Plan du cours de probabilités

Semaine 3

- Probabilités discrètes
- Variables et vecteurs aléatoires discrets
- Espérance, espérance conditionnelle

Semaine 4

- Indépendance, variance, covariance
- Variables aléatoires continues
- Vecteurs aléatoires continus

Anne Sabourin

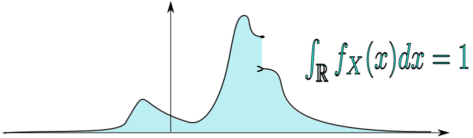
Cadre continu : définitions et exemples

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction (valeurs non dénombrables), $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: espace probabilisé « quelconque ».
- On s'intéresse à $\{X \in [a, b]\}$ $(= X^{-1}[a, b])$ pour $a \le b \in \mathbb{R}$
- X **est une variable aléatoire (tout court) si** $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\{X \in [a, b]\} \in \mathcal{A} \quad (\textit{ie}, \text{ est un évènement})$$

- En pratique : « toujours » vrai.
- Une **Densité de probabilité** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$



(un « histogramme »)

Probabilités

Variable aléatoire continue

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire.

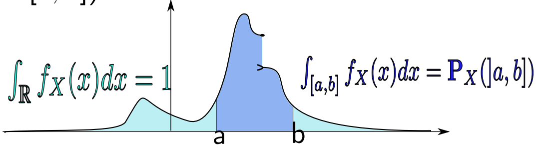
déf : X est continue si

« elle admet une densité de probabilité f », c'est-à-dire, s'il existe une densité f, telle que

$$\mathbb{P}_X([a,b]) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$\mathbb{P}_X$: « loi de X » : probabilité sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{P}(X \in [a,b]) =$ aire sous la courbe de f entre a et b.



Exemple : v.a. uniforme sur $[A, B]$

$A, B \in \mathbb{R}, \; A < B$

déf : X est « uniformément distribuée sur $[A, B]$ »

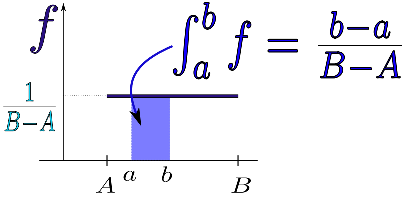
(on écrit $X \sim \mathcal{U}_{[A,B]}$) si

$$\forall a \leq b \in [A, B]\,, \quad \mathbb{P}_X([a, b]) = \frac{b - a}{B - A}$$

(Alors $\mathbb{P}_X([A, B]) = 1$)

Densité

$$f(x) = \frac{1}{B - A} \mathbb{1}_{[A,B]}(x)\ ;$$



Exemple : loi normale

- Une v.a. réelle X suit une « loi normale standard » (ou « loi gaussienne » si elle admet pour densité

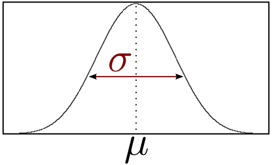
$$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On écrit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- Une v.a. Y suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si

$$Y \overset{\text{loi}}{=} \mu + \sqrt{\sigma^2} X \,, \quad \text{où } X \sim \mathcal{N}(0, 1) \,.$$

On écrit $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



Espérance

- Rappel : Si X est discrète et sommable,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \mathbb{P}_X\{x_i\}$$

Cas continu

Une v.a. continue X admettant f comme densité est *intégrable* si

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \, f(x) \, \mathrm{d}x < \infty$$

Dans ce cas, l'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, \mathrm{d}x$$

- Les propriétés de l'espérance discrètes sont encore vraies (linéarité, *etc*...)

Exemples de calculs d'espérance

(i) : Loi uniforme $X \sim \mathcal{U}_{[A,B]}$: $f(x) = \frac{1}{B-A}\mathbb{1}_{[A,B]}(x)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} x\,\frac{1}{B-A}\mathbb{1}_{[A,B]}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{[A,B]} \frac{x}{B-A}\,\mathrm{d}x\\ &= \cdots\\ &= \frac{B+A}{2}\end{aligned}$$

(i) : Loi normale : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- $\mu = 0$: $xf(x) \propto x\, e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$: impaire, $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- μ quelconque : $X = \mu + \sigma N$, N : normale standard,

$$\mathbb{E}(X) = \mu + \sigma\mathbb{E}(N) = \mu$$

Espérance d'une transformée

X une v.a.continue, f sa densité.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que

- $g(X) \geq 0$ (« $g(x)$ est positive ») si $\mathbb{P}(g(X) \geq 0) = 1$.
- « $g(X)$ est intégrable » si $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| f(x) \, \mathrm{d}x < \infty$

déf : Espérance de $g(X)$

Si $g(X)$ est positive ou intégrable, l'espérance de $g(X)$ est

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \, \mathrm{d}x.$$

- **rem** : En posant $Y = g(X)$, Y n'est pas forcément continue !
  ex : $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}, \qquad g(X) = \mathbb{1}_{[0,1/2]}(X)$.
  $g(X)$ est discrète : Bernoulli de paramètre $(1/2)$!

Variance

Comme dans le cas discret :

- Une v.a. continue de densité f est dite de *carré intégrable* si

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Pour une v.a. X de carré intégrable, de densité f,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- l'identité

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2$$

reste valide dans le cas continu.

Variance d'une variable Gaussienne

- Si N : loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$, on admet que

$$\mathrm{Var}(N) = 1$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, *i.e.* $X = \mu + \sigma N$:
  - On a vu que $\mathbb{E}(X) = \mu$.
  - $\mathrm{Var}(X)$? $\quad X - \mathbb{E}(X) = X - \mu = \sigma N$, donc

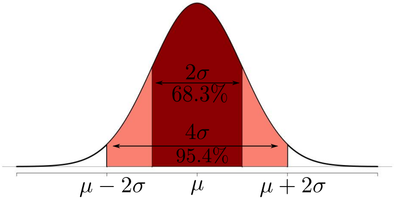
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\left((\sigma N)^2\right) = \sigma^2 \mathbb{E}\left(N^2\right) \\ &= \sigma^2 \, \mathrm{Var}(N) \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a

$$\mathbb{E}(X) = \mu\,; \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Loi normale : résumé

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a $\mu = \mathbb{E}(X)\,;\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$



- Entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$ se trouve $\simeq 68\%$ de la « masse » de probabilité.

$$\mathbb{P}\left(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma)\right] \simeq 0.68$$

- Entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$ se trouve $\simeq 95\%$ de la « masse » de probabilité.

$$\mathbb{P}\left(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)\right] \simeq 0.95$$