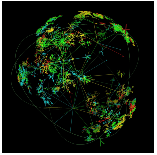
Probabilités

Probabilités discrètes

Anne Sabourin

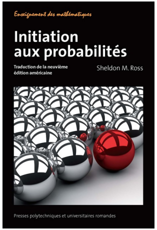
Probabilités ?

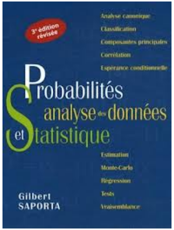
 

- **But :** Analyser rigoureusement des phénomènes aléatoires.
- **Probabilité d'un évènement** : quantification de sa vraisemblance.
- Analyse d'une **expérience aléatoire**
  Ex : Défaut d'un client, nombre de clics sur une page, volume d'achat d'un produit . . .**résultat incertain**

Objectifs du cours

- Revoir les principes élémentaires des probabilités, utiles en statistique et en machine-learning
- Vérifier vos connaissances et identifier vos lacunes : guide de lecture pour travailler





Plan du cours de probabilités

Semaine 3

- Probabilités discrètes
- Variables et vecteurs aléatoires discrets
- Espérance, espérance conditionnelle

Semaine 4

- Indépendance, variance, covariance
- Variables aléatoires continues
- Vecteurs aléatoires continus

Univers ou Ensemble fondamental Ω :

Ensemble de **toutes** les issues possibles de l'expérience

Un élément $\omega \in \Omega$ (« réalisation élémentaire ») :

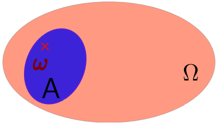
Une issue possible ($\Leftrightarrow$ un « état de l'univers »)

- ⋆ Lancer de deux dés. $\Omega = \{\text{couples } \omega = (i,j)\ (i,j \le 6\})$.
- ⋆ Plus abstrait : $\Omega = \{$ conditions inconnues de l'expérience $\}$.

Evènement : (Résumé observable de l'issue de l'expérience)

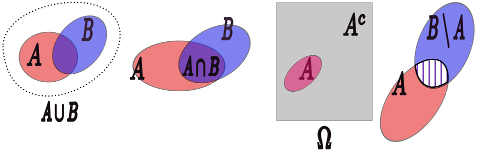
Une **partie** (= sous-ensemble) de Ω.
L'évènement $A \subset \Omega$ est réalisé si l'élément $\omega \in A$.

- ⋆ $A =$« Le premier joueur perd » $= \{(i,j) : i < j\}$
- ⋆ $\emptyset =$ ensemble vide (évènement « impossible »).



Opérations sur les ensembles

- **Union** : $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A$ **ou** $\omega \in B\}$
- **Intersection** : $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \ \omega \in A$ **et** $\omega \in B\}$
- **Complémentaire** : $A^c = \{\omega \in \Omega : \ \omega \notin A\}$ (non A)
- **Complémentaire de A dans B** : $B \setminus A = B \cap (A^c)$.



- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- lois de Morgan :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \ ; \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Univers discret

- Ω **dénombrable** :indexable par une partie de $\mathbb{N}$,

$$\Omega = \{\omega_i \ : \ i \in I\}, \quad I \subset \mathbb{N},\ \omega_i \neq \omega_j \text{ si } i \neq j.$$

ex : ensemble fini, entiers pairs, $\mathbb{N}$, rationnels, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ldots$
contre-ex : $\mathbb{R}$ (nombres réels).

- $\mathcal{P}(\Omega)$: ensemble de toutes les sous parties de Ω
ex : $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(\Omega) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\{0, 1\}\big\}$.
- Si $\mathrm{Card}(\Omega) = n$, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.

Ensemble $\mathcal{A}$ des évènements considérés pour l'analyse probabiliste :

- **Rappel :** $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
- Convention **pour Ω discret** (fini ou dénombrable) :

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Notations $\sum_{i\in\mathbb{N}}, \bigcup_{i\in\mathbb{N}}$

- **Somme dénombrable** ($a_i \geq 0$ **pour tout** i) :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = a_0 + a_1 + \cdots \ = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Une somme peut être

  - égale à $+\infty$ (« infinie »)
  - finie ($< \infty$) avec des a_i tous > 0, ex : $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} = 2$.

- **Union dénombrable** : $A_i \subset \Omega$ pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_0 \cup A_1 \cup \cdots = \{\omega : \exists i \in \mathbb{N} : \omega \in A_i\} \subset \Omega$$

- On peut aussi noter $\bigcup_{i\in I}$ ou $\sum_{i\in I}$ pour I un ensemble dénombrable.

Probabilité discrète (Ω discret)

Ω un univers dénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Quantifier la « vraisemblance » d'un évènement $A \in \mathcal{A}$?

Probabilité : définition

Une **probabilité** $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{A}$ est une **fonction** $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, (**définie sur les évènements**), vérifiant

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour toute suite d'évènements **disjoints**, $(A_i \cap A_j = \emptyset)$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

- *Ex* : Ω fini, $\mathbb{P} : \ B \mapsto \mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card } B}{\text{Card } \Omega}$ (probabilité uniforme)
- **Espace probabilisé :** données du triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Propriétés d'une probabilité

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

- $\star$ $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \cup \emptyset) \overset{\text{car } \emptyset \cap \emptyset = \emptyset}{=} \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset).$

$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$

- $\star$ $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

- $\star$ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A).$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

- $\star$ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + [\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)].$

Caractérisation d'une proba discrète

Que doit on savoir sur $\mathbb{P}$ pour la connaître entièrement ?

- $\Omega = \{\omega_i, i \in I \subset \mathbb{N}\}$. On se donne des

$$p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \; ; \quad \text{tels que } \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1$$

Alors on connaît $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i : \omega_i \in A} \{\omega_i\} \Big)$$

$$\overset{\text{évènements disjoints}}{=} \sum_{i : \omega_i \in A} \mathbb{P}\{\omega_i\} = \sum_{i : \omega_i \in A} p_i$$

Une proba $\mathbb{P}$ sur Ω (discret), est entièrement déterminée par les $\mathbb{P}\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$.

Exemple : Pile ou face. temps du 1^{er} succès

$$\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \omega_i = i, \text{ on se donne } p_i = 2^{-i}$$

(nombre de tentatives successives avant le premier pile).

- On a $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.
- On peut calculer $\mathbb{P}(A)$, pour tout évén^t A, grâce aux p_i,

ex :

- A : évènement « premier 'pile' avant le $3^{\text{ème}}$ coup inclus ».

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\{1, 2, 3\} = p_1 + p_2 + p_3 = 7/8$$

- B : « Pile seulement après le $4^{\text{ème}}$ coup »

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c) = 1/8.$$

Conditionnement

- Exemple : **diagnostic (test) médical.**
- $\Omega = \{$(sain,positif), (sain, négatif), (malade, positif), malade, négatif)$\}$;
- $\mathbb{P}$ donnée par le tableau.

test \ état réel	malade	sain
positif	$8/100$	$2/100$
négatif	$1/100$	$89/100$

(Répartition des cas dans la population testée)

- Probabilité d'être malade **sachant que** testé positif ?

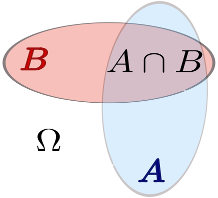
Probabilité conditionnelle

$B \subset \Omega$, $\mathbb{P}(B) \neq 0$, fixé.

- Nouvelle probabilité « **sachant B** » : « $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ »
  - Décrit la vraisemblance de $A \cap B$, sachant B.
  - $\mathbb{P}(B \mid B) = 1$.

déf : probabilité conditionnelle sachant B

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad (A \subset \Omega)$$



- **ex** : test médical. Vérifiez : $\mathbb{P}($ malade $\mid$ positif $) = 8/10$.

Évènements indépendants

idée : B ne 'dit' rien sur A : $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$

déf : A et B sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

rem : alors, $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$.

déf : $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants si

pour tout sous ensemble $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

contre-ex : $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ (dé), proba uniforme : $p_i = 1/6$,
$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 5, 6\}$.
On a $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, **Mais :**
$\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, donc A, B, C pas indépendants.

Conclusion

- Nous avons vu : le vocabulaire de base des probabilités discrètes,
  - Généralisable au cas continu (Semaine prochaine)
- Prochaine séance : Variables aléatoires discrètes.