→

$\mathcal{L}_\in = \{\in\}$, $\in$：引数2.

AC：選択公理, CH：$2^{\aleph_0} = \aleph_1$. GCH：α：ordinal, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

ZF^-, ZFC^-：Power set axiom 抜き.

class = definable class.

ω_α, $\aleph_\alpha$：α番目 無限基数

$cf(\gamma)$：「$\alpha \to \gamma$：共終」が存在するαの最小. γ^+：γより大きい最小の基数.

κ：strong limit $\overset{def}{\iff}$ $\forall \lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$.

推移的集合 x $\overset{def}{\iff}$ $\underline{\forall z \in y \in x \Rightarrow z \in x}$.

集合 x に対し, $tc(x)$ $\overset{def}{\iff}$ "xを含むような推移的集合のなかで最小".

$$tc'(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\bigcup{}^n x\right). \qquad \underline{tc = tc'}$$

κ : cardinal $\quad H_\kappa \ni x \iff |tc(x)| < \kappa.$

limit cardinal κ, $\boxed{H_\kappa = \bigcup_{\substack{\lambda<\kappa \\ \lambda:\text{cardinal}}} H_\lambda}$

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= \phi \\ V_{\alpha+1} &= P(V_\alpha) \\ V_\beta &= \bigcup_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha:\text{ord.}}} V_\alpha. \end{aligned}\right\} \text{V-階層}$$

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha:\text{Ord.}} V_\alpha.$$

$$\mathbb{V} = \{x \mid x = x\}.$$

$\underline{H_\kappa \subseteq V_\kappa}$. ($\kappa$: inf. card.)

κ : 極限型 : $\quad H_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} H_\lambda \subset V_\kappa.$

κ : ~~極~~ 後続型.

κ : regular.

$\boxed{x \in H_\kappa} \longrightarrow \boxed{tc(x) \in H_\kappa}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow$

$x \in V_\kappa \longleftrightarrow tc(x) \in V_\kappa$

$\boxed{x \notin V_\kappa}$ $\quad \underline{|x| < \kappa.}$

xの要素は全てV_α.

$\downarrow$

xは$V_{\alpha+1}$の要素

$\exists y \in x, \ y \notin V_\kappa.$

$|y| < \kappa$

H_κ: Replacement. (κ: reg.).

F: ~~関数クラス~~ ~~クラス関数~~. x: 集合.

$\{F(y) \mid y \in x\}$: 集合.

$$\boxed{\begin{array}{l} F(-,-). \\ F(x,y) \wedge F(x,z) \\ \quad \longrightarrow y = z. \end{array}}$$

F: 関数クラス. x: 濃度 κ 以下.

$$\left| \{F(y) \mid y \in x\} \cup \bigcup_{y \in x} \cancel{F(y)}\, \mathrm{trcl}(F(y)) \right| < \kappa.$$

$$\{F(y) \mid y \in x\} \in H_\kappa.$$

∎

f. $\mathrm{dom} f$ $\mathrm{ran} f$. $f''(x) = \{f(y) \mid y \in x\}$. $f|_x = f \cap (x \times V)$.

${}^y x$: $y \xrightarrow{f} x$ 全体. $\lambda^\kappa = |{}^\kappa\lambda|$.

${}^{<\alpha}x = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^\beta x$. ${}^{<\kappa}\lambda = |P_\kappa\lambda|$ — $P_\kappa\lambda$ とは λ の部分集合, 濃度 κ 未満..

$x \triangle y = x - y \cup y - x.$

$x \subseteq \mathrm{On}$. $\mathrm{ot}(x)$: xの順序型.

$\min(x) = \bigcap x.$

$\sup(x) = \bigcup x.$

$\max(x) = [\cancel{x \in s}\ \underline{\sup(x) \in x}]\ \sup(x).$

$[x]^\alpha$: xの部分集合, otがα.

$$[x]^{<\alpha} = \bigcup_{\substack{\beta<\alpha \\ \beta:\mathrm{ord}}} [x]^\beta.$$

$$[x]^{\leq\alpha} = \bigcup_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta:\mathrm{ord}}} [x]^\beta.$$

xの始切片とは. あるα:ord, $x \cap \alpha$.

$[x]^{<\omega}$ $\{\alpha_1, \cdots \alpha_n\}$

$x \subseteq y$. $x \subset y$.

$X \subseteq \mathrm{On}$. に対して.

γ:ord が Xの limit point $\overset{\mathrm{def.}}{\iff}$

$\underline{\bigcup(X \cap \gamma) = \gamma\ . > 0}.$

$C \subseteq \mathrm{On}$. が δ 内で club.

$\iff$ δより小さいCのlimit point はCに含まれる.

limit point : δ を持つ.

C が δ 内 ν-closed. unbounded.

$\iff$ δより小さいCのlimit point, cofinality ν のものはCに含まれる.

limit point : δ を持つ.

S が δ 内で stationary

$\iff \forall C$: δ 内で club. $C \cap S \neq \phi$.

δ: ordinal.

${}^{\delta}P(\delta) \ni \{X_\alpha \mid \alpha < \delta\}$.

$\Delta_{\alpha<\delta} X_\alpha := \{\xi < \delta \mid \xi \in \bigcap_{\alpha<\xi} X_\alpha\}$.

$X \subseteq On$. $f: X \to On$: regressive.

$\forall \alpha \in X$. $f(\alpha) < \alpha$. $(\alpha \neq 0)$.

Prop: 0.1. λ: 非可算正則.

(a) $\gamma < \lambda$ $\{C_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ (C_α: club).

$\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$: club.

$\boxed{\text{Proof.}}$

closed.

unbounded. $\beta < \lambda$.

β_0 $\boxed{\gamma\text{個の元}}$ β_1 $\boxed{\gamma.}$ β_2

....

$i \in \omega$ に対して. $[\beta_i, \beta_{i+1})$ は全ての C_α と交わる.

$\sup_{i\in\omega} \beta_i = \beta_\omega \in \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$. ∎

(b). $\langle C_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$. ($C_\alpha$: λ の club.)

$\Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ は club.

$\boxed{\text{Proof}}$

closed.

$\boxed{\Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha}$ の limit $\boxed{\gamma}$ をとる.

$\cup$

$\boxed{X} = x_0, x_1, \ldots\ldots x_\beta$

$\gamma \in \Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha$

'$\alpha < \gamma$' に対して.

$\gamma \in C_\alpha$.

$x_1 \in \bigcap_{\alpha<x_0} C_\alpha$.

$\alpha < x_\beta < x_{\beta+1} < \ldots$

$x_2 \in \bigcap_{\alpha<x_1} C_\alpha$

$x_i \in C_\alpha$:

$\gamma \in C_\alpha$.

$\gamma \in \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$

unbounded. $\beta < \lambda$.

$\exists \beta$ より大きな $\Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ の元.

$\beta < \lambda$. $\boxed{\bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha}$: club (0.1.(a))

$\beta_1 \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$.

$\beta_2 \in \bigcap_{\alpha<\beta_1} C_\alpha$.

$\vdots$

$i \in \omega$ に対し.

$\boxed{\beta_{i+1} \in \bigcap_{\alpha<\beta_i} C_\alpha}$.

$\sup_{i\in\omega} \beta_i = \beta_\omega$

$\beta_\omega \in \bigcap_{\alpha<\beta_\omega} C_\alpha$

Π

0.1.(c).

S : stationary in λ.

$f : S \longrightarrow \lambda$: regressive.

$\exists \alpha \in \lambda$, $f^{-1}(\{\alpha\})$: stationary.

Proof

$f^{-1}(\{\alpha\}) \cap C_\alpha = \phi$ $\quad C_\alpha$: club.

$\Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha$: club (0.1.(b)).

$S \cap \Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha \ni x$.

$x \in \Delta_{\alpha<\lambda} C_\alpha \Leftrightarrow [\alpha < x \Rightarrow x \in C_\alpha]$

$\Rightarrow [\alpha < x \Rightarrow f(x) \neq \alpha]$.

f a reg. 性に反する. ∎

0.1.(d).

ν-club. $C \subseteq S_0$

$C = \overline{C} \cap S_0$

$\nu < \lambda$: regular.

$S \subseteq \underbrace{\{\xi < \lambda \mid cf(\xi) = \nu\}}_{S_0}$

S : stationary in λ.

C : ν-closed unbounded > のとき

$S \cap C \neq \phi$.

Proof.

$S \cap \overline{C} \ni \alpha$.

α : cofinality ν.

$\rightarrow \alpha \in C$. $\quad \cancel{S \cap C} \ni \alpha$.

$S \cap C \ni \alpha$. ∎

Filter. Ideal.

$F \subseteq P(S)$: filter.

- $^\forall A, B \in F$. $A \cap B \in F$.
- $S \in F$
- $^\forall A \in F$, $A \subset A' \Rightarrow A' \in F$.

- $\phi \notin F$.
- principal でないもの.

filter F が $E \subseteq P(S)$ によって生成.

$\{X \subseteq S \mid {}^\exists Y \in E,\ Y \subseteq X\} = F$.

filter F が λ-complete.

λ未満の $\{A_1, \ldots\}$

$\bigcap A_\bullet \in F$.

ultrafilter.

$^\forall A$. $A \in F \vee A^{comp} \in F$.

$S - A$.

uniform.

$X \in F$. $|X| = |S|$.

filter.

F : filter. λのfinal segment

$\lambda - \alpha$. が含まれる.

---

ideal については dual に.

C_λ : λのclub set で生成されるフィルター

NS_λ : λの non-stationary set で生成されるイデアル.

C_1 C_2.

N_1, N_2 $\boxed{N_1 \cup N_2}$ $C_1 \cap C_2$.

φ : $\mathcal{L}_\in$-論理式.

クラス M, φ の M への相対化.

$\exists x . \to \exists x \in M$

$\forall x \to \forall x \in M$.

$\boxed{P(x)}$ の M への相対化.

$t(x_1, \cdots, x_n)$ $\boxed{\text{項 } t_1, \cdots, t_n}$

$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$.

$t(t_1, \cdots, t_n)$

$\varphi(t_1, \cdots, t_n)$

M : $\mathcal{L}_\in$-構造について.

$M \models \varphi$. をみたす.

φ の M に対する相対化が成り立つ.

$M \models \boxed{ZFC}$

T: 理論 $Con(T)$. とは

$\Updownarrow$

Tのモデルの存在.

理論 T_1, T_2.

T_2 が T_1 に対して相対的無矛盾

$ZFC \models Con(T_1) \longrightarrow Con(T_2)$

理論 T_1, T_2 : 無矛盾性のイミで等価

$ZFC \models Con(T_1) \longleftrightarrow Con(T_2)$.

φ. $\ulcorner \varphi \urcorner$.

T : Σ_ϵ- ~~[illegible]~~ に含まれる.

$\langle M, \in \rangle$ が $\boxed{\text{Tの } \in\text{-model}}$.

$\boxed{\langle M, \in \rangle}$ Tのモデル.

$R \subseteq M^n$. $\langle M, \in \cap M \times M, R \rangle$.

Σ_ϵ を ~~[illegible]~~ 拡張.

$\langle \ulcorner \varphi \urcorner, \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \rangle \in \underline{S}$

$\Leftrightarrow V \models \underline{\varphi}[x_1, \cdots, x_n]$.

Gödel-Tarski.

$\boxed{\forall \exists \forall \exists \cdots\cdots}$

$\boxed{\Sigma_n\text{-論理式}}$

$\exists \forall \exists \forall \cdots\cdots$

$\models_n$.

diag. intersec.

$\cancel{\{\xi<\nu \mid \xi\in}$

$\cancel{\{\alpha<\lambda \mid \alpha\in \bigcap_{\beta<\alpha} C}$

$$\{\beta<\lambda \mid \beta\in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\} : \Delta_{\alpha<\lambda}$$

$$\|$$

$$\{\beta<\lambda \mid \forall\alpha<\beta .\ \beta\in C_\alpha\}$$

$$\|$$

$$\{\beta<\lambda \mid \forall\alpha\in\lambda .\ (\alpha\geq\beta \vee \beta\in C_\alpha)\}$$

$$\|$$

$$\bigcap_{\alpha\in\lambda}\{\beta\in\lambda \mid \alpha\geq\beta \vee \beta\in C_\alpha\}. \quad \square$$