

Đề Thi Thực Hành Đại Số Tuyến Tính

1 Câu 1: Phép toán cơ bản trên vector và ma trận (15 điểm)

Cho vector $A = [3, -2, 1, 4]$, $B = [-1, 5, 0, 2]$, và ma trận $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

- Tính tổng $A + B$ và tích số $2A + 3B$. (5 điểm)
- Tính tích vô hướng $A \cdot B$ và góc giữa hai vector (tính bằng độ, làm tròn đến 3 chữ số thập phân). (5 điểm)
- Tính tích ma trận CC^T (ma trận C nhân với chuyển vị của nó). (5 điểm)

2 Câu 2: Nhân ma trận, định thức và hạng ma trận (20 điểm)

Cho ma trận $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ và $N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- Tính tích ma trận $M \times N$. (8 điểm)
- Tính định thức của ma trận M . Nếu không khả thi, giải thích lý do. (6 điểm)
- Tính hạng của ma trận N . (6 điểm)

3 Câu 3: Nghịch đảo ma trận và giải hệ phương trình (25 điểm)

Cho ma trận $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ và hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 3x - y + 2w = 6 \\ x + 4y - 2z = 8 \\ y + 5z - w = 3 \\ 2x + z + 3w = 7 \end{cases}$$

- Tìm ma trận nghịch đảo của P . Nếu không khả nghịch, giải thích lý do. (10 điểm)
- Giải hệ phương trình trên bằng cách sử dụng nghịch đảo ma trận. (10 điểm)
- Kiểm tra nghiệm bằng cách nhân ma trận P với vector nghiệm và so sánh với vector hằng số. (5 điểm)

4 Câu 4: Giá trị riêng, vector riêng và chuẩn hóa (20 điểm)

Cho ma trận $Q = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- a) Tìm các giá trị riêng của Q . (7 điểm)
- b) Tìm các vector riêng tương ứng với các giá trị riêng. (8 điểm)
- c) Chuẩn hóa tất cả các vector riêng (độ dài bằng 1). (5 điểm)

5 Câu 5: Ứng dụng thực tế - Hệ phương trình và phân tích (20 điểm)

Một hệ thống gồm 3 thành phần có ma trận hệ số $R = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ và vector hằng số $b = [12, 5, 9]$.

- a) Giải hệ phương trình $Rx = b$ bằng phương pháp `np.linalg.solve()`. (8 điểm)
- b) Xác định xem ma trận R có khả nghịch không. Nếu có, tính ma trận nghịch đảo và dùng nó để giải lại hệ. So sánh hai nghiệm. (7 điểm)
- c) Tính chuẩn Frobenius của ma trận R . (5 điểm)