

群化関手とイコライザは交換しない

Q-rad.heart

2021 年 1 月 10 日

以下モノイドはすべて可換であるとする。

定義 1

モノイド M に対して、 M^2 上の二項関係 R を以下で定める。

- $(a, b), (c, d) \in M^2$ に対して $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow \exists x \in M, a + d + x = b + c + x$

このとき、モノイド M^2 を関係 R で割った商集合はまたモノイドとなる。このモノイドを M^{gp} と表記し、 M の群化という。また (a, b) の同値類を $a - b$ と表記する。

補題 2

モノイド M の群化 M^{gp} は群である。

Proof. M^{gp} の任意の元は M の元 a, b によって $a - b$ と表せる。このとき、 $b - a$ は $a - b$ の逆元となっている。 \square

定義 3

モノイド M, N について、集合の射 $f: M \rightarrow N$ がモノイド準同型であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $a, b \in M$ について $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(0) = 0$

定義 4

モノイド M, N とモノイド準同型 $f, g: M \rightarrow N$ について、 f と g とのイコライザとは、 $f(m) = g(m)$ が成り立つ $m \in M$ 全体のなす M の部分モノイドから M への包含射 $\text{Eq}(f, g)$ のことをいう。

定義 5

モノイド M, N とモノイド準同型 $f: M \rightarrow N$ について、 $f^{gp}: M^{gp} \rightarrow N^{gp}$ が f の群化であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $m \in M$ について、 $f^{gp}(m - 0) = n - 0$

補題 6

モノイド M, N とモノイド準同型 $f: M \rightarrow N$ について、 f の群化は存在してモノイド準同型となる。

Proof. $a - b \in M^{gp}$ に対して $f(a) - f(b)$ を充てる対応は well-defined であり、これは f の群化となり、モ

ノイド準同型となる。 □

ここで、「群化関手とイコライザが交換する」とは「任意のモノイド M, N とモノイド準同型 $f, g: M \rightarrow N$ について $\text{Eq}(f, g)^{gp} \cong \text{Eq}(f^{gp}, g^{gp})$ 」という主張のことを指すものとする。

大定理

群化関手とイコライザは交換しない。

Proof. 整数全体に演算として加法を入れたモノイドを \mathbb{Z} とおく。また、集合 $\{0, 1\}$ 上に以下で定まる演算を定めたモノイドを \mathbb{B}_+ とよぶ。

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 1$

整数 m と \mathbb{B}_+ の元 b の組 (m, b) 全体のなす集合上に以下で演算を入れたモノイドを $\mathbb{Z} \times \mathbb{B}_+$ とよぶ。

- $(m, b) + (m', b') = (m + m', b + b')$

ここで、集合の射 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{B}_+$ を以下のように定める。

- 整数 m について $f(m) = (m, 0)$

また、集合の射 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{B}_+$ を以下のように定める。

- 整数 m について $f(m) = (m, 1)$

このとき、 $\text{Eq}(f, g)$ の定義域は $\{0\}$ であるため、 $\text{Eq}(f, g)^{gp}$ の定義域も $\{0\}$ と同型である。

ここで、 $(m, 1)$ は $(\mathbb{Z} \times \mathbb{B}_+)^{gp}$ においては $(m, 0)$ と等しい。実際、 $(m, 1) + (0, 1) = (m, 0) + (0, 1)$ が成り立つ。

従って $f^{gp} = g^{gp}$ が成り立つため、 $\text{Eq}(f^{gp}, g^{gp})$ の定義域は \mathbb{Z} 全体となる。よって $\text{Eq}(f, g)^{gp} \cong \text{Eq}(f^{gp}, g^{gp})$ は成り立たない。 □