

XỬ LÝ TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN

Tập I - Cơ sở

NGUYỄN LINH TRUNG (chủ biên)
HUỲNH HỮU TUỆ

XỬ LÝ TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN
Nguyễn Linh Trung, Huỳnh Hữu Tuệ
Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025

MỤC LỤC

	<i>Danh sách bảng</i>	iv
	<i>Danh sách hình vẽ</i>	v
	<i>Danh sách ví dụ</i>	xi
	<i>Danh sách thuật toán</i>	xiii
	<i>Danh sách chương trình MATLAB</i>	xiv
	<i>Danh mục thuật ngữ và viết tắt</i>	xii
	<i>Quy ước ký hiệu và phong chữ</i>	xiv
	<i>Lời mở đầu</i>	xix
1	Xác suất và biến ngẫu nhiên	1
	1.1 Tóm tắt lý thuyết xác suất	2
	1.2 Biến ngẫu nhiên	10
	1.3 Những biến ngẫu nhiên thường gặp	18
	1.4 Cặp biến ngẫu nhiên	20
	1.5 Vector ngẫu nhiên	28
	1.6 Tóm tắt chương	36
	<i>Phụ lục Chương 1</i>	37
	1.A Kỳ vọng và phương sai của biến Poisson	37
	1.B Kiểm chứng mật độ Gauss	39
	<i>Bài tập Chương 1</i>	41
2	Mô phỏng biến ngẫu nhiên	43
	2.1 Tạo biến ngẫu nhiên đều bằng LCG	44
	2.2 Phương pháp kiểm định	45

2.3	Tạo biến ngẫu nhiên có phân phối cho trước	53
2.4	Phương pháp loại trừ	90
2.5	Tóm tắt chương	116
	<i>Phụ lục Chương 2</i>	118
2.A	Chéo hóa ma trận thực và đối xứng	118
	<i>Bài tập Chương 2</i>	133
3	TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN	134
3.1	Cấu trúc toán học của quá trình ngẫu nhiên	135
3.2	Tín hiệu ngẫu nhiên dừng	139
3.3	Trung bình theo thời gian và tính ergodic	141
3.4	Tín hiệu ngẫu nhiên theo thời gian rời rạc	146
3.5	Quá trình Poisson	148
3.6	Chuyển động Brown hay quá trình Wiener	156
3.7	Hàm mật độ phổ công suất	166
3.8	Lọc một tín hiệu ngẫu nhiên	185
3.9	Tóm tắt chương	208
	<i>Bài tập Chương 3</i>	210
4	ƯỚC LƯỢNG PHỔ	214
4.1	Bài toán ước lượng phổ	214
4.2	Tuần hoàn đồ	216
4.3	Phương pháp Bartlett	219
4.4	Phương pháp Welch	220
4.5	Phương pháp Blackman-Tukey	221
4.6	Thực thi các phương pháp ước lượng phổ	222
4.7	Tóm tắt chương	279
	<i>Bài tập Chương 4</i>	282
5	LỌC TỐI ƯU WIENER	286
5.1	Lọc Wiener không nhân quả	287
5.2	Lọc Wiener nhân quả	294

4 ƯỚC LƯỢNG PHỔ

Chương này sẽ trình bày một số phương pháp ước lượng phổ đã được đưa vào sử dụng trong thực tiễn từ nửa sau thế kỷ 20. Các phương pháp này sử dụng trực tiếp tập N dữ liệu $\{x(0), \dots, x(N-1)\}$ quan sát được từ tín hiệu ngẫu nhiên, để tính trực tiếp một ước lượng $S_{XX}(\omega)$ của mật độ phổ công suất $S_{XX}(\omega)$.

Các phương pháp này khá tương tự nhau, nhưng yếu tố khác biệt là nhằm cải tạo để nâng cao chất lượng của ước lượng. Bởi vì các phương pháp ước lượng phổ trong chương này sử dụng trực tiếp dữ liệu để ước lượng phổ, nên ta cũng gọi các phương pháp này là **phi tham số** (nonparametric).

4.1 Bài toán ước lượng phổ

Cho $X(t)$ là một tín hiệu dừng bậc hai có hàm tự tương quan là $R_{XX}^c(\tau)$ tương ứng với phổ công suất $S_{XX}^c(f)$ có dải thông hữu hạn B :

$$S_{XX}^c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}^c(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 0, \quad |f| > B, \quad (f: \text{Hz}). \quad (4.1)$$

Ta lấy mẫu $X(t)$ với vận tốc $f_s > 2B$ để có chuỗi $\{X_d(n)\}$

$$X_d(n) = X_c(t)|_{t=nT_s}. \quad (4.2)$$

Chỉ số “c” và “d” được sử dụng để phân biệt trường hợp thời gian liên tục (c: continuous) và thời gian rời rạc (d: discrete). Ta đã chứng minh rằng

$$R_{XX}^d(n) = \mathbb{E}\{X_d(k)X_d(k-n)\} = R_{XX}^c(\tau)|_{t=nT_s}. \quad (4.3)$$

Phổ công suất (PSD: power spectral density) của tín hiệu rời rạc $\{X_d(n)\}$, ký hiệu $S_{XX}^d(\omega)$ là biến đổi Fourier của $\{R_{XX}^d(n)\}$, được cho bởi

$$S_{XX}^d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{XX}^d(n) e^{-jn\omega}, \quad (\omega: \text{rad}). \quad (4.4)$$

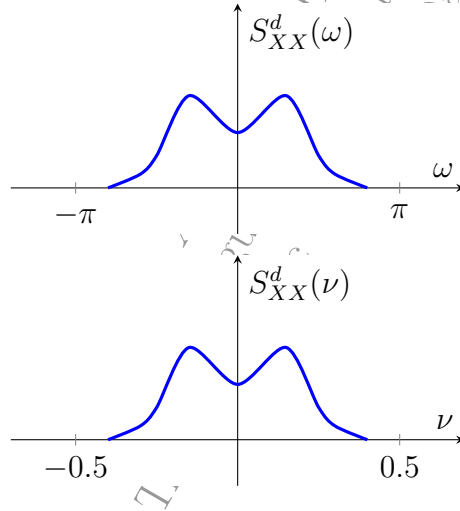
Phổ $S_{XX}^d(\omega)$ của tín hiệu theo thời gian rời rạc $\{X_d(n)\}$ và phổ $S_{XX}^c(f)$ của tín hiệu theo thời gian liên tục $X_c(t)$ được kết nối bởi biểu thức

$$S_{XX}^d(\omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{XX}^c(f - kf_S) \quad (4.5)$$

với

$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_S} = 2\pi\nu, \quad (\nu = f/f_S). \quad (4.6)$$

$S_{XX}^d(\omega)$ là tuần hoàn theo ω với chu kỳ 2π , hoặc tuần hoàn theo ν với chu kỳ 1, như trong Hình 4.1.



Hình 4.1 Phổ công suất tín hiệu rời rạc theo ω và theo ν .

Bởi vì $f_S > 2B$, ta có ngay

$$-\pi < \omega < \pi: S_{XX}^d(\omega) = \frac{1}{T_S} S_{XX}^c(f) \Big|_{f=\frac{\omega}{2\pi} f_S}. \quad (4.7)$$

Kết quả này cho thấy, từ phổ của tín hiệu rời rạc $S_{XX}^d(\omega)$, ta có thể suy ra phổ của tín hiệu liên tục $S_{XX}^c(f)$, hoặc $S_{XX}^c(\Omega)$ với $\Omega = 2\pi f$.

Trong lý thuyết, bài toán **ước lượng phổ** (spectral estimation) được đặt ra như sau:

Bài toán ước lượng phổ lý thuyết

Cho tín hiệu rời rạc, $\{X_d(n)\}$, ước lượng phổ của tín hiệu liên tục, $S_{XX}^c(f)$.

Trong thực tiễn, bài toán ước lượng phổ trở thành

Bài toán ước lượng phổ thực tiễn

Cho tập dữ liệu $\{x_d(n)\}$, $n = 0, \dots, N-1$, do được từ tín hiệu rời rạc $\{X_d(n)\}$, ước lượng phổ của tín hiệu liên tục, $S_{XX}^c(f)$.

Trong bối cảnh hiện đại, hầu hết tất cả các dữ liệu ta cần xử lý đều thuộc loại **có thời gian rời rạc**, cho nên ta không cần phân biệt hai chỉ số “c” và “d” nữa. Từ đây về sau, ta luôn dùng ký hiệu $\{X(n)\}$ và $S_{XX}(\omega)$ để chỉ định $\{X_d(n)\}$ và $S_{XX}^d(\omega)$.

Họ các phương pháp cổ điển bắt nguồn từ Schuster [28, 1898], nhưng thực chất được khởi động từ cuối những năm 1940 bởi Bartlett [3, 1948], Parzen (xem [22]), Jenkin (xem [12]), Priestley (xem [25]), Blackman-Tukey [4, 5, 1958] và được củng cố bởi Welch [35, 1967].

4.2 Tuần hoàn đồ

Tuần hoàn đồ (periodogram) là công cụ mà Schuster đã gợi ý vào năm 1898 trong một công trình nghiên cứu tính tuần hoàn trong các dữ liệu liên quan đến thời tiết [28]. Từ

tín hiệu $X(n)$ mà ta muốn phân tích, ta quan sát được một tập gồm N dữ liệu $\{X(n)\}$, $n = 0, \dots, N-1$.

Phổ $X(f)$ của tập dữ liệu $\{X(n)\}$, $n = 0, \dots, N-1$, là biến đổi Fourier của $\{X(n)\}$:

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{-jn2\pi f}, \quad |f| \leq 0,5 \quad (4.8)$$

và tuần hoàn đồ của $\{X(n)\}$ được định nghĩa là

$$\hat{P}_{XX}(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2. \quad (4.9)$$

Lúc Schuster gợi ý sử dụng tuần hoàn đồ để đánh giá tính tuần hoàn của dữ liệu, các khái niệm hàm tự tương quan và phổ công suất chưa xuất hiện. Bây giờ ta thấy tuần hoàn đồ $\hat{P}_{XX}(f)$ chính là một ước lượng của phổ công suất $P_{XX}(f)$ mà ta đã xét trong chương trước.

Tuy nhiên, tuần hoàn đồ là một ước lượng quá đơn giản, có chất lượng phụ thuộc vào trị trung bình $\mathbb{E}\{\hat{P}_{XX}(f)\}$ và phương sai $\text{Var}\{\hat{P}_{XX}(f)\}$ của ước lượng. Sau đây, ta sẽ tính toán trị trung bình và phương sai của tuần hoàn đồ để có đánh giá về chất lượng của phương pháp này.

4.2.1 Trị trung bình của tuần hoàn đồ

Theo định nghĩa của tuần hoàn đồ, ta có

$$\begin{aligned} \hat{P}_{XX}(f) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{-j2\pi kf} \times \sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi mf} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X(m)e^{-j2\pi(k-m)f}. \end{aligned}$$

Như thế, trị trung bình của $\hat{P}_{XX}(f)$ là

$$\mathbb{E}\{\hat{P}_{XX}(f)\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}\{X(k)X(m)\} e^{-j2\pi(k-m)f}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} R_{XX}(k-m) e^{-j2\pi(k-m)f},$$

trong đó $R_{XX}(k-m)$ là hàm tự tương quan của $\{X(n)\}$ mà ta đã giả thiết là dừng bậc hai. Đặt $n = k - m$, ta thấy n sẽ đi từ $-(N-1)$ đến $(N-1)$, ta suy ra

$$\mathbb{E}\{\hat{P}_{XX}(f)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} R_{XX}(n) e^{-jn2\pi f} \sum_m 1.$$

Ta cần xác định giới hạn của m trong \sum_m . Biết rằng $0 \leq k \leq N-1$ và $k-m = n$, ta suy ra $0 \leq n+m \leq N-1$; do đó $-n \leq m \leq N-n-1$. Đừng quên rằng $0 \leq m \leq N-1$; như thế ta có

$$\begin{aligned} n \geq 0: \quad & -n \leq m \leq N-n-1 \\ & 0 \leq m \leq N-1 \\ & \sum_m 1 = (N-n-1) - 0 + 1 = N-n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n < 0: \quad & -n \leq m \leq N-1 \\ & -n \leq m \leq N-1 \\ & \sum_m 1 = (N-1) - (-n) + 1 = N+n. \end{aligned}$$

Ngoài ra, lúc $n \geq 0$, ta có $-n = -|n|$ và lúc $n < 0$, $-n = |n|$; ta có thể kết hợp cả hai trường hợp để có

$$\sum_m 1 = N - |n|, \quad -N+1 \leq n \leq N-1.$$

Cuối cùng, ta có được trị trung bình của tuần hoàn đồ như sau:

$$\mathbb{E}\{\hat{P}_{XX}(f)\} = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) R_{XX}(n) e^{-j2\pi n f}. \quad (4.10)$$

Như thế, khi N khá lớn thì

$$\mathbb{E}\{\hat{P}_{XX}(f)\} \approx P_{XX}(f). \quad (4.11)$$

Theo kết quả (4.11), tuần hoàn đồ $\hat{P}_{XX}(f)$ là một ước lượng **không lệch** (unbiased) của mật độ phổ công suất $P_{XX}(f)$ lúc N lớn.

4.2.2 Phương sai của tuần hoàn đồ

Một cách tổng quát, $\text{Var}\{\hat{P}_{XX}(f)\}$ không thể tính được. Tuy nhiên, trong trường hợp một tín hiệu Gauss với một tính chất rất đặc biệt là moment bậc 4 có thể biểu diễn theo các moment bậc 2, nên có thể tính được chính xác $\text{Var}\{\hat{P}_{XX}(f)\}$. Vì tính toán quá dài, nên ta chỉ cần tham khảo kết quả Papoulis [21], Jenkins và Watt [11], được cho như sau:

$$\text{Var}\{\hat{P}_{XX}(f)\} = P_{XX}^2(f) \left\{ 1 + \left[\frac{\sin(2\pi fN)}{N \sin(2\pi f)} \right]^2 \right\}. \quad (4.12)$$

Khi N lớn,

$$\text{Var}\{\hat{P}_{XX}(f)\} \approx P_{XX}^2(f). \quad (4.13)$$

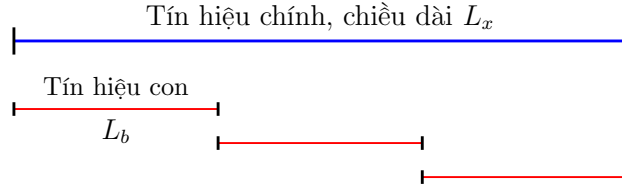
Kết quả (4.13) cho ta tuần hoàn đồ $\hat{P}_{xx}(f)$ là một ước lượng **không nhất quán** (inconsistent) của phổ công suất $P_{xx}(f)$ vì không hội tụ về một giá trị. Như thế, tuần hoàn đồ tuy không lệch nhưng không nhất quán, nên không phải là một ước lượng tốt.

4.3 Phương pháp Bartlett

Bởi vì phương sai của ước lượng dùng tuần hoàn đồ khác 0, nên cách độc nhất để làm nhỏ phương sai này là lấy trị trung bình của nhiều ước lượng. Ta chia chiều dài tín hiệu thành K khoảng rời nhau, gọi là các tín hiệu con, như trong Hình 4.2 rồi tính K tuần hoàn đồ các tín hiệu con này; $\hat{P}_{XX}^{(m)}(f)$, $m = 1, \dots, K$.

Từ đó, ta lấy trung bình sau đây làm ước lượng của mật độ phổ công suất $P_{xx}(f)$:

$$\hat{P}_{XX}^K(f) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \hat{P}_{XX}^{(m)}(f). \quad (4.14)$$



Hình 4.2 Chia tín hiệu thành các khoảng tín hiệu con.

Với cách làm này, trị trung bình của ước lượng $\hat{P}_{XX}^K(f)$ cũng giống như của tuần hoàn đồ, tuy nhiên $\text{Var}\{\hat{P}_{XX}^K(f)\}$ thì giảm K lần so với $\text{Var}\{\hat{P}_{XX}(f)\}$:

$$\text{Var}\left\{\hat{P}_{XX}^K(f)\right\} = \frac{1}{K} \text{Var}\left\{\hat{P}_{XX}(f)\right\} \approx \frac{P_{XX}^2(f)}{K} \quad (N \gg 1). \quad (4.15)$$

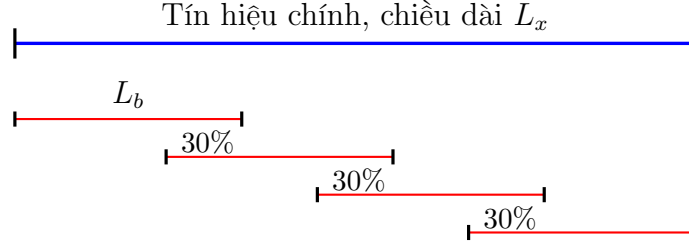
Ước lượng (4.14) được gọi là **phương pháp Bartlett**.

4.4 Phương pháp Welch

Như vừa thảo luận, ta có thể chia tín hiệu đo được thành K tín hiệu con rời nhau, rồi lấy trung bình của các tuần hoàn đồ của các tín hiệu con. Tuy nhiên, trong thực tế, chiều dài của tín hiệu đo được sẽ không quá lớn, cho nên số tín hiệu con có được cũng sẽ không đủ lớn để rút nhỏ phương sai của ước lượng. Để tăng số tín hiệu con K , Welch đề nghị cho phép các tín hiệu con được trùng lặp một phần, như trên Hình 4.3. Ta gọi đây là **phương pháp Welch**. Kết quả thực nghiệm cho biết rằng ta có thể chấp nhận đến 50% trùng lặp mà không bị ảnh hưởng bởi tương quan giữa các tín hiệu con.

Hiện nay, phương pháp Welch được sử dụng đại trà trong thực tế, bằng cách thêm cửa sổ cho mỗi tín hiệu con và điều chỉnh kết quả bằng một hệ số thích hợp, theo biểu thức sau:

$$\hat{P}_{XX}^{(m)}(f) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w(n) X^{(m)}(n) e^{-j2\pi n f} \right|^2. \quad (4.16)$$



Hình 4.3 Chia tín hiệu thành các khoảng tín hiệu con; các tín hiệu con có trùng lặp 30%.

Trong (4.16), $w(n)$ là cửa sổ ta đã chọn nhằm tối thiểu hóa ảnh hưởng của hiện tượng bất liên tục lúc ta chia khoảng để có các tín hiệu con; U là hệ số điều chỉnh, được chọn theo kinh nghiệm dựa vào kết quả đạt được và thông thường được tính bởi

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n). \quad (4.17)$$

Lúc các tín hiệu con có 50% trùng lặp, Welch chứng minh rằng

$$\text{Var} \left\{ \hat{P}_{XX}^K(f) \right\} = \frac{9}{8K} P_{XX}^2(f). \quad (4.18)$$

4.5 Phương pháp Blackman-Tukey

Phương pháp này đề nghị ước lượng hàm tự tương quan $\hat{R}_{XX}(n)$ rồi lấy biến đổi Fourier của $\hat{R}_{XX}(n)$ như ước lượng của phổ công suất $\hat{P}_{XX}(f)$:

$$\hat{P}_{XX}(f) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} w(n) \hat{R}_{XX}(n) e^{-j2\pi fn}. \quad (4.19)$$

Bởi vì chiều dài N hữu hạn, cho nên số dữ liệu ta sử dụng để ước lượng $\hat{R}_{XX}(n)$ càng ít lúc n lớn dần (cho đến $N-1$). Do đó, sai số ước lượng càng lớn khi n lớn. Đây là lý do tại sao Blackman-Tukey đề nghị dùng cửa sổ $w(n)$ trên $\hat{R}_{XX}(n)$ với hy vọng giảm thiểu sai số cho ước lượng phổ công suất $\hat{P}_{XX}(f)$. Vì vậy, phương pháp này có tên là **phương pháp**

Blackman-Tukey. Ta có thể sử dụng gợi ý của Welch nhằm tính trung bình ước lượng phổ để giảm phương sai của ước lượng, tức tăng độ chính xác lên.

Tóm lại, ta có thể dùng phương pháp Blackman-Tukey để ước lượng phổ như sau. Trước hết, ta chia tập dữ liệu thành các tập con có chiều dài $2N$, có thể trùng lặp một phần:

$$X^{(i)}(n) = X(n + iD), \quad n = 0, \dots, 2N - 1, \quad (4.20)$$

trong đó D là số dữ liệu được hai tín hiệu kế nhau cùng sử dụng (D là phần trùng lặp của chúng). Các tín hiệu con có thể trùng lặp tối đa là 50%. Sau đó, với mỗi tín hiệu $X^{(i)}(n)$ có chiều dài $2N$, ta ước lượng hàm tự tương quan của $X^{(i)}(n)$ bằng

$$\hat{R}_{XX}^{(i)}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{(i)}(k) X^{(i)}(k+n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.21)$$

Chú ý là với cách chọn này, số thành phần dưới dấu tổng là N .

Điểm cuối cùng ta cần chú ý là để tính ước lượng phổ công suất dựa vào tuần hoàn đồ, ta phải tính biến đổi Fourier của tín hiệu, hoặc biến đổi Fourier của ước lượng hàm tự tương quan. Trên máy tính, ta dùng **biến đổi Fourier nhanh** (FFT: fast Fourier transform) để thực hiện các phép biến đổi Fourier này (xem giáo trình Xử lý tín hiệu số [20]).

4.6 Thực thi các phương pháp ước lượng phổ

4.6.1 Các phương pháp thực thi

Ta quan tâm đến hai phương pháp ước lượng phổ, là Bartlett-Welch và Blackman-Tukey, được tóm tắt lại như sau.

Phương pháp Bartlett-Welch

Bartlett đề nghị dùng tuần hoàn đồ làm cơ sở để ước lượng phổ công suất. Để làm tròn kết quả, Bartlett đề nghị áp

một cửa sổ vào tập dữ liệu con trước khi lấy biến đổi Fourier:

$$\hat{S}_{XX}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_d(n)x(n)e^{-j2n\omega} \right|^2. \quad (4.22)$$

Nếu có điều kiện, chia dữ liệu thành K khối dữ liệu con để tính tuần hoàn đồ và cuối cùng là tính trung bình của tuần hoàn đồ. Chia tín hiệu $x(n)$ thành các tín hiệu con $x^{(i)}(n)$ như sau:

$$\{x^{(i)}(n)\} = \{x(n + iL_b)\}, \quad (4.23)$$

$$n = 0, \dots, N-1, i = 1, \dots, K,$$

trong đó L_b là chiều dài của tập dữ liệu con. Ta suy ra ước lượng phổ công suất của các tín hiệu con $x^{(i)}(n)$, là

$$\hat{S}_{XX}^{(i)}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w_d(n)x^{(i)}(n)e^{-jn\omega} \right|^2. \quad (4.24)$$

Từ đó, lấy trung bình để có được ước lượng phổ công suất của $x(n)$ như sau:

$$\hat{S}_{XX}(\omega) = \frac{1}{K} \hat{S}_{XX}^{(i)}(\omega). \quad (4.25)$$

Kết hợp phương pháp Welch với phương pháp Bartlett để có **phương pháp Bartlett-Welch**, cho phép hai khối dữ liệu con liền kề dùng chung dd dữ liệu. Đặt $D = L_b - dd$, ta có

$$x^{(i)}(n) = x(n + iD), \quad n = 0, \dots, L_b - 1. \quad (4.26)$$

Phương pháp Blackman-Tukey

Phương pháp Blackman-Tukey dùng ước lượng sau đây cho hàm tự tương quan:

$$\hat{R}_{XX}(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=n+1}^{N-1} x(k)x(k-n), & n = 0, 1, \dots, N-1, \\ \hat{R}_{XX}(-n), & n = -1, \dots, -N+1, \end{cases}$$

để ước lượng phổ công suất

$$\hat{S}_{XX}(\omega) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \hat{R}_{XX}(n) e^{-jn\omega}.$$

Nếu thêm cửa sổ, ta có

$$\hat{S}_{XX}(\omega) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \hat{R}_{XX}(n) w_M(n) e^{-jn\omega}, \quad (4.27)$$

trong đó $w_M(n)$ là cửa sổ áp lên ước lượng hàm tự tương quan trước khi lấy biến đổi Fourier để có ước lượng của phổ công suất. Chiều dài M của cửa sổ, theo Kay [13], nên chọn bằng $N/5$.

4.6.2 Các chương trình MATLAB

Phần này trình bày 6 chương trình chính sau đây dùng để ước lượng phổ:

1. `thdh.m`: Tạo tín hiệu điều hòa
2. `thARMA.m`: Tạo tín hiệu ARMA
3. `cuaso.m`: Tạo các cửa sổ
4. `ppBW_Sxx.m`: Phương pháp Bartlett-Welch
5. `ppBT_Sxx.m`: Phương pháp Blackman-Tukey
6. `sosanh_BW_BT.m`: So sánh Bartlett-Welch và Blackman-Tukey

và 3 chương trình phụ sau đây dùng để đánh giá ảnh hưởng của các tham số:

1. `THD_Lb_dh.m`: Ảnh hưởng của chiều dài tín hiệu con L_b
2. `THD_SNR_dh.m`: Ảnh hưởng của tỷ lệ tín hiệu trên nhiễu (SNR: signal-to-noise ratio), gọi nhanh là tỷ lệ tín trên nhiễu
3. `THD_cuaso.m`: Ảnh hưởng của các cửa sổ khác nhau.

Chương trình hàm tạo tín hiệu điều hòa

Ta cần một tín hiệu $\{x(n)\}$ có chiều dài L_x , bị tác động bởi nhiễu cộng với tỷ lệ tín trên nhiễu SNRdB (theo thang dB). Trước tiên, ta có thể tạo một loại tín hiệu gọi là tín hiệu điều hòa. Tín hiệu điều hòa được tạo ra bởi chương trình MATLAB sau:

Chương trình 4.1 thdh.m

```
function [x,Sxx] = thdh(A,fnu,Lx,SNRdB)

%% TAO TIN HIEU DIEU HOA
%
% [x,Sxx] = thdh(A,fnu,Lx,SNRdB)
%
% Ham nay chon cac thong so de tao tin hieu dieu
% hoa chua K tan so. A la vec-to cot chua K bien do
% cua K tan so va fnu la vec-to cot chua K tan so
% cua tin hieu dieu hoa. Ta co the thay doi A va
% fnu de co nhung tap du lieu khac nhau. Dung quen
% la A va fnu phai co cung so chieu K. Cac thanh
% phan cua tin hieu dieu hoa deu co pha goc bat ky.
% Lx la chieu dai cua tin hieu. SNRdB la ty le tin
% tren nhiễu, theo đơn vị dB. Neu muon khong co tin
% hieu quan sat, chon SNRdB du lon (SNRdB ≥ 1000).
% Dau ra la tin hieu dieu hoa co chua nhieu (x) va
% pho cong suat ly tuong (Sxx) cua tin hieu dieu
% hoa khong co nhieu quan sat.

% Giao trinh: Xu ly tin hieu ngau nhien
% NXB Dai hoc Quoc gia Ha Noi, 2025
% Nguyen Linh Trung, Huynh Huu Tue
% =====
%%

% Tao tin hieu sach (quan sat chinh xac)
xsach = sum(diag(A)*cos(2*pi*fnu*(0:Lx-1) + ...
    2*pi*rand(length(A),1)));

% Tao tin hieu quan sat x, co sai so la nhieu cong
S = .5*sum(A.^2); % Cong suat tin hieu
NO = S*(10^(-.1*SNRdB)); % Cong suat nhiễu
sigma = sqrt(NO);
x = xsach + sigma*randn(1,Lx);

% Tinh Sxx cua {x(n)} su dung tin hieu dai Ns
% ma ta muon
Ns = Lx;
%Ns = min(Lx,2000); % mo lenh nay neu muon han che
% so luong mau pho
Sxx = (abs(fft(x(1:Ns))).^2)/Ns; % tuan hoan do
```

Chạy chương trình hàm

```
function [x, Sxx] = thdh(A, fnu, Lx, SNRdB)
```

để tạo tín hiệu điều hòa x có chiều dài Lx , có K tần số, bị tác động bởi nhiễu cộng với tỷ lệ tín trên nhiễu là $SNRdB$.

Trước tiên, ta tạo tín hiệu điều hòa “sạch”, $x_{\text{sach}}(n)$, chưa bị nhiễu tác động. Đầu vào A là vector (cột) chứa biên độ của K thành phần điều hòa và đầu vào fnu là vector (cột) tương ứng chứa tần số của K thành phần điều hòa:

$$A = [A_1, \dots, A_K]^T, \\ fnu = [\nu_1, \dots, \nu_K]^T.$$

Tín hiệu điều hòa tạo ra có dạng

$$x_{\text{sach}}(n) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi n \nu_k + \varphi_k), \quad (4.28)$$

trong đó φ_k là pha gốc được chọn bất kỳ (ngẫu nhiên). Trong MATLAB, ta thực hiện lệnh sau để tạo ra tín hiệu điều hòa $x_{\text{sach}}(n)$:

```
% Tạo tín hiệu sạch (quan sát chính xác)
xsach = sum(diag(A)*cos(2*pi*fnu*(0:Lx-1) + ...
    2*pi*rand(length(A),1)));
```

Tín hiệu điều hòa $x_{\text{sach}}(n)$ bị tác động bởi nhiễu cộng có phương sai là σ^2 và ta quan sát được tín hiệu có nhiễu, $x(n)$. Gọi S và N_0 lần lượt là công suất của tín hiệu và công suất của nhiễu; $N_0 = \sigma^2$. Tỷ lệ tín trên nhiễu được cho bởi công thức

$$SNR = \frac{\text{Công suất tín hiệu}}{\text{Công suất nhiễu}} = \frac{S}{N_0}. \quad (4.29)$$

Thông thường, đầu vào $SNRdB$ là giá trị của SNR theo thang dB, có nghĩa là

$$SNRdB = 10 \log_{10}(SNR) = 10 \log_{10} \frac{S}{N_0}, \quad (4.30)$$

Tín hiệu điều hòa có K tần số, nên có công suất

$$S = \sum_{i=1}^K \frac{A_i^2}{2}. \quad (4.31)$$

Từ đó, ta tính được công suất của nhiễu thông qua SNRdB và S bởi

$$N_0 = S \times 10^{-\text{SNRdB}/10}. \quad (4.32)$$

Cho nên

$$\sigma = \sqrt{N_0} = \sqrt{S \times 10^{-\text{SNRdB}/10}} \quad (4.33)$$

và ta có được tín hiệu quan sát \mathbf{x}

$$x(n) = x_{\text{sach}}(n) + \sigma * \text{randn}, \quad (4.34)$$

dưới tác động của nhiễu cộng. Như vậy, đầu ra \mathbf{x} của chương trình hàm `thdh.m` là tín hiệu quan sát có chứa nhiễu $\{x(n)\}$, $n = 0, \dots, L_x - 1$. Ta có được bằng cách thực hiện các dòng lệnh sau:

```
% Tao tin hieu quan sat x, co sai so la nhiễu cộng
S = .5*sum(A.^2); % Công suất tín hiệu
N0 = S*(10^(-.1*SNRdB)); % Công suất nhiễu
sigma = sqrt(N0);
x = xsach + sigma*randn(1,Lx);
```

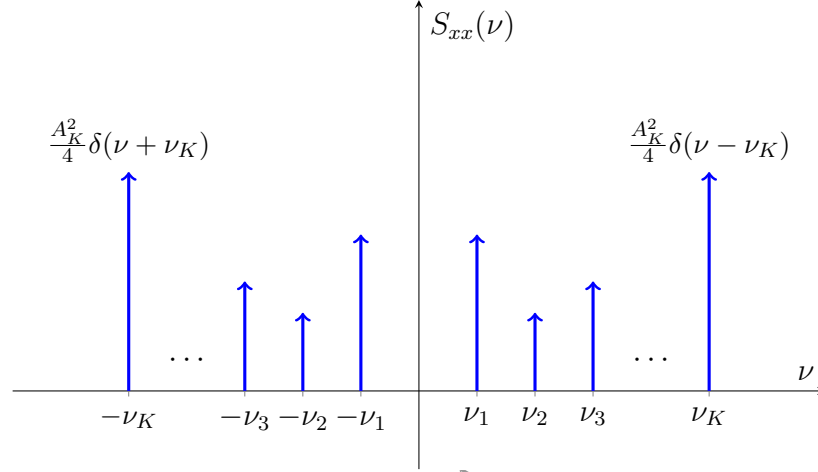
Chương trình hàm cho đầu ra thứ hai \mathbf{Sxx} là tuần hoàn đồ, ước lượng phổ công suất lý tưởng $S_{xx}(\nu)$ của tín hiệu sạch $\{x_{\text{sach}}(n)\}$, với $\mathbf{Sxx} = [S_{xx}(0), \dots, S_{xx}(L_x - 1)]$. Tuần hoàn đồ $S_{xx}(k)$ xuất hiện tại tọa độ k/L_x của trục tần số chuẩn hóa. Ta có được \mathbf{Sxx} bằng các lệnh:

```
% Tính Sxx của {x(n)} sử dụng tín hiệu dài Ns
% mà ta muốn
Ns = Lx;
%Ns = min(Lx,2000); % mô lệnh này nếu muốn hạn chế
% số lượng mẫu phổ
Sxx = (abs(fft(x(1:Ns))).^2)/Ns; % tuần hoàn đồ
```

Bởi vì $x_{\text{sach}}(n)$ là điều hòa, phổ công suất lý tưởng là

$$S_{xx}(\nu) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k^2}{4} [\delta(\nu + \nu_k) + \delta(\nu - \nu_k)], \quad (4.35)$$

như được minh họa trong Hình 4.4.



Hình 4.4 Minh họa phổ tín hiệu điều hòa.

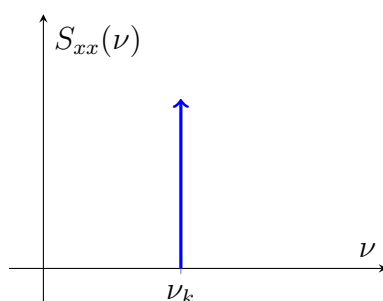
Ta không thể dùng MATLAB để tính $\delta(\nu - \nu_k)$. Tuy nhiên, dựa vào tín hiệu sạch $x_{\text{sạch}}(n)$ tạo ra, ta có thể xấp xỉ $S_{xx}(\nu)$ lý tưởng bằng phổ của tín hiệu sạch

$$S_{xx}^{\text{sạch}}(\nu) = \frac{1}{N_s} \left| \sum_{n=0}^{N_s-1} x_{\text{sạch}}(n) e^{-jn2\pi\nu} \right|^2,$$

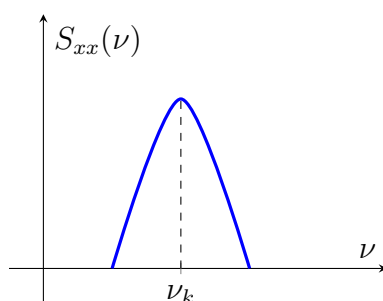
trong đó N_s là chiều dài do ta chọn để tính $S_{xx}^{\text{sạch}}(\nu)$. Nếu $N_s \nu_k$ đều là số nguyên, tất cả K tần số ν_k đều trùng với một điểm tọa độ $m\Delta f = m/N_s$ của trục hoành của FFT, ta sẽ có chính xác K vạch tương ứng với ν_K trong biểu diễn của phổ công suất $S_{xx}^{\text{sạch}}(\nu)$. Nếu có một tần số ν_k sao cho $N_s \nu_k$ không phải là một số nguyên, ta có hiện tượng **chảy phổ** hay **tràn phổ** (spectral leakage), tức là xung Dirac sẽ trở thành một xung có chiều rộng khác không, như minh họa trong Hình 4.5. Chúng ta sẽ quay lại trao đổi kỹ hơn về hiện tượng chảy phổ khi làm thí nghiệm.

Chương trình hàm tạo tín hiệu ARMA

Tín hiệu ARMA, bao gồm phần tự hồi quy (AR: autoregressive) và phần trung bình trượt (MA: moving average), được tạo ra bởi chương trình MATLAB `thARMA.m` như mô tả dưới đây.



(a) Lý tưởng



(b) Chạy phổ

Hình 4.5 Hiện tượng chạy phổ

Chương trình 4.2 thARMA.m

```
function [x,Sxx] = thARMA(b,a,Lx,SNRdB)

%% TAO TIN HIEU ARMA
%
% [x,Sxx] = thARMA(b,a,Lx,SNRdB)
%
% Chon cac thong so de tao tin hieu ARMA chua Q tri
% khong va P tri cuc. Ta co the thay doi 2 vec-to
% hang
% b = [b0 b1 ... bQ] va a = [1 a1 ... aP]
% cua ham chuyen
%      b0 + b1*z^(-1) + ... + bQ*z^(-Q)
% H(z) = -----
%      1 + a1*z^(-1) + ... + aP*z^(-P)
% ma ta dung de tao nhung tap du lieu khac nhau,
% bang cach kích thích H(z) voi mot nhieu trang o
% dau vao. Dau ra cua H chinh la tin hieu sach ARMA
% ta muon tao ra. Lx la chieu dai cua tin hieu va
```

```

% SNRdB là tỷ lệ tín hiệu trên nhiễu theo đơn vị (dB).

% Giao trình: Xử lý tín hiệu ngẫu nhiên
% NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025
% Nguyễn Linh Trung, Huỳnh Hữu Tuấn
% =====
%%

% Tạo tín hiệu sạch (quan sát chính xác)
xsach = filter(b,a,randn(1,Lx));

% Tạo tín hiệu quan sát, có sai số là nhiễu cộng
S = mean(xsach.^2); % Công suất tín hiệu
N0 = S*(10^(-.1*SNRdB)); % Công suất nhiễu
sigma = sqrt(N0);
x = xsach + sigma*randn(1,Lx);

% Tính Sxx lý tưởng tại Lf tần số chuẩn hóa (nu)
% từ 0 đến 0.5
Lf = 250; % số điểm tần số số góc Wk = k*pi/Lf,
% k = 0,...,Lf-1
H = freqz(b,a,Lf); % Đáp ứng tần số H(W) tại các
% điểm nu = Wk/(2*pi)
Sxx = abs(H).^2;

```

Chạy chương trình hàm trên

```
function [x,Sxx] = thARMA(b,a,Lx,SNRdB)
```

có đầu vào là các vector hệ số b và a , chiều dài Lx của chuỗi dữ liệu x ta muốn tạo ra và tỷ lệ tín hiệu trên nhiễu $SNRdB$ (theo thang dB). Đầu ra thứ nhất của chương trình là x , chính là tín hiệu đầu ra của hệ thống tuyến tính bất biến có hàm truyền

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}}, \quad (4.36)$$

khi kích thích hệ thống bằng một tín hiệu nhiễu trắng. Lúc hệ thống đạt trạng thái ổn định, đầu ra là một tín hiệu ngẫu nhiên dừng mở rộng. Đặt

$$a = [1 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_P] \quad (4.37)$$

$$b = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_Q] \quad (4.38)$$

Với đầu vào hệ thống là nhiễu Gauss trắng, được tạo bởi `randn(1,Lx)`, đầu ra hệ thống là tín hiệu quan sát ARMA x có chứa nhiễu cộng với phương sai là σ^2 và được tạo bởi các dòng lệnh MATLAB sau:

```
% Tao tin hieu sach (quan sat chinh xac)
xsach = filter(b,a,randn(1,Lx));

% Tao tin hieu quan sat, co sai so la nhieu cong
S = mean(xsach.^2); % Cong suat tin hieu
NO = S*(10^(-.1*SNRdB)); % Cong suat nhieu
sigma = sqrt(NO);
x = xsach + sigma*randn(1,Lx);
```

Chú ý là ta dùng một quá trình Gauss trắng ở đầu vào cho nên chuỗi đầu ra $\{x(n)\}$ cũng là một tín hiệu Gauss.

Chương trình cho đầu ra thứ hai là mật độ phổ công suất $S_{xx}(\omega)$ (**Sxx**) của chuỗi dữ liệu $\{x(n)\}$ (**x**). Khác với chương trình tạo tín hiệu điều hòa thđh.m, ở đây mật độ công suất được tính một cách chính xác, bởi vì

$$S_{xx}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma_I^2 \quad (4.39)$$

trong đó σ_I^2 là công suất của chuỗi nhiễu trắng ở đầu vào. Nếu ta dùng hàm **freqz** của MATLAB để tính S_{xx} thì lưu ý là MATLAB chỉ tính cho ω từ 0 đến π ; khác với S_{xx} ta đã tính cho trường hợp tín hiệu điều hòa đi từ 0 đến 2π . Nếu ta chỉ quan tâm đến khoảng $(0, \pi)$ thì cần loại một nửa phần đuôi của S_{xx} . Ta tính được **Sxx** bằng:

```
% Tinh Sxx ly tuong tai Lf tan so chuan hoa (nu)
% tu 0 den 0.5
Lf = 250; % so diem tan so so goc Wk = k*pi/Lf,
% k = 0,...,Lf-1
H = freqz(b,a,Lf); % Dap ung tan so H(W) tai cac
% diem nu = Wk/(2*pi)
Sxx = abs(H).^2;
```

Nếu ta chỉ tạo tín hiệu AR thì $B(z) = b_0$, lúc đó hàm truyền trở thành

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}}, \quad (4.40)$$

tức là ta chỉ quan tâm đến P trị cực của $H(z)$. Nếu $H(z)$ là một hệ thống thực, tức là các hệ số a_k và b_k đều thực, thì các trị cực phức xuất hiện từng cặp liên hợp:

$$(1 - pz^{-1})(1 - p^*z^{-1}). \quad (4.41)$$

Ta cần hệ thống ổn định nên phải thỏa điều kiện $p = re^{j\theta}$,

$0 < r < 1$. Do đó (4.41) trở thành

$$(1 - 2r \cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}), \quad (4.42)$$

vector a tương ứng là $[1 - 2r \cos(\theta) \ r^2]$. Điều thuận tiện là tích của hai đa thức bậc 2

$$[1 - 2r_1 \cos(\theta)z^{-1} + r_1^2z^{-2}][1 - 2r_2 \cos(\theta)z^{-1} + r_2^2z^{-2}],$$

có thể tính dễ dàng bằng lệnh `conv` trong MATLAB. Vector a tương ứng với tích của hai đa thức này là

$$a = \text{conv}(a_1, a_2), \quad (4.43)$$

với

$$a_1 = [1 \ -2r_1 \cos(\theta_1) \ r_1^2],$$

$$a_2 = [1 \ -2r_2 \cos(\theta_2) \ r_2^2].$$

Như thế, ta có thể tạo ra tín hiệu AR có những tính chất mà ta áp đặt bằng cách dùng r và θ tương ứng. Chẳng hạn, ta muốn x dao động kéo dài thì chọn $r \leq 1$.

Với hai cách tạo tín hiệu điều hòa và ARMA trên đây, ta có thể kiểm soát chiều dài L_x của tín hiệu và tỷ lệ tín trên nhiễu.

Chương trình hàm tạo của số

Của số là cần thiết cho cả phương pháp Bartlett-Welch lẫn phương pháp Blackman-Tukey. Chương trình hàm thứ ba là `cuaso.m` như sau:

Chương trình 4.3 `cuaso.m`

```
function [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lw,kw)

%% TAO CUA SO THONG DUNG
%
% [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lw,kw)
%
% Thông số kw dùng để xác định loại của số nào được
% tạo ra và Lw là chiều dài tương ứng của của số đó.
% Có 5 của số thông dụng và kw tương ứng là Chu nhật
% (kw = 1), Hann (kw = 2), Hamming (kw = 3),
% Blackmann (kw = 4) và Bartlett (kw = 5). Đầu ra
% là tên ở dạng text của của số được chọn txtcs,
% chuỗi giá trị Wd của của số được chọn, hệ số điều
% chỉnh U.
```

```

% Giao trình: Xu ly tin hieu ngau nhien
% NXB Dai hoc Quoc gia Ha Noi, 2025
% Nguyen Linh Trung, Huynh Huu Tue
% =====
%%

N = Lw-1;
nm = 0:N;
M = N-1;

% Tao ma tran Mw chua gia tri 5 cua so thong dung
Mw = [ones(1,N+1); % Chu nhât
      0.5*(1-cos(2*pi*nm/N)); % Hann
      0.54 - 0.46*cos(2*pi*nm/N); % Hamming
      % Blackman
      0.42 - 0.5*cos(2*pi*nm/N) + 0.08*cos(4*pi*nm/N);
      % Bartlett
      (2/N)*[0:N/2,(floor(N/2) - (0.5*N ≤ ...
      floor(0.5*N))):-1:0]];
if kw == 1
    txtcs = ['Chu nhât'];
elseif kw==2
    txtcs = ['Hann'];
elseif kw==3
    txtcs = ['Hamming'];
elseif kw==4
    txtcs = ['Blackman'];
elseif kw==5
    txtcs = ['Bartlett'];
end

Wd = Mw(kw,:); % chuoi gia tri cua so thu kw
U = mean(Wd.^2); % he so dieu chinh cua cua so

```

Đầu vào của chương trình hàm `cuaso.m` là chiều dài (L_w) của cửa sổ và loại (kw) của sổ. Chương trình này dùng 5 cửa sổ: chữ nhật, Hann, Hamming, Blackman và Bartlett. Các cửa sổ được định nghĩa qua ma trận M_w . Hàng $M_w(kw, :)$ cho ta dữ liệu loại của sổ kw cùng với tên tương ứng `txtcs`.

Đầu ra thứ nhất của `cuaso.m` là chuỗi cửa sổ được chọn (W_d). Đầu ra thứ hai là hệ số điều chỉnh U khi dùng cửa sổ:

$$U = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{L_w} W_d^2(k). \quad (4.44)$$

Chương trình hàm phương pháp Bartlett-Welch

Chương trình hàm `ppBW_Sxx.m` dưới đây là phương pháp ước lượng phổ Bartlett-Welch.

Chương trình 4.4 ppBW_Sxx.m

```

function [S_BWdB,txtcs] = ...
    ppBW_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,kw)

%% UOC LUONG PHO VOI PHUONG PHAP BARTLETT-WELCH
%
% [S_BWdB,txt] = ppBW_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,kw)
%
% Voi tap du lieu x cua tin hieu quan sat can uoc
% luong pho, ta da co chieu dai cua tin hieu la Lx.
% Ta chia du lieu thanh cac tap du lieu con, co
% chieu dai la Lb, theo Bartlett. Neu chon Lb = Lx,
% tuc khong chia nho, ta co phuong phap uoc luong
% pho Tuan hoan do. Su dung thong so phantram_Lb
% (tu 0 den 50) cho chieu dai cua phan du lieu
% trung lap, theo Welch. SNRdB la ty le tin tren
% nhieu (dB). Chon cua so thong dung ap vao tin
% hieu quan sat x bang thong so kw cho loai cua so
% va thong so kBT cho chieu dai cua so. Cac cua so
% thong dung la Chu nhat, Hann, Hamming, Blackmann
% va Bartlett, co thong so kw = 1, 2, 3, 4, 5 tuong
% ung. Chương trình cho dau ra la uoc luong pho
% S_BWdB theo phuong phap Bartlett-Welch co don vi
% la dB va ten cua cua so ap dung.
%
% Chương trình nay (ppBW_Sxx) can su dung 3 chương
% trình ham sau:
% tinh cua so de ap vao Rx
% [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lw,kw)
% tao tin hieu dieu hoa x
% [x,Sxx] = thdh(Lx,SNRdB)
% tao tin hieu ARMA x
% [x,Sxx] = thARMA(b,a,Lx,SNRdB)

% Giao trình: Xu ly tin hieu ngau nhien
% NXB Dai hoc Quoc gia Ha Noi, 2025
% Nguyen Linh Trung, Huynh Huu Tue
% =====
%%

% Tinh du lieu cua so Wd va thong so dieu chinh U.
% Wd co chieu dai Lb bang chieu dai tin hieu con.
[Wd,U,txtcs] = cuaso(Lb,kw);

% Ap dung Welch: Cho phep cac tap du lieu con trung
% lap. Tinh so mau du lieu trung lap dd.
dd = phantramLb*Lb/100;
D = floor(Lb-dd);

% Ap dung Bartlett: Chia tap du lieu thanh k tap
% cong va tinh tuan hoan do cua chung
k = 0;
S_hat = zeros(1,Lb);
while k*D ≤ length(x)-Lb

```



```

        xcon = x(k*D+1:k*D+Lb).*Wd; % tin hieu con
                                % thu k+1
        S_hat = S_hat+(abs(fft(xcon)).^2)/Lb;
        k = k+1;
    end

    % Ap dung Bartlett: Uoc luong pho cua tap du
    % lieu x
    S_hat = S_hat/(U*k);
    S_BWdB = 10*log10(S_hat); % theo thang dB

```

Chương trình hàm phương pháp Blackman-Tukey

Tiếp theo là chương trình hàm `ppBT_Sxx.m` cho phương pháp ước lượng phổ Blackman-Tukey.

Chương trình 4.5: `ppBT_Sxx.m`

```

function [S_BTdB,Rx] = ...
    ppBT_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,kw,kBT)

%% UOC LUONG PHO VOI PHUONG PHAP BLACKMAN-TUKEY
%
% [S_BTdB,Rx] = ...
%   ppBT_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,kw,kBT)
%
% Voi tap du lieu x của tín hiệu quan sát cần ước
% lượng phổ, ta đã có chiều dài của tín hiệu là Lx.
% Nếu kết hợp với phương pháp Bartlett, ta chia dữ
% liệu thành các tập dữ liệu con, có chiều dài là
% Lb. Nếu chọn Lb = Lx, tức không chia nhỏ, ta có
% phương pháp ước lượng phổ Tuân hoàn đo. Nếu kết
% hợp thêm Welch, ta sử dụng thông số phantramLb
% (từ 0 đến 50) cho chiều dài của phần dữ liệu
% trung lặp. Nếu đã chọn Lb = Lx, thì phantramLb
% được gán bằng 0. SNRdB là tỷ lệ tín trên nhiễu
% (dB). Chọn của số thông dụng áp vào hàm tu tương
% quan Rx bằng thông số kw cho loại của số và
% thông số kBT cho chiều dài của số. Các của số
% thông dụng là Chu nhất, Hann, Hamming, Blackmann
% và Bartlett, có thông số kw = 1, 2, 3, 4, 5
% tương ứng. Có 2 cách chọn chiều dài kBT của số
% kw áp vào Rx trong phương pháp Blackman-Tukey;
% kBT = 1 cho trường hợp chiều dài của số bằng 1/5
% lần chiều dài của Rx (theo gợi ý của: SM Kay,
% Modern spectrum estimation: Theory and
% application, Prentice-Hall, 1998; trang 81),
% kBT = 2 cho chiều dài bằng chiều dài của Rx.
% Chương trình cho đầu ra là ước lượng phổ S_BTdB
% theo phương pháp Blackman-Tukey có đơn vị là dB
% và ước lượng hàm tu tương quan Rx.
%
% Chương trình này (ppBT_Sxx) cần sử dụng 3 chương
% trình hàm sau:

```

```

% tinh cua so de ap vao Rx
% [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lw,kw)
% tao tin hieu dieu hoa x
% [x,Sxx] = thdh(Lx,SNRdB)
% tao tin hieu ARMA x
% [x,Sxx] = thARMA(b,a,Lx,SNRdB)

% Giao trinh: Xu ly tin hieu ngau nhien
% NXB Dai hoc Quoc gia Ha Noi, 2025
% Nguyen Linh Trung, Huynh Huu Tue
% =====
%%

% Tinh cua so Wd de ap vao ham tu tuong quan Rx
Lr = 2*Lb-1; % chieu dai (so le) cua ham tu tuong
% quan Rx
if kBT == 1 % tao cua so co chieu dai bang 1/5
% cua Rx
Lw = floor(Lr/5);
Lw = Lw + (floor(Lw/2) == Lw/2); % Lw la so le
[Wd,U] = cuaso(Lw,kw); % tao cua so loai kw
D0 = .5*(Lr-1) + 1; % vi tri dinh cua Rx
d0 = .5*(Lw-1) + 1; % vi tri dinh cua cua so Wd
D0d0 = D0 - d0; % khoang cach giua 2 dinh
% Them chuoai 0 vao Wd sao cho Wd co cung chieu
% dai voi Rx va co dinh trung voi dinh cua Rx
Wd = [zeros(1,D0d0),Wd,zeros(1,D0d0)];
elseif kBT == 2 % tao cua so co cung chieu dai
% voi Rx
[Wd, U, txtcs] = cuaso(Lr,kw);
end

% Ap dung them Welch: Cho phep cac tap du lieu con
% trung lap. Xac dinh so mau du lieu trung lap dd
% giua 2 tap con lien ke.
if Lb == size(x) % Lb = Lx, khong ap dung Bartlett
phantramLb = 0;
end
dd = phantramLb*Lb/100; % dau vao phantramLb = 0-50
D = floor(Lb-dd); % du lieu khong trung lap

% Ap dung Blackman-Tukey: Tinh uoc luong pho cua
% moi tap du lieu con bang cách lấy biến đổi
% Fourier (FFT) của uoc luong của ham tu tuong
% quan Rx của tap du lieu con. Trong đó, ta có áp
% dụng thêm Bartlett, chia tap du lieu x thành k
% tap con.
S_BT = zeros(1,Lr);
k = 0;
while k*D ≤ length(x)-Lb
% Tao tap du lieu con thu k, k*D+1 la diem
% bat dau
X = x(k*D+1:k*D+Lb);
% Uoc luong ham tu tuong quan của X
Rx = conv(X,X(end:-1:1))/length(X);

```

```

% Uoc luong pho bang FFT cua Rx, co ket hop
% cua so
R_hat = Rx.*Wd;
S_BT = S_BT+abs(fft(R_hat));
k = k+1;
end

% Ap dung them Bartlett: Uoc luong pho cua tap du
% lieu x
S_BT = S_BT/k;
S_BTdB = 10*log10(S_BT); % theo thang dB

```

Chương trình này có cùng đầu vào với `ppBW_Sxx.m`, ước lượng phổ theo phương pháp Bartlett-Welch, ngoại trừ có thêm thông số `kBT`

```

function [S_BTdB,Rx] = ...
    ppBT_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,kw,kBT)

```

Đầu vào gồm dữ liệu quan sát x , chiều dài tín hiệu con `Lb`, số phần trăm tái sử dụng của hai tín hiệu con liền kề nhau `phantramLb` (≤ 50), loại cửa sổ dùng để điều chỉnh dữ liệu `kw` (`kw` = 1, 2, ..., 5) và chiều dài `kBT` của cửa sổ dùng để điều chỉnh ước lượng hàm tự tương quan, $\hat{R}_{XX}(n)$, trong phương pháp Blackman-Tukey, tỷ lệ tín hiệu trên nhiễu `SNRdB`. Chọn `kBT` = 1 để cửa sổ có chiều dài bằng $1/5$ lần chiều dài của ước lượng tự tương quan, chọn `kBT` = 2 để có cửa sổ dài bằng ước lượng tự tương quan.

Đầu ra của chương trình hàm là ước lượng mật độ phổ bằng phương pháp Blackman-Tukey và tên của cửa sổ ta sử dụng `txtcs`. Trong chương trình này, ta có kết hợp cả phương pháp Bartlett để chia nhỏ tín hiệu nếu cho đầu vào `Lb` < `Lx` và cả phương pháp Welch để cho phép các tín hiệu con trùng lặp bằng chọn đầu vào `phantramLb` > 0.

Chương trình lệnh so sánh Bartlett-Welch và Blackman-Tukey

Chương trình chính cuối cùng là chương trình lệnh có tên là `sosanh_BW_BT.m`.

Chương trình 4.6 sosanh_BW_BT.m

```

%% SO SANH UOC LUONG PHO BARTLETT-WELCH VA
% BLACKMAN-TUKEY
%
% Chuong trinh co 2 goi y (prompt) yeu cau ta nhap
% loai tin hieu quan sat x (thong so th) va cach

```

```

% tính chiều dài của số dung để điều chỉnh ước
% lượng tu tương quan Rx trong phương pháp
% Blackman-Tukey (thông số kBT). Ta chọn th = 1 để
% thí nghiệm với tín hiệu điều hòa, hoặc th = 2 với
% tín hiệu ARMA. Chọn kBT = 1 nếu muốn của số dài
% bằng 1/5 Rx (theo gợi ý của Stephen M. Kay,
% Modern spectral estimation: Theory and
% application, Prentice-Hall, 1998, trang 81)
% hoặc kBT = 2 nếu muốn của số dài bằng Rx. Các
% thông số còn lại khác đã được chọn sẵn trong
% chương trình. Tín hiệu quan sát x có chiều dài
% Lx, có sai số quan sát do nhiễu cộng với tỷ lệ
% tín hiệu nhiễu theo đơn vị dB là SNRdB. Nếu ta
% muốn tín hiệu sạch (không có nhiễu quan sát),
% chọn giá trị đủ lớn của SNRdB (chẳng hạn SNRdB
% = 1000), tương đương với SNR = vô hạn. Chia nhỏ
% x thành các tín hiệu con có chiều dài Lb (phương
% pháp Bartlett-Welch). Thông số phantram_Lb (có
% giá trị từ 0 đến 50) xác định phân độ liệu trung
% lập giữa hai tín hiệu con liên tiếp. Của số điều
% chỉnh tín hiệu con là loại của số kw, có chiều
% dài Lb; kw = 1 (Chu nhật), 2 (Hann), 3 (Hamming),
% 4 (Blackmann) và 5 (Bartlett). Ta cung cấp thông
% số kw cho loại của số điều chỉnh ước lượng tu
% tương quan Rx trong phương pháp Blackman-Tukey;
% lúc đó chiều dài Rx là 2*Lb-1.
%
% Chương trình lệnh này (sosanh_BW_BT) sử dụng thêm
% 5 chương trình hàm sau:
%   [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lw,kw)
%   [x,Sxx] = thdh(A,fnu,Lx,SNRdB)
%   [x,Sxx] = thARMA(a,b,Lx,SNRdB)
%   [S_BWdB,SxxdB] = ...
%   ppBW_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,th,kw)
%   [S_BTdB,SxxdB] = ...
%   ppBT_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,th,kw,kBT)

% Giao trình: Xử lý tín hiệu ngẫu nhiên
% NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025
% Nguyễn Linh Trung, Huỳnh Hữu Tue
% =====
%%

%% Phan I. Nhập dữ liệu và tạo tín hiệu {x(n)}
% Tín hiệu {x(n)} có chiều dài Lx với SNRdB cho
% trước. Chú ý sự khác biệt giữa thang trục hoành,
% cho tần số số nu của Sxx, của tín hiệu điều hòa
% và tín hiệu ARMA.

% Nhập thông tin đầu vào cho th và kBT
th = input('Chọn tín hiệu ta muốn phân tích (th ...
           = 1 là điều hòa, th = 2 là ARMA): th = ');
kBT = input('Chọn chiều dài của số điều chỉnh ...
            ước lượng tu tương quan Rx (kBT = 1 là dài ...
            bằng 1/5 Rx, = 2 là dài bằng Rx): kBT = ');

```

```

% Chon chieu dai tin hieu
Lx = 200000; % 200, 500, 1000, 10000, 20000, ...

% Chon chieu dai tin hieu con
Lb = 200; % 200, 256, 500, 1000, 5000
phantramLb = 50; % 0-50%: trung lap giua 2 tin
% hieu con

% Nhieu quan sat
%SNRdB = 1000; % khong co nhieu
%SNRdB = 10; % co it nhieu
SNRdB = 0; % co nhieu tuong duong tin hieu
%SNRdB = -10; % co nhieu lon hon tin hieu

% Chon loai cua so
%kw = 1; cuaso = ['Chu nhat'];
kw = 2; cuaso = ['Hann'];
%kw = 3; cuaso = ['Hamming'];
%kw = 4; cuaso = ['Blackman'];
%kw = 5; cuaso = ['Bartlett'];

% Chon loai va tao tin hieu dung de thi nghiem.
% Chuong trinh co 2 loai tin hieu: dieu hoa va
% ARMA. Voi loai dieu hoa, ta xet 2 truong hop: co
% 1 tan so (hinh sin) va co 3 tan so. Voi loai
% ARMA, xet 2 truong hop: co pho chua 3 dinh (de so
% sanh voi truong hop tin hieu dieu hoa co 3 tan
% so), co pho thong thap. Tin hieu nao khong dung
% thi khoa cac lenh lien quan.
if th == 1 % tin hieu dieu hoa
    % Tin hieu hinh sin
    A = 1;
    % fnu = 0.123;
    % Tin hieu dieu hoa chua 3 tan so
    A = [1 1 1]';
    fnu = [0.1 0.12345 0.2]';
    [x,Sxx] = thdh(A,fnu,Lx,SNRdB); % tao tin hieu
    txt = ['dieu hoa'];
elseif th == 2 % tin hieu ARMA
    % Tin hieu ARMA co pho chua 3 dinh
    b = 1;
    % a = [1.0000 -2.1248 2.2574 -1.7883 2.2125 ...
    -2.0411 0.9415];
    % Tin hieu ARMA co pho thong thap
    b = [0.0464 0.1829 0.2572 0.1549];
    a = [1 -0.8664 0.6630 -0.1514];
    txt = ['ARMA'];
    [x,Sxx] = thARMA(b,a,Lx,SNRdB); % tao tin hieu
end
SxxdB = 10*log10(Sxx);

%% Phan II: Uoc luong pho cong suat bang 2 phuong
% phap: Bartlett-Welch va Blackman-Tukey

% Phuong phap Bartlett-Welch

```

```

S_BWdB = ppBW_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,kw);
nBW = 1:length(S_BWdB)/2;
tBW = (nBW-1)/length(S_BWdB);

% Phương pháp Blackman-Tukey (có sử dụng thêm Welch)
S_BTdB = ppBT_Sxx(x,Lb,phantramLb,SNRdB,kw,kBT);
nBT = 1:length(S_BTdB)/2;
tBT = (nBT-1)/length(S_BTdB);

if th == 1 % tín hiệu điều hòa
    nSx = 1:length(SxxdB)/2;
    tSx = (nSx-1)/length(SxxdB);
elseif th==2 % tín hiệu ARMA
    nSx = 1:length(SxxdB);
    tSx = .5*(nSx-1)/length(SxxdB);
end

%% Phần III: Hiện thị kết quả, qua 2 đồ thị. Đồ thị
% 1 biểu diễn riêng lẻ 3 phổ mật độ công suất:
% chính xác (không có nhiễu), lấy trực tiếp từ
% chương trình tạo tín hiệu), ước lượng theo
% Bartlett-Welch, ước lượng theo Blackman-Tukey.
% Đồ thị 2 gộp cả ba phổ trong đồ thị 1 để so
% sánh.

% Đồ thị 1
figure
subplot(311);
plot(tSx,SxxdB(nSx),'k','linewidth',1.2);
legend('Chính xác')
xlabel('Tần số chuẩn hóa \nu')
ylabel('Phổ công suất (dB)')
if th == 1
    title(['Ước lượng phổ công suất bằng ...',
           'Bartlett-Welch và Blackman-Tukey'])
    ['tín hiệu = ',txt,'; Lx = ', ...
     num2str(Lx),'; Lb = ', num2str(Lb), ...
     '; phantramLb = ', ...
     num2str(phantramLb),'; SNR = ', ...
     num2str(SNRdB),' dB']
    ['của số ', cuaso,'; \nu = ...',
     num2str(fnu),'']
else
    title(['Ước lượng phổ công suất bằng 2 ...',
           'phương pháp Bartlett-Welch và ...',
           'Blackman-Tukey'])
    ['tín hiệu = ',txt,'; Lx = ', ...
     num2str(Lx),'; Lb = ', num2str(Lb), ...
     '; phantramLb = ', ...
     num2str(phantramLb),'; SNR = ', ...
     num2str(SNRdB),' dB']
    ['của số ', cuaso]}
end
subplot(312);
plot(tBW,S_BWdB(nBW),'b','linewidth',1.5);

```

```

xlabel('Tan so chuan hoa \nu')
ylabel('Pho cong suat (dB)')
legend('Bartlett-Welch')
subplot(313);
plot(tBT,S_BTdB(nBT),'r','linewidth',1.5);
if kBT == 1
    legend('Blackman-Tukey; Lw = Lr/5')
elseif kBT == 2
    legend('Blackman-Tukey; Lw = Lr')
end
xlabel('Tan so chuan hoa \nu')
ylabel('Pho cong suat (dB)')

% Do thi 2
figure
plot(tSx,SxxdB(nSx),'k:','linewidth',1.5);
hold
plot(tBW,S_BWdB(nBW),'b-.','linewidth',1.5);
    tBT,S_BTdB(nBT),'r-','linewidth',1.5);
hold
if kBT == 1
    legend(['Chinh xac'], ['Bartlett-Welch'], ...
        ['Blackman-Tukey; Lw = Lr/5'])
else
    legend(['Chinh xac'], ['Bartlett-Welch'], ...
        ['Blackman-Tukey; Lw = Lr'])
end
if th == 1
    title(['Uoc luong pho cong suat tin hieu ', ...
        txt, ' bang Bartlett-Welch va ...
        Blackman-Tukey']
        ['Lx = ', num2str(Lx), '; Lb = ', ...
        num2str(Lb), '; phantramLb = ', ...
        num2str(phantramLb), '; SNR = ', ...
        num2str(SNRdB), ' dB', '; cua so ', ...
        cuaso]
        ['tan so: \nu = ', num2str(fnu), ''])
else
    title(['Uoc luong pho cong suat tin hieu ', ...
        txt, ' bang Bartlett-Welch va ...
        Blackman-Tukey']
        ['Lx = ', num2str(Lx), '; Lb = ', ...
        num2str(Lb), '; phantramLb = ', ...
        num2str(phantramLb), '; SNR = ', ...
        num2str(SNRdB), ' dB', '; cua so ', ...
        cuaso])
end
xlabel('Tan so chuan hoa \nu')
ylabel('Pho cong suat (dB)')

```

Ta dùng chương trình này để so sánh các ước lượng phổ tuần hoàn đồ, phương pháp Blackman-Tukey và cả hai đều có thể kết hợp với Welch.

Bởi vì ta muốn xét trước tiên chất lượng của phương pháp tuần hoàn đồ, ta viết 3 chương trình phụ đơn giản, sử dụng những lệnh và cấu trúc của các chương trình trên để so sánh phổ ước lượng có tần số thay đổi, chiều dài tuần hoàn đồ thay đổi và SNR thay đổi.

Chương trình lệnh đánh giá ảnh hưởng của nhiễu lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa

Chương trình phụ thứ nhất THD_SNR_dh.m là chương trình lệnh, dùng để đánh giá ảnh hưởng của nhiễu quan sát lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa. Chương trình đã chứa đựng các thông số cần thiết. Ta cố định chiều dài L_b và tần số chuẩn hóa ν của tín hiệu, loại của số (chữ nhật, Hann, Hamming, Blackman, hay Bartlett). Đầu ra là kết quả phụ thuộc vào SNR. Lúc không có nhiễu quan sát, $\text{SNR} = \infty$.

Chương trình 4.7 THD_SNR_dh.m

```
%% ANH HUONG CUA NHIEU QUAN SAT LEN TUAN HOAN DO
% CUA TIN HIEU DIEU HOA
%
% Tinh va bieu dien Tuan hoan do cua mot tin hieu
% dieu hoa. Ta co dinh chieu dai Lb, tan so chuan
% hoa fnu cua tin hieu, loai cua so, thay doi ty le
% tin tren nhieu SNRdB (theo thang dB). Trong
% truong hop khong co nhieu quan sat (SNRdB = vo
% cuc), chon gia tri du lon (nhu SNRdB = 1000).

% Giao trinh: Xu ly tin hieu ngau nhien
% NXB Dai hoc Quoc gia Ha Noi, 2025
% Nguyen Linh Trung, Huynh Huu Tue
% =====
%%

% Chon mot trong hai tin hieu dieu hoa: co 1 tan so
% (hinh sin) va co 3 tan so. Khoa cac dong lenh cua
% tin hieu khong chon.
A = 1; % Tin hieu dieu hoa 1 tan so (hinh sin)
fnu = .121;
%A = [1 0 1]'; % Tin hieu dieu hoa 3 tan so
%fnu = [.1 .121 .2]';
Lb = 500; % chieu dai tin hieu (= chieu dai cua so)

% Chon cac muc SNRdB de danh gia anh huong cua
% nhieu quan sat: nhieu lon, nhieu tuong duong tin
% hieu, nhieu it, khong co nhieu.
SNRdBall = [-10 10 0 1000];

% Chon loai cua so
```



```

kw = 1; % của so Chu nhat
%kw = 2; % của so Hann
%kw = 3; % của so Hamming
%kw = 4; % của so Blackman
%kw = 5; % của so Bartlett

%% Uoc luong pho bang Tuan hoan do, hien thi
% ket qua
figure
nn = 0:Lb/2;
nt = nn/Lb;
for k = 1:length(SNRdBall)
    % Tinh thong so nhieu
    SNRdB = SNRdBall(k);
    S = sum(A.^2)/2;
    NO = S*10^(-SNRdB/10);
    sigma = sqrt(NO);

    % Tao tin hieu quan sat co nhieu cong
    xsach = sum([diag(A)*cos(2*pi*fnu*(0:Lb-1) + ...
        2*pi*rand(length(A),1)); zeros(1,Lb)]);
    x = xsach + sigma*randn(1,Lb);

    % Tinh du lieu của so
    [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lb,kw);

    % Tinh tuan hoan do
    Pxx = (abs(fft(x.*Wd).^2))/(U*Lb);
    PxxdB = 10*log10(Pxx);
    % Hien thi ket qua
    subplot(2,2,k);
    plot(nt,PxxdB(1+nn));
    axis([0 .5 min(PxxdB)-10 max(PxxdB)+10])
    xlabel('Tan so chuan hoa, \nu')
    ylabel('Tuan hoan do, S_{xx} (dB)')
    SNRstr = [num2str(SNRdBall(k)) ' dB'];
    if SNRdB > 1000
        SNRstr = '\infty';
    end
    legend(['SNR = ', SNRstr])
    if length(A) == 1
        title(['Tuan hoan do Pxx (dB) của tin ...
            hieu hình sin co tan so']
            ['\nu = ', num2str(fnu(1)), '; Lb = ...
            ', num2str(Lb), '; của so ', ...
            txtcs]))
    else
        title(['Tuan hoan do Pxx (dB) của tin ...
            hieu dieu hoa co 3 tan so']
            ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', ', ...
            num2str(fnu(2)), ', ', ...
            num2str(fnu(3)), '; Lb = ', ...
            num2str(Lb), '; của so ', txtcs]))
    end
end
end

```

Chương trình lệnh đánh giá ảnh hưởng của chiều dài tín hiệu lên tuân hoàn đồ của tín hiệu điều hòa

Chương trình phụ thứ hai là THD_Lb_dh.m, cho ta kết quả phụ thuộc vào chiều dài L_b của tín hiệu. Cũng như trong chương trình phụ THD_SNR_dh.m ở trên, tất cả các thông số cần thiết đã được đưa vào trước khi chạy chương trình. Ta cố định tần số ν , SNR, cũng như loại cửa sổ điều chỉnh tín hiệu.

Chương trình 4.8 THD_Lb_dh.m

```
%% ANH HUONG CUA CHIEU DAI TIN HIEU LEN
% TUAN HOAN DO
%
% Tinh va bieu dien Tuan hoan do cua mot tin hieu
% dieu hoa. Ta co dinh tan so fnu cua tin hieu va
% ty le tin tren nhieu SNRdB, thay doi chieu dai Lb
% cua tin hieu. Trong trường hợp không có nhiều
% quan sát (SNRdB = vô cực), chọn giá trị đủ lớn
% (như SNRdB = 1000).

% Giao trình: Xu ly tin hieu ngau nhien
% NXB Dai hoc Quoc gia Ha Noi, 2025
% Nguyen Linh Trung, Huynh Huu Tue
% =====
%%

% Chon mot trong hai tin hieu dieu hoa: co 1 tan so
% (hinh sin) va co 3 tan so. Khoa cac dong lenh cua
% tin hieu không chọn.
% A = 1; % Tin hieu dieu hoa 1 tan so (hinh sin)
% fnu = .121;
A = [1 1 1]'; % Tin hieu dieu hoa 3 tan so
fnu = [.1 121 .2]';
% Chon cac chieu dai tin hieu can danh gia
Lb_all = [100 500 1000 1500];

% Chon loai cua so
%kw = 1; % cua so Chu nhat
kw = 2; % cua so Hann
%kw = 3; % cua so Hamming
%kw = 4; % cua so Blackman
%kw = 5; % cua so Bartlett

% Tinh thong so nhieu
SNRdB = -10;
S = sum(A.^2)/2;
NO = S*10^(-SNRdB/10);
sigma = sqrt(NO);
SNRstr = [num2str(SNRdB) ' dB'];
if SNRdB ≥ 1000
    SNRstr = '\infy';
end
```

```

%% Uoc luong pho bang Tuan hoan do, hien thi
% ket qua
figure
%Lbb = Lb_all(1:2); % chon 2 chieu dai trong Lb_all
Lbb = Lb_all(3:4); % chon 2 chieu dai trong Lb_all

for k = 1:length(Lbb) % cho 2 chieu dai khac nhau
    % Tao tin hieu quan sat co nhieu cong
    Lb = Lbb(k);
    xsach = sum([diag(A)*cos(2*pi*fnu*(0:Lb-1) + ...
        2*pi*rand(length(A),1)); zeros(1,Lb)]);
    x = xsach + sigma*randn(1,Lb);

    % Tinh du lieu cua so
    [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lb,kw);

    % Tinh tuan hoan do
    nn = 0:Lb/2;
    nt = nn/Lb;
    Pxx = (abs(fft(x.*Wd).^2))/(U*Lb);
    PxxdB = 10*log10(Pxx);

    % Hien thi ket qua theo thang tuyến tính
    subplot(length(Lbb),2,2*k-1);
    plot(nt,Pxx(1+nn));
    axis([0 .5 min(Pxx)-5 max(Pxx)+5])
    xlabel('Tan so chuan hoa, \nu')
    ylabel('Tuan hoan do, P_{xx}')
    legend(['Lb = ', num2str(Lb)])
    if length(A) == 1
        title(['Tuan hoan do Pxx cua tin hieu ...
            hinh sin co tan so']
            ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', SNR = ...
            ', SNRstr, ', cua so ', txtcs]))
    else
        title(['Tuan hoan do Pxx cua tin hieu ...
            dieu hoa co 3 tan so']
            ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', ', ...
            num2str(fnu(2)), ', ', ...
            num2str(fnu(3)), ', SNR = ', ...
            SNRstr, ', cua so ', txtcs]))
    end

    % Hien thi ket qua theo thang dB
    subplot(length(Lbb),2,2*k);
    plot(nt,PxxdB(1+nn));
    axis([0 .5 min(PxxdB)-10 max(PxxdB)+10])
    xlabel('Tan so chuan hoa, \nu')
    ylabel('Tuan hoan do, P_{xx} (dB)')
    legend(['Lb = ', num2str(Lb)])
    if length(A) == 1
        title(['Tuan hoan do Pxx (dB) cua tin ...
            hieu hinh sin co tan so'])
    end
end

```

```

        ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', SNR = ...
        ', SNRstr, '; của số ', txtcs]])
    else
        title(['Tuan hoan do Pxx (dB) của tín ...
        hiệu điều hòa có 3 tần số'])
        ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', ', ...
        num2str(fnu(2)), ', ', ...
        num2str(fnu(3)), ', SNR = ', ...
        SNRstr, '; của số ', txtcs]])
    end
end
end

```

Chương trình lệnh đánh giá ảnh hưởng của loại của số lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa

Chương trình phụ thứ ba và cuối cùng là chương trình lệnh THD_cuaso.m mà ta sẽ đề cập đến lúc xét hiện tượng chảy phổ trong phần thí nghiệm.

Chương trình 4.9 THD_cuaso.m

```

%% ANH HUONG CUA LOAI CUA SO LEN TUAN HOAN DO
%
% Tính và vẽ tuần hoàn đồ của một tín hiệu điều
% hòa. Ta có định tần số chuẩn hóa fnu và tỷ lệ
% tín trên nhiễu SNRdB (theo thang dB), thay đổi
% chiều dài của số Lb.

% Giao trình: Xử lý tín hiệu ngẫu nhiên
% NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025
% Nguyễn Trung, Huỳnh Hữu Tue
% =====
%%

% Chọn một trong hai tín hiệu điều hòa: có 1 tần số
% (hình sin) và có 3 tần số. Khoa các dòng lệnh của
% tín hiệu không chọn.
A = 1; % Tín hiệu điều hòa 1 tần số (hình sin)
fnu = .121;
%A = [1 1 1]'; % Tín hiệu điều hòa 3 tần số
%fnu = [.1 .121 .2]';
Lb = 500; % chiều dài tín hiệu (= chiều dài của số)

% Tính thông số nhiễu
SNRdB = 10;
S = sum(A.^2)/2;
NO = (S*10^(-SNRdB/10));
sigma = sqrt(NO);
SNRstr = [num2str(SNRdB) ' dB'];
if SNRdB >= 1000
    SNRstr = '\infty';
end

```

```

% Chon cac loai cua so
%kw = 1; % cua so Chu nhac
%kw = 2; % cua so Hann
%kw = 3; % cua so Hamming
%kw = 4; % cua so Blackman
%kw = 5; % cua so Bartlett
kww = [1 2];
%kww = [1 5];

%% Tinh va hien thi tuan hoan do theo cac loai
% cua so
figure
for k = 1:length(kww) % cac loai cua so quan tam
    % Tao tin hieu quan sat co nhieu cong
    xsach = sum([diag(A)*cos(2*pi*fnu*(0:Lb-1) + ...
        2*pi*rand(length(A),1)); zeros(1,Lb)]);
    x = xsach + sigma*randn(1,Lb);

    % Tinh du lieu cua so
    [Wd,U,txtcs] = cuaso(Lb,kww(k));

    % Tinh tuan hoan do
    Pxx = (abs(fft(x.*Wd).^2))/(U*Lb);
    PxxdB = 10*log10(Pxx);

    % Hien thi tuan hoan do theo thang tuyen tinh
    nn = 0:Lb/2;
    nt = nn/Lb;
    subplot(length(kww),2,2*k-1);
    plot(nt,Pxx(1+nn));
    axis([0 .5 min(Pxx)-5 max(Pxx)+5])
    xlabel('Tan so chuan hoa, \nu')
    ylabel('Tuan hoan do, Pxx')
    legend(['Cua so = ', txtcs])
    if length(A) == 1
        title(['Tuan hoan do Pxx cua tin hieu ...
            hinh sin co tan so']
            ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', Lb = ...
            ', num2str(Lb), ', SNR = ', ...
            SNRstr]))
    else
        title(['Tuan hoan do Pxx cua tin hieu ...
            dieu hoa co 3 tan so']
            ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', ', ...
            num2str(fnu(2)), ', ', ...
            num2str(fnu(3)), ', Lb = ', ...
            num2str(Lb), ', SNR = ', SNRstr]))
    end

    % Hien thi tuan hoan do theo thang dB
    subplot(length(kww),2,2*k);
    plot(nt,PxxdB(1+nn));
    axis([0 .5 min(PxxdB)-10 max(PxxdB)+10])
    xlabel('Tan so chuan hoa, \nu')
    ylabel('Tuan hoan do, P_{xx} (dB)')

```

```

legend(['Cua so = ', txtcs])
if length(A) == 1
    title(['Tuan hoan do Pxx (dB) cua tin ...
          hieu hinh sin co tan so'])
    ['\nu = ', num2str(fnu(1)), '; Lb = ...
     ', num2str(Lb), '; SNR = ', ...
     SNRstr])
else
    title(['Tuan hoan do Pxx (dB) cua tin ...
          hieu dieu hoa co 3 tan so'])
    ['\nu = ', num2str(fnu(1)), ', ...
     num2str(fnu(2)), ', ...
     num2str(fnu(3)), '; Lb = ', ...
     num2str(Lb), '; SNR = ', SNRstr])
end
end

```

4.6.3 Tuần hoàn đồ của tín hiệu hình sin

Trong thí nghiệm này, ta sẽ phân tích ảnh hưởng của chiều dài L_b lên tuần hoàn đồ của tín hiệu hình sin được cho như sau:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0).$$

Lấy mẫu tín hiệu $x(t)$ với vận tốc f_S , với điều kiện $f_S > 2f_0$, để có tín hiệu theo thời gian rời rạc

$$x(n) = A \cos(2\pi n \frac{f_0}{f_S} + \varphi_0).$$

Đặt $\nu_0 = f_0/f_S$, ν_0 là tần số chuẩn hóa (hay tần số số); như vậy $0 \leq \nu_0 \leq 0,5$. Tín hiệu theo thời gian rời rạc $x(n)$, cũng gọi là tập dữ liệu $\{x(n)\}$, được biểu diễn là

$$x(n) = A \cos(n2\pi\nu_0 + \varphi_0), \quad n = 0, \dots, L_b - 1. \quad (4.45)$$

Bởi vì ta chỉ quan tâm đến tuần hoàn đồ $P_{xx}(\omega)$ của $\{x(n)\}$ nên chỉ tập trung vào tập dữ liệu $\{x(n)\}$ mà không quan tâm đến tần số f_0 và vận tốc lấy mẫu f_S .

Nhắc lại rằng, tuần hoàn đồ được cho bởi

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{L_b} \left| \sum_{n=0}^{L_b-1} x(n) e^{-jn\omega} \right|^2. \quad (4.46)$$

Ngoài ra, $P_{xx}(\omega)$ hoàn toàn xác định bởi

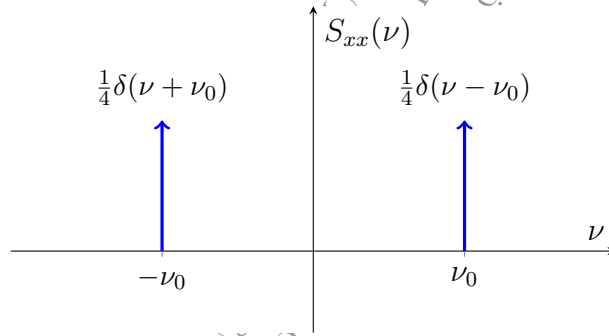
$$\begin{aligned} P_{xx}(k) &= P_{xx}(\omega) \Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{L_b}} = \frac{1}{L_b} |\text{FFT} \{x(n)\}|^2 \\ &= \frac{1}{L_b} \left| \sum_{n=0}^{L_b-1} x(n) e^{-jnk\frac{2\pi}{L_b}} \right|^2, \quad k = 0, \dots, L_b - 1. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Trường hợp không có nhiễu quan sát

Tín hiệu hình sin $x(n) = \cos(2\pi\nu_0 n + \varphi)$, $n = 0, 1, \dots, L_b - 1$, có tần số $\nu_0 = 0,121$, có pha φ bất kỳ. Ta tính tuần hoàn đồ của $\{x(n)\}$ cho 4 chiều dài $L_b = 100, 500, 1000, 1500$.

Hàm mật độ công suất lý thuyết của $x(n)$ có dạng sau và được mô tả trong Hình 4.6:

$$S_{xx}(\nu) = \frac{1}{4} \delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{4} \delta(\nu + \nu_0). \quad (4.48)$$

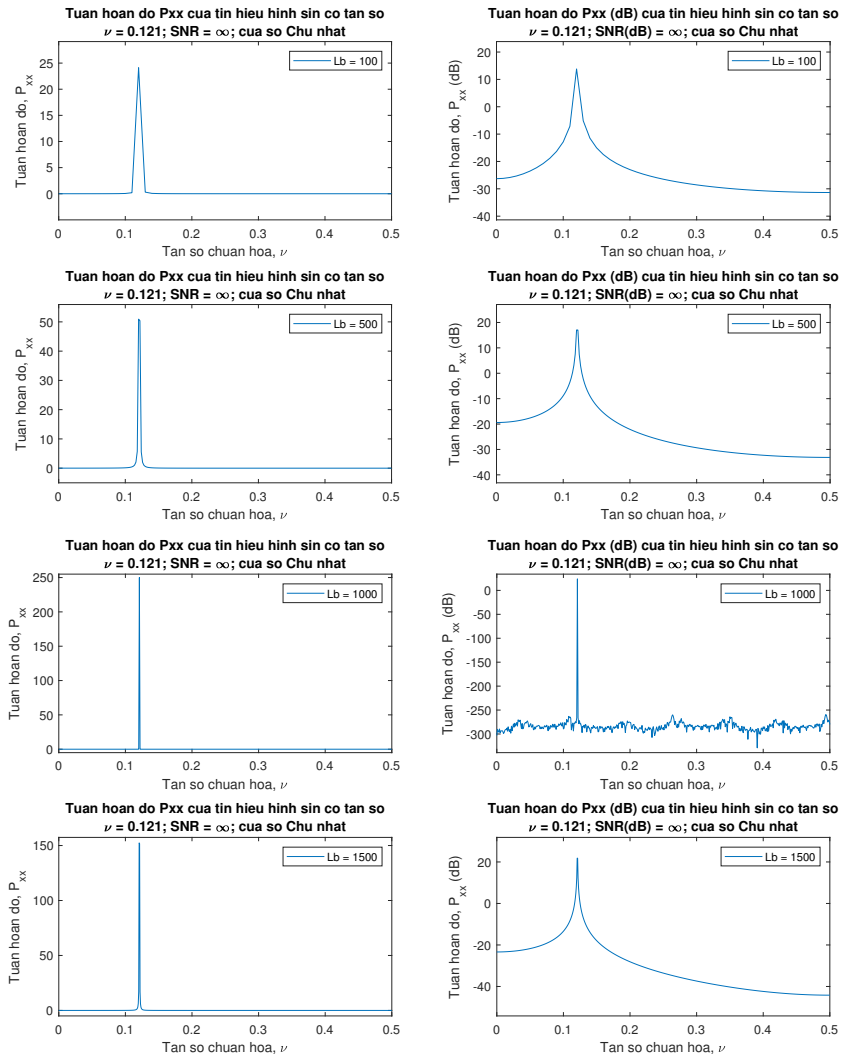


Hình 4.6 Phổ một tín hiệu hình sin.

$S_{xx}(\nu)$ gồm hai xung Dirac tại $-\nu_0$ và ν_0 có cùng biên độ là $1/4$. Trong thực tiễn, ta chỉ có thể thu thập tín hiệu $\{x(n)\}$ trong một khoảng thời gian hữu hạn L_b , cho nên nếu dùng tập dữ liệu quan sát được, ta không thể nào ước lượng chính xác $S_{xx}(\nu)$. Ta dùng tuần hoàn đồ $P_{xx}(k)$ trong (4.47) để ước lượng $S_{xx}(\nu)$.

Chạy chương trình THD_Lb_dh.m cho ta kết quả của tuần hoàn đồ $P_{xx}(k)$ của $\{x(n)\}$ như trong Hình 4.7, tính cho bốn chiều dài khác nhau $L_b = 100, 500, 1000, 1500$. Kết quả được

trình bày theo cả thang tuyến tính (bên trái) và thang dB (bên phải). Kết quả cho phép ta có hai kết luận dưới đây.



Hình 4.7 Ảnh hưởng của L_b lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa khi không có nhiễu quan sát.

Kết luận thứ nhất là, nói chung, phổ ước lượng không chứa một vạch tại $\nu_0 = 0,121$ mà chứa một xung tập trung xung quanh $\nu_0 = 0,121$ (so sánh với các tình huống $L_b = 100, 500, 1500$). Bề rộng của xung phổ xuất hiện rõ rệt hơn

theo thang dB so với thang tuyến tính. Hiện tượng phổ ước lượng chứa một xung phổ có bề rộng khác không, được gọi là hiện tượng chảy phổ. Hiện tượng chảy phổ xuất hiện bởi vì lý do sau đây. Cho tín hiệu $x(n)$ có phổ là

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}.$$

Trong thực tiễn, ta chỉ quan sát được tập $\{x(n)\}$, $n = 0, 1, \dots, L_b - 1$, nên phổ của tín hiệu $\{x(n)\}$ với $n = 0, \dots, L_b - 1$ là

$$X_{L_b}(\omega) = \sum_{n=0}^{L_b-1} x(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)x(n)e^{-jn\omega},$$

trong đó

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \dots, L_b - 1, \\ 0, & n \text{ khác.} \end{cases} \quad (4.49)$$

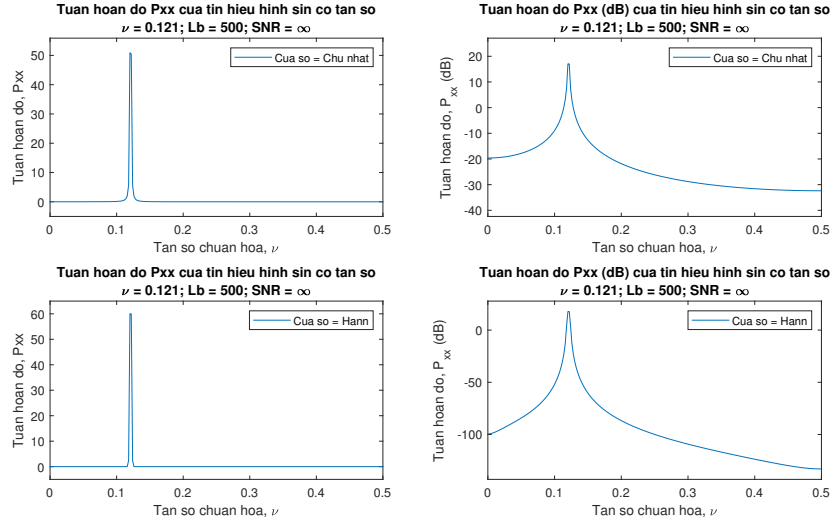
Ta gọi $w(n)$ là cửa sổ quan sát. Trong biểu thức (4.49), $w(n)$ được gọi là cửa sổ chữ nhật. Ta thấy ngay

$$X_{L_b}(\omega) = W(\omega) \otimes X(\omega),$$

trong đó $X_{L_b}(\omega)$ là tích chập của phổ tín hiệu $X(\omega)$ và phổ cửa sổ $W(\omega)$. Tích chập này làm xuất hiện hiện tượng chảy phổ. Trong miền thời gian, hiện tượng chảy phổ xuất hiện vì $x(0) \neq x(L_b)$, làm cho tín hiệu tuần hoàn hóa chứa những điểm “bất liên tục”, do đó phổ tiến về 0 theo biến thiên hyperbol. Phổ $X_{L_b}(\omega)$ tương ứng với một tín hiệu toán học được tuần hoàn hóa từ $\{x(n)\}$, $n = 0, \dots, L_b - 1$, với chu kỳ L_b . Trong thực tiễn, để giảm thiểu ảnh hưởng chảy phổ, ta thiết kế một cửa sổ $\{w(n)\}$, $n = 0, \dots, L_b - 1$, sao cho

$$x(0)w(0) \sim x(L_b - 1)w(L_b - 1).$$

Cách thiết kế và chọn lựa cửa sổ trong ước lượng phổ được thảo luận kỹ càng trong [10, Harris] và [24, Prabhu]. Hình 4.8 là hiển thị tuần hoàn đồ sử dụng cửa sổ Hann, là kết quả sau khi chạy chương trình THD_cuaso.m). Cửa sổ này tương đối phổ cập trong ước lượng phổ. Kết quả cho thấy là cửa sổ Hann giúp giảm thiểu ảnh hưởng chảy phổ. Trong trường hợp một



Hình 4.8 Ảnh hưởng của cửa sổ chữ nhật và cửa sổ Hann lên chảy phổ.

tín hiệu hình sin, chảy phổ xuất hiện vì tần số chuẩn hóa ν_0 không nằm đúng trên một tọa độ phổ k/L_b , $k = 0, 1, \dots, L_b - 1$, của FFT.

Kết luận thứ hai, từ tính hướng $L_b = 1000$ như cho trong Hình 4.7, là nếu $L_b \nu_0$ là một số nguyên k , ta có

$$\nu_0 = \frac{k}{L_b} = k\Delta f, \quad (4.50)$$

tức là ν_0 nằm đúng trên một tọa độ của FFT, phổ ước lượng trở thành một vạch tại ν_0 . Đây là kết quả đẹp nhất vì ước lượng phổ cho ta chính xác tần số chuẩn hóa của tín hiệu quan sát. Điều đáng tiếc là loại kết quả này khó gặp trong thực tế. Tuy nhiên, lúc ta tăng chiều dài L_b thì xung phổ có được càng hẹp lại, có nghĩa là độ chính xác trên ν_0 càng lớn.

Trường hợp có nhiều quan sát

Bây giờ ta xét trường hợp dữ liệu quan sát có sai số, được mô hình hóa bởi

$$x(n) = \cos(2\pi n \nu_0 + \varphi) + b(n), \quad n = 0, \dots, L_b - 1, \quad (4.51)$$

trong đó $b(n)$ là sai số quan sát. Ta giả thiết $\{b(n)\}$ là một chuỗi nhiễu Gauss trắng có nhiễu triệt tiêu và có công suất là N_0 :

$$N_0 = \mathbb{E}\{x^2(n)\} = \text{Var}\{x(n)\}.$$

Tín hiệu sạch (chưa bị tác động bởi nhiễu quan sát) có công suất là $S = 1/2$, theo kết quả (4.31). Do đó, theo (4.30) và (4.32), ta có

$$\text{SNR (dB)} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{S}{N_0} \right),$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \times 10^{-\text{SNR (dB)}/10}.$$

Ta xét hai tình huống với hai mức độ khác nhau của nhiễu quan sát:

1. SNR = 10 dB: Có một ít nhiễu quan sát, là tình huống bình thường.
2. SNR = -10 dB: Nhiễu quan sát mạnh hơn tín hiệu nhiễu.

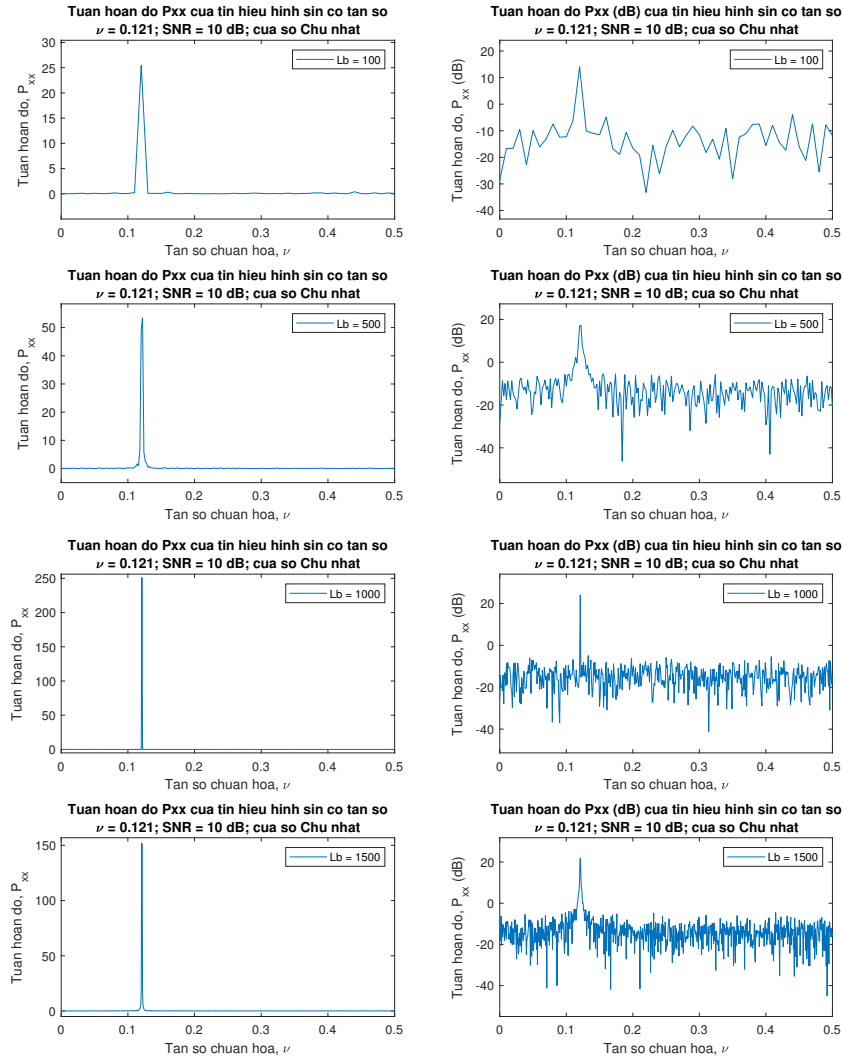
Kết quả trong Hình 4.9 cho thấy, trong trường hợp có ít nhiễu, ta vẫn quan sát được hiện tượng chảy phổ lúc biểu diễn kết quả theo thang dB và độ chính xác của ước lượng phổ tăng dần với chiều dài L_b của tín hiệu. Trong vùng tần số mà công suất tín hiệu rất nhỏ, phổ ước lượng hoàn toàn bị nhiễu quan sát chi phối. Thang tuyến tính giúp dễ dàng ước lượng ν_0 với độ chính xác cao.

Với nhiễu mạnh hơn tín hiệu, như trong Hình 4.10 với SNR = -10 dB, ta thấy lúc chiều dài tín hiệu L_b nhỏ thì khó mà phân biệt tín hiệu có phải điều hòa hay không, nhưng lúc tăng L_b thì vạch phổ xuất hiện tương đối rõ ràng.

4.6.4 Tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa chứa nhiễu tần số

Ta lặp lại thí nghiệm trong Mục 4.6.3 nhưng tín hiệu điều hòa $x(n)$ bây giờ có 3 tần số, được biểu diễn như sau:

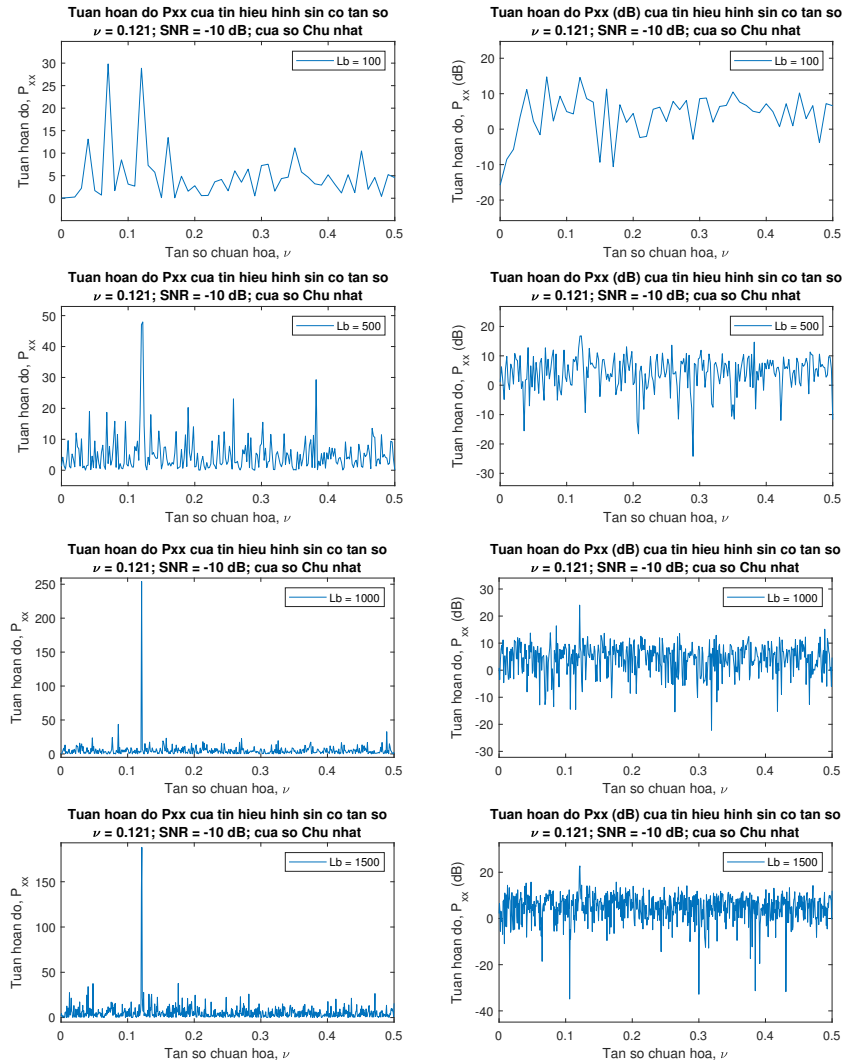
$$x(n) = \sum_{k=1}^3 A_k \cos(2\pi n \nu_k + \varphi_k) + b(n), \quad n = 0, \dots, L_b - 1,$$



Hình 4.9 Ảnh hưởng của nhiễu quan sát lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa; SNR = 10 dB.

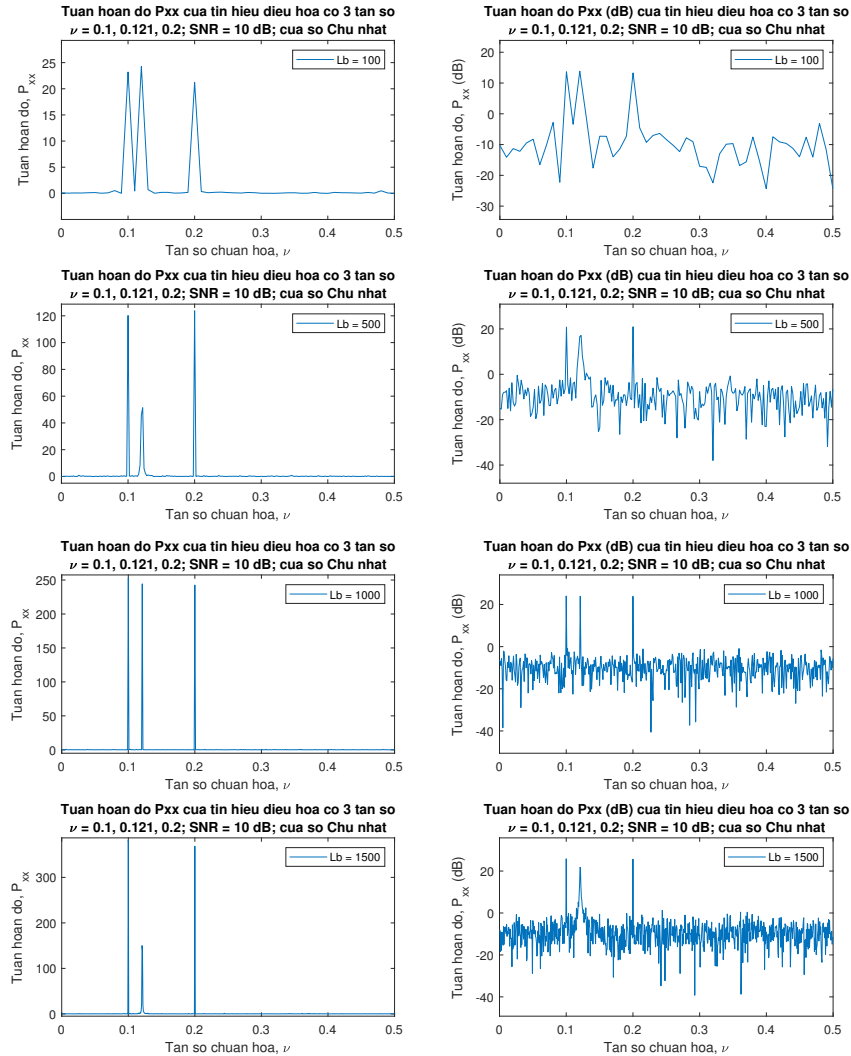
với các biên độ $A_k = 1$, các tần số $\nu_1 = 0,1$, $\nu_2 = 0,121$, $\nu_3 = 0,2$, các pha φ_k là bất kỳ (ngẫu nhiên).

Chạy chương trình phụ THD_Lb_dh.m để xét ảnh hưởng của chiều dài tín hiệu L_b lên tuần hoàn đồ. Kết quả của thí nghiệm được hiển thị trong Hình 4.11. Kết quả này cho thấy, L_b càng lớn, ảnh hưởng của chảy phổ càng giảm. Ngoài ra,



Hình 4.10 Ảnh hưởng của nhiễu quan sát lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa; SNR = -10 dB.

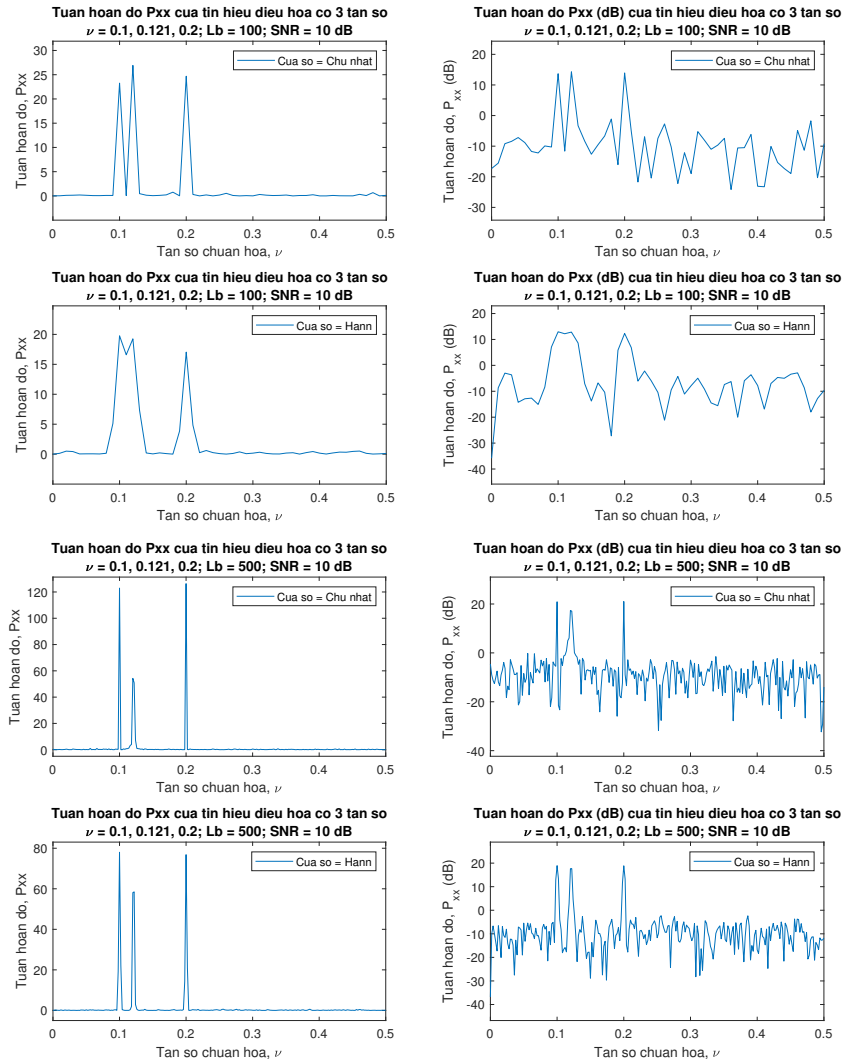
với 3 tần số của tín hiệu là $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.121$ và $\nu_3 = 0.2$, ta thấy lúc $L_b = 500$ không có hiện tượng chảy phổ tại ν_1 và ν_3 , vì các tần số này nằm trên tọa độ của DFT (FFT). Tuy nhiên, hiện tượng chảy phổ xuất hiện xung quanh $\nu_2 = 0.121$ vì không nằm trên tọa độ của DFT; $\nu L_b = 0.121 \times 500 = 60.5$ không phải là số nguyên. Trong trường hợp $L_b = 1000$, ν_1 , ν_2



Hình 4.11 Ảnh hưởng của L_b lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa có 3 tần số; SNR = 10 dB.

và ν_3 đều nằm tại các điểm tọa độ phổ của FFT nên không có hiện tượng chảy phổ. Lúc L_b tăng đến 1500, ν_1 và ν_3 không tạo ra hiện tượng chảy phổ và hiện tượng chảy phổ do ν_2 tạo ra có giảm bớt so với trường hợp $L_b = 500$ vì L_b lớn hơn. Như vậy, dù tín hiệu chứa nhiều tần số, ảnh hưởng của L_b vẫn giống như trong trường hợp tín hiệu chỉ chứa một tần số.

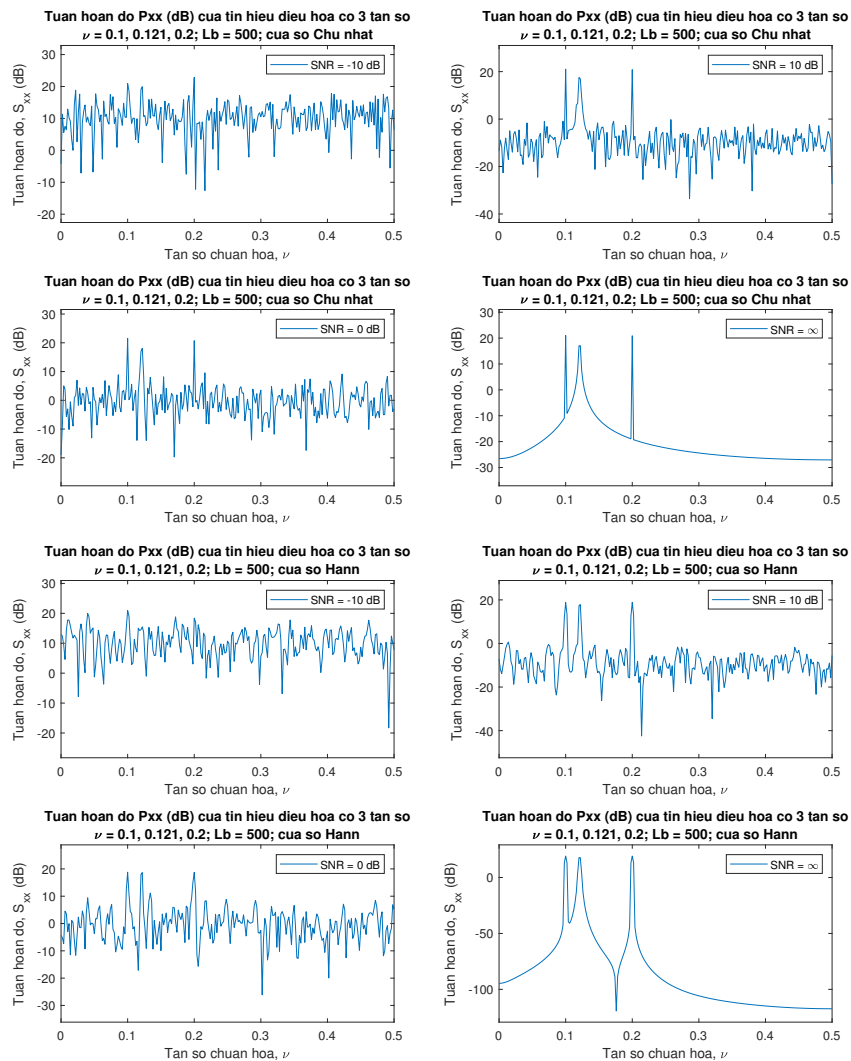
Chạy chương trình phụ THD_cuaso.m để xét ảnh hưởng của cửa sổ lên ước lượng phổ. Kết quả thí nghiệm được cho trong Hình 4.12. Với $L_b = 100$, chọn cửa sổ Hann cho thấy có



Hình 4.12 Ảnh hưởng của cửa sổ Hann lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa có 3 tần số; SNR = 10 dB.

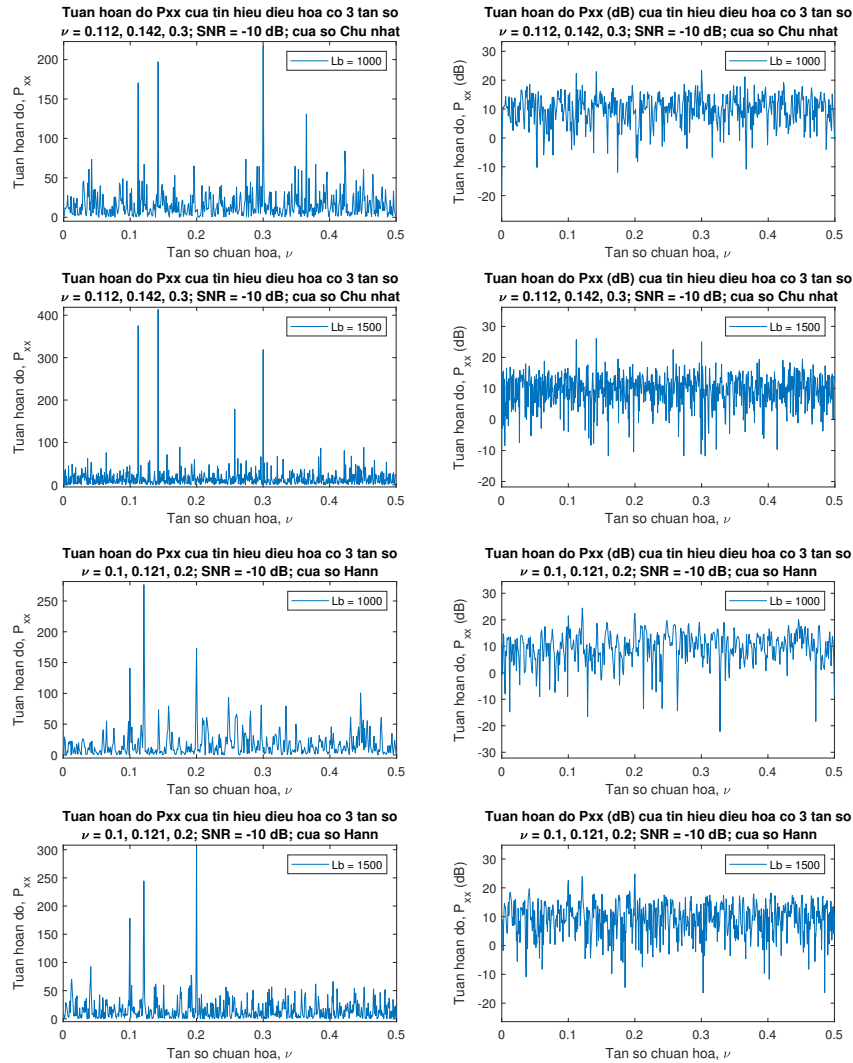
giảm ảnh hưởng của hiện tượng chảy phổ, so với cửa sổ chữ nhật, nhưng vì L_b nhỏ nên cũng giảm độ phân giải trong miền tần số, $\Delta f = 1/L_b$; Δf tăng lúc L_b giảm. Với thang dB, rất

khó để xác định ν_1 và ν_2 . Bây giờ ta tăng $L_b = 500$, kết quả cho thấy ν_1 và ν_2 không tạo ra chảy phổ nhưng ảnh hưởng của chảy phổ đối với ν_2 được giảm thiểu khá nhiều so với cửa sổ Hann.



Hình 4.13 Ảnh hưởng của SNR lên tuần hoàn đồ của tín hiệu điều hòa.

Chạy chương trình phụ THD_SNR_dh.m để xét ảnh hưởng của nhiễu lên tuần hoàn đồ. Kết quả từ Hình 4.13 cho thấy



Hình 4.14 Chất lượng tuần hoàn đồ tăng khi tăng chiều dài tín hiệu L_b hoặc dùng thêm cửa sổ.

lúc nhiễu quá lớn, SNR = -10 dB, tuần hoàn đồ không cho ta nhiều thông tin về tín hiệu. Lúc SNR tăng ngay cả ở thời điểm SNR = 0 dB, ta đã quan sát được 3 đỉnh tại các tần số ν của tín hiệu. Cố nhiên, lúc SNR càng lớn, các đỉnh xuất hiện càng rõ nét và ta có thể xác định ν càng chính xác hơn. Điều đáng chú ý là ngay cả lúc nhiễu rất lớn, SNR = -10 dB,

chỉ cần tăng L_b là sẽ giúp ta nâng cao chất lượng phân tích và nếu dùng thêm cửa sổ, chẳng hạn cửa sổ Hann, thì kết quả càng tốt hơn; như kết quả trong Hình 4.14.

4.6.5 So sánh phương pháp Bartlett-Welch và phương pháp Blackman-Tukey

Ta đã trình bày tương đối khá dài thí nghiệm về ước lượng phổ công suất của một tín hiệu điều hòa. Bởi vì tuần hoàn đồ là một phương pháp tương đối phổ cập trong lĩnh vực phân tích phổ trong thực tiễn, nhất là đối với các vấn đề liên quan đến loại tín hiệu có vẻ có tính điều hòa, nên cần thảo luận tương đối kỹ lưỡng.

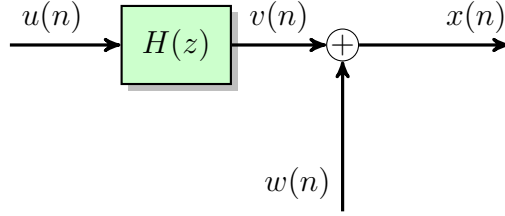
Sau đây, ta sẽ thực hiện các thí nghiệm đối với loại tín hiệu điều hòa cũng như loại tín hiệu có cấu trúc tuyến tính ARMA. Ta sẽ trực tiếp so sánh hai phương pháp chính là Bartlett-Welch và Blackman-Tukey cho cả hai loại tín hiệu này. Nhắc lại là, trong Bartlett-Welch, ta dùng tuần hoàn đồ để ước lượng phổ trực tiếp từ tập dữ liệu quan sát, còn trong Blackman-Tukey trước tiên ta ước lượng hàm tự tương quan từ tập dữ liệu quan sát rồi mới áp dụng biến đổi Fourier để có ước lượng phổ. Ta cũng kết hợp phương pháp Welch cho Blackman-Tukey. Trước khi ước lượng phổ, ta dùng cửa sổ để điều chỉnh tập dữ liệu con trong Bartlett-Welch hay điều chỉnh chuỗi ước lượng hàm tự tương quan trong Blackman-Tukey. Trong trường hợp cửa sổ cho Blackman-Tukey, Kay đề nghị sử dụng cửa sổ có chiều dài cỡ 20% chiều dài của chuỗi ước lượng hàm tự tương quan. Trong các thí nghiệm sau đây, ta có hai chọn lựa, hoặc theo Kay hoặc dùng cùng chiều dài của ước lượng hàm tự tương quan.

Xét thí nghiệm có hệ thống biểu diễn trong Hình 4.15. Hàm truyền hệ thống là

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_0 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}}. \quad (4.52)$$

Trong thí nghiệm này, ta sử dụng nhiễu Gauss trắng dùng mở rộng làm đầu vào, $u(n)$. Tín hiệu ở đầu ra là

$$x(n) = v(n) + w(n),$$



Hình 4.15 Hệ thống ARMA bị tác động bởi nhiễu cộng.

trong đó $v(n)$ là tín hiệu ta mong muốn phân tích và $w(n)$ là nhiễu (sai số) quan sát.

Các tham số sử dụng để tạo ra tín hiệu ARMA sạch $v(n)$ (không có nhiễu quan sát) bao gồm tham số của nhiễu trắng Gauss $u(n)$ kích thích hệ thống và tham số của hàm truyền $H(z)$ của hệ thống. Chọn phương sai của $u(n)$ là $\sigma_u^2 = 1$. Tham số hàm truyền chứa trong

$$\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_N],$$

$$\mathbf{a} = [1 \ a_1 \ \dots \ a_N].$$

Làm chủ \mathbf{a} và \mathbf{b} , ta tạo được tín hiệu ARMA sạch bằng lệnh

```
v = filter(b,a,randn(1,Lx))
```

trong đó Lx là chiều dài của tín hiệu quan sát. Ta chỉ sử dụng một đoạn của $x(n)$ có chiều dài L_b để phân tích, như thế bắt buộc phải có $L_b \leq Lx$. Phổ công suất của tín hiệu $\{v(n)\}$ được cho bởi

$$S_{vv}(\omega) = \left| \frac{\sum_{k=0}^Q b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^P a_k e^{-j\omega k}} \right|^2. \quad (4.53)$$

Nhiều quan sát $w(n)$ có công suất $N_0 = \mathbb{E}\{w^2(n)\}$. Sử dụng tham số SNRdB cho SNR theo thang dB, ta tính được công suất của nhiễu

$$N_0 = S * 10^{-\text{SNRdB}/10},$$

trong đó $S = \mathbb{E}\{v^2(n)\}$ là công suất tín hiệu. Đặt $\sigma = \sqrt{N_0}$, ta dùng lệnh sau để tạo tín hiệu ARMA có nhiễu quan sát:

```
x = v + sigma*randn(1,Lx)
```

Ta sẽ dùng chương trình lệnh `sosanh_BW_BT.m` để tính ước lượng phổ công suất bằng phương pháp Bartlett-Welch và phương pháp Blackman-Tukey. Nhắc lại là khi dùng phương pháp Blackman-Tukey, ta có thể sử dụng cả phương pháp Welch. Chương trình `sosanh_BW_BT.m` sẽ yêu cầu nhập dữ liệu để tạo ra tín hiệu điều hòa, $th = 1$, hoặc tín hiệu ARMA, $th = 2$. Chương trình cho trước chiều dài tập dữ liệu quan sát Lx , chiều dài tập dữ liệu con Lb , số dữ liệu dùng chung cho hai tập dữ liệu con kề nhau `phantramLb` (không được vượt quá 50%). Chiều dài Lb cũng được dùng để tính chiều dài chuỗi ước lượng hàm tự tương quan, $Lr = 2 * Lb - 1$, là số lẻ. Với cửa sổ điều chỉnh chuỗi ước lượng hàm tự tương quan, chọn `kBT = 1` nếu muốn cửa sổ có chiều dài $Lw = Lr/5$ và `kBT = 2` nếu muốn $Lw = Lr$.

Tín hiệu điều hòa

Chạy chương trình và nhập $th = 1$ để xét tín hiệu điều hòa $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \sum_{k=1}^3 \cos(2\pi\nu_k n + \varphi_k) + b(n),$$

trong đó tần số được cho là $\nu_1 = 0,1$, $\nu_2 = 0,12341$ và $\nu_3 = 0,2$, các pha gốc φ_1 , φ_2 và φ_3 được chọn ngẫu nhiên với phân phối đều trong $[0, 2\pi]$, nhiễu cộng $b(n)$ là một nhiễu Gauss trắng dùng mở rộng có công suất N_0 . Do các biên độ của 3 thành phần điều hòa trong $x(n)$ là đơn vị, ta tính được công suất tín hiệu là

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Với đầu vào SNR_{dB} , ta suy ra N_0

$$N_0 = \frac{3}{2} \times 10^{-SNR_{dB}/10}.$$

Ta sẽ ước lượng phổ công suất của $x(n)$ bằng hai phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey cho một số tình huống hữu ích: $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$ (không có nhiễu quan sát), 10 (ít nhiễu quan sát), 0 (nhiều nhiễu quan sát lớn).

Trong các thí nghiệm về tín hiệu điều hòa sau đây, ta chọn chiều dài tín hiệu $L_x = 20000$, chiều dài tập dữ liệu con $L_b = 256$ với $\text{phantram}L_b = 50\%$ số mẫu dữ liệu trùng lặp giữa hai tập dữ liệu con. Về cửa sổ dùng để điều chỉnh dữ liệu (trong Bartlett-Welch) và điều chỉnh ước lượng hàm tự tương quan (trong Blackman-Tukey), nói chung có thể chọn bất kỳ cửa sổ nào, trong thí nghiệm này chọn cửa sổ Bartlett, $\text{kw} = 5$. Ta cũng xét cả hai cách chọn chiều dài cửa sổ Bartlett sử dụng trong điều chỉnh của ước lượng hàm tự tương quan R_x , bằng chọn thông số $\text{kBT} = 1$ và $\text{kBT} = 2$.

Kết quả các thí nghiệm được trình bày trong các hình sau:

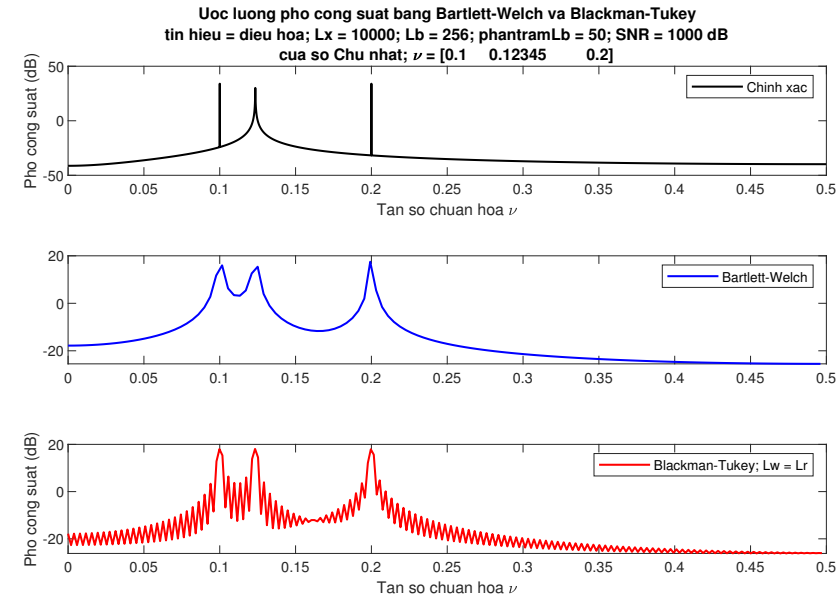
1. Hình 4.16: Không có nhiễu, dùng cửa sổ chữ nhật, cửa sổ dài bằng tự tương quan.
2. Hình 4.17: Không có nhiễu, dùng cửa sổ chữ nhật, cửa sổ dài bằng 20% tự tương quan.
3. Hình 4.18: Không có nhiễu, dùng cửa sổ Bartlett.
4. Hình 4.19: Có ít nhiễu, dùng cửa sổ chữ nhật.
5. Hình 4.20: Có ít nhiễu, dùng cửa sổ Bartlett.
6. Hình 4.21: Nhiều tương đương tín hiệu, dùng cửa sổ Bartlett.

Ta có thể rút ra một số nhận xét sau. Trong trường hợp áp cửa sổ vào chuỗi ước lượng hàm tự tương quan và chiều dài cửa sổ bằng 1/5 lần chiều dài tự tương quan, chiều dài này là tương đối nhỏ nên có khả năng lớn là độ phân giải trong miền tần số không đáp ứng được nhu cầu tách các đỉnh. Trong trường hợp nhiễu khá lớn, phương pháp Bartlett-Welch cho ta kết quả tốt hơn so với phương pháp Blackman-Tukey.

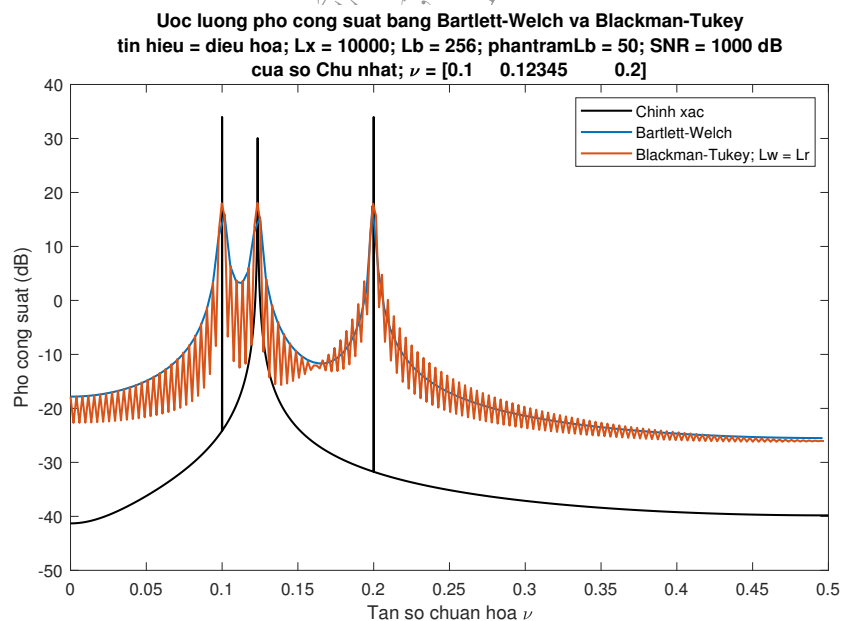
Tín hiệu ARMA có phổ dạng xung

Như đã được mô tả ở đầu Mục 4.6.5, tín hiệu ARMA $x(n)$ là một tín hiệu ngẫu nhiên có dạng

$$x(n) = v(n) + w(n),$$

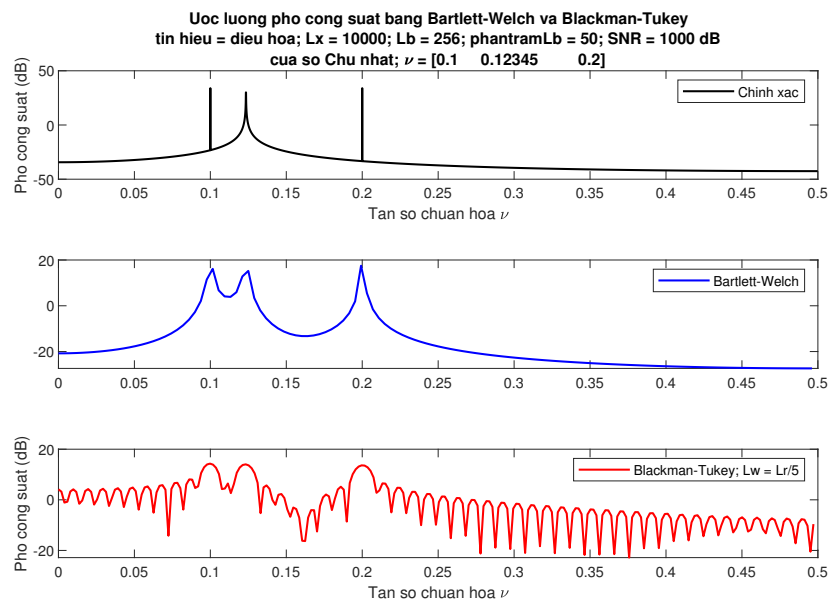


(a) Hiển thị phổ riêng lẻ

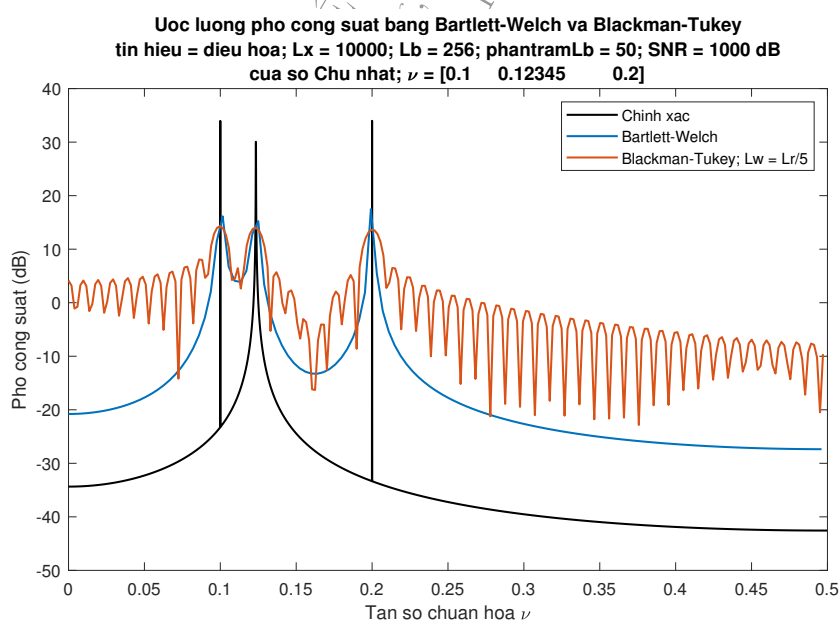


(b) Hiển thị gộp phổ

Hình 4.16 Ước lượng phổ tín hiệu điều hòa bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ chữ nhật dài bằng tự tương quan.

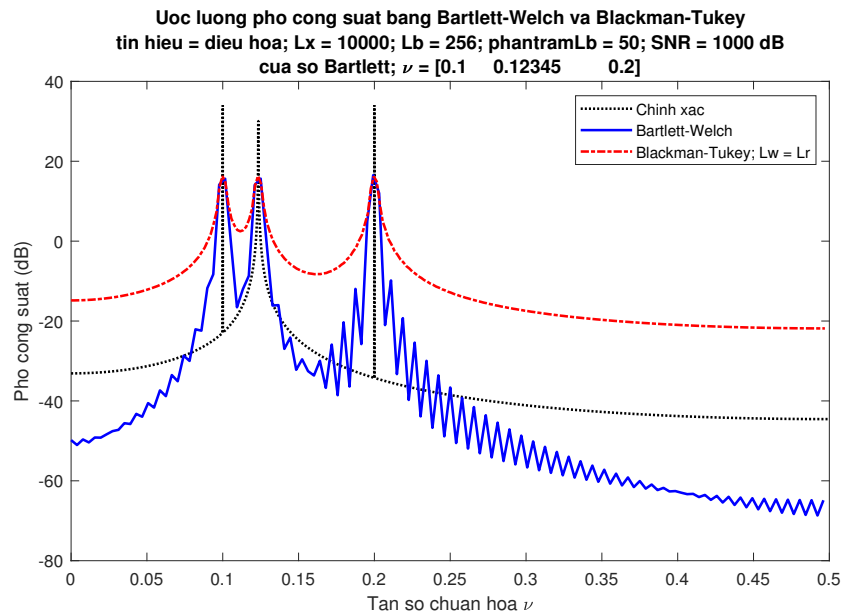


(a) Hiển thị phổ riêng lẻ

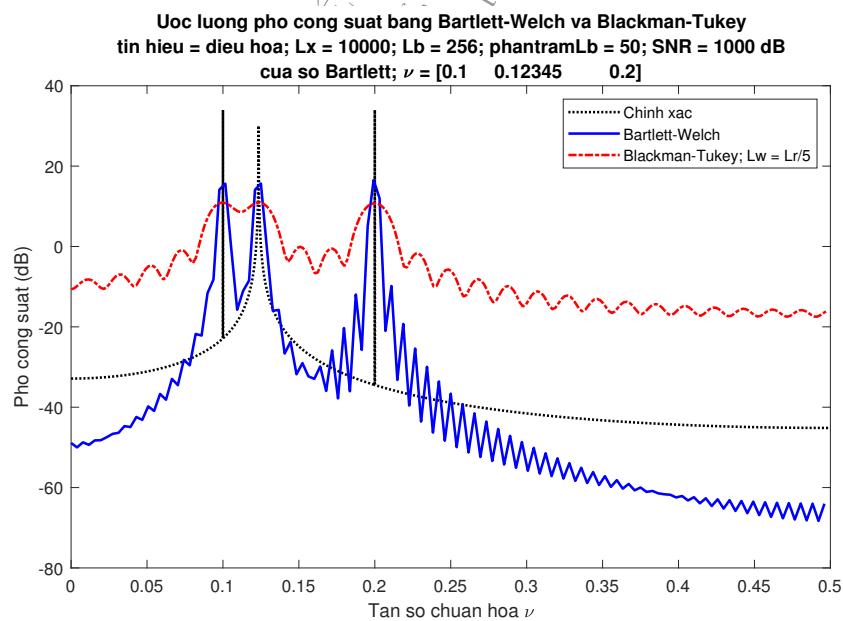


(b) Hiển thị gộp phổ

Hình 4.17 Ước lượng phổ tín hiệu điều hòa bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ chữ nhật dài 20% tự tương quan.

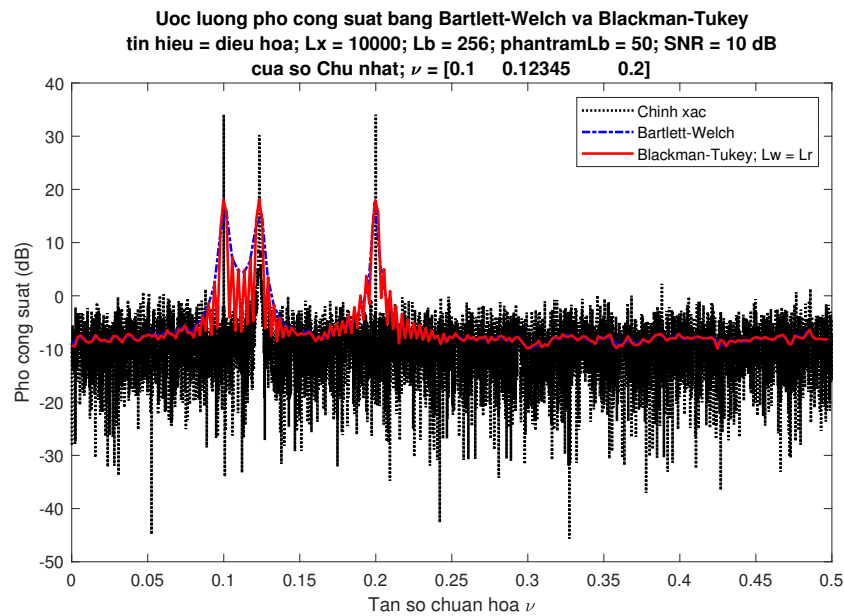


(a) Cửa sổ dài bằng tự tương quan

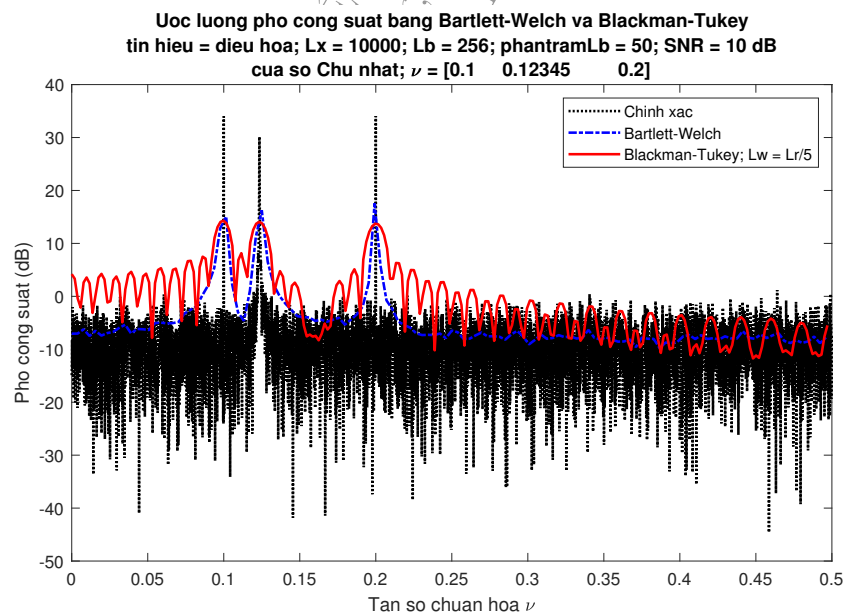


(b) Cửa sổ dài 20% tự tương quan

Hình 4.18 Ước lượng phổ tín hiệu điều hòa bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ Bartlett.

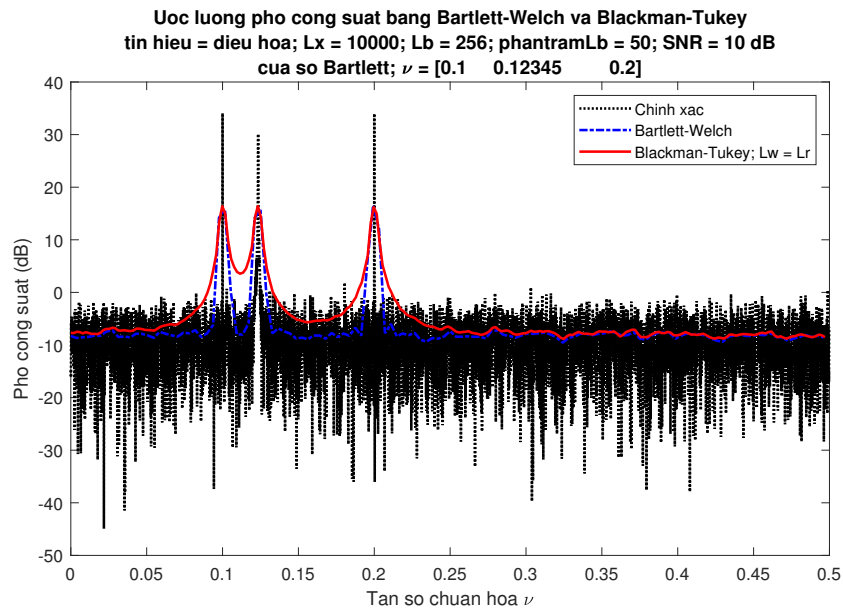


(a) Cửa sổ dài bằng tự tương quan

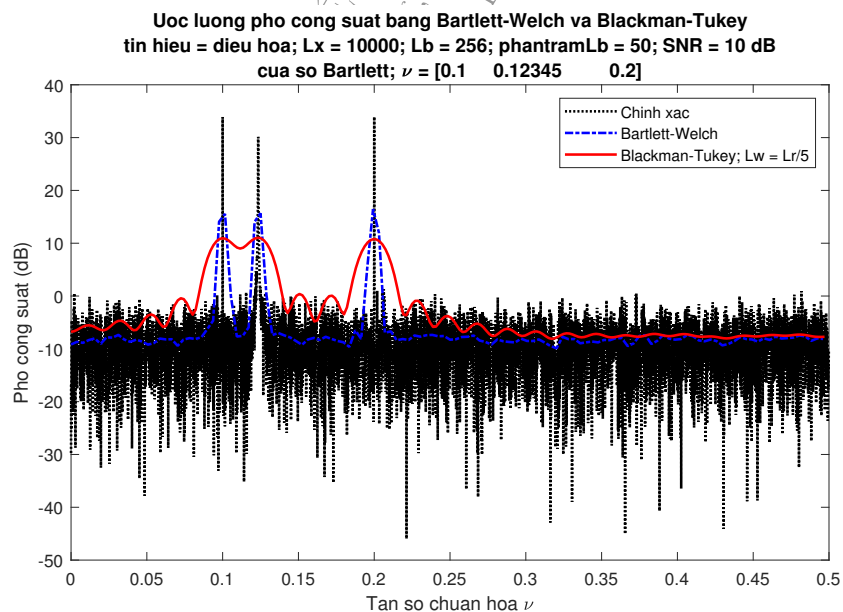


(b) Cửa sổ dài 20% tự tương quan

Hình 4.19 Ước lượng phổ tín hiệu điều hòa bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = 10$, cửa sổ chữ nhật.

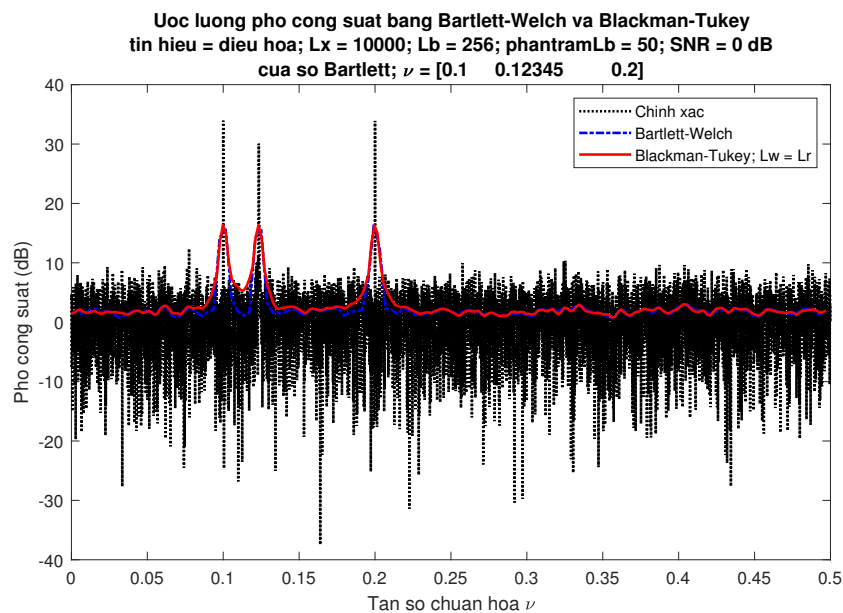


(a) Cửa sổ dài bằng tự tương quan

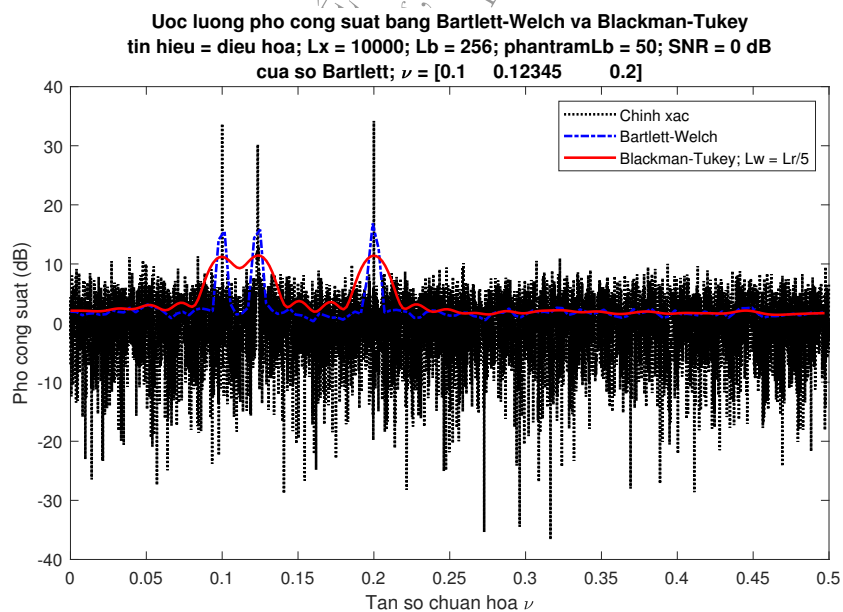


(b) Cửa sổ dài 20% tự tương quan

Hình 4.20 Ước lượng phổ tín hiệu điều hòa bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = 10$, cửa sổ Bartlett.



(a) Cửa sổ dài bằng tự tương quan



(b) Cửa sổ dài 20% tự tương quan

Hình 4.21 Ước lượng phổ tín hiệu điều hòa bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$, cửa sổ Bartlett.

trong đó $w(n)$ là nhiễu quan sát mà ta giả thiết là một nhiễu Gauss trắng dừng mở rộng có công suất $N_0 = \mathbb{E}\{w^2(n)\}$, $v(n)$ là đầu ra của một hệ thống tuyến tính bất biến có hàm truyền là

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}},$$

mà đầu vào $u(n)$ cũng là một tín hiệu Gauss trắng dừng bậc hai có công suất là đơn vị, $\mathbb{E}\{u^2(n)\} = 1$.

Ta lần lượt xét trường hợp tín hiệu ARMA có phổ dạng xung có 3 đỉnh và trường hợp có phổ thông thấp, bằng cách chọn các vector $\mathbf{a} = [a_1 \dots a_P]$ và $\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \dots b_Q]$ phù hợp cho các đặc trưng này. Cho cả hai trường hợp, ta sẽ xét ảnh hưởng của cửa sổ, của chiều dài L_b của khối dữ liệu con, của chiều dài L_w của cửa sổ áp vào ước lượng hàm tự tương quan. Nhắc lại ở đây, L_w có thể bằng 20% hoặc 100% chiều dài của ước lượng hàm tự tương quan. Ta cũng xét ảnh hưởng của nhiễu quan sát, có tác động rất lớn đến kết quả phân tích dữ liệu. Ngay trước khi phân tích, ta đã biết là độ chính xác càng mất dần lúc nhiễu quan sát càng lớn. Đây là điều hơi khác so với trường hợp tín hiệu điều hòa, L_b càng lớn càng làm giảm ảnh hưởng của nhiễu quan sát. Ngay sau đây, ta xét trường hợp tín hiệu ARMA có phổ dạng xung. Trong phần sau, ta sẽ xét đến trường hợp tín hiệu ARMA dạng phổ thông thấp.

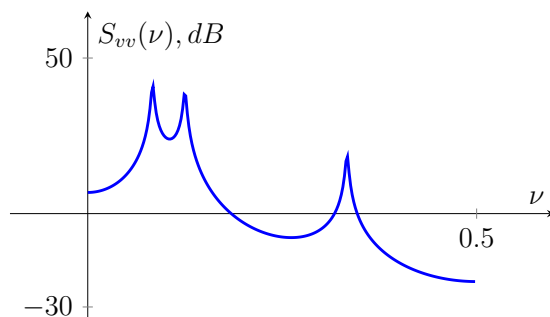
Với tín hiệu ARMA có phổ dạng xung, ta chọn

$$\mathbf{b} = 1$$

$$\mathbf{a} = [1 \ -2,1240 \ 2,2574 \ -1,7883 \ 2,2125 \ -2,0411 \ 0,9415]$$

để có phổ công suất $S_{vv}(\nu)$ chứa 3 đỉnh như trong Hình 4.22, nhìn có vẻ hơi giống phổ của một tín hiệu điều hòa có chứa 3 tần số có chứa hiện tượng chảy phổ; đây cũng là lý do vì sao ta làm thí nghiệm này để so sánh với thí nghiệm tín hiệu điều hòa chứa 3 tần số trong phần trước.

Trước tiên, ta xét trường hợp không có nhiễu quan sát ($\text{SNRdB} = 1000$) và chỉ ước lượng trên một mẫu dữ liệu con. Hình 4.23 cho thấy dù L_b nhỏ (200), dùng cửa sổ (Hann) và không dùng cửa sổ (tức dùng cửa sổ chữ nhật) cho hai kết quả khác nhau, ít nhất là về định tính. Cụ thể là, có cửa sổ



Hình 4.22 Phổ công suất tín hiệu ARMA có phổ dạng xung, chứa 3 đỉnh.

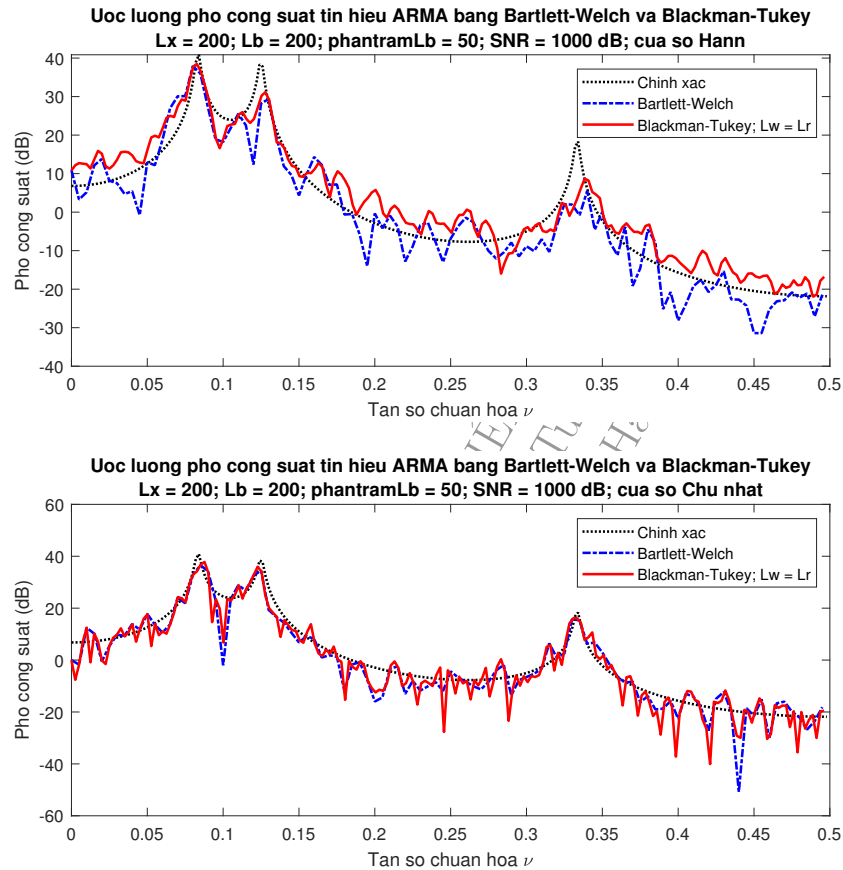
cho ta các đỉnh ở vị trí tương đối chính xác hơn so với không có cửa sổ.

Bây giờ, nếu ta tính nhiều ước lượng rồi lấy trị trung bình của chúng, ta thấy ngay những tính chất của ước lượng. Thứ nhất là, dù L_b lớn nhỏ thế nào thì, lúc dùng cửa sổ (Hann) trong quá trình ước lượng, phương pháp Bartlett-Welch cho ta kết quả rất tốt (xem Hình 4.25) trong khi phương pháp Blackman-Tukey cho ta một độ lệch phụ thuộc vào L_b .

Thứ hai là, nếu không dùng cửa sổ, phương pháp Bartlett-Welch và phương pháp Blackman-Tukey luôn luôn cho cùng kết quả, như trong Hình 4.26.

Thứ ba là, cũng từ Hình 4.26, ta thấy chất lượng ước lượng tăng dần với L_b , đây cũng là kết quả ta đã quan sát lúc dữ liệu là một tín hiệu điều hòa.

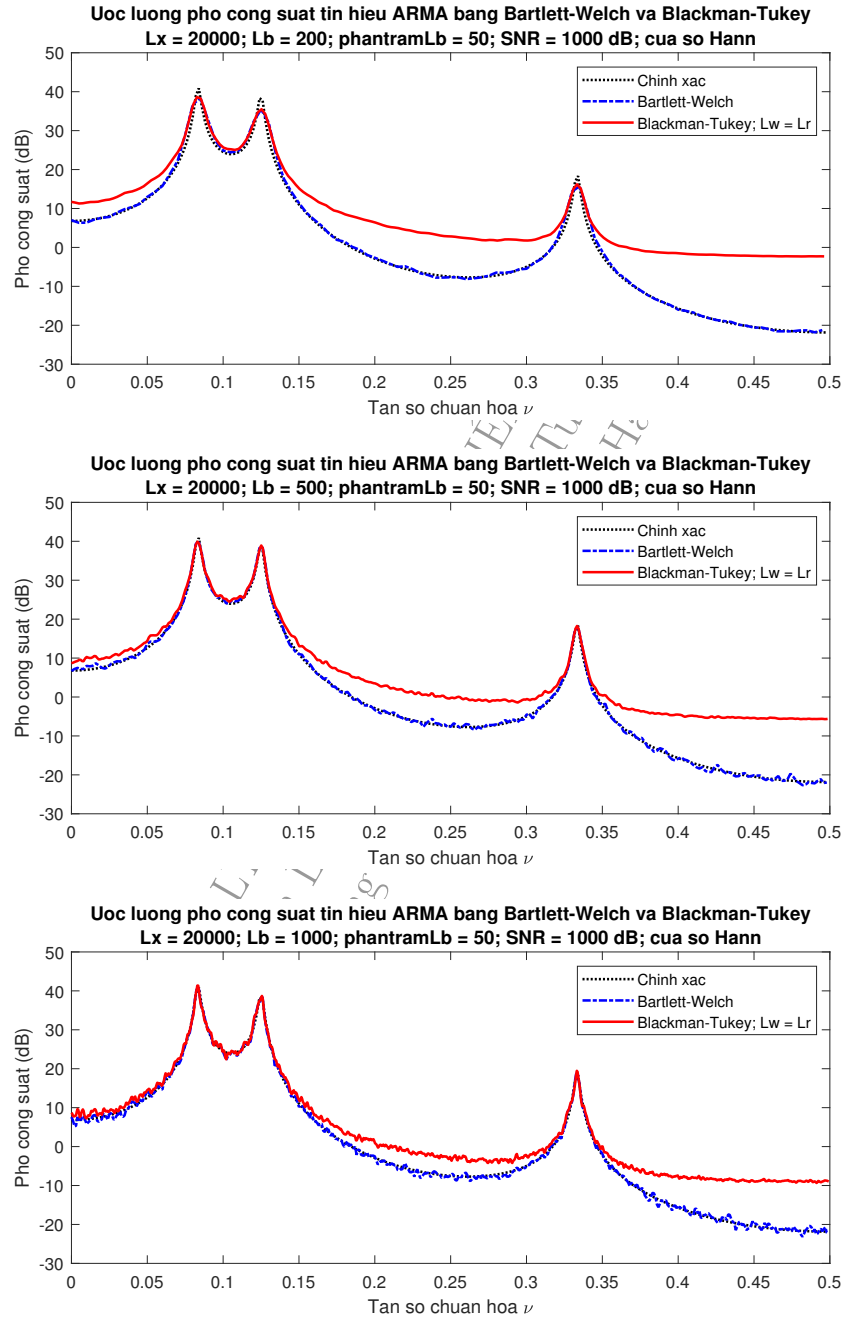
Thứ tư là, Hình 4.27 cho thấy, lúc không có nhiều quan sát, ta phân biệt chất lượng 3 trường hợp sau: (i) phương pháp Bartlett-Welch sử dụng cửa sổ dài bằng tín hiệu $L_b = 200$ cho ta kết quả tốt nhất, (ii) sau đó là phương pháp Blackman-Tukey có cửa sổ dài bằng $1/5$ tự tương quan nhưng với dữ liệu dài gấp 5 lần ($L_b = 1000$), như trong Hình 4.27(b)), (iii) cuối cùng kém nhất là phương pháp Blackman-Tukey có cửa sổ dài bằng tự tương quan với dữ liệu có chiều dài $L_b = 200$, như trong Hình 4.27(b). Kết quả này cũng không có gì đáng ngạc nhiên, bởi vì trường hợp thứ hai có chiều dài cửa sổ áp vào tự tương quan bằng trường hợp thứ ba ($L_w \approx 400$), nhưng thực chất lại sử dụng 5 lần nhiều hơn dữ liệu so với trường



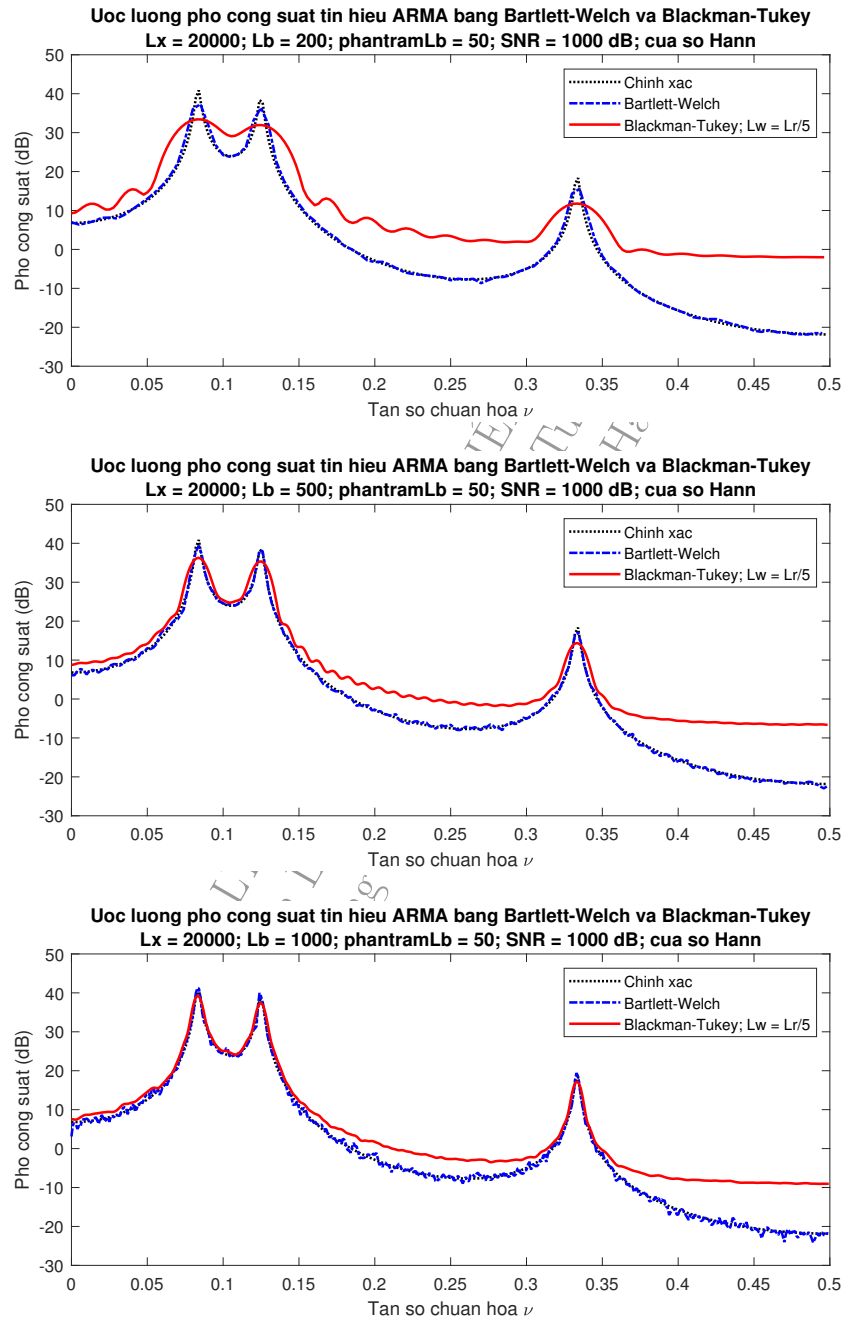
Hình 4.23 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng xung bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ Hann và cửa sổ chữ nhật, các cửa sổ có chiều dài bằng tự tương quan.

hợp thứ ba. Bởi vì dùng nhiều dữ liệu hơn, nên độ chính xác của ước lượng hàm tự tương quan cao hơn.

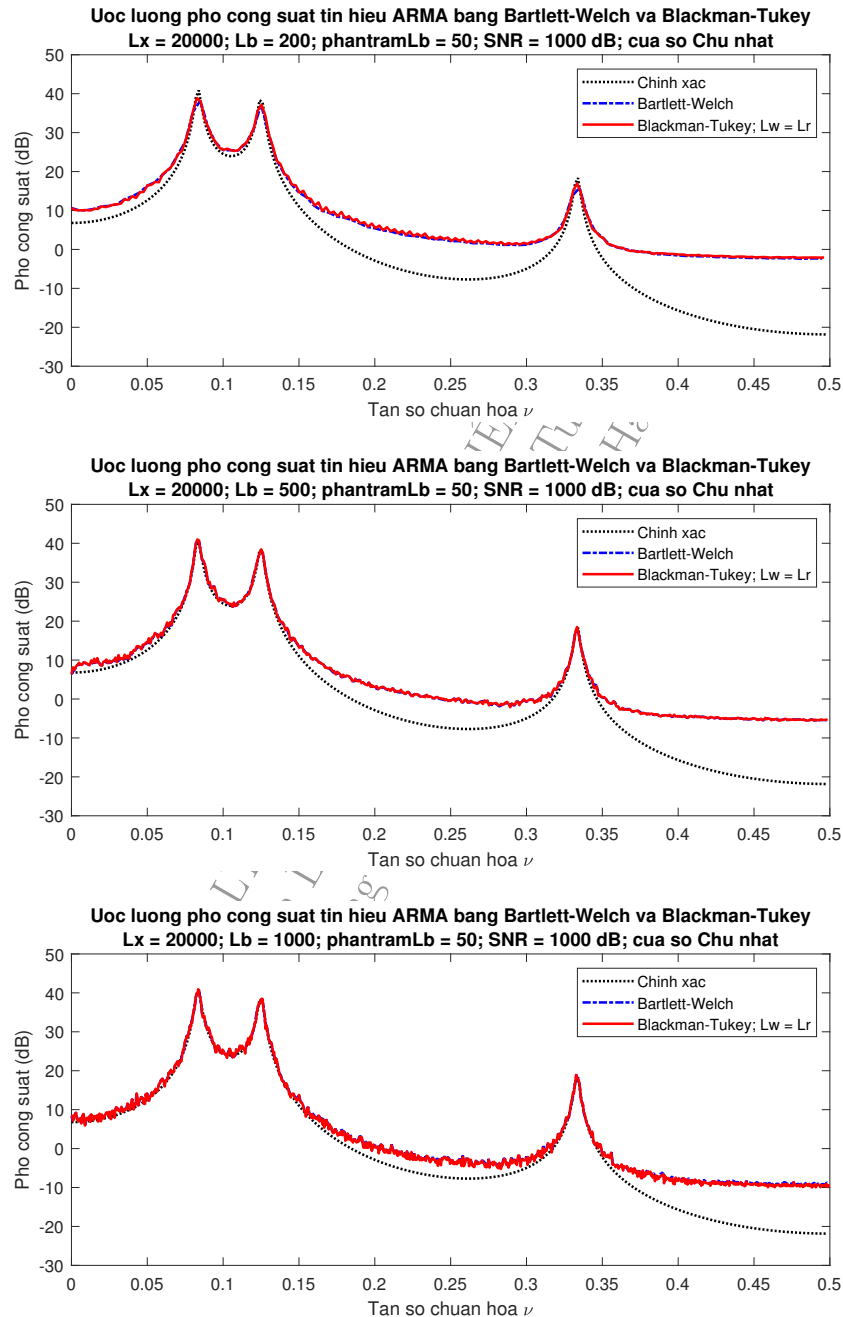
Thứ năm là, mặc dù lúc dữ liệu có chứa nhiều quan sát, dùng cửa sổ (Hann chẳng hạn) có thể nâng cao chất lượng của ước lượng phổ phần nào, tuy nhiên nhiều luôn luôn là giới hạn chất lượng của ước lượng phổ. Hình 4.28 cho thấy dù có tăng chiều dài L_b lớn bao nhiêu, trong vùng tần số mà phổ công suất của tín hiệu nhỏ hơn so với nhiễu, thì kết quả ước lượng trong miền tần số đó là không thể có chất lượng vì nhiễu sẽ là ngưỡng mà ước lượng không thể vượt qua.



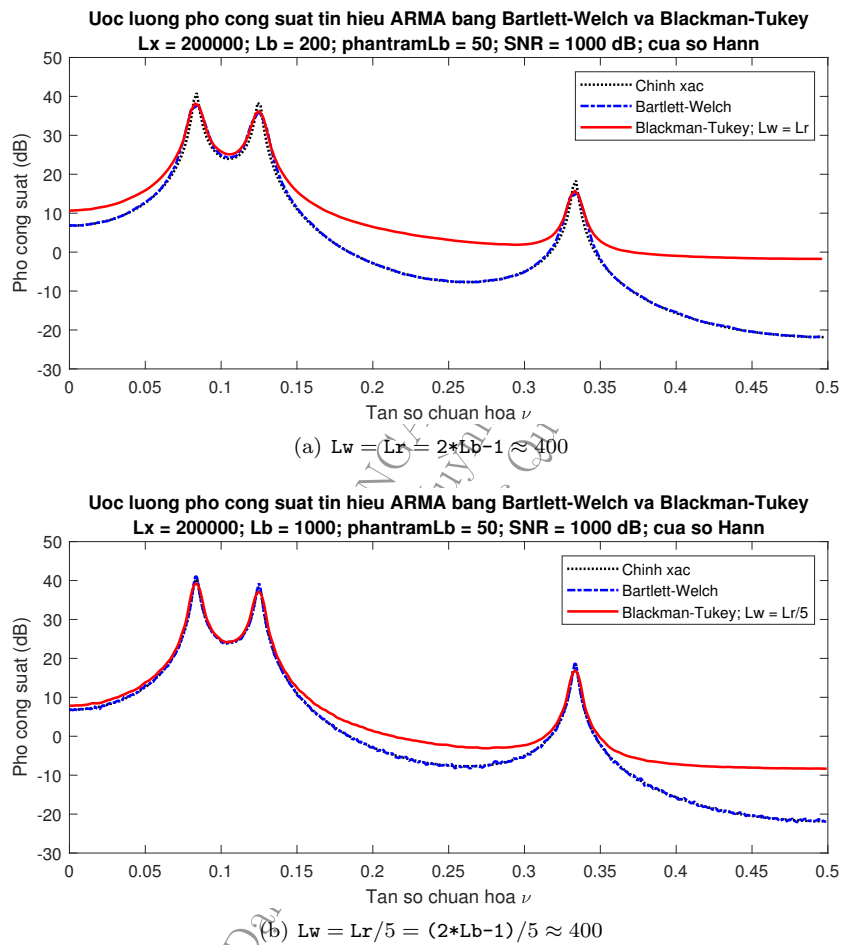
Hình 4.24 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng xung bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ Hann và có chiều dài bằng tự tương quan, chiều dài tín hiệu lần lượt từ trên xuống là 200, 500 và 1000.



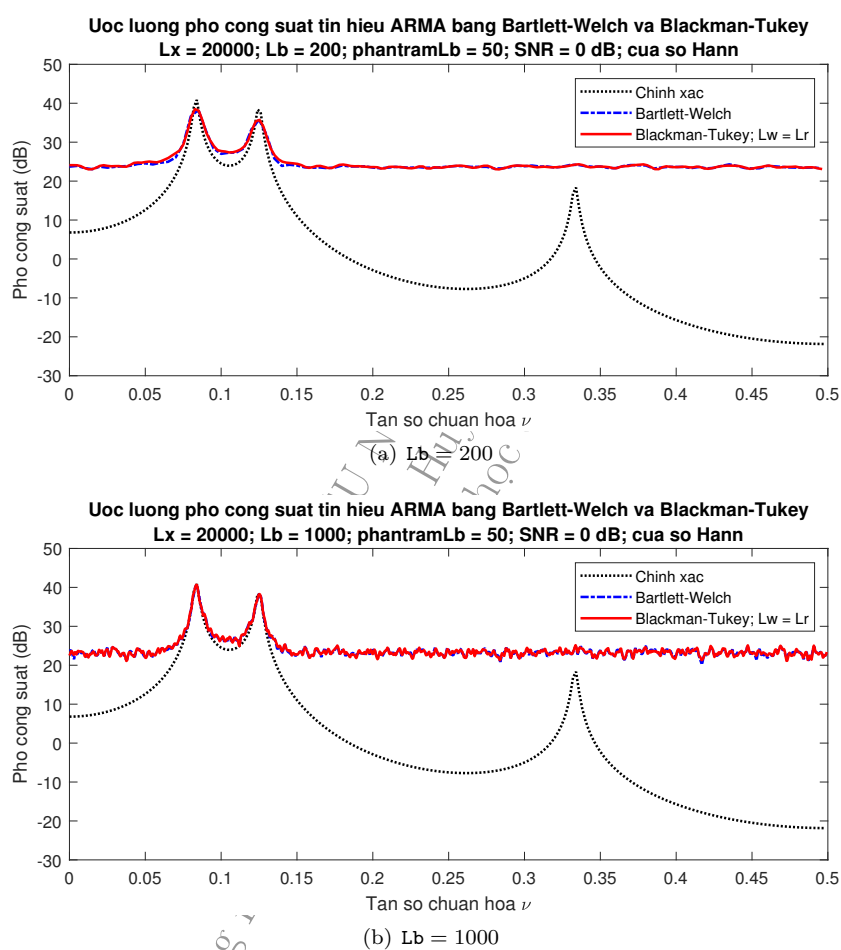
Hình 4.25 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng xung bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ Hann và có chiều dài bằng 20% tự tương quan, chiều dài tín hiệu lần lượt từ trên xuống là 200, 500 và 1000.



Hình 4.26 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng xung bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ chữ nhật và có chiều dài bằng tự tương quan, tín hiệu con có chiều dài lần lượt từ trên xuống là 200, 500 và 1000.



Hình 4.27 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng xung bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ Hann. So sánh 3 trường hợp: (i) Bartlett-Welch có cửa sổ dài bằng tín hiệu $L_b = 200$, (ii) Blackman-Tukey có cửa sổ dài bằng tự tương quan với tín hiệu con dài $L_b = 200$, (iii) Blackman-Tukey có cửa sổ dài bằng $1/5$ tự tương quan, nhưng dữ liệu dài gấp 5 lần ($L_b = 1000$).



Hình 4.28 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng xung bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; có nhiễu quan sát lớn $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$, cửa sổ Hann.

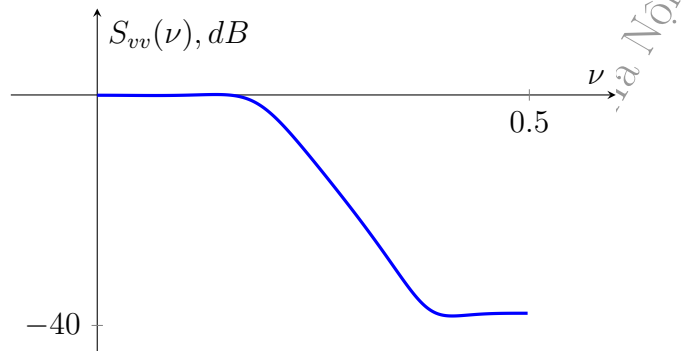
Tín hiệu ARMA có phổ dạng thông thấp

Bây giờ ta xét trường hợp một tín hiệu ARMA có phổ thông thấp. Ta chọn các thông số hệ thống như sau:

$$\mathbf{a} = [1 \quad -0,8664 \quad 0,6630 \quad -0,1514]$$

$$\mathbf{b} = [0,4640 \quad 0,1829 \quad 0,2572 \quad 0,1549]$$

để tạo được phổ công suất có dạng như trong Hình 4.29, cho ta một phổ trắng (hằng số) trong một dải thông cho trước.

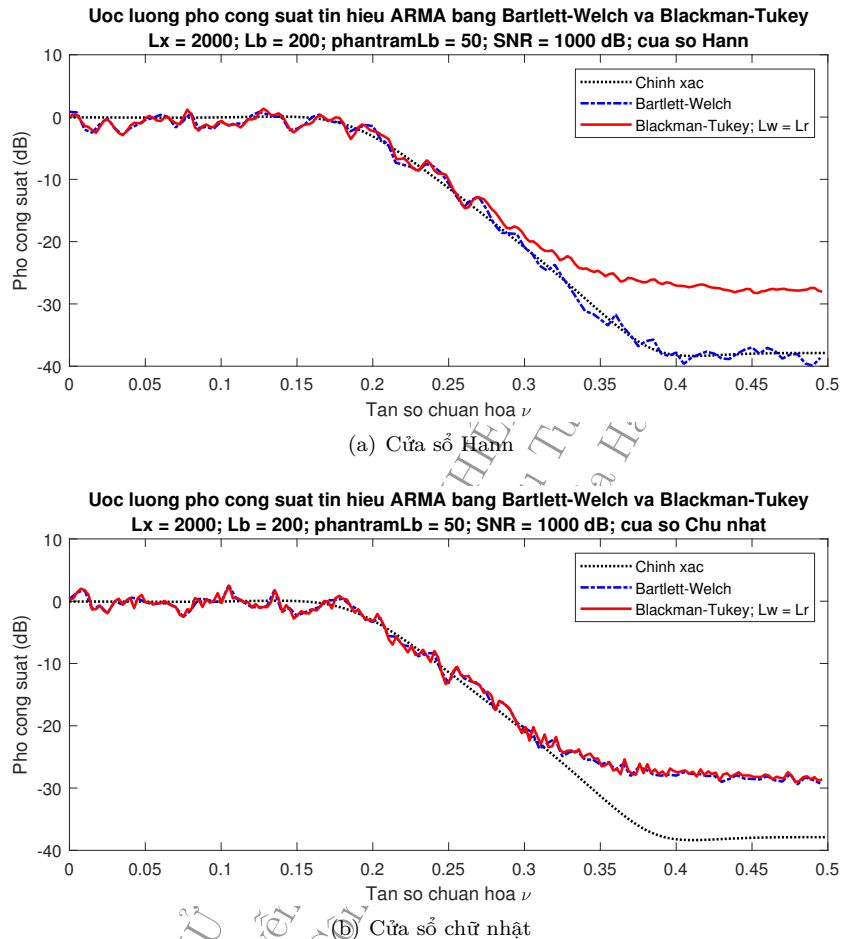


Hình 4.29 Phổ công suất tín hiệu ARMA có phổ dạng thông thấp.

Ta lặp lại những thí nghiệm như đối với trường hợp tín hiệu ARMA có phổ dạng xung với 3 đỉnh. Hình 4.30 cho thấy dùng cửa sổ Hanning cho kết quả tương đối tốt hơn lúc không dùng cửa sổ, ngay cả lúc chiều dài tín hiệu con nhỏ ($L_b = 200$).

Đồ thị trên Hình 4.31 cho thấy chất lượng của ước lượng trong trường hợp không có nhiều quan sát tăng dần với chiều dài L_b của khối dữ liệu con. Sai số ước lượng hầu như không đáng kể lúc L_b rất lớn.

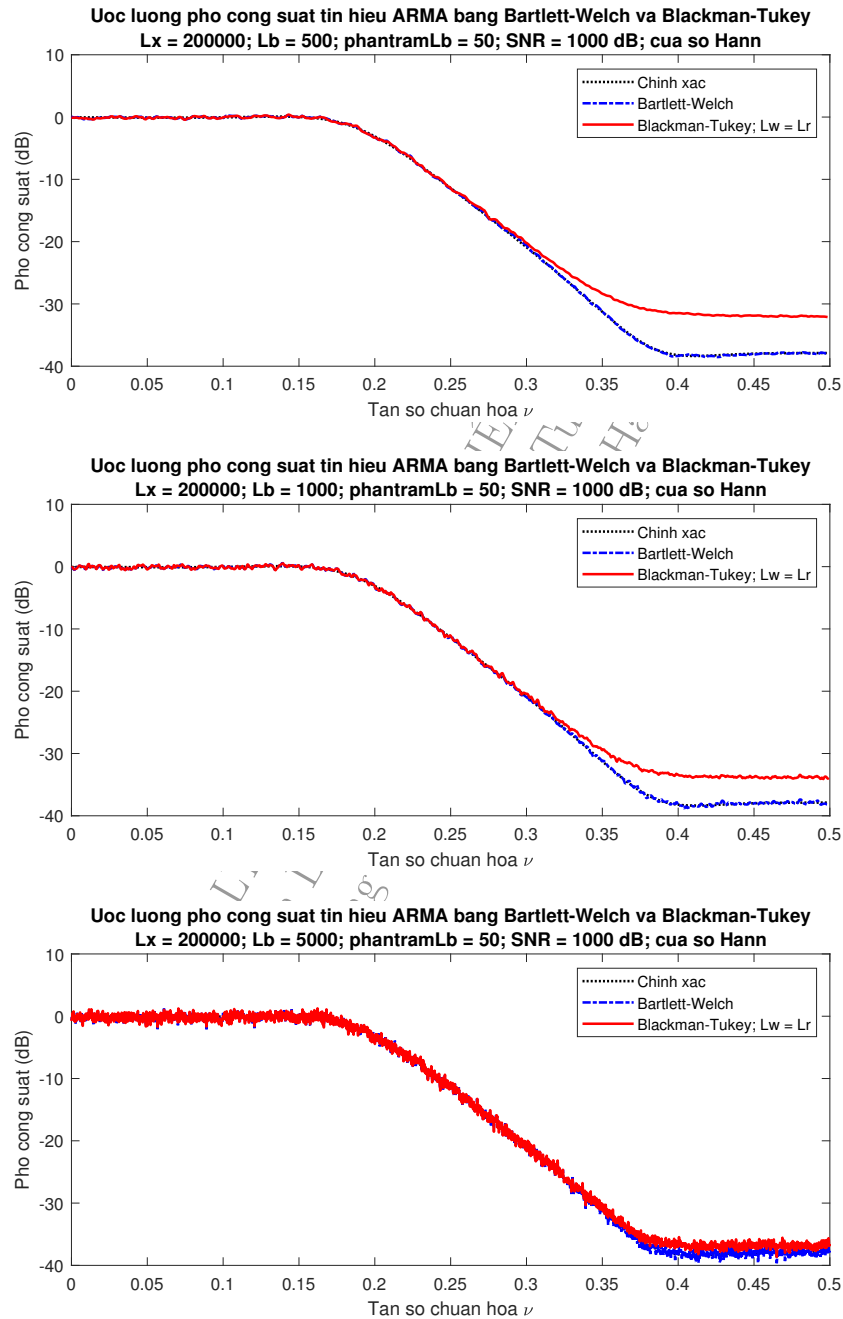
Tuy nhiên, cũng giống như các trường hợp đã xét trước đây, lúc có nhiều quan sát, nhiều áp đặt giới hạn chất lượng. Tuy nhiên, khác với trường hợp điều hòa hay trường hợp tín hiệu ARMA có phổ dạng xung chứa 3 đỉnh (tương đối giống như tín hiệu điều hòa), tín hiệu thông thấp (hay thông dải) có phổ công suất gần như là hằng số, ta thấy ngay lúc nhiều lớn, ta không thể nào đạt được ước lượng phổ có chất lượng chấp nhận được (xem Hình 4.32).



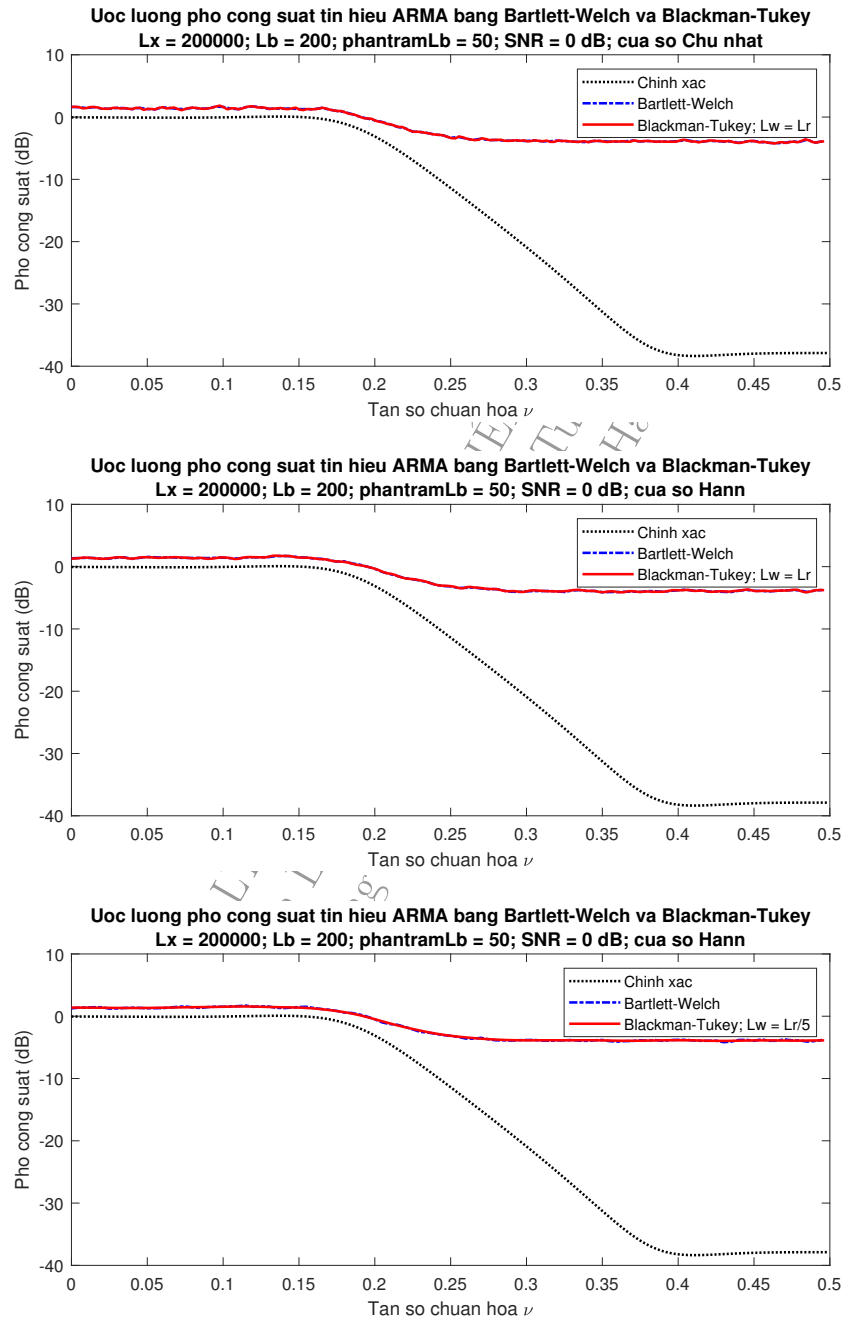
Hình 4.30 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng thông thấp bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ Hann và cửa sổ chữ nhật, các cửa sổ có chiều dài bằng tự tương quan.

4.7 Tóm tắt chương

Ước lượng phổ công suất là một vấn đề quan trọng trong công nghiệp như trong lĩnh vực viễn thông, điều khiển, xử lý tiếng nói và ngay cả trong kinh tế tài chính nữa. Chương này trình bày một số phương pháp ước lượng phổ như tuần hoàn đồ và phương pháp Blackman-Tukey. Thêm vào đó ta có phương pháp Welch mà ta có thể kết hợp với cả hai phương pháp vừa nêu ra. Công cụ tính toán là FFT.



Hình 4.31 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng thông thấp bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; $\text{SNR}_{\text{dB}} = \infty$, cửa sổ Hann và có chiều dài bằng tự tương quan, tín hiệu con có chiều dài từ trên xuống là 500, 1000 và 5000.



Hình 4.32 Ước lượng phổ tín hiệu ARMA có phổ dạng thông thấp bằng các phương pháp Bartlett-Welch và Blackman-Tukey; nhiễu quan sát lớn ($\text{SNRdB} = 0$), cửa sổ chữ nhật và cửa sổ Hann, có chiều dài bằng hoặc 20% tự tương quan.

Bài tập Chương 4

4.1 Cho $y(t)$ là một nhiễu trắng có trung bình triệt tiêu và phương sai là σ^2 . Đồng thời

$$Y(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} y(t) e^{-i\omega_k t}; \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N} k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

là DFT chuẩn hóa tính tại các tần số Fourier.

a) Hãy tìm các hiệp phương sai

$$\mathbb{E}\{Y(\omega_k)Y^*(\omega_r)\}, \quad k, r = 0, \dots, N-1.$$

b) Dùng kết quả trên để chỉ ra rằng tuần hoàn đồ $\hat{\omega}_k = |Y(\omega_k)|^2$ là một ước lượng không lệch của PSD của $y(t)$.

c) Tính chất không lệch có đúng với $\omega \neq \omega_k$ không? Hãy giải thích?



4.2 Xét một bộ ước lượng phổ Bartlett và giả sử $LM = N$.

a) Hãy chỉ ra rằng bộ ước lượng Bartlett có thể viết dưới dạng sau:

$$\hat{\phi}_B(\omega) = \sum_{k=-(M-1)}^{(M-1)} \tilde{r}(k) e^{-i\omega k},$$

trong đó

$$\tilde{r}(k) = \sum_{t=k+1}^N \alpha(k, t) y(t) y^*(t - k), \quad 0 \leq k < M,$$

với $\alpha(k, t)$ cần tìm. Lưu ý rằng dạng này gần giống với bộ ước lượng phổ Blackman-Tukey.

- b) Sử dụng biểu thức của $\alpha(k, t)$ để chỉ ra rằng bộ ước lượng Bartlett kém hơn bộ ước lượng Blackman-Tukey (đặc biệt với N nhỏ).
- c) Hãy tìm $\alpha(k, t)$ cho phương pháp Welch.

4.3 Xét bộ ước lượng Blackman-Tukey như sau:

$$\hat{\phi}_{\text{BT}}(\omega) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} \omega(k) \hat{R}_{XX}(k) e^{-i\omega k}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $\mathbb{E}\{\hat{R}_{XX}(k)\} = R_{XX}(k)$. Hãy tìm các trọng số $\{\omega(k)\}_{k=-M+1}^{M-1}$ sao cho sai số bình phương sau là nhỏ nhất:

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\phi(\omega) - \mathbb{E}\{\hat{\phi}_{\text{BT}}(\omega)\} \right]^2 d\omega.$$

4.4 Cho một quá trình ngẫu nhiên tạo từ một tín hiệu sin và nhiễu trắng sau:

$$x(n) = A \sin(n\omega_0 + \phi) + w(n),$$

trong đó phương sai của $w(n)$ là σ_w^2 .

- a) Giả sử ba giá trị đầu của hàm tự tương quan được ước lượng có giá trị là

$$R_{XX}(0) = 1, \quad R_{XX}(1) = \beta, \quad R_{XX}(2) = 0.$$

Hãy ước lượng phổ bằng phương pháp Blackman-Tukey với cửa sổ hình chữ nhật.

- b) Tính ước lượng phổ dùng tuần hoàn đồ sử dụng N mẫu của $x(n)$. Ước lượng này có thiên lệch không?

4.5 Ta sử dụng phương pháp Bartlett để ước lượng phổ công suất của một quá trình từ một chuỗi gồm $N = 2000$ mẫu.

- a) Hãy xác định chiều dài tối thiểu L sử dụng cho mỗi chuỗi nếu muốn độ phân giải $\Delta f = 0,005$?
 b) Giải thích tại sao không nên tăng L vượt giá trị tìm thấy ở câu a).



4.6 Chỉ số chất lượng của ước lượng phổ được định nghĩa là nghịch đảo của phương sai như sau:

$$Q = \frac{1}{\text{Var}\{\hat{P}_{XX}^K(f)\}}.$$

Sử dụng phương pháp Bartlett, hãy tìm số lượng mẫu N tối thiểu cần để có độ phân giải $\Delta f = 0,005$ và chỉ số chất lượng lớn gấp hai lần so với sử dụng tuần hoàn đồ.



4.7 Xét một tín hiệu thời gian liên tục $x_a(t)$ có băng thông giới hạn tới 4 kHz. Người ta thu lại 7 giây tín hiệu để xử lý. Ta muốn ước lượng phổ công suất của $x_a(t)$ sử dụng dữ liệu sẵn có trong thuật toán FFT cơ số 2 với yêu cầu về độ phân giải tối thiểu 20 Hz. Giả sử ta dùng phương pháp Bartlett.

- a) Nếu dữ liệu được thu với tốc độ Nyquist, chiều dài tín hiệu con tối thiểu để đạt độ phân giải yêu cầu là bao nhiêu?
 b) Sử dụng chiều dài tối thiểu ở câu a), có bao nhiêu tín hiệu con có được để lấy trung bình trong 7 giây dữ liệu thu được?
 c) Tốc độ lấy mẫu ảnh hưởng như nào tới độ phân giải và phương sai của ước lượng? Việc tăng tốc độ lấy

mẫu lớn hơn tốc độ Nyquist có đem lại lợi ích gì không?

XU LY TIN HIEU NGAU NHIEN
Nguyễn Linh Trung, Huỳnh Hữu Tuệ
Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025

XỬ LÝ TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN
Nguyễn Linh Trung, Huỳnh Hữu Tuệ
Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025

Tài liệu tham khảo

- [1] “Matlab control random number generator (rng),” <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/rng.html>.
- [2] A. V. Balakrishnan, “A note on the sampling principle for continuous signals,” *IRE Transactions on Information Theory*, vol. 3, no. 2, pp. 143–146, 1957.
- [3] M. S. Bartlett, “Smoothing periodograms from time-series with continuous spectra,” *Nature*, vol. 161, no. 4096, pp. 686–687, 1948.
- [4] R. B. Blackman and J. W. Tukey, “The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering—part i,” *Bell System Technical Journal*, vol. 37, no. 1, pp. 185–282, 1958.
- [5] —, “The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering—part ii,” *Bell System Technical Journal*, vol. 37, no. 2, pp. 485–569, 1958.
- [6] R. B. D’Agostino and M. A. Stephens, *Goodness-of-Fit Techniques*. Marcel Dekker, 1986, trang 70, 105.
- [7] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed. CRC press, 2003.
- [8] L. Devroye, “General principles in random variate generation,” in *Non-uniform random variate generation*. Springer, 1986, pp. 27–82.
- [9] A. M. Ferrenberg, D. Landau, and Y. J. Wong, “Monte carlo simulations: Hidden errors from “good” random number generators,” *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 23, p. 3382, 1992.
- [10] F. J. Harris, “On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, no. 1, pp. 51–83, 1978.
- [11] G. Jenkins and D. G. Watts, *Spectral analysis and its applications*. San Francisco, CA: Holden-Day, 1968.
- [12] G. M. Jenkins, “General considerations in the analysis of spectra,” *Technometrics*, vol. 3, no. 2, pp. 133–166, 1961.
- [13] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation*. Prentice-Hall, 1988.
- [14] P. L’Ecuyer, “A tutorial on uniform variate generation,” in *Proceedings of the 21st Conference on Winter Simulation*, 1989, pp. 40–49.
- [15] —, “History of uniform random number generation,” in *2017 Winter Simulation Conference (WSC)*. IEEE, 2017, pp. 202–230.

- [16] P. A. W. Lewis, A. S. Goodman, and J. M. Miller, "A pseudo-random number generator for the System/360," *IBM Systems Journal*, vol. 8, no. 2, pp. 136–146, 1969.
- [17] M. Matsumoto and T. Nishimura, "Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator," *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, vol. 8, no. 1, pp. 3–30, 1998.
- [18] Nguyễn Linh Trung and Huỳnh Hữu Tuệ, *Xử lý tín hiệu ngẫu nhiên. Tập 2: Nâng cao*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025.
- [19] —, *Xử lý tín hiệu ngẫu nhiên. Tập I: Cơ sở*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025.
- [20] Nguyễn Linh Trung, Trần Đức Tân, and Huỳnh Hữu Tuệ, *Xử lý tín hiệu số*, 2nd ed. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2025.
- [21] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1991.
- [22] E. Parzen, "Mathematical considerations in the estimation of spectra," *Technometrics*, vol. 3, no. 2, pp. 167–190, 1961.
- [23] —, "On estimation of a probability density function and mode," *The annals of mathematical statistics*, vol. 33, no. 3, pp. 1065–1076, 1962.
- [24] K. M. Prabhu, *Window functions and their applications in signal processing*. Taylor & Francis, 2014.
- [25] M. Priestley, "Basic considerations in the estimation of spectra," *Technometrics*, vol. 4, no. 4, pp. 551–564, 1962.
- [26] M. Rosenblatt, "Remarks on some nonparametric estimates of a density function," *The Annals of Mathematical Statistics*, pp. 832–837, 1956.
- [27] S. M. Ross, *Simulation*, 4th ed. Elsevier, 2006.
- [28] A. Schuster, "On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena," *Terrestrial Magnetism*, vol. 3, no. 1, pp. 13–41, 1898.
- [29] D. W. Scott, "On optimal and data-based histograms," *Biometrika*, vol. 66, no. 3, pp. 605–610, 1979.
- [30] B. W. Silverman, *Density estimation for statistics and data analysis*. Routledge, 2018.
- [31] B. Silverman, "Choosing the window width when estimating a density," *Biometrika*, vol. 65, no. 1, pp. 1–11, 1978.
- [32] S. Tezuka, *Uniform random numbers: Theory and practice*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 315.
- [33] A. J. Viterbi, *CDMA: principles of spread spectrum communication*. Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1995.
- [34] M. Waterman and D. Whiteman, "Estimation of probability densities by empirical density functions," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 9, no. 2, pp. 127–137, 1978.
- [35] P. Welch, "The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms," *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*, vol. 15, no. 2, pp. 70–73, 1967.