vitesse calculée précédemment.

Description :

- Les particules sont initialisées aléatoirement dans l'espace de recherche.
- Chaque particule a une position initiale $\mathbf{x}_i(0)$ et une vitesse initiale $\mathbf{v}_i(0)$.
- La meilleure position personnelle $\mathbf{p}_i^{\text{best}}$ est initialisée à la position initiale.
- La meilleure position globale $\mathbf{g}^{\text{best}}$ est déterminée parmi toutes les particules.

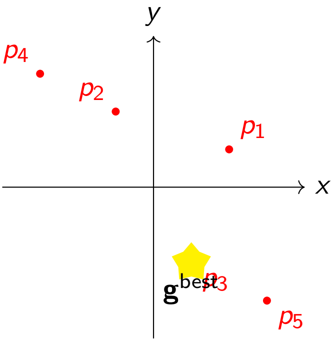
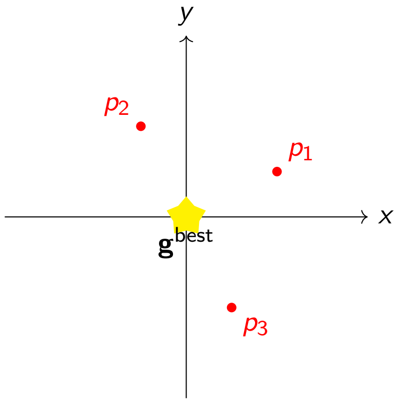


Figure: Initialisation des particules dans l'espace de recherche.

Étape 2: Calcul de la Vitesse

Description :

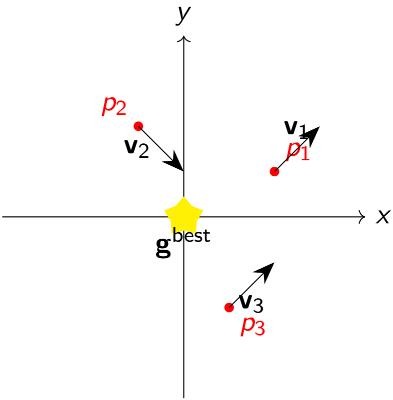
- La vitesse de chaque particule est mise à jour en fonction de :
  - Sa vitesse actuelle ($w \cdot \mathbf{v}_i(t)$).
  - Sa meilleure position personnelle ($c_1 \cdot r_1 \cdot (\mathbf{p}_i^{\text{best}} - \mathbf{x}_i(t))$).
  - La meilleure position globale ($c_2 \cdot r_2 \cdot (\mathbf{g}^{\text{best}} - \mathbf{x}_i(t))$).



Étape 2: Calcul de la Vitesse

Description :

- La vitesse de chaque particule est mise à jour en fonction de :
  - Sa vitesse actuelle $(w \cdot \mathbf{v}_i(t))$.
  - Sa meilleure position personnelle $(c_1 \cdot r_1 \cdot (\mathbf{p}_i^{\text{best}} - \mathbf{x}_i(t)))$.
  - La meilleure position globale $(c_2 \cdot r_2 \cdot (\mathbf{g}^{\text{best}} - \mathbf{x}_i(t)))$.

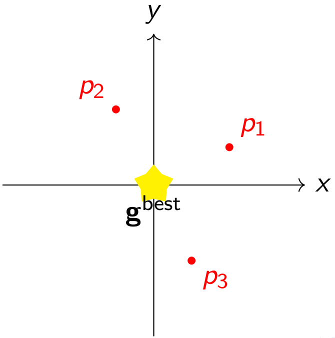


Description :

- La position de chaque particule est mise à jour en ajoutant sa nouvelle vitesse à sa position actuelle :

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1)$$

- Les meilleures positions personnelles et globales sont mises à jour si nécessaire.



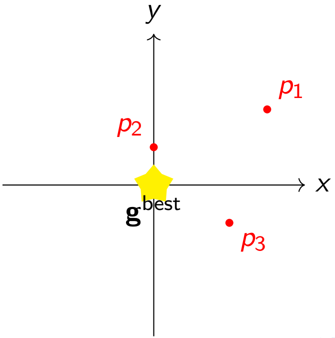
Étape 3: Mise à Jour des Positions

Description :

- La position de chaque particule est mise à jour en ajoutant sa nouvelle vitesse à sa position actuelle :

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1)$$

- Les meilleures positions personnelles et globales sont mises à jour si nécessaire.



Étape 4: Mise à Jour des Meilleures Positions

Description :

- Si la nouvelle position d'une particule est meilleure que sa meilleure position personnelle, celle-ci est mise à jour.
- Si la nouvelle position est meilleure que la meilleure position globale, celle-ci est également mise à jour.

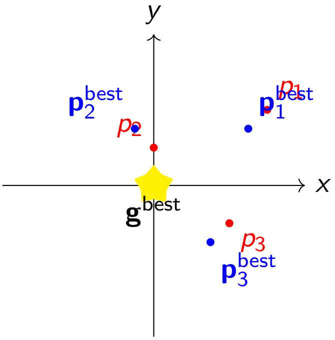


Figure: Mise à jour des meilleures positions personnelles et globales.

Description :

- Après plusieurs itérations, les particules convergent vers l'optimum global.
- La meilleure position globale $\mathbf{g}^{\text{best}}$ représente la solution optimale trouvée.

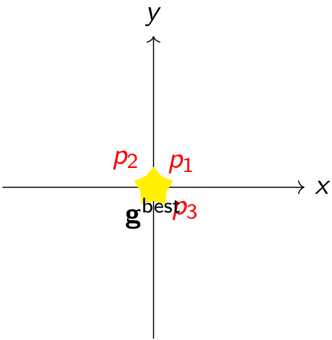


Figure: Convergence des particules vers l'optimum global.

Étape 6: Visualisation de la Convergence

Description :

- La courbe de convergence montre comment la valeur de fitness évolue au fil des itérations.
- Une convergence rapide et stable indique une bonne performance de l'algorithme.

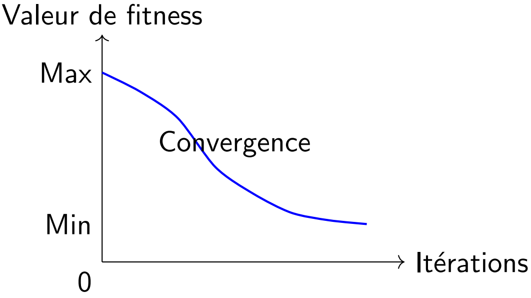


Figure: Courbe de convergence de l'algorithme PSO.

Exploration vs Exploitation

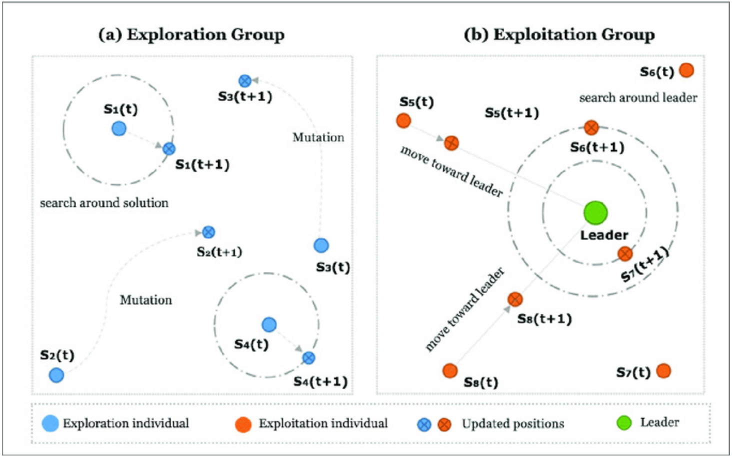


Figure: Exploration (recherche large) vs Exploitation (recherche locale).

Plan

Fonction de Rastrigin - Formulation Mathématique

Définition : La fonction de Rastrigin est une fonction de test utilisée pour évaluer les performances des algorithmes d'optimisation. Elle est connue pour ses nombreux minima locaux, ce qui en fait un problème difficile à résoudre.

Formulation Mathématique :

$$f(\mathbf{x}) = A \cdot n + \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - A \cdot \cos(2\pi x_i) \right)$$

Où :

- $A = 10$ est une constante.
- n est la dimension du problème.
- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est le vecteur de variables.
- $x_i \in [-5.12, 5.12]$ pour tout i.

Type de Fonction :

- La fonction de Rastrigin est une fonction **mono-objectif**, car elle vise à minimiser une seule valeur (la valeur de $f(\mathbf{x})$).

Explication Mathématique : Fonction de Rastrigin

La fonction de Rastrigin évalue les algorithmes d'optimisation en testant leur capacité à naviguer dans un espace de recherche non convexe et multimodal.

- Chaque terme x_i^2 représente une paraboloïde avec un minimum global en $x_i = 0$.
- Le terme $-A\cos(2\pi x_i)$ introduit des oscillations, créant de multiples minima locaux.
- La constante $A \cdot n$ ajuste la hauteur globale de la surface pour une meilleure visualisation.

Surface de la Fonction de Rastrigin

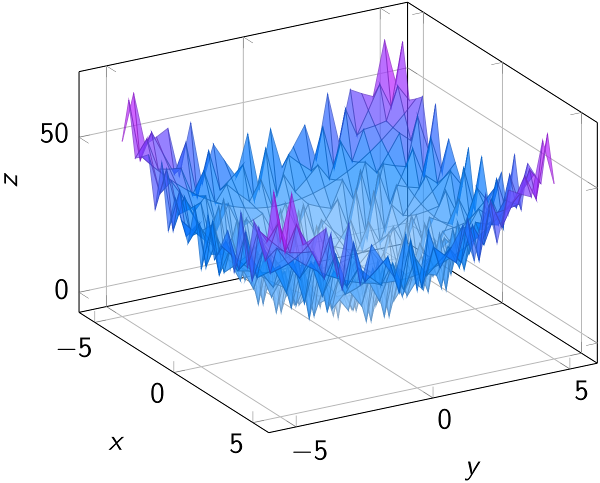


Figure: Surface de la Fonction de Rastrigin.

Explication Mathématique : Surface de la Fonction

La surface est décrite par :

$$z = f(x, y) = 10 \cdot 2 + (x^2 + y^2) - 10\cos(2\pi x)\cos(2\pi y),$$

avec $x, y \in [-5.12, 5.12]$.

- Les composantes sinusoïdales $\cos(2\pi x)$ et $\cos(2\pi y)$ génèrent une grille de pics et vallées, correspondant aux minima locaux.
- L'objectif est de trouver l'optimum global au centre de l'espace de recherche.

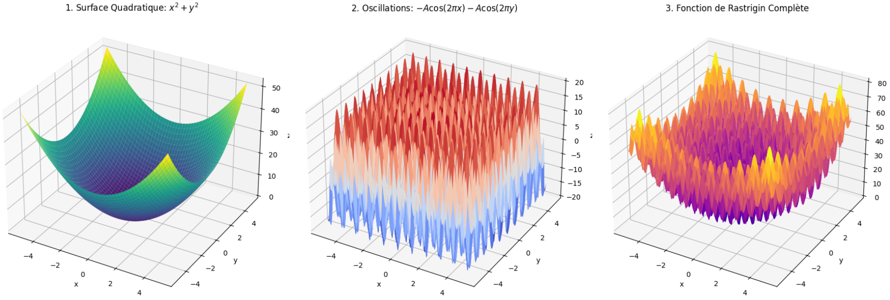


Figure: Composantes et Représentation Complète de la Fonction de Rastrigin

Positions Initiales des Particules

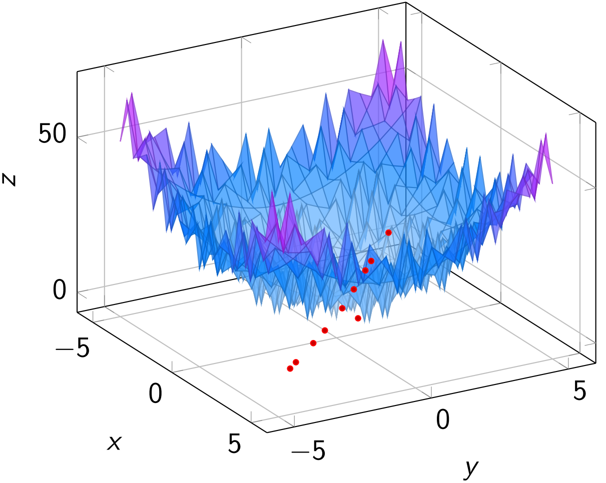


Figure: Positions initiales des particules dans l'espace de recherche.

Explication Mathématique : Positions Initiales

Dans l'algorithme PSO :

- Chaque particule commence avec une position aléatoire $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ dans le domaine $[-5.12, 5.12]$.
- La vitesse initiale $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$ est également aléatoire.
- L'ensemble des particules constitue un essaim explorant collectivement l'espace de recherche.

Mouvement des Particules et Convergence

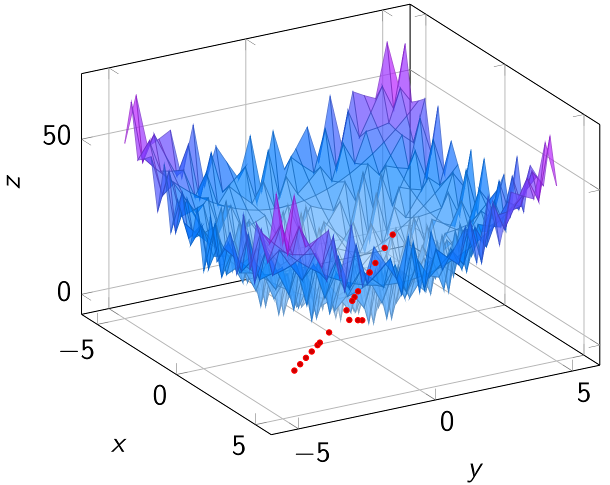


Figure: Mouvement des particules vers l'optimum global.

Explication Mathématique : Mouvement des Particules

Le mouvement de chaque particule suit les équations suivantes :

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = w\mathbf{v}_i^t + c_1 r_1(\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i^t) + c_2 r_2(\mathbf{g} - \mathbf{x}_i^t),$$
$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \mathbf{v}_i^{t+1},$$

avec :

- $\mathbf{v}_i^{t+1}$: vitesse mise à jour,
- $\mathbf{p}_i$: meilleure position personnelle,
- $\mathbf{g}$: meilleure position globale,
- r_1, r_2 : scalaires aléatoires égaux à $[0, 1]$,
- c_1, c_2 : coefficients cognitifs et sociaux,
- w : poids d'inertie pour équilibrer exploration et exploitation.

Les particules convergent en s'approchant de $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{g}$.

Convergence Finale

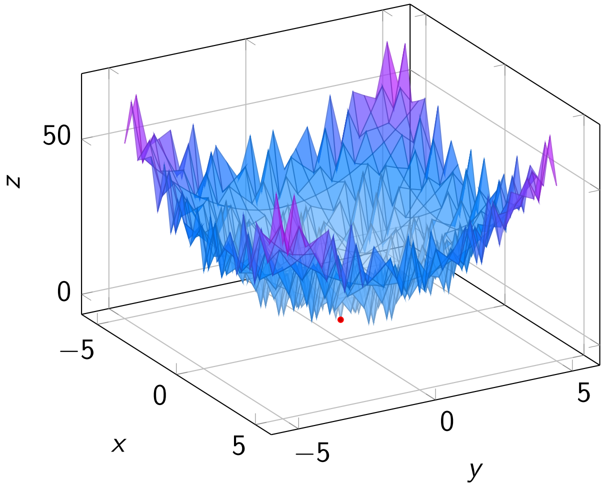


Figure: Convergence finale des particules vers l'optimum global.

Explication Mathématique : Convergence Finale

- Au fur et à mesure des itérations, chaque particule améliore sa meilleure position personnelle $\mathbf{p}_i$ si une nouvelle position donne une valeur plus basse de $f(\mathbf{x})$.
- L'optimum global $\mathbf{g}$ est mis à jour lorsque l'essaim identifie un meilleur minimum.
- Les particules finissent par se regrouper autour de l'optimum global $f(\mathbf{x}) = 0$ en $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0)$, avec des vitesses tendant vers zéro ($\mathbf{v}_i \to 0$).

Plan

Fonction Multi-Objectif - Formulation Mathématique

Définition : Une fonction multi-objectif vise à optimiser simultanément plusieurs objectifs, souvent en conflit. L'optimisation multi-objectif cherche des solutions qui équilibrent ces objectifs.

Exemple : Fonction ZDT1

$$\text{Minimiser :} \quad f_1(x) = x_1$$

$$f_2(x) = g(x)\left(1 - \sqrt{\frac{f_1(x)}{g(x)}}\right)$$

$$\text{avec} \quad g(x) = 1 + 9 \cdot \frac{\sum_{i=2}^{n} x_i}{n-1}$$

Où :

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le vecteur des variables de décision.
- $x_i \in [0, 1]$ pour tout i.
- f_1 et f_2 sont les objectifs à minimiser.

Type de Fonction :

- La fonction ZDT1 est une fonction à **deux objectifs**, typique en optimisation multi-objectif.

Initialisation des Particules

- À l'initialisation, des particules sont générées de manière aléatoire dans l'espace de recherche.
- La position et la vitesse initiales sont données par :

$$x_i^{(0)} = \text{Position initiale de la particule } i$$

$$v_i^{(0)} = \text{Vitesse initiale de la particule } i$$

Explication mathématique : La position et la vitesse initiales des particules sont générées de manière aléatoire dans l'espace de recherche. Chaque particule est une solution candidate à la problématique d'optimisation multi-objectif.

Évaluation des Objectifs

- Pour chaque particule, on calcule la valeur de chaque objectif.

$$f_1(x_i) = x_{i1}, \quad f_2(x_i) = g(x_i)\left(1 - \sqrt{\frac{f_1(x_i)}{g(x_i)}}\right)$$

Explication mathématique : Les valeurs des fonctions objectifs f_1 et f_2 sont évaluées en fonction de la position actuelle de chaque particule x_i. Cette évaluation permet de déterminer la qualité de la solution candidate.

Mise à Jour de la Vitesse et de la Position

- À chaque itération, les particules ajustent leur vitesse et leur position en fonction de leur propre expérience et de celle des autres particules.

$$v_i^{(t+1)} = w \cdot v_i^{(t)} + c_1 \cdot r_1 \cdot (pbest_i - x_i^{(t)}) + c_2 \cdot r_2 \cdot (gbest - x_i^{(t)})$$

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + v_i^{(t+1)}$$

Explication mathématique : La mise à jour de la vitesse et de la position des particules permet d'explorer l'espace de recherche de manière efficace. Le terme w (inertie) contrôle l'influence de la vitesse précédente, tandis que c_1 et c_2 (accélérateurs) contrôlent l'influence des meilleures positions personnelles et globales. r_1 et r_2 sont des variables aléatoires dans l'intervalle [0, 1].

Convergence vers le Front de Pareto

- Les particules convergent progressivement vers le front de Pareto, qui représente l'ensemble des solutions optimales.

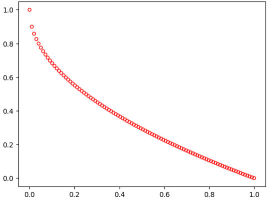


Figure: le front de Pareto de ZDT1

Explication mathématique : Les particules convergent progressivement vers le front de Pareto, où chaque solution est non dominée par les autres solutions. Le front représente le meilleur compromis entre les objectifs.

Plan

Performance de PSO

- Convergence rapide vers l'optimum.
- Bonne exploration de l'espace de recherche.
- Adaptabilité à différents types de problèmes.

Code du PSO

- **Ouvrir le Notebook PSO**
- **Ouvrir la visualization**

Plan

Conclusion

- PSO est une métaheuristique efficace et simple à implémenter.
- Applications variées : optimisation de fonctions, apprentissage machine, etc.
- Perspectives futures :
  - Hybridation avec d'autres algorithmes.
  - Adaptation aux problèmes dynamiques.
  - Parallélisation pour améliorer les performances.