Lebesgue 积分的三种定义方式

屈春河

创建日期：2020-05-31

在 Riemann 积分的定义中阶梯函数扮演了关键角色，即通过阶梯函数的积分（阶梯函数所围成的各个长方形面积之和）来逐渐逼近一个函数的积分。在 Lebesgue 积分的定义中，简单函数也扮演了类似于阶梯函数的角色。在周民强 (2016)、Friedman (2010) 和那汤松 (2009) 中分别通过三种方式定义 Lebesgue 积分，这三种定义都借助于简单函数。

定义 0.1 (简单函数 (Simple Function)). 设 $f(x)$ 是定义在 E 上的简单函数，则 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

其中 E_i 是可测集合并满足 $\bigcup_{i=1}^n E_i = E, E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j), \chi_{E_i}(x)$ 为定义在集合 E_i 上的指示函数。

阶梯函数的定义域 E 划分为有限个两两不相交的区间 $E_1, E_2, \ldots, E_n$，并且在每个区间 E_i 上的定义为常数 α_i。不同于阶梯函数，简单函数的定义域 E 可以划分为有限个两两不相交的可测集合 $E_1, E_2, \ldots, E_n$, 并且在每个可测集合 E_i 的定义为常数 α_i。

定义 0.2 (简单函数的积分). 设 (X, Ω, μ) 为可测空间，$f(x)$ 为一个可测简单函数，则 $f(x)$ 的积分定义为

$$\int_E f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

如果简单函数 $f(x)$ 的积分存在，即如果存在可测集合 E_i 使得 $\mu(E_i) = \infty$, 则在此集合上的取值 $\alpha_i = 0$, 那么称 $f(x)$ 是可积的或者称 $f(x)$ 是一个可积的简单函数。

定义 0.3 (Lebesgue 小和和大和). 设可测函数 $f(x)$ 定义在 E 上，其值在 A 与 B 之间。在 $[A, B]$ 中插入分点

$$A = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = B$$

令

$$e_k = \{x : x \in E \text{ 并且} y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}$$

则 Lebesgue 小和 s 和大和 S 分别定义为

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(e_k), S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu(e_k)$$

其中 $\mu(e_k)$ 表示可测集合 e_k 的测度

定义 0.4 (可测函数的积分的定义 1). 设 $f(x)$ 为可测函数,s 和 S 分别为其 Lebesgue 小和和大和，令

$$U = sups, V = infS$$

当

$$\lambda = max(y_{i+1} - y_k) \to 0$$

时，如果 $U = V$，则称 $f(x)$ 在 E 上可积，记为

$$\int_E f(x)dx = U(或V)$$

定义0.4来自于那汤松 (2009)，其基于可测函数 $f(x)$, 分别构造了两个特殊的和具体的简单函数序列

$$h_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \chi_{e_k}(x), g_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \chi_{e_k}(x))$$

显然

$$h_\lambda(x) \leq f(x) \leq g_\lambda(x)$$

Lebesgue 小和 s 和大和 S 分别对应简单函数 h_λ 和 $g_\lambda(x)$ 的 Lebesgue 积分。随着在原有的值域区间 $A = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = B$ 中插入更多的分点，λ 逐渐减小，并且随之 h_λ 递增，而 $g_\lambda(x)$ 递减，即通过两个简单函数序列分别从上下方向夹逼函数 $f(x)$。如果 $f(x)$ 的积分存在，则满足

$$\lim_{\lambda \to 0} h_\lambda(x) = \int_E f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} g_\lambda(x)$$

下面将要介绍的定义0.6是在Friedman (2010) 中采用的定义，其没有构造特殊的、简单函数序列，而是通过满足特定条件的、抽象的简单函数序列来定义一般可测函数 Lebesgue 积分。

定义 0.5 (依平均的 Cauchy 序列 (Cauchy sequence in the mean)). 一个可积简单函数序列 $\{f_n\}$，如果满足

$$\int |f_n - f_m|dx \to 0 \text{ 当} m, n \to 0$$

则称之为依平均的 Cauchy 序列

定义 0.6 (可测函数的积分的定义 2). 设 $f(x)$ 为广义实值可测函数，如果存在一个可积简单函数序列 $\{f_n\}$ 满足如下性质

$$\text{(a) } \{f_n\}\text{为依平均的 Cauchy 序列} \tag{1}$$

$$\text{(b) } \lim_{n \to +\infty} f_n = f(x) \text{ a.e}$$

则称 $f(x)$ 可积，其积分记为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n(x)$$

显然，在定义0.4中的简单函数序列 $\{h_\lambda(x)\}$ 和 $\{g_\lambda(x)\}$ 满足在定义0.6中的条件 (a) 和 (b)。因此，相比于定义0.4，定义0.6更具一般性。然而，为了确保0.6是良好定义的，需要证明如下定理。

定理 0.1. *如果两个函数序列 $\{g_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 分别满足定义的条件 (a) 和 (b)，那么*

$$\lim_{n \to +\infty} \int h_n(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int g_n(x)dx$$

定义0.6中的条件 (b) 可以进一步放宽为 $\{f_n\}$依测度收敛于$f(x)$，并且条件放宽之后的定义0.7与原定义0.6是等价的。

定义 0.7 (可测函数的积分的定义 2’)**.** 设 $f(x)$ 为广义实值可测函数，如果存在一个可积简单函数序列 $\{f_n\}$ 满足如下性质

$$\begin{gathered}\text{(a) } \{f_n\}\text{为依平均的 Cauchy 序列} \\ \text{(b') } \{f_n\}\text{依测度收敛于} f(x)\end{gathered} \tag{2}$$

则称 $f(x)$ 可积

周民强 (2016) 中采用了定义0.8，其通用性更强，仅仅要求简单函数小于等于 $f(x)$ 即可。

定义 0.8 (可测函数的积分的定义 3)**.** 设 $f(x)$ 为定义在 E 上的可测函数，则 f(x) 在 E 上的积分定义为

$$\int_E f(x)dx = \sup_{h(x)<=f(x)} \left\{ \int_E h(x) : h(x)\text{是 E 上的简单函数} \right\}$$

三个定义虽然形式不太一样，但是在本质上都是等价的。相对而言，定义0.4和定义0.8类似于 Riemann 积分的定义，因此比较容易理解。虽然三个定义是等价的，但是定义方式不同会造成推导 Lebesgue 积分的基本性质会有很大的差异。

参考文献

那汤松, 2009. 实变函数论 (第 5 版)[M]. 北京: 高等教育出版社.
周民强, 2016. 实变函数论 (第三版)[M]. 北京: 北京大学出版社.
FRIEDMAN A, 2010. Foundations of modern analysis[M]. New York: Dover Publications.