

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
НЕЧЕТКОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Учебное пособие

Рекомендовано методической комиссией ИИТММ  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению 02.03.02  
«Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Нижний Новгород  
2024

УДК 519. 854(075.8)

ББК 22. 19я73

Э 16

Э-16 Баландин Д.В., Кузенков О.А., Малышев Д.С., Приставченко О.В.,  
Эгамов А.И. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКОЙ  
ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ. Учебное пособие. – Нижний Новгород:  
Нижегородский госуниверситет, 2024. – 83 с.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, доцент **Д.Т. Чекмарев** (ННГУ),  
кандидат физ.-мат. наук **Д.С. Талецкий** (ВШЭ НН)

Учебное пособие содержит теоретические материалы по дискретной оптимизации: постановку задачи о назначениях, методы ее решения, постановку модифицированной нечеткой задачи о назначениях, описание эвристических методов решения, математические модели, связанные с нею. Разобраны случаи параметров задачи, когда представленные эвристические методы являются оптимальными. На основе этих теоретических данных студентам З курса направления 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» (ФИИТ) предлагается выполнить в рамках освоения дисциплины «Вычислительные методы» лабораторную работу «Разработка СППР по переработке сахарной свеклы».

УДК 519. 854(075.8)

ББК 22. 19я73

© Баландин Д.В., Кузенков О.А., Малышев Д.С.,  
Приставченко О.В., Эгамов А.И.

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2024

## Оглавление

Введение.....	5
1. Математическая постановка задачи и некоторые сведения из теории дискретной оптимизации.....	9
1.1 Задача о назначениях .....	9
1.2 Эквивалентная постановка задачи.....	10
1.3 Алгоритмы решения задачи о назначениях.....	11
1.4 Венгерский алгоритм .....	11
1.5 Алгоритм Литтла .....	14
1.6 Оптимальность тождественной перестановки .....	19
1.7 Альтернативное задание матрицы состояний .....	20
2. Вариант нечеткой задачи о назначениях и эвристические методы ее решения .....	22
2.1 Постановка модифицированной нечеткой задачи о назначениях.....	22
2.2 Различные трактовки задач, которые сводятся к модифицированной задаче о назначениях.....	22
2.3 Эвристические методы решения.....	24
2.4 Коэффициенты пропорциональности зависят только от $j$ .....	25
2.5 Коэффициенты пропорциональности зависят только от $i$ .....	28
2.6 Комбинации базовых методов .....	30
Теорема о жадно-бережливом методе.....	30
3. Эвристические методы решения для нечеткой задачи о назначениях со строчно-изоантитонной матрицей.....	34
3.1 Бережливо-жадный метод .....	34
3.2 Метод СТГ .....	36
4. Построение экстремальной матрицы с максимальной разницей между максимальным и минимальным значениями целевой функции в задаче о назначениях при альтернативном задании матрицы состояний .....	39
4.1 Вид строк в экстремальной матрице .....	39
4.2 Порядок строк в экстремальной матрице .....	41
4.3 Первое свойство перестановки $\gamma$ .....	44

4.4 Второе свойство перестановки $\gamma$ .....	45
4.5 Случай, когда $\exists \chi_j = 0$ .....	47
4.6 Свойство последовательности $\gamma(i)$ , если $\chi_i = 1$ . ....	47
4.7 Примеры экстремальных матриц, $n$ – четное.....	48
4.8 Вычисление $\Delta S(C, p)$ .....	49
4.9 Примеры экстремальных матриц, $n$ – нечетное.....	50
4.10 Сравнение $\Delta S^0(C, p)$ и $\Delta S(C, p)$ .....	50
4.11 Сравнение $\Delta S(C, p)$ и $\Delta S(C, p + 1)$ .....	52
4.12 Для экстремальной матрицы оптимальное значение $p = n$ .....	53
4.13 Для экстремальной матрицы оптимальное значение $p = [(n+1)/2]+1$	54
4.14 Пример для $n = 15$ .....	55
5. Постановка задачи о нахождении плана переработки сахарной свеклы, максимизирующего выход сахара и эвристические стратегии ее решения....	56
5.1 Математическая модель деградации сахарной свеклы .....	56
5.2 Процесс дозаривания .....	57
5.3 Распределение параметров на заданных отрезках .....	58
5.4 Задача оптимизации .....	59
5.5 Потери сахара при переработке .....	60
5.6 Эвристические стратегии .....	61
5.7 Вариации жадной стратегии.....	63
6. Вычислительный эксперимент .....	65
7. Описание виртуального эксперимента и необходимые выводы из его результатов.....	67
8. Интерфейс и скриншоты работы программы .....	70
Заключение .....	76
Список литературы .....	77

## **Введение**

Настоящее учебное пособие посвящено одной из известных задач дискретной оптимизации – задаче о назначениях. Дискретная оптимизация получила свое развитие в середине прошлого века в связи с появлением военных задач логистики, транспортировки, шифровки сообщений и т. п. и продолжает свое развитие в XXI веке. Обзор о дискретной оптимизации смотри в [1].

В учебном пособии показано применение к задаче о назначениях основных алгоритмов для ее решения: венгерского алгоритма и алгоритма Литтла, а также ее решение в некоторых частных случаях, связанных с матрицами Монжа. Далее рассматривается модифицированная задача о назначениях, ее основное отличие от классической задачи состоит в том, что изначально матрица состояний полностью не известна, а выбор следующего  $j$ -го элемента, входящего в целевую функцию приходится делать, исходя из информации только о первых  $j$  столбцах матрицы. Эта модификация относится к нечетким задачам, которые в отличие от четких (классических) задач, как правило, не имеют в общем случае точного решения, но в последнее время все чаще привлекают внимание многих исследователей, см., например, [2], в том числе, о нечетких задачах о назначениях – [3], [4]. В общем случае для их решения необходимо осуществлять поиск эвристических методов, которые могли бы быть квазиоптимальными для достаточно широкого класса параметров матрицы состояний. «Под эвристическими методами понимаются различные процедуры, направленные на сокращение перебора вариантов. Эвристические методы всегда увеличивают вероятность получения работоспособного, но не всегда оптимального, решения интеллектуальной творческой задачи, возникшей, например, из-за не разработанности конкретной теории, неполноты или недостоверности исходных данных. Эвристические методы способны находить решения даже в очень сложных, непредвиденных ситуациях, однако при этом по эффективности они уступают

точным алгоритмическим подходам» [5]. Эвристические методы для частных случаев параметров задачи являются оптимальными и квазиоптимальными для параметров близких к этим значениям. В пособии рассматриваются различные эвристические методы и приводятся условия параметров матрицы состояний, при которых эти методы будут оптимальными.

Необходимо отметить, что представленная теоретическая информация находит практическое применение, например, в математических моделях математико-экономических задач агропромышленного комплекса. Особенно удачно эта теория применяется для построения математической модели плана (графика) переработки конечного числа партий сахарной свеклы на сахарном производстве.

Роль сахара в жизни человека многогранна, поэтому сахар является важным пищевым и стратегическим продуктом [6]. Получение сахара является очень энергоемким производством, поэтому в сахарном производстве возникает большое количество прикладных задач, так или иначе связанных с оптимизацией. При переработке различных сортов сахарной свеклы встает вопрос о порядке их переработки. Изначально информация о сахаристости партий на каждом этапе или полная информация о деградации сахарной свеклы во время хранения отсутствуют, поэтому априори получить оптимальный план переработки для максимизации выхода конечного продукта (сахара) не представляется возможным. Необходимо искать такие стратегии переработки сырья, которые являлись бы квазиоптимальными при некоторых заранее известных условиях на параметры партий (сортов). Об учебно-исследовательских проектах, основанных на этой прикладной задаче см. [7-9]. Опираясь на указанные работы, была написана и опубликована учебно-методическая разработка [10]. В ней студентам было предложено:

1) изучить две принципиально различные базовые стратегии: жадную и бережливую, придумать свои, новые стратегии;

2) написать программу на алгоритмическом языке «Python», в которой генерируются параметры перерабатываемых партий сырья;

3) осуществить сравнение усредненных значений целевой функции – коэффициента пропорциональности между массой перерабатываемой свеклы на этапе и выходом сахара в конце сезона;

4) построить усредненную динамику накопления полученного сахара при различных стратегиях в течение сезона.

Усложненные математические модели переработки сахарной свеклы имеют место при рассмотрении в математической модели отрицательного влияния на выход сахара неорганических удобрений [11], процесса дозаривания [12], при различных форс-мажорных обстоятельствах, например, при временной остановке производства для ремонта оборудования [13]. Вследствие этого в качестве квазиоптимальных стратегий появляются усложненные комбинации базовых стратегий, которые в подавляющем количестве экспериментов показывают лучший результат, чем основные стратегии. Изучению подобных стратегий по методике, описанной в статьях авторов, посвящено настоящее учебное пособие. Кроме того, целью изучения данного учебного пособия является получение умения самостоятельно находить эвристические методы (стратегии) для решения поставленной задачи.

Программу отыскания наилучшей стратегии переработки предлагается написать в виде системы поддержки принятия решений (СППР) [14]. Использование СППР помогает руководству организаций и предприятий принимать обоснованные решения по улучшению своей деятельности и оставляет в будущем возможность внести изменения в процессе эксплуатации. Существует множество примеров использования СППР, в том числе в агропромышленном комплексе, например [15], [16]. В предложенной ситуации разработанный блок СППР помогает директору завода (или кому-то из руководящего состава) принять стратегию переработки партий сахарной

свеклы для максимизации выхода конечного продукта (сахара) в предстоящем сезоне. Настоящее учебное пособие позволяет студентам обрести ценную теоретическую информацию по дискетной оптимизации, решить на ее основе практическую задачу, связанную с экономикой сахарного производства, написать программу, дающую не только некий математический результат, а также доступный в использовании, осуществляющий реальную помощь, имеющий дружелюбный интерфейс и красивую визуализацию программный продукт, по требованиям схожий с тем программным обеспечением, разработкой которого и занимаются выпускники этого направления института ИТММ. Скриншоты программ, написанных вследствие выполнения лабораторной работы представлены в конце данного учебного пособия.

Работа над учебным пособием разделилась между авторами следующим образом: глава 4 написана А. И. Эгамовым, все остальные главы написаны совместно. Материалы учебного пособия могут быть полезны для организации текущего, промежуточного контроля и самостоятельной работы студентов по направлению ФИИТ.

# 1. Математическая постановка задачи и некоторые сведения из теории дискретной оптимизации

## 1.1 Задача о назначениях

Вначале сформулируем математическую постановку сбалансированной задачи о назначениях (классический вариант) [17], [18].

Пусть дана матрица  $C$  размера  $n \times n$  с неотрицательными компонентами  $c_{ij}$ , где элемент  $c_{ij}$  соответствует стоимости выполнения  $j$ -го вида работ  $i$ -ым работником. Необходимо найти такое соответствие работ исполнителям (одну работу одному исполнителю), чтобы расходы на оплату труда были наименьшими. Если цель состоит в нахождении назначения с наибольшей стоимостью, то решение сводится к решению аналогичной задачи путём замены каждой стоимости  $c_{ij}$  на разность между максимальной стоимостью и  $c_{ij}$ , т.е. матрица себестоимостей требует преобразования по правилу  $c'_{ij} = \max\{c_{ij}\} - c_{ij}$ . Матрицу  $C$  обычно называют весовой (или платежной), мы далее будем называть ее матрицей состояний, так как в различных задачах о назначениях матрица  $C$  определяет различные составляющие, например, эффективность.

Введем переменные  $x_{ij}$  следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый исполнитель назначен на } j\text{-ую работу;} \\ 0, & \text{если } i\text{-ый исполнитель не назначен на } j\text{-ую работу.} \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, значения  $x_{ij}$  образуют матрицу назначений  $X$  размера  $n \times n$ , состоящую из нулей и единиц. Запишем целевую функцию  $S(X)$  – суммарную стоимость выполнения всех работ:

$$S(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (2)$$

которую нужно минимизировать.

Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи. Выполнение условия исполнения работником только одной работы означает, что каждая строка матрицы назначений  $X$  содержит только одно значение равное единице, а все остальные равны нулю, т.е.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Выполнение условия соответствия каждой работе только одного исполнителя означает, что каждый столбец матрицы назначений  $X$  содержит только одно значение равное единице, а все остальные равны нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad x_{ij} = 0 \text{ или } 1. \quad (4)$$

Целевая функция (2) и ограничения (1), (3), (4) составляют математическую постановку задачи о назначениях.

## 1.2 Эквивалентная постановка задачи

Дадим эквивалентную постановку задачи о назначениях. Данна матрица  $C$  размера  $n \times n$  с неотрицательными компонентами  $c_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Выбор строки относительно столбца описывается перестановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

натуральных чисел от 1 до  $n$ . Целевая функция имеет вид:

$$S(\sigma) = c_{\sigma(1)1} + c_{\sigma(2)2} + c_{\sigma(3)3} + \dots + c_{\sigma(n)n}. \quad (5)$$

Оптимизационная задача состоит в том, чтобы найти такую перестановку  $\sigma$  чисел от 1 до  $n$  (последовательность переработки имеющихся партий сырья), при которой значение  $S(\sigma)$ , вычисляемое по формуле (5), будет минимальным (максимальным). Назовем перестановку  $\sigma$ , при которой функция  $S(\sigma)$  принимает максимальное значение – максимальной, а принимает минимальное значение – минимальной. Нетрудно видеть, что формула (5) является аналогом формулы (2), а перестановка  $\sigma$  гарантирует выбор

элементов, такой, что в каждой строке и в каждом столбце выбран только один элемент, входящий в формулу (5).

### 1.3 Алгоритмы решения задачи о назначениях

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. При ее решении методом полного перебора потребуется  $O(n!)$  операций. Ее можно решить любым способом, пригодным для решения транспортной задачи, в том числе симплекс-методом, однако, для нее имеются более приспособленные алгоритмы. Исторически первым и самым широко известным алгоритмом, который применяется для решения задачи о назначениях, является венгерский алгоритм [17]. Для решения задачи о назначениях применяются также другие алгоритмы: алгоритм Мака, алгоритм Литтла [19], алгоритм аукциона [20] и другие. Ниже будет рассказано о венгерском алгоритме и алгоритме Литтла. Подробно об алгоритме Мака и пример его применения см. [17].

### 1.4 Венгерский алгоритм

Венгерский алгоритм был открыт в 1955 году Гаральдом Куном, чуть позже было доказано, что его полиномиальная сложность  $O(n^4)$ , а еще спустя время этот алгоритм был модифицирован до полиномиальной сложности  $O(n^3)$ .

Алгоритм.

1. Если задача решается на максимум, то в каждой строке матрицы необходимо найти максимальный элемент, его же вычесть из каждого элемента соответствующей строки и умножить всю матрицу на  $(-1)$ . Если задача решается на минимум, то этот шаг необходимо пропустить.

2. В каждой строке матрицы состояний находят минимальный элемент и вычитают его из всех элементов строки.

3. В каждом столбце матрицы состояний находят минимальный элемент и вычитают его из всех элементов столбца.

4. Находят строку с одним 0, заключают этот 0 в квадрат и называют отмеченным. В столбце, содержащем отмеченный 0, все 0 зачёркивают и дальше не рассматривают. Продолжают шаг, пока возможно.

5. Находят столбец с одним 0 и отмечают найденный 0. В строке, содержащей отмеченный 0, все остальные 0 зачёркивают. Продолжают шаг, пока возможно.

6. Если после выполнения шагов 4-5 остались неотмеченные 0, то отмечают любой из них, а в строке и столбце, содержащих отмеченный 0, все остальные 0 зачёркивают.

7. Оптимальное решение достигнуто в том случае, если в каждой строке и в каждом столбце матрицы есть ровно один отмеченный 0. В противном случае проводят минимальное число пересекающихся вертикальных и горизонтальных прямых через все 0.

8. Среди не зачёркнутых прямыми чисел ищут минимальное, вычитая его из всех не зачёркнутых чисел и прибавляя ко всем числам, стоящим на пересечении двух (вертикальной и горизонтальной) прямых. К полученной матрице применяют алгоритм, начиная с шага 4.

Пример работы венгерского алгоритма

Для простоты восприятия матрицы состояний представлены в виде таблиц. Ниже представлена пошаговая реализация венгерского алгоритма для нахождения максимума целевой функции.

8	4	7	10	6
7	5	7	5	6
7	6	8	8	9
4	2	7	6	8
2	4	9	9	5

**Начальная матрица**

2	6	3	0	4
0	2	0	2	1
2	3	1	1	0
4	6	1	2	0
7	5	0	0	4

**Шаг 1**

2	4	3	0	4
0	0	0	2	1
2	1	1	1	0
4	4	1	2	0
7	3	0	0	4

**Шаг 2-3**

2	4	3	<b>0</b>	4
<b>0</b>	0	0	2	1
2	1	1	1	<b>0</b>
4	4	1	2	0
7	3	<b>0</b>	0	4

**Шаг 4-6**

2	4	3	<b>0</b>	4
<b>0</b>	0	0	2	1
2	1	1	1	<b>0</b>
4	4	1	2	0
7	3	<b>0</b>	0	4

**Шаг7**

2	4	3	0	5
0	0	0	2	2
1	0	0	0	0
3	3	0	1	0
7	3	0	0	5

**Шаг 8**

2	4	3	0	5
0	0	0	2	2
1	0	0	0	0
3	3	0	1	0
7	3	0	0	5

### Оптимальная перестановка

8	4	7	10	6
7	5	7	5	6
7	6	8	8	9
4	2	7	6	8
2	4	9	9	5

### Оптимальное решение

#### 1.5 Алгоритм Литтла

Задача о назначениях в математической постановке представляет собой задачу дискретной оптимизации, поэтому для ее решения можно применять алгоритмы целочисленного программирования. В настоящее время наиболее надежным средством решения целочисленных задач, встречающихся в практических исследованиях, является метод «ветвей и границ», предложенный в 1960 году А. Ленд и Э. Дойг [21], его применение к задаче о

назначениях обсуждалось авторами настоящего пособия в [22]. Главный недостаток метода «ветвей и границ» заключается в необходимости полностью решать задачи линейного программирования, ассоциированные с каждой из вершин многогранника допустимых решений. Для задач большой размерности это требует значительных и неоправданных с практической точки зрения затрат времени. Менее трудоемким методом решения поставленной задачи в этом случае является алгоритм Литтла. Данный алгоритм является частным случаем применения метода «ветвей и границ» и относится к числу точных алгоритмов, однако при решении задач большой размерности, когда разброс данных невелик, этот алгоритм сходится довольно-таки медленно. Общая идея проста: нужно разделить огромное число перебираемых вариантов на классы и получить оценки (снизу – в задаче минимизации, сверху – в задаче максимизации) для этих классов, чтобы иметь возможность отбрасывать варианты не по одному, а целыми классами. Трудность состоит в том, чтобы найти такое разделение на классы (ветви) и такие оценки (границы), чтобы процедура была эффективной. Применительно к задаче о назначениях алгоритм Литтла можно сформулировать в виде следующей последовательности шагов.

### Алгоритм Литтла

Шаг 1. Если задача решается на максимум, то в каждой строке матрицы необходимо найти максимальный элемент, его же вычесть из каждого элемента соответствующей строки и умножить всю матрицу на  $(-1)$ . Если задача решается на минимум, то этот шаг необходимо пропустить.

Шаг 2. В каждой строке матрицы стоимости найдем минимальный элемент и вычтем его из всех элементов строки. Сделаем это и для столбцов, не содержащих нуля. Получим матрицу стоимости, каждая строка и каждый столбец которой содержат хотя бы один нулевой элемент.

Шаг 3. Выбираем пару претендентов на ветвление  $(i, j)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , для которых  $c_{ij} = 0$ . Для выделенных претендентов на назначение рассчитываем

коэффициент  $\Gamma(i, j) = \min_{p \neq j} c_{ip} + \min_{q \neq i} c_{qj}$ . Из всех коэффициентов  $\Gamma(i, j)$  выбираем максимальный:  $\Gamma(k, l) = \max \Gamma(i, j)$ . Пара  $(k, l)$  включается в оптимальное решение, что в ее классической постановке означает, что на работу  $l$  назначается  $k$ -ый исполнитель.

Шаг 4. Т.к. каждому исполнителю соответствует только одна работа, то удаляем  $k$ -ую строку и  $l$ -ый столбец.

Шаг 5. Повторяем шаги 2–4 алгоритма до тех пор, пока порядок матрицы не станет равным двум. Затем в текущую матрицу назначений  $X$  вносим два недостающих назначения, определяющиеся однозначно матрицей второго порядка. Получаем оптимальное решение. В ходе решения ведется подсчет текущего значения нижней границы, равной сумме всех вычтенных элементов в строках и столбцах. Итоговое значение нижней границы совпадает с оптимальным значением целевой функции  $S$ .

Пример работы алгоритма Литтла

8	4	7	10	6
7	5	7	5	6
7	6	8	8	9
4	2	7	6	8
2	4	9	9	5

**Начальная матрица**

2	6	3	0	4
0	2	0	2	1
2	3	1	1	0
4	6	1	2	0
7	5	0	0	4

**Шаг 1**

2	4	3	0	4
0	0	0	2	1
2	1	1	1	0
4	4	1	2	0
7	3	0	0	4

## Шаг 2

Имеется 8 нулевых элементов:  $c_{14}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{35}, c_{45}, c_{53}, c_{54}$ . Для каждого из них считаем  $\Gamma(i, j) = \min_{p \neq j} c_{ip} + \min_{q \neq i} c_{qj}$ .

$$\Gamma(1,4) = 2 + 0 = 2, \quad \Gamma(2,1) = 0 + 2 = 2, \quad \Gamma(2,2) = 0 + 1 = 1, \quad \Gamma(2,3) = 0 + 1 = 1,$$

$$\Gamma(3,5) = 1 + 0 = 1, \quad \Gamma(4,5) = 1 + 0 = 1, \quad \Gamma(5,3) = 0 + 0 = 0, \quad \Gamma(5,4) = 0 + 0 = 0.$$

Наибольшее значение равно  $\Gamma(1,4) = \Gamma(2,1) = 2$ . Следовательно, для оптимальной перестановки  $\sigma^*$ :  $\sigma^*(4) = 1, \sigma^*(1) = 2$ .

2	4	3	0	4
0	0	0	2	1
2	1	1	1	0
4	4	1	2	0
7	3	0	0	4

## Шаг 3

	2	3	5
3	1	1	0
4	4	1	0
5	3	0	4

## Шаг 4

	2	3	5
3	0	1	0
4	3	1	0
5	2	0	4

**Шаг 5,2,3**

Имеется 4 нулевых элементов:  $c_{32}$ ,  $c_{35}$ ,  $c_{45}$ ,  $c_{53}$ . Для каждого из них считаем  $\Gamma(i, j) = \min_{p \neq j} c_{ip} + \min_{q \neq i} c_{qj}$ .  $\Gamma(3,2) = 0 + 2 = 2$ ,  $\Gamma(3,5) = 0 + 0 = 0$ ,  $\Gamma(4,5) = 1 + 0 = 1$ ,  $\Gamma(5,3) = 2 + 1 = 3$ . Наибольшее значение равно  $\Gamma(5,3) = 3$ . Для оптимальной перестановки  $\sigma^*$ :  $\sigma^*(3) = 5$ .

	2	3	5
3	0	1	0
4	3	1	0
5	2	0	4

**Шаг 3**

	2	5
3	0	0
4	3	0

**Шаг 4**

Для оптимальной перестановки  $\sigma^*$ :  $\sigma^*(2) = 3$ ,  $\sigma^*(5) = 4$ .

8	4	7	10	6
7	5	7	5	6
7	6	8	8	9
4	2	7	6	8
2	4	9	9	5

**Оптимальное решение**

## 1.6 Оптимальность тождественной перестановки

Разберем случаи, когда оптимальной является тождественная перестановка, то есть в матрице  $C$  выбираются элементы, стоящие на главной диагонали.

Матрица  $C$  называется матрицей Монжа [23], [24], если выполняется неравенство:

$$c_{ij} + c_{kl} \leq c_{il} + c_{kj} \text{ для всех } 1 \leq i < k \leq n, 1 \leq j < l \leq n.$$

**Теорема 1.** Для того, чтобы матрица  $C$  была бы матрицей Монжа необходимо и достаточно, чтобы

$$c_{ij} + c_{i+1,j+1} \leq c_{ij+1} + c_{i+1,j} \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq n-1.$$

Матрица  $C$  называется матрицей анти-Монжа, если выполняется неравенство:

$$c_{ij} + c_{kl} \geq c_{il} + c_{kj} \text{ для всех } 1 \leq i < k \leq n, 1 \leq j < l \leq n.$$

**Теорема 2.** Для того, чтобы матрица  $C$  была бы матрицей анти-Монжа необходимо и достаточно, чтобы

$$c_{ij} + c_{i+1,j+1} \geq c_{ij+1} + c_{i+1,j} \text{ для всех } 1 \leq i, j \leq n-1.$$

Матрица  $C$  удовлетворяет слабому условию Монжа, если выполняется неравенство:

$$c_{ii} + c_{kl} \leq c_{il} + c_{ki} \text{ для всех } 1 \leq i < k, l \leq n. \quad (6)$$

Матрица  $C$  удовлетворяет слабому условию анти-Монжа, если выполняется неравенство:

$$c_{ii} + c_{kl} \geq c_{il} + c_{ki} \text{ для всех } 1 \leq i < k, l \leq n. \quad (7)$$

**Теорема 3.** Если матрица  $C$  удовлетворяет слабому условию Монжа, тогда тождественная перестановка  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$  с матрицей состояний

$C$  является оптимальной для задачи о назначениях, когда целевую функцию нужно минимизировать.

**Доказательство:** предположим противное. Матрица  $C$  удовлетворяет слабому условию Монжа, но тождественная перестановка  $\varepsilon$  не является оптимальной. Существуют оптимальные перестановки  $\sigma_s$ ,  $s = \overline{1, r}$ ,  $r \in N$ .

Пусть  $i_s = \min\{j : \sigma_s(j) \neq j\}$ ,  $s = \overline{1, r}$ ;  $i = \max\{i_s\}$ . Без ограничения общности можно принять, что  $\sigma_1(i) \neq i$ . Существуют натуральные числа  $k$  и  $l$ ,  $i < k, l \leq n$  такие, что  $\sigma_1(i) = k$ ,  $\sigma_1(l) = i$ . Рассмотрим перестановку  $\tilde{\sigma}$ , такую, что  $\tilde{\sigma}(i) = i$ ,  $\tilde{\sigma}(l) = k$ ,  $\tilde{\sigma}(j) = \sigma_1(j)$ ,  $j \neq i, l$ . Тогда вследствие слабого условия Монжа (6) значение целевой функции для  $\tilde{\sigma}$  не больше, чем значение целевой функции для  $\sigma_1$ , а значит, перестановка  $\tilde{\sigma}$ , также является оптимальной. Противоречие с выбором числа  $i$ . Теорема доказана. Доказательство теоремы взято из [23].

**Теорема 4.** Если матрица  $C$  удовлетворяет слабому условию анти-Монжа, то тождественная перестановка  $\varepsilon$  с матрицей состояний  $C$  является оптимальной для задачи о назначениях, когда целевую функцию нужно максимизировать.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

### 1.7 Альтернативное задание матрицы состояний

Пусть все  $c_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , – элементы матрицы  $C$  – являются положительными. Назовем коэффициентами пропорциональности числа

$b_{ij-1} = \frac{c_{ij}}{c_{ij-1}}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{2, n}$ . Тогда, зная параметры  $c_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и коэффициенты

пропорциональности  $b_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , по формулам

$$c_{ij} = c_{ii} b_{i1} \dots b_{ij-1}, \quad j = \overline{2, n}, \quad (8)$$

можно однозначно восстановить матрицу  $C$ .

Матрица называется строчно-изотонной, если при каждом  $i$  верно неравенство  $c_{ij} \leq c_{il}$ , если  $j < l$ ; при этом, все  $b_{is} \geq 1$ .

Матрица называется строчно-антитонной, если при каждом  $i$  верно неравенство  $c_{ij} \geq c_{il}$ , если  $j < l$ ; при этом, все  $0 < b_{ij} \leq 1$ .

Предположим, существует такое натуральное  $\nu$ , что в каждой строке матрицы верны неравенства  $c_{ij} \leq c_{il}$ , если  $1 \leq j < l \leq \nu$ , и  $c_{ij} \geq c_{il}$ , если  $\nu \leq j < l \leq n$ ; при этом для коэффициентов пропорциональности  $b_{ij} \geq 1$ ,  $j = \overline{1, \nu - 1}$  и  $b_{ij} \in (0, 1]$ ,  $j = \overline{\nu, n - 1}$ . Такую матрицу назовем строчно-изоантитонной (это название, в отличие от других, не является общеупотребительным).

## 2. Вариант нечеткой задачи о назначениях и эвристические методы ее решения

### 2.1 Постановка модифицированной нечеткой задачи о назначениях

Поставим модифицированную задачу о назначениях.

Для известной матрицы  $C$  найти перестановку  $\sigma$  чисел от 1 до  $n$ , такую, что значение целевой функции  $S(\sigma)$ , вычисленное по формуле (5), было бы максимальным. Кроме того, значения  $\sigma(s)$  выбираются последовательно (сначала  $\sigma(1)$ , затем  $\sigma(2)$  и т.д.). Выбор значения  $\sigma(j)$  происходит, основываясь на знании только первых  $j$  столбцов матрицы  $C$  (в момент выбора  $\sigma(j)$ , остальные  $n - j$  столбцов матрицы  $C$  неизвестны).

Поставим нечеткую задачу о назначениях.

Предположим, заданы константы  $c_{\min}$ ,  $c_{\max}$ ,  $b_{\min}$ ,  $b_{\max}$ . Назовем матрицу  $C$  допустимой, если  $c_{i1} \in [c_{\min}, c_{\max}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $b_{ij} \in [b_{\min}, b_{\max}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , а сама она строится по формулам (8).

Если в модифицированной задаче допустимая матрица  $C$  задается альтернативным способом, элементы  $c_{i1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , известны, а параметры  $b_{ij-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , становятся известными в момент выбора  $\sigma(j)$ , то задача преобразуется в модифицированную нечеткую задачу о назначениях. Далее, мы будем опускать слово «модифицированная» и называть подобную задачу – «нечеткая задача о назначениях». Задачу максимизации нетрудно указанным выше способом преобразовать в задачу минимизации значения  $S(\sigma)$ , поэтому далее будем решать только задачу максимизации.

### 2.2 Различные трактовки задач, которые сводятся к модифицированной задаче о назначениях

**Задача 1.** Имеется  $n$  различных заданий и бригада из  $n$  работников, которой нужно их сделать. Каждый работник может выполнить любое задание, но только одно. На выполнение каждой работы должен быть назначен только один работник. Стоимость выполнения  $i$ -ым работником  $j$ -го задания

равна  $c_{ij}$ . Вначале работодатель называет цены для работников только на первое задание, цены на  $j$ -ое задание,  $j = \overline{2, n}$ , для оставшихся к этому моменту незанятых работников он называет только после того, как найдется исполнитель на  $(j - 1)$ -ую работу. Цель: максимизировать общую прибыль бригады.

Действительно, в реальной жизни работодатель между назначениями на разные задания может оценить оставшихся работников и, либо повысить цены на текущее задание, либо, наоборот, понизить расценки. Также он может понизить первоначально предполагаемые расценки после пересчета оставшихся денег, понимая, что их осталось меньше, чем он рассчитывал потратить.

**Задача 2.** Имеется большое, но конечное число типов угроз для информационной безопасности некой фирмы. Имеется  $n$  различных групп информационных активов, для каждой из них необходимо приобрести блок защиты информации (аппаратный или программное обеспечение). Для 100% защиты необходимо купить все блоки. Ее руководитель собирается это сделать. Разные блоки могут защищать от некоего набора угроз, причем эти наборы могут пересекаться. Какой процент защиты дает совокупность какого-то набора блоков становится известно только при покупке последнего блока этой совокупности. На поставку, внедрение и изучение блока защиты уходит время, поэтому покупка следующего блока осуществляется каждый раз через некое время  $T$ . Обозначим эффективность работы первых купленных  $j - 1$  блоков вместе с еще одним  $j$ -ым блоком, который ставится для  $i$ -ой группы информационных активов через  $c_{ij}$ . Усредненная эффективность работы блоков защиты информации за время установки оборудования  $(n - 1)T$ , которая происходит по плану, заданному перестановкой  $\sigma$  чисел от 1 до  $n$  равна

$$S_{cp}(\sigma) = \frac{1}{n-1}(c_{\sigma(1)1} + c_{\sigma(2)2} + c_{\sigma(3)3} + \dots + c_{\sigma(n-1)n-1})$$

Цель: максимизировать усредненную эффективность защиты за время установки оборудования.

Последняя формула отличается от формулы (5) наличием фиксированного множителя  $\frac{1}{n-1}$ , а также отсутствием в скобках последнего слагаемого  $c_{\sigma(n)n}$ , но по условию задачи оно равно константе 100, поэтому в данном случае максимум значений  $S_{cp}(\sigma)$  и  $S(\sigma)$  достигается при одной и той же перестановке. Условие покупки фирмой одного блока в один период времени также не является искусственным, так как нередко на установку и наладку оборудования требуется значительное время, которым нельзя пренебречь.

Ниже, в главе 5, будет показана еще одна задача прикладного характера, имеющая отношение к агропромышленному комплексу, которая сводится к нечеткой задаче о назначениях, поставленной в параграфе 2.1.

### 2.3 Эвристические методы решения

Нетрудно видеть, что всевозможные известные алгоритмы решения задачи о назначениях действуют только в случае априори полностью известной матрицы состояний. Для поставленной нечеткой задачи необходимо осуществлять поиск других, эвристических методов. Ниже приведены известные эвристические методы:

**1. «Жадный» (Greedy)** метод заключается в использовании «жадного» алгоритма [25]. Выбирается  $c_{ij}$  – наибольший элемент  $j$ -го столбца матрицы  $C$  из «невыбранных» строк, то есть  $i \neq \sigma(s)$  для всех  $s = \overline{1, j-1}$ .

**2. «Бережливый» (Thrifty)** метод использует противоположный по смыслу жадному – «бережливый» алгоритм: выбирается  $c_{ij}$  – наименьший

элемент  $j$  столбца матрицы из «невыбранных» строк, то есть  $i \neq \sigma(s)$  для всех  $s = \overline{1, j-1}$ .

**3.** «Жадно-Бережливый» и «Бережливо-Жадный» методы – смешанные методы, когда, например, с 1 по  $v-1$  столбец используется один из методов, приведенных выше, а с  $v$  по  $n$  столбец – другой,  $2 \leq v \leq n-1$ . Если это непонятно из текста (например, предложенной задачи), то будем указывать число  $v$  рядом с названием этого метода. Например, жадно-бережливый- $v$  метод.

Эти методы являются основными интуитивно понятными эвристическими методами. Эвристические методы – это методы, которые будут оптимальными для некоторых частных случаев параметров матрицы  $C$ . Можно придумать большое количество методов, схожих с представленными в третьем пункте: для этого достаточно указать множество номеров столбцов, в которых выбор происходит по жадному алгоритму (для остальных используется бережливый метод). Существует  $2^{n-1}$  подобных методов вместе с указанными в пунктах 1-3. Попробуйте это доказать.

## 2.4 Коэффициенты пропорциональности зависят только от $j$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть здесь и далее матрица состояний задается альтернативным способом. Коэффициенты пропорциональности  $b_{ij}$  зависят от двух переменных  $i$  и  $j$ . Предположим, что они зависят только от  $j$ :

$$b_{ij} = \bar{b}_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Обозначим  $B_1 = 1$ ,  $B_j = \bar{b}_1 \cdot \dots \cdot \bar{b}_{j-1}$ ,  $j = \overline{2, n}$ , тогда согласно формулам (8)  $c_{ij} = c_{ii} B_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . В этом случае для перестановки  $\eta$  целевая функция имеет вид

$$S(\eta) = \sum_{j=1}^n c_{\eta(j)1} B_j. \quad (9)$$

Известно [26]:

**Перестановочное неравенство:** Имеются два  $m$ -мерных вектора  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$  и  $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ . Их скалярное произведение

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i$$

минимально, если выполняются неравенства:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m \text{ и } \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m;$$

максимально, если выполняются неравенства:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m \text{ и } \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_m.$$

Рассмотрим две конечные последовательности  $B_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и  $c_{i1}$ ,  $i = \overline{1, n}$

Расставим слева направо в порядке убывания (не возрастания) числа  $B_j$  и числа  $c_{i1}$ . Перестановка  $\mu$  чисел от 1 до  $n$  такая, что  $\mu(j)$  – это номер в первой последовательности, параметра  $b_j$  при расчете слева направо. Перестановка  $\gamma$  чисел от 1 до  $n$  такая, что  $i = \gamma(s)$ , если число  $c_{i1}$  в последовательности стоит на  $s$ -ом месте. Отсюда следует, что  $\gamma^{-1}(i) = \mu(j)$ , если номера мест в соответствующих последовательностях чисел  $B_j$  и  $c_{i1}$  равны. Таким образом, описанные выше перестановки отвечают случаю, когда значение функции в формуле (9) максимально.

Поэтому, для исходной матрицы  $C$  оптимальная перестановка  $\eta^*(j) = \gamma(\mu(j))$  и, чтобы максимизировать  $S(\eta)$ , осуществлять выбор строки необходимо согласно следующему правилу: в  $j$ -ом месяце выбирать  $\gamma(\mu(j))$ -ую строку.

Для удобства можно переставить строки матрицы  $C$  так, чтобы  $\gamma(\mu(j))$ -ая строка была бы  $j$ -ой строкой. Получим матрицу  $\tilde{C}$  с элементами  $\tilde{c}_{ij} = \tilde{c}_{\gamma(\mu(j))1} B_j$ , в этом случае оптимальной будет являться тождественная перестановка.

**Теорема 5.** Пусть выполняются следующие условия:

- 1) известно, что все  $c_{ii}$  различны;
- 2) известно, что  $b_{ij} = \bar{b}_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ;
- 3) известно, что  $\bar{b}_j \in (0, 1)$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ .

Тогда при данных параметрах партий жадный метод и метод **C1** (выбор строки «по убыванию первого столбца») являются оптимальным.

**Доказательство:** из вышесказанного следует, что оптимальной является перестановка  $\eta = \gamma(\mu(j))$ . Получается, что при выборе элемента из  $j$ -ого столбца оптимальным будет выбор элемента  $c_{jj} = c_{ji}B_j$ , причем  $\tilde{c}_{jj} = \tilde{c}_{j1}B_j > \tilde{c}_{k1}B_j = \tilde{c}_{kj}$  для  $j < k$ . Элементы  $\tilde{c}_{kj}$ ,  $j > k$ , выбору не подлежат, так как элементы из этих строк выбраны ранее. Поэтому жадный метод является оптимальным для матрицы  $\tilde{C}$ , а, стало быть и  $C$ . Из доказательства следует, что оптимальным также является метод **C1** (выбор «по убыванию первого столбца»). Теорема доказана.

Следствие. Предположим, что условие 1) теоремы 5 будет следующим:

- 1)  $c_{11} > c_{21} > \dots > c_{n1}$ ;

тогда оптимальным методом будет тождественная перестановка.

**Доказательство:** в данном случае после применения метода **C1** автоматически получим в качестве оптимального решения тождественную перестановку.

**Теорема 6.** Пусть выполняются следующие условия:

- 1) известно, что все  $c_{ii}$  различны;
- 2) известно, что  $b_{ij} = \bar{b}_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ;
- 3) известно, что  $\bar{b}_j > 1$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ .

Тогда при данных параметрах партий бережливый метод и метод **C2** (выбор строки «по возрастанию первого столбца») являются оптимальным.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5. Различия в доказательстве в том, что последовательность  $B_j$  монотонно возрастает, и обе конечные последовательности для удобства доказательства необходимо расположить слева направо в порядке возрастания.

Нетрудно видеть, что в этом случае оптимальным методом также будет метод **C2** (выбор строки «по возрастанию первого столбца»).

Предположим, что условие 1) теоремы 6 будет следующим:  $c_{11} < c_{21} < \dots < c_{n1}$ , тогда оптимальным методом будет тождественная перестановка. В данном случае после применения метода **C2** автоматически получим в качестве оптимального решения тождественную перестановку.

## 2.5 Коэффициенты пропорциональности зависят только от $i$

Предположим теперь, что коэффициенты пропорциональности  $b_{ij}$  зависят только от параметра  $i$ , то есть от номера строки.

**Теорема 7.** Пусть для элементов матрицы  $C$  выполняются следующие условия:

$$1) c_{11} = c_{21} = \dots = c_{n1};$$

$$2) \text{известно, что } b_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n-1}; \text{ все } b_i, \quad i = \overline{1, n} \text{ – различны.}$$

$$3) \text{известно, что } \frac{n-2}{n-1} \leq b_i, \quad i = \overline{1, n};$$

$$4) \text{изначально известно } b_i \text{ какой строки минимально.}$$

Тогда при данных параметрах партий бережливый метод и метод **B1** (выбор строки «по возрастанию  $b_i, i = \overline{1, n}$ ») являются оптимальными.

**Доказательство.** переставим строки матрицы так, чтобы  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ .

Докажем, что при поставленных условиях выполняется слабое условие анти-Монжа  $c_{ii} + c_{kl} \geq c_{il} + c_{ki}$ ,  $1 \leq i < k, l \leq n$ . Здесь оно эквивалентно неравенству

$$c_{ii}(b_i^{i-1} - b_i^{l-1}) \geq c_{kl}(b_k^{i-1} - b_k^{l-1}). \quad (10)$$

Проверим выполнение следующего неравенства

$$b_i^{i-1} - b_i^{l-1} \geq b_k^{i-1} - b_k^{l-1}. \quad (11)$$

При  $i=1$  неравенство (11) имеет вид  $1 - b_1^{l-1} \geq 1 - b_k^{l-1} \Leftrightarrow b_k^{l-1} \geq b_1^{l-1}$ . Верно.

Поэтому в данном случае из первого столбца выбирается элемент строки с минимальным  $b_i$ . Все коэффициенты  $b_i$  вычисляются перед выбором элемента из второго столбца, поэтому условие 4) необходимо и достаточно, чтобы выбрать элемент из первого столбца (а затем, правильно переставить строки матрицы).

Рассмотрим функцию  $f_i(x) = x^{i-1} - x^{l-1}$ ,  $i = \overline{2, n-1}$ , на интервале  $(0, +\infty)$ . Ее производная равна  $f'_i(x) = (i-1)x^{i-2} - (l-1)x^{l-2} = x^{i-2}(i-1 - (l-1)x^{l-i})$ .

Подозрительные точки на экстремум  $x^* = \left(\frac{i-1}{l-1}\right)^{\frac{1}{l-i}}$  и  $x = 0$ , последняя не

входит в область определения  $f_i(x)$ . Вторая производная  $f''_i(x^*)$  равна  $(i-2)(i-1)(x^*)^{i-3} - (l-2)(l-1)(x^*)^{l-3} = (x^*)^{i-3}((i-2)(i-1) - (l-2)(l-1)(x^*)^{l-i}) = (i-1)(x^*)^{i-3}(i-l) < 0$ , то есть  $x^*$  – точка максимума. Справедливо

неравенство  $x^* = \left(\frac{i-1}{l-1}\right)^{\frac{1}{l-i}} \leq \frac{n-2}{n-1} \leq b_i$ , так как согласно неравенству Бернулли

верна цепочка неравенств

$$b_i^{l-i} \geq \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{l-i} \geq 1 - \frac{l-i}{n-1} = \frac{n-l+i-1}{n-1} \geq (x^*)^{l-i} \Rightarrow b_i \geq x^*.$$

Верно  $\frac{n-l+i-1}{n-1} \geq (x^*)^{l-i}$ , поскольку  $\frac{n-l+i-1}{n-1} \geq (x^*)^{l-i} \Leftrightarrow \frac{n-l+i-1}{n-1} \geq \frac{i-1}{l-1} \Leftrightarrow nl - l^2 + il \geq ni \Leftrightarrow (n-l)(l-i) \geq 0$ , а последнее неравенство верно.

Следовательно, функция  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{2, n-1}$ , на полуинтервале  $\left[\frac{n-2}{n-1}, +\infty\right)$

убывает, тогда  $f_i(b_i) > f_i(b_k)$ , следовательно, в силу расстановки  $b_i$  неравенство (11) верно, а, значит, верно и неравенство (10) и, следовательно, выполняется слабое условие анти-Монжа, то есть оптимальной является

тождественная перестановка. Значит, оптимальным методом при выполненных условиях этой теоремы будет метод **B1** (выбор строки «по возрастанию  $b_i$ »).

В  $j$ -ом столбце  $c_{jj} = c_{j1}b_j^{j-1} < c_{k1}b_k^{j-1} = c_{kj}$ ,  $k = \overline{j+1, n}$ , а элементы, стоящие в первых  $j-1$  строках выбраны ранее. Поэтому бережливый метод также будет оптимальным при условиях теоремы 7.

Нетрудно видеть, что верно

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 7, но вместо условия 1) выполнено условие: если перестановка  $\sigma(j)$  такая, что  $b_{\sigma(1)} < b_{\sigma(2)} < \dots < b_{\sigma(n)}$  и верна цепочка неравенств

$$c_{\sigma(1)1} \geq c_{\sigma(2)1} \geq \dots \geq c_{\sigma(n)1}, \quad (12)$$

тогда метод **B1** будет оптимальным. Действительно, если верно условие (12), то из справедливости неравенства (11) следует выполнение неравенства (10). Следствие доказано. Необходимо отметить, что при условиях (12) бережливый метод, вообще говоря, не будет оптимальным.

## 2.6 Комбинации базовых методов

### Теорема о жадно-бережливом методе

**Теорема 8.** Пусть для параметров матрицы  $C$  выполняются следующие условия:

- 1)  $c_{11} > c_{21} > \dots > c_{v-11} > c_{v1} = c_{v+11} = \dots = c_{n1}$ ;
- 2)  $b_{ij} = \bar{b}_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, v-1}$ ;
- 3)  $b_{ij} = b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{v, n}$ ;
- 4)  $\frac{n-2}{n-1} \leq b_v$ ;
- 5)  $b_1 < b_2 < \dots < b_v < \dots < b_n$ .

Тогда при данных параметрах партий жадно-бережливый- $\nu$  метод является оптимальным.

**Доказательство.** Предположим, что в оптимальной перестановке  $\sigma$ , существует элемент, для которого  $\sigma(m) = q$ , где  $q < \nu \leq m$ . Тогда в оптимальной перестановке  $\sigma$ , существует элемент такой, что  $\sigma(k) = r$ , где  $k < \nu \leq r$ . Пусть перестановка  $\theta$ , отличается от оптимальной перестановки тем, что  $\theta(m) = r$ ,  $\theta(k) = q$ ,  $\theta(j) = \sigma(j)$ ,  $j \neq k, m$ . Очевидно,  $S(\theta) - S^* \leq 0$ , то есть  $c_{qk} + c_{rm} - c_{rk} - c_{qm} \leq 0$ . Последнее неравенство согласно (8) перепишется в виде

$$0 \geq S(\theta) - S^* = c_{q1}B_{k-1} + c_{r1}B_{\nu-1}b_r^{m-\nu} - c_{r1}B_{k-1} - c_{q1}B_{\nu-1}b_q^{m-\nu} \Leftrightarrow \\ c_{q1}B_{k-1}(1 - \tilde{B}b_q^{m-\nu}) \leq c_{r1}B_{k-1}(1 - \tilde{B}b_r^{m-\nu}), \quad (13)$$

где  $B_1 = 1$ ,  $B_{j-1} = \bar{b}_1 \cdot \dots \cdot \bar{b}_{j-1}$ ,  $j = \overline{3, \nu}$ , не зависят от номера строки,  $\tilde{B} = \frac{B_{\nu-1}}{B_{k-1}}$ .

Так как  $q < \nu \leq r$ , то  $c_{q1} > c_{r1}$ , тогда верна цепочка неравенств  $q < \nu \leq r \Rightarrow b_q < b_r \Leftrightarrow \tilde{B}b_q^m < \tilde{B}b_r^m \Leftrightarrow 1 - \tilde{B}b_q^{m-\nu} > 1 - \tilde{B}b_r^{m-\nu}$ . Из этого следует, что неравенство (13) не верно. Противоречие. Тогда, если  $m \leq \nu - 1$ ,  $\sigma(m) = q$ , то  $q \leq \nu - 1$ , то есть, сначала на переработку идут партии с номерами от 1 до  $\nu - 1$  и, только потом, начиная с этапа  $\nu$ , с номерами от  $\nu$  до  $n$ . Из теоремы 5 следует, что для достижения максимума оптимальный выбор с 1 по  $\nu - 1$  столбец происходит по жадному методу. Начиная же с  $\nu$ -го столбца, так как  $c_{\nu 1} = c_{\nu+1 1} = \dots = c_{n 1}$  (условие 1)), а, значит,  $c_{\nu \nu} = c_{\nu+1 \nu} = \dots = c_{n \nu}$  ( $c_{\omega \nu} = c_{\omega 1}B_{\nu-1}$ ,  $\omega = \overline{\nu, n}$ ), параметры оставшихся партий, удовлетворяют условиям теоремы 7, и, значит, для оптимального результата партии должны выбираться по бережливому методу. Общий выбор соответствует жадно-бережливому- $\nu$  методу.

## Теорема о бережливо-жадном методе

**Теорема 9.** Пусть для параметров матрицы  $C$  выполняются следующие условия:

- 1)  $c_{11} = c_{21} = \dots = c_{n1}$ ;
- 2)  $b_{ij} = b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, v-1}$ ;
- 3)  $b_{ij} = \bar{b}_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{v, n}$ ;
- 4)  $\frac{n-2}{n-1} \leq b_1 < b_2 < \dots < b_v < b_{v+1} < \dots < b_n$ ;
- 5) изначально известно, что  $b_1 = \min b_i$ ;
- 6)  $0 < \bar{b}_j < 1$ .

Тогда при данных параметрах партий бережливо-жадный- $v$  метод является оптимальным.

**Доказательство.** Предположим, что в оптимальной перестановке  $\sigma$ , существует элемент, чтобы  $\sigma(m) = q$ , где  $q < v \leq m$ . Тогда в оптимальной перестановке  $\sigma$ , существует элемент такой, что  $\sigma(k) = r$ , где  $k < v \leq r$ . Пусть перестановка  $\theta_1$ , отличается от оптимальной перестановки тем, что  $\theta_1(m) = r$ ,  $\theta_1(k) = q$ ,  $\theta_1(j) = \sigma(j)$ ,  $j \neq m, k$ . Очевидно,  $S(\theta_1) - S^* \leq 0$ .

Далее, рассуждая аналогично теореме 8, должно выполняться неравенство  $c_{qk} + c_{rm} - c_{rk} - c_{qm} \leq 0$ , которое согласно (8) перепишется в виде

$$\begin{aligned} 0 &\geq S(\theta_1) - S^* = c_{q1}b_q^{k-1} + c_{r1}Bb_r^{v-1} - c_{r1}b_r^{k-1} - c_{q1}Bb_q^{v-1} \\ &\Leftrightarrow c_{q1}b_q^{k-1}(1 - Bb_q^{v-k}) \leq c_{r1}b_r^{k-1}(1 - Bb_r^{v-k}), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $B = \bar{b}_v \cdot \dots \cdot \bar{b}_{m-1}$  не зависит от номера партии.

Но  $c_{q1} = c_{r1}$ , кроме того, так как  $q \leq v-1 < r$ , верны неравенства:

$$b_q < b_r \Leftrightarrow Bb_q^{v-k} < Bb_r^{v-k} \Leftrightarrow 1 - Bb_q^{v-k} > 1 - Bb_r^{v-k},$$

из этого следует, что неравенство (15) не верно. Противоречие. Тогда, если  $m \leq v - 1$ ,  $\sigma(m) = q$ , то  $q \leq v - 1$ . Начиная с  $v$ -го столбца,  $\sigma(j) \geq v$ , при  $j \geq v$ . Из теоремы 7 следует, что для достижения максимума оптимальный выбор с первого по  $(v - 1)$ -ый столбец происходит по бережливому методу, а начиная с  $v$ -го столбца, параметры, удовлетворяют условиям теоремы 5, когда для оптимального результата элементы должны выбираться по жадному методу. Такой выбор соответствует бережливо-жадному- $v$  методу.

Все эвристические методы, описанные в этой главе, применимы к решению нечеткой задачи, поставленной в параграфе 2.1. Зная, при каких условиях на параметры  $c_{il}$  и  $b_{ij}$  какой метод будет оптимальным, при близких значениях параметров тот же метод будет квазиоптимальным. Его и разумней взять при решении нечеткой задачи.

### 3. Эвристические методы решения для нечеткой задачи о назначениях со строчно-изоантитонной матрицей

#### 3.1 Бережливо-жадный метод

**Теорема 10.** Пусть для параметров матрицы  $C$  выполняются следующие условия:

$$1) \quad c_{11} = c_{21} = \dots = c_{n1};$$

$$2) \quad b_{ij} = b_i, \quad b_i \in \left(1, \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-v+1}\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, v-1};$$

$$3) \quad b_{ij} = \tilde{b}_i, \quad \frac{n-2}{n-1} \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{v, n};$$

$$4) \quad b_1 < b_2 < \dots < b_n;$$

$$5) \quad \text{изначально известно, что } b_1 = \min b_i;$$

$$6) \quad \tilde{b}_k = b_k^{-z}, \quad z \in (0, \frac{1}{n-v+1}).$$

Тогда при данных параметрах партий бережливо-жадный- $v$  метод является оптимальным.

**Доказательство.** Из условий 2) и 6) следует, что имеет место цепочка неравенств  $\frac{n-2}{n-1} < \tilde{b}_n < \tilde{b}_{n-1} < \dots < \tilde{b}_v < 1$ . Пусть  $\sigma$  – оптимальная перестановка.

Из теоремы 7 следует, что при оптимальном выборе в первых  $v-1$  столбцах выбор должен идти согласно методу **B1** (по возрастанию параметров  $b_i$ ), то есть  $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(v-1)$ . Так как  $c_{iv} = c_{i1} b_i^{v-1}$ , то

$$c_{vv} < c_{v+1v} < \dots < c_{nv}. \quad (16)$$

Учитывая следствие из теоремы 7, условие 3) и цепочку неравенств (16), оптимальный выбор должен идти согласно методу **B1** (по возрастанию параметров  $\tilde{b}_i$ ), то есть  $\sigma(v) > \sigma(v+1) > \dots > \sigma(n)$ . Докажем, неравенство  $\sigma(v-1) < \sigma(n)$ . Так как  $\sigma$  – оптимальная перестановка, то

$c_{\sigma(v-1)v-1} + c_{\sigma(n)n} \geq c_{\sigma(v-1)n} + c_{\sigma(n)v-1} \Leftrightarrow c_{\sigma(v-1)v-1} - c_{\sigma(v-1)n} \geq c_{\sigma(n)v-1} - c_{\sigma(n)n}$ . Или по формулам (8)  $c_{\sigma(v-1)1} b_{\sigma(v-1)}^{\nu-2} - c_{\sigma(v-1)1} \tilde{b}_{\sigma(v-1)}^{n-\nu} \geq c_{\sigma(n)1} b_{\sigma(n)}^{\nu-2} - c_{\sigma(n)1} \tilde{b}_{\sigma(n)}^{n-\nu}$ . Далее, учитывая условия 1) и 6),

$$b_{\sigma(v-1)}^{\nu-2} (1 - b_{\sigma(v-1)}^{1-z(n-\nu)}) \geq b_{\sigma(n)}^{\nu-2} (1 - b_{\sigma(n)}^{1-z(n-\nu)}). \quad (17)$$

Рассмотрим непрерывную функцию  $g(x) = x^{\nu-2} (1 - x^{1-z(n-\nu)})$  при  $x > 0$ . Ее производная равна:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\nu-2)x^{\nu-3} - (\nu-1-z(n-\nu))x^{\nu-2-z(n-\nu)} = \\ &= x^{\nu-3}(\nu-2 - ((\nu-1)-z(n-\nu))x^{1-z(n-\nu)}). \end{aligned}$$

Подозрительная на экстремум точка  $x^* = \left( \frac{\nu-2}{(\nu-1-z(n-\nu))} \right)^{\frac{1}{1-z(n-\nu)}} \in (0,1)$ ,

так как  $z$ , удовлетворяет условию 6), а  $g'(1) = -1 + z(n-\nu) < 0$ , то есть функция  $g(x)$  убывает при  $x > x^*$ , из этого следует, что неравенство (17) верно, когда  $b_{\sigma(v-1)} < b_{\sigma(n)}$ . Значит, для оптимальной перестановки  $\sigma(v-1) < \sigma(n)$ . Таким образом,

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(v-1) < \sigma(n) < \dots < \sigma(v), \quad (18)$$

а, значит, оптимальная перестановка восстанавливается однозначно  $\sigma(j) = j$ ,  $j = \overline{1, v-1}$ ;  $\sigma(j) = n + v - j$ ,  $j = \overline{v, n}$ .

Начиная с  $v$ -го столбца,  $c_{kj} = c_{k1} b_k^{\nu-1} \tilde{b}_k^{j-\nu} = c_{k1} b_k^{\nu-1-z(j-\nu)}$ ,  $j = \overline{v, n}$ . Учитывая условие 1) и условие 6) (степень у коэффициента  $b_k$  положительна), наибольшим является элемент  $j$ -го столбца, расположенный в невыбранной строке с наибольшим коэффициентом  $b_k$ , то есть с наибольшим номером. Поэтому, начиная с  $(v+1)$ -го столбца, согласно (18) оптимальным является жадный метод. Теорема доказана.

### 3.2 Метод СТГ

**Теорема 11.** Пусть для параметров матрицы  $C$  выполняются следующие условия:

- 1)  $c_{11} = c_{21} = \dots = c_{n1}$ ;
- 2)  $b_{ij} = b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $2 \leq v \leq [n/2]$ ,  $j = \overline{1, v-1}$ ;
- 3)  $b_{ij} = \tilde{b}_i$ ,  $\tilde{b}_i < 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{v, n}$ ;
- 4)  $1 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ ;
- 5) изначально известен порядок 4);
- 6)  $\tilde{b}_k = \varphi_k b_k^{-1}$ ,  $\varphi_k = b_k^{-s}$ , где фиксированная константа  $s \in [0, 1/n]$ .

При данных условиях перестановка  $\omega$  – оптимальная, здесь  $\omega(1) = n - 2v + 3$ ,  $\omega(2) = n - 2v + 5, \dots, \omega(v-1) = n - 1, \omega(v) = n$ ,

$$\omega(v+1) = n - 2, \quad \omega(v+2) = n - 4, \dots, \omega(2v-1) = n - 2v + 2,$$

$$\omega(2v) = n - 2v + 1, \dots, \omega(n-1) = 2, \quad \omega(n) = 1.$$

**Доказательство.** Имеется  $v-1$  столбцов слева от  $v$ -го столбца и  $n-v$  столбцов справа, так как  $v \leq [n/2]$ , то  $v-1 < n-v$ , то есть число столбцов слева от  $v$ -го столбца меньше, чем число столбцов справа.

Из условий 4) и 6) следует, что

$$1 > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_n, \quad 1 > \tilde{b}_1 > \tilde{b}_2 > \dots > \tilde{b}_n > \frac{n-2}{n-1}.$$

Аналогично теореме 7 доказывается, что в оптимальной перестановке  $\sigma$  при выборе в первых  $v$  столбцах выполняется условие  $b_{\sigma(i)} < b_{\sigma(j)}$  для всех  $1 \leq i < j \leq v$ . Аналогично следствию из теоремы 7 доказывается, что в оптимальной перестановке при выборе с  $v$ -го по  $n$ -ый столбец выполняется условие  $\tilde{b}_{\sigma(i)} < \tilde{b}_{\sigma(j)}$ , то есть  $b_{\sigma(i)} > b_{\sigma(j)}$  для всех  $v \leq i < j \leq n$ . Таким образом,

элемент в  $n$ -ой строке с максимальным коэффициентом пропорциональности  $b_n$  выбирается в  $v$ -ом столбце.

Какое соотношение может быть в оптимальной перестановке  $\sigma$  между числами  $b_{\sigma(v-i)}$  и  $b_{\sigma(v+i)}$ ,  $i = \overline{1, v-1}$ , а также  $b_{\sigma(v-i)}$  и  $b_{\sigma(v+i-1)}$ ,  $i = \overline{2, v-1}$ ? Пусть перестановка  $\theta_2$ , определяется следующим образом:  $\theta_2(v-i) = \sigma(v+i)$ ,  $\theta_2(v+i) = \sigma(v-i)$ ,  $\theta_2(j) = \sigma(j)$ ,  $j \neq v-i, v+i$ . Пусть перестановка  $\theta_3$ , определяется следующим образом:  $\theta_3(v-i) = \sigma(v+i-1)$ ,  $\theta_3(v+i-1) = \sigma(v-i)$ ,  $\theta_3(j) = \sigma(j)$ ,  $j \neq v-i, v+i-1$ .

Рассмотрим разность  $S^* - S(\theta_2)$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq S^* - S(\theta_2) &= c_{\sigma(v-i)v-i} + c_{\sigma(v+i)v+i} - c_{\sigma(v-i)v+i} - c_{\sigma(v+i)v-i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c_{\sigma(v-i)v-i} - c_{\sigma(v-i)v+i} \geq c_{\sigma(v+i)v-i} - c_{\sigma(v+i)v+i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v-i)}^{v-1} \tilde{b}_{v-i}^i \geq b_{\sigma(v+i)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v+i)}^{v-1} \tilde{b}_{\sigma(v+i)}^i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} \varphi_{\sigma(v-i)}^i \geq b_{\sigma(v+i)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v+i)}^{v-i-1} \varphi_{\sigma(v+i)}^i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} (1 - \varphi_{\sigma(v-i)}^i) \geq b_{\sigma(v+i)}^{v-i-1} (1 - \varphi_{\sigma(v+i)}^i). \end{aligned}$$

При  $\sigma(v-i) < \sigma(v+i)$  последнее неравенство не верно. Действительно, тогда из цепочек неравенств для  $\varphi_i$ , и  $\tilde{b}_i$ , получим, что  $1 - \varphi_{\sigma(v-i)}^i < (1 - \varphi_{\sigma(v+i)}^i)$ ,  $b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} < b_{\sigma(v+i)}^{v-i-1}$ . Следовательно,  $\sigma(v-i) > \sigma(v+i) \Leftrightarrow b_{\sigma(v-i)} > b_{\sigma(v+i)}$ .

Рассмотрим разность  $S^* - S(\theta_3)$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq S^* - S(\theta_3) &= c_{\sigma(v-i)v-i} + c_{\sigma(v+i-1)v+i-1} - c_{\sigma(v-i)v+i-1} - c_{\sigma(v+i-1)v-i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c_{\sigma(v-i)v-i} - c_{\sigma(v-i)v+i-1} \geq c_{\sigma(v+i-1)v-i} - c_{\sigma(v+i-1)v+i-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v-i)}^{v-1} \tilde{b}_{v-i}^{i-1} \geq b_{\sigma(v+i-1)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v+i-1)}^{v-1} \tilde{b}_{\sigma(v+i-1)}^{i-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} \varphi_{\sigma(v-i)}^{i-1} \geq b_{\sigma(v+i-1)}^{v-i-1} - b_{\sigma(v+i-1)}^{v-i-1} \varphi_{\sigma(v+i-1)}^{i-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b_{\sigma(v-i)}^{v-i-1} (1 - \varphi_{\sigma(v-i)}^{i-1}) \geq b_{\sigma(v+i-1)}^{v-i-1} (1 - \varphi_{\sigma(v+i-1)}^{i-1}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b_{\sigma(\nu-i)}^{\nu-i-1} (1 - b_{\sigma(\nu-i)}^{1-(i-1)s}) \geq b_{\sigma(\nu+i-1)}^{\nu-i-1} (1 - b_{\sigma(\nu+i-1)}^{1-(i-1)s}). \quad (19)$$

Рассмотрим функцию  $\tilde{f}(x) = x^{\nu-i-1} (1 - x^{1-(i-1)s})$ ,  $x > 0$ . Ее первая производная равна:

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(x) &= (\nu - i - 1)x^{\nu-i-2} - (\nu - i - (i-1)s)x^{\nu-i-1-(i-1)s} = \\ &= x^{\nu-i-2}((\nu - i - 1) - (\nu - i - (i-1)s)x^{1-(i-1)s}).\end{aligned}$$

Точка подозрительная на экстремум  $x^* = \left( \frac{\nu - i - 1}{\nu - i - (i-1)s} \right)^{\frac{1}{1-(i-1)s}} < 1$

вследствие условия 6). Причем  $\tilde{f}(1) < 0$ , поэтому при  $x > 1$  функция  $\tilde{f}(x)$  убывает, тогда из неравенства (19) следует, что  $b_{\sigma(\nu-i)} < b_{\sigma(\nu+i-1)}$ ,  $i = \overline{2, \nu-1}$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned}b_{\sigma(\nu)} > b_{\sigma(\nu-1)} > b_{\sigma(\nu+1)} > b_{\sigma(\nu-2)} > b_{\sigma(\nu+2)} > \dots > b_{\sigma(2)} > b_{\sigma(2\nu-2)} > b_{\sigma(1)} > b_{\sigma(2\nu-1)} > b_{\sigma(2\nu)} > \\ > b_{\sigma(2\nu+1)} > b_{\sigma(2\nu+2)} > \dots > b_{\sigma(n-1)} > b_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Все  $b_i$  упорядочены по убыванию, пересчитывая индексы согласно 4), получим, что  $\sigma \equiv \omega$ .

Замечание. Условие 6) можно переписать в виде: верна цепочка неравенств и  $\tilde{b}_k = \varphi_k b_k^{-1}$ ,  $\varphi_k \in [\varphi_0, 1]$ , где  $\varphi_0$  – некоторая фиксированная положительная константа.

## 4. Построение экстремальной матрицы с максимальной разницей между максимальным и минимальным значениями целевой функции в задаче о назначениях при альтернативном задании матрицы состояний

### 4.1 Вид строк в экстремальной матрице

Рассмотрим классическую задачу о назначениях с матрицей состояний  $C$  размера  $n \times n$ , заданную альтернативным способом, с элементами

$$c_{ii} = a_i, \quad c_{ij} = a_i b_{i1} \cdots b_{ij-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{2, n}, \quad (20)$$

$$a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max}, \quad 0 < \beta_1 \leq b_{ij} \leq \beta_2 < 1, \quad (21)$$

где  $a_{\min}$ ,  $a_{\max}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – заданные константы, и целевой функцией (5). Такие матрицы, элементы которых конструируются по правилу (20) при условиях (21) называются допустимыми.

Задача: среди всех допустимых матриц найти такую матрицу  $C$ , для которой  $\Delta S(C)$  – разность значений целевых функций для максимальной и минимальной перестановок матрицы  $C$  – максимальна, назовем эту матрицу экстремальной (экстремальными, если их несколько). Поскольку в каждой матрице  $C$  можно поменять местами строками так, чтобы в задаче о назначениях максимальная перестановка была бы тождественной, то далее (в этой главе) будем рассматривать только такие матрицы.,

Пусть  $C$  – экстремальная матрица, максимальная перестановка – тождественная перестановка  $\varepsilon$ . Обозначим минимальную перестановку –  $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(n-1) & \gamma(n) \end{pmatrix}$ , а  $\gamma^{-1}$  – обратную ей. Пусть последовательность  $\chi_k = sign(\gamma^{-1}(k) - \varepsilon^{-1}(k)) = sign(\gamma^{-1}(k) - k)$ ,  $\chi_k$  зависит от матрицы  $C$  и перестановки  $\gamma$ . Пусть  $S_\sigma(C)$  – значение функции (5), соответствующее перестановке  $\sigma$  и матрице  $C$ , тогда

$$\Delta S(C) = S_\varepsilon(C) - S_\gamma(C) = (c_{11} + \dots + c_{nn}) - (c_{1\gamma^{-1}(1)} + \dots + c_{n\gamma^{-1}(n)}) = \sum_{j=1}^n \Delta s_j(C) =$$

$$\begin{aligned}
&= (c_{11} - c_{1\gamma^{-1}(1)}) + \dots + (c_{nn} - c_{n\gamma^{-1}(n)}) = \sum_{\chi_j=1} a_j b_{j1} \cdot \dots \cdot b_{jj-1} \cdot (1 - b_{jj} \cdot \dots \cdot b_{j\gamma^{-1}(j)-1}) - \\
&\quad - \sum_{\chi_j=-1} a_j b_{j1} \cdot \dots \cdot b_{j\gamma^{-1}(j)-1} \cdot (1 - b_{j\gamma^{-1}(j)} \cdot \dots \cdot b_{jj-1}). \tag{22}
\end{aligned}$$

Так как  $b_{ij} \in (0,1)$ , если матрица  $C$  – экстремальная и  $\chi_k = 1$ , значение  $\Delta s_k$  должно быть положительное и максимальное, тогда для  $k$ -ой строки необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$\begin{aligned}
\chi_k = 1: & a_k = a_{\max}, b_{kj} = \beta_2, j = \overline{1, k-1}, c_{kj} = a_k \beta_2^{j-1}, j = \overline{1, k}, \\
& b_{kj} = \beta_1, j = \overline{k, \gamma^{-1}(k)}, c_{kj} = a_k \beta_2^{k-1} \beta_1^{j-k}, j = \overline{k+1, \gamma^{-1}(k)}. \tag{23}
\end{aligned}$$

В случае  $\chi_k = -1$ , если матрица экстремальная, значение  $\Delta s_k$  должно быть отрицательным и минимальным по модулю, тогда для  $k$ -ой строки необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$\begin{aligned}
\chi_k = -1: & a_k = a_{\min}, b_{kj} = \beta_1, j = \overline{1, \gamma^{-1}(k)-1}, c_{kj} = a_k \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-1}, j = \overline{1, \gamma^{-1}(k)}, \\
& b_{kj} = \beta_2, j = \overline{\gamma^{-1}(k), k-1}, c_{kj} = a_k \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-1} \beta_2^{j-\gamma^{-1}(k)}, j = \overline{\gamma^{-1}(k)+1, k}. \tag{24}
\end{aligned}$$

При  $\chi_k = 0$  – слагаемое  $\Delta s_k$  занулится, поэтому

$$\Delta S(C) = \sum_{\chi_j=1} a_{\max} \beta_2^{j-1} \times (1 - \beta_1^{\gamma^{-1}(j)-j}) - \sum_{\chi_j=-1} a_{\min} \beta_1^{\gamma^{-1}(j)-1} \times (1 - \beta_2^{j-\gamma^{-1}(j)}). \tag{25}$$

Дополнительно, для определенности вида экстремальной матрицы  $C$  будем считать, что элементы  $b_{ij}$ , не входящие в формулу (22), и неопределенные в (23) и (24) элементы  $c_{ij}$  равны

$$\begin{cases} \chi_k = 1: b_{kj} = \beta_1, j = \overline{\gamma^{-1}(k), n-1}, c_{kj} = a_{\max} \beta_2^{k-1} \beta_1^{j-k}, j = \overline{\gamma^{-1}(k)+1, n}; \\ \chi_k = -1: b_{kj} = \beta_2, j = \overline{k, n-1}, c_{kj} = a_{\min} \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-1} \beta_2^{j-\gamma^{-1}(k)}, j = \overline{k+1, n}; \\ \chi_k = 0: a_k = a_{\max}, b_{kj} = \beta_2, j = \overline{1, k-1}, c_{kj} = a_{\max} \beta_2^{k-1}, j = \overline{2, k}, \\ \quad b_{kj} = \beta_1, \overline{k, n-1}, c_{kj} = a_{\max} \beta_2^{k-1} \beta_1^{j-k}, \overline{k+1, n}. \end{cases} \tag{26}$$

Предположим, что для элементов экстремальной матрицы  $C$  выполняются условия (23), (24) и не выполняются условия (26). Пусть для матрицы  $C_1$  выполняются условия (23), (24), (26). Нетрудно видеть, что если

для матрицы  $C_1$  перестановки  $\varepsilon$  и  $\gamma$  будут соответственно максимальной и минимальной, то по формуле (22) справедливо равенство

$$\Delta S(C) = S_\varepsilon(C) - S_\gamma(C) = S_\varepsilon(C_1) - S_\gamma(C_1) = \Delta S(C_1),$$

а если хоть одна из них перестанет быть или максимальной, или минимальной, то  $\Delta S(C_1) > \Delta S(C)$ , противоречие с предположением об экстремальности матрицы  $C$ . Формулы (26) нужны для того, чтобы определить экстремальную матрицу единственным образом.

Отсюда следует, что если известны максимальная  $\varepsilon$  и минимальная  $\gamma$  перестановки, а следовательно значения последовательности  $\chi_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то матрица, определяемая однозначно по условиям (21), (23), (24), (26), будет экстремальной, именно матрицы такого вида будем исследовать, чтобы найти  $\max \Delta S(C)$ .

## 4.2 Порядок строк в экстремальной матрице

**1.** Докажем, что при  $m > k$ , если у экстремальной матрицы  $C$   $\chi_k = -1$ , то  $\chi_m = -1$ . Предположим противное: существуют такие натуральные числа  $k$  и  $m$ ,  $1 \leq k < m \leq n$ , что у экстремальной матрицы  $C$  значения  $\chi_k = -1$ , но  $\chi_m = 1$  или  $\chi_m = 0$ . Следовательно,  $s = \gamma^{-1}(k) < k < m \leq \gamma^{-1}(m)$ . Для элементов экстремальной матрицы  $C$  выполняются условия (23), (24), (26).

Так как  $\varepsilon$  — максимальная перестановка, верно неравенство  $c_{kk} + c_{mm} \geq c_{km} + c_{mk}$ . Получим

$$\begin{aligned} c_{kk} + c_{mm} \geq c_{km} + c_{mk} &\Leftrightarrow a_{\min} \beta_1^{s-1} \beta_2^{k-s} + a_{\max} \beta_2^{m-1} \geq a_{\min} \beta_1^{s-1} \beta_2^{m-s} + a_{\max} \beta_2^{k-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_{\min} \beta_1^{s-1} \beta_2^{k-s} (1 - \beta_2^{m-k}) \geq a_{\max} \beta_2^{k-1} (1 - \beta_2^{m-k}) \Leftrightarrow a_{\min} \beta_1^{s-1} \geq a_{\max} \beta_2^{s-1}. \end{aligned}$$

Но  $a_{\min} \leq a_{\max}$  и  $\beta_1^{s-1} < \beta_2^{s-1}$ . Получили противоречие. Следовательно, если у экстремальной матрицы  $\chi_k = -1$ , то  $\chi_m = -1$ ,  $k < m$ .

**2.** Докажем, что в экстремальной матрице значение  $k$ , для которого  $\chi_k = 0$ , может быть только одно. Предположим противное: существует как

минимум два таких значений:  $\chi_k = 0$  и  $\chi_m = 0$ ,  $k < m$ . В этом случае в экстремальной матрице  $C$ :  $\gamma^{-1}(k) = k$ ,  $\gamma^{-1}(m) = m$ . Для матрицы  $C$  сумма

$$\Delta s_k(C) + \Delta s_m(C) = 0.$$

Рассмотрим матрицу  $C_2$  размера  $n \times n$  с элементами  $c'_{ij}$ . Зададим перестановку  $\gamma_2$ :  $\gamma_2^{-1}(k) = m$ ,  $\gamma_2^{-1}(m) = k$ ,  $\gamma_2^{-1}(j) = \gamma^{-1}(j)$ ,  $j \neq k, m$ , тогда для матрицы  $C_2$ , и перестановок  $\varepsilon$  и  $\gamma_2$ :  $\chi_k = 1$  и  $\chi_m = -1$ , остальные члены последовательности такие же как и для матрицы  $C$ . Зададим элементы матрицы  $C_2$ , так, чтобы были выполнены условия (23), (24), (26) для перестановок  $\varepsilon$  и  $\gamma_2$ :

$$\begin{cases} c'_{k1} = a_{\max}, c'_{kj} = a_{\max} \beta_2^{j-1}, j = \overline{2, k}, c'_{kj} = c'_{kk} \beta_1^{j-k}, j = \overline{k+1, n}; \\ c'_{m1} = a_{\min}, c'_{mj} = a_{\min} \beta_1^{j-1}, j = \overline{2, m}, c'_{mj} = c'_{mm} \beta_2^{j-m}, j = \overline{m+1, n}; \\ c'_{ij} = c_{ij}, i = \overline{1, n}, i \neq k, m, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (27)$$

Тогда, согласно равенствам (25), (27), получим

$$\begin{aligned} \Delta s_k(C_2) + \Delta s_m(C_2) &= (a_{\max} \beta_2^{k-1} - a_{\max} \beta_2^{k-1} \beta_1^{m-k}) - (a_{\min} \beta_1^{k-1} - a_{\min} \beta_1^{k-1} \beta_2^{m-k}) = \\ &= a_{\max} \beta_2^{k-1} (1 - \beta_1^{m-k}) - a_{\min} \beta_1^{k-1} (1 - \beta_2^{m-k}) \geq a_{\min} \beta_1^{k-1} (\beta_2^{m-k} - \beta_1^{m-k}) > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Из оценки (28) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta S(C_2) &\geq S_\varepsilon(C_2) - S_{\gamma_2}(C_2) = S_\varepsilon(C) - S_\gamma(C) + \Delta s_k(C_2) + \Delta s_m(C_2) - \\ &- \Delta s_k(C) - \Delta s_m(C) \geq \Delta S(C) + \Delta s_k(C_2) + \Delta s_m(C_2) - 0 > \Delta S(C). \end{aligned} \quad (29)$$

Поэтому матрица  $C$  не может быть экстремальной. Противоречие. Следовательно, для экстремальной матрицы существует не более одного значения  $k$ , для которого  $\chi_k = 0$ .

**3.** Возможна ли ситуация, когда  $\chi_k = 0$  и  $\chi_{k+1} = 1$ ? Проверим. В этом случае  $\gamma^{-1}(k) = k$ ,  $\gamma^{-1}(k+1) = s > k+1$ . Рассмотрим перестановку  $\gamma_3$ , которая получается из перестановки  $\gamma$  по следующему правилу:  $\gamma_3^{-1}(i) = \gamma^{-1}(i)$ ,  $i \neq k, k+1$ ,  $\gamma_3^{-1}(k) = s$ ,  $\gamma_3^{-1}(k+1) = k$ .

Рассмотрим матрицу  $C_3$ , которая отличается от матрицы  $C$   $k$ -ой и  $(k+1)$ -ой строками. Для перестановок  $\varepsilon$  и  $\gamma_3$ :  $\chi_k = 1$  и  $\chi_{k+1} = -1$ . Элементы этих строк взяты так, чтобы формулы (23), (24), (26) были верны для перестановок  $\varepsilon$  и  $\gamma_3$ . То есть, элементы  $k$ -ой строки матрицы  $C_3$ , имеют вид:

$$c'_{k1} = a_{\max}, \quad c'_{kj} = a_{\max} \beta_2^{j-1}, \quad j = \overline{2, k}, \quad c'_{kj} = a_{\max} \beta_2^{k-1} \beta_1^{j-k}, \quad j = \overline{k+1, n}; \quad (30)$$

элементы  $(k+1)$ -ой строки матрицы  $C_3$ , имеют вид:

$$c'_{k+11} = a_{\min}, \quad c'_{k+1j} = a_{\min} \beta_1^{j-1}, \quad j = \overline{2, k}, \quad c'_{k+1j} = a_{\min} \beta_1^{k-1} \beta_2^{j-k}, \quad j = \overline{k+1, n}. \quad (31)$$

Для матрицы  $C$ , учитывая (25), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta S(C) &= S_\varepsilon(C) - S_{\gamma}(C) = \sum_{i \neq k, k+1} \Delta s_i(C) + \Delta s_k(C) + \Delta s_{k+1}(C) = \\ &= \sum_{i \neq k, k+1} \Delta s_i(C) + 0 + (a_{\max} \beta_2^k - a_{\max} \beta_2^k \beta_1^{s-k-1}) = \sum_{i \neq k, k+1} \Delta s_i(C) + a_{\max} \beta_2^k (1 - \beta_1^{s-k-1}). \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично, для матрицы  $C_3$  вследствие равенств (30), (31) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta S(C_3) &\geq S_\varepsilon(C_3) - S_{\gamma_3}(C_3) = \sum_{i \neq k, k+1} \Delta s_i(C_3) + \Delta s_k(C_3) + \Delta s_{k+1}(C_3) = \\ &= \sum_{i \neq k, k+1} \Delta s_i(C_3) + a_{\max} \beta_2^{k-1} (1 - \beta_1^{s-k}) + a_{\min} \beta_2^{k-1} (-1 + \beta_2). \end{aligned} \quad (33)$$

Вычтем из (33) равенство (32), учитывая, что  $\sum_{i \neq k, k+1} \Delta s_i(C) = \sum_{i \neq k, k+1} \Delta s_i(C_3)$ , тогда

$$\begin{aligned} \max \Delta S(C_3) - \Delta S(C) &\geq a_{\min} \beta_2^{k-1} (-1 + \beta_2) + a_{\max} \beta_2^{k-1} (1 - \beta_1^{s-k}) - a_{\max} \beta_2^k (1 - \beta_1^{s-k-1}) = \\ &= a_{\min} \beta_2^{k-1} (-1 + \beta_2) + a_{\max} \beta_2^{k-1} (1 - \beta_2 + \beta_2 - \beta_1^{s-k}) - a_{\max} \beta_2^{k-1} (\beta_2 - \beta_1^{s-k-1} \beta_2) = \\ &= \beta_2^{k-1} ((a_{\max} - a_{\min})(1 - \beta_2) + a_{\max} \beta_1^{s-k-1} (\beta_2 - \beta_1)) \geq \\ &\geq a_{\max} \beta_1^{s-k-1} \beta_2^{k-1} (\beta_2 - \beta_1) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица  $C$  – не экстремальная. Противоречие. Это означает, что ситуация, когда  $\chi_k = 0$  и  $\chi_{k+1} = 1$ , в экстремальной матрице невозможна.

**4.** Нетрудно видеть, что в экстремальной матрице  $\chi_1 = 1$ . Если это не так, то из вышесказанного либо  $\chi_1 = 0$ , а все остальные  $\chi_i = -1$ ,  $i = \overline{2, n}$ , либо все  $\chi_i = -1$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В любом из этих случаев

$$\Delta S(C) = \sum_{j=1}^n \Delta s_j(C) < 0.$$

Противоречие.

Кроме того,  $\chi_n = -1$ . Действительно, так как  $\varepsilon^{-1}(n) = n$ , то если  $\gamma^{-1}(n) < n$ , то  $\chi_n = -1$ . Если же  $\gamma^{-1}(n) = n$ , то  $\chi_n = 0$ , и согласно пунктам 1 и 2 значение  $\chi_{n-1} = 1$ , то есть  $0 < \gamma^{-1}(n-1) - \varepsilon^{-1}(n-1) = \gamma^{-1}(n-1) - (n-1)$ . Следовательно,  $\gamma^{-1}(n-1) = n$ . Противоречие. Итак, доказано, что  $\chi_1 = 1$  и  $\chi_n = -1$ .

**5.** Из доказанного выше следует, что для экстремальной матрицы подходят только два варианта чередования чисел  $\chi_k$ . Сформулируем утверждение в виде теоремы.

**Теорема 12.** В экстремальной матрице  $C$  последовательность  $\chi_k$  не возрастает и имеет не более одного нулевого значения, то есть существуют два варианта чередования чисел  $\chi_k$ .

1. Существует такое натуральное  $m$ ,  $2 \leq m \leq n-1$ , такое, что  $\chi_i = 1$  при  $i = \overline{1, m-1}$ ;  $\chi_m = 0$  и  $\chi_i = -1$  при  $i = \overline{m+1, n}$ .
2. Существует такое натуральное  $m$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ , такое, что  $\chi_i = 1$  при  $i = \overline{1, m}$ ;  $\chi_i = -1$  при  $i = \overline{m+1, n}$ .

### 4.3 Первое свойство перестановки $\gamma$

**Теорема 13.** Если в экстремальной матрице  $C$  значения  $\chi_i = -1$  и  $\chi_k = -1$ ,  $i < k$ , то  $\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(k)$ .

**Доказательство.** Как соотносятся между собой  $\gamma^{-1}(i)$  и  $\gamma^{-1}(k)$ ? Очевидно, равенства между ними быть не может. Предположим, что  $\gamma^{-1}(i) > \gamma^{-1}(k)$ . Из условий (23)–(26) следует, что для матрицы  $C$ :

$$\Delta s_i(C) + \Delta s_k(C) = -a_{\min} \beta_1^{\gamma^{-1}(i)-1} (1 - \beta_2^{i-\gamma^{-1}(i)}) - a_{\min} \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-1} (1 - \beta_2^{k-\gamma^{-1}(k)}). \quad (34)$$

Для перестановки  $\zeta$  по следующему правилу:  $\zeta^{-1}(j) = \gamma^{-1}(j)$ ,  $j \neq i, k$ ,  $\zeta^{-1}(k) = \gamma^{-1}(i)$ ,  $\zeta^{-1}(i) = \gamma^{-1}(k)$ . Построим допустимую матрицу  $C_4$  по формулам (23), (24), (26) относительно перестановок  $\varepsilon$  и  $\zeta$  (берется вместо  $\gamma$ ). Она будет отличаться от матрицы  $C$   $i$ -ой и  $k$ -ой строками. Так как  $\chi_i = -1$  и  $\chi_k = -1$  для матрицы  $C$ , то  $\gamma^{-1}(i) < i$  и  $\gamma^{-1}(k) < k$ . Тогда для матрицы  $C_4$  верны неравенства  $\zeta^{-1}(k) = \gamma^{-1}(i) < i < k$ ,  $\zeta^{-1}(i) = \gamma^{-1}(k) < \gamma^{-1}(i) < i$ , поэтому для матрицы  $C_4$ :  $\chi_i = -1$  и  $\chi_k = -1$ . Тогда, исходя из формул (23)–(26),

$$\begin{aligned} \Delta s_i(C_4) + \Delta s_k(C_4) &= -a_{\min} \beta_1^{\zeta^{-1}(i)-1} (1 - \beta_2^{i-\zeta^{-1}(i)}) - a_{\min} \beta_1^{\zeta^{-1}(k)-1} (1 - \beta_2^{k-\zeta^{-1}(k)}) = \\ &= -a_{\min} \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-1} (1 - \beta_2^{i-\gamma^{-1}(k)}) - a_{\min} \beta_1^{\gamma^{-1}(i)-1} (1 - \beta_2^{k-\gamma^{-1}(i)}). \end{aligned} \quad (35)$$

Так как матрица  $C$  экстремальная, то разность  $\Delta S(C) - \Delta S(C_4)$  должна быть неотрицательна, она равна разности между выражениями (34) и (35), то есть

$$\begin{aligned} \Delta S(C) - \Delta S(C_4) &= a_{\min} \left( \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-1} (\beta_2^{k-\gamma^{-1}(k)} - \beta_2^{i-\gamma^{-1}(k)}) + \beta_1^{\gamma^{-1}(i)-1} (\beta_2^{i-\gamma^{-1}(i)} - \beta_2^{k-\gamma^{-1}(i)}) \right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\beta_1^{\gamma^{-1}(k)} \beta_2^{-\gamma^{-1}(k)} (\beta_2^k - \beta_2^i) + \beta_1^{\gamma^{-1}(i)} \beta_2^{-\gamma^{-1}(i)} (\beta_2^i - \beta_2^k) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\left( (\beta_1 / \beta_2)^{\gamma^{-1}(k)} - (\beta_1 / \beta_2)^{\gamma^{-1}(i)} \right) (\beta_2^k - \beta_2^i) \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Так как  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ , то правая скобка отрицательна и для справедливости неравенства (36) необходимо и достаточно, чтобы левая скобка была бы не положительна, то есть  $\gamma^{-1}(i) \leq \gamma^{-1}(k)$ . Противоречие, поэтому  $\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(k)$ , что и требовалось доказать.

#### 4.4 Второе свойство перестановки $\gamma$

**Теорема 14.** Пусть для матрицы  $C$   $\chi_k = -1$ ,  $2 \leq k \leq n-1$ , тогда в экстремальной матрице  $\gamma^{-1}(k+1) - \gamma^{-1}(k) = 1$ .

**Доказательство.** Из предыдущей теоремы ясно, что  $\gamma^{-1}(k+1) - \gamma^{-1}(k) \geq 1$ .

Предположим противное утверждению теоремы 14, а именно,  $\gamma^{-1}(k+1) - \gamma^{-1}(k) \geq 2$ . Пусть  $m = \gamma^{-1}(k+1) - 1 > \gamma^{-1}(k)$ ,  $\gamma(m) = s$ , тогда  $\chi_s \neq -1$ , иначе получим противоречие с теоремой 13. Итак,  $\chi_s = 1$  или  $\chi_s = 0$ . Нетрудно видеть, что  $\Delta s_s(C) = a_{\max} \beta_2^{s-1} (1 - \beta_1^{m-s}) \chi_s$ .

По построению экстремальной матрицы (правилам (23), (24), (26)), учитывая (25), для матрицы  $C$  имеем

$$\begin{aligned} \Delta S(C) &= S_\varepsilon(C) - S_\gamma(C) = \sum_{i \neq s, k+1} \Delta s_i(C) + \Delta s_s + \Delta s_{k+1} = \\ &= \sum_{i \neq s, k+1} \Delta s_i(C) + a_{\max} \beta_2^{s-1} (1 - \beta_1^{m-s}) \chi_s - a_{\min} \beta_1^m (1 - \beta_2^{k-m}). \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть перестановка  $\xi$  задается по правилу:  $\xi(j) = \gamma(j)$ ,  $j \neq i, k$ ,  $\xi(m) = k+1$ ,  $\xi(m+1) = s$ .  $0 \leq \gamma^{-1}(s) - s = m - s < m + 1 - s = \xi^{-1}(s) - s$ , значит  $\chi_s = 1$ , а  $0 > \gamma^{-1}(k+1) - (k+1) = m + 1 - (k+1) > m - (k+1) = \xi^{-1}(k+1) - (k+1)$ , тогда  $\chi_{k+1} = -1$ . Построим допустимую матрицу  $C_5$  по правилам (23), (24), (26) для перестановок  $\varepsilon$  и  $\xi$  (берется вместо  $\gamma$ ). Для матрицы  $C_5$  получим

$$\begin{aligned} \Delta S(C_5) &= S_\varepsilon(C_5) - S_\xi(C_5) = \sum_{i \neq s, k+1} \Delta s_i(C_5) + \Delta s_s + \Delta s_{k+1} = \\ &= \sum_{i \neq s, k+1} \Delta s_i(C_5) + a_{\max} \beta_2^{s-1} (1 - \beta_1^{m-s+1}) - a_{\min} \beta_1^{m-1} (1 - \beta_2^{k-m+1}) = \\ &= \sum_{i \neq s, k+1} \Delta s_i(C_5) + a_{\max} \beta_2^{s-1} (1 - \beta_1^{m-s+1}) - a_{\min} \beta_1^{m-1} (1 - \beta_2^{k-m+1}). \end{aligned} \quad (38)$$

Так как  $C$  – экстремальная матрица, то  $\Delta S(C_5) \leq \Delta S(C)$ . Однако, вычитая (37) из (38) и учитывая неравенства  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ , получим противоречие:

$$\begin{aligned} \Delta S(C_5) - \Delta S(C) &\geq S_\varepsilon(C_5) - S_\xi(C_5) - (S_\varepsilon(C) - S_\gamma(C)) \geq \\ &\geq a_{\min} \beta_1^{m-1} \beta_2^{k-m+1} - a_{\min} \beta_1^{m-1} - a_{\max} \beta_2^{s-1} \beta_1^{m-s+1} - a_{\min} \beta_1^m \beta_2^{k-m} + a_{\max} \beta_2^{s-1} \beta_1^{m-s} + a_{\min} \beta_1^m \geq \\ &\geq a_{\min} \beta_1^{m-1} \beta_2^{k-m} (\beta_2 - \beta_1) + a_{\max} \beta_1^m (-\beta_1^{-s+1} \beta_2^{s-1} + \beta_1^{-s} \beta_2^{s-1}) + a_{\min} \beta_1^m (-\beta_1^{-1} + 1) = \\ &= a_{\min} \beta_1^{m-1} \beta_2^{k-m} (\beta_2 - \beta_1) + a_{\max} \beta_1^m \beta_1^{-s+1} \beta_2^{s-1} (-1 + \beta_1^{-1}) + a_{\min} \beta_1^m (-\beta_1^{-1} + 1) \geq \\ &\geq a_{\min} (\beta_1^{m-1} \beta_2^{k-m} (\beta_2 - \beta_1) + \beta_1^m \beta_1^{-s+1} \beta_2^{s-1} (-1 + \beta_1^{-1}) + \beta_1^m (-\beta_1^{-1} + 1)) = \\ &= a_{\min} \beta_1^{m-1} \beta_2^{k-m} (\beta_2 - \beta_1) + a_{\min} \beta_1^m ((\beta_2 / \beta_1)^{s-1} - 1)(\beta_1^{-1} - 1) > 0. \end{aligned}$$

Итак, в экстремальной матрице  $\gamma^{-1}(k+1) - \gamma^{-1}(k) = 1$  при  $\chi_k = -1$ ,  $k = \overline{p, n-1}$ .

Вывод из первого и второго свойства перестановки  $\gamma$  представим в виде теоремы. Ее справедливость следует непосредственно из теорем 12-14.

**Теорема 15.** Пусть в экстремальной матрице  $\gamma(1) = p$ , тогда в экстремальной матрице при  $j = \overline{1, n-p+1}$ ,  $\chi_{p+j-1} = -1$  и  $\gamma(j) = p + j - 1$ ; при  $i < p$ , выполняется неравенство  $\chi_i \neq -1$ .

#### 4.5 Случай, когда $\exists \chi_j = 0$

Выясним при каких  $n$  и  $p$  существует строка, для которой  $\chi_j = 0$  (1 случай теоремы 12). Предположим, что в экстремальной матрице  $\exists \chi_j = 0$ . Согласно теореме 15 верно, что  $j = \gamma^{-1}(j) \geq n - p + 2$ . Пусть  $j > n - p + 2$ , тогда  $\exists s$  такое, что  $\gamma(n - p + 2) = s$ , и из теоремы 15 следует, что  $\chi_s = 1$ , и верно неравенство  $s < \gamma^{-1}(s) \Rightarrow s < n - p + 2$ . Противоречие с теоремой 15. Следовательно,  $j = n - p + 2$ . По теореме 12  $j = p - 1$ , тогда  $n - p + 2 = p - 1$ ,  $n = 2p - 3$ , то есть  $n$  – нечетное,  $p = (n+3)/2$ ,  $j = (n+1)/2$ .

#### 4.6 Свойство последовательности $\gamma(i)$ , если $\chi_i = 1$ .

Пусть теперь  $\chi_i = 1$ ,  $\chi_k = 1$ ,  $1 \leq i < k \leq p - 1$ , докажем, что тогда для экстремальной матрицы выполняется неравенство  $\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(k)$ . Предположим противное:  $\gamma^{-1}(i) > \gamma^{-1}(k)$  (равенства быть не может). Перестановка  $\psi$  задается правилом:  $\psi^{-1}(j) = \gamma^{-1}(j)$ ,  $j \neq i, k$ ,  $\psi^{-1}(k) = \gamma^{-1}(i)$ ,  $\psi^{-1}(i) = \gamma^{-1}(k)$ . Для перестановки  $\psi$ :  $\psi^{-1}(k) - k = \gamma^{-1}(i) - k > \gamma^{-1}(k) - k > 0$ , а также  $\psi^{-1}(i) - i = \gamma^{-1}(k) - i > \gamma^{-1}(k) - k > 0$ . Отсюда следует, что для экстремальной матрицы  $C$ :

$$\begin{aligned}
0 \leq (S_\varepsilon(C) - S_\gamma(C)) - (S_\varepsilon(C) - S_\psi(C)) &= S_\psi(C) - S_\gamma(C) = c_{i\psi^{-1}(i)} + c_{k\psi^{-1}(k)} - c_{i\gamma^{-1}(i)} - c_{k\gamma^{-1}(k)} = \\
&= a_{\max} (\beta_2^{i-1} \beta_1^{\psi^{-1}(i)-i} + \beta_2^{k-1} \beta_1^{\psi^{-1}(k)-k}) - a_{\max} (\beta_2^{i-1} \beta_1^{\gamma^{-1}(i)-i} + \beta_2^{k-1} \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-k}) \Leftrightarrow \\
&\beta_2^i (\beta_1^{\gamma^{-1}(k)-i} - \beta_1^{\gamma^{-1}(i)-i}) + \beta_2^k (\beta_1^{\gamma^{-1}(i)-k} - \beta_1^{\gamma^{-1}(k)-k}) \geq 0 \\
\Leftrightarrow (\beta_2/\beta_1)^i (\beta_1^{\gamma^{-1}(k)} - \beta_1^{\gamma^{-1}(i)}) + (\beta_2/\beta_1)^k (\beta_1^{\gamma^{-1}(i)} - \beta_1^{\gamma^{-1}(k)}) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow ((\beta_2/\beta_1)^i - (\beta_2/\beta_1)^k) (\beta_1^{\gamma^{-1}(k)} - \beta_1^{\gamma^{-1}(i)}) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Так как  $\beta_2/\beta_1 > 1$  и  $1 \leq i < k$ , то левая скобка будет отрицательна, тогда для выполнения последнего неравенства правая скобка тоже должна быть неположительна, поэтому так как  $0 < \beta_1 < 1$ , то  $\gamma^{-1}(i) \leq \gamma^{-1}(k)$ . Противоречие.

Следовательно, для экстремальной матрицы  $\gamma^{-1}(i) < \gamma^{-1}(k)$ .

Пусть  $q = \{\min \gamma^{-1}(i) : \chi_i = 1\}$ , очевидно,  $q \leq n-1$ . По доказанному выше или  $q = n-p+2$ , если  $\forall | \chi_j | = 1$ ; или  $q = n-p+3$ , если  $\exists \chi_j = 0$ . В первом случае число строк, для которых  $\chi_i = 1$ , равно  $n-(n-p+1) = p-1$ , а во втором:  $n-(n-p+1)-1 = p-2$ .

Докажем, что для экстремальной матрицы при  $\chi_i = 1$  верна формула

$$\gamma^{-1}(i) = q + i - 1. \quad (39)$$

Очевидно, что  $\gamma^{-1}(1) = q$  – верно. Пусть  $i_0 = \{\min i : \chi_i = 1, \gamma^{-1}(i) \neq q + i - 1\}$ , то есть формула (39) не верна, по выбору  $i_0 : \gamma^{-1}(i_0) = j_0 \geq q + i_0$ . Тогда существует  $k_0$ ,  $i_0 < k_0$  (причем  $\chi_{k_0} = 1$ ), такое, что  $\gamma^{-1}(k_0) = q + i_0 - 1$ . Однако, это противоречит утверждению для экстремальной матрицы, доказанному выше:  $i_0 < k_0$ , но  $\gamma^{-1}(i_0) > \gamma^{-1}(k_0)$ . Поэтому для экстремальной матрицы верна формула (39) и  $\gamma^{-1}(i+1) - \gamma^{-1}(i) = 1$  при  $\chi_i = 1$  и  $\chi_{i+1} = 1$ .

#### 4.7 Примеры экстремальных матриц, $n$ – четное

Ниже приведены примеры вариантов выбора элементов матрицы  $C$  для перестановок  $\mathcal{E}$  и  $\gamma$  для  $n=8$ , 1)  $p=7$ , 2)  $p=5$ , 3)  $p=3$ ; а в пункте 4.9 для  $n=9$ ,  $p=6$ , когда  $\exists \chi_j = 0$  и когда нет. Матрицы подозрительные на

экстремальность представлены в виде таблиц. Если в  $i$  –ой строке и  $j$  –ом столбце стоит символ  $\varepsilon$  ( $\gamma$ ), то элемент  $c_{ij}$  матрицы  $C$  входит в целевую функцию (5) для максимальной (минимальной) перестановки.

$\varepsilon$		$\gamma$					
	$\varepsilon$		$\gamma$				
		$\varepsilon$		$\gamma$			
			$\varepsilon$		$\gamma$		
				$\varepsilon$		$\gamma$	
					$\varepsilon$		$\gamma$
$\gamma$						$\varepsilon$	
		$\gamma$					$\varepsilon$

Рис.1.  $n = 8$ ,  $p = 7$

$\varepsilon$				$\gamma$			
	$\varepsilon$				$\gamma$		
		$\varepsilon$				$\gamma$	
			$\varepsilon$				$\gamma$
$\gamma$				$\varepsilon$			
	$\gamma$				$\varepsilon$		
		$\gamma$				$\varepsilon$	
			$\gamma$				$\varepsilon$

Рис.2.  $n = 8$ ,  $p = 5$

$\varepsilon$						$\gamma$	
	$\varepsilon$						$\gamma$
$\gamma$		$\varepsilon$					
	$\gamma$		$\varepsilon$				
		$\gamma$		$\varepsilon$			
			$\gamma$		$\varepsilon$		
				$\gamma$		$\varepsilon$	
					$\gamma$		$\varepsilon$

Рис.3.  $n = 8$ ,  $p = 3$

#### 4.8 Вычисление $\Delta S(C, p)$

Пусть в экстремальной матрице  $C$  для  $\forall \chi_j \neq 0$ . Найдем  $\Delta S(C, p)$ , если  $p$  известно. Зная  $p$ , можно полностью восстановить экстремальную матрицу.

$$\Delta S(C, p) = S_\varepsilon(C, p) - S_\gamma(C, p) = \sum_{i=1}^n \Delta s_i =$$

$$= a_{\max} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \beta_2^{i-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \beta_2^{i-1} \beta_1^{n-p+1} \right) - a_{\min} \left( \sum_{i=1}^{n-p+1} \beta_1^{i-1} - \sum_{i=1}^{n-p+1} \beta_1^{i-1} \beta_2^{p-1} \right). \quad (40)$$

Обозначим  $\mu = \frac{a_{\max}(1-\beta_1) - a_{\min}(1-\beta_2)}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$ , тогда нетрудно видеть, что из

формулы (40) следует (используется формула «сумма нескольких членов геометрической прогрессии»)

$$\begin{aligned} \Delta S(C, p) &= a_{\max} \frac{1-\beta_2^{p-1}}{1-\beta_2} (1-\beta_1^{n-p+1}) - a_{\min} \frac{1-\beta_1^{n-p+1}}{1-\beta_1} (1-\beta_2^{p-1}) = \\ &= \frac{a_{\max}(1-\beta_1) - a_{\min}(1-\beta_2)}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)} (1-\beta_1^{n-p+1})(1-\beta_2^{p-1}) = \mu (1-\beta_1^{n-p+1})(1-\beta_2^{p-1}). \end{aligned} \quad (41)$$

При увеличении  $p$  увеличивается количество строк, для которых  $\chi_j = 1$ , но соответствующие слагаемые  $\Delta s_j(C)$  уменьшаются; уменьшается количество строк, для которых  $\chi_j = -1$ , но соответствующие отрицательные слагаемые  $\Delta s_j(C)$  по модулю увеличиваются. Необходимы дальнейшие исследования.

#### 4.9 Примеры экстремальных матриц, $n$ – нечетное

Матрицы подозрительные на экстремальность:

$\varepsilon$				$\gamma$				
	$\varepsilon$				$\gamma$			
		$\varepsilon$				$\gamma$		
			$\varepsilon$				$\gamma$	
				$\varepsilon$				$\gamma$
$\gamma$				$\varepsilon$				
	$\gamma$				$\varepsilon$			
		$\gamma$				$\varepsilon$		
			$\gamma$				$\varepsilon$	

Рис.4а.  $n = 9$ ,  $p = 6$ ,  $\forall \chi_j \neq 0$

$\varepsilon$					$\gamma$			
	$\varepsilon$					$\gamma$		
		$\varepsilon$					$\gamma$	
			$\varepsilon$					$\gamma$
				$\varepsilon$				
$\gamma$				$\varepsilon$				
	$\gamma$				$\varepsilon$			
		$\gamma$				$\varepsilon$		
			$\gamma$				$\varepsilon$	

Рис.4б.  $n = 9$ ,  $p = 6$ ,  $\exists \chi_j = 0$

#### 4.10 Сравнение $\Delta S^0(C, p)$ и $\Delta S(C, p)$

Вернемся к случаю п.4.5. Обозначим  $\Delta S^0(C, p)$  – аналог  $\Delta S(C, p)$  для варианта, когда  $\exists \chi(j) = 0$ , это возможно (см. п.4.5) только при нечетном  $n \geq 3$  (см., например, рис.4б.),  $n = 2p - 3$ ,  $p = p_0 = (n+3)/2$ , очевидно,  $p_0 \geq 3$ .

$$\Delta S^0(C, p_0) = S_\varepsilon(C, p_0) - S_\gamma(C, p_0) = a_{\max} \left( \sum_{i=1}^{p_0-2} \beta_2^{i-1} - \sum_{i=1}^{p_0-2} \beta_2^{i-1} \beta_1^{n-p_0+2} \right) - \\ - a_{\min} \left( \sum_{i=1}^{n-p_0+1} \beta_1^{i-1} + \sum_{i=1}^{n-p_0+1} \beta_1^{i-1} \beta_2^{p_0-1} \right) = a_{\max} \frac{1 - \beta_2^{p_0-2}}{1 - \beta_2} (1 - \beta_1^{n-p_0+2}) - a_{\min} \frac{1 - \beta_1^{n-p_0+1}}{1 - \beta_1} (1 - \beta_2^{p_0-1}).$$

Докажем, что  $\Delta S(C, p_0) > \Delta S^0(C, p_0)$ :

$$\begin{aligned} \Delta S(C, p_0) > \Delta S^0(C, p_0) &\Leftrightarrow \mu(1 - \beta_2^{p_0-1})(1 - \beta_1^{p_0-2}) > \\ &> \frac{a_{\max}}{1 - \beta_2} (1 - \beta_2^{p_0-2})(1 - \beta_1^{p_0-1}) - \frac{a_{\min}}{1 - \beta_1} (1 - \beta_1^{p_0-2})(1 - \beta_2^{p_0-1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mu(1 - \beta_2^{p_0-1})(1 - \beta_1^{p_0-2}) + \frac{a_{\min}(1 - \beta_2)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)} (1 - \beta_1^{p_0-2})(1 - \beta_2^{p_0-1}) > \\ &> \frac{a_{\max}(1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)} (1 - \beta_2^{p_0-2})(1 - \beta_1^{p_0-1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{a_{\max}(1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)} (1 - \beta_2^{p_0-1})(1 - \beta_1^{p_0-2}) > \frac{a_{\max}(1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)} (1 - \beta_2^{p_0-2})(1 - \beta_1^{p_0-1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - \beta_2^{p_0-1})(1 - \beta_1^{p_0-2}) > (1 - \beta_2^{p_0-2})(1 - \beta_1^{p_0-1}) \Leftrightarrow \frac{1 - \beta_2^{p_0-1}}{1 - \beta_2^{p_0-2}} > \frac{1 - \beta_1^{p_0-1}}{1 - \beta_1^{p_0-2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1 - x^{p-1}}{1 - x^{p-2}}$ ,  $x \in (0, 1)$ , здесь  $p$  – параметр,  $p \geq 3$ . Ее

производная равна

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(p-1)x^{p-2}(1-x^{p-2}) + (1-x^{p-1})(p-2)x^{p-3}}{(1-x^{p-2})^2} = \\ &= \frac{-(p-1)x^{p-2} + (p-1)x^{2p-4} + (p-2)x^{p-3} - (p-2)x^{2p-4}}{(1-x^{p-2})^2} = \\ &= \frac{x^{p-3}}{(1-x^{p-2})^2}(-(p-1)x + (p-2) + x^{p-1}). \end{aligned}$$

Знак производной совпадает со знаком выражения  $-(p-1)x + (p-2) + x^{p-1}$ .

Рассмотрим функцию  $g(x) = -(p-1)x + (p-2) + x^{p-1}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Производная функции  $g'(x) = -p + 1 + (p-1)x^{p-2}$ . В области определения  $g'(x) \leq 0$ , причем  $g'(x) = 0$ , только при  $x = 1$ , но  $g(1) = 0$ , следовательно,  $g(x) > 0$ , при  $x \in (0, 1)$ , тогда  $f'(x) > 0$ , а, значит, функция  $f(x)$  монотонно возрастает на области

определения, поэтому  $f(\beta_2) > f(\beta_1)$ . Таким образом, доказано, что  $\Delta S(C, p_0) > \Delta S^0(C, p_0)$ , то есть, в экстремальной матрице случай  $\exists \chi_j = 0$  невозможен и его можно исключить из рассмотрения.

#### 4.11 Сравнение $\Delta S(C, p)$ и $\Delta S(C, p + 1)$

Найдем максимум функции  $\Delta S(C, p) = \mu(1 - \beta_1^{n-p+1})(1 - \beta_2^{p-1})$  при фиксированной матрице  $C$ , претендующей на экстремальность. К сожалению, в общем случае, прямые, стандартные методы нахождения экстремума приводят к уравнениям, которые решаются только приближенно, с помощью численных методов. Гораздо проще написать программу вычисления функции  $\Delta S(C, p)$  для всех  $p = \overline{2, n}$ , а затем найти ее максимальное значение, а также соответствующее  $p$ ,  $p = \overline{2, n}$ . Это можно сделать, например, в редакторе электронных таблиц MS Excel (пример см. ниже).

Сделаем сравнения для некоторых частных случаев.

Предположим, что выполняется неравенство

$$p \leq (n+1)/2. \quad (42)$$

Для этого случая  $\Delta S(C, p) < \Delta S(C, p + 1)$ ,  $p = \overline{2, [(n+1)/2]}$ . Докажем это.

$$\Delta S(C, p) < \Delta S(C, p + 1) \Leftrightarrow (1 - \beta_1^{n-p+1})(1 - \beta_2^{p-1}) < (1 - \beta_1^{n-p})(1 - \beta_2^p) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - \beta_1^{n-p+1}}{1 - \beta_1^{n-p}} < \frac{1 - \beta_2^p}{1 - \beta_2^{p-1}}. \quad (43)$$

Рассмотрим функцию  $h(x) \equiv h(x, \beta) = \frac{1 - \beta^x}{1 - \beta^{x-1}}$ ,  $x \in (1, n)$ , где  $\beta$  – константа,

$\beta \in (0, 1)$ . Производная функции  $h(x)$ :

$$h'(x) = \frac{-\beta^x \ln \beta (1 - \beta^{x-1}) + \beta^{x-1} \ln \beta (1 - \beta^x)}{(1 - \beta^{x-1})^2} = \frac{\beta^{x-1} \ln \beta (-\beta + 1)}{(1 - \beta^{x-1})^2}.$$

Она отрицательна, так как  $\ln \beta < 0$  (остальные множители положительные), поэтому в области определения функция  $h(x)$  убывает. Отсюда и из исследования выше функции  $f(x)$ ,  $x \in (0,1)$ , так как  $p \leq (n+1)/2 \Leftrightarrow p \leq n - p + 1$ , имеем

$$\frac{1 - \beta_1^{n-p+1}}{1 - \beta_1^{n-p}} < \frac{1 - \beta_2^{n-p+1}}{1 - \beta_2^{n-p}} \leq \frac{1 - \beta_2^p}{1 - \beta_2^{p-1}}.$$

Это означает, что неравенство (43) верно при выполнении неравенства (42) и выполняется неравенство  $\Delta S(C, p) < \Delta S(C, p+1)$ . Для случая  $p > (n+1)/2$  такой метод сравнения не проходит. Однако, получен следующий результат: значения  $p \leq [(n+1)/2]$  не могут быть оптимальными, то есть проверку на экстремальность матрицы нужно осуществлять, начиная с  $p = [(n+1)/2] + 1$ .

Итак, из вышесказанного следует, что с возрастанием  $p$ ,  $p \in (1, n)$ , левая часть неравенства (43) непрерывно и монотонно возрастает от  $(h(n, \beta_1) + 0)$  до  $+\infty$ , а его правая часть непрерывно и монотонно убывает от  $+\infty$  до  $(h(n, \beta_2) + 0)$ , поэтому равенство

$$\frac{1 - \beta_1^{n-p+1}}{1 - \beta_1^{n-p}} = \frac{1 - \beta_2^p}{1 - \beta_2^{p-1}}$$

и, соответственно, равенство  $\Delta S(C, p) = \Delta S(C, p+1)$  достигается только в одной точке  $p^*$  ( $p^*$  может не быть натуральным). При  $p < p^*$  верно неравенство  $\Delta S(C, p) < \Delta S(C, p+1)$ , при  $p > p^*$  выполняется неравенство  $\Delta S(C, p) > \Delta S(C, p+1)$ . Для экстремальной матрицы оптимальное значение  $p$  должно быть натуральным числом,  $p = \overline{2, n}$ .

#### 4.12 Для экстремальной матрицы оптимальное значение $p = n$

Выясним, когда максимум  $\Delta S(C, p)$  достигается в точке  $p = n$  для экстремальной матрицы  $C$ . Тогда верно неравенство  $\Delta S(C, n-1) \leq \Delta S(C, n)$ .

$$\Delta S(C, n-1) \leq \Delta S(C, n) \Leftrightarrow (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^{n-2}) \leq (1 - \beta_1)(1 - \beta_2^{n-1}) \Leftrightarrow 1 + \beta_1 \leq \frac{1 - \beta_2^{n-1}}{1 - \beta_2^{n-2}}.$$

Пусть  $z = \beta_2^{n-2}$ , тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$\begin{aligned} (1 + \beta_1)(1 - z) &\leq 1 - \beta_2 z \Leftrightarrow \beta_1 \leq (1 + \beta_1 - \beta_2)z \Leftrightarrow z \geq \beta_1^{-1}(1 + \beta_1 - \beta_2) \\ &\Leftrightarrow n \leq 2 + \ln\left(\frac{\beta_1}{1 + \beta_1 - \beta_2}\right)/\ln \beta_2. \end{aligned} \quad (44)$$

При выполнении неравенства (44) – для экстремальной матрицы оптимальное значение  $p = n$ .

#### 4.13 Для экстремальной матрицы оптимальное значение $p = [(n+1)/2]+1$

Выясним, когда максимум  $\Delta S(C, p)$  достигается при  $p = [(n+1)/2]+1$  (минимально возможном значении оптимального  $p$  для фиксированного  $n$ ).

При этом предположении необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\Delta S(C, [(n+1)/2]+1) \geq \Delta S(C, [(n+1)/2]+2). \quad (45)$$

Обозначим  $q = [(n+1)/2]+1$ ,  $v = \beta_1^{n-q}$ ,  $w = \beta_2^{q-1}$ , тогда

$$\begin{aligned} \Delta S(C, q) &\geq \Delta S(C, q+1) \Leftrightarrow (1 - \beta_1^{n-q+1})(1 - \beta_2^{q-1}) \geq (1 - \beta_1^{n-q})(1 - \beta_2^q) \\ &\Leftrightarrow (1 - \beta_1 v)(1 - w) \geq (1 - v)(1 - \beta_2 w) \Leftrightarrow -\beta_1 v - w + \beta_1 v w \geq -v - \beta_2 w + \beta_2 v w \\ &\Leftrightarrow -\beta_1 v + v - \beta_2 v w + \beta_1 v w \geq w - \beta_2 w \Leftrightarrow \\ &v \geq \frac{(1 - \beta_2)w}{1 - \beta_1 - (\beta_2 - \beta_1)w}. \end{aligned} \quad (46)$$

Пусть  $w_0$  – константа равная  $w$  или чуть большая, чем  $w$ , тогда

$$\frac{(1 - \beta_2)w}{1 - \beta_1 - (\beta_2 - \beta_1)w_0} \geq \frac{(1 - \beta_2)w}{1 - \beta_1 - (\beta_2 - \beta_1)w}.$$

Значит, если справедливо неравенство

$$v \geq \frac{(1 - \beta_2)w}{1 - \beta_1 - (\beta_2 - \beta_1)w_0},$$

то верно и неравенство (46). Прологарифмируем обе части последнего неравенства:

$$(n-q)\ln \beta_1 \geq \ln\left(\frac{(1-\beta_2)}{1-(1-w_0)\beta_1-w_0\beta_2}\right) + (q-1)\ln \beta_2. \quad (47)$$

Преобразуя неравенство (47), получим

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1 \geq \left(n \ln \beta_1 + \ln \beta_2 - \ln\left(\frac{(1-\beta_2)}{1-(1-w_0)\beta_1-w_0\beta_2}\right)\right) (\ln \beta_1 + \ln \beta_2)^{-1}. \quad (48)$$

При его выполнении – выполняется неравенство (45). Неравенство (48) является достаточным условием того, что оптимальное значение  $p = \lceil (n+1)/2 \rceil + 1$ .

#### 4.14 Пример для $n = 15$

Пусть  $a_{\min} = a_{\max} = 0.2$ ,  $\beta_1 = 0.93$ ,  $\beta_2 = 0.98 \Rightarrow \beta_2^8 \approx 0.85076 < 0.851 = w_0$ .

При подстановке этих данных в неравенство (48) получим верное неравенство  $9 \geq 8.538322$ , значит, оптимальное значение  $p = 9$ . По формуле (40) максимальная разность  $\max \Delta S(C, 9) = \mu(1 - \beta_1^7)(1 - \beta_2^8) = 0.424578$ .

Проверка, сделанная в редакторе электронных таблиц MS Excel.

$p$	$n$	$a_{\min} = a_{\max}$	$\beta_1$	$\beta_2$	Макс. разность
2	15	0,2	0,93	0,98	0,091137
3	15	0,2	0,93	0,98	0,172742
4	15	0,2	0,93	0,98	0,244223
5	15	0,2	0,93	0,98	0,304925
6	15	0,2	0,93	0,98	0,354133
7	15	0,2	0,93	0,98	0,391062
8	15	0,2	0,93	0,98	0,414857
9	15	0,2	0,93	0,98	0,424578
10	15	0,2	0,93	0,98	0,419205
11	15	0,2	0,93	0,98	0,397621
12	15	0,2	0,93	0,98	0,358610
13	15	0,2	0,93	0,98	0,300848
14	15	0,2	0,93	0,98	0,222893
15	15	0,2	0,93	0,98	0,123179

## **5. Постановка задачи о нахождении плана переработки сахарной свеклы, максимизирующего выход сахара и эвристические стратегии ее решения**

### **5.1 Математическая модель деградации сахарной свеклы**

Интересно, что предыдущие теоретические разработки имеют непосредственное практическое применение к реальным задачам АПК (агропромышленного комплекса). Работа АПК для достаточного обеспечения населения страны продуктами питания всегда была важной составляющей деятельности правительства РФ. Особенно вышеописанные теоретические исследования ярко проявляют себя, когда ставится задача о выработке такого стратегического продукта как сахар, который в нашей стране изготавливается из сахарной свеклы. Объем ее переработки в сутки даже средним по мощности сахарным заводом равен приблизительно 3 тысячи тонн. Большие объемы перерабатываемого сырья при этом способствует тому, что применение квазиоптимальных стратегий переработки дает существенный выигрыш относительно переработки в произвольном порядке (см., например, главу 4). Ее химический состав может быть различным для разных сортов и варьируется при изменении условий ее выращивания и хранения, поэтому порядок переработки сахарной свеклы влияет на массу сахара на выходе.

Предположим, что за единицу времени (период, этап) завод перерабатывает фиксированное количество (партию) сырья массы  $M$ . Величина  $M$  определяется производственными мощностями завода. Имеется сырье (сахарная свекла разных сортов), и в каждую единицу времени (этап) перерабатывается сырье только одного сорта (одна партия). Обозначим  $n$  – количество партий свеклы, которые завод перерабатывает за «сезон». Предположим, что к началу сезона переработки все сырье находится на темпоральных хранилищах. Многие сахарные заводы особенно в начале сезона (при благоприятных погодных условиях) не хранят свеклу, а сразу после сбора везут ее для переработки на завод. Для облегчения

математической модели мы будем считать, что к началу переработки вся свекла убрана и находится на кагатных полях, откуда и доставляется на сахарный завод.

Занумеруем партии сырья, некоторым образом, от 1 до  $n$ . Обозначим  $c_{i1}$  – долю полезного ингредиента в  $i$ -й партии сырья в начале переработки,  $c_{i2}$  – его содержание в  $i$ -й партии свеклы в начале второго этапа переработки, ...,  $c_{in}$  – содержание полезного ингредиента в  $i$ -й партии свеклы в начале  $n$ -го этапа. Для сахарной свеклы полезный ингредиент – это сахар.

Параметры  $c_{ij}$  удобно определять через начальную долю полезного ингредиента  $c_{i1} = a_i \in [a_{\min}, a_{\max}]$  и коэффициенты деградации  $b_{ij-1} = \frac{c_{ij}}{c_{ij-1}}$ ,  $j = \overline{2, n}$ , (альтернативное задание матрицы  $C$ ). Соответствующие формулы для  $c_{ij}$  имеют следующий вид

$$c_{i1} = a_i, \quad c_{ij} = a_i b_{i1} \dots b_{ij-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{2, n}.$$

Нетрудно видеть, что эти формулы идентичны формулам (8). Параметры  $c_{ij}$  составляют матрицу  $C$ , которая будем называть матрицей состояний. Если в течении хранения доля сахара постоянно уменьшается (свекла деградирует), то  $b_{ij} \in [\beta_1, \beta_2] \subset (0, 1)$ , где  $[\beta_1, \beta_2]$  – некий отрезок, а матрица  $C$  – строчно-антитонная.

## 5.2 Процесс дозаривания

Процесс дозаривания (Artificial Ripening) заключается в том, что после сбора урожая, при дальнейшем хранении фруктов, овощей, корнеплодов, в них какое-то время повышается доля сахара. Для упрощения математической модели будем считать, что число этапов, во время которых происходит дозаривание одинаково для всех партий сахарной свеклы. Также считаем, что процесс дозаривания длится от первого этапа до начала  $\nu$  этапа,  $2 \leq \nu \leq [n/2]$ .

На этапах дозаривания параметры  $b_{ij} \in (1, \beta_{MAX}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, v-1}$ , на этапах увядания параметры  $b_{ij} \in [\beta_1, \beta_2] \subset (0, 1)$ ,  $j = \overline{v, n-1}$ . Рекомендуется брать  $\beta_{MAX} = \frac{n-1}{n-2}$ . В математической модели нужно определить: учитывается процесс дозаривания или нет. Этот случай соответствует строчно-изоантитонной матрице состояний.

### 5.3 Распределение параметров на заданных отрезках

Параметры  $a_i$  и  $b_{ij}$  могут распределяться по-разному на заданных отрезках. Особо важным является распределение коэффициентов деградации  $b_{ij}$ . Будем различать два принципиальных момента.

- 1) равномерное распределение параметров  $b_{ij}$  на отрезке  $[\beta_1, \beta_2]$  [27];
- 2) концентрированное распределение: при каждом  $i$  существует константа  $\delta_i$ ,  $\delta_i \leq \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{4}$  такая, что  $b_{ij} \in [\beta_i^1, \beta_i^2] \subset [\beta_1, \beta_2]$ , где  $|\beta_i^1 - \beta_i^2| = \delta_i$

На отрезке  $[\beta_i^1, \beta_i^2]$  параметры  $b_{ij}$  распределены равномерно.

Иначе говоря, в этом случае коэффициенты деградации каждой партии лежат в маленькой окрестности некой точки, то есть деградация свеклы происходит «приблизительно одинаково» на каждом этапе.

Для этапов дозаривания концентрированное распределение определяется аналогичным образом.

Для случая концентрированного распределения больше подходят те эвристические методы, которые являются оптимальными, при условии, что коэффициенты пропорциональности зависят только от номера строки (партии). Определенный интерес для исследования вызывают также случаи, при которых в концентрированном распределении константы  $\delta_i$ ,

удовлетворяют условию  $\delta_i \leq \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{3}$  или условию  $\delta_i \leq \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{2}$ .

## 5.4 Задача оптимизации

Сформулируем задачу поиска оптимальной последовательности переработки имеющихся партий сырья, которая обеспечивает для перерабатывающего завода максимальный выход конечного продукта за весь сезон переработки сырья. Имеется матрица состояний  $\tilde{S} = C - \tilde{L}$  с положительными элементами  $s_{ij}$ . Матрица  $\tilde{L}$  с неотрицательными элементами  $l_{ij}$  отвечает за те или иные потери сахара во время переработки. Последовательность переработки партий сырья будем описывать перестановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

натуральных чисел от 1 до  $n$ . При реализации этой последовательности общий выход продукции после переработки всех  $n$  партий в течение  $n$  единиц времени будет пропорционален следующей величине

$$S(\sigma) = s_{\sigma(1)1} + s_{\sigma(2)2} + s_{\sigma(3)3} + \dots + s_{\sigma(n)n}. \quad (48)$$

А масса выхода конечного продукта равна  $M \cdot S$ .

Нетрудно видеть, что формула (48) является аналогом формулы (5).

Оптимационная задача состоит в том, чтобы найти такую перестановку  $\sigma$  чисел от 1 до  $n$  (последовательность переработки имеющихся партий сырья), при которой  $S(\sigma)$ , вычисляемое по формуле (48), будет максимальным. Аналогичная задача рассмотрена, например, в [28-31].

Назовем перестановку  $\sigma$ , отвечающую за расписание переработки партий – стратегией, перестановку при которой  $S(\sigma)$  принимает максимальное значение – максимальной стратегией, а перестановку, при которой функция  $S(\sigma)$  принимает минимальное значение – минимальной стратегией.

Если параметры партий свеклы на каждом этапе переработки известны (известна матрица  $C$ ), то задача сводится к решению задачи о назначениях.

Однако, нетрудно видеть, что перед каждым  $j$ -ым этапом известны только первые  $j$  столбцов матрицы состояний и то, только для строк (партий), которые еще не отправились на переработку в предыдущие этапы. Поэтому постановка задачи эквивалентна постановке нечеткой задачи о назначениях в главе 2, а коэффициенты деградации  $b_{ij}$  соответствуют коэффициентам пропорциональности, определенным в параграфе 1.7. Максимальная стратегия, опирающаяся, например, на венгерский алгоритм, может быть использована для сравнения полученного результата при использовании некой стратегии в ходе виртуального эксперимента (см. ниже) для оценки потерь конечного продукта (сахара).

## 5.5 Потери сахара при переработке

Здесь в качестве матрицы состояний рассмотрим матрицу  $\tilde{S}$  с элементами  $s_{ij}$ , имеющими смысл доли сахара, полученного при переработке  $i$ -й партии свеклы на  $j$ -ом этапе, то есть при переработке сахара имеются некоторые потери и значения  $s_{ij}$  равны

$$s_{ij} = c_{ij} - l_{ij}, \quad (49)$$

где  $s_{ij}$  – компоненты матрицы  $\tilde{S}$  размера  $n \times n$  ( $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца),  $l_{ij}$  – элементы матрицы  $\tilde{L}$  размера  $n \times n$  потери сахара при переработке  $i$ -й партии свеклы на  $j$ -ом этапе, которые будут определены ниже. Если же в математической модели потери сахара не учитываются, то все  $l_{ij} = 0$ . Потери сахара могут быть связаны, например, с неорганическими веществами, присутствующими в сахарной свекле и оставшимися после применения удобрений при выращивании.

В сахарном производстве существуют разные формулы для оценки выхода сахара по известному начальному химическому составу свеклы. В

частности, выход сахара  $V$  (%), из свеклы, поступающей на переработку, оценивается по следующей формуле [11]:

$$V = Cx - L = Cx - 1.1 - Cx_M, \quad (50)$$

где  $Cx$  (%) – содержание сахарозы в стружке;  $L$  (%) – общие потери сахара,  $Cx_M$  (%) – потери сахарозы в мелассе, дополнительное вычитаемое 1.1 (%) соответствует проценту потери сахарозы при переработке до образования мелассы.

$$Cx_M = 0.1541 \times (K + Na) + 0.2159 \times N + 0.9989 \times I + 0.1967. \quad (51)$$

Здесь  $K$  (ммоль),  $Na$  (ммоль),  $N$  (ммоль) имеют значение содержания калия, натрия,  $\alpha$ -аминного азота на 100 г. свёклы;  $I$  (%) – содержание редуцирующих веществ к массе свёклы. Количество калия, натрия, альфа-аминного азота в сырье практически не меняется во время хранения и зависит только от сорта сырья (номера партии), а количество редуцирующих веществ может повышаться за счет разложения сахарозы при хранении на кагатных полях. На основе экспериментальных данных [11] зависимость количества редуцирующих веществ  $I$  от количества дней хранения  $x$  в среднем выражается в процентах от общей массы поступившего сырья следующей функцией  $I = I(x) = I_0 \cdot (1.03)^x$ , где  $I_0 \approx 0.1$  – начальное содержание редуцирующих веществ. Возможно использование также функции  $I = I(x) = \tilde{I}_0 \cdot (1.029)^x$ , где  $\tilde{I}_0 \approx 0.63$  – начальное содержание редуцирующих веществ, в среднем выражается в процентах от массы поступившей сахарозы..

Если 1 этап равен 7 дней (неделя), для численного эксперимента можно определить:  $I = \tilde{I}_{ij} = \tilde{I}_{i0} \cdot (1.029)^{7j-7}$ , для вычислительного эксперимента рекомендуется взять  $\tilde{I}_{i0} \in [0.62; 0.64]$ .

## 5.6 Эвристические стратегии

Как уже подчеркивалось выше математическая модель оптимального расписания (плана) переработки сахарной свеклы идентична поставленной в

главе 2 нечеткой задаче о назначениях, поэтому эвристические методы решения нечеткой задачи могут быть использованы в качестве эвристических стратегий для плана переработки партий сырья. Опираясь на главу 2, для исследования можно предложить следующие стратегии:

- 1) «**Жадная**» (**Greedy**) стратегия заключается в использовании «жадного» алгоритма. Перерабатывается та партия сырья из оставшихся, которая в данный момент может дать наибольший выход продукции (сахара), то есть ту партию с номером  $i$ , у которой  $s_{ij}$  в начале  $j$ -го периода наибольшее.
- 2) «**Бережливая**» (**Thrifty**) стратегия использует противоположный по смыслу жадному – «бережливый» алгоритм: на каждом этапе перерабатывается партия сырья из оставшихся с наименьшей производственной ценностью (партию с номером  $i$ , у которой  $s_{ij}$  в начале  $j$ -го периода – наименьшее).
- 3) «**Бережливая/жадная**» стратегия состоит в том, что во время первых  $\nu - 1$  этапов реализуется «бережливый» алгоритм, а после, начиная с  $\nu$ -го этапа, используется «жадный» алгоритм. Число  $\nu$ ,  $\nu = \overline{2, [n/2]}$ , известно до начала сезона.
- 4) «**Жадная/бережливая**» стратегия использует во время первых  $\nu - 1$  этапов «жадный» алгоритм, а после, начиная с  $\nu$ -го этапа, используется «бережливый» алгоритм.
- 5) **Стратегия типа БкЖ ( $T(k)G$ )** состоит в том, что во время первых  $\nu - 1$  этапов на переработку отправляется партия, которая в данный момент находится на  $k$ -ой позиции по сахаристости, считая от наименьшей (1 позиция) до наибольшей, для корректности этого условия необходимо, чтобы  $k = \overline{1, n - \nu + 1}$ . Далее, начиная с  $\nu$  этапа, используется «жадный» алгоритм. Например, «бережливая/жадная» стратегия – это стратегия Б1Ж ( $T(1)G$ ).

6) Стратегия  $CTG$  состоит в перестановке  $\omega$ , которая определяет расписание стратегии  $CTG$  по описанному правилу (см. метод  $CTG$ ), здесь  $b_i = b_{ii}, i = \overline{1, n}$ .

Стратегии 1–2 были разобраны в учебно-методическом пособии «Лабораторная работа «Решение прикладных задач дискретной оптимизации» [6], см. также [28, 29].

Стратегии 3–5 изучались в работах [30–32].

Стратегии 5–6 используются, как правило, при учете процесса дозаривания, о них рассказано в работе [33].

Стратегия 6 дает лучшие результаты при концентрированном распределении параметров  $b_{ij}, j = \overline{1, n-1}$ , для каждого  $i = \overline{1, n}$ .

Стратегии 3–4 используются в обоих случаях распределения параметров  $b_{ij}$ .

Из различных работ авторов учебного пособия следует (см., например, [34]), что для случая концентрированного распределения коэффициентов пропорциональности (деградации) больше подходят те эвристические методы (стратегии), которые являются оптимальными, при условии, что коэффициенты пропорциональности зависят только от номера строки (партии). Для случая равномерного распределения коэффициентов деградации лучшие результаты дает жадная стратегия.

## 5.7 Вариации жадной стратегии

Одной из известных стратегий переработки партий сырья является жадная стратегия, которая использует жадный алгоритм. В данном случае, она состоит в том, что перед началом  $j$ -го этапа, для переработки выбирается партия (которая еще не была переработана) с наибольшим содержанием сахара. Назовем  $G^k$  следующую стратегию. Замеры производятся перед первым этапом и после этапов, номера которых кратны  $k$ . Выбираются  $k$  партий, имеющие на данный момент наибольшую сахаристость. В следующие

$k$  этапов на переработку идут именно эти партии в порядке убывания измеренной сахаристости. Последний замер, если  $k$  не делитель числа  $n$ , проводится для меньшего числа партий, конечно, если оставшихся партий больше одной.

Таким образом, стратегия  $G^l$  – это обыкновенная жадная стратегия, а  $G^n$  – это стратегия **C1**, для которой порядок переработки происходит в порядке убывания начальной сахаристости партий. Нетрудно видеть, что при увеличении  $k$  существенно уменьшается количество замеров сахаристости партий. Измерение сахаристости по всем правилам – дело довольно-таки трудоемкое и уменьшение их количества положительно влияет на себестоимость переработки сахарной свеклы.

Виртуальный эксперимент показывает, что при  $n=100$  и приемлемых допустимых отрезках для начальной сахаристости и коэффициентов деградации значение целевой функции при применении стратегии  $G^{20}$  уступает лишь один процент значению целевой функции после применения жадной стратегии  $G^l$ .

Однако, для применения жадной стратегии необходимо сделать 5049 измерений ( $100 + 99 + \dots + 2 = 5049$ ) сахаристости партий, а число необходимых замеров сахаристости для применения стратегии  $G^{20}$  существенно меньше ( $100+80+60+40+20=300$ ). Здесь под термином «измерение» подразумевается определение доли сахара в одной партии в соответствующий момент времени.

## 6. Вычислительный эксперимент

Общее число дней переработки сахарной свеклы для Сергачского сахарного завода составляет приблизительно 100 дней, суточная переработка –  $m=3000$  тонн сахарной свеклы. В вычислительном эксперименте можно принять  $n=100$ , 1 этап равен одному дню. Можно принять, что изменение характеристик сырья в отдельные дни недели практически незначительно влияет на выход сахара, поэтому для оценок можно брать их усредненные значения, например, по неделям. Можно принять, что один период времени равен одной неделе, тогда число этапов переработки  $n$  будет равно 15.

Разумно пользоваться формулой  $n = \left\lceil \frac{100}{d} + 0.5 \right\rceil$ , где  $d$  – количество дней в одном этапе. Масса выхода сахара без учета потерь равна произведению  $m \cdot d \cdot S(\sigma)$ .

Цель экспериментов состоит в оценке усредненных потерь выхода сахара (по отношению к абсолютному максимуму) при реализации базовых стратегий переработки и их комбинаций.

Абсолютный максимум выхода  $S^*$  – максимально возможное значение функции  $S(\sigma)$  при заданной матрице  $\tilde{S}$  может быть получено стандартными методами дискретной оптимизации для решения задачи о назначениях. Применение этих методов, например, венгерского алгоритма, в виртуальном эксперименте дает возможность рассчитать значение абсолютного максимума значения функции (46), по максимальной перестановке  $\sigma^*$  ( $S^* = S(\sigma^*)$ ), которая определит наилучшую (максимальную) стратегию переработки свеклы после  $n$ -го этапа, когда матрица будет известна полностью. Относительные потери стратегии  $\sigma$  относительно максимальной будут равны

$$S^{-1}(\sigma^*)(S(\sigma^*) - S(\sigma)) \times 100\% . \quad (52)$$

Точное определение усредненных относительных потерь стратегии дано ниже.

При проведении численных экспериментов в рамках настоящего исследования «венгерский» алгоритм может быть взят из стандартного программного обеспечения (библиотеки «Munkres»).

Альтернативный вариант: библиотека SciPy [35] с открытым исходным кодом, созданная для работы с массивами библиотеки NumPy [36], и предоставляющая множество удобных и эффективных числовых процедур, предназначенная для выполнения научных и инженерных расчетов. Библиотеки NumPy и SciPy входят в состав семи основных библиотек часто используемых в Python, они «... просты в использовании, но достаточно мощны, чтобы на них могли положиться ведущие мировые ученые и инженеры» [37].

## **7. Описание виртуального эксперимента и необходимые выводы из его результатов**

Каждый виртуальный эксперимент состоит из 50 малых экспериментов (число малых экспериментов может быть изменено, но должно быть не меньше 20).

Малый эксперимент заключается в следующем:

- 1) Фиксируются значения  $n = 15$ ,  $\nu = 7$  (или  $n = 100$ ,  $\nu = 25$ ).
- 2) Задаются допустимый отрезок для начальной сахаристости  $[a_{\min}, a_{\max}] \subset [0.12, 0.22]$  и допустимый отрезок  $[\beta_1, \beta_2] \subset (0.85, 1)$  для коэффициентов деградации (зависит от длительности этапа), если процесс дозаривания не учитывается. Если он учитывается, то задается также полуинтервал  $(1, \beta_{MAX}] \subset (1, 1.15)$ .
- 3) Если влияние неорганических веществ не учитывается, то перейти к пункту 7).
- 4) На основе многолетних данных Сергачского сахарного завода известны следующие допустимые сегменты содержания калия, натрия и  $\alpha$ -аминного азота в сырье:  $K \in [4.8; 7.05]$ ,  $Na \in [0.21; 0.82]$ ,  $N \in [1.58; 2.8]$ , которые необходимо учитывать в ходе численного эксперимента.
- 5) Из этих допустимых отрезков для использования в программе случайным образом сгенерировать значения  $K_i$ ,  $Na_i$  и  $N_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , для каждой партии.
- 6) Сгенерировать значения  $\tilde{I}_{i0} \in [0.62; 0.64]$ , вычислить значения  $\tilde{I}_{ij} = \tilde{I}_{i0} \cdot (1.029)^{7j-7}$  (при  $n = 15$ ).
- 7) Принять решение: будет ли учитываться процесс дозаривания. Если нет, то генерируются параметры  $a_i$  и  $b_{ij} \in [\beta_1, \beta_2] \subset (0, 1)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , согласно допустимым отрезкам пункта 2). Если процесс дозаривания

учитывается, то коэффициенты  $b_{ij} \in (1, \beta_{MAX}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, \nu - 1}$ ;  
 $b_{ij} \in [\beta_1, \beta_2] \subset (0, 1)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{\nu, n - 1}$ .

8) Параметры  $a_i$  генерируются равномерно в допустимом отрезке, параметры  $b_{ij}$  распределяются равномерно или концентрированно.

8.1) равномерное распределение – для генерации параметров  $b_{ij}$  используется равномерное распределение на отрезке  $[\beta_1, \beta_2]$ ;

8.2) концентрированное распределение – при каждом  $i$  выбираются (генерируются) константы  $\delta_i$ ,  $\delta_i \leq \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{4}$  (или  $\delta_i \leq \frac{|\beta_{MAX} - 1|}{4}$  для этапов дозаривания); для генерации параметров  $b_{ij}$  используется равномерное распределение на отрезке  $[\beta_i^1, \beta_i^2]$ ,  $[\beta_i^1, \beta_i^2] \subset [\beta_1, \beta_2]$ , где  $|\beta_i^2 - \beta_i^1| = \delta_i$  (или  $[\beta_i^1, \beta_i^2] \subset (1, \beta_{MAX}]$  для этапов дозаривания). Отрезок  $[\beta_i^1, \beta_i^2]$ , естественно, должен различаться для этапов дозаривания и увядания, а константы  $\delta_i$  для этапов дозаривания и увядания могут быть как одинаковы для всех  $i$ , так и различны.

9) Вычисляются  $c_{ij}$ ,  $l_{ij}$ ,  $s_{ij}$ . Если влияние неорганических веществ учитывается, то  $l_{ij}$  вычисляется по формулам (49)-(51), иначе  $l_{ij} = 0$

Составляются матрицы  $C$ ,  $\tilde{L}$  и  $\tilde{S}$ .

10) Экспериментально рассчитываются выход сахара и относительные потери (см. (52)) при реализации следующих стратегий: максимальной, «жадной», «бережливой», «жадной/бережливой», «бережливой/жадной» обязательно,  $CTG$  и всех стратегий типа БкЖ по желанию.

Окончание малого эксперимента.

11) На основании результатов малых экспериментов составить таблицу усредненных (среднее арифметическое) относительных потерь каждой эвристической стратегии. Провести анализ полученных результатов. Сделать вывод: какая стратегия может быть использована в качестве квазиоптимальной и в каком случае. Особое внимание уделить жадной,

бережливой, бережливой/жадной и жадной/бережливой стратегиям.

Рассчитать относительные потери каждой стратегии.

12) Желательно построить (на одном рисунке для сравнения) графическую поэтапную динамику усредненных значений целевых функций каждой из исследуемых стратегий (см. п.8.2 рис.9).

13) Дать в отдельном окне непосредственную рекомендацию по применению лучшей по результатам эксперимента стратегии в следующем сезоне.

14) Предложить свои эвристические стратегии (желательно обосновать их эвристичность) и включить их в виртуальный эксперимент.

15) Подготовить и сдать преподавателю отчет на бумажном носителе с приложением его в электронной форме.

## 8. Интерфейс и скриншоты работы программы

Написание программы «по-существу» должно быть реализовано в совокупности с написанием «дружелюбного интерфейса» и красивой визуализацией. Потенциальному пользователю должна быть интуитивно понятна ее работа, какие данные подлежат вводу, вывод результатов должен быть наглядным и недвусмысленным. Язык ввода и вывода результатов может быть как русский, так и английский. Обязательно должно быть окно, в котором непосредственно выведено название стратегии, рекомендуемой к применению в следующем сезоне. Скриншоты лучших работ студентов направления ФИИТ (2023 г.) приводятся в данном учебном пособии.

8.1 Скриншоты одной из групп. Плюсы программы: нестандартный дизайн, специальные анимированные окна для задания параметров, учет режима дозаривания, случаев равномерного и концентрированного распределения коэффициентов деградации.

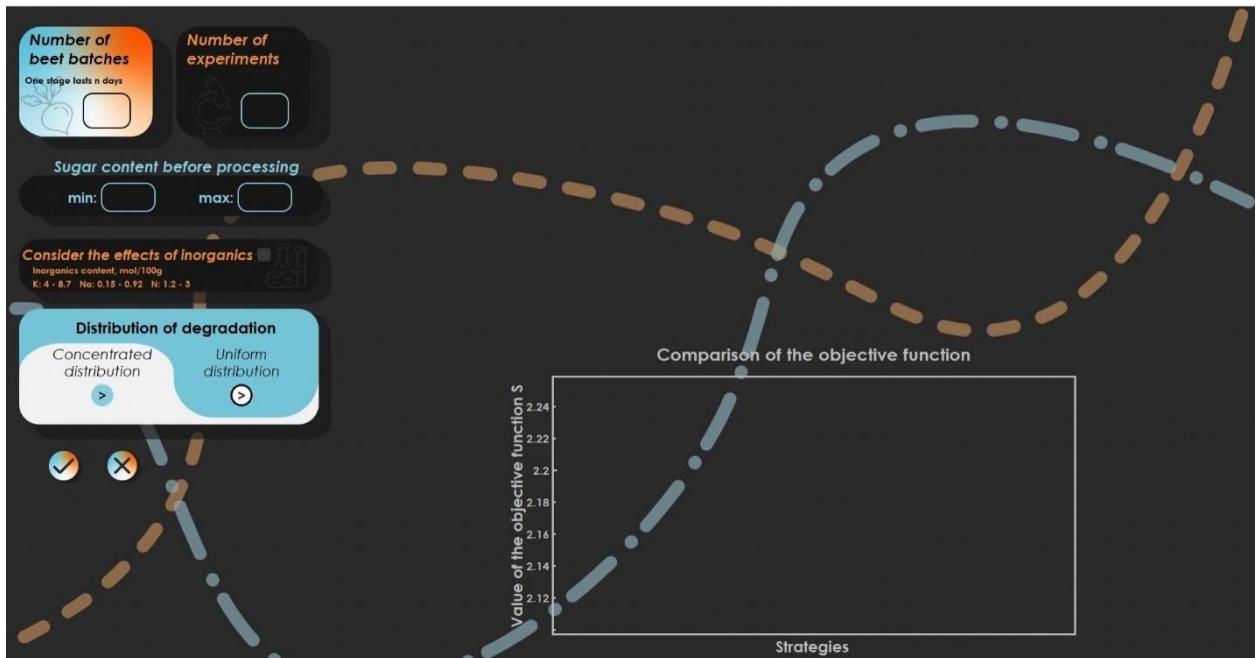


Рис.1 Начальное окно программы.

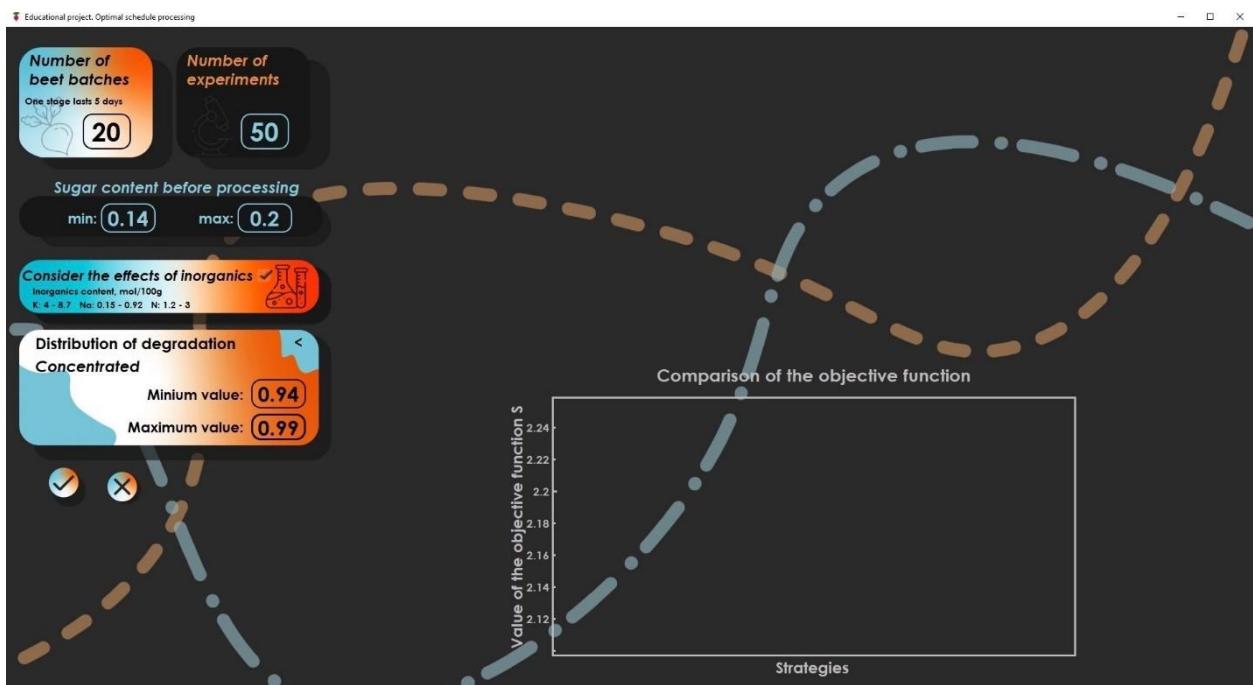


Рис.2. Введение входных данных.

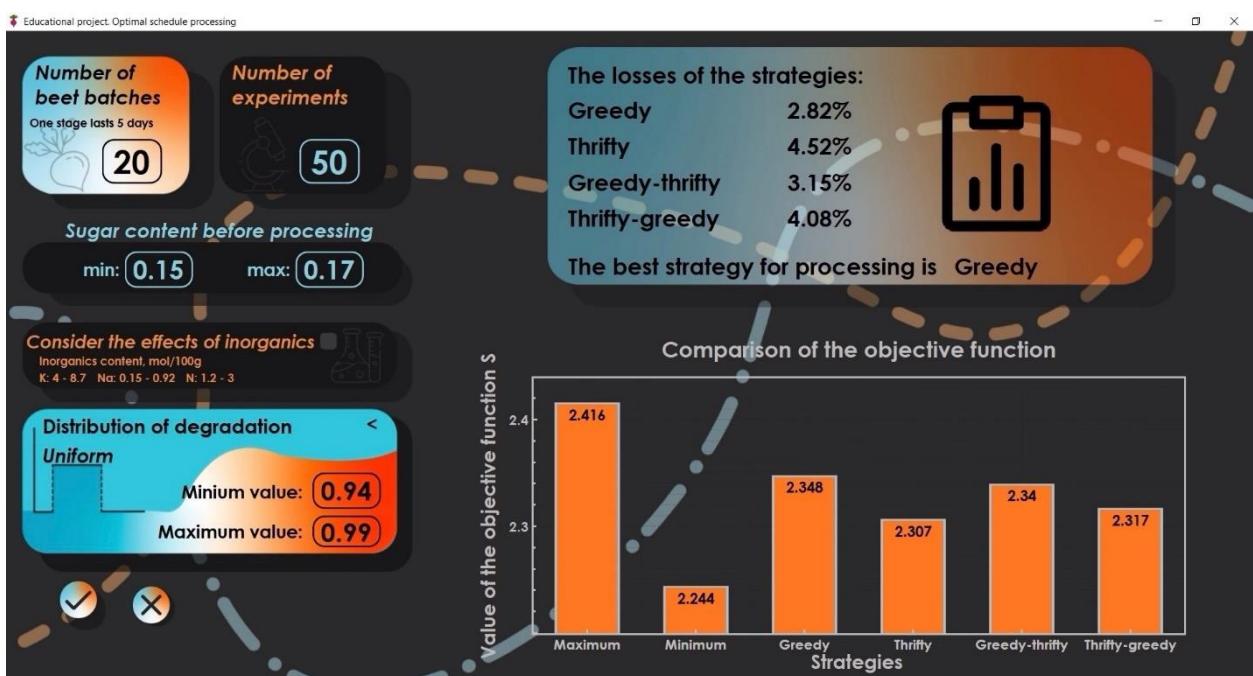


Рис.3. Сравнение значений целевой функции для разных стратегий (равномерное распределение коэффициентов деградации).

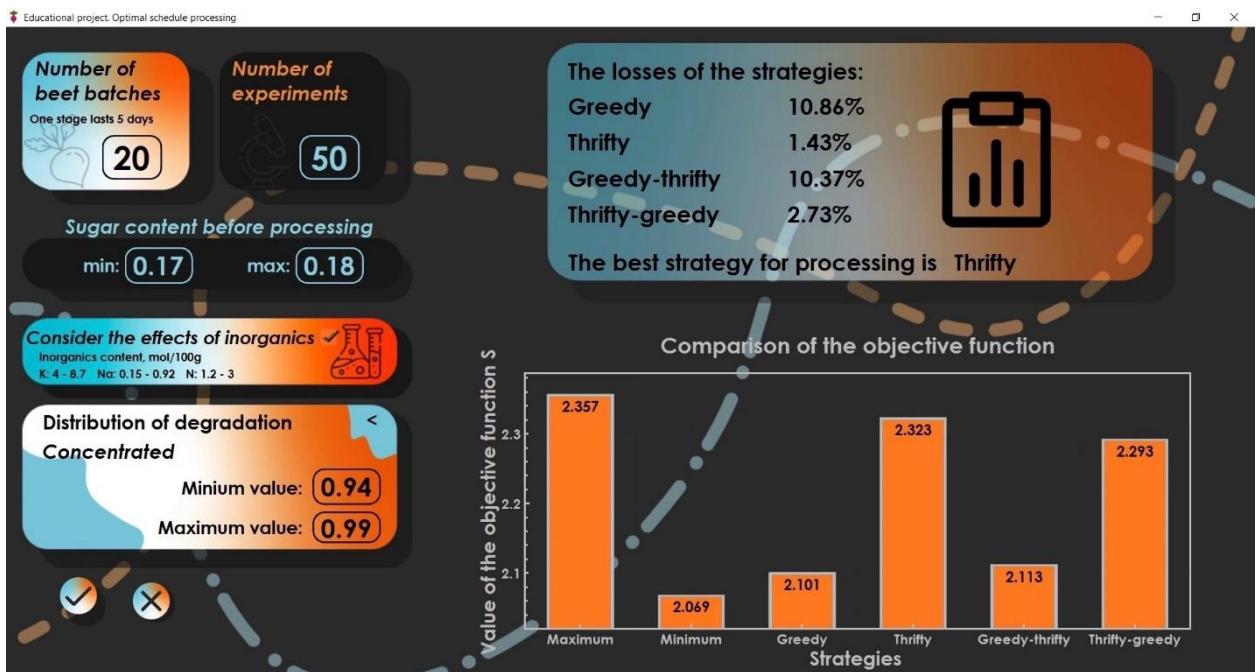


Рис.4. Сравнение значений целевой функции для разных стратегий (концентрированное распределение коэффициентов деградации).

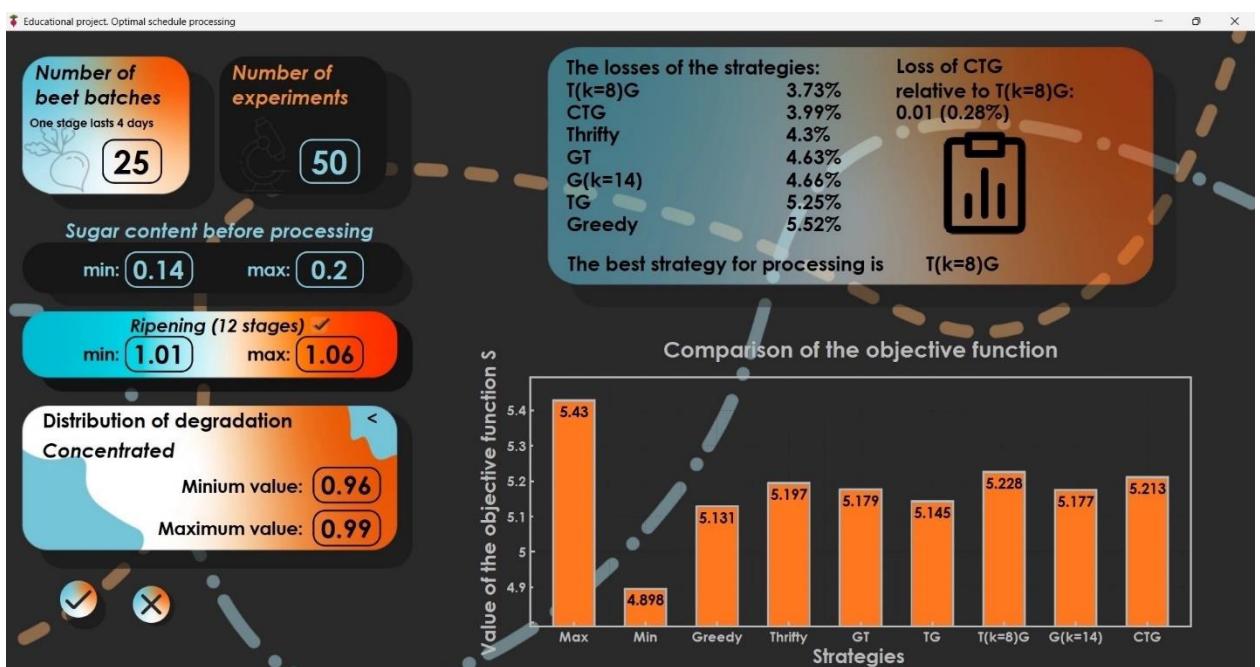


Рис.5. Рассмотрение дополнительных стратегий (концентрированное распределение коэффициентов деградации).

Разработчики: Ветошникова Е., Захаров А., Костин А., Курдина Ю. (гр. 3821Б1ФИ2).

8.2 Скриншоты второй группы студентов. Плюсы программы: настройка цветовой гаммы, изменение масштабов графиков динамики целевой функции.

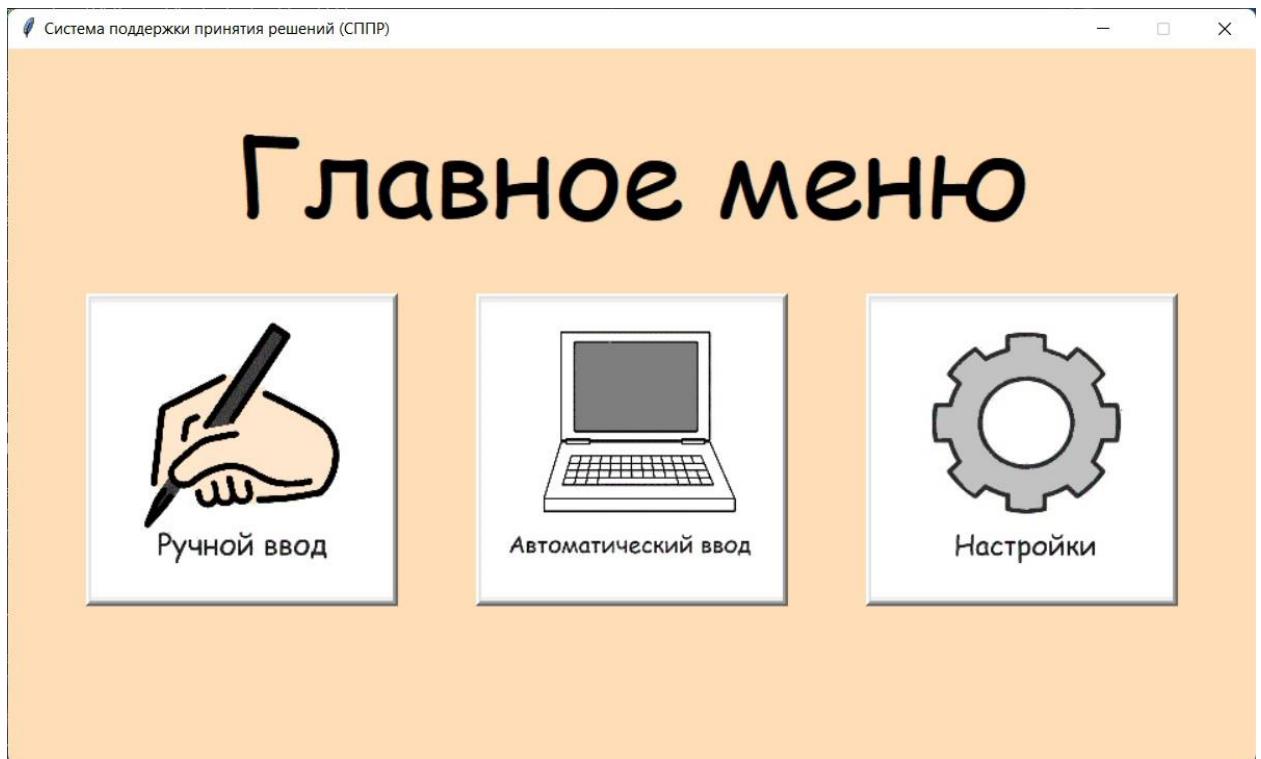


Рис.6. Главное меню.

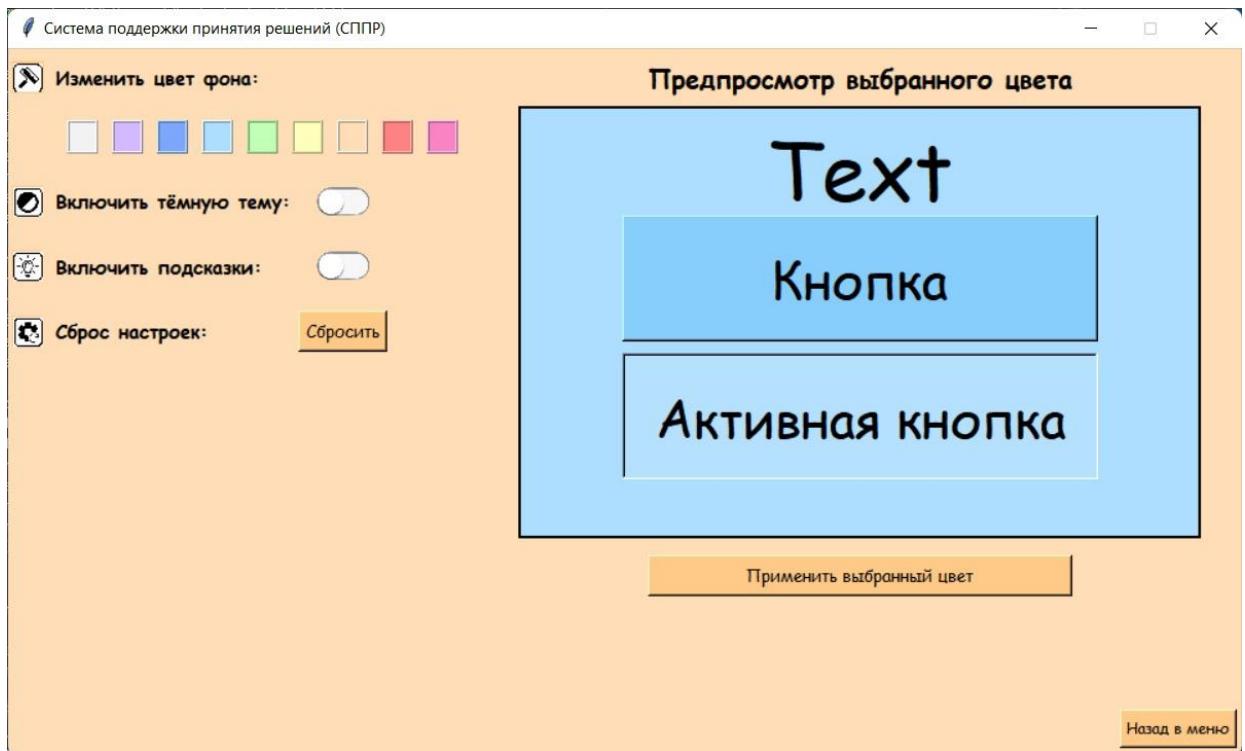


Рис.7. Настройка цветовой гаммы. Светлая тема.

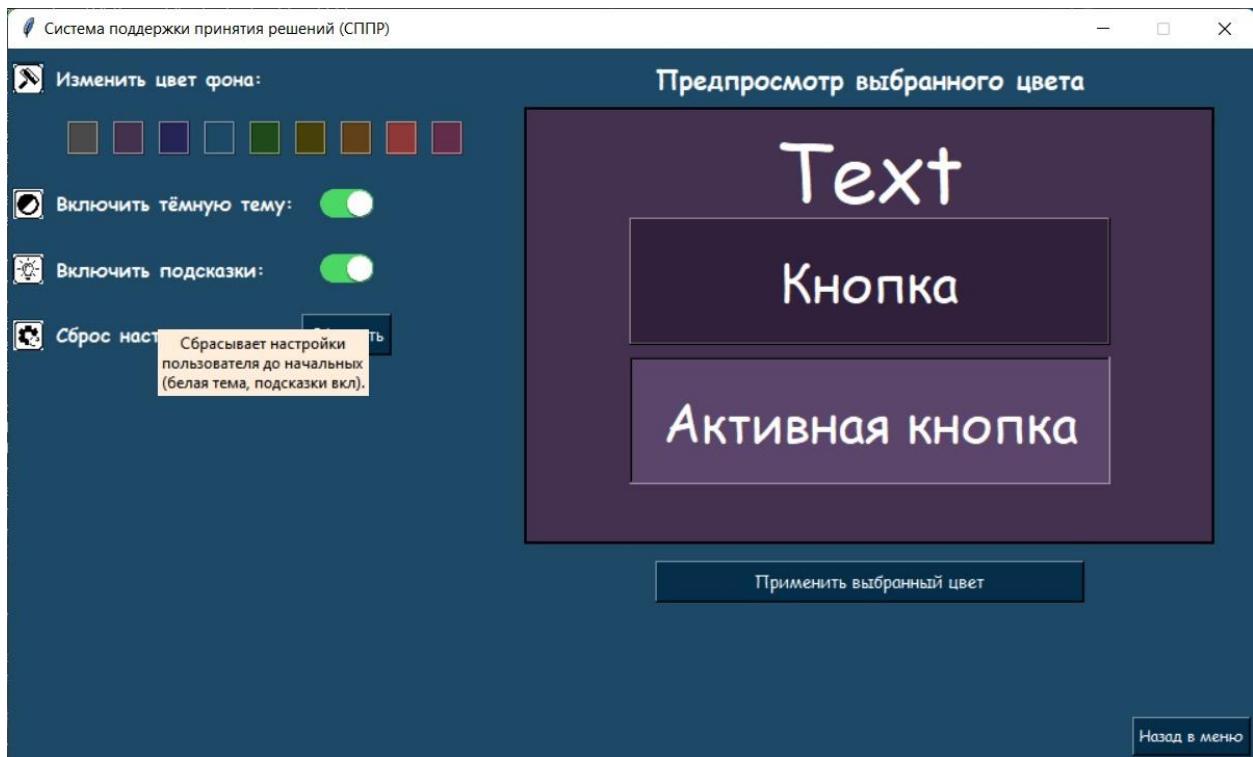


Рис.8. Настройка цветовой гаммы. Темная тема.

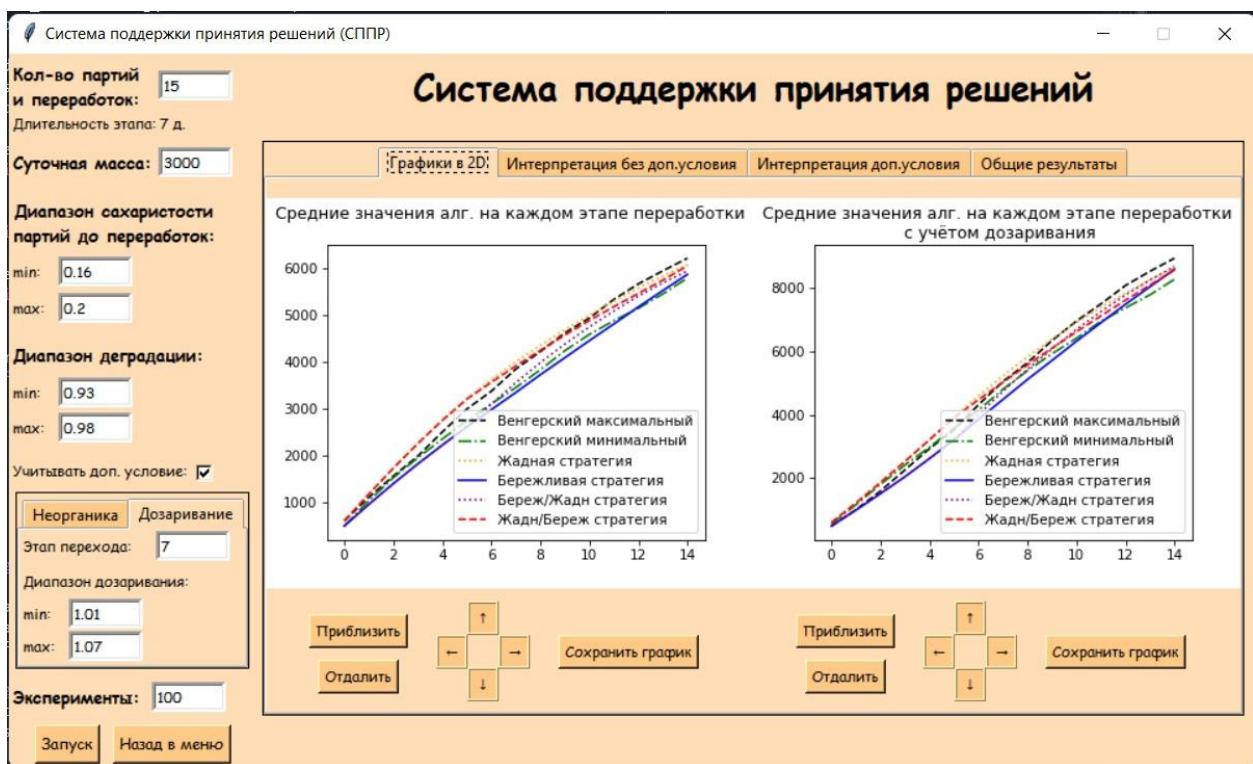


Рис.9. Динамика различных стратегий на основе входных данных.

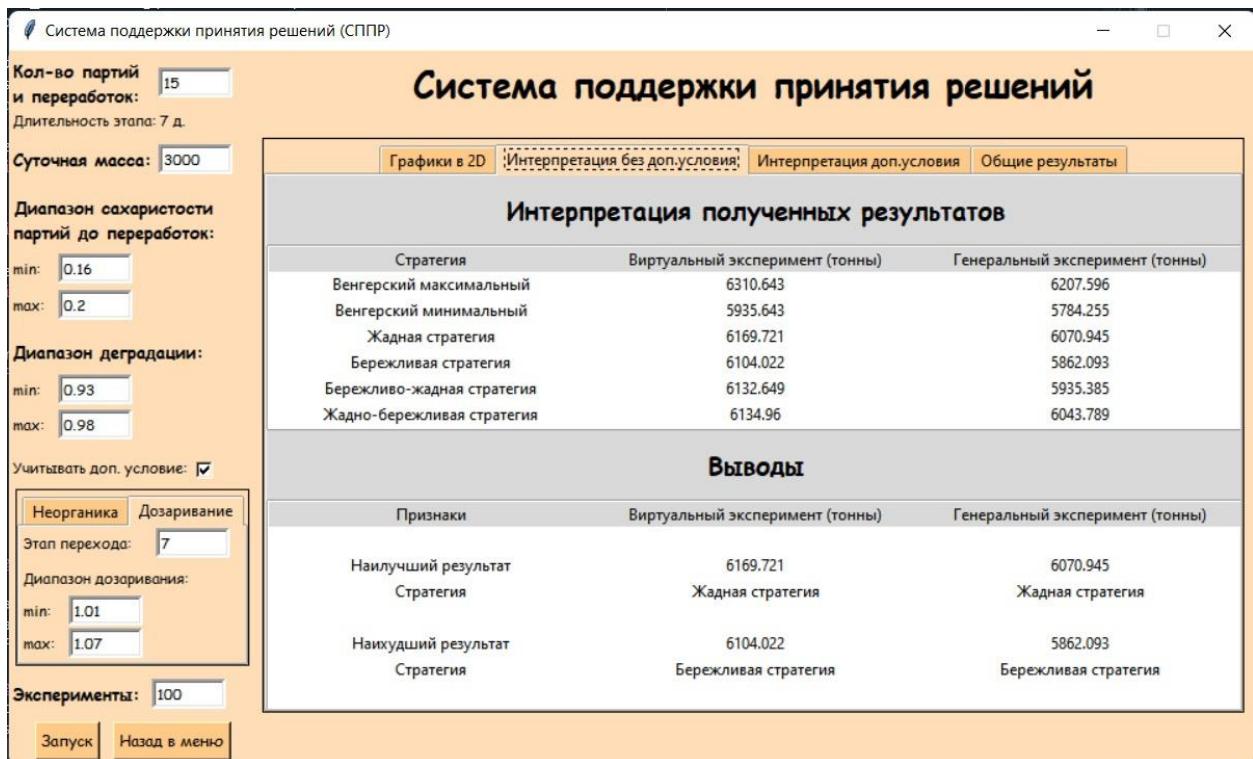


Рис.10. Численная интерпретация выхода сахара для различных стратегий.

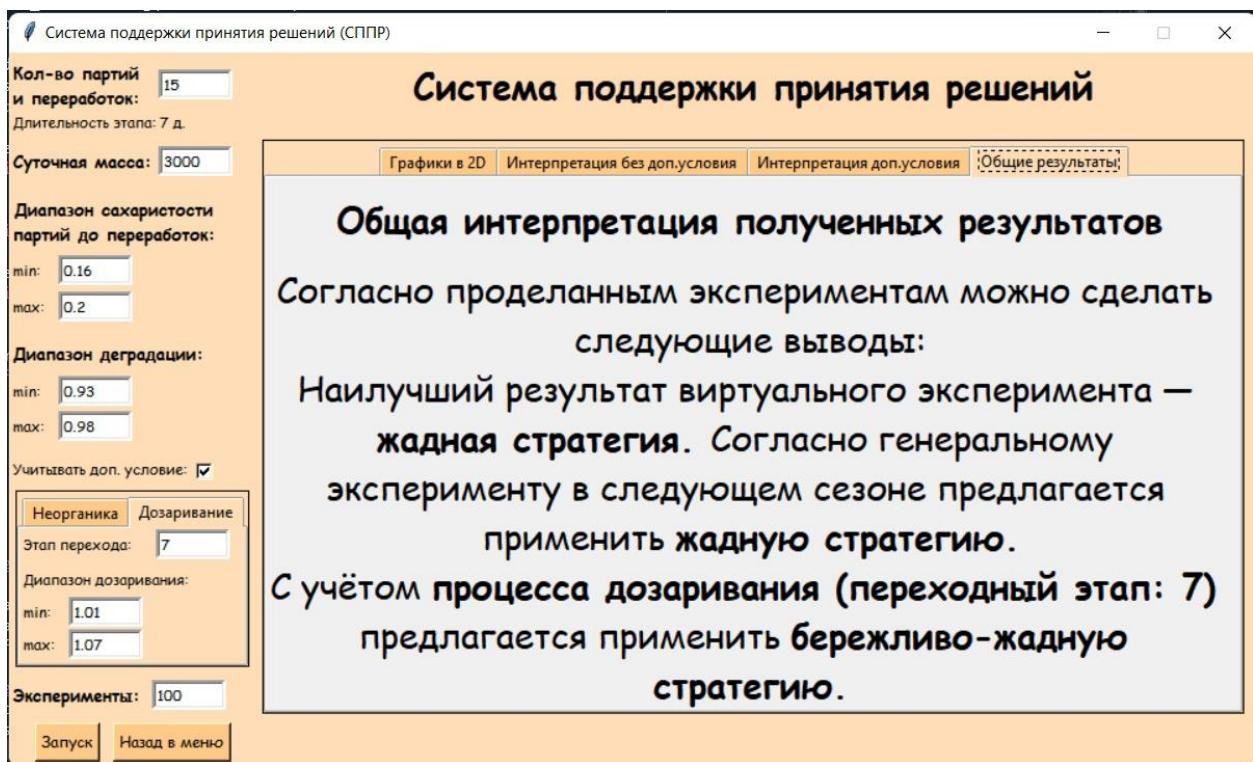


Рис.11. Разъяснение менеджеру предприятия.

Разработчики: Лебедева К., Мортина А., Савотина В., Среднева А., Шишкина В. (гр. 3821Б1ФИЗ).

## **Заключение**

Представленная в данном учебном пособии лабораторная работа является развитием лабораторной работы «Решение прикладных задач дискретной оптимизации», запланированной на шестой семестр направления ФИИТ по предмету «Вычислительные методы». Учебно-методическое пособие, описывающее упомянутую лабораторную работу [10], находится на сайте библиотеки ННГУ. Его изучение для прочтения и понимания настоящего учебного пособия не является обязательным и остается на усмотрение студента. Отметим, что учебно-исследовательский проект, по представленной теме в [7, 10], получил свое одобрение в обзоре [38].

Реализация лабораторной работы «Разработка СППР по переработке сахарной свеклы» позволяет существенно углубить сформированность двух общепрофессиональных компетенций: ОПК-1 и ОПК-2. Такой подход повышает мотивацию студентов для изучения математических основ алгоритмических и программных решений, превращает изучаемые математические методы в такой же естественный инструмент инженерного проектирования, как и компьютерные средства. Кроме того, программирование математической задачи осуществляется вкупе с дизайнерским процессом при разработке дружелюбного интерфейса СППР. Особую ценность для достижения целей обучения представляет то обстоятельство, что здесь студенты имеют редкую возможность оценить полученные результаты с точки зрения практического внедрения, могут наблюдать связи с актуальными производственными проблемами, при этом у них обеспечивается формирование компетенции ОПК-2.

## **Список литературы**

1. Леонтьев В.К. Дискретная оптимизация [Текст] / В.К. Леонтьев // ЖВМ и МФ. – 2007. – № 47, 2. – С. 338-352. EDN IAAJIT.
2. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. 2-е издание (электронное) / А. Пегат. Под редакцией Ю. В. Тюменцева // Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний. – 2013. – 798 с. ISBN 978-5-9963-1495-9. [Электрон. ресурс] [https://rusneb.ru/catalog/000199\\_000009\\_007552818](https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_007552818) (дата обращения 31.05.24).
3. Леденёва Т.М. О нечёткой задаче о назначениях [Текст] / Т.М. Леднёва, С.Н. Медведев // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. –2012. – №2. – С. 154-157. EDN OXRUTV.
4. Осипов Г.С. Исследование нечеткой задачи о назначениях [Текст] / Г.С. Осипов // Общие вопросы мировой науки: Collection of scientific papers on materials IV International Scientific Conference, Amsterdam, 31 марта 2018 года / International United Academy of Sciences. Том Part 1. Amsterdam: SIC "LJournal. – 2018. – С. 30-35. DOI 10.18411/gq-31-03-2018-06.
5. Попов В.Б. Глава 7. Метаэвристические алгоритмы для задач экономической оптимизации и прогнозирования [Текст] / В.Б. Попов // Информационная экономика: развитие, управление, модели: Коллективная монография / Под научной редакцией Н.В. Апатовой. Симферополь. – 2017. – С. 401-416. EDN DGNRAQ.
6. Тужилкин В.И. О роли сахара в современном мире. Часть I [Текст] / В.И. Тужилкин, С.В. Штерман, А.Б. Бодин // Пищевая промышленность. – 2012. – №7. – С. 54-57. EDN PDHTEL.
7. Balandin D.V. Educational and Research Project “Optimization of the Sugar Beet Processing Schedule” [Текст] / D.V. Balandin et al. // In book Voevodin V., Sobolev S., Yakobovsky M., Shagaliev R. (eds). Supercomputing. Lecture Notes

in Computer Science, book series (LNCS, volume 13708). – 2022. – P. 409-422. DOI 10.1007/978-3-031-22941-1\_30.

8. Balandin D.V. Project-based learning in training IT-personnel for the digital economy [Текст] / D.V. Balandin, O.A. Kuzenkov, A.I. Egamov // E3S Web of Conferences. – 2023. – 380. – P. 01035. DOI 10.1051/e3sconf/202338001035.

9. Баландин Д.В. Учебно-исследовательский проект в системе формирования компетенций цифровой культуры [Текст] / Д.В. Баландин и др. // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2023. – Т. 19, № 2. – С. 447-459. ISSN 2411-1473

10. Баландин Д.В. Лабораторная работа «Решение прикладных задач дискретной оптимизации» / Д.В. Баландин и др. // Н.Новгород: Издательство ННГУ. – 2023. – 23с. [Электрон. ресурс]  
<https://e-lib.unn.ru/MegaPro/UserEntry?Action=FindDoc&ids=850257&idb=0>  
(дата обращения 31.05.24).

11. Кухар В.Н. Методы оценки технологических качеств сахарной свёклы с использованием показателей содержания калия, натрия и  $\alpha$ -аминного азота, определённых в свёкле и продуктах её переработки [Текст] / В.Н. Кухар и др. // Сахар. – 2019. – № 1. – С. 18-36. EDN YUCGHB.

12. Сельскохозяйственный словарь-справочник. / Главный редактор: А.И. Гальстер. // Москва – Ленинград: Государственное издательство колхозной и совхозной литературы "Сельхозгиз". – 1937. – 1524 столб. [Электрон. ресурс] URL: [https://rusneb.ru/catalog/000199\\_000009\\_005175524](https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_005175524)  
(дата обращения 31.05.2024).

13. Egamov A.I. Stability of the Optimal Schedule for Perishable Product Processing [Текст] / A.I. Egamov // E3S Web of Conferences: International Scientific and Practical Conference “Ensuring the Technological Sovereignty of the Agro-Industrial Complex: Approaches, Problems, Solutions” (ETSAIC2023). – Yekaterinburg City, Russian Federation, 16–17 февраля 2023 года. – Vol. 395. P. 03007. DOI 10.1051/e3sconf/202339503007.

14. Попов А.Л. Системы поддержки принятия решения. Учебно-методическое пособие. / А.Л. Попов. УрГУ. – 2008. – 80с. [Электрон. ресурс] URL: [https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/1676/5/1335843\\_schoolbook.pdf](https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/1676/5/1335843_schoolbook.pdf). (дата обращения 31.05.24).
15. Бузылев А.В. Агроэкологическая оптимизация технологии выращивания ярового ячменя в условиях Пензенской области с применением СППР [Текст] / А.В. Бузылев, М.В. Тихонова, И.И. Васенев // АгроЭкоИнфо. – 2021. – № 4(46). – С. 1-11. DOI 10.51419/20214422.
16. Дмитрюк Т.Г. Алгоритмическое обеспечение СППР оптимального планирования производственно-логистической деятельности предприятия [Текст] / Т.Г. Дмитрюк // Информатика и кибернетика. – 2022. – 3(29). – С. 28-37. EDN RCUSTH.
17. Банди Б. Основы линейного программирования [Текст] / Б. Банди. М.: Радио и связь. – 1989. – 176 с. ISBN 5-256-00186-8.
18. Burkard R.E. Assignment problems [Текст] / R.E. Burkard, M. Dell'Amico, S. Martello // Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, Philadelphia. – 2009. – 382p. ISBN 0898717752
19. Щукина Н.А. Некоторые подходы к решению задачи о назначениях [Текст] / Н.А. Щукина // Проблемы экономики и менеджмента. – 2016. – № 5(57). – С. 169-174. EDN WAPNNV
20. Bertsekas D.P. A New Algorithm for the Assignment Problem [Текст] / D.P. Bertsekas // Mathematical Programming. – 1981. – Vol. 21. – P. 152-171. DOI 10.1007/BF01584237 10.1007/BF01584237.
21. Мельников Б.Ф. О классической версии метода ветвей и границ [Текст] / Б.Ф. Мельников, Е.А. Мельникова // Компьютерные инструменты в образовании. – 2021. – № 1. – С. 21-44. DOI 10.32603/2071-2340-2021-1-21-45.
22. Баландин Д.В. Программный модуль для построения оптимального графика переработки сырья [Текст] / Д.В. Баландин, О.А. Кузенков, В.К.

Вильданов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, № 2. – С. 442-452. DOI 10.25559/SITITO.17.202102.442-452.

23. Burkard R.E. Perspectives of Monge properties in optimization [Текст] / R.E. Burkard, B. Klinz, R. Rudolf // Discrete Applied Mathematics. – 1996. – 70(2). – Р. 95-161. DOI: 10.1016/0166-218X(95)00103-X.

24. Королева А.А. От Монжа до современной оптимизации транспортных потоков [Текст] / А.А. Королева // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. – 2021. – 1. – С. 26-36. URL: <https://journals.bsu.by/index.php/economy/article/view/3762> (дата обращения 31.05.24.).

25. Рафгарден Т. Совершенный алгоритм. Жадный алгоритм и динамическое программирование [Текст] / Т. Рафгарден // СПб: Питер. – 2020. – 256 с. ISBN: 978-5-4461-1445-0.

26. Радзивиловский Л.В. Обобщение перестановочного неравенства и монгольское неравенство [Текст] / Л.В. Радзивиловский // Математическое просвещение. – 2006. – Вып. 10. – С. 210-224. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mp/v10/s3/p210> (дата обращения 31.05.24.).

27. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Издание шестое, стереотипное. [Текст] / Е.С. Вентцель // М.: Высш. шк. – 1999. – 576 с. ISBN 5-06-003650-2.

28. Balandin D.V. Mathematical Modelling and Optimization of Scheduling for Processing Beet in Sugar Production [Текст] / D.V. Balandin et al. // In book Balandin D., Barkalov K., Meyerov I. (eds) Communications in Computer and Information Science. – 2022. – V. 1750. – P. 227-238. DOI 10.1007/978-3-031-24145-1\_19.

29. Баландин Д.В. Стратегия переработки партий сахарной свеклы при близких параметрах ее увядания [Текст] / Д.В. Баландин и др. // Сборник трудов Второго всероссийского научно-практического семинара «Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях

цифровизации экономики». Нижний Новгород, 22 апреля 2022. – С. 10-18. EDN NLUMKE.

30. Баландин Д.В. Математическая модель и комбинированный квазиоптимальный алгоритм процесса переработки сахарной свеклы [Текст] / Д.В. Баландин и др. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2023. – № 2. – С. 62-76. DOI 10.17308/sait/1995-5499/2023/2/62-76.

31. Эгамов А.И. Оценка усредненных потерь квазиоптимальных стратегий без учета процесса дозаривания [Текст] / А.И. Эгамов // Сборник материалов XXII Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и образования в условиях современных вызовов». Москва, 11 июля 2023 года. Москва: Печатный цех. – 2023. – С. 40-47. EDN YBKUR.

32. Эгамов А.И. Математические аспекты интеллектуально-информационной системы переработки сырья в сахарном производстве [Текст] / А.И. Эгамов, П.Н. Бураго // Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях. 2023: Труды VIII Всероссийской конференции, Нижний Новгород, 21-25 августа 2023 года. Нижний Новгород: Институт прикладной физики Российской академии наук. – 2023. – С. 181-184. EDN IWXRZI.

33. Egamov A.I. Mathematical Model of Processing Batches of Raw Materials Taking into Account Ripening Process [Текст] / A.I. Egamov // In book Balandin D., Barkalov K., Meyerov I. (eds). Communications in Computer and Information Science. – MMST 2023. – CCIS 1914. – P. 190–205, 2024. DOI 10.1007/978-3-031-52470-7\_16.

34. Balandin D.V. Comparison of Heuristic Strategies for Sugar Beet Processing Schedules [Электрон. ресурс] / D.V. Balandin, A.I. Egamov, O.A. Kuzenkov // Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM, 2023). Voronezh, Russian Federation. – 2023. – P. 1-6. DOI 10.1109/AMCSM59829.2023.10525768.

URL:<https://ieeexplore.ieee.org/document/10525768> (дата обращения: 03.05.2024)

35. Руководство пользователя библиотекой `scipy` [Электрон. ресурс]. URL:<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.expm.html> (дата обращения: 03.04.2024).

36. Johansson R. Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy [Текст] / R. Johansson // SciPy and Matplotlib. 2nd Edition. Apress. – 2018. – 723 p. ISBN 978-1484242452.

37. Харрисон М. Как устроен Python. Гид для разработчиков, программистов и интересующихся [Текст] / М. Харрисон // СПб.: Питер. – 2019. – 272с. ISBN 978-5-4461-0906-7.

URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/359217/reading> (дата обращения: 31.05.2024).

38. Soesanto R.H. Navigating the Digital Wave of Learning: Indonesian Students' Perceptions on Emotional during Learning Process [Текст] / R.H. Soesanto, Y.P. Dwikristanto, B.W. Napitupulu // Jurnal Kependidikan: Jurnal Hasil Penelitian dan Kajian Kepustakaan di Bidang Pendidikan, Pengajaran dan Pembelajaran. – 2023. – 9. № 3. – P. 750-759. DOI 10.33394/jk.v9i3.8341.

Дмитрий Владимирович **Баландин**  
Олег Анатольевич **Кузенков**  
Дмитрий Сергеевич **Малышев** и др.

**Эвристические методы для решения  
нечеткой задачи о назначениях**

*Учебное пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского».  
603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.