群化函手とイコライザは交換しない

Q-rad.heart

2021 年 1 月 9 日

以下モノイドはすべて可換であるとする。

定義 1
モノイド M に対して、M^2 上の二項関係 R を以下で定める。

- $(a,b),(c,d) \in M^2$ に対して $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \exists x \in M,\ a+d+x = b+c+x$

このとき、モノイド M^2 を関係 R で割った商集合はまたモノイドとなる。このモノイドを M^{gp} と表記し、M の群化という。また (a,b) の同値類を $a-b$ と表記する。

補題 2
モノイド M の群化 M^{gp} は群である。

Proof. M^{gp} の任意の元は M の元 a,b によって $a-b$ と表せる。このとき、$b-a$ は $a-b$ の逆元となっている。 □

定義 3
モノイド M, N について、集合の射 $f\colon M \to N$ がモノイド準同型であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $a,b \in M$ について $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(0) = 0$

定義 4
モノイド M, N とモノイド準同型 $f,g\colon M \to N$ について、f と g とのイコライザとは、$f(m) = g(m)$ が成り立つ $m \in M$ 全体のなす M の部分モノイドから M への包含射 $\mathrm{Eq}(f,g)$ のことをいう。

定義 5
モノイド M, N とモノイド準同型 $f\colon M \to N$ について、$f^{gp}\colon M^{gp} \to N^{gp}$ が f の群化であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $m \in M$ について、$f^{gp}(m-0) = n-0$

補題 6
モノイド M, N とモノイド準同型 $f\colon M \to N$ について、f の群化は存在してモノイド準同型となる。

Proof. $a-b \in M^{gp}$ に対して $f(a)-f(b)$ を充てる対応は well-defined であり、これは f の群化となり、モ

ノイド準同型となる。 $\square$

ここで、「群化函手とイコライザが交換する」とは「任意のモノイド M, N とモノイド準同型 $f, g\colon M \to N$ について $\mathrm{Eq}(f,g)^{gp} \cong \mathrm{Eq}(f^{gp}, g^{gp})$」という主張のことを指すものとする。

大定理
群化函手とイコライザは交換しない。

Proof. 整数全体に演算として加法を入れたモノイドを $\mathbb{Z}$ とおく。また、集合 $\{0,1\}$ 上に以下で定まる演算を定めたモノイドを $\mathbb{B}_+$ とよぶ。

- $0+0=0$
- $0+1=1$
- $1+0=1$
- $1+1=1$

整数 m と $\mathbb{B}_+$ の元 b の組 (m,b) 全体のなす集合上に以下で演算を入れたモノイドを $\mathbb{Z}\times\mathbb{B}_+$ とよぶ。

- $(m,b)+(m',b')=(m+m',b+b')$

ここで、集合の射 $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{B}_+$ を以下のように定める。

- 整数 m について $f(m)=(m,0)$

また、集合の射 $g\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{B}_+$ を以下のように定める。

- 整数 m について $f(m)=(m,1)$

このとき、$\mathrm{Eq}(f,g)$ の定義域は $\{0\}$ であるため、$\mathrm{Eq}(f,g)^{gp}$ の定義域も $\{0\}$ と同型である。
ここで、$(m,1)$ は $(\mathbb{Z}\times\mathbb{B}_+)^{gp}$ においては $(m,0)$ と等しい。実際、$(m,1)+(0,1)=(m,0)+(0,1)$ が成り立つ。
従って $f^{gp}=g^{gp}$ が成り立つため、$\mathrm{Eq}(f^{gp},g^{gp})$ の定義域は $\mathbb{Z}$ 全体となる。よって $\mathrm{Eq}(f,g)^{gp}\cong\mathrm{Eq}(f^{gp},g^{gp})$ は成り立たない。 $\square$