$L \subseteq P([0,1])$ について、$m : L \to [0,1]$

- $m([0,1]) = 1$
- $m(\{x\}) = 0$
- $m(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(X_i)$ for disjoint
- $m(X + r) = m(X)$ ← 平行移動不変性

測度

拡張として、$P([0,1]) \to [0,1]$?

~~非~~ $[0,1]$ に同値関係 $\sim$

- $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$

$\sim$ による代表系は ~~非可測~~

値をとることができない

集合 X について、X 上の測度とは、

$m : P(X) \to [0,1]$

- $m(X) = 1$
- $\forall x \in X$ について $m(\{x\}) = 0$
- disjoint な $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ について $m(\bigcup X_i) = \sum m(X_i)$

Exercise 2.1.

非可算個の測度正の集合 $\{X_i\}$ があったとき、

$\exists i, j$, $X_i \cap X_j$: 測度正

$\frac{1}{n}$ 以上の測度を持つもの：高々 n 個 ← 非可算個のことに反する

Exercise 2.2.

κ: 最小の"κ上の測度を持つ"をみたす基数. このとき.

κ上の測度は κ-additive.

> κ-additive とは.
>
> $\lambda < \kappa$ について. λ-個の disjoint $\{X_i\}$.
>
> $m(\bigcup X_i) = \sum m(X_i)$ が成り立つ.

$\lambda < \kappa$ について λ 個の $\{X_i\}$: disjoint がとれて.

$$m\left(\bigcup X_i\right) \neq \sum m(X_i).$$

Ex. 2.1. より. 測度正のものは可算個.

測度正のものを $\underbrace{X_0, X_1, \cdots, X_i, \cdots}$ / $X_\omega, X_{\omega+1}, \cdots$

$$\underbrace{m\left(\bigcup_{\omega \leq \alpha} X_\alpha\right)}_{r} \neq \sum_{\omega \leq \alpha} m(X_\alpha) = 0$$

r とおくと.

λ 上の測度: m'

$$m'(A) = \frac{m\left(\bigcup_{a \in A} X_a\right)}{r}$$

より. κの取り方に反する.

よって m は κ-additive.

κ: real-valued measurable card.

$\overset{\text{def}}{\iff}$ κ上にκ-additiveな測度が存在する。

κ: real-valued measurable card. $\Rightarrow$ weakly inaccessible.

- regular.

m: κ上のκ-additive.

$X \subseteq \kappa$. $|X| < \kappa$. $\Rightarrow m(X) = 0$

(一点の測度が0, κ-additive).

reg. でないとすると。$\lambda < \kappa$があって、κは濃度κ未満の集合のλ-個のdisjoint unionで表せるので、$m(\kappa) = 0$ となってしまう。

より κ: regular.

Banach : GCHを仮定 → weakly in. Ulam : 組合せっぽいことでGCHを除いてました。

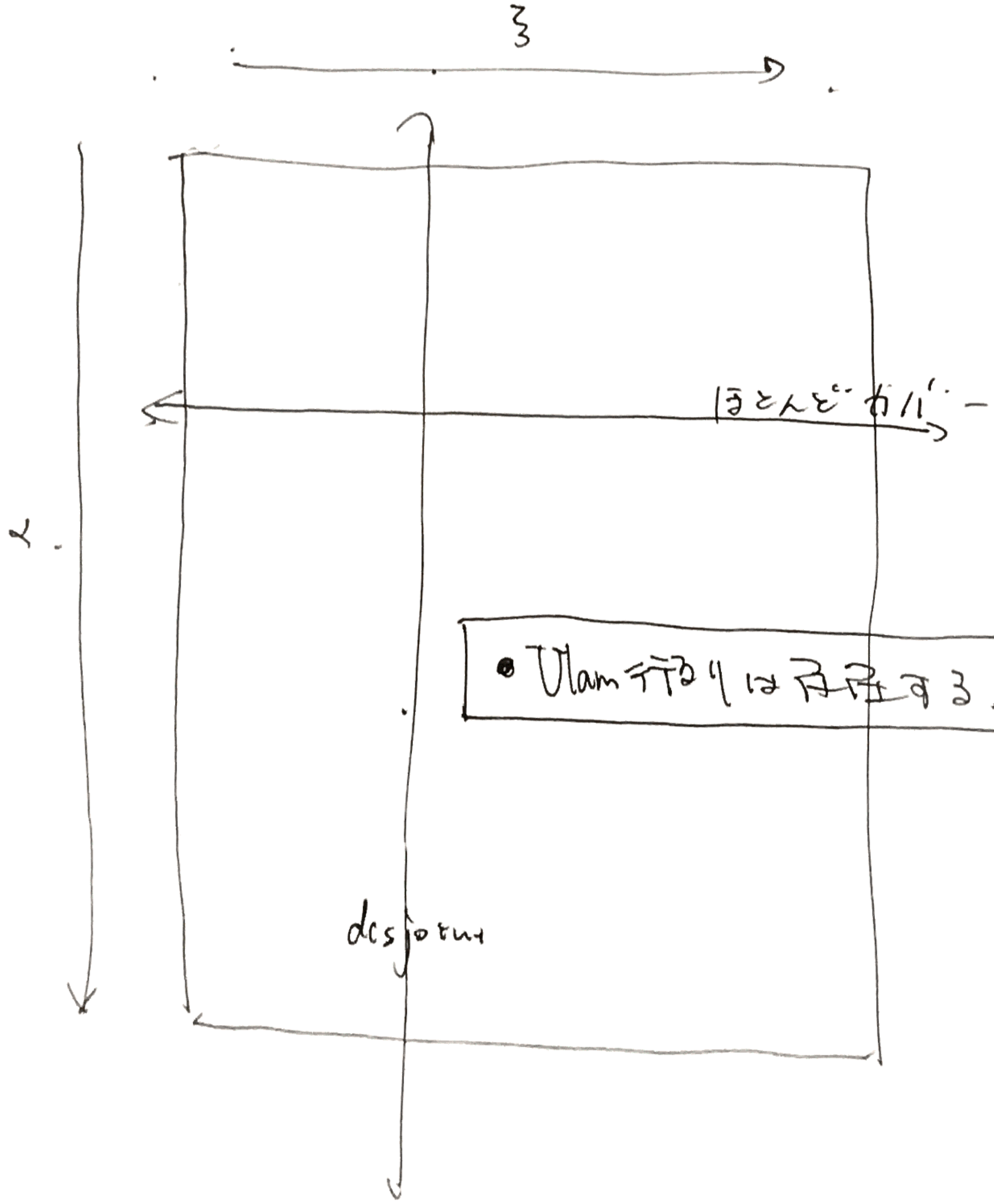
Ulam行列.

基数 λ について.

λ 上の Ulam 行列とは、次のようなもの：

$\{X^\xi_\alpha\}_{\xi\in\lambda,\ \alpha\in\lambda^+} \subseteq P(\lambda^+)$ であって.

- $\forall \xi\in\lambda$, $\forall \alpha,\beta\in\lambda^+$ について. $X^\xi_\alpha \cap X^\xi_\beta = \phi$ $(\alpha\neq\beta)$.
- $\forall \alpha\in\lambda^+$ について $\left|\lambda^+ - \bigcup_{\xi\in\lambda} X^\xi_\alpha\right| \leq \lambda$



$\boxed{\text{• Ulam行列は存在する.}}$

$1 \leq \eta < \lambda^+$ について $f_\eta : \lambda \twoheadrightarrow \eta$ を用意。

X^ξ_α とは、「$f_\eta(\xi) = \alpha$ が成り立つような η 全体」

- $X^\xi_\alpha \cap X^\xi_\beta = \phi \quad (\alpha \neq \beta)$.

  $f_\eta(\xi) = \alpha$ かつ $f_\eta(\xi) = \beta$ ではありえない。

- $\left| \lambda^+ - \bigcup_{\xi \in \lambda} X^\xi_\alpha \right| \leq \lambda$.

  「ある $\xi \in \lambda$ について $\eta \in X^\xi_\alpha$ に入っている。」

  $\Leftrightarrow$「ある $\xi \in \lambda$ について $f_\eta(\xi) = \alpha$」

  $\Leftrightarrow$「α が f_η の値域」

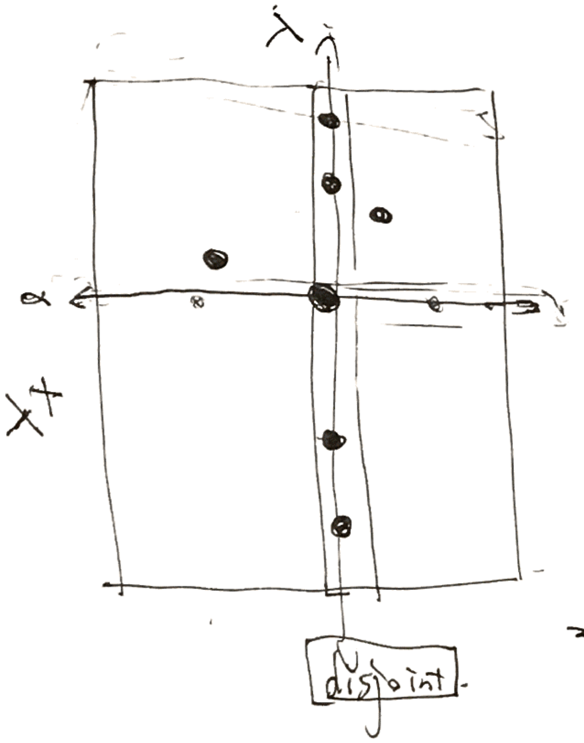
  f_η の取り方より、$\alpha < \eta$ と同値。

$\{X^\xi_\alpha\}$ は Ulam 行列

κ: real-val. meas. card. $\Rightarrow$ limit. card.

背理法: $\kappa = \lambda^+$ ならば.

λ 上の Ulam 行列 $\{X^\xi_\alpha\}$ をとれる



m: κ 上の κ-additive.

α を固定.

$$m\left(\bigcup_{\xi\in\lambda} X^\xi_\alpha\right) = 1.$$

$$Y^\xi_\alpha = X^\xi_\alpha - \bigcup_{\xi'<\xi} X^{\xi'}_\alpha$$

$\Rightarrow$ 矛盾.

$g : \lambda^+ \longrightarrow \lambda$ であって. $m(X_\alpha^{g(\alpha)}) > 0$.

$\exists\, \xi\in\lambda$ が存在 $|g^{-1}(\xi)| = \lambda^+ > \omega$.

Ex. 2.1 より 矛盾

$\square$

atom

m：測度（K上）

$A \subseteq K$ が atom $\Leftrightarrow$ ・$m(A) > 0$

・~~略~~ $\forall B \subseteq A$ について

$m(B) = 0$ or $m(B) = m(A)$

m について

atomless $\Leftrightarrow$ atom が存在しないことをいう。

・atomless

・atom

atomless な測度 m

・$\forall \varepsilon > 0$ について $\exists A \subset K$, $0 \neq m(A) < \boxed{\varepsilon}$

$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2^n} + \varepsilon'}$ $\boxed{n\text{回分割}}$

$\forall B \in K$ に対して $\exists C, D \subseteq B$

$m(C) \neq 0$, $m(D) \neq 0$

$C \cup D = B$, $C \cap D = \phi$

• $\forall A \subseteq F$ について $\exists B \subseteq A$ s.t. $m(B) = \frac{1}{2} m(A)$.

$B_0 = \emptyset \qquad m(B_0) \leq \frac{1}{2} m(A)$.

B_α について $B_{\alpha+1}$ というのは、

• $m(B_\alpha) < \frac{1}{2} m(A)$ より[illegible]場合.

$m(B_\alpha) < m(\underline{B_{\alpha+1}}) < \frac{1}{2} m(A)$. $\quad B_{\alpha+1} \subseteq A$.

• $m(B_\alpha) = \frac{1}{2} m(A)$

$B_{\alpha+1} = B_\alpha$

B_α : limit ord. について $B_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$.

$\{B_\alpha\}_{\alpha < \omega_1} \qquad \forall \alpha,\ \underbrace{m(B_\alpha) < m(B_{\alpha+1})}_{r_\alpha}$.

$(r_\alpha, r_{\alpha+1})$: 開区間は disjoint.

$\mathbb{R}$ は c.c.c. なので、矛盾.

よって、$\exists \alpha.\ m(B_\alpha) = m(B_{\alpha+1})$.

$\Rightarrow m(B_\alpha) = \frac{1}{2} m(A)$.

$\square$

• κ が "κ 上の κ-additive, atomless な測度を持つ" をみたすとすると、

以下が成り立つ。

• $\boxed{\kappa \le 2^{\aleph_0}}$

• Lebesgue 測度 m_L を拡張した $[0, 1]$ 上の測度がある。

κ 上の κ-add. atomless. m：測度.

（${}^{\omega}\omega$ に対応して集合をつくる。）

$s \in {}^{\omega}2$ について X_s をつくる。

$s' \in {}^{<\omega}2$ について $X_{s'}$ をつくる

$X_0 \cap X_1 = \phi$.

$m(X_0) = \frac{1}{2}$, $m(X_1) = \frac{1}{2}$.

$m(X_{00}) = m(X_{01}) = \frac{1}{4}$.

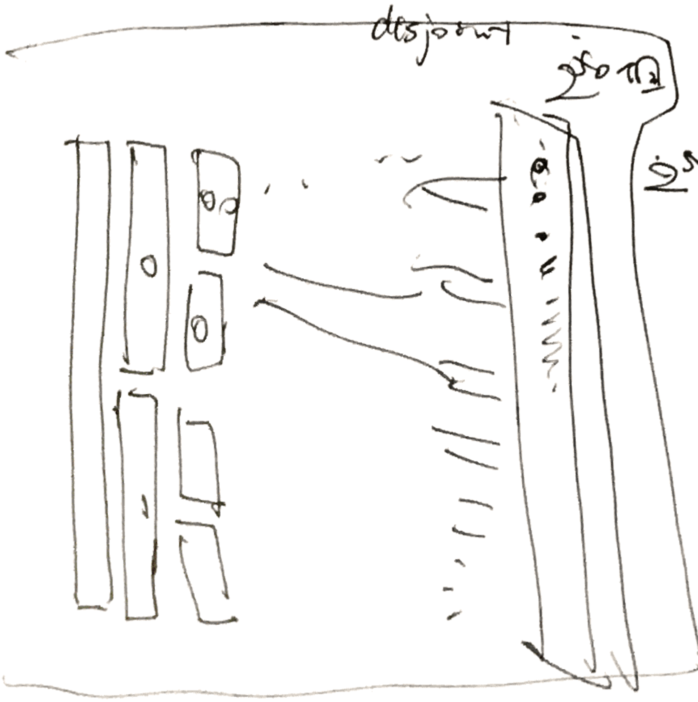
$X_{s'} = X_{s'^\frown 0} \cup X_{s'^\frown 1}$

disjoint

$$X_s = \bigcap_{s' < s} X_{s'}$$

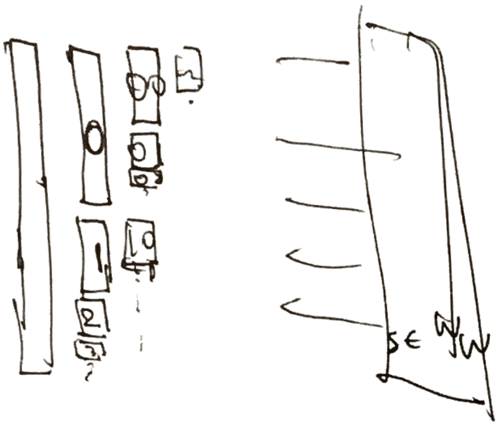
disjoint $2^{\aleph_0}$ 個の集合.

$m(X_s) = 0$.



$2^{\aleph_0} < \kappa$ なら κ-additive に反する。

$\kappa \le 2^{\aleph_0}$.



$s \in {}^{<\omega}\omega$ に対応して集合 X_s をつくる。

$$\boxed{\begin{gathered} X_{s'} = X_{s'^\frown 0} \cup X_{s'^\frown 1} \cup \cdots \\ m(X_{s'^\frown n}) = \frac{1}{2^{n+1}} m(X_{s'}). \end{gathered}}$$

$$X_s = \bigcap_{s' < s} X_{s'}$$

有限列 $s' \in {}^{<\omega}\omega$ を取ったとき、

$O(s')$: s' で始まる。 このとき、

$$m\Big(\bigcup_{s \in O(s')} X_s\Big) = m(X_{s'}) = m_L(O(s')) \quad ☆$$

$\boxed{\text{${}^{\omega}\omega$ 上の測度の決め方}}$

$A \subset {}^{\omega}\omega$ について

$$m'(A) = m\Big(\bigcup_{s \in A} X_s\Big) \text{ と定めると}$$

m' は ${}^{\omega}\omega$ 上の測度。 ☆式より Borel set について

m' と m_L は一致。 null-set についても一致

$\longrightarrow$ m' は m_L の拡張。 ∥

atom が存在するとき。（κ上の~~確率~~測度、κ-add.）

$\boxed{A\text{ : atom}}$ ← 濃度κ.

$B \subseteq A$ に対して、$m'(B) = \dfrac{m(B)}{m(A)}$

m' は値 0, 1 しか取らない。

κ上の測度 m' が得られる。

~~κ上の二値測度 m.~~

測度1のものをあつめてくる ⟶ フィルター.

・ $m(A)=1,\ A \subset A' \Rightarrow m(A')=1$

・ $m(A)=1,\ m(B)=1$

$\Rightarrow m(X-A) = m(X-B) = 0.$

$m(X-(A \cap B)) = 0$

$\Rightarrow m(A \cap B) = 1.$

（超フィルター）・ $m(A) + m(X-A) = 1.$

κ-complete :

$\lambda < \kappa$ について $\{X_\alpha\}_{\alpha<\lambda} \subset F$

なとき、$\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in F.$

（κ-complete）・ $m(X_\alpha)=1 \Rightarrow m(X - X_\alpha) = 0$

$\Rightarrow m(X - \bigcap X_\alpha) = 0$

$\Rightarrow m(\bigcap X_\alpha) = 1$

κ-complete な ultrafilter F. (非自明)

逆に ここから 二値測度

$$m(A) = \begin{cases} 1 & A \in F \\ 0 & A \notin F \end{cases}$$

$$\cancel{m(A_\alpha)} \quad m\left(\bigcup A_\alpha\right) = \sum m(A_\alpha)$$

$\boxed{\text{二値測度} \iff \text{ultrafilter}}$: 原理.

κ : measurable ⟺ κ上に κ-complete な 超フィルター、
非自明 なものの存在.

$\boxed{\kappa : \text{measurable} \Rightarrow \text{inaccessible}.}$

背理 : $\lambda < \kappa$ であって $\kappa \leq 2^\lambda$ なる λ がとれる.

$$f : \kappa \hookrightarrow {}^{\lambda}2$$

$i \in \lambda$ について $a_i \in \{0, 1\}$ があり

$$\boxed{f^{-1}(\{g : g(i) = a_i\}) \in F.}$$

$$f^{-1}\left(\boxed{\bigcap_{i \in \lambda} \{g : g(i) = a_i\}}\right) = \bigcap_{i \in \lambda} f^{-1}(\{g : g(i) = a_i\}) \in F$$

$\# f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \lambda} \{\sim\}\right) \leq 1$. F は非自明. ⇒ 矛盾. //

L : "定義可能"っぽい集合　とする.

def : SET $\longrightarrow$ SET.

A, n : nat $1 \leq i, j \leq n$.

$$\ulcorner = \urcorner(n, A, i, j) := \{(x_\bullet) \in A^n \mid x_i = x_j\}$$

$$\ulcorner \in \urcorner(n, A, i, j) = \{(x_\bullet) \in A^n \mid x_i \in x_j\}.$$

目標 :

・ $\mathrm{Def}(n, A) \subseteq P(A^n)$. をとる.

$$\mathrm{Def}(n, A) \ni \ulcorner = \urcorner(n, A, i, j).$$

$$\mathrm{Def}(n, A) \ni \ulcorner \in \urcorner(n, A, i, j).$$

$$\mathrm{Def}(n, A) \ni X, Y.$$

$$\Rightarrow X \cap Y,\ A^n - X \in \mathrm{Def}(n, A).$$

$$\mathrm{Def}(n+1, A) \ni X.$$

$$\Rightarrow \{(x_\bullet) \in A^n \mid \exists y.\ (x_\bullet)^\frown y \in X\} \in \mathrm{Def}(n, A).$$

「パラメータなしで定義可能な図形」

「パラメータ付きで定義可能な図形」

def(A)とは.

- $X \in \mathrm{def}(A) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ · $X \subseteq A$.

  · $\exists a_1, \dots, a_n \in A,\ \exists Y \in \mathrm{Def}(n+1, A)$

  $A \times \{a_1\} \times \{a_2\} \times \cdots \times \{a_n\} \cap Y = \cancel{X}$.

  $X \times \{a_1\} \times \cdots \times \{a_n\}$

一対一 : $n \longrightarrow a_1 \times \cdots \times a_n$ (論理式) $\longrightarrow$ Y の構成のコード.

L - 階層.

$$\begin{cases} L_0 = \phi \\ L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup \mathrm{def}(L_\alpha) \\ L_\delta = \bigcup_{\beta<\delta} L_\beta \end{cases}$$

超限的に階層.

ZF

$\boxed{V = L : \forall x,\ x \in L.}$ $\longrightarrow$ AC, GCH, ...

~~rank~~ $\boxed{\mathrm{rank}_L(x) = \min\{\alpha : \mathrm{Ord} \mid x \in L_{\alpha+1}\}}$

ZF + $V = L \Rightarrow$ AC.

$\mathrm{rank}_L(x) < \mathrm{rank}_L(y)$

$\mathrm{rank}_L(x) = \mathrm{rank}_L(y)$ $\quad x < y$.

一以下

rank が α 以下のものに順序がある.

rank が α+1 に順序.

$\boxed{\text{AC.}}$

...順序 well ordered