ω上の測度 m_ω：

$$m_\omega(\{i\}) = 2^{-(i+1)}.$$

$$m_\omega(a) = \sum_{i\in a} 2^{-(i+1)}$$

${}^\omega\omega$上の測度：m_ωの直積測度 m_B

m_Bの構成：$m_B(O(s)) = \prod_{i<|s|} 2^{-(s(i)+1)}$

> ※ 有限加法的測度 にして
> (いつでもσ-加法的にできるわけではないが)
> σ-加法的にできる. (ゆるい条件のもと).

完備化

m_L：null-set のズレを許容する.

null-set とは measure 0 の Borel set に含まれる.

Borel set とのズレがnull ⇔ Lebesgue可測.

$\mathcal{M}_L$: Lebesgue可測な σ-algebra.

Lemma 0.9 ※位相空間上のBorel measureとして一般に考えると……

(a) $A\in\mathcal{M}_L$, $\varepsilon>0$, $\exists C$: closed, O: open.

s.t. $C\subseteq A\subseteq O$, $m_L(O-C)<\varepsilon$

↓

(b) $A\in\mathcal{M}_L$ $\exists X$: F_σ, Y: G_δ.

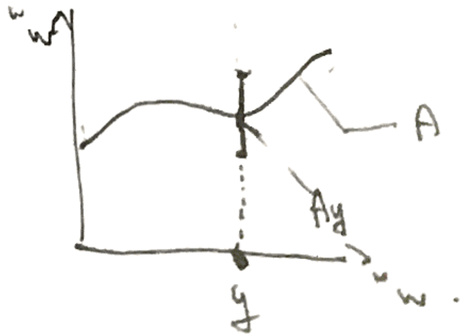
s.t. $X\subseteq A\subseteq Y$, $m_L(X)=m_L(A)=m_L(Y)$.

> ※ 測度論：Halmos の "Measure Theory"
> Cohn "Measure Theory"

Lemma 0.10

$A\subseteq {}^2({}^\omega\omega)$: Lebesgue可測.

A: null ⇔ $\{y\in{}^\omega\omega : A_y : \text{not null}\}$ が null.



- nowhere dense = nwd,

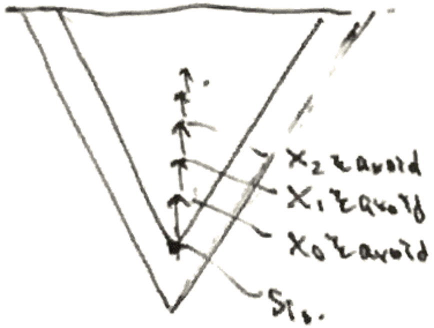
  閉包の内部が空.

  (RO にすると ϕ).

- meager = nwd の可算和.
- Baire = $A \triangle O$: meager
- $Bd(O)$ は nwd.

Theorem 0.11 非空な開集合は meager ではない.

図



i_0 を $O(s_{i_0}) \subseteq O$ となる最小の整数.

i_{j+1} は.

$O[s_{i_{j+1}}] \cap X_j = \phi$

$s_{i_{j+1}} \supsetneq s_{i_j}$, $|s_{i_{j+1}}| > |s_{i_j}|$.

なる最小のもの.

このとき $x = \bigcup_{j \in \omega} s_{i_j}$: この real は

$x \in O - \bigcup_{j \in \omega} X_j$ である. ∎

Lemma 0.12

$A \subseteq {}^\omega\omega$: Baire,

(a) ${}^\omega\omega - A$: Baire

(b) $\exists G_\delta : X$, $F_\sigma : Y$,

$X \subseteq A \subseteq Y$, $Y - X$: meager

測度の正則性と対の命題.

(a) : Obvi.

(b) : $A \triangle O \subseteq F$ より $A \supseteq O - F$: G_δ ∎.

Theorem 0.13. (Kuratowski-Ulam)

$A \subseteq {}^2({}^\omega\omega)$: BP.

A : meager $\Leftrightarrow$ $\{y \mid A_y$ not meager$\}$ is meager.

—— Section 0 ——

—— Section 1 ——

κ : weakly inaccessible. (w.i.)

$\Leftrightarrow$ κ : regular, limit cardinal.

Claim:

κ: w.i. このとき、

1. $\omega_\kappa = \kappa$.
2. $C \subseteq \kappa$: club ならば
   ~~$C \subseteq \kappa$~~ : $C' := \{\alpha \in C \mid \#(C \cap \alpha) = \alpha\}$: club.
3. $C = \kappa$ とすれば、
   C': {基数}
   $C'' = \{$aleph 固定点 の全体$\}$ は club.

2. → 3.
↓
1.

2. $\{\alpha \leq \kappa : |C \cap \alpha| = \alpha\}$: club ならよい。

closed については、数え上げで示せる。

unbounded については、

$(\alpha_n : n \in \omega)$, $(\lambda_n : n \in \omega)$ と次のように。

$\alpha_0 = \alpha$.

$\lambda_n = |\alpha_n|^+$. $\alpha_{n+1} = C \cap \lambda_n$ 要素より大きい元.

$\sup\{\alpha_n\} = \sup\{\lambda_n\}$ が目標物.

- κ: 0-w.i. ⟺ reg.
  κ: $(\alpha+1)$-w.i. ⟺ reg., limit of α-w.i.
  κ: δ- w.i. ⟺ ~~reg.~~ $\forall \beta < \delta$. β-w.i.

Λ-演算: $X \subseteq \mathrm{On}$ について、

$\Lambda(X) = \{\alpha \in X \mid |X \cap \alpha| = \alpha\}$.

このとき $\Lambda^\alpha(\mathrm{Reg})$: α-w.i. 全体

(Λ: decreasing なので、Λ^α: α について limit で intersection をとる).

- $\kappa > \omega$: weakly Mahlo.

⟺ $\{\rho < \kappa : \rho$: regular$\}$ が stationary.

Claim: w.M ⇒ reg.

κ: reg., $(\alpha_i : i < \mathrm{cf}\,\kappa)$ を cf. incr. seq.

$\alpha_0 > \mathrm{cf}(\kappa)$ とすると、(α_i) の極限点全体は club.

よって交わりを持たない。ゆえに reg. である。

w.M ⇒ w.i.

Proposition 1.1.

κ: w.M ⇒ κ: κ-w.i.

Proof: $Reg_{<\kappa}$ は stationary

$C_0 = \kappa$.

$C_{\alpha+1} = (C_\alpha \cap Reg_{<\kappa}$ の κ より小さい limit point$)$

$C_\delta = \bigcap_{\alpha<\delta} C_\alpha$.

これは club-列になっている.

C_α は α-w.i. な基数の集合であるため.

κ: reg. であったため. κ は $(\alpha+1)$-w.i.

より κ は κ-w.i. ∎

- κ: 0-w.M. ⇔ reg.

κ: $(\alpha+1)$-w.M. ⇔ $\{\xi<\kappa : \xi$: α-w.M.$\}$: stationary

κ: δ-w.M. ⇔ $\forall \beta<\delta$. β-w.M.

$X \subseteq On$ に対して.

$M(X) = \{\alpha \in X : X \cap \alpha$: stationary in $\alpha\}$.

このとき α-w.M. は $M^\alpha(Reg)$.

- $\kappa > \omega$.

(strongly) inaccessible とは.

κ: reg, strong limit.

Proposition 1.2.

κ: inacc. とすると.

(a) $x \subseteq V_\kappa$. $x \in V_\kappa$ ⇔ $|x| < \kappa$.

(b) $\langle V_\kappa, \in \rangle \models ZFC$.

(a) ⇒. Obvi. inacc. の仮定.

(a) ⇐. reg. より.

(b). Replacement 以外

Theorem.

$\boxed{\begin{array}{l} \mu : \text{finite. non-nega.} \\ \text{additive. set funct. on } R. \\ \mu : \text{cont. from below at every } E \text{ in } R. \\ \text{or. cont. from above at } 0, \\ \longrightarrow \mu : \text{measure on } R. \end{array}}$

Caratheodory!. 拡張定理.