

Chapter 2

SPATIAL DESCRIPTIONS and TRANSFORMATIONS CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

2.1. Descriptions: Positions, Orientations, and Frames

Các định nghĩa về: Vị trí, Hướng, và Hệ tọa độ

2.2. Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

2.3. Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

2.4. Exercises - Bài tập

2.5. Homework - Bài tập về nhà

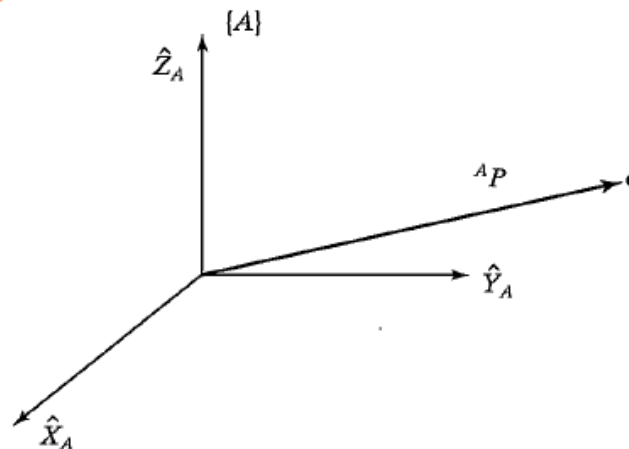
2.1 Descriptions: Positions, Orientations, and Frames

Các định nghĩa về: Vị trí, Hướng, và Hệ tọa độ

Description of a Position – Định nghĩa về Vị trí

- ✦ A 3×1 **position vector** represents a point ${}^A P$ in space as follows:
- ✦ Một vectơ vị trí 3×1 biểu diễn một điểm ${}^A P$ trong không gian như sau:

$${}^A P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

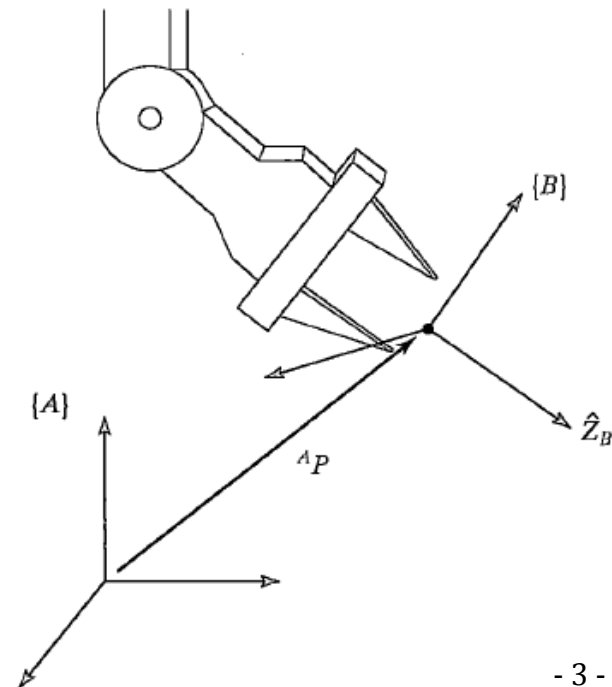


2.1 Descriptions: Positions, Orientations, and Frames

Các định nghĩa về: Vị trí, Hướng, và Hệ tọa độ

Description of an Orientation – Định nghĩa về Hướng

- ✦ To describe the orientation of a body, a coordinate system will be attached to the body and then give a description of this coordinate system relative to the reference system.
- ✦ Để định nghĩa hướng của một thân robot, một hệ tọa độ sẽ được gắn vào thân robot và sau đó tham chiếu nó đến một hệ tọa độ tham chiếu.

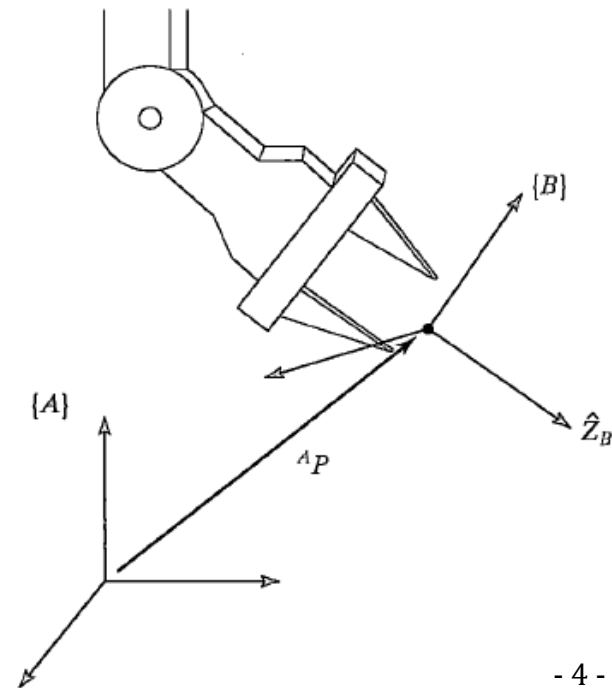


2.1 Descriptions: Positions, Orientations, and Frames

Các định nghĩa về: Vị trí, Hướng, và Hệ tọa độ

Description of an Orientation – Định nghĩa về Hướng

- ✦ One way to describe the body-attached coordinate system, $\{B\}$, is to write the unit vector of its principal axes in terms of the coordinate system $\{A\}$.
- ✦ Một cách để diễn tả hệ tọa độ $\{B\}$ được gắn trên thân robot là viết vectơ đơn vị của nó dựa theo hệ tọa độ tham chiếu $\{A\}$.

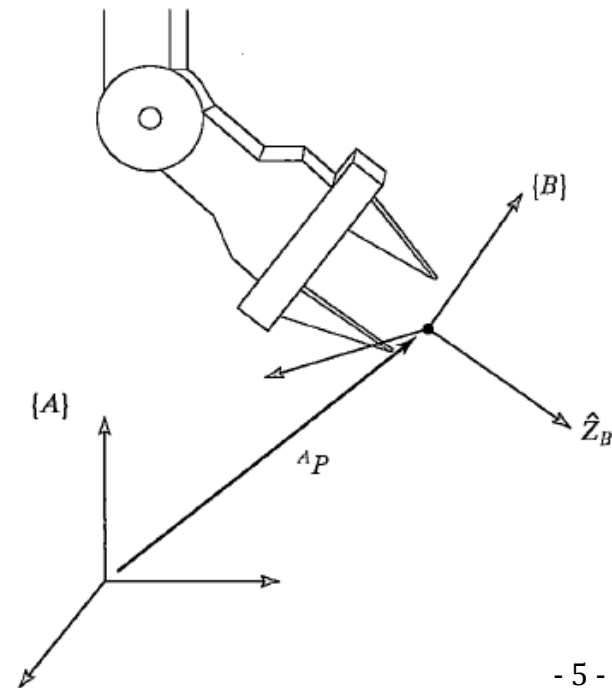


2.1 Descriptions: Positions, Orientations, and Frames

Các định nghĩa về: Vị trí, Hướng, và Hệ tọa độ

Description of an Orientation – Định nghĩa về Hướng

- ✦ Denote the unit vector of $\{B\}$ as \hat{X}_B , \hat{Y}_B , and \hat{Z}_B .
- ✦ Gọi vectơ đơn vị của $\{B\}$ là \hat{X}_B , \hat{Y}_B , and \hat{Z}_B .
- ✦ When written in terms of $\{A\}$, they are called ${}^A\hat{X}_B$, ${}^A\hat{Y}_B$, and ${}^A\hat{Z}_B$.
- ✦ Khi được viết dựa theo hệ tham chiếu $\{A\}$ sẽ là ${}^A\hat{X}_B$, ${}^A\hat{Y}_B$, và ${}^A\hat{Z}_B$.



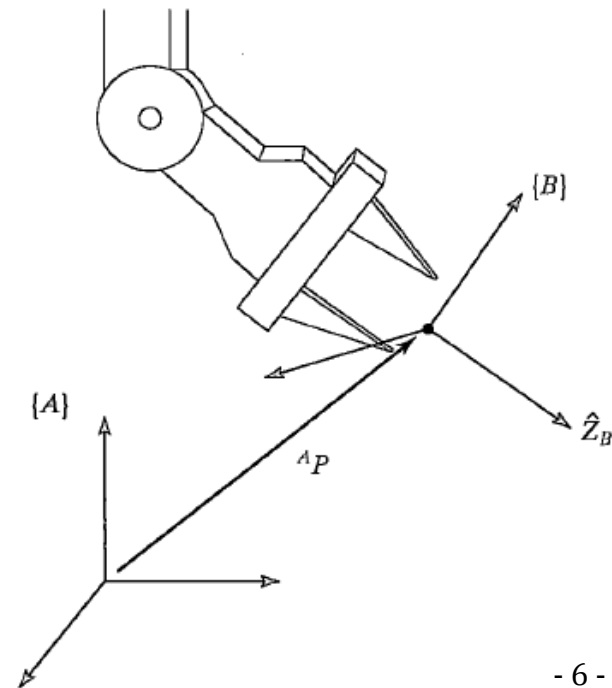
2.1 Descriptions: Positions, Orientations, and Frames

Các định nghĩa về: Vị trí, Hướng, và Hệ tọa độ

Description of an Orientation – Định nghĩa về Hướng

- ✦ The *rotation matrix* describes $\{B\}$ relative to $\{A\}$ is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) biểu diễn $\{B\}$ liên quan $\{A\}$ là

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$



2.1 Descriptions: Positions, Orientations, and Frames

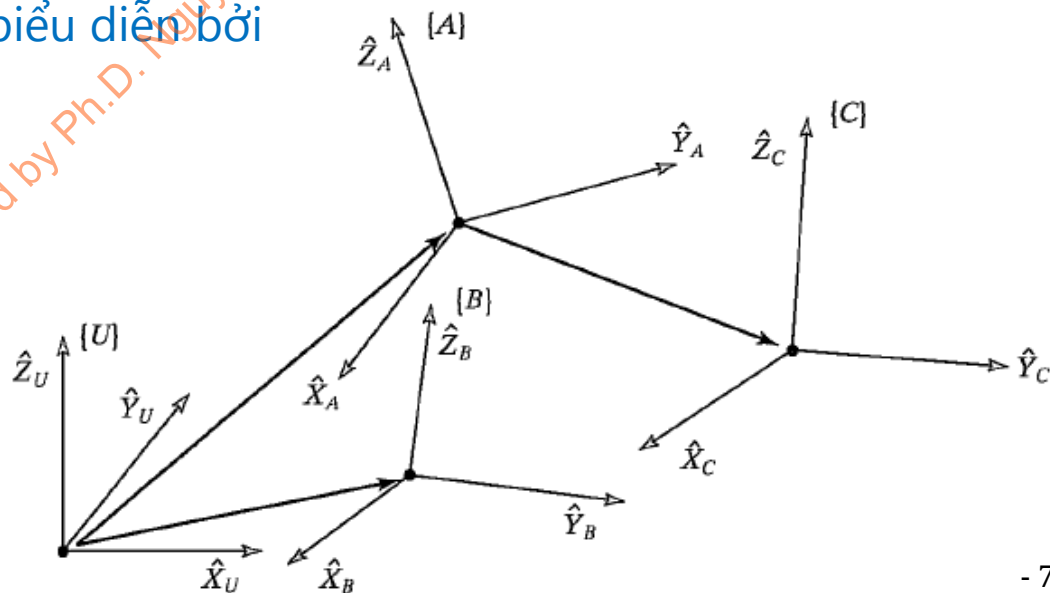
Các định nghĩa về: Vị trí, Hướng, và Hệ tọa độ

Description of a Frame – Định nghĩa về Hệ tọa độ

- ✦ A **frame** $\{B\}$ is described by
- ✦ Một hệ tọa độ (**frame**) $\{B\}$ được biểu diễn bởi

$$\{B\} = \left\{ {}^A_B R, {}^A P_{BORG} \right\}$$

- ${}^A P_{BORG}$ is the vector that locates the origin of $\{B\}$.
- ${}^A P_{BORG}$ là véc tơ xác định tọa độ gốc của $\{B\}$



2.2 Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

The mathematics of mapping to change descriptions from frame to frame:

- Mappings involving translated frames – Các ánh xạ cho những hệ tịnh tiến
- Mappings involving rotated frames – Các ánh xạ cho những hệ xoay
- Mappings involving general frames – Các ánh xạ cho những hệ tổng quát

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thoi

2.2 Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

Mappings involving translated frames – Các ánh xạ cho những hệ tịnh tiến

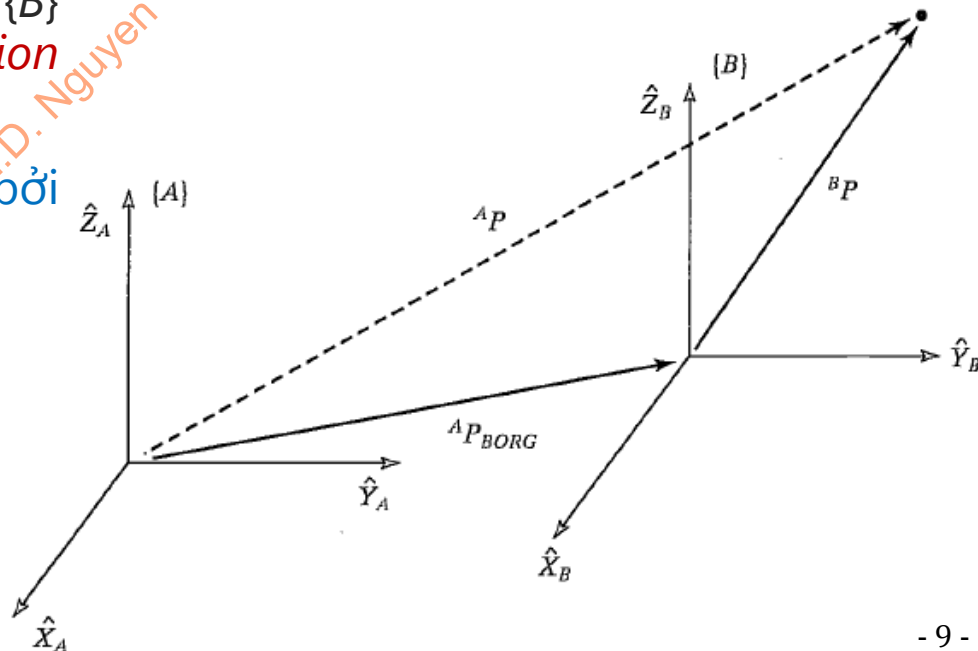
- ✦ $\{A\}$ has the same orientation as $\{B\}$, $\{B\}$ differs from $\{A\}$ only by a **translation**

${}^A P_{BORG}$.

- ✦ $\{A\}$ cùng hướng với $\{B\}$, chỉ khác bởi **phép tịnh tiến** ${}^A P_{BORG}$.

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{BORG}$$

- ${}^A P$ denotes the description of point P relative to $\{A\}$.
- ${}^B P$ denotes the point P in space of $\{B\}$.



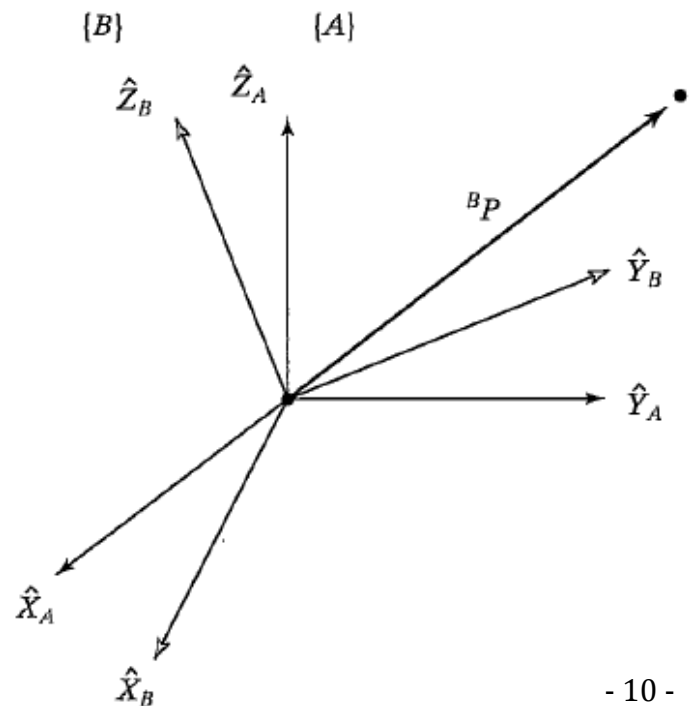
2.2 Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

Mappings involving rotated frames – Các ánh xạ cho những hệ xoay

- ✦ Origins of two frame {A} and {B} are coincident.
- ✦ Tọa độ gốc của {A} và {B} trùng nhau.

$${}^A P = {}^A R \cdot {}^B P$$



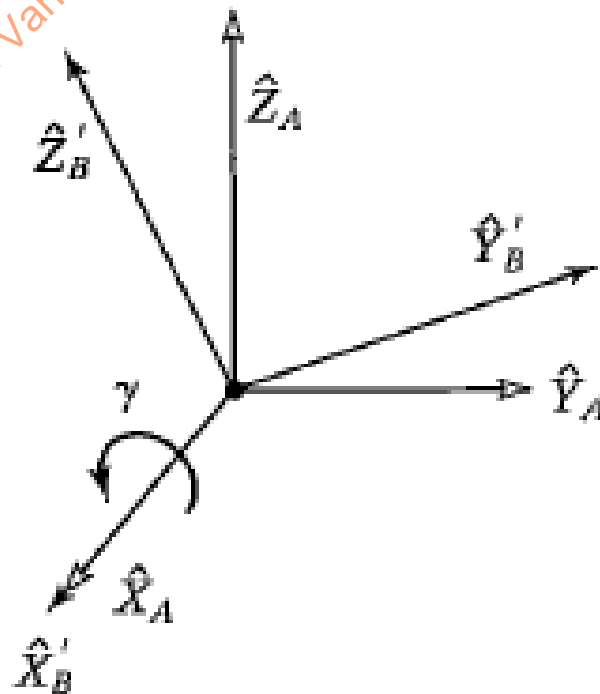
2.2 Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

Mappings involving rotated frames – Các ánh xạ cho những hệ xoay

- ✦ Rotation about x-axis by an angle θ .
- ✦ Xoay quanh trục x một góc θ .

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



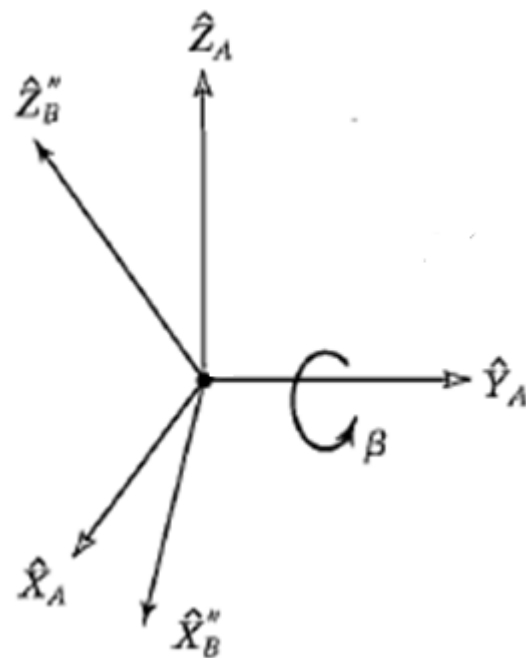
2.2 Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

Mappings involving rotated frames – Các ánh xạ cho những hệ xoay

- ✦ Rotation about y-axis by an angle θ .
- ✦ Xoay quanh trục y một góc θ .

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



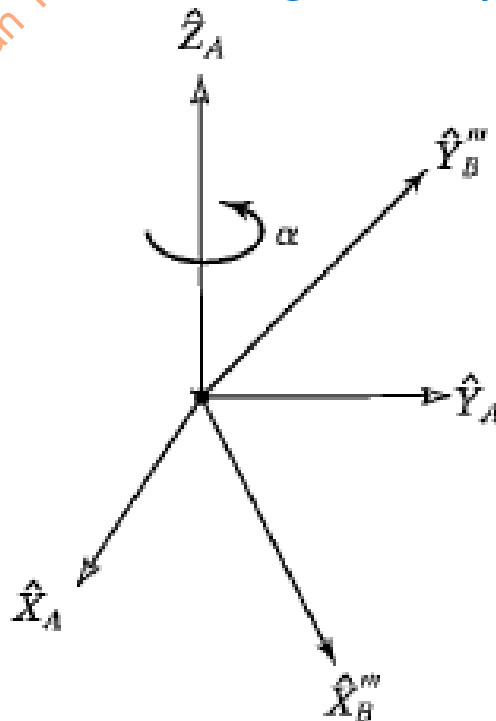
2.2 Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

Mappings involving rotated frames – Các ánh xạ cho những hệ xoay

- ✦ Rotation about z-axis by an angle θ .
- ✦ Xoay quanh trục z một góc θ .

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



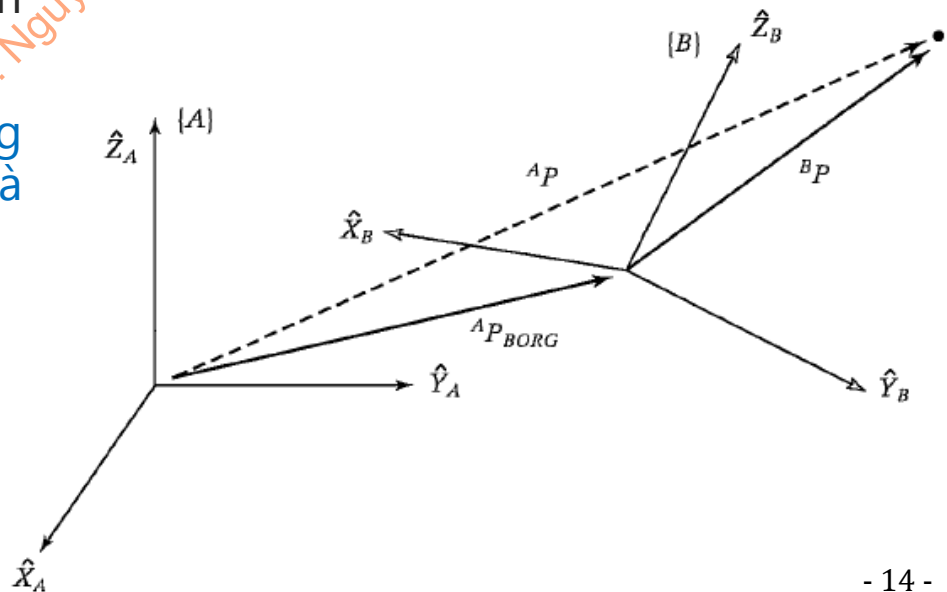
2.2 Mappings: Changing Descriptions from Frame to Frame

Phép ánh xạ: chuyển đổi từ Hệ tọa độ đến Hệ tọa độ tham chiếu

Mappings involving general frames – Các ánh xạ cho những hệ tổng quát

- ✦ Origins of two frame $\{A\}$ and $\{B\}$ are not coincident. $\{A\}$ differs $\{B\}$ by both rotation and translation.
- ✦ Tọa độ gốc của $\{A\}$ và $\{B\}$ không trùng nhau. $\{A\}$ khác $\{B\}$ cả về phép xoay và phép tịnh tiến.

$${}^A P = {}^A_B R \cdot P + {}^A P_{BORG}$$

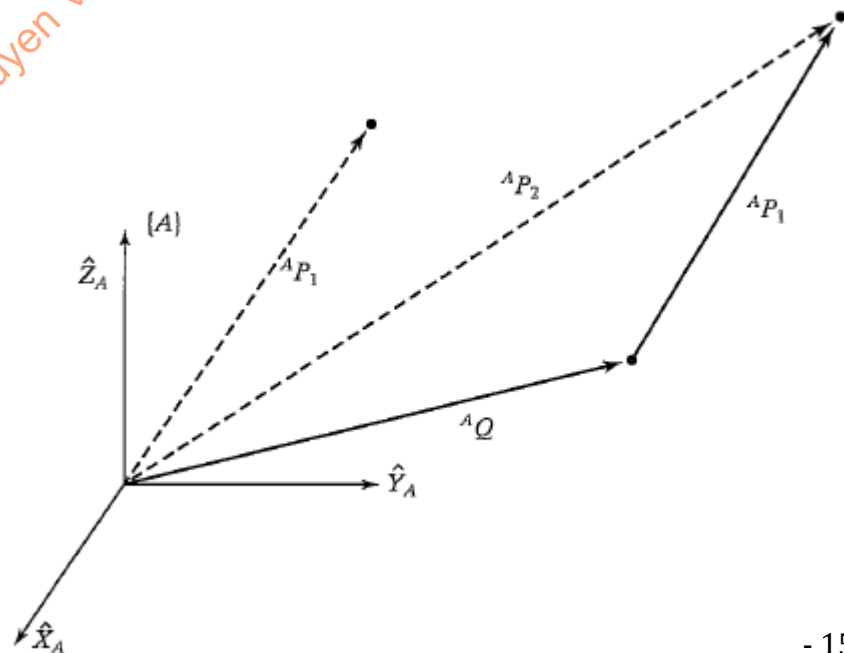


2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Translational operators – Phép tịnh tiến

- ✦ A translation moves a point in space a finite distance along a given vector direction.
- ✦ Phép tịnh tiến dịch chuyển một điểm trong không gian một khoảng cách dọc theo một hướng vectơ cho trước.



2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

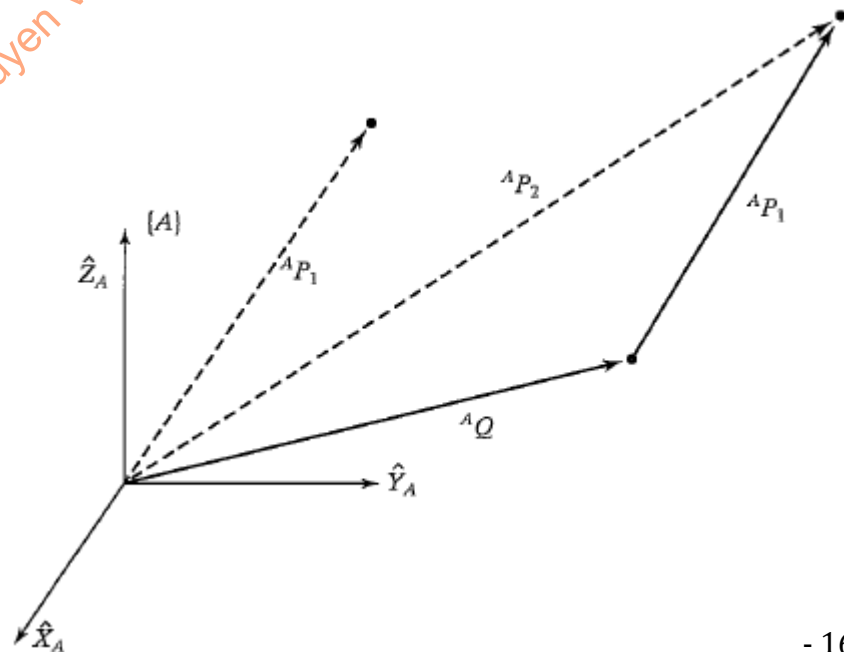
Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Translational operators – Phép tịnh tiến

- ✦ The result of the operation is a new vector ${}^A P_2$, calculated as.
- ✦ Kết quả của phép biến đổi là một vectơ mới ${}^A P_2$.

$${}^A P_2 = {}^A P_1 + {}^A Q$$

- The vector ${}^A Q$ gives the information needed to perform the translation.



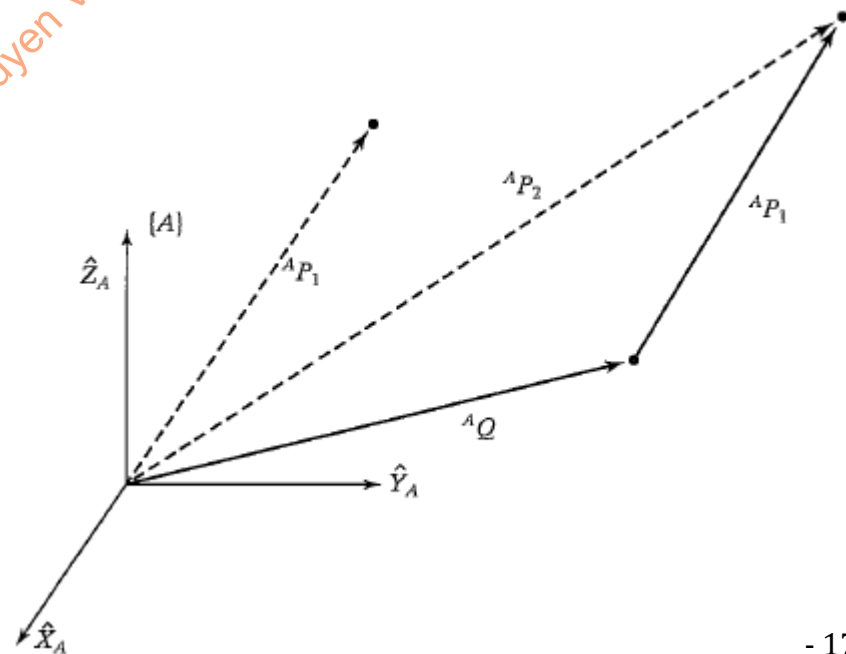
2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Translational operators – Phép tịnh tiến

- ✦ The translation operation is also written as a matrix operator:
- ✦ Phép tịnh tiến cũng có thể được viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{aligned} {}^A P_2 &= D_Q(q) \times {}^A P_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times {}^A P_1 \end{aligned}$$



2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

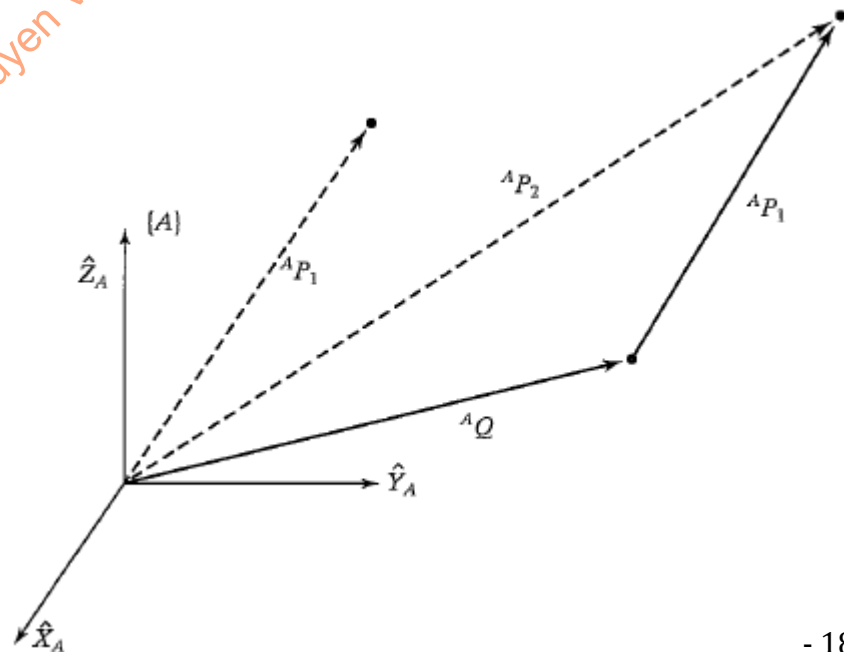
Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Translational operators – Phép tịnh tiến

- ✦ q_x , q_y , and q_z are the components of the **translation vector**.
- ✦ q_x , q_y , và q_z là các thành phần của vectơ **tịnh tiến** (**translation vector**).

$$Q = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}$$

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thai



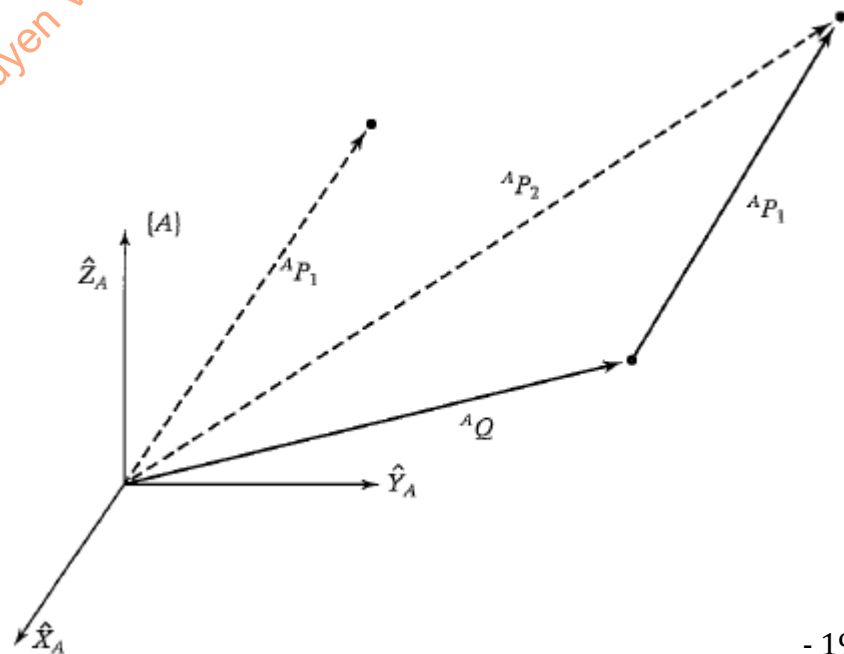
2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Translational operators – Phép tịnh tiến

- ✦ q is the signed magnitude of the translation along the vector direction ${}^A Q$.
- ✦ q là độ lớn của phép chuyển đổi dọc theo hướng vectơ ${}^A Q$.

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$



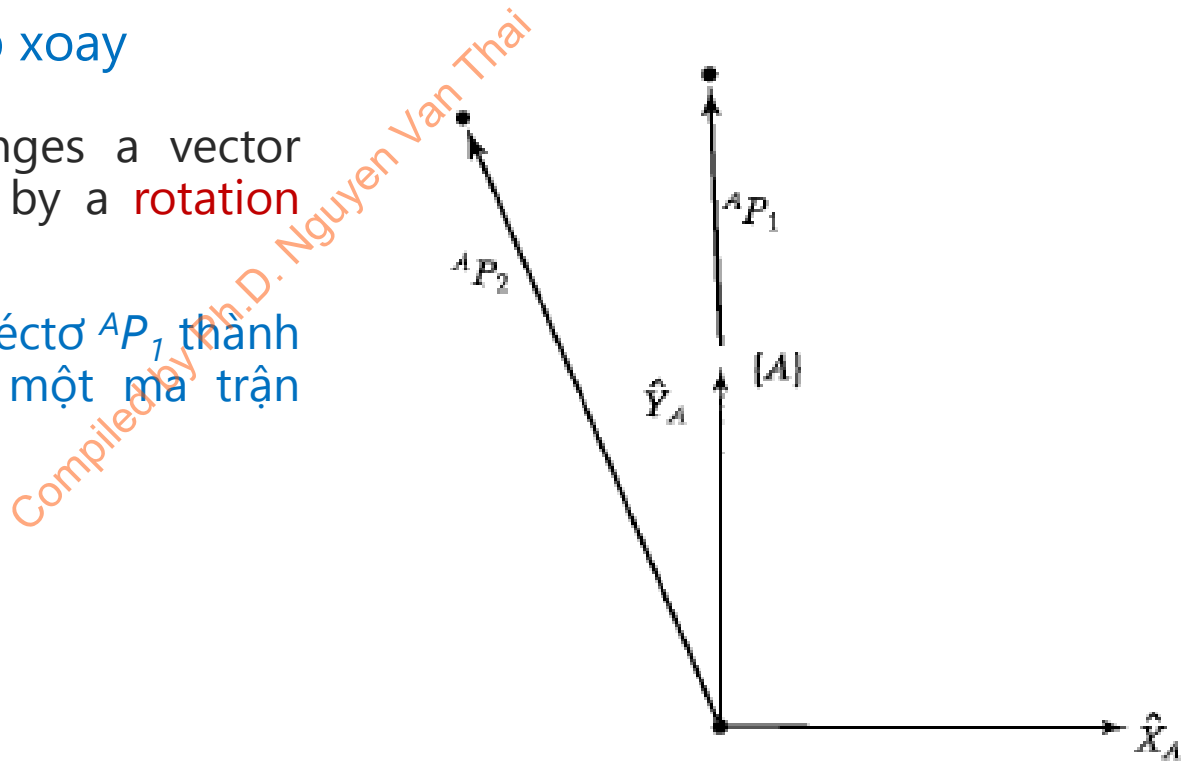
2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Rotational operators – Phép xoay

- ✦ Rotational operator changes a vector ${}^A P_1$ to a new vector ${}^A P_2$ by a **rotation matrix** R .
- ✦ Phép xoay thay đổi một vectơ ${}^A P_1$ thành một vectơ mới ${}^A P_2$ bởi một ma trận xoay (**rotation matrix**) R .

$${}^A P_2 = R \times {}^A P_1$$



2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Transformation operators – Phép chuyển đổi

- ✦ Transformation operator consists of a rotation and a translation. The operator T rotates and translates a vector ${}^A P_1$ to compute a new vector ${}^A P_2$.
- ✦ Phép chuyển đổi bao gồm một xoay và một tịnh tiến. Toán tử T xoay và tịnh tiến một vectơ ${}^A P_1$ thành một vectơ mới ${}^A P_2$.

$${}^A P_2 = T \times {}^A P_1$$

$$T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & q_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & q_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

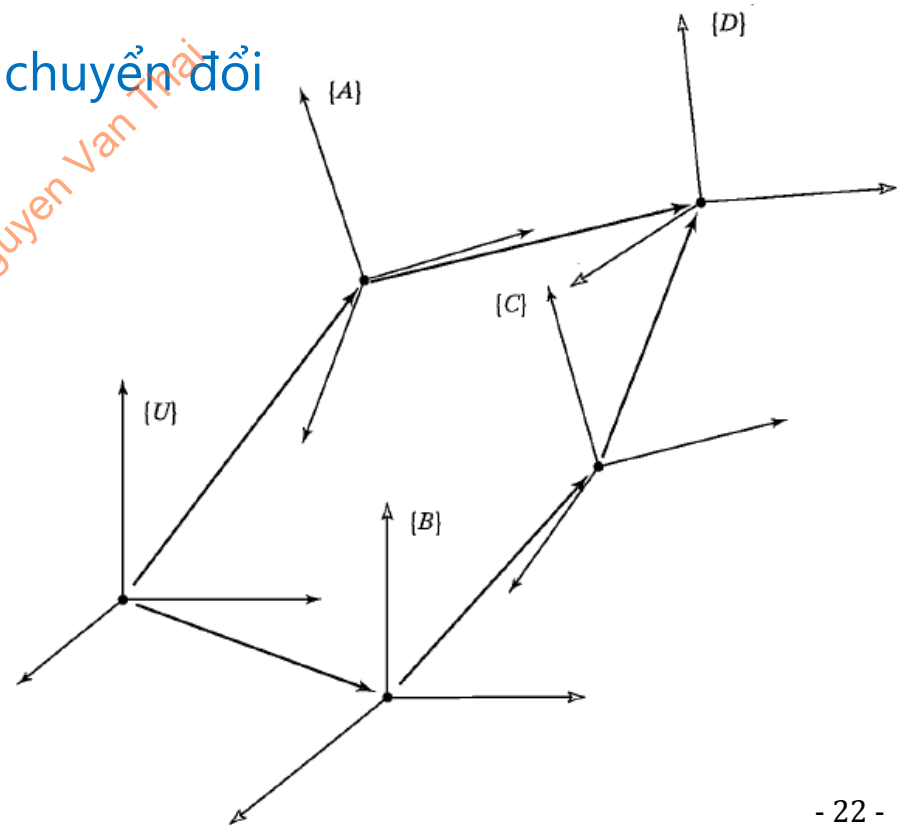
Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Transformation equations – Phương trình chuyển đổi

- ✦ Frame $\{D\}$ can be expressed as products of transformation in two different ways.
- ✦ Hệ $\{D\}$ là kết quả của phép nhân hai chuyển đổi theo hai hướng khác nhau.

$${}^U_D T = {}^U_A T \times {}^A_D T$$

$${}^U_D T = {}^U_B T \times {}^B_C T \times {}^C_D T$$



2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

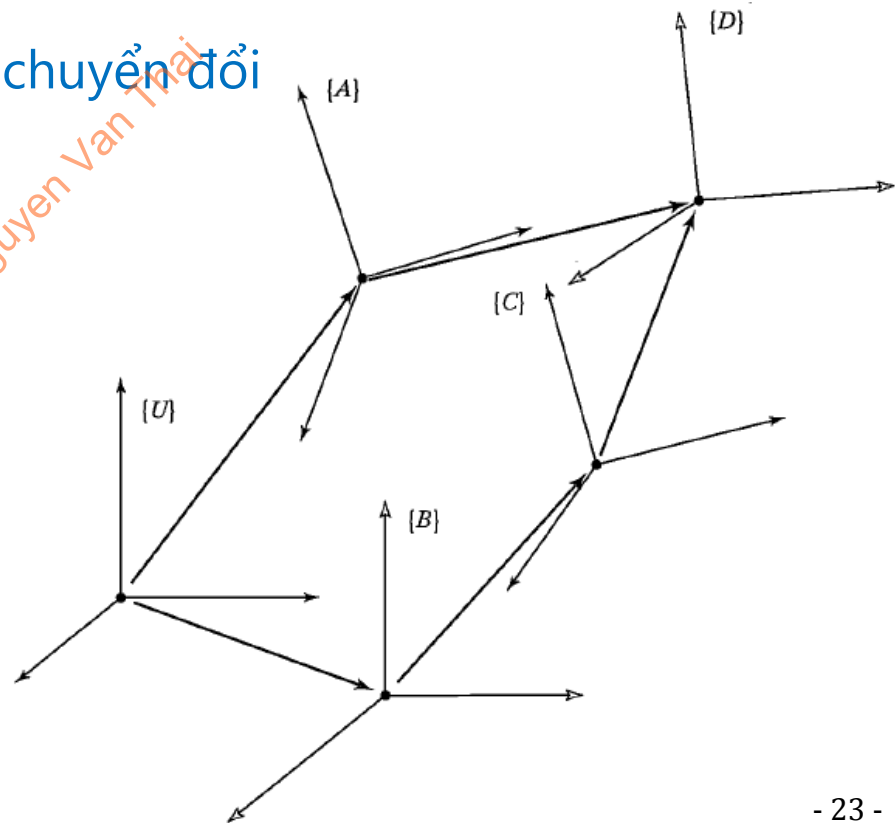
Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Transformation equations – Phương trình chuyển đổi

✦ The transformation equation is.

✦ Phương trình chuyển đổi là

$${}^U T_A \times {}^A T_D = {}^U T_B \times {}^B T_C \times {}^C T_D$$

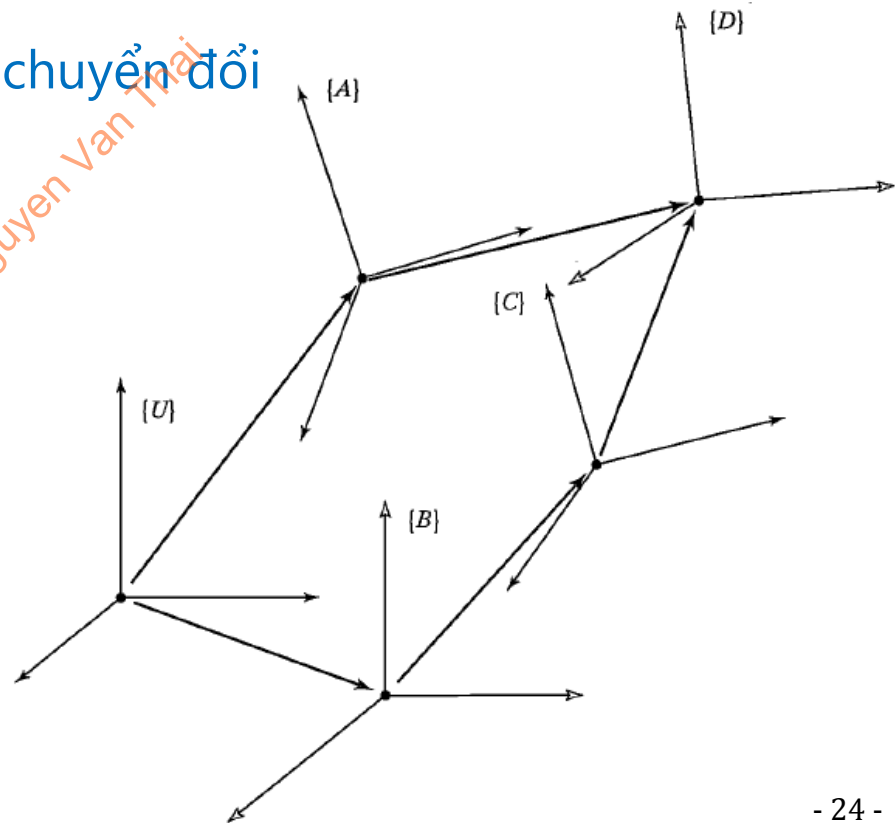


2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Transformation equations – Phương trình chuyển đổi

- ✦ Transformation equations can be used to solve for transforms in case of n unknown transforms and n transform equations.
- ✦ Phương trình chuyển đổi được dùng để giải bài toán chuyển đổi với n chuyển đổi chưa biết.



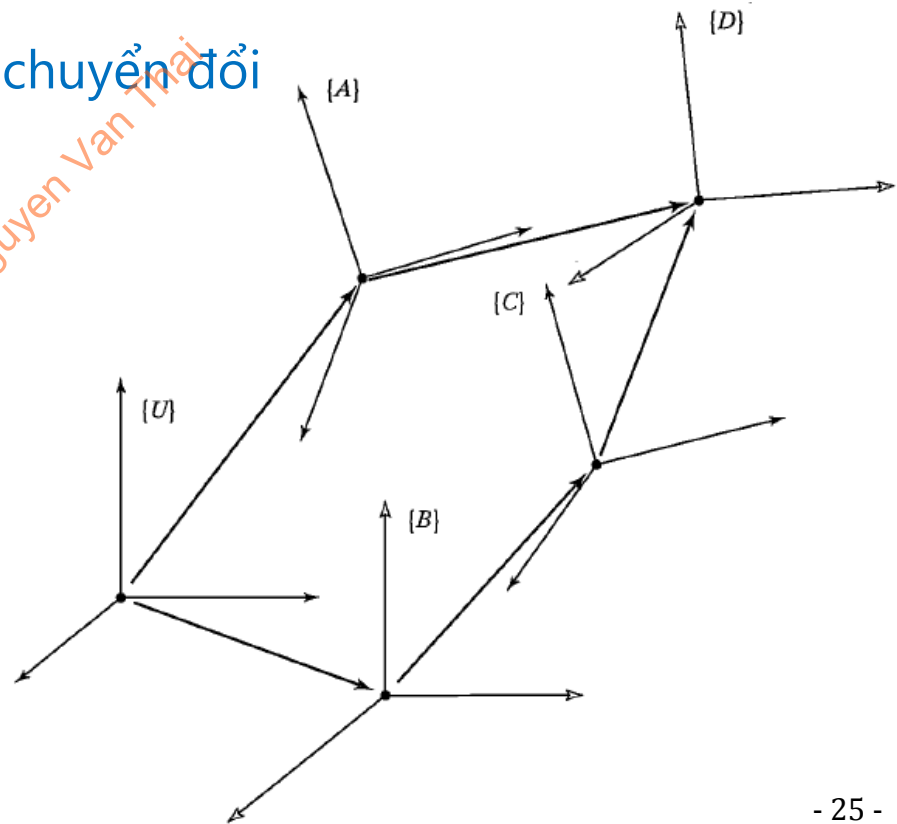
2.3 Operators: Translations, Rotations, and Transformations

Các phép toán: Tịnh tiến, Xoay, và Chuyển đổi

Transformation equations – Phương trình chuyển đổi

- ✦ Example: Find the transform describes {C} relative to {B}?
- ✦ Ví dụ: tìm chuyển đổi từ hệ {B} sang hệ {C}?

$${}^B_C T = {}^U_B T^{-1} \times {}^U_A T \times {}^A_D T \times {}^C_D T^{-1}$$



2.4 Exercises

Bài tập

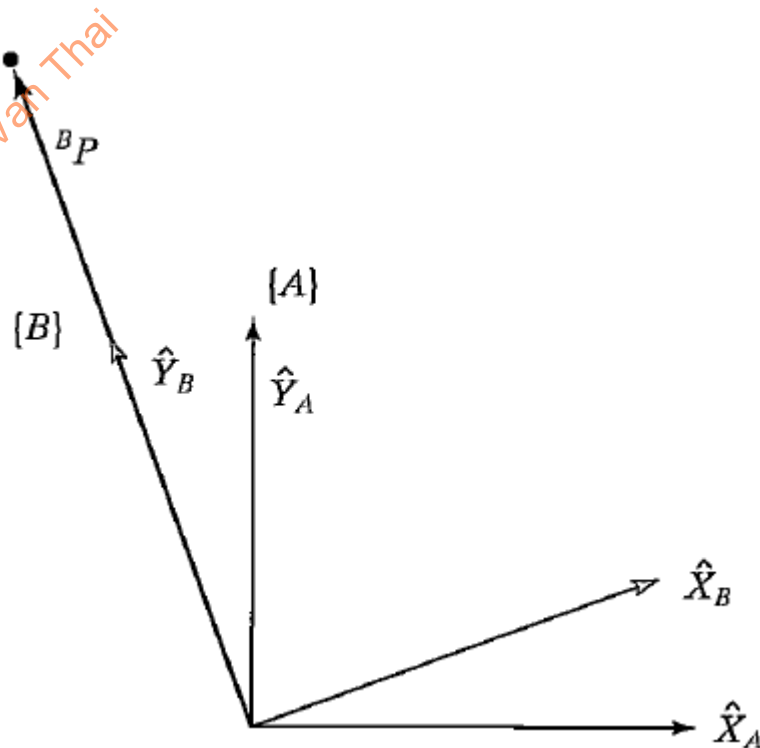
1. A frame $\{B\}$ that is rotated to frame $\{A\}$ about \hat{Z} by 30 degrees. Here, \hat{Z} is pointing out of the page.

✦ Given ${}^B P$ - Cho trước điểm ${}^B P$ là

$${}^B P = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

✦ Calculate ${}^A P$? - Tính điểm ${}^A P$?

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thai

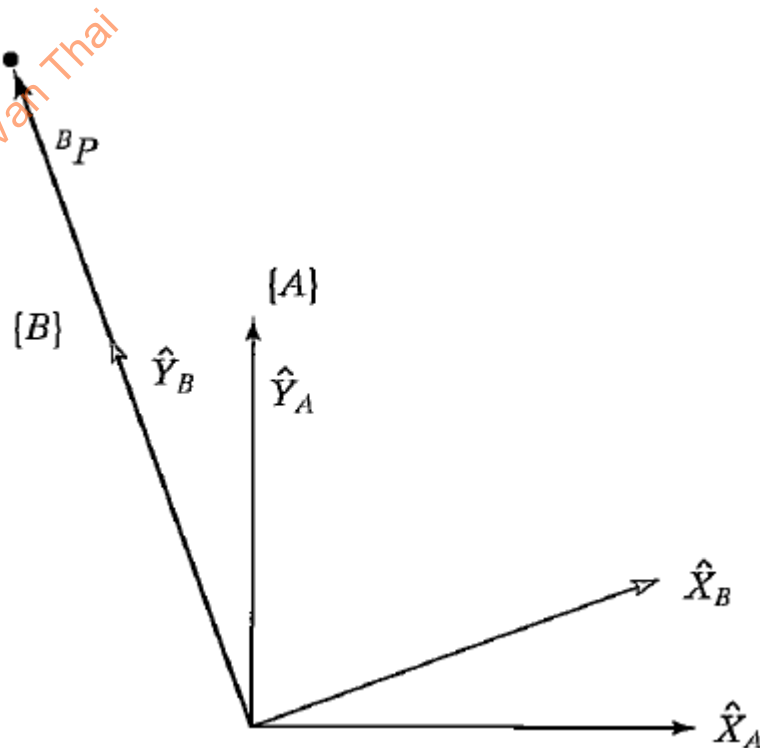


2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* describes $\{B\}$ relative to $\{A\}$ is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) biểu diễn $\{B\}$ liên quan $\{A\}$ là

$$\begin{aligned} {}^A_B R_Z(30^\circ) &= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0.000 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



2.4 Exercises

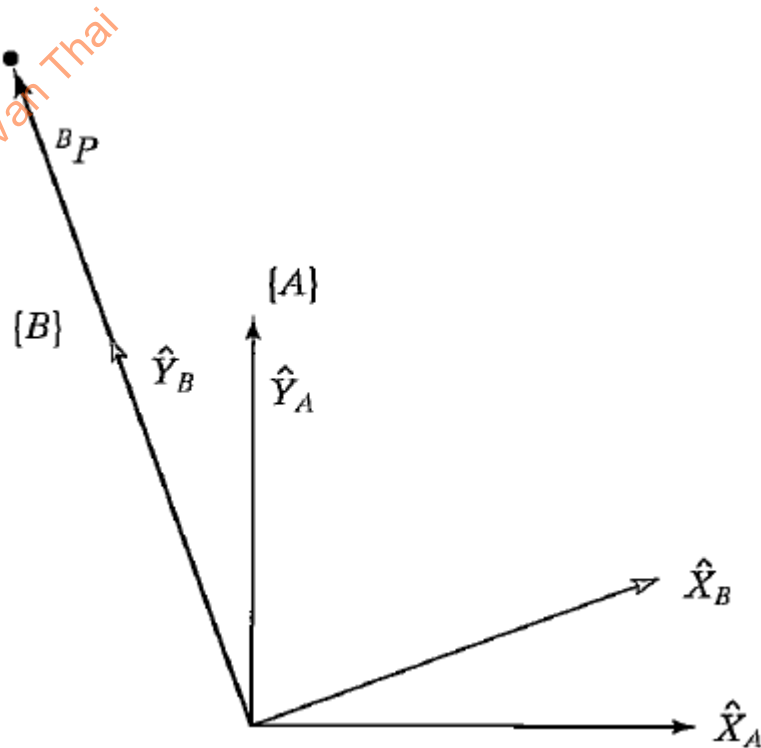
Bài tập

✦ Calculate ${}^A P$:

✦ Tính điểm ${}^A P$:

$${}^A P = {}_B^A R \cdot {}^B P$$

$$= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 1.732 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

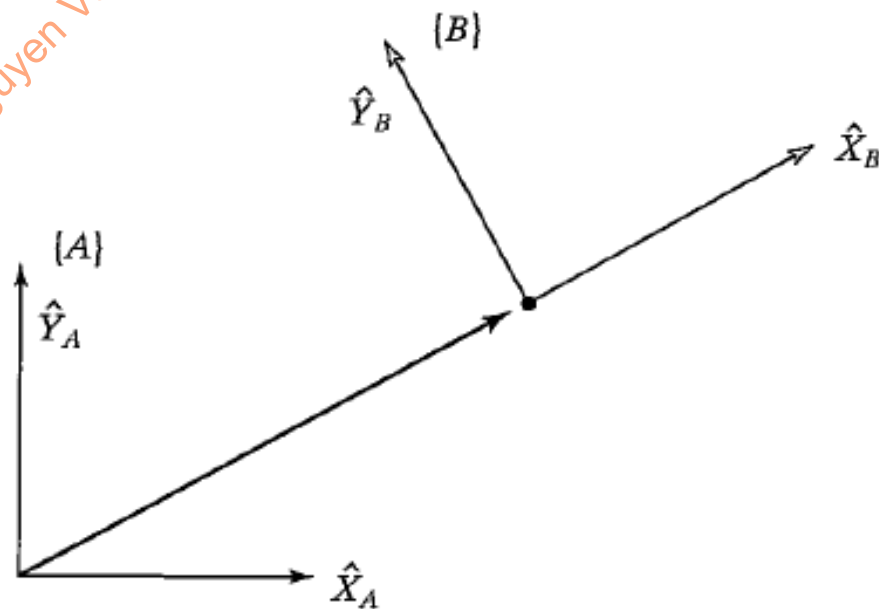


2.4 Exercises

Bài tập

2. A frame $\{B\}$, which is rotated relative to frame $\{A\}$ about \hat{Z} by 30 degrees, translated 4 units in X_A , and translated 3 units in \hat{Y}_A .

- ✦ Find the transformation matrix ${}^A_B T$?
- ✦ Find the inverse transformation matrix ${}^B_A T$?

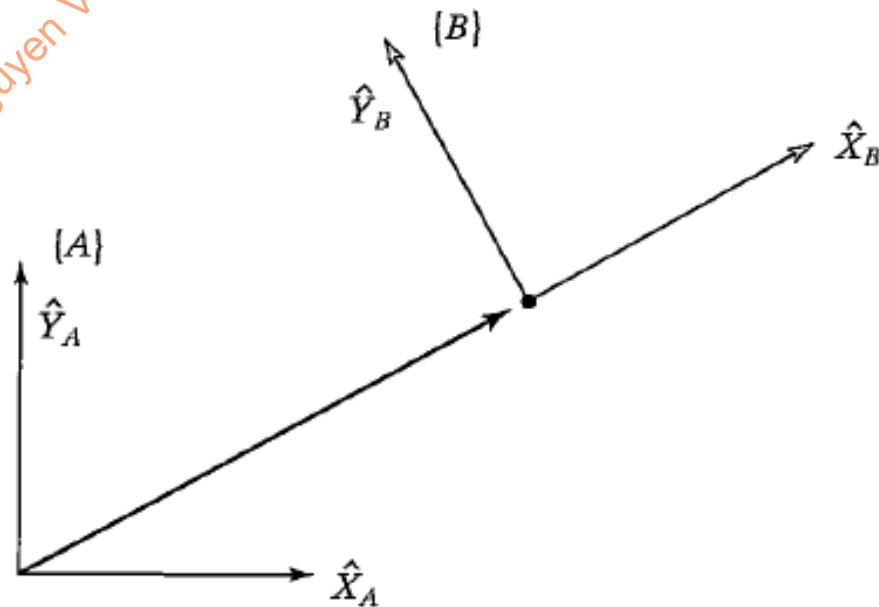


2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* describes $\{B\}$ relative to $\{A\}$ is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) biểu diễn $\{B\}$ liên quan $\{A\}$ là

$$\begin{aligned} {}^A_B R_Z(30^\circ) &= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0.000 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



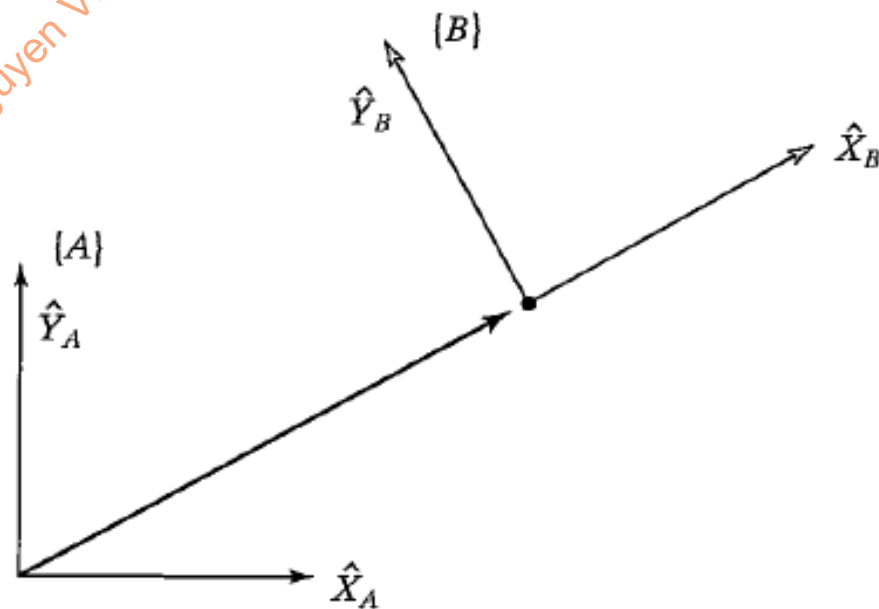
2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *translation vector* is
- ✦ Véc tơ dịch chuyển (*translation vector*) là

$${}^A Q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thai

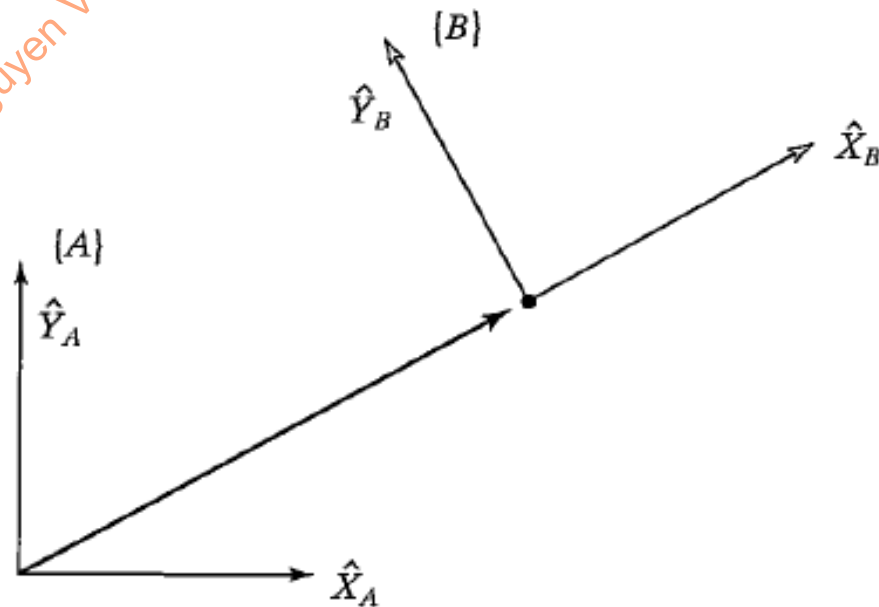


2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *transformation matrix* is
- ✦ Ma trận chuyển đổi (*transformation matrix*) là

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & q_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & q_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 4 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



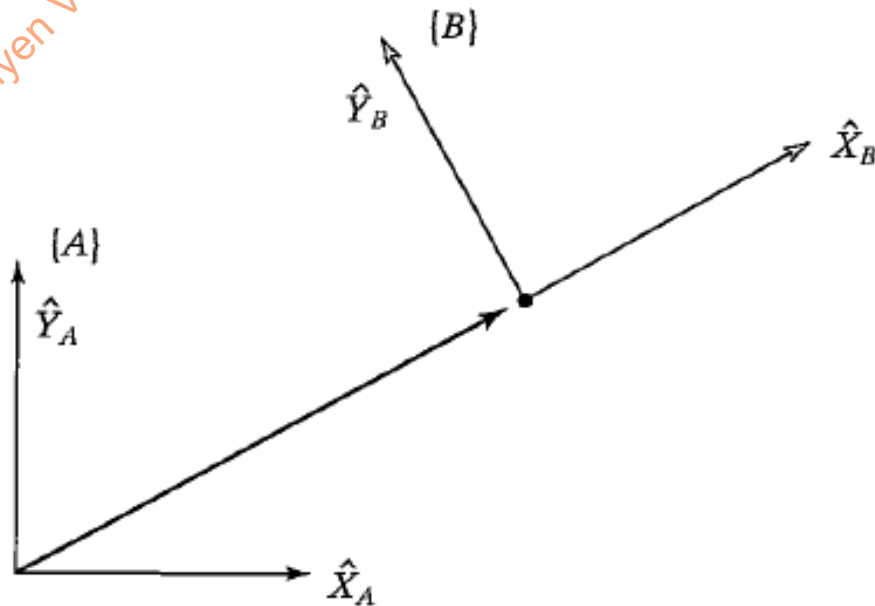
2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *inverse transformation matrix* is
- ✦ Ma trận nghịch chuyển (*inverse transformation matrix*) là

$${}^B_A T = {}^A_B T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.866 & 0.500 & 0 & -4.964 \\ -0.500 & 0.866 & 0 & -0.598 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



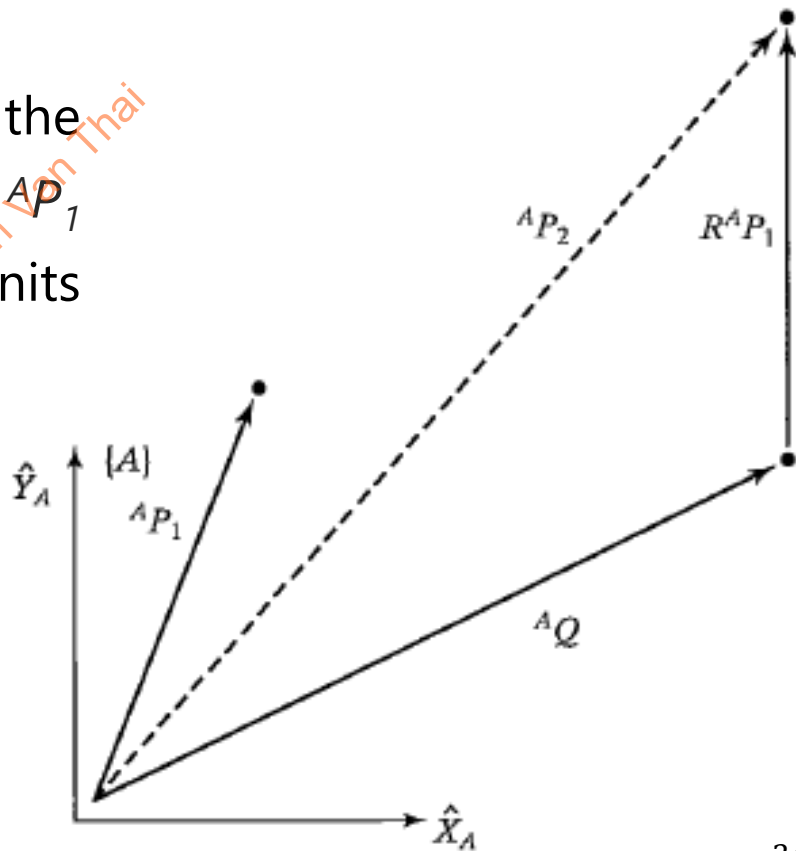
2.4 Exercises

Bài tập

3. Given a point ${}^A P_1$ in a frame $\{A\}$. ${}^A P_2$ is the corresponding point after rotating the ${}^A P_1$ about \hat{Z} by 30 degrees, translating 10 units in X_A , and 5 units in \hat{Y}_A .

✦ Find ${}^A P_2$ where ${}^A P_1$ is

$${}^A P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

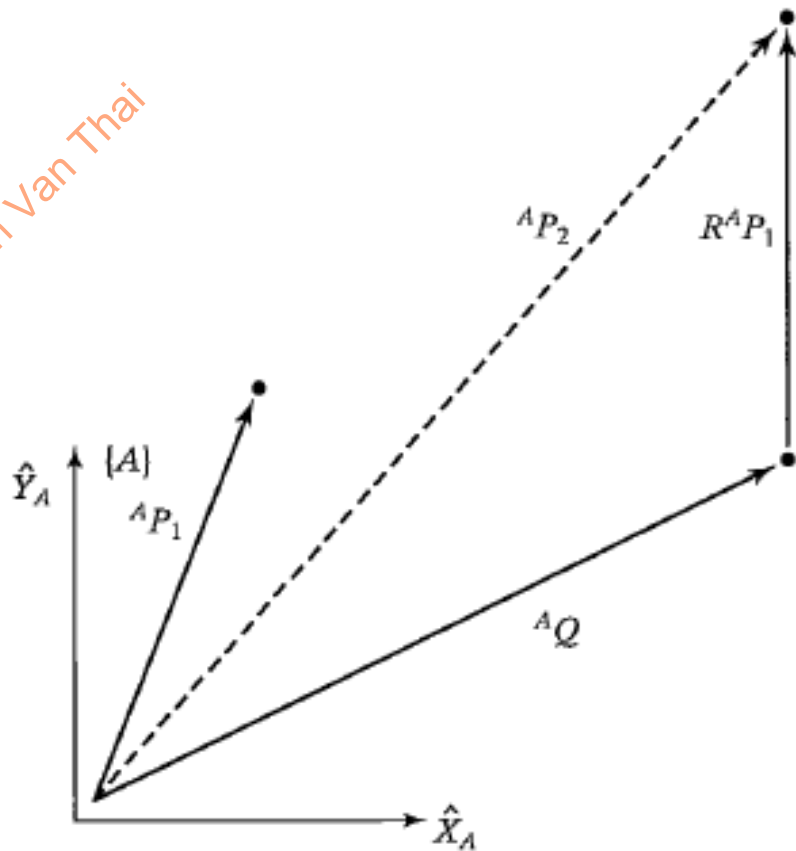


2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) là

$$\begin{aligned} R_Z(30^\circ) &= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0.000 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



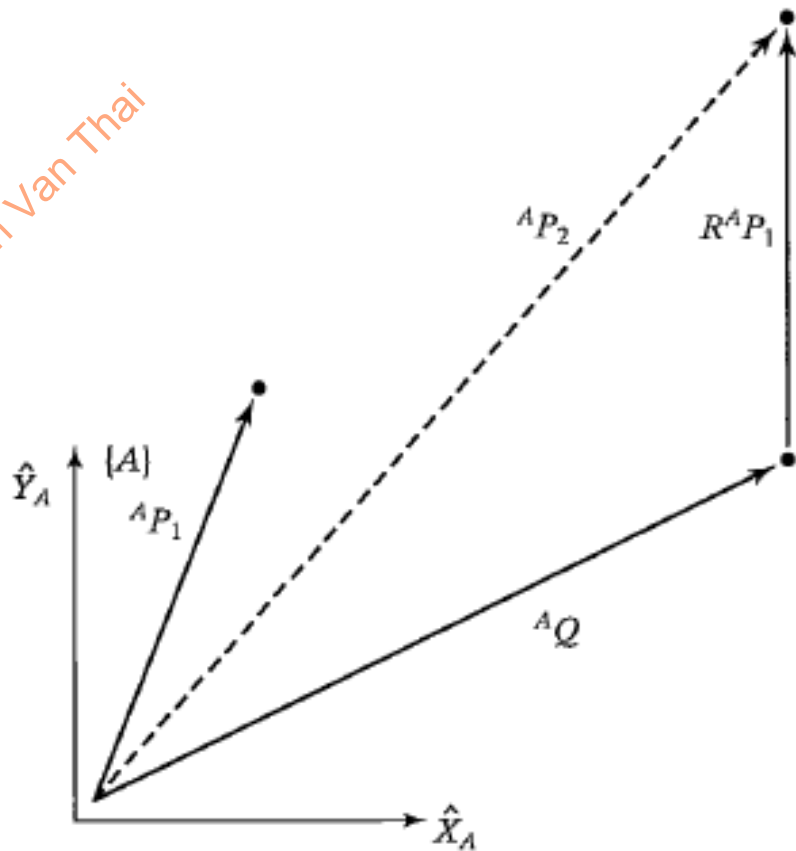
2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *translation vector* is
- ✦ Vectơ dịch chuyển (*translation vector*) là

$${}^A Q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thai

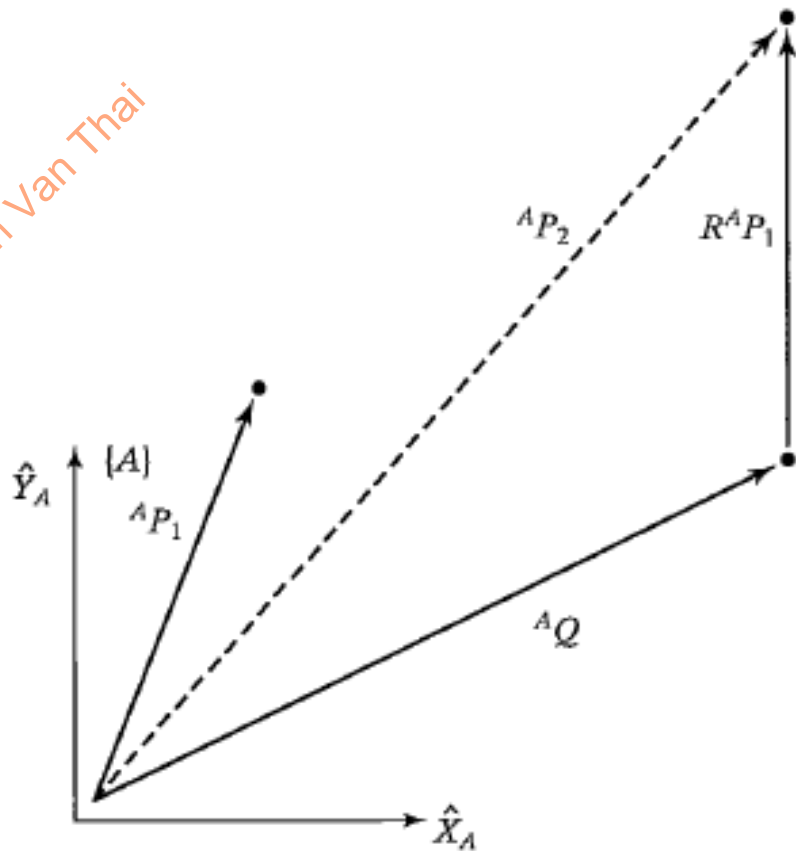


2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *transformation matrix* is
- ✦ Ma trận chuyển đổi (*transformation matrix*) là

$$T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & q_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & q_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 10 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2.4 Exercises

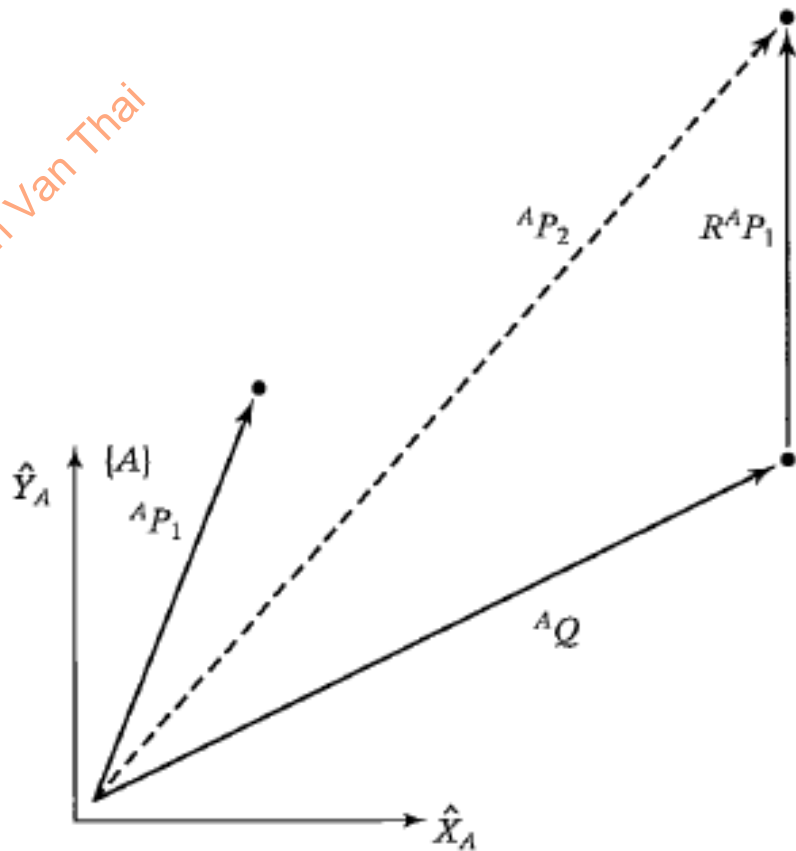
Bài tập

✦ Calculate ${}^A P_2$:

✦ Tính điểm ${}^A P_2$:

$${}^A P_2 = T \cdot {}^A P_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 & 10 \\ 0.500 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



2.4 Exercises

Bài tập

4. Calculate a rotation which contains two rotations, one about Z by 30 degrees and one about X by 30 degrees.

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Hai

2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* about Z by 30 degrees is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) quanh trục Z một góc 30° là

$$\begin{aligned} R_Z(30^\circ) &= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* about X by 30 degrees is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) quanh trục X một góc 30° là

$$\begin{aligned} R_X(30^\circ) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ 0 & \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.500 \\ 0 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The final *rotation matrix* is
- ✦ Ma trận xoay cuối (*rotation matrix*) là

$$\begin{aligned} R = R_Z(30^\circ) \times R_X(30^\circ) &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.500 \\ 0 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.87 & -0.43 & 0.25 \\ 0.50 & 0.75 & -0.43 \\ 0.00 & 0.50 & 0.87 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Exercises

Bài tập

5. Calculate a rotation which contains two rotations, one about X by 30 degrees and one about Z by 30 degrees.

In addition, give your comments for results from the Exercises 4 and 5?

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thoi

2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* about X by 30 degrees is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) quanh trục X một góc 30° là

$$\begin{aligned} R_X(30^\circ) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ 0 & \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.500 \\ 0 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* about Z by 30 degrees is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) quanh trục Z một góc 30° là

$$\begin{aligned} R_Z(30^\circ) &= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The final *rotation matrix* is
- ✦ Ma trận xoay cuối (*rotation matrix*) là

$$\begin{aligned} R = R_x(30^\circ) \times R_z(30^\circ) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & -0.500 \\ 0 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0 \\ 0.500 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.87 & -0.50 & 0.00 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 \\ 0.25 & 0.43 & 0.87 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Exercises

Bài tập

$$R_Z(30^0) \times R_X(30^0) \neq R_X(30^0) \times R_Z(30^0)$$

- ✦ The order of rotations is important, matrices are used to represent rotations, and multiplication of matrices is not commutative.
- ✦ Thứ tự của các phép quay là quan trọng, các ma trận được sử dụng để diễn tả các phép quay, không được hoán chuyển khi nhân các ma trận với nhau.

Compiled by PH.D. Nguyen Van Thai

2.4 Exercises

Bài tập

6. Given two points ${}^B P_1$ and ${}^B P_2$. determine the corresponding points ${}^A P_1$ and ${}^A P_2$ with respect to a reference coordinate system if it has been rotated 60° about Z.

$${}^B P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad {}^B P_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.4 Exercises

Bài tập

- ✦ The *rotation matrix* about Z by 60 degrees is
- ✦ Ma trận xoay (*rotation matrix*) quanh trục Z một góc 60° là

$$\begin{aligned} {}^A_B R_Z(60^\circ) &= \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) & 0 \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.500 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Exercises

Bài tập

✦ Calculate ${}^A P_1$:

✦ Tính điểm ${}^A P_1$:

$${}^A P_1 = R_Z(60^\circ) \times {}^B P_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0.500 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.598 \\ 4.964 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.4 Exercises

Bài tập

✦ Calculate ${}^A P_2$:

✦ Tính điểm ${}^A P_2$:

$${}^A P_2 = R_Z(60^\circ) \times {}^B P_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0.500 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.268 \\ 6.196 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.4 Exercises

Bài tập

7. A vector ${}^A P$ is rotated about Y_A by 30 degrees and is subsequently rotated about X_A by 45 degrees. Give the rotation matrix that accomplishes these rotations in the given order.

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thai

2.4 Exercises

Bài tập

8. A frame $\{B\}$ is located initially coincident with a frame $\{A\}$. We rotate $\{B\}$ about Z_B by 30 degrees, and then we rotate the resulting frame about X_B by 45 degrees. Give the rotation matrix that will change the description of vectors from ${}^B P$ to ${}^A P$.

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thai

2.4 Exercises

Bài tập

9. A velocity vector is given by

$${}^B V = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Given

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -3.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 9.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compute ${}^A V$?

2.4 Exercises

Bài tập

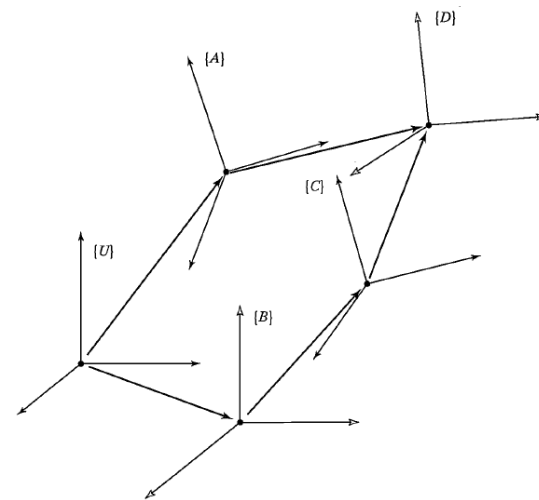
10. The following frame definitions are given as known:

$${}^U_A T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -1.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 8.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^B_A T = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.0 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 & 10.0 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 & -20.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^C_U T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & -3.0 \\ 0.433 & 0.750 & -0.500 & -3.0 \\ 0.250 & 0.433 & 0.866 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Draw a frame diagram (the same the figure) to show their arrangement qualitatively, and solve for ${}^B_C T$



2.4 Exercises

Bài tập

11. Given

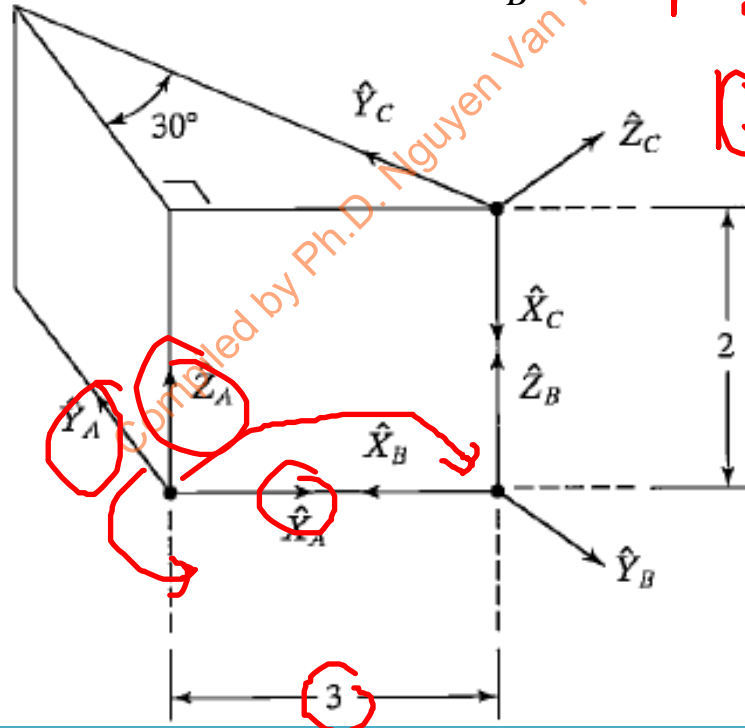
$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.43 & 0.86 & 5.0 \\ 0.87 & -0.50 & 0.00 & -4.0 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

What is the (2,4) element of ${}^B_A T$?

2.4 Exercises

Bài tập

12. Referring to the figure, give the value of ${}^A_B T$

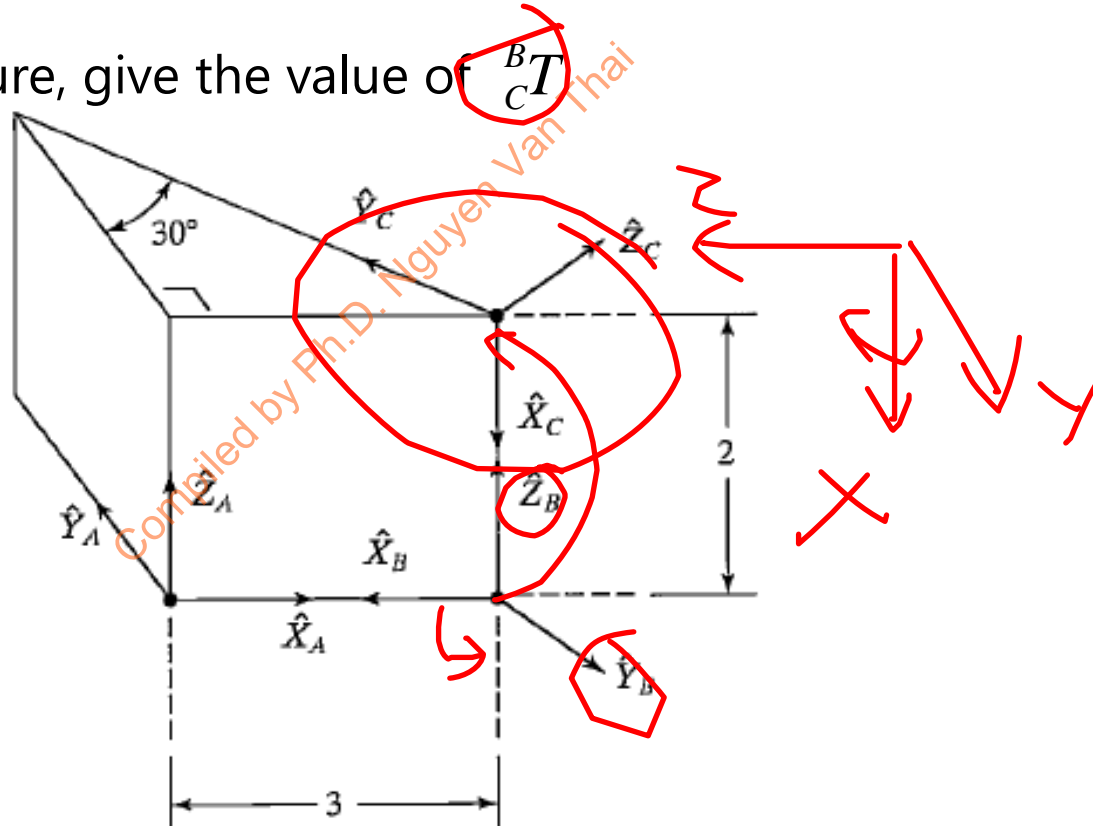


$R_z(180^\circ)$
 Q
 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.4 Exercises

Bài tập

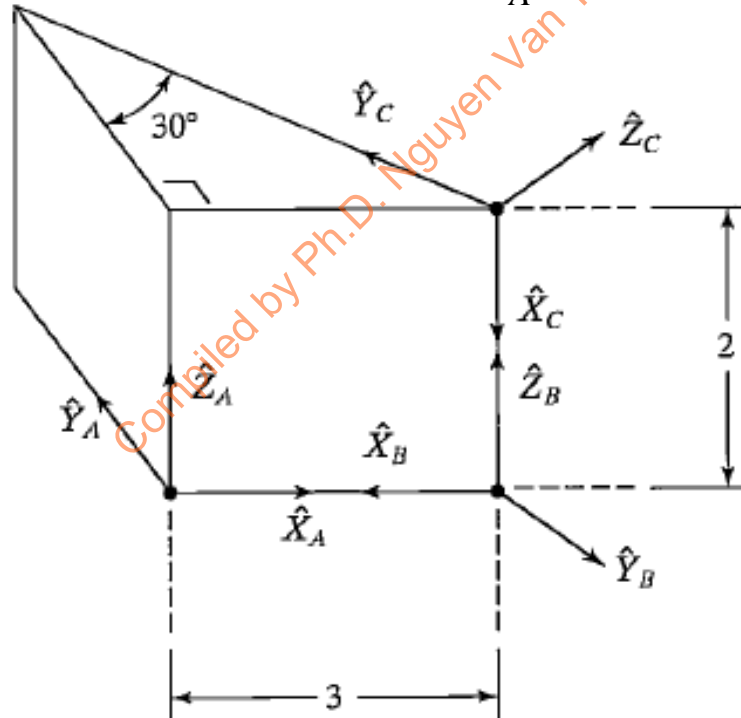
14. Referring to the figure, give the value of ${}^B T_C$



2.4 Exercises

Bài tập

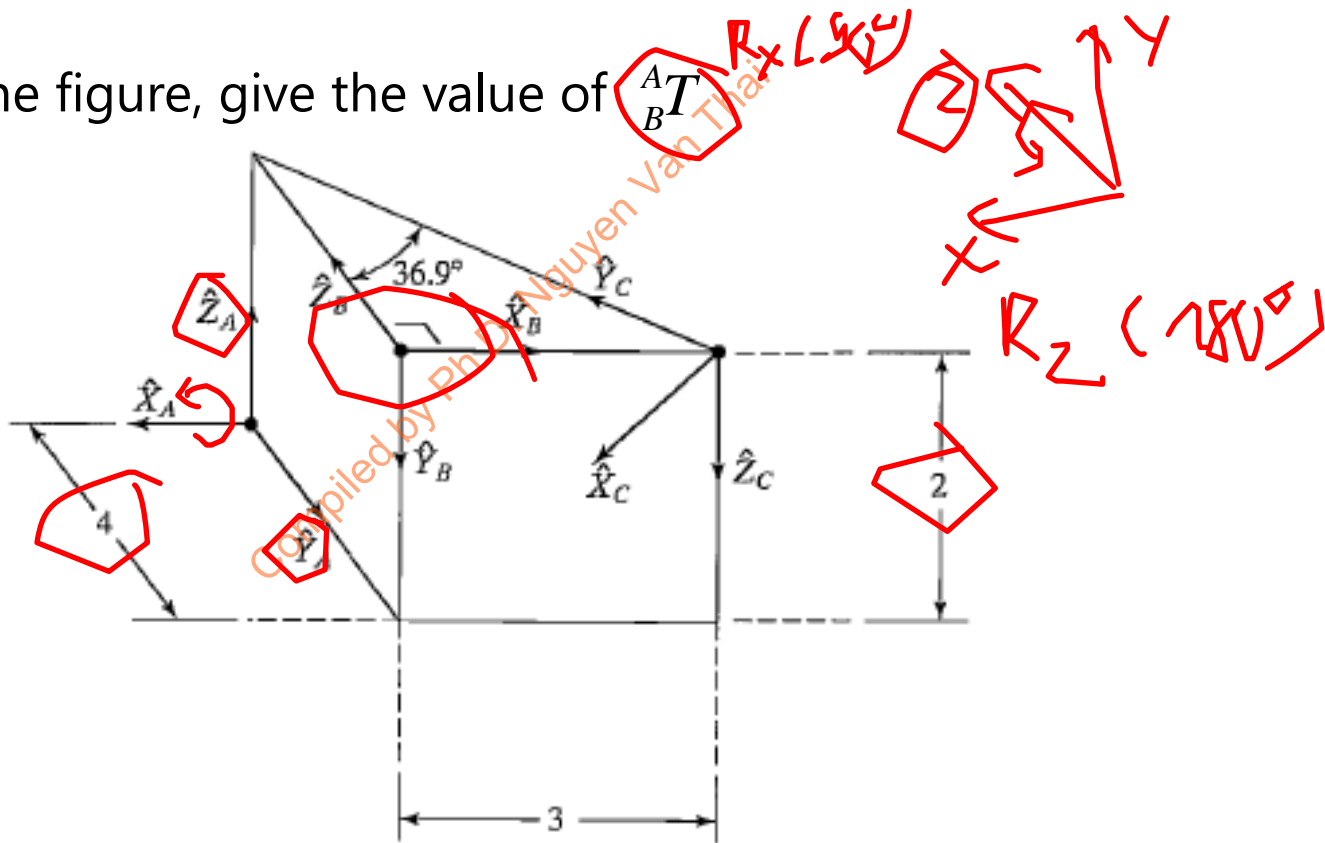
15. Referring to the figure, give the value of ${}^C T_A$



2.4 Exercises

Bài tập

16. Referring to the figure, give the value of

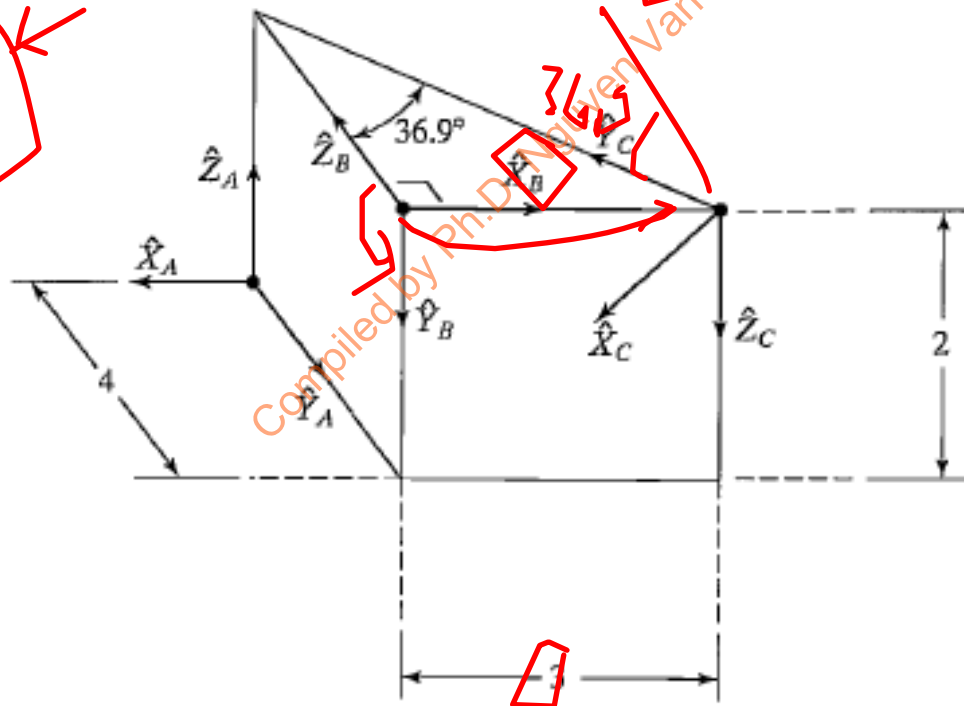
$$A^T_B$$


2.4 Exercises

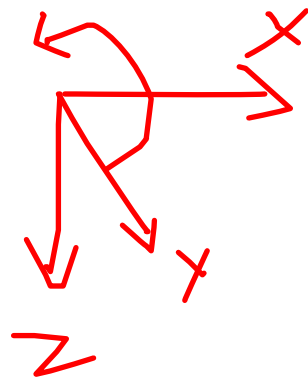
Bài tập

17. Referring to the figure, give the value of

$\boxed{A_{CT}}$



$$R_x (-15)$$



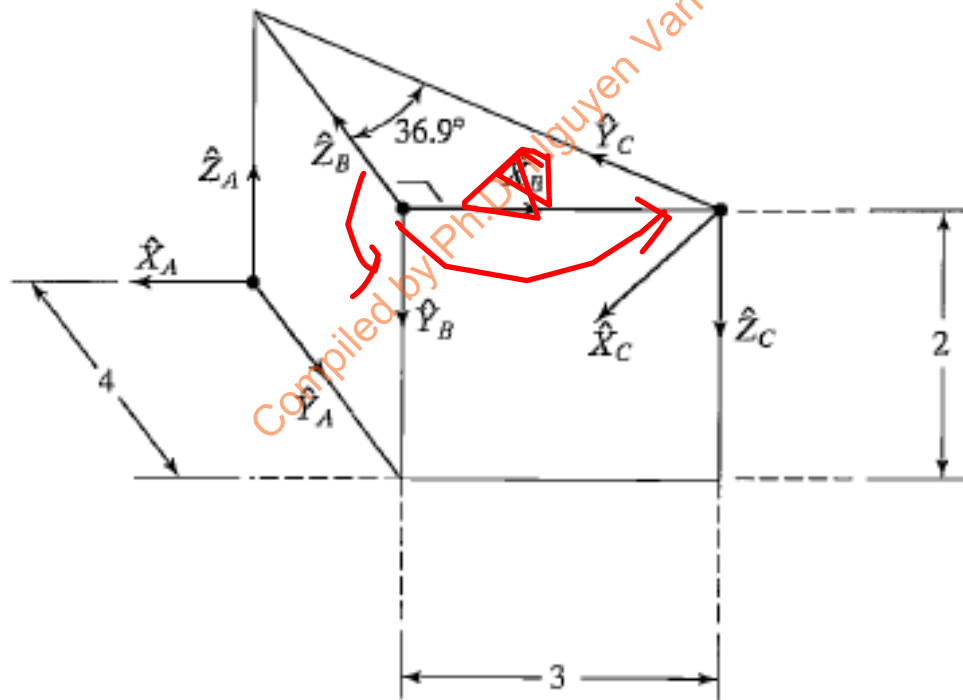
$$R_z (15 + 36.9)$$

2.4 Exercises

Bài tập

18. Referring to the figure, give the value of \vec{B}_C

$$R_z (25^\circ \pm 7.6^\circ)$$

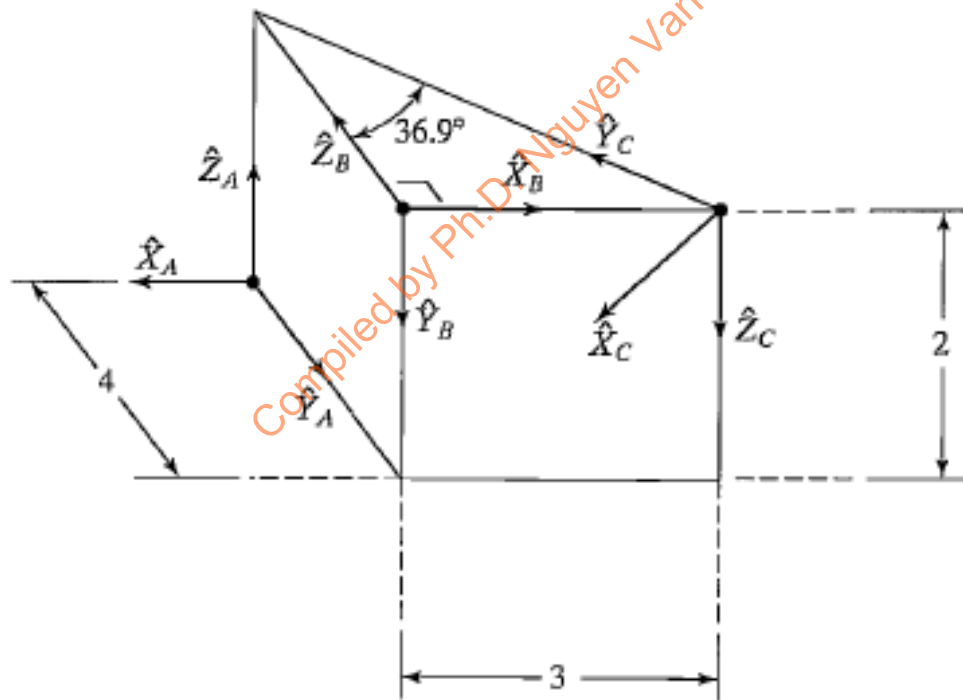


Compiled by PHU NGUYEN Van Thai

2.4 Exercises

Bài tập

19. Referring to the figure, give the value of T_A^C



2.4 Exercises

Bài tập

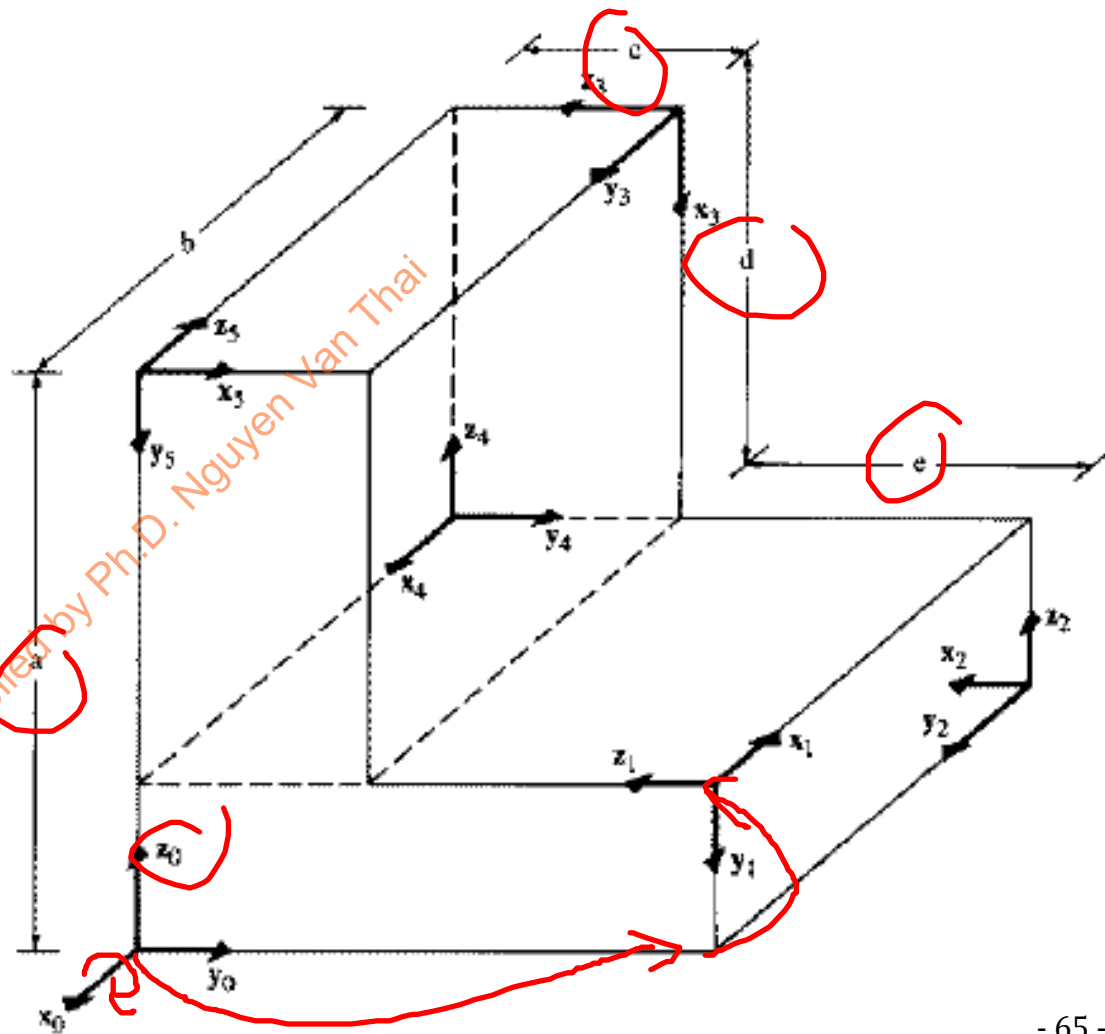
20. Referring to the figure, give

the value of 0_1T

$${}^0_1Q = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ a-d \end{pmatrix}$$

$$R_x(-90^\circ)$$

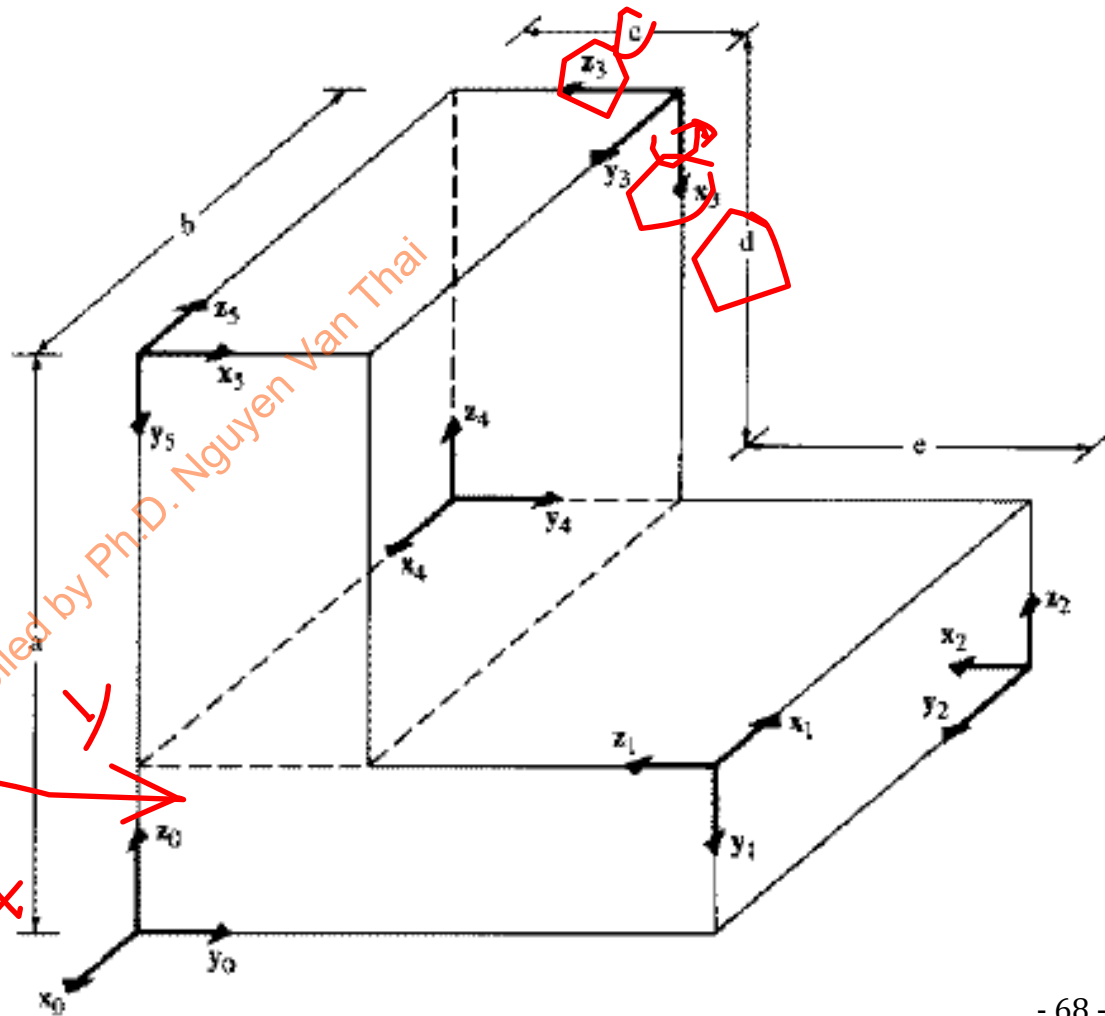
$$R_y(180^\circ)$$



2.4 Exercises

Bài tập

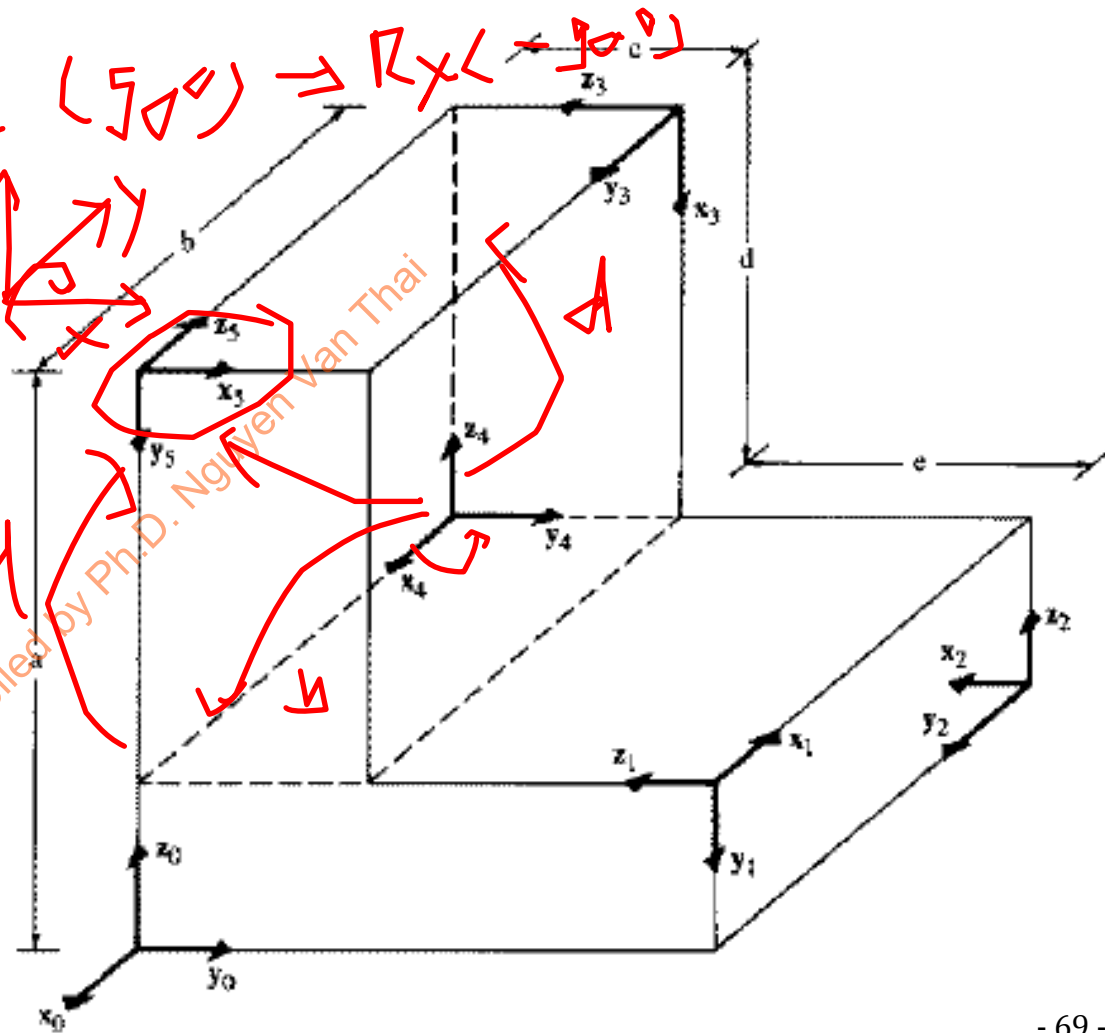
21. Referring to the figure, give the value of T_4^0



2.4 Exercises

Bài tập

22. Referring to the figure, give the value of 0T_5



Handwritten red notes:

- 0T_5
- 4T_5
- 5T_6
- 0T_1
- 1T_2
- 2T_3
- 3T_4
- 4T_5

2.4 Exercises

Bài tập

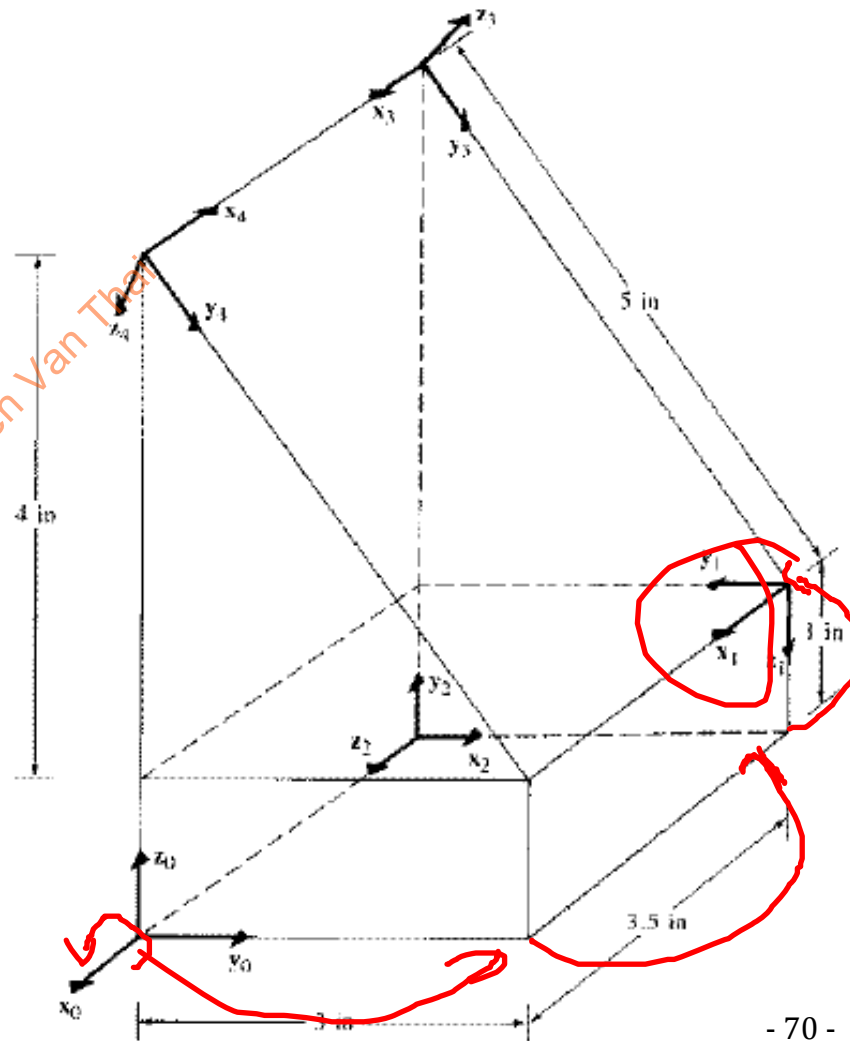
23. Referring to the figure, give

the value of 0_1T

$${}^0_1T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(180^\circ)$$

Compiled by Ph.D. Nguyen Van Thai



2.4 Exercises

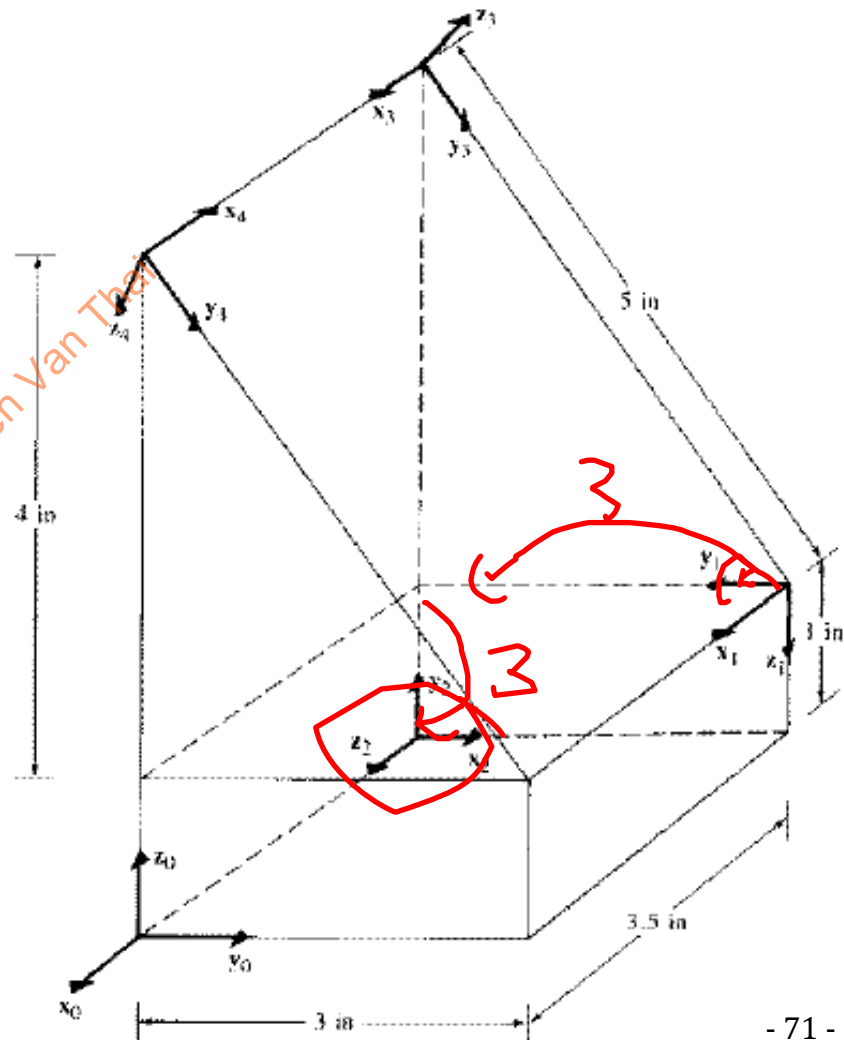
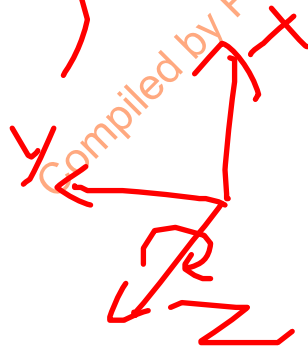
Bài tập

24. Referring to the figure, give the value of 0_2T

$${}^1_2T = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$R_y(40^\circ)$$

$$R_z(-90^\circ)$$



2.4 Exercises

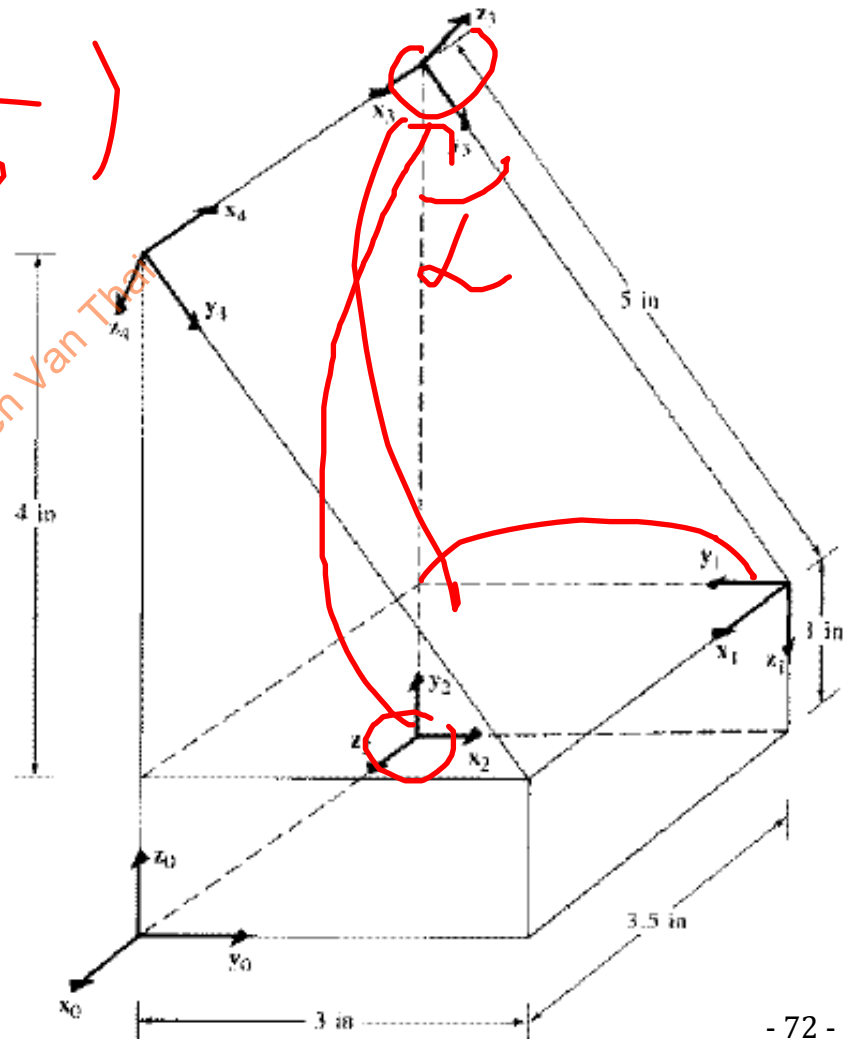
Bài tập

25. Referring to the figure, give the value of 0_3T

Handwritten notes in red:

- $Q(0, 7, 0)$
- $R_y(-90^\circ)$
- $R_x(180^\circ)$
- $2T$
- $3T$
- $180^\circ + \alpha$

Handwritten red note: $\text{cerc xia } (\frac{3}{5})$



2.4 Exercises

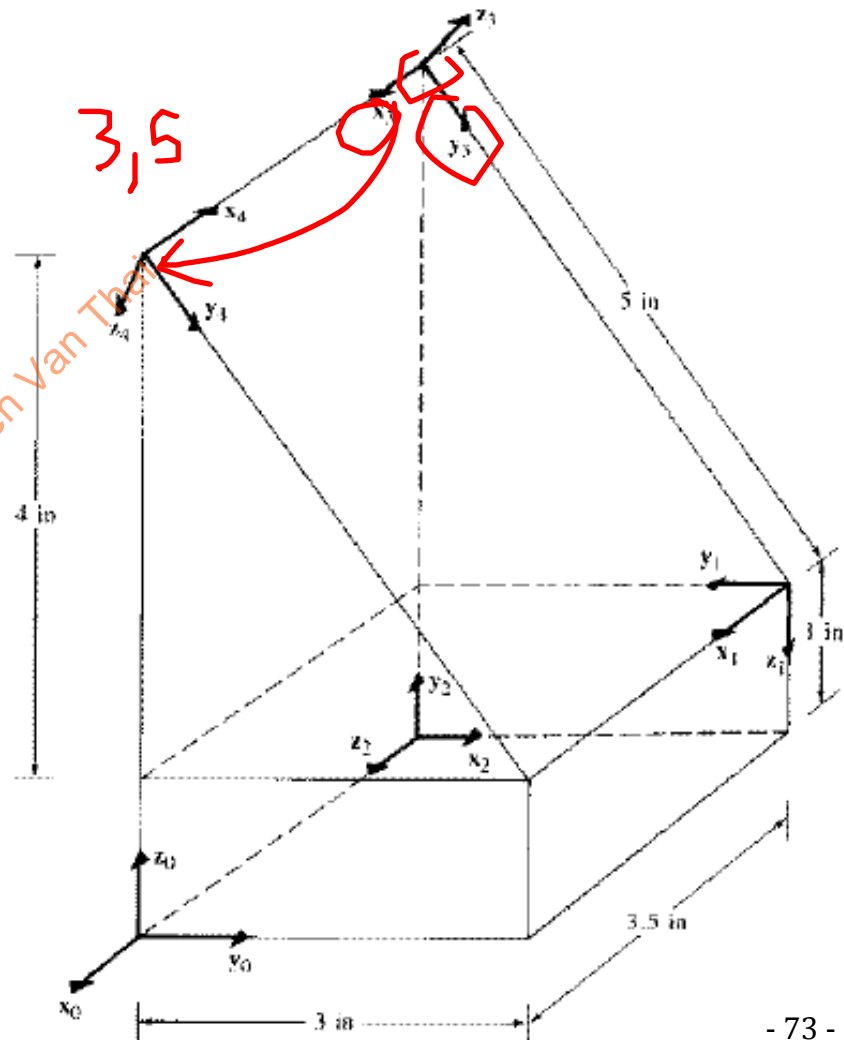
Bài tập

26. Referring to the figure, give

the value of 0_4T

Handwritten notes and calculations:

- 0_4T (circled in red)
- 0_3T (handwritten)
- 3_4T (handwritten)
- $Q(3,5)$ (handwritten)
- $R_y(180^\circ)$ (handwritten)



2.4 Exercises

Bài tập

27. Referring to the figure, give

the value of 0T_6

$${}^0T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

