第八章

思考题：

8-1 按错码分布规律的不同，错码可分哪几类？

答：可以分为三类：（1）随机性错码；（2）突发性错码；（3） 混合性错码。既有随机错码又有突发错码.

8-2 通信系统中采用信道编码的目的是什么？其基本原理是怎样的？

答：信道编码的目的是提高信号传输的可靠性。信道编码的基本原理其可归结为两条：（1）利用冗余度：在信号码元序列中增加监督码元，并利用监督码元去发现或纠正传输中发生的错误。

（2）噪声均化（随机化）：就是设法把集中出现的突发性差错分摊开来，变成随机性差错。

8-3 常用的差错控制方法有哪些？试比较其优缺点。

答：常用的差错控制方法有以下几种：

（1）检错重发：接收端在收到的信码中检测出错码时，即通知发送端重发，直到正确收到为止。所谓检测出错码，是指在若干接收码元中知道有错码，但不知道错码的位置。采用这种差错控制方法需要具备双向信道。

（2）检错删除：接收端发现错码，就将错码删除。这种办法只适用于有大量冗余码元的场合，删除部分码元不影响接收信息的使用。

（3）前向纠错：接收端不仅能在收到的信码中发现有错码，还能够纠正错码。对于二进制系统，如果能够确定错码的位置，就能够纠正它。这种方法不需要反向信道(传递重发指令)，也不存在由于反复重发而延误时间，实时性好。但是纠错设备要比检错设备复杂。

（4）混合纠检错：把检错和纠错结合使用，当错码较少并有能力纠正时，采用 FEC；当错码较多而没有能力纠正时，采用 ARQ。

（5）反馈校验：接收端将收到的信码原封不动地转发回发送端，并与原发送信码相比较。如果发现错误；则发送端再进行重发。这种方法原理和设备都较简单，但需要有双向信道。因为每个信码至少要发送两次，所以传输效率较低。

8-4 简述最小码距与纠错检错能力之间的关系。

答：（1）若要在一个码组内检测出e个错码，要求最小码距：$d_0 \geq e+1$；

（2）若要纠正t个错码，则要求最小码距为：$d_0 \geq 2t+1$；

（3）若要纠正 t 个错码，同时能检测 e $(e>t)$ 个错码，则要求最小码距为：$d_0 \geq e+t+1$。

8-5 什么是分组码？什么是线性分组码？线性分组码具有哪些性质？

答：分组码是将信息位和监督位分组，为每组信息码附加若干监督码的编码称为分组码。在分组码中，监督码元仅监督本码组中的信息码元。

线性分组码中信息位和监督位的关系可用一组线性方程来表示。

线性分组码具有如下性质：

（1） 封闭性。任意两个码组的模 2 和仍是这种编码中的一个许用码组。

（2）两个码组间的距离必是另一码组的重量，编码的最小距离等于非零码的最小码重。这一条可由第 1 条推出。

（3） 编码中必存在一个全“0”码组。

8-6 设一个线性分组码码长为n，信息位数为k，监督位数r，如果要构造出能纠正一位错码的线性分组码，试讨论 n，k，r 三者应满足的关系。

答：若码长为n，信息位数为k，则监督位数$r=n-k$。如果要构造出能纠正一位错码的线性分组码，那么r个监督关系式就必须指示出一位错码的n种可能位置，则要求：

$2^r-1\geq n$ 或 $2^r\geq k+r+1$

8-7　典型的监督矩阵的各行是否线性无关？非典型的监督矩阵满足什么条件可以化成典型阵形式？

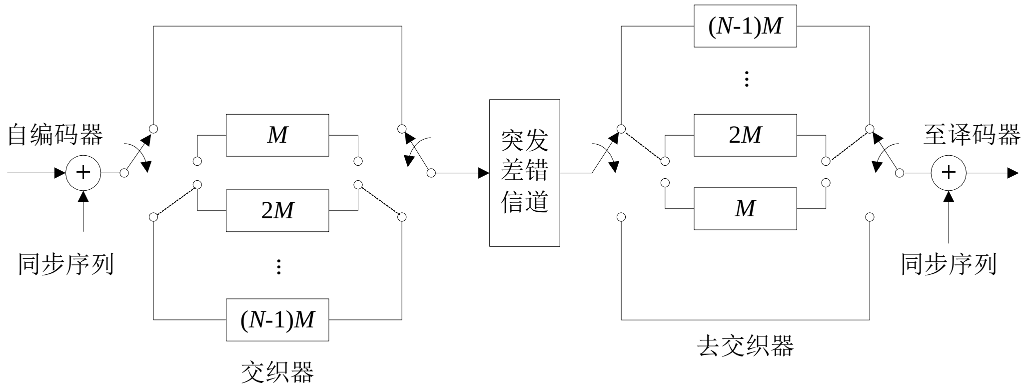
答：由线形代数理论可知，典型的监督矩阵的各行一定是线性无关的，因为$[I_r]$的各行是线性无关的。非典型的监督矩阵如果各行是线性无关的，就一定可化成典型阵形式。

8-8 什么是系统码？

答：由典型生成矩阵得出的码组 A 中，信息位不变，监督位附加于其后，这种码称为系统码。

8-9 简述卷积交织的原理。

答：卷积交织的原理如思考题解图 8-1 所示，该交织器的交织长度$L=M\times N$，称之为(M,N)交织器。它将来自编码器的信息码序列，经同步序列模 2 加后送到一组级数逐级增加的N个并行移存器群，每当移入一个新的码元，旋转开关旋转一步与下一个移存器相连。移入一个新的码元并使最早存在该移存器的码元移出并送入突发信道，通过突发信道输出的码元通过旋转开关同步输入去交织器，去交织器通过相反的操作，再通过旋转开关同步输出，并与同步序列模 2 加，然后送至译码器。



思考题解图 8-1

8-10 什么是循环码？它具有什么特性？

答：循环码是线性分组码中一个重要的子类，它除了具有线性码的一般性质外，还具有循环性，所谓循环性，即是循环码中任一码组循环一位（将最右端的码元移至左端或反之）以后，仍为该码中的一个许用码组。

8-11　循环码的生成多项式$g(x)$如何确定？

答：循环码的生成多项式$g(x)$应满足如下几个特性：

（1）　是一个常数项不为“0”的多项式；

（2）　是一个$(n-k)$次多项式；

（3） 是(x^n+1)的一个因式。

8-12 简述循环码的编码步骤。

答：编码步骤归纳如下：

（1）用x^{n-k}乘$m(x)$，$m(x)$为信息码多项式

（2）用$g(x)$除$x^{n-k}m(x)$，得到商$Q(x)$和余式$r(x)$，

（3）编出的码组$C(x)$为：$C(x)=x^{n-k}m(x)+r(x)$。

8-13 简述循环码的纠错译码过程。

答：循环码的纠错译码可以按下列步骤进行：

（1）用接收到的码多项式$R(x)$除以生成多项式$g(x)$所得的余式就是校正子$S(x)$，即

$$\frac{B(x)}{g(x)}=Q(x)\cdots S(x)$$

（2）由校正子$S(x)$通过查表或通过某种计算得到错误图样$E(x)$；

（3）从$B(x)$中减去错误图样$E(x)$，即可纠正错误。

8-14 简述本原 BCH 和非本原 BCH 码的区别。

答：本原 BCH 码的码长为$n=2^m-1$，（m是≥3 的任意正整数），它的生成多项式$g(x)$中含有最高次数为m次的本原多项式；非本原 BCH 码的码长n是2^m-1的一个因子，它的生成多项式$g(x)$中含有最高次数为m的本原多项式。

8-15 什么是 RS 码？可纠正的错误图样有哪些？

答：RS 码是一种多进制的 BCH 码，每个符号由m个比特组成。一个能纠正t个错码的 RS 码码长为$n=2^m-1$，监督位码长$2t$。特别适于纠正突发性错码，可纠正的错误图样有：

总长度$b_1=(t-1)m+1$的单个突发错码

总长度$b_2=(t-3)m+3$的两个突发错码

……

总长度$b_i=(t-2i+1)m+2i-1$的i个突发错码

8-16 简述 Fire 码的纠错能力。

答：Fire 码的纠错能力为

（1）当$l\geq b_t+b_e-1$，$m\geq b_t$时，能纠正长度$\leq b_t$的单个突发错码，并能发现长度$\geq b_t$而$\leq b_e$的突发错码；

（2）若用于检错，能发现长度$\leq l+m$的单个突发错码，或两个突发错码的组合，两个突发错码长度之和$\leq l+1$，其中一个长度≤$\leq b_e$。

8-17 简述卷积码与线性分组码相的差别。

答：与线性分组码相比存在着许多差别，大体表现在以下几个方面：

（1）线性分组码的编码是将信息序列明确地分组，每个码组中校验码仅与本码组中的信息码有关，编码后形成固定长度、互不相关的码组序列，这种编码无记忆性。卷积码每个码组中的监督码不但与本码组的信息码有关，还与前边$(N-1)$个码组中的信息码有关，卷积码是具有记忆性。

（2）为了兼顾纠错能力与编码效率，线性分组码的码组长度n一般都较大。随着n增大，编、译码电路复杂度迅速增加，并带来较大的译码延时。卷积码则将信息码与校验码之间的相关性分布在N个码组之间。这样卷积码的k和n值可以为比较小的值，编、译码延时小，特别适合以串行方式传输信息的应用场合。因此在相同的传信率（信息速率）和设备复杂度的条件下，卷积码的性能一般优于线性分组码。

（3）线性分组码多采用系统码，而卷积码则不然。当N值确定后，非系统卷积码可获得更大的自由距，更易达到最佳编码效果。对卷积码的译码而言，系统码和非系统码的译码难度是一样的，故卷积码常采用非系统码。

（4）线性分组码有严格的代数结构，而卷积码的纠错能力与编码结构之间缺乏明确的数学关系。在构造许用的卷积码（也称为好码）时，只能是依码距性能，采用计算机对大量的码进行搜索得到的。

（5）线性分组码的编码器可视为一个有k个输入变量、n个输出变量的线性网络。卷积码可视为输入信息序列与编码器的特定结构所决定的另一个序列的卷积，卷积码也就由此得名。

8-18 什么是卷积码的最小距离d_0和自由距离d_{free}？

答：最小距离d_0定义为由零状态零时刻分叉、长度为nN的两个编码序列间的最小距离。也就是在零状态零时刻输入非零信息码、长度为nN的编码序列的最小码重。自由距离d_{free}定义为由零状态零时刻分叉、任意长的两个编码序列间的最小距离。也就是在零状态零时刻输入非零信息码、然后又回到零状态的所有编码序列中的最小码重。

8-19 什么是 TCM 编码？

答：TCM（Trellis Coded Modulation）编码是将卷积码与调制相结合的网格编码调制。能提高编码序列的自由距离。

8-20 LDPC 全称是什么？LDPC 码的校验矩阵有什么特点？

答：LDPC 码，全称低密度奇偶校验码（Low Density Parity Check Code）LDPC 码的校验矩阵H是一个稀疏矩阵，相对于行与列的长度(N,M)，校验矩阵每行、列中非零元素的数目（称作行重、列重）非常小，这也是 LDPC 码之所以称为低密度码的原因。并且任意两行（列）最多只有 1 个相同位置上是 1。

习题：

8-1 已知一汉明码的监督位数$r=4$，求码长 n 和编码效率 R 各为多少？

解：

$$n=2^r-1=15$$
$$k=n-r=15-4=11$$
$$R=\frac{k}{n}=\frac{11}{15}\approx 73.3\%$$

8-2 若两个重复码字 1000，0111，分别只纠错、检错能力如何？若同时用于检错和纠错，其纠检错的性能又怎样？

解：d=4，故可检出 3 个错，纠正 1 个错；可同时检出 2 个错、纠正 1 个错。

8-3 已知某线性分组码的 8 个码字为：000000、001110、010101、011011、100011、101101、

110110、111000，求该码的最小码距，并判断其纠检错能力。

解：由于线性分组码的封闭性和码距的定义可得知：线性分组码的最小码距等于非全零码的最小码重。故有：

$$d_0=\min\left\{\underset{i\neq j}{d}(A_i,A_j)\right\}=\min\left\{W(A_l),l\neq 0\right\}$$

故由观察法即可得出

$$d_0=\min\left\{W(A_l),l\neq 0\right\}=3$$

由纠错编码定理

$$d_0\geq e+1$$

$$d_0\geq 2t+1$$

$$d_0\geq t+e+1(e>t)$$

可得其检纠错能力如下：

(1)能发现 2 个错误码元

(2)能纠正 1 个错误码。

8-4 写出 n=7 时一维偶校验码的监督矩阵[H]和生成矩阵[G]，并讨论其纠、检错能力。

解：n=7，k=6，r=1。只有一个监督关系 $c_6\oplus c_5\oplus c_4\oplus c_3\oplus c_2\oplus c_1\oplus c_0=0$，故

$$\left[111111\,|1\right]\begin{bmatrix}c_6\\c_5\\c_4\\c_3\\c_2\\c_1\\c_0\end{bmatrix}=\left[0\right]$$。因此 $H_{1\times 7}=\left[111111\,|1\right]$，$Q=P^T=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$。

故 $G=\left[I_k\,|\,Q\right]=\begin{bmatrix}100000\,|1\\010000\,|1\\001000\,|1\\000100\,|1\\000010\,|1\\000001\,|1\end{bmatrix}$

②可检出 $2^r-1=1$ 个错，不能纠错。

8-5 已知一个（6，3）线性分组码的全部码字为：

1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

求该码的生成矩阵和监督矩阵，并讨论其纠检错能力。

解：n＝6，k＝3，r＝3。

观察所给码字，设从左至右码元依次为$a_5a_4a_3a_2a_1a_0$，信息位为$a_4a_3a_2$，则监督关系为：

$$a_5 = k_{11}a_4 \oplus k_{12}a_3 \oplus k_{13}a_2$$

$$a_1 = k_{21}a_4 \oplus k_{22}a_3 \oplus k_{23}a_2,$$

$$a_0 = k_{31}a_4 \oplus k_{32}a_3 \oplus k_{33}a_2\text{。}$$

把前三个码字分别代到这 3 个式子里去，则可解得这九个 k 值：

$$k_{11}=1, k_{12}=1, k_{13}=0; k_{21}=1, k_{22}=0, k_{23}=1; k_{31}=1, k_{32}=1, k_{33}=1\text{。}$$

故监督关系为：

$a_5 = a_4 \oplus a_3$， $a_1 = a_4 \oplus a_2$， $a_0 = a_4 \oplus a_3 \oplus a_2$。

由此写出生成矩阵和监督分别为：$G=\begin{bmatrix}110011\\101001\\000111\end{bmatrix}$， $H=\begin{bmatrix}111000\\010110\\011101\end{bmatrix}$。

由码字知最小码距等于最小码重：$d_{\min}=3$，故可纠一位错。

8-6 已知(7，3)码的生成矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}1001110\\0100111\\0011101\end{bmatrix}$$

列出所有许用码组，并求监督矩阵。

解 ：分别将信息段（000）、（001）、（010）、（011）、（100）、（101）、（110）和（111）代入式$A=mG$，得到许用码组如下

0000000

0011101

0100111

0111010

1001110

1010011

1101001

1110100

生成矩阵 G 为典型阵，有

$$Q=\begin{bmatrix}1110\\0111\\1101\end{bmatrix} \qquad \text{所以} \quad P=Q^T=\begin{bmatrix}101\\111\\110\\011\end{bmatrix}$$

得监督矩阵

$$H=[P \vdots I_r]=\begin{bmatrix}1011000\\1110100\\1100010\\0110001\end{bmatrix}$$

8-7 已知（6，3）分组码的监督码方程组为

$$\begin{cases}c_5+c_4+c_1+c_0=0\\c_5+c_3+c_1=0\\c_4+c_3+c_2+c_1=0\end{cases}$$

（1）写出相应的监督矩阵 H;

（2）变换该矩阵为典型阵。

解：（1）由题中所给监督方程组可直接写出 H：$H=\begin{bmatrix}110011\\101010\\011110\end{bmatrix}$。

（2）对 H 阵做初等行变换即可得 $H_{\text{典型}}=\begin{bmatrix}110|100\\101|010\\011|001\end{bmatrix}$

8-8 已知(7，3)线性分组码的生成矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&1&1\\1&1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

求其监督矩阵，写出该(7，3)码的系统码，并判断其纠检错能力。

解：先用初等行变换将生成矩阵化成典型阵，如下所示：

$$G=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&1&1\\1&1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}_{3\times 7}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}=\left[I_k Q_{k\times r}\right]_{k\times n}$$

$$\therefore H=\left[Q_{r\times k}^T I_r\right]_{r\times n}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

K=3，所以共有 $2^3=8$ 个系统码字，再根据 A=MG，即可分别求出各个码字。举例如下：

$$M=[101],\text{所以 } A=MG=[101]\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=[1010011]$$

其它码字分别为：

$[0000000],[0011101],[0100111],[0111010],$
$[1001110],[1101001],[1110100]$

故由线性分组码的性质可得其最小码距 d_0 为 4，由检纠错编码定理可得：能发现 3 位错误；能纠正 1 位错误；能发现 2 位错误的同时纠正 1 位错误(HEC 混合纠错方式)；

8-9 已知一个(7, 4)系统汉明码监督矩阵如下：

$$H=\begin{bmatrix}1110100\\0111010\\1101001\end{bmatrix}$$

试求：

(1) 生成矩阵 G；

(2) 当输入信息序列$m=(1101011010\ 10)$时，求输出码序列 **A=?**

解 **:**

(1)

$$Q=P^T=\begin{bmatrix}101\\111\\110\\011\end{bmatrix}$$

$$G=[I_k\vdots Q]=\begin{bmatrix}1000101\\0100111\\0010110\\0001011\end{bmatrix}$$

(2) $m_1=1101$，$m_2=0110$，$m_3=1010$

$$A_1=m_1G=[1101]\begin{bmatrix}1000101\\0100111\\0010110\\0001011\end{bmatrix}=(1101001)$$

$$A_2=m_2G=(0110001)$$

$$A_3=m_3G=(1010011)$$

8-10 设（**7,3**）线性分组码的监督矩阵为

$$H=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

试解答以下问题：

（**1**）监督码元与信息码元之间的关系表达式；

（**2**）列出所有的许用码字；

（**3**）汉明距离 $d_0=?$

（**4**）画出编码器电路；

（**5**）校正子的数学表达式；

（**6**）列出错误码位、错误图样和校正子输出之间关系的表格；

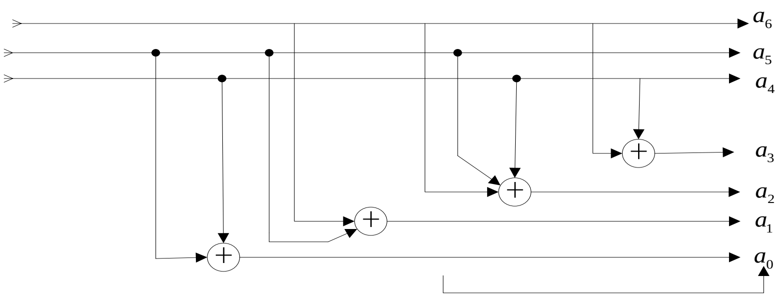
解：(1) 由$H=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$，得$\begin{cases}a_3=a_4\oplus a_6\\a_2=a_4\oplus a_5\oplus a_6\\a_1=a_5\oplus a_6\\a_0=a_4\oplus a_5\end{cases}$

(2) 所有的许用码字如下

$a_6a_5a_4$	$a_3a_2a_1a_0$
000	0000
001	1101
010	0111
011	1010
100	1110
101	0011
110	1001
111	0100

（3）由上表知汉明距离为 $d_0=4$。

（4） 画出编码器电路如解图 8-1：



解图 8-1

（5）$S=EH^T\rightarrow\begin{cases}s_4=e_6\oplus e_4\oplus e_3\\s_3=e_6\oplus e_5\oplus e_4\oplus e_2\\s_2=e_6\oplus e_5\oplus e_1\\s_1=e_5\oplus e_4\oplus e_0\end{cases}$

（6）列出错误码位、错误图样和校正子输出之间的关系如下

$S_4\sim S_1$	$e_6\sim e_0$	哪位出错	对应 4-16 译码器输出
0000	0000000	无错	Z_0
0001	0000001	b_0	Z_1
0010	0000010	b_1	Z_2
0100	0000100	b_2	Z_4

1000	0001000	b_3	Z_8
1101	0010000	b_4	Z_{13}
0111	0100000	b_5	Z_7
1110	1000000	b_6	Z_{14}

8-11 已知(7, 4)循环码的生成多项式为 x^3+x+1，输入信息码元为 1001，求编码后的系统码组。

解 $g(x)=x^3+x+1$，$m(x)=x^3+1$。 首先计算 $x^{n-k}m(x)=x^3\left(x^3+1\right)=x^6+x^3$；

然后求 $x^{n-k}m(x)/g(x)$ 的余式，用长除法：

$$x^3+x \quad \text{（商式）}$$

$$x^3+x+1 \overline{\big)\, x^6+x^3}$$

$$\underline{x^6+x^4+x^3}$$

$$x^4$$

$$\underline{x^4+x^2+x}$$

$$x^2+x \quad \text{（余式）}$$

编码后，系统码的码多项式为

$$T(x)=x^{n-k}m(x)+r(x)=x^6+x^3+x^2+x$$

对应的系统码组 $A=(1001110)$ 。

8-12 令 $g(x)=1+x+x^2+x^4+x^5+x^8+x^{10}$ 为(15，5)循环码的码生成多项式。

(1) 求该码的生成矩阵[G]

(2) 当信息多项式 $m(x)=x^4+x+1$ 时，求码多项式及码字。

解：

(1) $n=15, k=5, r=10$

$$G[x]=\begin{bmatrix} x^4g(x) \\ x^3g(x) \\ x^2g(x) \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix}, \text{所以} G=\begin{bmatrix} 1000011011\ 10000 \\ 0100001101\ 11000 \\ 0010000110\ 11100 \\ 0001000011\ 01110 \\ 0000100001\ 10111 \end{bmatrix}。$$

(2) $x^{n-k}m(x)=x^{10}m(x)=x^{14}+x^{11}+x^{10}$,

$\dfrac{x^{n-k}m(x)}{g(x)}$的余式$r(x)=x^8+x^7+x^6+x^4+x$

故码多项式为$x^{14}+x^{11}+x^{10}+x^8+x^7+x^6+x^4+x$，码字为 100110111010010。

8-13 已知（15,7）循环码由$g(x)=x^8+x^7+x^6+x^4+1$生成，问接收码字为$T(x)=x^{14}+x^5+x+1$是否需要重发？

解：

$$
\begin{array}{r l}
 & x^6+x^5+x^3 \\
x^8+x^7+x^6+x^4+1 \big) & x^{14}+x^5+x+1x^{14}+x^5+x+1 \\
 & \underline{x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{10}+x^6} \\
 & x^{13}+x^{12}+x^{10}+x^6+x^5+x+1 \\
 & \underline{x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^9+x^5} \\
 & x^{11}+x^{10}+x^9+x^6+x+1 \\
 & \underline{x^{11}+x^{10}+x^9+x^7+x^3} \\
 & x^7+x^6+x^3+x+1
\end{array}
$$

由此可得余多项式为 $x^7+x^6+x^3+x+1$，由于余多项式不为 0，所以码字在传输过程中有错，故需要重发。

8-14 设有一(7，4)系统循环码，其生成多项式为$g(x)=x^3+x+1$ 。假设码字自左至右对应码多项式的次数自高至低，假设系统位在左。

(1)求信息 0111 的编码结果；

(2)若译码器输入是 0101001，求其码多项式模$g(x)$所得的伴随式，并给出译码结果；

（3）写出该码的系统码形式的生成矩阵及相应的监督矩阵。

解：(1) 0111010；

(2) x^2+1（或写成 101），1000000 的伴随式也是 101，所以认为最高位有错，译为 1101001。

(3)

$$
G(x)=\begin{bmatrix} x^3g(x) \\ x^2g(x) \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^6+x^4+x^3 \\ x^5+x^3+x^2 \\ x^4+x^2+x \\ x^3+x+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$\therefore G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}=\left[I_kQ_{k\times r}\right]_{k\times n}$$

$$\therefore H=\left[Q_{r\times k}^TI_r\right]_{r\times n}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

8-15 已知一个(2，1，5)卷积码 $g^1=(11101)$ $g^2=(10011)$，

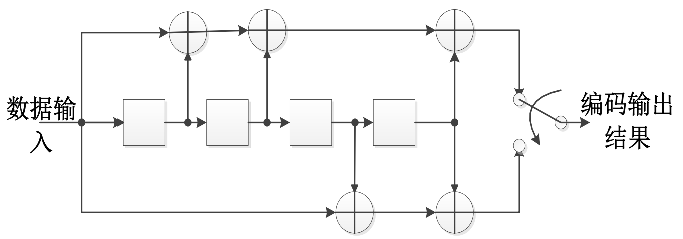
(1)画出编码器框图；

(2)写出该码生成多项式 $g(x)$；

(3)写出该码生成矩阵 G ；

(4)若输入信息序列为 11010001，求输出码序列 $c=?$

解：（1）$n=2,k=1,m=4$；依题意可以画出编码器框图如解图 8-2 所示



解图 8-2

（2）$g_1(x)=1+x+x^2+x^4;g_2(x)=1+x^3+x^4$

（3）$G=\begin{pmatrix}11&10&10&01&11&&&0\\&11&10&10&01&11&&\\&&11&10&10&01&11&\\0&&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}$

（4）$c=(11010001),c(x)=1+x+x^3+x^7$

上支路的输出为$c(x)g_1(x)=1+x^8+x^9+x^{11}$，即 100000001101

下支路的输出为$c(x)g_2(x)=1+x+x^5+x^6+x^{10}+x^{11}$，即 110001100011

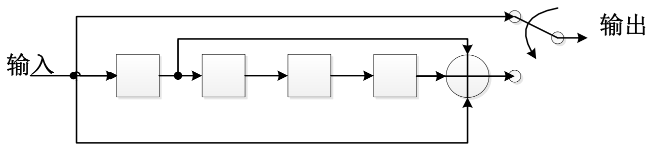
串并变换后的输出是：11 01 00 00 00 01 01 00 10 10 01 11

8-16 已知一卷积码编码器结构如题图 8-1 所示，试求：

（1） $(n.k.K)=?$

（2） $g^{1}=?$ $g^{2}=?$ **生成矩阵** $G=?$

（3）若 $x=(10111)$**，求输出** $c=?$



题图 8-1

解：（1） $n=2,k=1,K=4$

（2） $g^{1}=(1000),g^{2}=(1101)$

$$G=\begin{pmatrix} 11 & 01 & 00 & 01 & & & 0 \\ & 11 & 01 & 00 & 01 & & \\ & & 11 & 01 & 00 & 01 & \\ 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

（3）考虑编码器状态会 0，则上支路的输出是 10111000，下支路的输出是 11110011，串并变换后的输出序列是（11 01 11 11 10 00 01 01）。

8-17 已知一个（3,1,3）卷积码

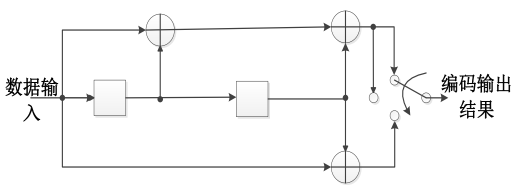
$$g_1(x)=1+x+x^2,g_2(x)=1+x+x^2,g_3(x)=1+x^2,$$

（1）画出该码的编码器框图；

（2）画出状态图、树图；

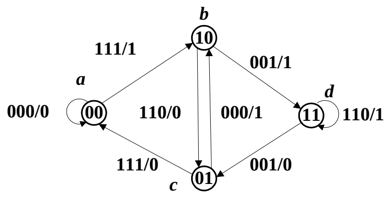
（3）求该码的自由距离。

解：（1） $n=3,k=1,m=2$，依题意课画出编码器框图如下解图 8-3（a）所示

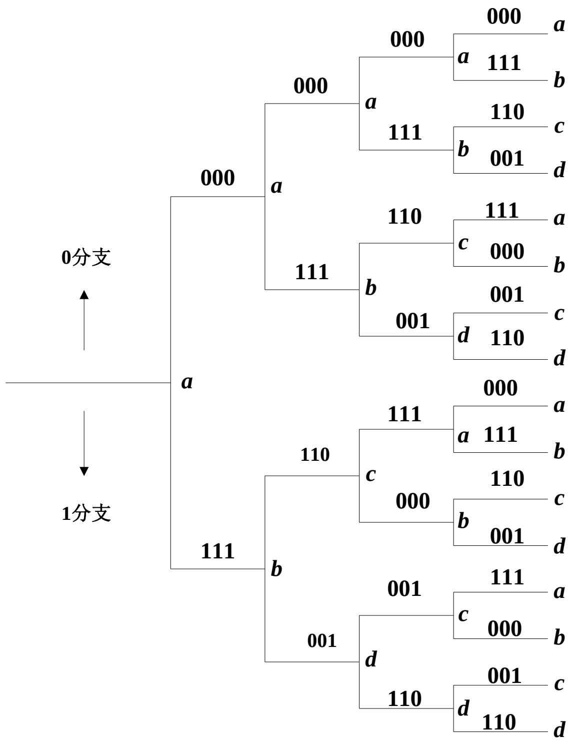


（a）

（2）状态图和树图分别为解图 8-3（b），(c)所示



(b)



(c)

解图 8-3

（3）通过观察树图可以看出：非 0 路径首次离开 a 必然经过 b，首次回到 a 必然经过 c。因此所有自由路径一定是$ab\ldots ca$的形式。路径$abca$ 的码重是 8，而其他所有形如$ab\ldots ca$ 的路径的码重不可能比$abca$更轻。因此自由距为$d_f=8$。