$\mathcal{L}_\in = \{\in\}$. $\mathcal{L}_\in$-論理式.

$\forall$ $\exists$.

~~$\forall x (x \in y \wedge \varphi(\sim))$~~.

$\forall x\ x \in y \to \varphi(-)$.

Levy 階層.

Δ_0-論理式

$\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$.

Σ_n とは. Π_{n-1}論理式 φ があって

$\exists x\ \varphi$. とかけるもの.

Π_n 〃 Σ_{n-1} 〃 φ.

$\forall x.\ \varphi$. とかけるもの

理論 T において.

Σ_n式 と同値になる論理式.

Σ_n^T-論理式

Π_n式 〃

Π_n^T-論理式.

$\Delta_n^T = \Sigma_n^T$ かつ Π_n^T

メタ定理. $\varphi : \Sigma_n^{ZF}$ 論理式ならば.

$\exists v \in w\ \varphi$; $\forall v \in w\ \varphi$ は いずれも

Σ_n^{ZF} 論理式.

$\varphi \underset{ZF}{\equiv} \exists u_1 \forall u_2 \exists u_3 \cdots \varphi'$ $(\varphi' : \Delta_0)$.

$\exists v \in w\ \varphi$. $\exists v \in w\ \exists u_1 \forall u_2 \cdots \varphi'$

$\exists v\in\omega\, \exists u_0\, \psi \equiv_{ZF} \exists t_0\, \exists v\in\omega\, \exists u_0\in t_0 .\, \psi$

$\exists v\in\omega\, \forall u_0\, \psi \equiv_{ZF} \forall t_0\, \exists v\in\omega\, \forall u_0\in t_0\, \psi .$

$\Updownarrow$

$\left(\forall v\in\omega\, \exists u_0\, \neg\psi \equiv_{ZF} \exists t_0\, \forall v\in\omega\, \exists u_0\in t_0\, \neg\psi .\right)$

Lemma 0.2.

- ⌜$\mathrm{rank}(v_0)=v_1$⌝ は Δ_1^{ZF}-論理式.
- ⌜$V_{v_0} = v_1$⌝ は Π_1^{ZF}-論理式

Proof.

$\varphi(f) :=$

⌜f は関数⌝ $\wedge\ \forall x\in \mathrm{dom}(f)\, \left(x\subseteq \mathrm{dom}(f) \wedge f(x) = \bigcup\{f(y)+1 \mid y\in x\}\right)$

$\mathrm{rank}(v_0)=v_1 \iff \exists f\, (\varphi(f) \wedge \langle v_0, v_1\rangle \in f).$

$\iff \forall f\, (\varphi(f) \wedge v_0\in \mathrm{dom}(f) \rightarrow \langle v_0, v_1\rangle\in f).$

⌜$V_{v_0} = v_1$⌝

$\iff \forall v_2\, (v_2\in v_1 \leftrightarrow \exists v_3\in v_0 .\ \mathrm{rank}(v_2)=v_3)$

$\wedge$ ⌜v_0 は順序数⌝

(well-founded より. $\in$ の全順序付けのみ.)

$\square$

集合モデル $\langle M, \in|_M \rangle$ について、

論理式オブジェクト φ について

$$\boxed{\langle M, \in|_M \rangle \models \varphi}$$

項：変数自体

原子論理式 $x = y$, $x \in y$

$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\exists_x$, $\forall_x$

論理式 自然数 n 個の自由変数

↓

真偽

$$M^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

$\underline{x = y}$ $\underline{x \in y}$

$M^2 \longrightarrow \{0, 1\}$

$x = y \longmapsto 1$

$x \neq y \longmapsto 0$

$x \in y \longmapsto 1$

$x \notin y \longmapsto 0$

$\neg\varphi \longrightarrow \varphi$ に対応する関数 f_φ

$$f_{\neg\varphi} = 1 - f_\varphi$$

$\varphi \wedge \psi \longrightarrow f_{\varphi\wedge\psi} = f_\varphi \cdot f_\psi$

$\varphi \vee \psi \longrightarrow f_{\varphi\vee\psi} = 1 - (1 - f_\varphi)(1 - f_\psi)$

$\exists_x \boxed{\psi} \longmapsto f_{\exists_x \psi}$

$$M^{n-1} \times \boxed{M} \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{f_\psi} \{0, 1\}$$

$\forall_x \psi$ $\neg \exists_x (\neg\psi)$

$\langle M, \in_M \rangle \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$

$a_1, \cdots, a_n \in M$

$f_\varphi(a_1, \cdots, a_n) = 1$

メタ帰納法により、

(メタ)論理式 φ について、

φ が有界な論理式なら(Δ_0)、

$\langle M, \in \rangle \models \ulcorner \varphi(a_1, \cdots, a_n) \urcorner \Longleftrightarrow \varphi^M(a_1, \cdots, a_n)$

ただし Δ_0 に限らない。

$\Updownarrow$

~~[illegible]~~ $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$

$a_1, \cdots, a_n \in M$

M：推移的集合

ZF Δ_1-論理式 ~~について~~、φ について、

~~推移的~~

推移的な ZF-model となるクラス M

について、

$\varphi \Leftrightarrow \varphi^M$

Δ_1-性を示すのに充分な有限個の論理式でよい

Σ_1-論理式 φ、$\exists x \psi$

$\underline{M \subseteq V}$、$\varphi^M \Rightarrow \varphi$

Π_1-論理式 φ、$\forall x \psi$

$M \subset V$、$\varphi \Rightarrow \varphi^M$

クラスモデル M.

$\cancel{\langle M, \in\rangle} \models \varphi$ メタ自然数 n.

φ : Σ_n-論理式オブジェクト.

$\underline{\models^n_M \varphi[x_1, \cdots, x_k]}$ 論理式

$\Updownarrow$

「$\varphi[x_1, \cdots, x_k]$ は Σ_n-論理式」

$\wedge$「$\varphi[x_1, \cdots, x_k]$ が $\exists v_{k+1}, \cdots \exists v_{k+r} \neg\psi(x_1, \cdots, x_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+r})$,

かつ ψ が Σ_{n-1}-論理式 であるとき,

$\exists y_1, \cdots \exists y_r \neg(\models^{n-1}_M \psi[x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_r])$.」

$\underline{\models^0_M \varphi[x_1, \cdots, x_n]} \Leftrightarrow$「$\varphi[x_1, \cdots, x_n]$ が Σ_0-論理式」

$\wedge$「$\exists y \in M.(y$: transitive, かつ $\langle y, \in\rangle \models \varphi[x_1, \cdots, x_k])$」

メタ帰納法により n : メタ自然数

φ : Σ_n-論理式

$\varphi^M \Leftrightarrow \models^n_M \ulcorner\varphi[x_1, \cdots, x_n]\urcorner)$

2階述語論理.

変数として $X, Y, \ldots$

↑ モデルの部分集合

構造 M.

$X, Y \ldots$ については

$\mathcal{P}(M)$

階数 $i+1$ の変数

$\mathcal{P}^i(M)$ を変域として持つ変数.

Π^m_n-論理式

$m+1$ 階の変数

$\forall X_1 \exists X_2 \ldots\ldots X_n$, ~~$m+1$階の変数~~ bounded

Σ^m_n-論理式

集合 X 上の関係 R が

well-founded $\iff$

[$\forall Y \subseteq X$: nonempty な集合,

Y は R-minimal な元を持つ.]

Lemma 0.3.

X 上の二項関係 R について.

以下は同値.

1. R は well-founded.

2. ある $\rho: X \to \mathrm{On}$.

• 順序を保つ $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \rho(x) < \rho(y)$

2. ⇒ 1. 明らか.

1. ⇒ 2. $\rho(y) = \sup\{\rho(x)+1 \mid \langle x, y\rangle \in R\}$

well-foundedness は Δ^1-論理式で表せる

Mostowski崩壊:

$\langle M, E, \ldots \rangle$: E, 二項関係.

- E: well-founded.
- $\langle M, E \rangle$: 外延的 — $a, b \in M$. $(xEa \Leftrightarrow xEb) \Rightarrow a = b$.
- E: set-like 集合的 — $\{x \mid xEa\}$ = set

このとき、一意な同型

$$\pi : \langle M, E \rangle \longrightarrow \langle \overline{M}, \in, \ldots \rangle$$

$$\pi(x) = \{\pi(y) \mid yEx\}$$

Skolem包を用いた議論:

言語 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$上の構造 $\langle M \ldots \rangle$

$\mathcal{L}$の論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$

φに付随するSkolem関数.

$f : M^n \longrightarrow M$ s.t.

$\cancel{\langle M, \ldots \rangle \models \varphi[f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n]}$

$$\langle M, \ldots \rangle \models \exists x_0 \varphi[x_0, \ldots, x_n]$$

$$\Downarrow$$

$$\langle M, \ldots \rangle \models \varphi[f(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n]$$

* $\mathcal{L}$-論理式全体についてSkolem関数を集めたもの: Skolem関数の完全な集合

濃度 $|\mathcal{L}| + \omega$ 以下.

構造 $\langle M, \ldots \rangle$. $X \subseteq M$: 部分集合.

$H(X)$: Skolem包.

Skolem関数に閉じているもの

で最小.

Tarski-Vaught-test.

$N \subseteq M$ について, 任意の論理式

$\varphi[u_1, \ldots, u_n]$ $(u_n \in N)$

$M \models \exists_x \varphi[u_1, \ldots, u_n] \Rightarrow$

$N \models \exists_x \varphi[u_1, \ldots, u_n]$ が成り立つ

とき. $N \prec M$.

論理式 φ について. $(u_n \in N)$.

$N \models \varphi[u_1, \ldots, u_n] \Leftrightarrow M \models \varphi[u_1, \ldots, u_n]$

$\exists_x$ についてOK.

$\exists_x f(a_1, \ldots, a_n) = x$

下方 Löwenheim-Skolem 定理

M が構造 (L-構造).

$X \subseteq M$ が与えられた. このとき.

$\exists$ $X \subseteq M_0 \prec M$. かつ

M_0 の濃度 $|X| + |L| + \omega$ となる.

Ultraproduct.

$X \subseteq S$ に対し.

$X \in U$, $S - X \notin U$.

U: 集合 S 上のultrafilter.

S で添字付けられた構造の族 $\{M_i\}_{i \in S}$

について $\boxed{\prod_S M_i}$ なる構造.

$\prod M_i$ に以下の同値関係を入れ、割ったもの。

• $\langle f_i \rangle \equiv \langle g_i \rangle \iff \{ s \in S \mid f_s = g_s \} \in U$

$\prod M_i$ の上に定義。

$\prod M_i / \equiv$ の上の関数は well-def.

関係記号 R.

$R(\langle f_{1,\cdot} \rangle, \langle f_{2,\cdot} \rangle, \cdots)$

$\iff \{ R_s(f_{1,s}, f_{2,s}, \cdots)$ なる $s \in S \} \in U$

構造 $\prod_S M_i / U$

Theorem 0.6. (Łoś).

$\varphi(v_1, \cdots, v_n)$, $f_1, \cdots, f_n \in \prod_S M_i$

$\prod_S M_i / U \models \varphi[(f_1)_U, \cdots, (f_n)_U]$

$\iff \{ i \in S \mid M_i \models \varphi[f_{1,i}, \cdots, f_{n,i}] \} \in U$

ultrapower.

※ $T \models M$.

$M_i = M$. $\{M_i\}$ に対して

ultraproduct

$\supseteq$ ultrapower

$M \longrightarrow \prod M_i / U$

$m \in M. \longmapsto \langle m \rangle_U$

Direct limit

有向集合. $\langle S, \leq \rangle$.

$\forall i, j \in S. \exists k \in S.$

$i \leq k.\ j \leq k.$

有向集 とり.

$\langle S. \leq \rangle$ ~~[illegible]~~ と.

$s \in S$ に対して M_s

$s \leq s'$ に対して. $\boxed{f_{s \to s'}} : M_s \to M_{s'}$

$\boxed{f_{s \to s} = id.}$

$\boxed{f_{s' \to s''} \circ f_{s \to s'} = f_{s \to s''}.}$

$M_s < M_{s'}$: elementary submodel.

direct limit.

$x_i \in M_{s_i}$

$x_j \in M_{s_j}$

$\operatorname{colim}_{s \in S} |M_s| = \coprod |M_s| / \equiv$

$\operatorname{colim} |M_s| \ni x_1, \cdots, x_n$ であるとき.

$x_1, \cdots, x_n \in M_k$ である

$k \in S$ について.

$f_k(x_1, \cdots, x_n)$ を元つる.もの.

$R_k(x_1, \cdots, x_n)$ を元つる.

$\operatorname{colim}_{s \in S} M_s = M.$

$M_s \to M$ によって.

$M_s < M.$

$\exists x\, \varphi[s_1, \cdots, s_n]$ が $M.$ s

$\varphi[y, s_1, \cdots, s_n]$ $\quad y \in M_{s'}^{s'}$

s'

$M_s < M_{s'} \leadsto \exists x\, \varphi[s_1, \cdots, s_n]$ が M_s

Measure. Category.

実数 ${}^{\omega}\omega$.

$O(s) = \{ f \in {}^{\omega}\omega \mid s \subseteq f \}$.

$s \in {}^{<\omega}\omega$

Baire空間. ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ と同相).

yamyamtopo.

${}^{<\omega}\omega$ を並べて $\langle s_i : i \in \omega \rangle$.

$|s_i| \leq i$

s_i の長さ.

$O(s) \cap O(t)$ は

ϕ または $O(s)$ または $O(t)$.

$O(s) - O(t)$ は

basic open set の disj. union.

$O(t)$: clopen.

任意の開集合は disj. of basic open set.

開集合 $O = \bigcup_{j \in \omega} O(s_{i_j})$

$\underbrace{O(s_{i_j}) - \bigcup_{k<j} O(s_{i_k})}$

basic open set の disjoint union

$k(\omega_\omega)$ に対して.

$O(s_{i_1}) \times \cdots \times O(s_{i_k})$ を basic open

$\omega_\omega \longrightarrow k(\omega_\omega)$.

集合 S について. S 上の σ-algebra. F

$P(S)$ の部分集合,

s.t. 補集合.

可算和 に閉じている.

$\phi \in F$

Borel set: ${}^\omega\omega$ の σ-algebra であって.

$O(s_i)$ を含む最小のもの

に含まれるもの.

$F_\sigma \Leftrightarrow$ 閉集合の可算和.

$G_\delta \Leftrightarrow$ 閉集合の可算交叉.

$\hookrightarrow$ Borel 集合.