(10.13). Theorem.

$R$: normal. $R \subset R'$: int. ext. ~~non zero element of R が zero div.~~

nonzero elem. of $R$ は nonzero div. in $R'$.

$$
\begin{array}{lcr}
p_1' & \cdots & p' \quad R' \\
p_1 \supset p_2 \supset \cdots \supset p_r & \supset (0) & R.
\end{array}
$$

このとき。

下降定理が成り立つ。

Proof.

~~$R \hookrightarrow R'/p'$ の場合に考える。~~

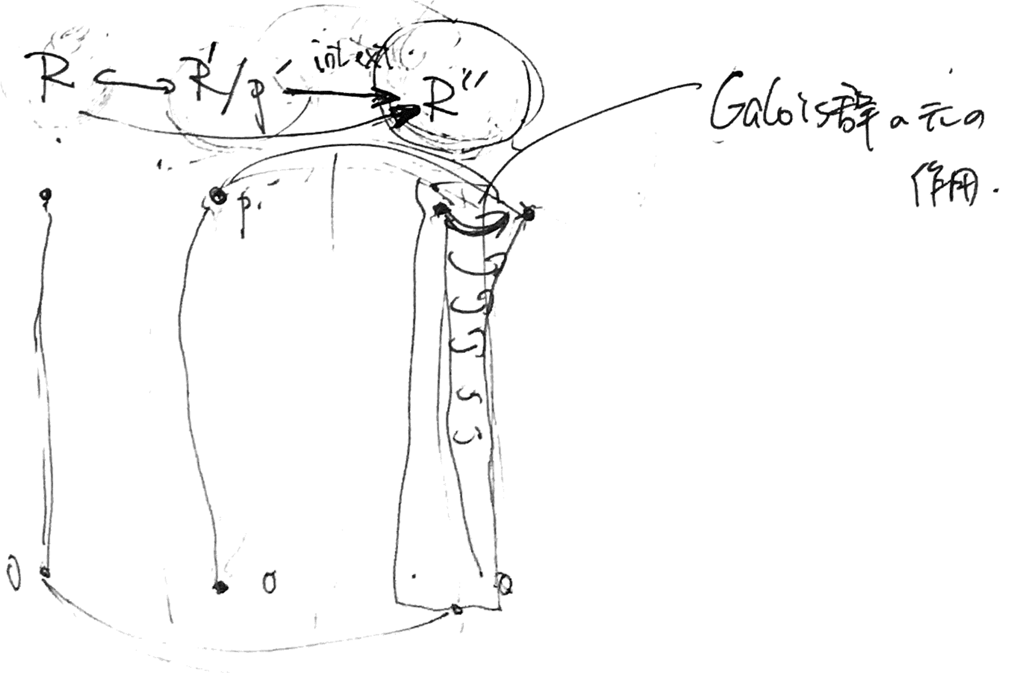
$p_1' \supseteq q'$

$R'$ の最小素因子。($R'$ の zerodiv. しか元がない).

$\downarrow$

$q' \cap R = (0)$.

$R \hookrightarrow R'/p'$ int. ext.



(10.14) Theorem

$R \hookrightarrow R'$ : int. ext. nonzero elem. of $R$ は nonzero div. in $R'$.

$R$ = normal ring.

$\mathfrak{a}'$ の引き戻し $\mathfrak{a}$ について.

$$\text{height } \mathfrak{a} = \text{height } \mathfrak{a}'.$$

Proof.

[素イデアルのケース]

$\mathfrak{a}'$ : prime とする.

$\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}_0' \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_s'$

$R$ に制限すると (lying-over) より. これは chain となる.

$$\text{height } \mathfrak{a}' \leq \text{height } \mathfrak{a}$$

$\mathfrak{a}$ は prime. ここで

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_0 \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, dash, "\mathfrak{a}'"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathfrak{p}_s \arrow[d, dash] \\ \mathfrak{p}_0 \arrow[r, phantom, "\supset"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\supset"] & \mathfrak{p}_s \end{tikzcd}$$

GOING-DOWN より.

$$\text{height } \mathfrak{a} \leq \text{height } \mathfrak{a}'.$$

[一般のケース]

$\mathfrak{a}'$ の素因子 $\mathfrak{p}'$ で height $\mathfrak{a}'$ = height $\mathfrak{p}'$ ととる.

$\mathfrak{p}' \cap R$ は $\mathfrak{a}$ を含む.

$$\text{height } \mathfrak{a} \leq \text{height } \mathfrak{p}' \cap R = \text{height } \mathfrak{p}' = \text{height } \mathfrak{a}'$$

$\mathfrak{a}$ の素因子 $\mathfrak{p}$ で height $\mathfrak{a}$ = height $\mathfrak{p}$.

(lying-over) より. $\mathfrak{p}$ 上の素イデアル $\mathfrak{p}'$ が $\mathfrak{a}'$ を含むものがとれる.

$(R/\mathfrak{a} \hookrightarrow R'/\mathfrak{a}')$

$$\text{height } \mathfrak{a}' \leq \text{height } \mathfrak{p}' = \text{height } \mathfrak{p} = \text{height } \mathfrak{a} \qquad \square$$

(10.15.) $R$ = normal ring, $f(x)$: monic poly.

$R' = R[x]/f(x)$. $d$ が $f(x)$ の判別式

$R^*$ を $R'$ の $\mathrm{TQuot}(R')$ の整閉包. このとき $dR^* \subseteq R'$.

Proof.

$d = 0$.

$d \neq 0$ の場合:

$R'$ において $x$ のことを $a$ とよぶ.

$K = \mathrm{Quot}(R)$. $L$ を $f(x)$ の正規拡大.

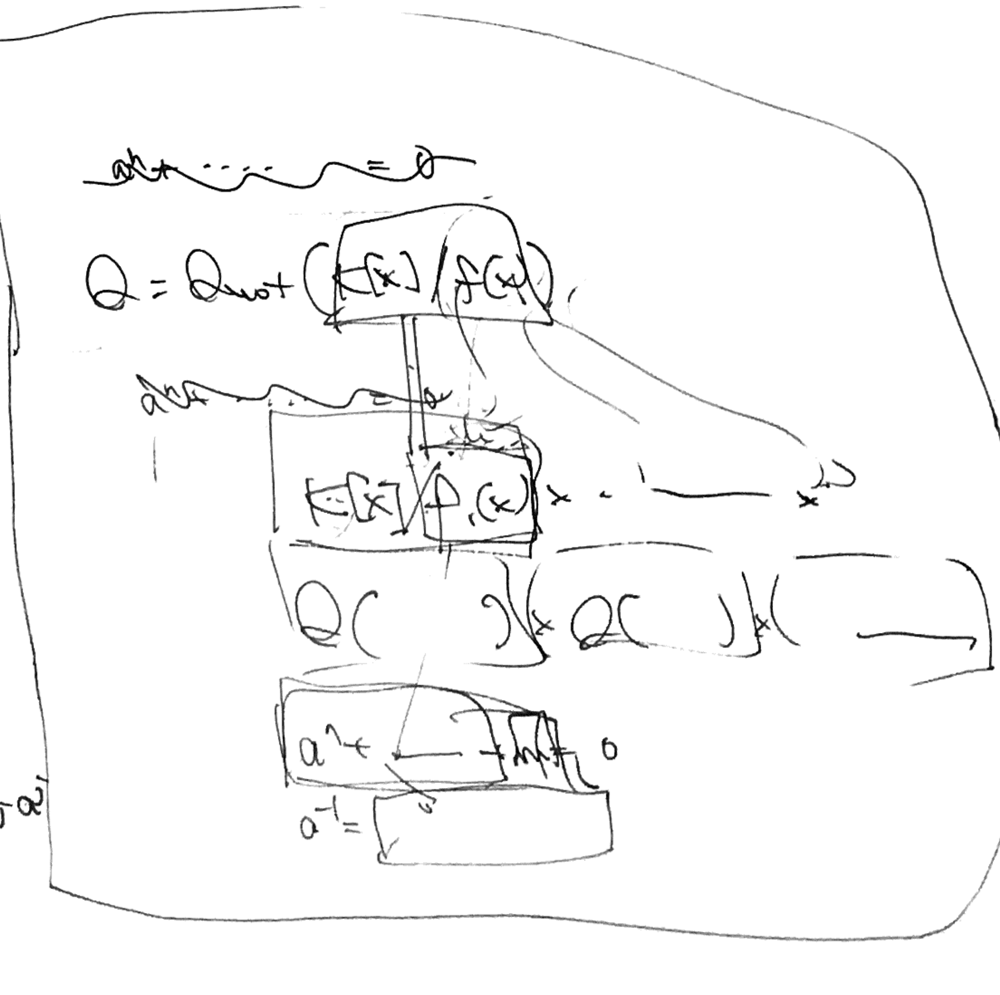
$\boxed{R \longrightarrow R'}$

$R^*$ の元 $b \neq 0$ が zero div.

$b \cdot \boxed{\phantom{xxxx}} = 0$

(monic でわっているため、次数を考える)

$Q = \mathrm{TQuot}(R')$
$= K[a]$.




$f(x)$ の解 $a_i \in L$ に対し.

$$\begin{tikzcd} R^* \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d] & L \\ K[a] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$b \in R^*$ について $b = \sum_0^{n-1} u_j a^j$ と表せる.

$\phi_i(b) = \sum u_j a_i^j$.

$\phi_i(b)$ は $R$ 上整.　　$a_i$ は $R$ 上整.

($b$ は $R$ 上整).　　($a$ は $R$ 上整)

$$R \subseteq R^* \xrightarrow{\phi_i} L.$$

$$\begin{pmatrix} \phi_i(b) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_i^j & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{行列式は}\sqrt{d}} \begin{pmatrix} u_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$du_i$ は 整 (over $R$).

$u_i \in K$. $d \in R$.

$du_i \in K \longrightarrow$ ($R$ は normal だから) $du_i \in R$.

$db \in R'$

よって. $dR^* \subseteq R'$.　　$\square$

(10.16). $R'$: almost finite separable int. ext. of Noetherian normal ring $R$.

$\Longrightarrow R'$ : finite-$R$-mod.

Proof.

$$
\begin{array}{c}
R \subseteq R[a] \subset R' \\
\wr\Vert \\
R[x]/f(x).
\end{array}
$$

$d \neq 0$. (sep., irred.).

$\underline{dR' \subseteq R[a]}$.

$R' \subseteq R[a] \cdot \frac{1}{d}$,

$\leadsto R'$: finite $R$-mod. $\blacksquare$

(10.17) $f$: monic, over int. dom. $R$.

$u_i$ を $f$ の根, $f'$ を微分とする.

このとき.

$$d = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod f'(u_i). \quad (r \text{ は} \cancel{\ } \text{次数}).$$

Proof.

$f(x) = (x-u_1) \cdots (x-u_r)$.

$\searrow f'(x) = \sum g_i(x)$.

$f'(u_i) = (u_1-u_i) \cdots (u_r - u_i)$.

$\prod f'(u_i) \cdot (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \leadsto$ 判別式. $\blacksquare$

(10.18). $R$: normal, $f(x)$ = irred. monic, $a$: root of $f(x)$.

$R^*$ を $R[a]$ の整閉包とする.

$$f'(a)R^* \subseteq R[a].$$

<u>Proof</u>. $f$ の解 $a, u_2, \ldots, u_r$ まず.

$$g_i(x) = \frac{f(x)}{x-u_i}.$$

$$f'(a) = g_1(a)$$

$a$: insep $\longrightarrow f'(a) = 0$

$a$: sep.

$R''$: almost finite sep. Galois ext of $R$. cont. $a$.

$$\mathrm{Gal}(R''/R) =: G$$

$H$ を $\mathrm{Quot}(R^*)$ に対応する部分群とする.

$1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$. について, これを $a^{\sigma_i} = u_i$ なる $G$ の元とする.

$$G = \sum H\sigma_i \quad (\text{SO}\text{和}).$$

$$g_i(x) = g_1^{\sigma_i}(x).$$

$g_1(x)$ は $R[a][x]$ の元と思える. ($f(x) \in R[x]$. これは $R[a]$ に解をもつ $x-a$ で割っているため)

$b \in R^*$ について

$$bf'(a) = bg_1(a) = \sum b^{\sigma_i} g_i(a).$$

$$= \boxed{\sum_{i,j} b^{\sigma_i} c_j^{\sigma_i}} a^j \longrightarrow bf'(a) \in R[a].$$

G-stable より $R$ の元となる.

∎

§11. Valuation Rings.

Theorem. TFAE.

1. $R$: int. domain. 単項イデアルに全順序.
2. $R$: f.g. ⇝ principal., quasi-local. (int. do.).
3. $R \subseteq K$: field. quot$(R) = K$.
   $a \in K \Rightarrow a \in R$ or $a \in R^{-1}$.

Proof.

$1 \Leftrightarrow 2$.

単項イデアルに全順序

$\Downarrow$

f.g. ⇝ principal.

quasi-local?

非単元 + 非単元 = 非単元.

$a$ $b$

$(a)$. $(b)$ を比べる

$1 \Rightarrow 2$.

$2. \Rightarrow 1$

$(a)$, $(b)$ について.

~~$(a, b) = (c)$~~.

$(a, b)$ は $\boxed{\text{単項イデアル}}$.

$\Downarrow$

$M$.

($R$-加群としては (int. do.) より $R$ と同型).

$M/mM$ は $\bar{a}$ または $\bar{b}$ で生成される.

$\}$ NAK.

$M = (a)$ または $(b)$.

$1. \Rightarrow 3$.

$R \subseteq \mathrm{Quot}(R)$.

$\frac{c}{b} = a \in \mathrm{Quot}(R)$

$3. \Rightarrow 1$.

$(b)$, $(c)$

$\frac{c}{b} \in R$? $\frac{b}{c} \in R$.

$\square$

(11.2).

$R$: val. ring.

- $\mathfrak{a} \subseteq R$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}R$.
- $\boxed{\mathfrak{p} : \text{prime}, \ R/\mathfrak{p} : \text{valuation ring.}}$
- $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$

$$R \hookrightarrow R_{\mathfrak{p}}$$
$$\mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}.$$

$q \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

ある $\boxed{a \notin \mathfrak{p}} \longrightarrow \mathfrak{p}R \subset (a)$.

$aq \in \mathfrak{p} \longrightarrow q \in R$.

$q \in \mathfrak{p}. \longrightarrow$ Set theoritic.

$\blacksquare$

(11.3).

$R$: val. $\subseteq K$: quot.

$$\underset{\text{val. ring.}}{R \subseteq \underset{=}{R'}} \subseteq K$$

このとき，ある $R$ の素: $\mathfrak{p}$ があり

$R' = R_{\mathfrak{p}}$.

Proof.

$R'$ の maxi. の $R$ への引き戻しを $\mathfrak{p}$ とする.

$R_{\mathfrak{p}} \subseteq R'$

$R' - R \ni a \qquad \frac{1}{a} \in R.$

$\frac{1}{a} \in \mathfrak{p} \xrightarrow{(R \hookrightarrow R')} \frac{1}{a} \in \text{max. in } R' \longrightarrow$ 矛盾，より.

$\left( a = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}. \right)$

$R' \subset R_{\mathfrak{p}}$.

$\blacksquare$

(11.4) $R$: val. $\subset K$: quot.

$\mathfrak{p}$: max. of $R$.

$R^*$: val. $\subset R/\mathfrak{p}$: quot.

$R' = \{x \mid x \in R,\ x \bmod \mathfrak{p} \in R^*\}$

は val. ring of $K$.

$R'_{\mathfrak{p}} = R$.

$R'/\mathfrak{p} = R^*$.

Proof.

$R'$: val. は obvi.

$R' - \mathfrak{p} = \{x \mid x \in R,\ x \bmod \mathfrak{p} \in R^* - \{0\}\}$

$R$ の元 について

mod $p$: $0$ $\longrightarrow$ $R'$ に入っている

mod $p$ で $0$ でない ($R$ では単元)

逆元 か もとの元 が $R' - p$ に入っている。

$\longrightarrow$ OK.

$R'/p = R^*$

$\blacksquare$

composite とよぶ。

(11.5) $R$: val. $\leq K$.

$k \subset K$: subfield. このとき $R \cap k$ は $k$ の val. ring.

(11.6) valuation ring $\Rightarrow$ normal.

- $v: K^* \longrightarrow G^*$

$$\begin{cases} v(ab) = v(a) + v(b) \\ v(a+b) \geq \min(v(a), v(b)). \end{cases}$$

付値 $\longrightarrow$ val. ring.

val. ring $\longrightarrow$ 付値.

(11.9) $R \subseteq K$.

$0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_s$.

valuation ring $V \subseteq K$,

$R \subseteq V$ : prime ideals $\mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_s$

lying-over $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$,

Proof.

$s=1$ について.

・$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$ で局所化した $R_{\mathfrak{p}_1}$ でとりかえる.

$\mathfrak{p}_1 S \neq S$ なる $R \subseteq S$ で極大なものを (Zorn) 考える.

$S^*$.

$S^* \supseteq \underset{\max}{\mathfrak{m}} \supseteq \mathfrak{p}_1 S^*$

$S^*$ : local でない $\longrightarrow S^* \subseteq S^*_{\mathfrak{m}}$ より矛盾.

$S^*$ : local.

$x \in K - S^*$ のとき.

$\mathfrak{p}_1 S^*[x] \ni 1$

$\longrightarrow 1 + p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n = 0$

unit.

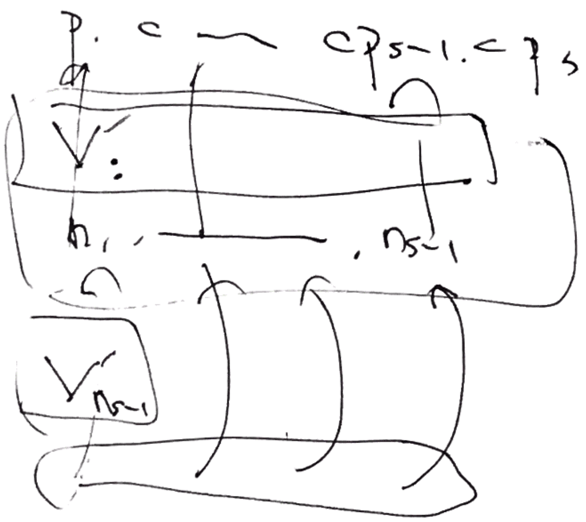
$x^{-1}$ は $S^*$ 上整.

$\mathfrak{p}_1 S^*[x^{-1}] \neq S^*$. よって $x^{-1} \in S^*$. ∴ $S^*$: valuation ring.

$\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{r-1}$

$V'$ の $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_{s-1}$. $R/\mathfrak{p}_{r-1} \subseteq V'/\mathfrak{n}_{s-1}$.

$V'$ について $\mathfrak{n}_{s-1}$ で局所化.




$$R/p_{s-1} \hookrightarrow V/n_{s-1}.$$

$s=1$ の時から.

いいかんじの $V^* \subseteq V/n_{s-1}$ がとれる.

($p_s/p_{s-1}$ の上の事として).

composition を考えて. 求めるものになる.

(11.10) $R_1, \dots, R_n$: val ring. $\subseteq K$.

$a \in K$. $\exists s \in \mathbb{N}$

$$\frac{a}{1+a+a^2+\cdots+a^{s-1}},\ \frac{1}{1+a+a^2+\cdots+a^{s-1}} \in \bigcap R_i$$

Proof

もし $a \notin R_i$ ならば

$v(1+a+\cdots+a^{s-1}) = v(a^{s-1})$

$s \geq 2$ で clear.

$a \in R_i$ について,

$1+\cdots+a^{s-1} = \frac{1-a^s}{1-a}$

$a-1 \in p_i$ $R/p_i$ の ch. に一致して… これは今で.

$a$ が $R$ の $Q_i$ 毎 mod $p_i$

$Q_i$ と互一

逆元

充分大きな $s$

$\square$