马尔可夫链

马尔可夫链子即为一种随机的时间序列，它在将来取什么值只与它现在的取值有关，而与它过去取什么值无关，即后无效性。具备该性质的离散型随机过程，称为马尔科夫链。对于本题中每天的时间，可以认为每天的天气情况可以被视为一种随机的时间序列，第二天的天气情况只与第一天的天气情况有关，符合马尔科夫链的相关定义。

状态转移概率

客观的事物可能有 $E_1, E_2, ..., E_N$ 共 n 种状态，其中每次只能处于一种状态，则每一状态都具有 n 个转向（包括转向自身），即

$$E_i \to E_1, E_i \to E_2, ..., E_i \to E_n$$

由于状态转移是随机的，因此，必须用概率来描述转移可能性的大小，将这种转移的可能性用概率描述，即为状态转移概率。

对于从状态 E_i 转移到状态 E_j 的概率，称为从 i 到 j 的转移概率，记为：

$$P_{ij} = P(E_j \mid E_i) = P(E_i \to E_j) = P(x_{n+1} = j \mid x_n = i)$$

对于本题来说，P 为天气状态从第 i 种天气转移为第 j 种天气的概率，则根据第一问中给出的天气数据，三种天气的转移概率为矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2222 & 0.5556 & 0.2222 \\ 0.3571 & 0.4286 & 0.2143 \\ 0.4333 & 0.5000 & 0.1667 \end{bmatrix}$$

假设经过 k 次的状态转移后，各种天气的转移概率矩阵 $P(k)$ 即为

$$P(k) = P^k$$

当 k 趋近于正无穷时，天气转移概率矩阵逐渐收敛至一定值，即极限概率分布为

$$P(k)|_{k\to+\infty} = P^k|_{k\to+\infty} = \begin{bmatrix} 0.3103 & 0.4828 & 0.2069 \\ 0.3103 & 0.4828 & 0.2069 \\ 0.3103 & 0.4828 & 0.2069 \end{bmatrix}$$

由上式可以得到各种天气出现概率为 $P_1 = 0.3103, P_2 = 0.4828, P_3 = 0.2069$ 。即可代入模型进行下一步求解。