Joseph Salmon

Analyse 1: Calcul différentiel pour une ou plusieurs variables

Joseph Salmon

Septembre 2014

INSTITUT Mines-Télécom

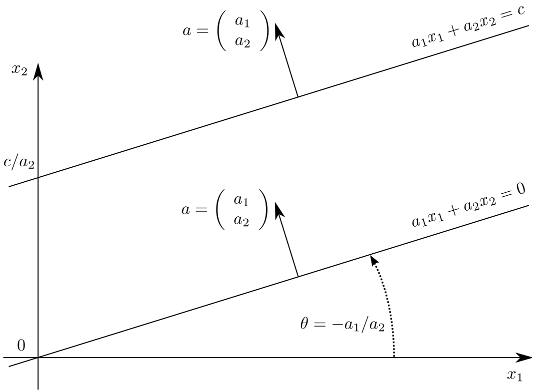
TELECOM ParisTech

Plan du cours

Rappels d'algèbre linéaire

Équation d'une droite en dimension deux

$$\Delta = \{(x_1, x_2) | a_1 x_1 + a_2 x_2 = c\} \quad \text{ou} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = c$$

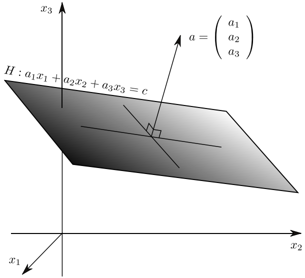


Rappels d'algèbre linéaire II

Définition : hyperplan

Un **hyperplan** H de $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble des points $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top$ qui vérifient pour un vecteur directeur $a = (a_1, \ldots, a_d)^\top$ et une constante réelle c l'équation suivante :

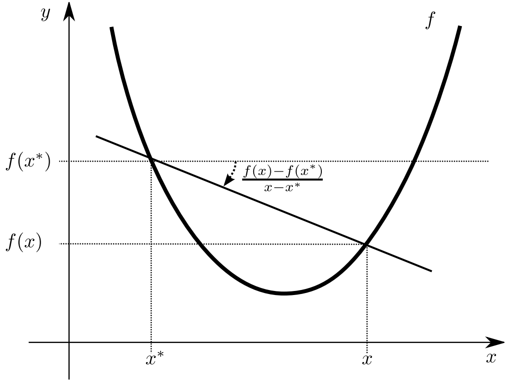
$$a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d = c \quad \text{ou} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \right\rangle = c$$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

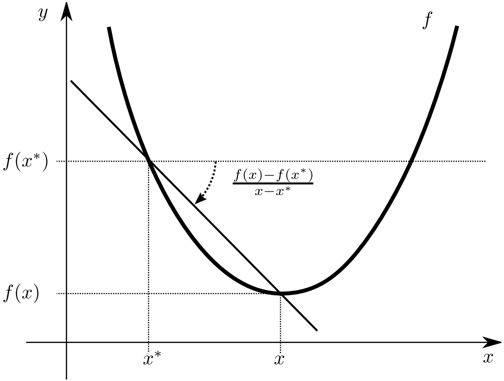
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroisement existe, *i.e.*, $f'(x^*) = \lim_{x \to x^*} = \dfrac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

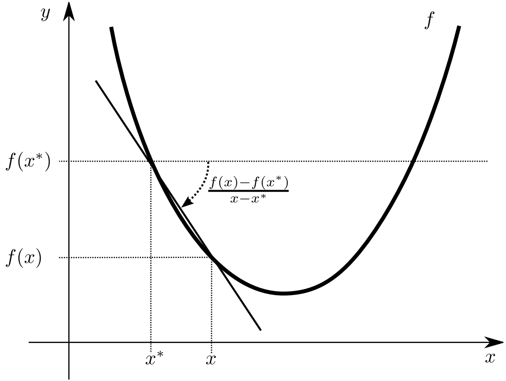
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroisement existe, *i.e.*, $f'(x^*) = \lim\limits_{x \to x^*} = \dfrac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

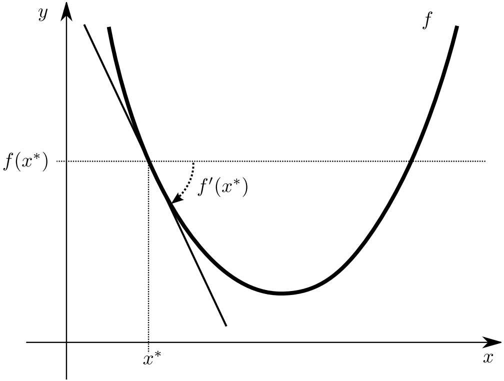
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroisement existe, *i.e.*, $f'(x^*) = \lim\limits_{x \to x^*} = \dfrac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$



La dérivée d'une fonction

Définition : dérivée

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **dérivable en x^*** si la limite du taux d'accroisement existe, *i.e.*, $f'(x^*) = \lim_{x \to x^*} = \dfrac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}$

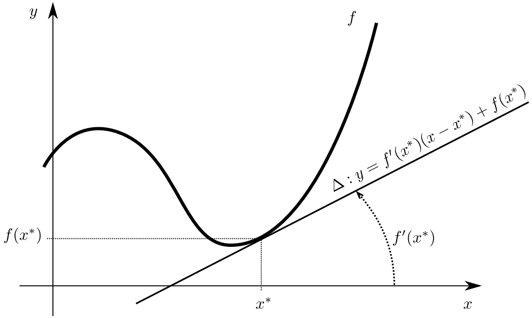


Interprétation tangentielle

Définition : tangente

Si f est dérivable en x^* alors la droite Δ d'équation $y = f'(x^*)(x - x^*) + f(x^*)$ est la droite **tangente** à f au point x^*

Rem: approximation d'ordre 1 de f (formule de Taylor : ordre 1)



Propriétés classiques de la dérivée

Théorème : linéarité

Si f et g sont dérivables alors $\alpha f + \beta g$ l'est aussi pour tous α et β réels. De plus $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

Exemples de calcul :

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = 1 & f'(x) = 0 \\
f(x) = x^n & f'(x) = n x^{n-1} \quad \text{(pour } n \in \mathbb{N}^*) \\
f(x) = \exp(x) & f'(x) = \exp(x) \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

Pour aller plus loin : Gourdon (2008), Chapitre II. 1

Dérivée partielle d'une fonction multi-dimensionnelle

On s'intéressera uniquement aux fonctions à valeurs réelles dans toute la suite du cours : $\boxed{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}}$

Définition : dérivée partielle

La $i^{\text{ième}}$ **dérivée partielle** de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ au point x^* est la dérivée de la fonction définie par

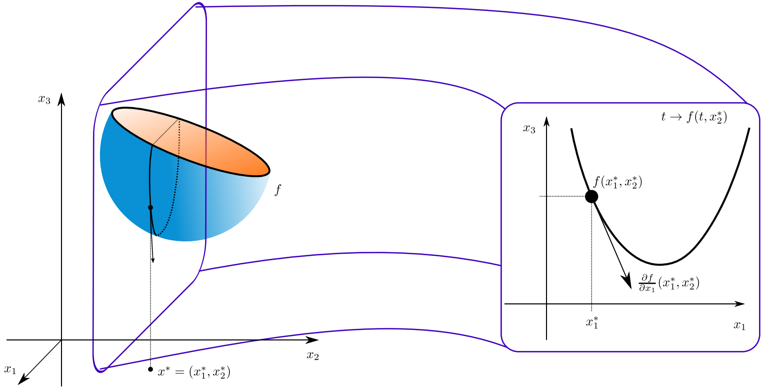
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x_1^*, \dots, t, \dots, x_d^*) \end{aligned}$$

prise au point x_i^*. On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ cette quantité.

Interprétation : c'est la dérivée de la fonction réelle obtenue quand on gèle toutes les coordonnées sauf la $i^{\text{ième}}$.

Dérivée partielle d'une fonction multi-dimensionnelle II

Joseph Salmon



Lien dérivées partielles et gradient

$$\boxed{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}}$$

Définition : gradient

Quand f admet des dérivées partielles en x^* pour toutes les directions, on appelle **gradient** de f en x^* le vecteur :

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

Rem: quand la fonction est "régulière" on obtient l'approximation

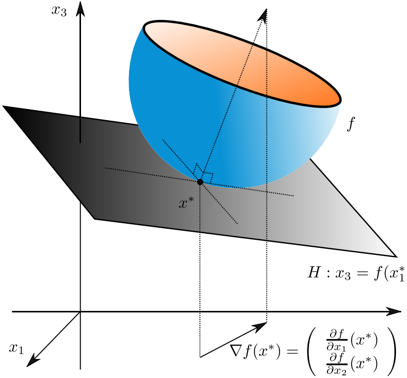
$$f(x) \approx f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle$$

Interprétation tangentielle

Définition : différentiable

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite **différentiable en x^*** si

$$\lim_{x \to x^*} \frac{|f(x) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle|}{\|x - x^*\|} = 0$$



Dérivées partielles d'ordre deux

Récursivement, on définit la dérivée partielle d'ordre quelconque :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x^*)$$

On admet ici la propriété de Schwartz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*)$$

Définition : matrice Hessienne

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(x^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x^*) \end{bmatrix}$$

Joseph Salmon

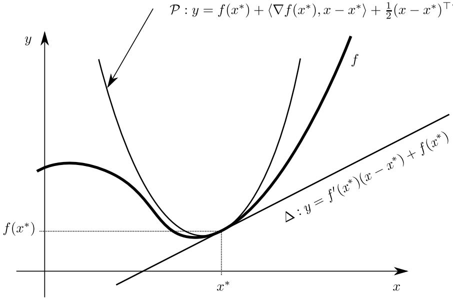
INSTITUT Mines-Télécom

Approximation quadratique

Quand la fonction est "régulière" on obtient l'approximation

$$f(x) \approx f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle + \frac{1}{2}(x - x^*)^\top \nabla^2 f(x^*)(x - x^*)$$

Interprétation : la fonction f est alors bien approchée par un polynôme d'ordre deux au voisinage de x^*



Pour aller plus loin : Rouvière (2009)

Analyse 1: Calcul différentiel pour une ou plusieurs variables

Joseph Salmon

Fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \end{cases}$$

A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

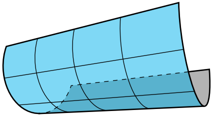
Joseph Salmon

Joseph Salmon

Fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \end{cases}$$

A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

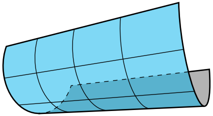


$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$

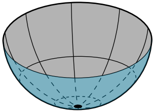
Fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \end{cases}$$

A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$



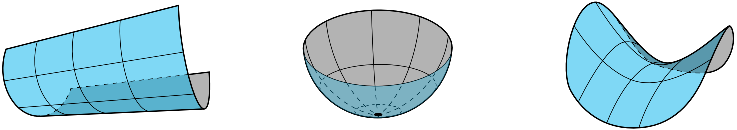
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$

Joseph Salmon

Fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \end{cases}$$

A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



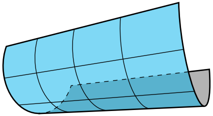
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$ $\quad$ $(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$ $\quad$ $(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$

Fonctions quadratiques en dimension deux

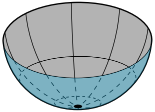
Joseph Salmon

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \end{cases}$$

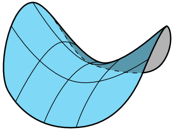
A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



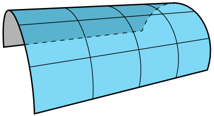
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$



$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$



$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$

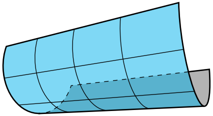


$(y_1, y_2) \mapsto -y_1^2$

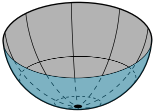
Fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \end{cases}$$

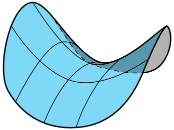
A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



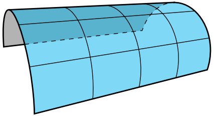
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$



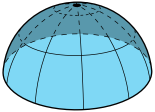
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$



$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$



$(y_1, y_2) \mapsto -y_1^2$

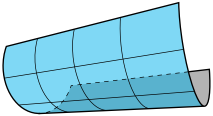


$(y_1, y_2) \mapsto -(y_1^2 + y_2^2)$

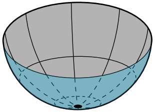
Fonctions quadratiques en dimension deux

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto x^\top A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 \end{cases}$$

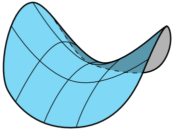
A matrice symétrique réelle : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



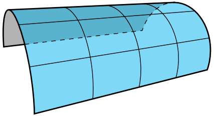
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2$



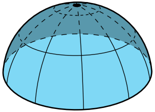
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 + y_2^2$



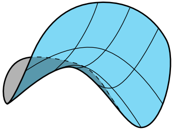
$(y_1, y_2) \mapsto y_1^2 - y_2^2$



$(y_1, y_2) \mapsto -y_1^2$



$(y_1, y_2) \mapsto -(y_1^2 + y_2^2)$



$(y_1, y_2) \mapsto y_2^2 - y_1^2$

Références I

X. Gourdon.

Les maths en tête : Analyse.

Ellipses Marketing, ELLIPSES MARKETING edition, 2008.

Joseph Salmon