れっつ log 幾何

Q-rad.heart

2021 年 1 月 11 日

特別な言及なしに単にモノイドと言った場合は、モノイドは可換であるとする。これは群についても同様である。またここでは自然数といったときには基本的に 0 を含むものとする。また、演算記法の統一のため、非可換モノイドについても演算を $+$ を用いて表記する (非可換モノイドを基本的に取り扱わないため、このような記法を行う)。この文章は辞書的に使用できるようには配慮はなされていない。

目次

第 1 章

モノイド

モノイドについての一般的な事項について述べる。

1.1　モノイド

定義 1.1.1
モノイドとは、集合 M と M 上の二項演算 $+$ と M の元 0 との組 $\langle M, +, 0\rangle$ であって、以下の条件を充たすものである。

- $a, b, c \in M$ について $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $a \in M$ について $a+0 = 0+a = a$
- $a, b \in M$ について $a+b = b+a$

モノイド $\langle M, +, 0\rangle$ について、省略して M と表記することがある。

定義 1.1.2
モノイド M, N について、集合の射 $f\colon M \to N$ がモノイドの射であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $a, b \in M$ について $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(0) = 0$

例 1.1.3
集合 $\{0, 1\}$ 上に以下で定まる演算を定めたモノイドを $\mathbb{B}_+$ とよぶ。ここで単位元は $0 \in \{0, 1\}$ である。

- $0+0 = 0$
- $0+1 = 1$
- $1+0 = 1$
- $1+1 = 1$

例 1.1.4
自然数全体に加法により演算を入れたものはモノイドとなる。これを $\mathbb{N}$ とよぶ。このとき、以下で定まる集合の射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{B}_+$ はモノイドの射となる。

- $n = 0$ ならば $f(n) = 0$
- $n \neq 0$ ならば $f(n) = 1$

定義 1.1.5
モノイドを対象とし、モノイドの射を射とする *(*大きな*)* 圏を Mon と表記し、これをモノイドの圏という。

1.2 自然数

定義 1.2.1
モノイドの圏から集合の圏への忘却函手とは、モノイド $\langle M, +, 0\rangle$ について集合 M を充てる函手 Mon $\to$ Set のことである。

補題 1.2.2
モノイド M において、次の対応 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}(\mathbb{N}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\{pt\}, M)$ は全単射である。

- $g\colon \mathbb{N} \to M$ について、$f(g)(pt) = g(1)$

Proof. 任意の写像 $h\colon \{pt\} \to M$ について、次のようにモノイドの射 $h'\colon \mathbb{N} \to M$ を定めることができる。

- $n \in \mathbb{N}$ について、$h'(n) = n * h(pt)$

このとき、$f(h') = h$ が成り立つため、f は全射である。

モノイドの射 $g, g'\colon \mathbb{N} \to M$ について、$g(1) = g'(1)$ であるならば、$g(n) = n * g(1) = n * g'(1) = g'(n)$ より、$g = g'$ が成り立つ。よって f は単射である。 □

定義 1.2.3
集合 S について、$\bigoplus_{s\in S}\mathbb{N}$ とは、集合の関数 $f\colon S \to \mathbb{N}$ であって、有限個の $s \in S$ を除いて $f(s) = 0$ が成り立つようなもの全体のなすモノイドのことを指す。

定義 1.2.4
集合 S について $\bigoplus_{s\in S}\mathbb{N}$ の標準基底とは、集合の射 $S \to \bigoplus_{s\in S}\mathbb{N}$ であって、次で定まるもののことをいう。

- $s \in S$ に対してのみ 1 を充て、それ以外の S の元に対して 0 を充てる関数 $S \to \mathbb{N}$ を χ_s とよび、このとき $f(s) = \chi_s$ が成り立つ。

補題 1.2.5
集合 S とモノイド M において、次の対応 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}(\bigoplus_{s\in S}\mathbb{N}, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, M)$ は全単射である。

- S についての標準基底を i_S とおいたとき、 $g\colon \bigoplus_{s\in S}\mathbb{N} \to M$ について、$f(g) = g \circ i_S$

Proof. 任意の写像 $h\colon S \to M$ について、次のようにモノイドの射 $h'\colon \bigoplus_{s\in S}\mathbb{N} \to M$ を定めることができる。

- $f \in \bigoplus_{s\in S}\mathbb{N}$ について、$h'(f) = \sum_{s\in S} f(s)h(s)$

このとき、$f(h') = h$ が成り立つため、f は全射である。

モノイドの射 $g, g' \colon \bigoplus_{s \in S} \mathbb{N} \to M$ について、$g \circ i_S = g' \circ i_S$ であるならば、写像 $h \colon S \to M$ について $g(h) = \sum_{s \in S} g(\chi_s) h(s) = \sum_{s \in S} g'(\chi_s) h(s) = g'(h)$ より、$g = g'$ が成り立つ。よって f は単射である。 □

命題 1.2.6
忘却函手 $\mathsf{Mon} \to \mathsf{Set}$ は左随伴を持つ。

Proof. 1.2.5 より、任意の集合 S に対してモノイドの圏から集合の圏への函手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(S, -)$ は表現可能函手である。 □

1.3　モノイドの極限

定義 1.3.1
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とは、積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 上に成分ごとの演算を入れたモノイドのことをいう。

補題 1.3.2
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ は Mon における $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の積と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.3.3
モノイド M, N とモノイド準同型 $f, g \colon M \to N$ について、f と g とのイコライザとは、$f(m) = g(m)$ が成り立つ $m \in M$ 全体のなす M の部分モノイドから M への包含射 $\mathrm{Eq}(f, g)$ のことをいう。

補題 1.3.4
モノイドの射 $f, g \colon M \to N$ について、$\mathrm{Eq}(f, g)$ は Mon における f と g とのイコライザと一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.3.5
Mon は完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 □

1.4　モノイドの余極限

定義 1.4.1
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とは、積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の部分集合であって、有限個の成分を除いて 0 であるようなもののなす集合上に成分ごとの演算を入れたモノイドのことをいう。

補題 1.4.2
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は Mon における $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

次にモノイドのコイコライザについて論じる。

定義 1.4.3
モノイド M について M 上の合同関係とは、M 上の二項関係 $R \subset M \times M$ であって以下の条件を充たすもののことをいう。

- R は同値関係
- R は $M \times M$ の部分モノイド

補題 1.4.4
モノイドの射 $f\colon M \to N$ について、$R = \{(m, m') \in M \times M | f(m) = f(m')\} \subset M \times M$ は M 上の合同関係となる。

Proof. 同値関係性は明らかである。また、$(m, m'), (n, n') \in R$ ならば $f(m+n) = f(m) + f(n) = f(m') + f(n') = f(m'+n')$ が成り立つ。$(0, 0) \in R$ より R はモノイドとなる。したがって R は合同関係である。 □

補題 1.4.5
モノイド M 上の合同関係 R について、M の R による商集合 M/R には M から誘導される演算を入れることができ、この演算によって M/R は自然にモノイドとなる。また、射影 $\pi\colon M \to M/R$ はモノイド準同型となり、$R_\pi = \{(m, m') \in M \times M | \pi(m) = \pi(m')\} \subset M \times M$ は R と一致する。

Proof. $m, m', n, n' \in M$ について mRm' かつ $nR'n$ が成り立つとする。これはすなわち、$(m, m') \in R$ かつ $(n, n') \in R$ が成り立つが、R はモノイドであったため、$(m + m', n + n') \in R$ が成り立つ。したがって M/R には演算が well-defined に定まる。これがモノイドをなすことは明らか。π の準同型性についても明らか。
　R と R_π は M 上の同値関係であって、同じ商集合を導くため、$R = R_\pi$ が成り立つ。 □

補題 1.4.6
モノイド M 上の合同関係の族 $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ は M 上の合同関係である。

Proof. 同値関係性・モノイド性はともに共通部分を取る操作により保たれる。 □

定義 1.4.7
モノイド M について $M \times M$ の部分集合 G について、G で生成される M 上の合同関係とは、G を含む M 上の合同関係であって最小のもののことを指す。

命題 1.4.8
モノイドの射 $f, g\colon M \to N$ について、モノイドの圏における f と g のコイコライザは存在する。

Proof. N 上の合同関係であって、$\{(f(m), g(m)) \in N \times N | m \in M\} \subset N \times N$ によって生成されるものを R とおくと、射影 $N \to N/R$ は求めるコイコライザ射となる。 □

定義 1.4.9
Mon は余完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 □

1.5 モノイドの表示

定義 1.5.1
モノイド M について、M が有限生成であるとは、M の有限部分集合 G であって、G を含むようなモノイドであって M に含まれるものがすべて M に一致するようなものが存在することをいう。

定義 1.5.2
モノイド M について、M の表示とは、以下のコイコライザ図式

$$L_1 \rightrightarrows L_0 \longrightarrow M$$

であって、$L_1,\, L_0$ がともに自由モノイドであるようなものを指す。$L_1,\, L_0$ がともに有限生成なるものが取れるならば M は有限表示であるという。

1.6 加群

定義 1.6.1
モノイド M について、M-加群とは、集合 X と *(*非可換を許す*)* モノイド準同型 $f\colon M \to \mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(X)$ の組のことをいう。

モノイド M について集合 X 上に M-加群構造を与えることは、演算 $M \times X \to X$ であって以下の条件

- $m, n \in M,\, x \in X$ について $m + (n + x) = (m + n) + x$
- $x \in X$ について $0 + x = x$

が成り立つようなものを与えることと等価である。

定義 1.6.2
モノイド M と M-加群 X, Y について集合の射 $f\colon X \to Y$ が M-加群の射であるとは、以下の条件が成り立つことをいう。

- $m \in M,\, x \in X$ について $f(m + x) = m + f(x)$

定義 1.6.3
モノイド M について、M-加群を対象とし、M-加群の射を射とする *(*大きい*)* 圏について、これを $\mathrm{Mod}(M)$ と表記し、M-加群の圏という。

1.7 自由加群

定義 1.7.1
モノイド M と M-加群 X と X の部分集合 Y について、Y が X の基底であるとは、以下の条件を充たすことをいう。

- 写像 $f\colon M \times Y \to X$ であって、$f(m, y) = m + y$ を充たすものは全単射

例 1.7.2
モノイド M について、M は自身の演算により M-加群となるが、このとき $\{0\} \subset M$ は M の基底となる。

注意 1.7.3
モノイド M について、一般の M-加群には基底は存在しない。

定義 1.7.4
モノイド M と M-加群 X について、X が自由加群であるとは、X が基底を持つことをいう。

例 1.7.5
モノイド M と集合 X について、集合 $M \times X$ 上に以下の方法で演算を入れることができる。

- $m \in M$, $(m', x) \in M \times X$ について、$m + (m', x) = (m + m', x)$

このとき、$M \times X$ は M-加群となる。

補題 1.7.6
モノイド M と M-加群 X について、X が自由加群となることは、ある集合 Y について X が M-加群として $M \times X$ と同型になることと同値である。

Proof. 定義より明らか。 □

定義 1.7.7
モノイド M について、M-加群の圏から集合の圏への忘却函手とは、M-加群 X について集合 M を充てる函手 $\mathrm{Mod}(M) \to \mathsf{Set}$ のことである。

補題 1.7.8
モノイド M と集合 X と M-加群 Y について、次の対応 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(M)}(M \times X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$ は全単射である。

- $g\colon M \times X \to Y$ について、$f(g)(x) = g((0, x))$

Proof. 集合の射 $h\colon X \to Y$ について、$h'\colon M \times X \to Y$ を $h'(m, x) = m + h(y)$ と定めると、これは M-加群の射となる。h に対して h' を充てる対応は f の逆対応となるため、主張が成り立つ。 □

命題 1.7.9
モノイド M について忘却函手 $\mathrm{Mod}(M) \to \mathsf{Set}$ は左随伴を持つ。

Proof. 1.7.8 より、任意の集合 X に対し M-加群の圏から集合の圏への函手 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X, -)$ は表現可能函手である。 □

1.8 加群の極限

定義 1.8.1
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とは、積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上に成分ごとの演算を入れた M-加群のことをいう。

補題 1.8.2
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は $\mathrm{Mod}(M)$ における $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の積と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.8.3
モノイド M と M-加群の射 $f, g\colon X \to Y$ について、f と g とのイコライザとは、$f(x) = g(x)$ が成り立つ $x \in X$ 全体のなす X の部分加群から X への包含射 $\mathrm{Eq}(f, g)$ のことをいう。

補題 1.8.4
モノイド M と M-加群の射 $f, g\colon X \to Y$ について、$\mathrm{Eq}(f, g)$ は $\mathrm{Mod}(M)$ における f と g とのイコライザと一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

定義 1.8.5
モノイド M について $\mathrm{Mod}(M)$ は完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 □

1.9 加群の余極限

定義 1.9.1
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とは、和集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上に演算を入れたモノイドのことをいう。

補題 1.9.2
モノイド M と M-加群の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は $\mathrm{Mod}(M)$ における $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和と一致する。

Proof. 構成より明らか。 □

次に加群のコイコライザについて論じる。

定義 1.9.3
モノイド M と M-加群 X について X 上の合同関係とは、X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ であって以下の条件を充たすもののことをいう。

- R は同値関係
- R は $X \times X$ の部分加群

補題 1.9.4
モノイド M と M-加群の射 $f\colon X \to Y$ について、$R = \{(x, x') \in X \times X | f(x) = f(x')\} \subset X \times X$ は X 上の合同関係となる。

Proof. 同値関係性は明らかである。また、$(x, x') \in R$ ならば $f(m+x) = m+f(x) = m+f(x') = f(m+x')$ が成り立つ。したがって R は合同関係である。 □

補題 1.9.5
モノイド M と M-加群 X と X 上の合同関係 R について、X の R による商集合 X/R には X から誘導される演算を入れることができ、この演算によって X/R は自然に M-加群となる。また、射影 $\pi\colon X \to X/R$ は M-加群の射となり、$R_\pi = \{(x, x') \in X \times X | \pi(x) = \pi(x')\} \subset X \times X$ は R と一致する。

Proof. $x, x' \in M$ について $xR'x$ が成り立つとする。これはすなわち、$(x, x') \in R$ が成り立つが、R はモノイドであったため、$m \in M$ について $(m+x, m+x') \in R$ が成り立つ。したがって X/R には演算が well-defined に定まる。これがモノイドをなすことは明らか。π の準同型性についても明らか。

R と R_π は X 上の同値関係であって、同じ商集合を導くため、$R = R_\pi$ が成り立つ。 □

補題 1.9.6
モノイド M と M-加群 X と X 上の合同関係の族 $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ は X 上の合同関係である。

Proof. 同値関係性・加群性はともに共通部分を取る操作により保たれる。 □

定義 1.9.7
モノイド M と M-加群 X と $X \times X$ の部分集合 G について、G で生成される X 上の合同関係とは、G を含む X 上の合同関係であって最小のもののことを指す。

命題 1.9.8
モノイド M と M-加群の射 $f, g\colon X \to Y$ について、モノイドの圏における f と g のコイコライザは存在する。

Proof. Y 上の合同関係であって、$\{(f(x), g(x)) \in Y \times Y | x \in X\} \subset Y \times Y$ によって生成されるものを R とおくと、射影 $Y \to Y/R$ は求めるコイコライザ射となる。 □

定義 1.9.9
モノイド M について $\mathrm{Mod}(M)$ は余完備である。

Proof. 圏論の一般論より従う。 □

定義 1.9.10
モノイド M と M の部分モノイド N について、M/N とは、包含射 $i\colon N \to M$ とゼロ射 $0\colon N \to M$ との余核のことをいう。

1.10 加群の表示

定義 1.10.1
モノイド M と M-加群 X について、X が有限生成であるとは、X の有限部分集合 G であって、G を含むような M-加群であって X に含まれるものがすべて X に一致するようなものが存在することをいう。

定義 1.10.2
モノイド M と M-加群 X について、X の表示とは、以下のコイコライザ図式

$$F_1 \rightrightarrows F_0 \longrightarrow X$$

であって、F_1, F_0 がともに自由 M-加群であるようなものを指す。F_1, F_0 がともに有限生成なるものが取れるならば M は有限表示であるという。

1.11 加群としての代数

定義 1.11.1
モノイド M について、M-代数とは、モノイド N とモノイドの射 $M \to N$ の組のことである。

定義 1.11.2
モノイド M と M-代数 N, N' について、モノイドの射 $N \to N'$ が M-代数の射であるとは、構造射と可換であることをいう ($M \to N \to N' = M \to N'$)。

注意 1.11.3
モノイド M と M-代数 N について、自然な演算により N を M-加群とみなすことができる。モノイド上の代数を加群としてみなす場合、特別な言及がないならば常にこの方法によるものとする。

1.12 合同関係

補題 1.12.1
モノイド M について、R が M 上の合同関係であることは、同値関係であってかつ $(a,b) \in R$, $m \in M$ について $(a+m, b+m) \in R$ が成り立つことと同値である。

Proof. R が M 上の合同関係であるとする。このとき、同値関係であることは明らか。また $(a,b) \in R$, $(m,m) \in R$ であるため、$(a+m, b+m) \in R$ が成り立つ。

逆に、R が M 上の同値関係であって任意の $(a,b) \in R$, $m \in M$ について $(a+m, b+m) \in R$ が成り立つとき、$(a,b) \in R$ かつ $(c,d) \in R$ ならば、$(a+c, b+c) \in R$ かつ $(b+c, b+d) \in R$ より、$(a+c, b+d) \in R$ が成り立つため、R は合同関係である。 □

補題 1.12.2
モノイド M について、集合 $X \subset M \times M$ によって生成される合同関係は、$\{(a+m, b+m) | m \in M, (a,b) \in X\}$ で生成される同値関係と一致する。

Proof. 生成された同値関係を R とおく。R は任意の X を含む合同関係に含まれるため、R が合同関係であることを示せばよい。$(a,b) \in R$ であったとき、ある M の元列 $x_0, \ldots, x_n$ であって、$x_0 = a$ かつ $x_n = b$ かつ $(x_i, x_{i+1}) \in \{(a+m, b+m) | m \in M, (a,b) \in X\}$ なるものが存在する。このとき、$(x_i+m, x_{i+1}+m) \in \{(a+m, b+m) | m \in M, (a,b) \in X\}$ であるため、$(x_0+m, x_n+m) = (a+m, b+m) \in R$ が成り立つ。従って 1.12.1 より主張が示される。 □

1.13 加群のテンソル積

定義 1.13.1
モノイド M と M-加群 X, Y について、テンソル積 $X \otimes_M Y$ とは、以下で構成される M-加群のことをいう。

- $x \in X,\ y \in Y$ について $x \otimes y$ と表される元全体を加群の生成元とする
- $m \in M,\ x \in X,\ y \in Y$ について $(m + x \otimes y, x \otimes m + y)$ と表される元全体で生成される合同関係によって自由加群 $M \times X \times Y$ を割る

定義 1.13.2
モノイド M と M-加群 X, Y, Z について、集合の射 $f\colon X \times Y \to Z$ が双線型写像であるとは、任意の $m \in M$ と $x \in X,\ y \in Y$ について $f(m + x, y) = f(x, m + y) = m + f(x, y)$ が成り立つことをいう。双線型写像 $X \times Y \to Z$ 全体のなす集合を $\mathrm{Bilinear}_M(X, Y; Z)$ と表記する。

命題 1.13.3
モノイド M と M-加群 X, Y, Z について、以下で与えられる集合の射 $f\colon \mathrm{Bilinear}_M(X, Y; Z) \to \mathrm{Hom}_M(X \otimes_M Y, Z)$ は全単射である。

- 双線型写像 $g\colon X \times Y \to Z$ について、$f(g)(x \otimes y) = g(x, y)$

Proof. テンソル積の構成より f は well-defined である。逆に、$h\colon X \otimes Y \to Z$ について $h'\colon X \times Y \to Z$ として $h'((x, y)) = h(x \otimes y)$ なるものを充てる対応は f の逆対応となる。 □

1.14 モノイドのテンソル積

定義 1.14.1
モノイド M と M-代数 A, B について、テンソル積 $A \otimes_M B$ とは、加群のテンソル積 $A \otimes_M B$ に以下のように M-代数構造を入れたものである。

- $a, a' \in A,\ b, b' \in B$ について $(a \otimes b) + (a' \otimes b') = (a + a' \otimes b + b')$ と定める
- 構造射を $m \in M$ に対して $m \otimes 0 = 0 \otimes m$ なる $A \otimes_M B$ の元を充てる射と定める

このとき、$a \in A$ に対して $a \otimes 0$ を充てる射は自然なモノイドの射 $A \to A \otimes_M B$ を構成する。$B \to A \otimes_M B$ についても同様である。

命題 1.14.2
モノイド M と M-代数 A, B について、テンソル積 $A \otimes_M B$ はモノイドの圏における押し出しと一致する。

Proof. 図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[ddr, "f"] & \\
B \arrow[drr, "g"] & & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

が与えられたとき、以下の図式

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, "f"] & \\
B \arrow[r, "j"] \arrow[drr, "g"] & A \otimes_M B & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

を可換にするような射 $h\colon A \otimes_M B \to C$ が一意に存在することを示す。

このような射の一意性については、$A \otimes_M B$ の任意の元がある $a \in A, b \in B$ によって $i(a) + j(b)$ と表せることから従う。

存在について、$a \in A, b \in B$ に対して $h((a, b)) = f(a) + g(b)$ なる射は図式を可換にする。 □

1.15 イデアル

定義 1.15.1
モノイド M について、M の部分集合 I が M のイデアルであるとは、$M + I \subset I$ が成り立つことをいう。すなわち、任意の $x \in I$ と $m \in M$ について、$m + x \in I$ が成り立つことをいう。

注意 1.15.2
任意のモノイド M とそのイデアル I について、I は自然な演算により M-加群の構造を持つ。

定義 1.15.3
モノイド M と M のイデアル I が有限生成であるとは、I が M-加群として有限生成であることをいう。

定義 1.15.4
モノイド M と M のイデアル I が有限表示であるとは、I が M-加群として有限表示であることをいう。

1.16 整除関係

定義 1.16.1
モノイド M の元 m, n について、m が n の約数であるとは、$m + s = n$ なる $s \in M$ が存在することをいう。このことを指して $m \leq n$ または $m | n$ と表記する。$m \leq n$ かつ $n \leq m$ なる $m, n \in M$ について、m, n は同伴であるといい、このことを指して $m \sim n$ と表記する。

補題 1.16.2
モノイド M について、M 上の同伴関係は合同関係となる。

Proof. 同伴関係が同値関係になること・$M \times M$ の部分モノイドになることは明らかである。 □

1.17 群

定義 1.17.1
モノイド M が群であるとは、任意の元 $m \in M$ が逆元を持つことをいう。

定義 1.17.2
モノイド M に対して、M^2 上の二項関係 R を以下で定める。

- $(a,b),(c,d) \in M^2$ に対して $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \exists x \in M,\ a+d+x = b+c+x$

このとき、R は合同関係となり、商モノイド M^2/R を M^{gp} と表記し、M の群化という。また (a,b) の同値類を $a-b$ と表記する。また $a \in M$ に対して $a-0 \in M^{gp}$ を充てる自然なモノイドの射が存在する。また $a-0 \in M^{gp}$ についてこの元を a とも表記する。

補題 1.17.3
モノイド M の群化 M^{gp} は群である。

Proof. M^{gp} の任意の元は M の元 a,b によって $a-b$ と表せる。このとき、$b-a$ は $a-b$ の逆元となっている。 □

定義 1.17.4
(可換) 群の圏からモノイドの圏への忘却函手とは、群 G に対して群 G を充てる対応のことをいう。

命題 1.17.5
群 G とモノイド M について、以下で与えられる集合の射 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M^{gp}, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(M, G)$ は全単射である。

- $g\colon M^{gp} \to G$ について、$f(g)(m) = g(m-0)$

Proof. モノイドの射 $h\colon M \to G$ に対して、$h'(a-b) = h(a) - h(b)$ と定めると、h に対して h' を充てる対応は f の逆対応となる。 □

命題 1.17.6
群の圏からモノイドの圏への函手は左随伴を持つ。

Proof. 1.17.5 より成り立つ。 □

定義 1.17.7
モノイド M に対して、$m \in M$ であって逆元が存在するようなものを可逆元もしくは単元という。

定義 1.17.8

モノイド M について、M の単元のなす部分集合は M の部分モノイドとなり、さらに群となる。これを M^* と表記する。

命題 1.17.9
群 G とモノイド M について、以下で与えられる集合の射 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, M^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(G, M)$ は全単射である。

- $g\colon G \to M^*$ について、$f(g)(x) = g(x)$

Proof. モノイドの射 $h\colon G \to M$ に対して、h の像は M^* に含まれるため、$h'(x) = h(x)$ なる群の射 $h'\colon G \to M^*$ をつくることができる。このとき h に対して h' を充てる対応は f の逆対応となる。 □

命題 1.17.10
群の圏からモノイドの圏への函手は右随伴を持つ。

Proof. 1.17.9 より成り立つ。 □

補題 1.17.11
モノイド M と M の部分モノイド N について、$N^* \subset M^*$ が成り立つ。

Proof. N の可逆元 n について、明らかに n は M においても可逆である。 □

補題 1.17.12
モノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、自然な射 $\prod(M_\lambda^*) \to (\prod M_\lambda)^*$ は同型である。

Proof. モノイド M に対し群 M^* を充てる函手は右随伴であるため、積と交換する。従って主張が成り立つ。 □

1.18 integral monoid

定義 1.18.1
1. モノイド M が *integral* であるとは、$m \in M$ を $m \in M^{gp}$ に充てるモノイドの射 $i\colon M \to M^{gp}$ が単射となることをいう。
2. モノイド M が *quasi-integral* であるとは、$m \in M^*$ を $m \in M^{gp}$ に充てるモノイドの射 $i\colon M^* \to M^{gp}$ が単射となることをいう。

注意 1.18.2
モノイド M が *integral* であることについて、消去的であるということもある。

補題 1.18.3
モノイド M について、*integral* ならば *quasi-integral* である。

Proof. 定義より明らか。 □

補題 1.18.4
モノイド M について、以下は同値である。

1. M は *integral* である
2. $a,b,c \in M$ について $a+c=b+c$ ならば $a=b$ が成り立つ

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. を示す。M が integral であるとする。さらに $a,b,c \in M$ について $a+c=b+c$ が成り立つとする。このとき、M^{gp} において $a-0=b-0$ が成り立つ。実際、$a-0=a+c-c=b+c-c=b-0$ と計算される。従って $a=b$ である。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。$a,b \in M$ が M^{gp} において一致するならば、M^{gp} の構成より、ある $m \in M$ が存在して M において $a+m=b+m$ が成り立つ。従って M においても $a=b$ が成り立つ。 □

補題 1.18.5
モノイド M について、以下は同値である。

1. M は *quasi-integral* である
2. $a \in M^*$, $b \in M$ について $a+b=b$ ならば $a=0$ が成り立つ

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. を示す。M が quasi-integral であるとする。さらに $a \in M^*$, $b \in M$ について $a+b=b$ が成り立つとする。このとき、M^{gp} において $a=0$ が成り立つ。実際、$a=a+b-b=b-b=0$ と計算される。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。$a,a' \in M$ が M^{gp} において一致するならば、M^{gp} において $a-a'=0$ 成り立つ。このとき、M^{gp} の構成より、ある $m \in M$ が存在して M において $(a-a')+m=m$ が成り立つ。従って M において $a-a'=0$ が成り立ち、$a=a'$ が示される。 □

命題 1.18.6
モノイド M について以下が成り立つ。

1. M が *integral* ならば M の任意の部分モノイドは *integral*
2. M が *quasi-integral* ならば M の任意の部分モノイドは *quasi-integral*

Proof. 1. を示す。M の部分モノイド N について、N の元 a,b,c であって $a+c=b+c$ を充たすものをとれば、M においても $a+c=b+c$ であるため、$a=b$ が成り立つ。

2. を示す。M の部分モノイド N について、N の可逆元 a と $b \in N$ について、$a+b=b$ を充たすものをとれば、M においても $a+b=b$ でありまた a は M の可逆元でもあるため、$a=0$ が成り立つ。 □

命題 1.18.7
以下が成り立つ。

- *integral* なモノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は *integral* である。
- *quasi-integral* なモノイドの族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について、$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は *quasi-integral* である。

Proof. 1. については、1.18.4 より $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の元 $(a_\bullet),(b_\bullet),(c_\bullet)$ について $(a_\bullet)+(c_\bullet)=(b_\bullet)+(c_\bullet)$ が成り立つようなものを取ったとき $(a_\bullet)=(b_\bullet)$ が成り立つことを示せばよい。これは成分ごとに $a_\lambda=b_\lambda$ が成り立つことから示される。

2. について、1.18.5 より $(a_\bullet) \in (\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)^*$, $(b_\bullet) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ について $(a_\bullet)+(b_\bullet)=(b_\bullet)$ が成り立つようなものを取ったとき $(a_\bullet)=0$ が成り立つことを示せばよい。1.17.12 より、任意の $\lambda \in \Lambda$ について、$a_\lambda \in M_\lambda^*$ が成り立つため、M_λ の quadi-integrality より $a_\lambda=0$ が成り立つ。従って主張が示される。 □

命題 1.18.8
integral なモノイドの極限は *integral* である。

Proof. 積・イコライザを取る操作によって integrality が保たれるため。 □

命題 1.18.9
quasi-integral なモノイドの極限は *quasi-integral* である。

Proof. 積・イコライザを取る操作によって quasi-integrality が保たれるため。 □

命題 1.18.10
integral なモノイドの直和は *integral* である。

Proof. モノイドの直和は直積の部分モノイドであるため。 □

命題 1.18.11
quasi-integral なモノイドの直和は *quasi-integral* である。

Proof. モノイドの直和は直積の部分モノイドであるため。 □

注意 1.18.12
一般にコイコライザについては *integrality, quasi-integrality* は保たれない。

例 1.18.13
$\mathbb{N}$ の部分モノイド S であって、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $n < N$ ならば $N \in S$ が成り立つようなものを数値的モノイドとよぶ。このとき、数値的モノイドは *integral* である。

定義 1.18.14
integral なモノイドのなす Mon の充満部分圏を $\mathsf{Mon}^{\mathrm{int}}$ と表記する。

定義 1.18.15
モノイド M に対して、$m \in M$ を $m \in M^{gp}$ に充てる射 $M \to M^{gp}$ の像を M^{int} とよび、M の *integralization* という。

補題 1.18.16
モノイド M について、M の *integralization* は *integral* である。

Proof. 群は integral であるため、M^{gp} は integral である。integral なモノイドの部分モノイドは integral であるため、M^{int} は integral である。 □

補題 1.18.17
integral なモノイド M について、$M \cong M^{\mathrm{int}}$ である。

Proof. 自然な射 $M \to M^{gp}$ は単射であるため、$M \cong M^{\mathrm{int}}$ が成り立つ。 □

補題 1.18.18
モノイド M, N とモノイドの射 $f\colon M \to N$ について、$f^{gp}\colon M^{gp} \to N^{gp}$ において M^{int} の像は N^{int} に含まれる。

Proof. M^{int} の任意の元について、ある M の元 m によって $m-0$ と表せる。このとき、$f^{gp}(m-0) = f(m)-0$ が成り立つため、主張が示される。 □

補題 1.18.19
モノイド M と *integral* なモノイド N に対して、以下で定まる集合の写像 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}^{\mathrm{int}}}(M^{\mathrm{int}}, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}}(M, N)$ は全単射である。

- $g\colon M^{\mathrm{int}} \to N$ について、自然な射 $i_M\colon M \to M^{\mathrm{int}}$ との合成 $g \circ i_M$ を $f(g)$ とする

Proof. $h\colon M \to N$ について、$h^{\mathrm{int}}\colon M^{\mathrm{int}} \to N^{\mathrm{int}}$ と同型 $N^{\mathrm{int}} \cong N$ の合成を h' とおくと、h に h' を充てる対応は f の逆対応となる。 □

命題 1.18.20
包含函手 $\mathsf{Mon}^{\mathrm{int}} \to \mathsf{Mon}$ は左随伴を持つ。

Proof. 1.18.19 より従う。 □

1.19 miscellany

命題 1.19.1
integral なモノイド M とその部分モノイド N について、自然な射 $M/N \to M^{gp}/N^{gp}$ は単射である。

Proof. $m, m' \in M$ が M^{gp}/N^{gp} において一致するとすると、M の元列 $p_0, \ldots, p_n$, $q_0, \ldots, q_n$ であって $p_0 = m$, $p_n = m'$, $q_0 = q_n = 0$ であってかつ $0 \le i \le n$ ごとに N の元 n_i, n'_i が存在して $p_i + q_{i+1} + n_i = p_{i+1} + q_i + n'_i$ が成り立つようにできる。このとき、M が integral であるため、計算によりある $n, n' \in N$ について $p_0 + q_n + n = p_n + q_0 + n'$ が成り立つようにできる。言い換えれば $m + n = m' + n'$ が成り立つため、m, m' は M/N において一致する。 □

命題 1.19.2
integral なモノイド M とその部分モノイド N について、M/N は *integral* である。

Proof. 1.19.1 より主張が成り立つ。 □

命題 1.19.3
モノイド M について、以下は同値である。

1. M は *integral*
2. M は *quasi-integral* であり、かつ M/M^* は *integral*

Proof. 1. ⇒ 2. については、1.18.3, 1.19.2 より従う。
2. ⇒ 1. について示す。$a, b, c \in M$ について $a + c = b + c$ が成り立つならば、M/M^* においても $a+c = b+c$ が成り立つため、M/M^* において $a = b$ が成り立つ。従ってある M^* の元 m により $a+m = b$ が成り立つ。従って $(b + c) + m = b + c$ より $m = 0$ が言える。従って $a = b$ が成り立つ。 □

命題 1.19.4

integral なモノイド M について、$M^{gp}/M^* \to (M/M^*)^{gp}$ は同型である。

Proof. $(M/M^*)^{gp}$ の任意の元はある M の元 m, m' によって $[m]-[m']$ と表せるため、$M^{gp}/M^* \to (M/M^*)^{gp}$ は全射である。単射性については、$M^{gp} \to (M/M^*)^{gp}$ の核が M^* と一致すればよい。M^* は核に含まれるので、核が M^* に含まれることをいう。

$m, m' \in M$ について $m-m'$ が $(M/M^*)^{gp}$ にて 0 と一致したとすると、M/M^* は 1.19.2 より integral であるため、M/M^* において $m=m'$ が成り立つ。従ってある M^* の元 x が存在して、$m-m'=x$ が M において成り立つ。従って核は M^* に含まれる。 □

1.20 sharp monoid

定義 1.20.1
モノイド M が *sharp* であるとは、$M^*=\{0\}$ が成り立つことをいう。

定義 1.20.2
モノイド M についてモノイド $\overline{M}$ とは M/M^* のことを指していう。

補題 1.20.3
モノイド M について、M/M^* は *sharp* なモノイドである。

Proof. M/M^* における可逆元 $[m]$ について、$[m]$ の代表元 $m \in M$ を任意に選ぶと、ある $m' \in M$ が存在して $m+m' \in M^*$ が成り立つ。従って m は可逆元となり、$m \in M^*$ が成り立つ。従って $[m]=[0]$ が示される。 □

1.21 fine monoid

定義 1.21.1
モノイド M が *fine* であるとは、モノイドとして有限生成でありかつ *integral* であることをいう。

1.22 saturated monoid

定義 1.22.1
モノイド M が *saturated* であるとは、*integral* であって、さらに任意の $m \in M^{gp}$ について、ある正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ により $n*m \in M$ とできるなら $m \in M$ が成り立つようなものであることをいう。

補題 1.22.2
integral なモノイド M について以下は同値である。

1. M は *saturated*
2. $\overline{M}$ は *saturated*

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. を示す。1.19.4 より、$\overline{M}^{gp}$ は M^{gp}/M^* と同型である。このとき $\overline{M}$ は自然な射 $M \to$

M^{gp}/M^* の像 S と一致する。M^{gp}/M^* の元は M^{gp} の元 m の剰余類 $[m]$ として表せる。このとき、$n \in \mathbb{N}^+$ により $n * m \in S$ とできるなら、ある M^* の元 x が存在して $n * m + x \in M$ が成り立つが、これは $m \in M$ を導くため、$[m] \in S$ が成り立つ。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。$m \in M^{gp}$ と $n \in \mathbb{N}^+$ が存在して $n * m \in M$ が成り立つとすると、$[m] \in \overline{M}$ が成り立つ。従ってある M^* の元 x により $m + x \in M$ がなりたつが、これは $m \in M$ を導く。 □

補題 1.22.3
saturated なモノイド M について、$\overline{M}^{gp}$ はねじれなし群である。

Proof. M を $\overline{M}$ と取り換えることで、M は intergal かつ sharp かつ saturated であると仮定してよい。このとき M^{gp} がねじれなし群であることを示す。このとき $x = m - m' \in M^{gp}$ がねじれ元であるならば、ある正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ によって $nx = 0 \in M$ が成り立つため、$x \in M$ が成り立つ。このとき、x は可逆元であるため、$x = 0$ が成り立つ。 □

定義 1.22.4
integral なモノイド M について M^{gp} の元 x であってある正整数 $n \in \mathbb{N}^+$ によって $nx \in M$ が成り立つようなもの全体のなすモノイドを M^{sat} とおく。

定義 1.22.5
saturated なモノイドのなす $\mathsf{Mon}^{\mathrm{int}}$ の充満部分圏を $\mathsf{Mon}^{\mathrm{sat}}$ と表記する。

補題 1.22.6
integral なモノイド M と *saturated* なモノイド N に対して、以下で定まる集合の射 $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}^{\mathrm{sat}}}(M^{\mathrm{sat}}, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mon}^{\mathrm{int}}}(M, N)$ は全単射である。

- $g\colon M^{\mathrm{sat}} \to N$ について、$f(g)$ を自然な包含 $i_M\colon M \to M^{\mathrm{sat}}$ との合成 $g \circ i_M$ と定める。

Proof. モノイドの射 $h\colon M \to N$ に対して、その群化 $f^{gp}\colon M^{gp} \to N^{gp}$ を考えたとき、M^{sat} の元 x について、ある正整数 n が存在して $n * x \in M$ が成り立つため、$n * f(x) = f(n * x) \in N$ より $f(x) \in N$ が成り立つ。よって定義域の制限により $h'\colon M^{\mathrm{sat}} \to N$ が得られる。h に対して h' を充てる対応は f の逆対応である。 □

命題 1.22.7
包含函手 $\mathsf{Mon}^{\mathrm{sat}} \to \mathsf{Mon}^{\mathrm{int}}$ は左随伴を持つ。

Proof. 1.22.6 より明らか。 □

補題 1.22.8
integral なモノイド M について、自然な射 $M^{\mathrm{sat}}/M^* \to \overline{M}^{\mathrm{sat}}$ は同型で和える。

Proof. □

1.23 fs monoid

定義 1.23.1
モノイド M が *fs* もしくは *normal* であるとは、*fine* かつ *saturated* であることをいう。

1.24 toric monoid

定義 1.24.1
群 G の元 g がねじれであるとは、ある正整数 $N \in \mathbb{N}^+$ が存在して $n * m = 0$ が成り立つことをいう。群 G がねじれなし群であるとは、G のねじれ元が 0 のみであることをいう。

定義 1.24.2
モノイド M が *toric* であるとは、*fs* であってさらに M^{gp} がねじれなし群であることをいう。

1.25 valuative monoid

定義 1.25.1
モノイド M が *valuative* であるとは、*integral* であって、任意の $m \in M^{gp}$ について m または $-m$ の少なくともいずれか一方が M に含まれることをいう。

定義 1.25.2
モノイド M が *valuative* ならば *saturated* である。

Proof. M は定義より integral である。ある元 $m \in M^{gp}$ について正整数 $n \in \mathbb{N}$ であって $nm \in M$ なるものが存在するとき、もしも $m \notin M$ であるなら $-m \in M$ である。したがって $m = n*m+(n-1)*(-m) \in M$ となり矛盾する。従って $m \in M$ がなりたつ。ここまでの議論により M が saturated であることが示される。 □

命題 1.25.3
integral なモノイド M について以下は同値である。

- M は *valuative*
- 倍数関係による M 上の半順序 $\leq$ は全順序である
- M のイデアルは包含により全順序付けられる

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. を示す。$a, b \in M$ について、$a - b \in M$ または $b - a \in M$ が成り立つ。$a - b \in M$ ならば $a = b + (a - b)$ より $b \leq a$ が成り立つ。同様に $b - a \in M$ ならば $a \leq b$ が成り立つ。$a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば M は integral であるため $a = b$ が成り立つ。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。任意の M^{gp} の元はある M の元 a, b によって $a - b$ と表される。このとき、$a \leq b$ ならば $-(a - b) \in M$ であり、また $b \leq a$ ならば $a - b \in M$ である。よって M は valuative である。

3. $\Rightarrow$ 2. は明らかである。

2. $\Rightarrow$ 3. を示す。イデアル I, J について $I \not\subset J$ であるとすると、ある $x \in I$ であって $x \notin J$ なるものがある。したがって、任意の $y \in J$ に対して x は y の倍数ではない。よって、任意の $y \in J$ は x の倍数となり、$J \subset (x) \subset I$ が成り立つ。 □

1.26 素イデアル

定義 1.26.1
モノイド M のイデアル $\mathfrak{p}$ が素イデアルであるとは、$x, y \in M$ について $x + y \in \mathfrak{p}$ ならば $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ が成り立つことをいう。

1.27 局所化

第 2 章

諸例

2.1　モノイド

例 2.1.1
正整数 $\mathbb{N}^+$ 上に乗法による演算を定めたモノイドを $\mathbb{N}^+_{\mathrm{mult}}$ と表記する。また自然数 $\mathbb{N}$ 上に乗法による演算を定めたモノイドを $\mathbb{N}_{\mathrm{mult}}$ と表記する。

例 2.1.2
自然数 m と正整数 d について、モノイド $\mathrm{Num}(m, d)$ とは集合 $\{0, \ldots, m + d - 1\}$ 上に以下で演算を定めたものである。

- $i, j \in \{0, \ldots, m + d - 1\}$ について、$i +_{\mathbb{N}} j$ が $m + d - 1$ 以下ならば $i + j = i +_{\mathbb{N}} j$
- $i, j \in \{0, \ldots, m + d - 1\}$ について、$i +_{\mathbb{N}} j$ が $m + d$ 以上ならば $i + j = i +_{\mathbb{N}} j - d$

例 2.1.3 (integral なモノイドのコイコライザであって integral でないモノイド)
$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を、$f(1) = 1$, $g(1) = 2$ が成り立つように定める。このとき、f, g のコイコライザは $\mathbb{B}^+$ と同型である。

例 2.1.4 (quasi-regular であって regular でないモノイド)
$\mathbb{B}^+$ は *quasi-regular* であるが *regular* ではない。

2.2　非可換モノイド

例 2.2.1
集合 S に対して、S から S への集合の射全体のなす集合上に合成による演算を入れたモノイドを $\mathrm{End}_{\mathsf{Set}}(S)$ と表記する。

例 2.2.2
圏 $\mathcal{C}$ とその対象 S に対して、S から S へ射全体のなす集合上に合成による演算を入れたモノイドを $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(S)$ と表記する。

例 2.2.3
集合 I, J について、非可換モノイド $\mathrm{RegularBand}(I, J)$ とは、積集合 $I \times J$ 上に以下で演算を定めたもの

である。

- $(i,j),(k,l) \in I \times J$ について $(i,j)+(k,l)=(i,l)$

このモノイドはすべての元が冪等である。

2.3　加群

例 **2.3.1** (有限生成部分加群が自由である非自由加群)
$\mathbb{Z}$ に $\mathbb{N}$-加群構造を与えたものについて、$\mathbb{Z}$ の有限生成部分加群はいずれも $\mathbb{N}$ と同型であるが、$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$-加群としては自由加群にならない。

例 **2.3.2** (有限生成であるが有限表示でない加群)
$\mathbb{N}^{+}_{\mathrm{mult}}$ 上の加群 $\{pt\}$ は有限集合であるため、有限生成である。しかしこれは有限表示ではない。

参考文献

[1] "Lectures on Logarithmic Algebraic Geometry"