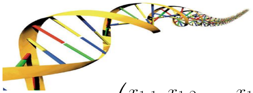
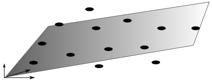
Anne Sabourin

Analyse des données et algèbre linéaire





$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,p} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{x}_1^\top \ldots, \mathbf{x}_n^\top\right)^\top$$

- Machine-Learning : Une donnée $\mathbf{x}_i$ = un ensemble de 'features' (caractères) d'un individu i

$$\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,p})$$

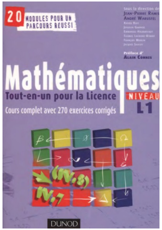
ex : $x_i = (\text{âge}_i, \text{taille}_i, \text{poids}_i, \text{revenu}_i, \text{loyer}_i)$

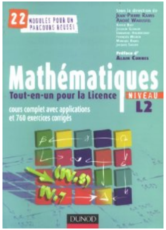
- ≪ les données ≫ = une (grande) matrice.

Rôle clé de l'algèbre linéaire.

Objectifs du cours d'algèbre

- **Vérifier** que que les notions de bases abordées sont connues.
- Si certains points posent problème, servez vous du cours comme **guide de lecture** pour travailler, par exemple avec





Plan du cours d'algèbre

Anne Sabourin

Semaine 1

- Espaces vectoriels réels
- Applications linéaires
- Matrices

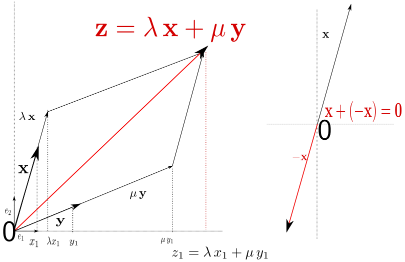
Semaine 2

- Produit scalaire, projections, interprétations géométriques
- Réductions de matrices

Espace vectoriel réel

Un espace vectoriel est une famille E d'objets (vecteurs, matrices, fonctions, ...) que l'on peut **additionner** entre eux et **multiplier** par un scalaire (= un nombre réel ou complexe). La famille doit contenir un « **vecteur nul** » noté 0_E ou 0.

Par exemple, le plan : $E = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.



Anne Sabourin

Espace vectoriel réel

Un espace vectoriel est une famille E d'objets (vecteurs, matrices, fonctions, ...) que l'on peut **additionner** entre eux et **multiplier** par un scalaire (= un nombre réel ou complexe). La famille doit contenir un « **vecteur nul** » noté 0_E ou 0.

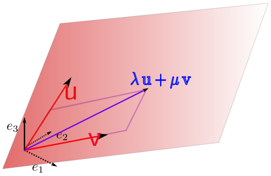
- Le **vecteur nul** '0' vérifie, pour tout $x \in E$, $x + 0 = 0 + x = x$,
- Tout élément x a un opposé noté $-x$, tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- **ex :**
  - Dans ce cours, $E = \mathbb{R}^p$, « dimension finie ». (ex : espace de caractéristiques d' individus).
  - Hors programme : Espaces de dimension infinie (ex : RKHS)

Anne Sabourin

Espace vectoriel engendré par une famille finie $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_K) \subset E$

Ensemble V des combinaisons linéaires des $\mathbf{u}_i$:

$$V = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K) = \left\{ \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbf{u}_i \ : \quad \lambda_1, \dots, \lambda_K \in \mathbb{R} \right\}$$



V est un **sous-espace vectoriel** de E, *i.e.* $V \subset E$ et V est **stable par combinaisons linéaires** :

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda y \in F\,. \quad (\text{ exo : vérifiez-le !})$$

Sous-espaces : exemples

- Le sous-espace engendré par $\mathbf{0}$ est $\{\mathbf{0}\}$. Un vecteur engendre une droite, deux vecteurs engendrent un plan.
- Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous espace vectoriel (exercice).
- **Exercice** : Si $E = \mathbb{R}^n$, vérifiez que

$$F = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

est un sous espace vectoriel de E.
Vérifiez également que

$$G = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

n'en est pas un.

Dimension, rang

- E est de **dimension finie** s'il existe une famille finie $\mathcal{U} = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k})$ qui engendre E.
- La **dimension** $\dim(F)$ d'un SEV $F \subset E$ est le nombre minimal de vecteurs requis pour engendrer F.
  ex : pour $F = E = \mathbb{R}^p$, $\dim(\mathbb{R}^p) = p$.
- **Rang** d'une famille de vecteurs :
$$\mathrm{rang}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_K) := \dim \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_K) \le K\,.$$
- si $F \subset E$ est un sous espace de E, $\dim(F) \le \dim(E)$.

Familles libres ou liées

famille liée

$\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K)$ de E est **liée** ou **linéairement dépendante** s'il existe une combinaison linéaire nulle avec au moins un coefficient non nul :

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_K) \neq (0, \dots, 0) \text{ tels que } \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_K \mathbf{u}_K = 0 \, .$$

- Une famille est **libre** ou **linéairement indépendante** si ... elle n'est pas liée.

ex : dans $\mathbb{R}^3$:

- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est libre
- $(1,0,0),(0,1,0),(4,5,0)$ est liée.

rang et dépendance linéaire

Si $\mathcal{U}$ est libre, $\mathrm{rang}(\mathcal{U}) = K$, sinon $\mathrm{rang}(\mathcal{U}) < K$

Bases

$\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_K) \subset E$ est appelée **base** de E si elle est **libre** et si elle **engendre** E (*i.e.*, si $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) = E$).

- Si $\dim(E) = p$, les bases de E ont toutes p éléments.
- Dans une base $\mathcal{U}$ donnée, pour $x \in E$, il existe une **unique** combinaison linéaire des $\mathbf{u_i}$ telle que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{u}_i .$$

x_i est la i^{eme} coordonnée de **x dans la base** $\mathcal{U}$.

⚠ $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{u}_i$, ne veut pas dire $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$.
Les coordonnées x_i **dépendent de la base choisie**.

- **ex** : dans la base $\mathcal{U} = ((0,1),(1,1))$ de $\mathbb{R}^2$, que vaut $1\,\mathbf{u}_1 + 2\,\mathbf{u}_2$? comparer avec le vecteur $(1,2)$.

Applications linéaires

déf : $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^n$. Une fonction

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est une **application linéaire** si

- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
- $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$

- Si $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une base de $E = \mathbb{R}^p$, f est déterminée par l'image de $\mathcal{U}$: $\{f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_p)\}$.
- En effet, si $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{u}_i$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots x_p \mathbf{u}_p) \\ &= x_1 f(\mathbf{u}_1) + \cdots x_p f(\mathbf{u}_p) \qquad \text{par linéarité.} \end{aligned}$$

Composition d'applications linéaires

- Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$, linéaires.
- on définit la *composée de f par g*

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\mapsto g[f(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ f"] & F \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Exo : vérifier que la composée $g \circ f$ est encore une application linéaire, cette fois de E dans G.

Image, surjectivité

Soit $g : E \to F$, linéaire.

Image de g

$$\operatorname{Im} g = \{y \in F \ : \ \exists x \in E, y = g(x)\}$$

$\operatorname{Im} g$ est un SEV de F (vérification : exercice).

Rang de g : dimension de l'image

$$\operatorname{rang}(g) = \dim(\operatorname{Im} g)$$

déf : g est **surjective** si

$$\operatorname{Im} g = F.$$

prop : $\operatorname{rang} g = \dim F \Rightarrow \operatorname{Im} g = F$, *i.e.* g surjective.

Noyau, injectivité

Anne Sabourin

$g : E \to F$ linéaire

Noyau de g

$$\operatorname{Ker} g = \{x \in E \ : \ g(x) = 0\}$$

$\operatorname{Ker} g$ est aussi un SEV de E (exercice).

déf : g est **injective** si

$$\{g(x) = g(x')\} \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$

prop : g injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} g = \{0\}$

Bijections, Inverse

déf : g est bijective si

g est injective et surjective.
On a alors : $\forall y \in F,\ \exists\, !x \in E$ tel que $y = g(x)$.

$g : E \to F$ bijective, linéaire.

- g envoie toute base de E sur une base de F, donc E et F ont la même dimension

inverse de g (si g bijective) : l'application

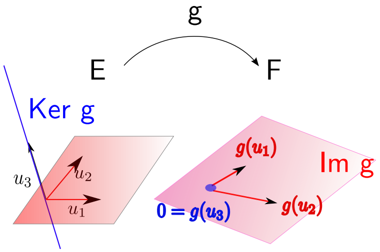
$$g^{-1} : F \mapsto E$$
$$y \mapsto x \text{ tel que } g(x) = y$$

- g^{-1} est bien définie car x existe et est unique.
- g^{-1} est linéaire, bijective.
- $g \circ g^{-1} = \mathbf{I}_F$ (application identité de F, $y \mapsto y$)
- $g^{-1} \circ g = \mathbf{I}_E$ (application identité de E, $x \mapsto x$)

Théorème du rang

Dimension de l'espace de départ =
dimension de l'image + dimension du noyau

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Im} g) + \dim(\operatorname{Ker} g)$$



conséquence : si $\dim E = \dim F$ (par exemple si $E = F$)

g injective ⇔ g surjective ⇔ g bijective.