Theorem 11.11.

$R_1, \dots, R_n$: 同じ商体をもつ val. ring,

$R_i \not\subseteq R_j$ $(i \neq j)$. $\mathfrak{p}_i$: R_i の max. ideal.

$D = \bigcap R_i$. $\mathfrak{q}_i$: $\mathfrak{p}_i$ の D への引き戻し.

$$\begin{cases} \bullet\ D \text{ の max. ideal は } \mathfrak{q}_i \text{ がすべて.} \\ \bullet\ R_i = D_{\mathfrak{q}_i} \end{cases}$$

<u>Proof.</u>

$a \in R_i$

$$\frac{1}{1+a+\cdots+a^{s-1}}, \quad \frac{a}{1+a+\cdots+a^{s-1}} \in D.$$

$1+a+\cdots+a^{s-1} \in R_i$

(R_i での unit $\Longleftarrow$ $\mathfrak{p}_i$ には入らない)

$\Longrightarrow$ $\dfrac{1}{1+a+\cdots+a^{s-1}}$ は $\mathfrak{q}_i$ には入らない

$\longrightarrow$ $a \in D_{\mathfrak{q}_i}$

$D_{\mathfrak{q}_i} \subseteq R_{i(\mathfrak{q}_i)} = R_i$, (2).

$\longrightarrow$ $\mathfrak{q}_i \not\subseteq \mathfrak{q}_j$

$\mathfrak{a}$: q_i のいずれにも含まれないイデアル.

a_i : q_i に含まれない関数.

$q_i - \bigcap_{i \neq j} q_j \ni e_i$ $\quad$ $\underbrace{\sum a_i e_i}$ $\in \mathfrak{a}$ $\quad$ Avoidance

↑ どの q_i にも含まれていない

R_i では unit. ⟶ $\mathfrak{D}$ でも unit.

$\mathfrak{a}$: maximal.

(n 個の valuation で記述しているので、これを観察すればすぐいえそう.)

q_i が 極大イデアルのすべて. $\square$

Theorem 11.12.

R : int dom. TFAE

- normal
- $\mathrm{Quot}(R)$ の val. ring の intersection.

Proof

2. ⇒ 1.

1. ⇒ 2. について みていく

R : normal.

$b \in K - R$,

$R' = R[\frac{1}{b}]$. $\left(\frac{1}{b}\right) \sum a_i \left(\frac{1}{b}\right)^i = 1$

にはならない…

$\frac{1}{b}$ は R' で unit ではない。

$R' \subseteq \underbrace{V}_{\text{val. ring}} \subseteq K$ $V \ni \frac{1}{b}$.

$\therefore\ b \notin V$. $\square$

(11.13).

R : normal.

$b \in \mathrm{Quot}(R)$ ~~…~~ $n := R[x] \to R[b]$ の kernel.

n は $b = \frac{d}{c}$ となるような c, d に対する

$cx - d$ で生成されている。

Proof.

$\sum a_i x^i \in n \longrightarrow \sum a_i b^i = 0$

bを除外する ~~…~~ 付値環 V をとってこれる。

$a_n b^n V \subseteq b^{n-1} V \longrightarrow a_n b V \subset V$

Vは任意で よくなる ここのレベルで $a_n b \in R$.

$a_n x - a_n b$

induction $\square$

§12 Noetherian normal rings.

(12.1) $(R, \mathfrak{m})$: Noether 局所環. 次は同値.

TFAE

- val ring.
- height $\mathfrak{m} \geq 1$, $\mathfrak{m}$: principal
- (height $\mathfrak{m} = 1$, $\mathfrak{m}$: 〃)

Proof.

$1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ は Obvi.

$2 \Rightarrow$ を示す.

Krull の単項定理 $\longrightarrow$ height $\mathfrak{m} = 1$.

$\mathfrak{q}$: (0) の極小素因子. $\mathfrak{m} = (p)$.

$p \notin \mathfrak{q}$. $\mathfrak{q} \subseteq \underset{\text{maximal}}{pR}$

Review (4.3)

$\mathfrak{a}$: Jacobson radical. (of a Noetherian ring R)

$\mathfrak{A}, \mathfrak{b}$: イデアル.

- $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{A}$.
- $\mathfrak{A} \subseteq aR + \mathfrak{b}$
- $\mathfrak{A} : aR = \mathfrak{A}$.

$\Rightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{b}$

$\mathfrak{b} = 0$ とすると、

- $\mathfrak{A} \subseteq aR$.
- $\mathfrak{A} : aR = \mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} \underset{\mathfrak{A} \subseteq aR}{=} a(\mathfrak{A} : a) = a\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} = 0$.

$\mathfrak{q} : p = \mathfrak{q}$ より.

$\mathfrak{q} = 0$

R: domain

イデアル $\mathfrak{a} \neq 0$. このとき.

$\mathfrak{a} \subseteq p^n R$. $\mathfrak{a} \nsubseteq p^{n+1} R$.

$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} : p^n) p^n$

$\mathfrak{a} : p^n \neq R$. $\longrightarrow$ $\mathfrak{a} : p^n \subseteq pR$.

$\longrightarrow$ $\mathfrak{a} \subseteq p^{n+1} R$.

$(\mathfrak{a} : p^n) = R$. $\longrightarrow$ $\mathfrak{a} = p^n R$. $\blacksquare$