れっつ log 幾何

Q-rad.heart

2021 年 1 月 10 日

特別な言及なしに単にモノイドと言った場合は、モノイドは可換であるとする。またここでは自然数といったときには基本的に 0 を含むものとする。また、演算記法の統一のため、非可換モノイドについても演算を $+$ を用いて表記する (非可換モノイドを基本的に取り扱わないため、このような記法を行う)。

目次

第 1 章

モノイド

モノイドについての一般的な事項について述べる。

1.1　モノイド

定義 1.1.1
モノイドとは、集合 M と M 上の二項演算 $+$ と M の元 0 との組 $\langle M, +, 0\rangle$ であって、以下の条件を充たすものである。

- $a, b, c \in M$ について $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a \in M$ について $a + 0 = 0 + a = a$
- $a, b \in M$ について $a + b = b + a$

モノイド $\langle M, +, 0\rangle$ について、省略して M と表記することがある。

定義 1.1.2
モノイド M, N について、集合の射 $f\colon M \to N$ がモノイドの射であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $a, b \in M$ について $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(0) = 0$

例 1.1.3
集合 $\{0, 1\}$ 上に以下で定まる演算を定めたモノイドを $\mathbb{B}_+$ とよぶ。ここで単位元は $0 \in \{0, 1\}$ である。

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 1$

例 1.1.4
自然数全体に加法により演算を入れたものはモノイドとなる。これを $\mathbb{N}$ とよぶ。このとき、以下で定まる集合の射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{B}_+$ はモノイドの射となる。

- $n = 0$ ならば $f(n) = 0$
- $n \neq 0$ ならば $f(n) = 1$

定義 1.1.5
モノイドを対象とし、モノイドの射を射とする *(*大きな*)* 圏を Mon と表記し、これをモノイドの圏という。

1.2 自然数

定義 1.2.1
モノイドの圏から集合の圏への忘却函手とは、モノイド $\langle M, +, 0\rangle$ について集合 M を充てる函手 $\mathsf{Mon} \to \mathsf{Set}$ のことである。

補題 1.2.2
モノイド M において、次の対応 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}(\mathbb{N}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\{pt\}, M)$ は全単射である。

- $g\colon \mathbb{N} \to M$ について、$f(g)(pt) = g(1)$

Proof. 任意の写像 $h\colon \{pt\} \to M$ について、次のようにモノイドの射 $h'\colon \mathbb{N} \to M$ を定めることができる。

- $n \in \mathbb{N}$ について、$h'(n) = n * h(pt)$

このとき、$f(h') = h$ が成り立つため、f は全射である。

モノイドの射 $g, g'\colon \mathbb{N} \to M$ について、$g(1) = g'(1)$ であるならば、$g(n) = n * g(1) = n * g'(1) = g'(n)$ より、$g = g'$ が成り立つ。よって f は単射である。 □

定義 1.2.3
集合 S について、$\bigoplus_{s\in S} \mathbb{N}$ とは、集合の関数 $f\colon S \to \mathbb{N}$ であって、有限個の $s \in S$ を除いて $f(s) = 0$ が成り立つようなもの全体のなすモノイドのことを指す。

定義 1.2.4
集合 S について $\bigoplus_{s\in S} \mathbb{N}$ の標準基底とは、集合の射 $S \to \bigoplus_{s\in S} \mathbb{N}$ であって、次で定まるもののことをいう。

- $s \in S$ に対してのみ 1 を充て、それ以外の S の元に対して 0 を充てる関数 $S \to \mathbb{N}$ を χ_s とよび、このとき $f(s) = \chi_s$ が成り立つ。

補題 1.2.5
集合 S とモノイド M において、次の対応 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}(\bigoplus_{s\in S} \mathbb{N}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, M)$ は全単射である。

- S についての標準基底を i_S とおいたとき、 $g\colon \bigoplus_{s\in S} \mathbb{N} \to M$ について、$f(g) = g \circ i_S$

Proof. 任意の写像 $h\colon S \to M$ について、次のようにモノイドの射 $h'\colon \bigoplus_{s\in S} \mathbb{N} \to M$ を定めることができる。

- $f \in \bigoplus_{s\in S} \mathbb{N}$ について、$h'(f) = \sum_{s\in S} f(s)h(s)$

このとき、$f(h') = h$ が成り立つため、f は全射である。

モノイドの射 $g, g' \colon \bigoplus_{s \in S} \mathbb{N} \to M$ について、$g \circ i_S = g' \circ i_S$ であるならば、写像 $h \colon S \to M$ について $g(h) = \sum_{s \in S} g(\chi_s) h(s) = \sum_{s \in S} g'(\chi_s) h(s) = g'(h)$ より、$g = g'$ が成り立つ。よって f は単射である。 □

命題 1.2.6
忘却函手 $\mathsf{Mon} \to \mathsf{Set}$ は左随伴を持つ。

Proof. 1.2.5 より、任意の集合 S に対してモノイドの圏から集合の圏への函手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, -)$ は表現可能函手である。 □

1.3 モノイドの極限

定義 1.3.1
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とは、積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 上に成分ごとの演算を入れたモノイドのことをいう。

補題 1.3.2
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ は Mon における $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の積と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.3.3
モノイド M, N とモノイド準同型 $f, g \colon M \to N$ について、f と g とのイコライザとは、$f(m) = g(m)$ が成り立つ $m \in M$ 全体のなす M の部分モノイドから M への包含射 $\mathrm{Eq}(f, g)$ のことをいう。

補題 1.3.4
モノイドの射 $f, g \colon M \to N$ について、$\mathrm{Eq}(f, g)$ は Mon における f と g とのイコライザと一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.3.5
Mon は完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 □

1.4 モノイドの余極限

定義 1.4.1
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とは、積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の部分集合であって、有限個の成分を除いて 0 であるようなもののなす集合上に成分ごとの演算を入れたモノイドのことをいう。

補題 1.4.2
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は Mon における $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

次にモノイドのコイコライザについて論じる。

定義 1.4.3
モノイド M について M 上の合同関係とは、M 上の二項関係 $R \subset M \times M$ であって以下の条件を充たすもののことをいう。

- R は同値関係
- R は $M \times M$ の部分モノイド

補題 1.4.4
モノイドの射 $f\colon M \to N$ について、$R = \{(m, m') \in M \times M | f(m) = f(m')\} \subset M \times M$ は M 上の合同関係となる。

Proof. 同値関係性は明らかである。また、$(m, m'), (n, n') \in R$ ならば $f(m+n) = f(m) + f(n) = f(m') + f(n') = f(m' + n')$ が成り立つ。$(0, 0) \in R$ より R はモノイドとなる。したがって R は合同関係である。 □

補題 1.4.5
モノイド M 上の合同関係 R について、M の R による商集合 M/R には M から誘導される演算を入れることができ、この演算によって M/R は自然にモノイドとなる。また、射影 $\pi\colon M \to M/R$ はモノイド準同型となり、$R_\pi = \{(m, m') \in M \times M | \pi(m) = \pi(m')\} \subset M \times M$ は R と一致する。

Proof. $m, m', n, n' \in M$ について mRm' かつ $nR'n$ が成り立つとする。これはすなわち、$(m, m') \in R$ かつ $(n, n') \in R$ が成り立つが、R はモノイドであったため、$(m + m', n + n') \in R$ が成り立つ。したがって M/R には演算が well-defined に定まる。これがモノイドをなすことは明らか。π の準同型性についても明らか。
R と R_π は M 上の同値関係であって、同じ商集合を導くため、$R = R_\pi$ が成り立つ。 □

補題 1.4.6
モノイド M 上の合同関係の族 $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ は M 上の合同関係である。

Proof. 同値関係性・モノイド性はともに共通部分を取る操作により保たれる。 □

定義 1.4.7
モノイド M について $M \times M$ の部分集合 G について、G で生成される M 上の合同関係とは、G を含む M 上の合同関係であって最小のもののことを指す。

命題 1.4.8
モノイドの射 $f, g\colon M \to N$ について、モノイドの圏における f と g のコイコライザは存在する。

Proof. N 上の合同関係であって、$\{(f(m), g(m)) \in N \times N | m \in M\} \subset N \times N$ によって生成されるものを R とおくと、射影 $N \to N/R$ は求めるコイコライザ射となる。 □

定義 1.4.9
Mon は余完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 □

1.5　モノイドの表示

定義 1.5.1
モノイド M について、M が有限生成であるとは、M の有限部分集合 G であって、G を含むようなモノイドであって M に含まれるものがすべて M に一致するようなものが存在することをいう。

定義 1.5.2
モノイド M について、M の表示とは、以下のコイコライザ図式

$$L_1 \rightrightarrows L_0 \longrightarrow M$$

であって、L_1, L_0 がともに自由モノイドであるようなものを指す。L_1, L_0 がともに有限生成なるものが取れるならば M は有限表示であるという。

1.6　加群

定義 1.6.1
モノイド M について、M-加群とは、集合 X と (非可換を許す) モノイド準同型 $f\colon M \to \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(X)$ の組のことをいう。

モノイド M について集合 X 上に M-加群構造を与えることは、演算 $M \times X \to X$ であって以下の条件

- $m, n \in M$, $x \in X$ について $m + (n + x) = (m + n) + x$
- $x \in X$ について $0 + x = x$

が成り立つようなものを与えることと等価である。

定義 1.6.2
モノイド M と M-加群 X, Y について集合の射 $f\colon X \to Y$ が M-加群の射であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $m \in M$, $x \in X$ について $f(m + x) = m + f(x)$

定義 1.6.3
モノイド M について、M-加群を対象とし、M-加群の射を射とする (大きい) 圏について、これを $\mathrm{Mod}(M)$ と表記し、M-加群の圏という。

1.7　自由加群

定義 1.7.1
モノイド M と M-加群 X と X の部分集合 Y について、Y が X の基底であるとは、以下の条件を充たすことをいう。

- 写像 $f\colon M \times Y \to X$ であって、$f(m, y) = m + y$ を充たすものは全単射

例 1.7.2
モノイド M について、M は自身の演算により M-加群となるが、このとき $\{0\} \subset M$ は M の基底となる。

注意 1.7.3
モノイド M について、一般の M-加群には基底は存在しない。

定義 1.7.4
モノイド M と M-加群 X について、X が自由加群であるとは、X が基底を持つことをいう。

例 1.7.5
モノイド M と集合 X について、集合 $M \times X$ 上に以下の方法で演算を入れることができる。

- $m \in M$, $(m', x) \in M \times X$ について、$m + (m', x) = (m + m', x)$

このとき、$M \times X$ は M-加群となる。

補題 1.7.6
モノイド M と M-加群 X について、X が自由加群となることは、ある集合 Y について X が M-加群として $M \times X$ と同型になることと同値である。

Proof. 定義より明らか。 □

定義 1.7.7
モノイド M について、M-加群の圏から集合の圏への忘却函手とは、M-加群 X について集合 M を充てる函手 $\mathrm{Mod}(M) \to \mathsf{Set}$ のことである。

補題 1.7.8
モノイド M と集合 X と M-加群 Y について、次の対応 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(M)}(M \times X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$ は全単射である。

- $g\colon M \times X \to Y$ について、$f(g)(x) = g((0, x))$

Proof. 集合の射 $h\colon X \to Y$ について、$h'\colon M \times X \to Y$ を $h'(m, x) = m + h(y)$ と定めると、これは M-加群の射となる。h に対して h' を充てる対応は f の逆対応となるため、主張が成り立つ。 □

命題 1.7.9
モノイド M について忘却函手 $\mathrm{Mod}(M) \to \mathsf{Set}$ は左随伴を持つ。

Proof. 1.7.8 より、任意の集合 X に対し M-加群の圏から集合の圏への函手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, -)$ は表現可能函手である。 □

1.8 加群の極限

定義 1.8.1
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とは、積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上に成分ごとの演算を入れた M-加群のことをいう。

補題 1.8.2
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は $\mathrm{Mod}(M)$ における $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の積と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.8.3
モノイド M と M-加群の射 $f, g\colon X \to Y$ について、f と g とのイコライザとは、$f(x) = g(x)$ が成り立つ $x \in X$ 全体のなす X の部分加群から X への包含射 $\mathrm{Eq}(f, g)$ のことをいう。

補題 1.8.4
モノイド M と M-加群の射 $f, g\colon X \to Y$ について、$\mathrm{Eq}(f, g)$ は $\mathrm{Mod}(M)$ における f と g とのイコライザと一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.8.5
モノイド M について $\mathrm{Mod}(M)$ は完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 □

1.9 加群の余極限

定義 1.9.1
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とは、和集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上に演算を入れたモノイドのことをいう。

補題 1.9.2
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は $\mathrm{Mod}(M)$ における $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

次に加群のコイコライザについて論じる。

定義 1.9.3
モノイド M と M-加群 X について X 上の合同関係とは、X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ であって以下の条件を充たすもののことをいう。

- R は同値関係
- R は $X \times X$ の部分加群

補題 1.9.4
モノイド M と M-加群の射 $f\colon X \to Y$ について、$R = \{(x, x') \in X \times X | f(x) = f(x')\} \subset X \times X$ は X 上の合同関係となる。

Proof. 同値関係性は明らかである。また、$(x, x') \in R$ ならば $f(m+x) = m+f(x) = m+f(x') = f(m+x')$ が成り立つ。したがって R は合同関係である。 $\square$

補題 1.9.5
モノイド M と M-加群 X と X 上の合同関係 R について、X の R による商集合 X/R には X から誘導される演算を入れることができ、この演算によって X/R は自然に M-加群となる。また、射影 $\pi\colon X \to X/R$ は M-加群の射となり、$R_\pi = \{(x, x') \in X \times X | \pi(x) = \pi(x')\} \subset X \times X$ は R と一致する。

Proof. $x, x' \in M$ について $xR'x$ が成り立つとする。これはすなわち、$(x, x') \in R$ が成り立つが、R はモノイドであったため、$m \in M$ について $(m + x, m + x') \in R$ が成り立つ。したがって X/R には演算が well-defined に定まる。これがモノイドをなすことは明らか。π の準同型性についても明らか。

R と R_π は X 上の同値関係であって、同じ商集合を導くため、$R = R_\pi$ が成り立つ。 $\square$

補題 1.9.6
モノイド M と M-加群 X と X 上の合同関係の族 $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ は X 上の合同関係である。

Proof. 同値関係性・加群性はともに共通部分を取る操作により保たれる。 $\square$

定義 1.9.7
モノイド M と M-加群 X と $X \times X$ の部分集合 G について、G で生成される X 上の合同関係とは、G を含む X 上の合同関係であって最小のもののことを指す。

命題 1.9.8
モノイド M と M-加群の射 $f, g\colon X \to Y$ について、モノイドの圏における f と g のコイコライザは存在する。

Proof. Y 上の合同関係であって、$\{(f(x), g(x)) \in Y \times Y | x \in X\} \subset Y \times Y$ によって生成されるものを R とおくと、射影 $Y \to Y/R$ は求めるコイコライザ射となる。 $\square$

定義 1.9.9
モノイド M について $\mathrm{Mod}(M)$ は余完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 $\square$

1.10 加群の表示

定義 1.10.1
モノイド M と M-加群 X について、X が有限生成であるとは、X の有限部分集合 G であって、G を含むような M-加群であって X に含まれるものがすべて X に一致するようなものが存在することをいう。

定義 1.10.2
モノイド M と M-加群 X について、X の表示とは、以下のコイコライザ図式

$$F_1 \rightrightarrows F_0 \longrightarrow X$$

であって、F_1, F_0 がともに自由 M-加群であるようなものを指す。F_1, F_0 がともに有限生成なるものが取れるならば M は有限表示であるという。

1.11　加群としての代数

定義 1.11.1
モノイド M について、M-代数とは、モノイド N とモノイドの射 $M \to N$ の組のことである。

定義 1.11.2
モノイド M と M-代数 N, N' について、モノイドの射 $N \to N'$ が M-代数の射であるとは、構造射と可換であることをいう ($M \to N \to N' = M \to N'$)。

注意 1.11.3
モノイド M と M-代数 N について、自然な演算により N を M-加群とみなすことができる。モノイド上の代数を加群としてみなす場合、特別な言及がないならば常にこの方法によるものとする。

1.12　加群のテンソル積

1.13　モノイドのテンソル積

1.14　イデアル

定義 1.14.1
モノイド M について、M の部分集合 I が M のイデアルであるとは、$M + I \subset I$ が成り立つことをいう。すなわち、任意の $x \in I$ と $m \in M$ について、$m + x \in I$ が成り立つことをいう。

注意 1.14.2
任意のモノイド M とそのイデアル I について、I は自然な演算により M-加群の構造を持つ。

定義 1.14.3
モノイド M と M のイデアル I が有限生成であるとは、I が M-加群として有限生成であることをいう。

定義 1.14.4
モノイド M と M のイデアル I が有限表示であるとは、I が M-加群として有限表示であることをいう。

1.15　整除関係

定義 1.15.1
モノイド M の元 m, n について、m が n の約数であるとは、$m + s = n$ なる $s \in M$ が存在することをいう。このことを指して $m \leq n$ または $m|n$ と表記する。$m \leq n$ かつ $n \leq m$ なる $m, n \in M$ について、m, n は同伴であるといい、このことを指して $m \sim n$ と表記する。

1.16

第 2 章

諸例

2.1 モノイド

例 2.1.1
正整数 $\mathbb{N}^+$ 上に乗法による演算を定めたモノイドを $\mathbb{N}^+_{\mathrm{mult}}$ と表記する。また自然数 $\mathbb{N}$ 上に乗法による演算を定めたモノイドを $\mathbb{N}_{\mathrm{mult}}$ と表記する。

例 2.1.2
自然数 m と正整数 d について、モノイド $\mathrm{Num}(m,d)$ とは集合 $\{0,\dots,m+d-1\}$ 上に以下で演算を定めたものである。

- $i,j \in \{0,\dots,m+d-1\}$ について、$i +_{\mathbb{N}} j$ が $m+d-1$ 以下ならば $i+j = i +_{\mathbb{N}} j$
- $i,j \in \{0,\dots,m+d-1\}$ について、$i +_{\mathbb{N}} j$ が $m+d$ 以上ならば $i+j = i +_{\mathbb{N}} j - d$

2.2 非可換モノイド

例 2.2.1
集合 S に対して、S から S への集合の射全体のなす集合上に合成による演算を入れたモノイドを $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(S)$ と表記する。

例 2.2.2
圏 $\mathcal{C}$ とその対象 S に対して、S から S へ射全体のなす集合上に合成による演算を入れたモノイドを $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(S)$ と表記する。

例 2.2.3
集合 $I,\ J$ について、非可換モノイド $\mathrm{RegularBand}(I,J)$ とは、積集合 $I \times J$ 上に以下で演算を定めたものである。

- $(i,j),(k,l) \in I \times J$ について $(i,j)+(k,l) = (i,l)$

このモノイドはすべての元が冪等である。

2.3 加群

例 2.3.1 (有限生成部分加群が自由である非自由加群)
$\mathbb{Z}$ に $\mathbb{N}$-加群構造を与えたものについて、$\mathbb{Z}$ の有限生成部分加群はいずれも $\mathbb{N}$ と同型であるが、$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$-加群としては自由加群にならない。

例 2.3.2 (有限生成であるが有限表示でない加群)
$\mathbb{N}^{+}_{\mathrm{mult}}$ 上の加群 $\{pt\}$ は有限集合であるため、有限生成である。しかしこれは有限表示ではない。