思考题：

2-1 什么是确知信号？什么是随机信号？

答：通信系统中遇到的信号，通常总带有某种随机性，即它们的某个或几个参数不能预知或不可能完全预知。我们把这种具有随机性的信号称为随机信号

确知信号是指其取值在任何时间都是确定的和可预知的信号，通常可以用数学公式表示。

2-2 什么是能量信号？什么是功率信号？

答：若信号能量有限，即 $0 < E < \infty$ ，此时 $P = 0$ ，则称此信号为能量信号；若 $E \to \infty$ ，但信号功率有限，即 $0 < P < \infty$ ，则称此信号为功率信号。

2-3 周期信号频谱有什么特点？

答：周期信号频谱具有三个特点：离散性，即谱线是离散的；谐波性和收敛性。

2-4 什么是**信号的频带宽度**？

答:把从零频率开始到频谱包络线第一次过零点的那个频率之间的频带作为信号的频带宽度。

2-5 什么是白色谱？

答：频谱在整个频率区间 $-\infty < \omega < \infty$ 是均匀分布的。这样的频谱常称为“均匀谱”或“白色谱”。

2-6 简述能量信号的频谱密度 $F(j\omega)$ 和功率信号的频谱 $\dot{F}_n$ 主要区别。

答：能量信号的频谱密度 $F(j\omega)$ 和功率信号（比如一个周期信号）的频谱 $\dot{F}_n$ 主要区别有：

（1） $F(j\omega)$ 是连续谱，而 $\dot{F}_n$ 是离散谱；

（2） $F(j\omega)$ 单位是幅度/频率，而 $\dot{F}_n$ 单位是幅度；（这里都是指其频谱幅度）；

（3）能量信号的能量有限，并连续的分布在频率轴上，每个频率点上的信号幅度是无穷小的，只有 $d\omega$ 上才有确定的非 0 振幅；功率信号的功率有限，但能量无限，它在无限多的离散频率点上有确定的非 0 振幅。

2-7 为什么说希尔伯特变换又称为 90 度移相器？

答：由

$$F[1/\pi t] = -j\,\mathrm{sgn}(f) = \begin{cases} -j, & -90^0,\ f > 0 \\ j, & 90^0,\ f < 0 \end{cases}$$

得 $\hat{F}(f) = -[j\,\mathrm{sgn}(f)]F(f)$

所以 $\hat{F}(f)$ 是一个 $\pi/2$ 相移系统，产生 $\pm\pi/2$ 的相移，对正频率产生 $-\pi/2$ 的相移，对负频率产生 $\pi/2$ 相移。因此，希尔伯特变换又称为 90 度移相器。

2-8 什么是随机过程？

答：随机过程是依赖于时间参量 t 变化的随机变量的总体或集合；也可以叫做样本函数的总体或集合。习惯用 $\xi(t)$ 表示。

$\xi(t)=\{X(t_1), X(t_2),..., X(t_n)...\}$，其中 $X(t_i)$ 是随机变量。

或 $\xi(t)=\{x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)...\}$，其中 $x_i(t)$ 是样本函数。

2-9 什么是狭义平稳随机过程？

答：是指它的任何 n 维分布函数或概率密度函数与时间起点无关。即如果对于任意的 n 和 τ，随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数满足：

$$f_n(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n) = f_n(x_1, x_2,..., x_n; t_1+\Delta, t_2+\Delta,..., t_n+\Delta) \quad (2.2\text{-}11)$$

则称 $\xi(t)$是严格平稳随机过程，又称为严平稳或狭义平稳。

2-10 什么是广义平稳随机过程？

答：若一个随机过程的数学期望及方差与时间无关，相关函数仅与时间间隔 τ 有关，则称这个随机过程为广义平稳随机过程。

2-11 什么是各态历经性？

答：如果一个平稳随机过程，只要满足一些较宽的条件，其集平均(统计平均值和自相关函数等)实际上可以用一个样本函数在整个时间轴上的平均值来代替，这就是各态历经性。

2-12 若随机过程严格平稳，则其数学期望、方差以及自相关函数是否与时间有关？

答：数学期望、方差与时间无关，自相关函数仅与时间间隔有关。

2-13 什么是高斯过程？什么又是窄带随机过程？

答：高斯过程是指任意维分布都服从高斯分布的随机过程。

若随机过程的功率谱满足以下条件则称为窄带随机过程：中心频率为载频 f_c，带宽为 Δf，且 $\Delta f \ll f_c$

2-14 什么是带限白噪声？

答：所谓带限白噪声是指：白噪声被限制在频带 (f_1, f_2) 之内，即在该频率区上功率谱密度 $P_n(\omega)=n_0/2$，而在该区间之外 $P_n(\omega)=0$。信道的白噪声经过理想低通滤波器后，就变成了带限白噪声。

2-15 窄带高斯噪声具有什么特性？

答：窄带高斯噪声的特性：

1） 均值为零的窄带高斯噪声$n(t)$，若它是平稳随机过程，则它的同相分量$n_c(t)$和正交分量$n_s(t)$也是平稳随机过程，亦为高斯分布，均值和方差与$n(t)$相同；

2）窄带高斯噪声的随机包络$a_n(t)$服从瑞利分布；

3）窄带高斯噪声的随机相位$\varphi_n(t)$服从均匀分布。

习题

2-1 下列信号哪些是能量信号，能量各为多少？哪些是功率信号，平均功率各为多少？

（1） $f(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $f(t)=5\cos 10\pi t\varepsilon(t)$

（3） $f(t)=\begin{cases}5\cos(\pi t) & -1\le t\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$　　（4） $f(t)=(2e^{-t}-6e^{-2t})\varepsilon(t)$

解：信号总能量为有限值而信号平均功率为零的是能量信号；信号平均功率为有限值而总能量为无限大的是功率信号。

（1）功率信号，P＝1W

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t=\infty\ ,\quad P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f^2(t)\,\mathrm{d}t=1\ \mathrm{W}<\infty$$

(2) 功率信号，P＝6.25W

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\mathrm{d}t,\ 且\ T=\frac{2\pi}{10\pi}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}P&=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{1}{5}}25\cos^2(10\pi t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{125}{4}\int_0^{\frac{1}{5}}[\cos(20\pi t)+1]\mathrm{d}t\\&=6.25\ \mathrm{W}\end{aligned}$$

(3) 能量信号，E＝25J

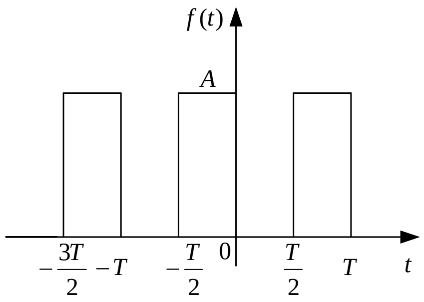
$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}25\cos^2(\pi t)\,\mathrm{d}t=25\ \mathrm{J}\ ,\qquad P=0\ \mathrm{W}$$

(4) 能量信号，E＝3J,

因为$t\to\infty$时，$2e^{-t}-6e^{-2t}\to 0$，所以$f(t)$为非周期信号，也是能量信号。

$$E=\int_0^{\infty}(2e^{-t}-6e^{-2t})^2\,\mathrm{d}t=3\ \mathrm{J}$$

2-2．**试求题图 2.1 所示周期信号的三角形傅里叶级数展开式，并画出频谱图。**



题图 2.1

解：三角傅里叶级数各系数为：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} A\mathrm{d}t = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} A\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2A}{n\Omega T}\sin(n\Omega t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} A\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2A}{n\Omega T}\cos(n\Omega t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}$$

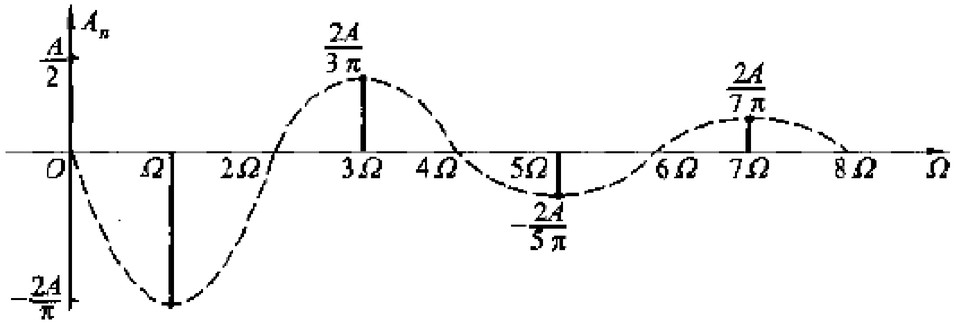
$$= -\frac{A}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

所以三角形傅里叶级数为：

$$f(t) = \frac{1}{2}A - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\pi(2n-1)}\sin\left(\frac{2\pi(2k-1)}{T}t\right)$$

$f(t)$ 频谱图如解图 2.1 所示：



解图 2.1

2-3 设 X 是 $a=0,\sigma=1$ 的高斯随机变量，试确定随机变量 $Y=cX+d$ 的概率密度函数 $f(y)$，其中 c,d 均为常数。

解：由题得：$E(x)=a=0, D(x)=\sigma^2=1$

$$E(y)=E(cx+d)=cE(x)+d=c\bullet a+d=d$$

$$D(y)=D(cx+d)=c^2\bullet\sigma^2=c^2$$

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}c}\exp[-\frac{(x-d)^2}{2c^2}]$$

2-4 设随机过程 $\xi(t)$ 可表示成 $\xi(t)=2\cos(2\pi t+\theta)$，式中 θ 是一个离散随机变量，且 $P(\theta=0)=\frac{1}{2}, P(\theta=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$，试求 $E_\varepsilon(1)$ 和 $R_\varepsilon(0,1)$。

解：首先应理解 $E_\varepsilon(1)$ 和 $R_\varepsilon(0,1)$ 的含义，$E_\varepsilon(1)$ 是指当 t=1 时，所得随机变量的均值，

$R_\varepsilon(0,1)$ 是指当 t=0 和 t=1 时，所得的两个随机变量的自相关函数。

$$E_\varepsilon=E[2\cos(2\pi+\theta)]\Big|_{t=1}=E[2\cos(2\pi+\theta)]=2(\frac{1}{2}\cos 0+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2})=1$$

$$R_\varepsilon(0,1)=E[\xi(0)\xi(1)]=E[2\cos\theta\times 2\cos(2\pi+\theta)]=4E[\cos^2\theta]=4(\frac{1}{2}\cos^2 0+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{2})=2$$

2-5 设 $z(t)=x_1\cos\omega_0 t-x_2\sin\omega_0 t$ 是一随机过程，若 x_1 和 x_2 是彼此独立且具有均值为 0，方差为 σ^2 的正态随机变量，试求：

（1）$E[z(t)], E[z^2(t)]$

（2）z(t)的一维分布密度函数 f(z)；

（3）$B(t_1,t_2)$和$R(t_1,t_2)$

解：（1）由已知条件$E[X_1]=E[X_2]=0$且x_1和x_2彼此相互独立。

所以$E[X_1X_2]=E[X_1]E[X_2]=0$

$D(x_1)=D(x_2)=\sigma^2$，而$\sigma^2=E[x^2]-E^2[x]$

所以$E[{x_1}^2]=D(x_1)+E^2[x_1]=\sigma^2$

同理 $E[{x_2}^2]=\sigma^2$

$E[z(t)]=E[x_1\cos\omega_0 t-x_2\sin\omega_0 t]=\cos\omega_0 tE[x_1]-\sin\omega_0 tE[x_2]=0$

$$
\begin{aligned}
&E[z^2(t)]=E[(x_1\cos\omega_0 t-x_2\sin\omega_0 t)^2]\\
&=E[x_1^2\cos^2\omega_0 t+x_2^2\sin^2\omega_0 t-2x_1x_2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t]\\
&=\cos 2\omega_0 tE[x_1^2]+\sin\omega_0 tE[x_2^2]-2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 tE[x_1x_2]\\
&=(\cos^2\omega_0 t+\sin^2\omega_0 t)\sigma^2=\sigma^2
\end{aligned}
$$

（2）由于x_1和x_2是彼此独立的正态随机变量且$z(t)$是x_1和x_2的线性组合，所以 z 也是均值为 0，方差为σ^2的正态随机变量，其一维概率密度为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{z^2}{2\sigma^2})$$

（3）

$$
\begin{aligned}
&R(t_{1,}t_2)=E[z_1(t)z_2(t)]=E\{[x_1\cos\omega_0 t_1-x_2\sin\omega_0 t_1][x_1\cos\omega_0 t_2-x_2\sin\omega_0 t_2]\}\\
&=\sigma^2[\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2+\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2]\\
&=\sigma^2[\cos\omega_0(t_1-t_2)]
\end{aligned}
$$

令$t1-t2=\gamma$，则$R(t_{1,}t_2)==\sigma^2\cos\omega_0\gamma$

$B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-E[z(t_1)]E[z(t_2)]=R(t_1,t_2)=\sigma^2\cos\omega_0\gamma$

2-6 已知$x(t)$与$y(t)$是统计独立的平稳随机过程，且它们的均值分别为$a_1(\tau),a_2$，自相关函数分别为$R_x(\tau),R_y(\tau)$。

（1）求乘积$z(t)=x(t)y(t)$的自相关函数。

（2）求之和 $z(t)=x(t)+y(t)$ 的自相关函数。

解：（1）已知 $x(t),y(t)$ 是统计独立的平稳随机过程

$$R(t_{1,}t_2)=E[z(t)z(t)]=E[x(t_1)y(t_1)\times x(t_2)y(t_2)]=E[x(t_1)x(t_2)\times y(t_1)y(t_2)]$$
$$=E[x(t_1)x(t_2)\times E[y(t_1)y(t_2)]=R_x(t_{1,}t_2)R_y(t_{1,}t_2)=R_x(\tau)R_y(\tau)=R_s(\tau)$$

所以，$z(t)$ 也是平稳随机过程，且有，$R_x(\tau)R_y(\tau)=R_s(\tau)$

（2）

$$R(t_{1,}t_2)=E[z(t_1)z(t_2)]=E\{[x(t_1)+y(t_1)][x(t_2)+y(t_2)]$$
$$=E[x(t_1)x(t_2)+x(t_1)y(t_2)+x(t_2)y(t_1)+y(t_1)y(t_2)]$$
$$=R_x(\tau)+a_1a_2+a_2a_1+R_y(\tau)=R_x(\tau)+R_y(\tau)+2a_1a_2$$

2-7 已知噪声 $n(t)$ 的自相关函数 $R_n(\gamma)=\frac{a}{2}e^{-\alpha|\tau|}$，$a$ 为常数；

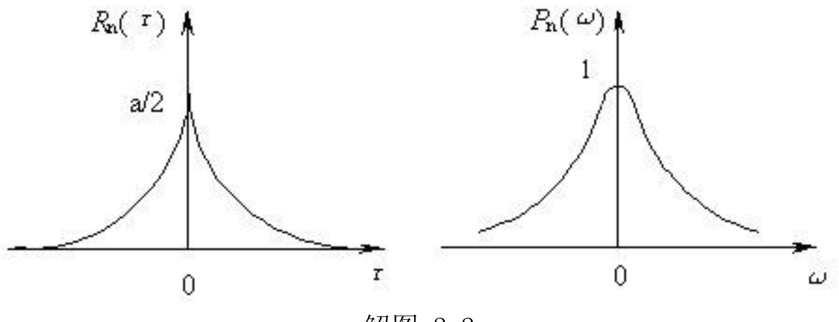
（1）求 $P_n(\omega)$ 及 S；

（2）绘出 $R_n(\gamma)$ 及 $P_n(\omega)$ 的图形。

解：（1）由已知条件 n(t)是平稳随机过程，则有 $P_z(\omega)\Leftrightarrow P_z(\tau)$

$$P_n(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_n(\gamma)e^{-j\omega\tau}d\gamma=\frac{a}{2}\times\frac{2a}{a^2+\omega^2}=\frac{a^2}{a^2+\omega^2}$$
$$S=R_n(0)=\frac{a}{2}$$

（2）$R_n(\gamma)$ 及 $P_n(\omega)$ 的图形如解图 2.2 所示。



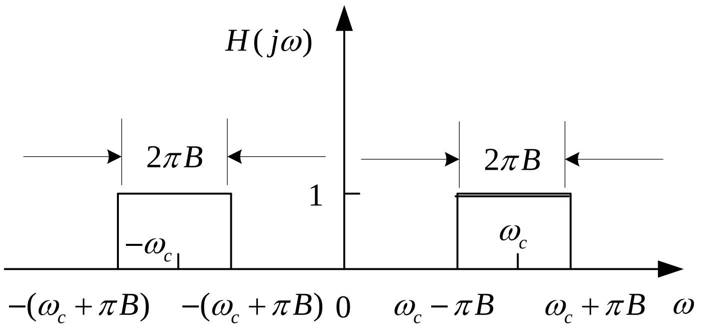
解图 2.2

2-8 将一个均值为零，功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 的高斯白噪声加到一个中心频率为 ω_0，带宽为 B 的理想带通滤波器上，如题图 2.3 所示。

（1）求滤波器输出噪声的自相关函数；

（2）滤波器输出噪声的平均功率；

（3）写出输出噪声的一维概率密度函数。



题图 2.3

解：（1）将高斯白噪声加到一个理想带通滤波器上，其输出是一个窄高斯白噪声。

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1, \omega_c - \pi B \le |\omega| \le \omega_c + \pi B \\ 0, else \end{cases}$$

$$P_0(\omega) = |H(\omega)|^2 P_1(\omega) = \begin{cases} \dfrac{n_0}{2}, \omega_c - \pi B \le |\omega| \le \omega_c + \pi B \\ 0, else \end{cases}$$

又因为，$P_0(\omega) \Leftrightarrow P_0(\tau)$

$$P_0(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_0(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\pi B}^{-\omega_0+\pi B} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\pi B}^{-\omega_0+\pi B} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= n_0 B Sa(\pi B\tau)\cos\omega_0\tau$$

$n_o(t)$ 的平均功率 $N_o = R_o(0) = n_0 B$

或 $N_o = \int_{-\infty}^{\infty} P_o(f) df = n_0 B$

（2）因为高斯过程经过线性系统后仍是高斯过程，所以输出过程的一维概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}]$$

因为 $E[\xi_i(t)] = 0$

所以，
$$a = E[\xi_0(t)] = E[\xi_i(t)]H(0) = 0$$
$$\sigma^2 = R_0(0) - R_0(\infty) = n_0 B$$

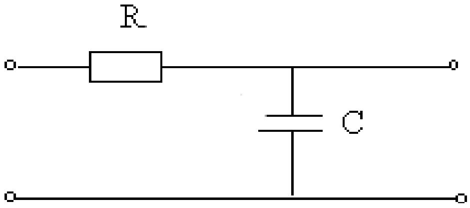
所以输出噪声的一维概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_0 B}} \exp[-\frac{x^2}{2n_0 B}]$$

2-9 RC 低通滤波器如题图 2.4 所示。当输入均值为零，功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 的高斯白噪声时：

（1）求输出过程的功率谱密度和自相关函数；

（2）求输出过程的一维概率密度函数。



题图 2.4

解：（1） $H(\omega)=\dfrac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\dfrac{1}{1+j\omega RC}$

$$\left|H(\omega)\right|^2=\frac{1}{1+(\omega RC)^2}$$

输出功率谱密度为

$$P_0(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 P_i(\omega)=\frac{n_0}{2}\times\frac{1}{1+(\omega RC)^2}$$

因为 $P_0(\omega)\Leftrightarrow P_0(\tau)$，利用 $e^{-a\tau}\Leftrightarrow\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

自相关函数 $R_0(\tau)=\dfrac{n_0}{4RC}\exp(-\dfrac{|\tau|}{RC})$

（2）因为高斯过程通过线性系统后仍是高斯过程。

$$E[\xi(t)]=E[\xi_i(t)]H(0)=0$$

$$\sigma^2=R_0(0)-R_0(\infty)=\frac{n_0}{4RC}$$

所以输出过程的一维概率密度函数为

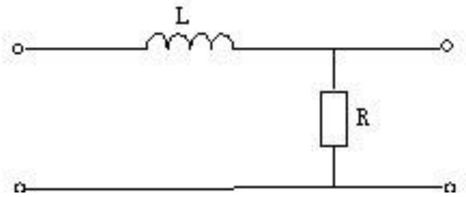
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

其中 $\sigma^2=\dfrac{n_0}{4RC}$

2-10 将均值为零，功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 的高斯白噪声加到题图 2.5 所示的低通滤波器的输入端。

（1）试求此过程的自相关函数；

（２）求输出过程的方差。



题图 2.5

解：（１）输入过程的功率谱密度为

$$\mathrm{P_r}(\omega)=\frac{n_0}{2}$$

ＬＲ低通滤波器的传输函数为

$$H(\omega)=\frac{R}{R+j\omega L}$$

$$P_0(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2\mathrm{P_r}(\omega)=\frac{n0}{2}\times\frac{R^2}{R^2+(\omega L)}$$

自相关函数 $R_0(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P_0(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{Rn_0}{4L}\exp(-\frac{R|\tau|}{L})$

（２）因为输入过程均值为零，所以输出过程均值也为零，其方差为

$$\sigma^2=R_0(0)=\frac{Rn_0}{4L}$$