牛顿迭代法（Newton’s Method）

牛顿法（Newton's method）是一种用于求解方程根的迭代数值方法，其基本思想是从一个初始猜测（ x_0 ）开始，通过不断迭代计算下一个近似值，直到达到预定的精度要求。

数学公式如下：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{1}$$

优点：

- 快速收敛： 每一步迭代后误差平方减少，通常二次收敛。
- 高效性： 当初始猜测接近真实根时，迭代次数通常很少。
- 适用于单根问题： 对单变量函数的单根问题非常有效。

缺点：

- 对初始猜测敏感： 初始猜测点选择不当可能导致算法发散或收敛到错误的根。
- 需要函数导数： 每步迭代需要计算函数和导数，对于复杂函数或数值导数要求较高。
- 不保证收敛： 在某些情况下可能不收敛或收敛到不稳定的根。

布伦特方法（Brent’s Method）

布伦特方法（Brent's method）是一种结合了二分法、割线法和二次插值法优点的高效非线性方程根查找方法。

算法如下：

1. **初始化：**选择两个点a和b，确保$f(a)$和$f(b)$符号相反。
2. **逆二次插值：**在$[a,b]$区间内，计算新点x：

$$x = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

3. **函数值比较：**

- 如果$f(x)$接近零，则x可能是根。
- 如果$f(x)$与$f(a)$同号，更新a为x。
- 如果$f(x)$与$f(b)$同号，更新b为x。

4. **二分法调整：**如果$f(x)$与$f(x)$与$f(a)$均异号，调整b为区间中点：

$$b = \frac{a+b}{2}$$

5. **重复：**重复步骤 2-4，直到$|f(x)| < \varepsilon$或$|b-a| < \varepsilon$为止。

优点：

- 快速收敛： 结合了二分法、割线法和二次插值法的优点，通常能够在

较少的迭代步骤内找到根。

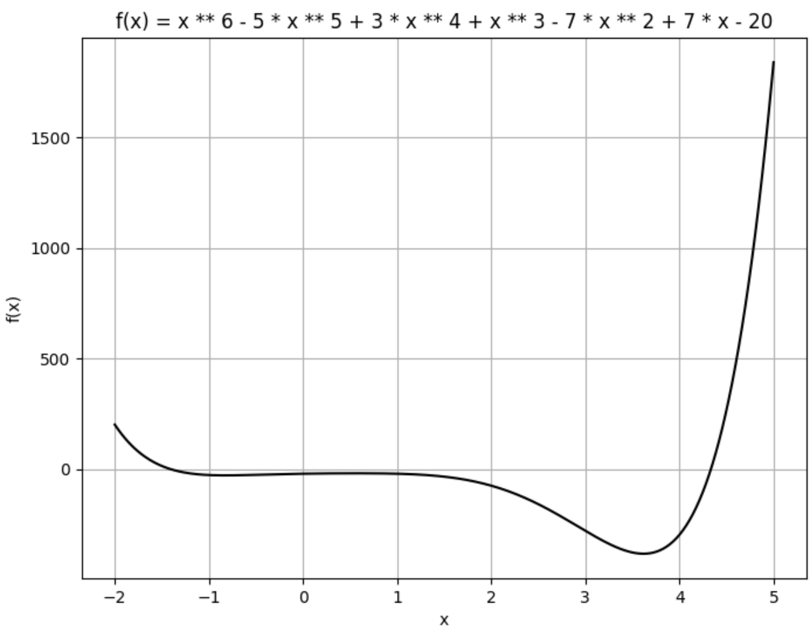
- 稳定性高： 在面对函数导数不连续或有多个根的情况时，能够保持较好的数值稳定性。
- 对初始猜测点宽容： 对初始猜测点的选择较为灵活，能够适应广泛的初始条件。
- 无需导数信息： 不要求计算函数的导数，适用于导数难以计算或计算代价高的函数。

缺点：

- 计算成本高： 每步迭代可能需要较多的计算量，尤其是在复杂函数或需要高精度根的情况下。
- 实现复杂度高： 相比简单的二分法，布伦特方法的实现复杂度较高。

代码使用

对于一元非线性方程组，先进行可视化，确定其零点大致位置。



牛顿迭代法：输入一个初始值如-1 或-2 均可，4 或 5 均可（初始值可以减少迭代次数以及运算时间），输入迭代次数，输入精度即可进行求解。

布伦特方法，必须输入函数值为异号的两个值，如-1 和-2，输入精度即可进行求解。

对于多元非线性方程组，输入迭代次数，输入精度即可进行求解。

一元和多元线性方程组输入时需注意需要在变量后加上序号，如 x[0](代表 x1)。