Plan du cours de probabilités

Probabilités

Indépendance, covariance

Indépendance : définition et premières propriétés

Autre caractérisation de l'indépendance : Espérance d'un produit

Variance, matrice de covariance

Semaine 3

- Probabilités discrètes
- Variables et vecteurs aléatoires discrets
- Espérance, espérance conditionnelle

Semaine 4

- Indépendance, variance, covariance
- Variables aléatoires continues
- Vecteurs aléatoires continus

Anne Sabourin

Indépendance de variables aléatoires

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \to \mathcal{X} = \prod_1^d \mathcal{X}_i$ un vect. aléatoire discret.

def : Les variables $X_1, \dots, X_d$ sont **indépendantes** si pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{X}$, les **évènements** $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_d = x_d\}$, sont indépendants.

- **prop :** $(X_1, \dots, X_d)$ sont indépendantes, si et seulement si **leur loi jointe est le produit des lois marginales**, *i.e.*

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\{(x_1, \dots, x_d)\} = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}_{X_i}\{x_i\}, \quad \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{X}.$$

Attention : en général,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\} &= \mathbb{P}_{X|Y}(x|y)\, \mathbb{P}_Y\{y\} \\ &\neq \mathbb{P}_X\{x\}\, \mathbb{P}_Y\{y\} \quad \text{si non indépendantes} \end{aligned}$$

Anne Sabourin

Exemple : $d = 2$, couple (X, Y)

(i) $X(\omega) = \text{signe}(\omega - 3)\,, \quad Y(\omega) = (\omega - 3)^2. \quad \mathbb{P}_{(X,Y)}$:

$X \backslash Y$	0	1	4	9
-1	0	$1/6$	$1/6$	0
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

(*c.f.* vidéo 2, « marginales, jointes, condition^{nelles} : exemple »)

on a $\mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(-1,0)\}) = 0$ mais $\mathbb{P}_X\{-1\}\mathbb{P}_Y\{0\} = 1/3.1/6 = 1/18$

Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

(i) Autre exemple :

$X \backslash Y$	0	1
-1	$2/9$	$1/9$
1	$4/9$	$2/9$

exercice : vérifiez que X et Y sont indépendantes.

Indépendance et espérance

X, Y v.a. discrètes,

propriété caractéristique de l'indépendance

X et Y sont indépendantes, si et seulement si :
pour toutes fonctions $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telles que $f(X)$ et $g(Y)$ soient sommables, on a

$$\mathbb{E}\left(f(X)g(Y)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)\mathbb{E}\left(g(Y)\right).$$

***idem* avec d variables et d fonctions**

Anne Sabourin

Anne Sabourin

Indépendance et espérance

X, Y v.a. discrètes,

propriété caractéristique de l'indépendance

X et Y sont indépendantes, si et seulement si :
pour toutes fonctions $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telles que $f(X)$ et $g(Y)$ soient sommables, on a

$$\mathbb{E}\left(f(X)g(Y)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)\mathbb{E}\left(g(Y)\right).$$

***idem* avec d variables et d fonctions**

preuve (cas où $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont finis) Si X et Y indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(X)g(Y)\right) &= \sum_{x,y} f(x)g(y)\mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\} \quad \text{(par définition)} \\
&= \sum_x \sum_y f(x)g(y)\mathbb{P}_X\{x\}\mathbb{P}_Y\{\{y\} \quad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_x f(x)\mathbb{P}_X\{x\} \sum_y g(y)\mathbb{P}_Y\{y\} \\
&= \mathbb{E}\left(f(X)\right)\mathbb{E}\left(g(Y)\right). \qquad \text{Réciproque : admise.}
\end{aligned}$$

Moment d'ordre 2 et variance

Caractérisation de la dispersion autour de la moyenne

- X est de **de carré sommable** (« a un moment d'ordre 2 ») si
$$\sum_i x_i^2 \mathbb{P}_X(x_i) < \infty$$
Alors, X est sommable (car $|x| \leq (x^2+1)/2$)

Variance d'une v.a. de carré sommable

La variance de X est la moyenne de ses écarts quadratiques à la moyenne
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

- Idée : grande variance $\sim$ grands écarts (en moyenne) autour de la moyenne.

Expression de la variance

Si X est de carré sommable , on a

$$\mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}\left(\mathbf{X}^2\right) - \left(\mathbb{E}(\mathbf{X})\right)^2$$

preuve $(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2$,
Remarquer que $\mathbb{E}(X)$ est constante. Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X\mathbb{E}(X)\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2
\end{aligned}$$

Probabilités

Anne Sabourin

Espérance d'un vecteur aléatoire

$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$, discret. On suppose chacun des X_i sommable.

déf : l' Espérance du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ est

le vecteur

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_d)).$$

Covariance d'un couple de v.a.

but : résumer les écarts au carré simultanés autour des moyennes

Soient X et Y des v.a. de carré sommable.

Inégalité de Cauchy-Schwarz (admise)

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|X|^2)}\sqrt{\mathbb{E}(|Y|^2)}$$

ceci justifie la définition suivante, pour X et Y de carré sommable

La covariance de X et Y est :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)\left(Y - \mathbb{E}(Y)\right)\right]$$

...la « moyenne du produit des écarts ».

Covariance de variables indépendantes

propriété utile :

Si X et Y sont de carré sommable, indépendantes ou non,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Conséquence : (*c.f.* caractérisation de l'indépendance)

Si X et Y sont de carré sommable, indépendantes,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0\,.$$

Attention : réciproque fausse.

Deux v.a. X et Y de covariance nulle (on dit « décorrélées ») ne sont pas nécessairement indépendantes.

ex : $X = -1, 0$ ou 1 avec proba $1/3$, et $Y = X^2$.

Matrice de covariance d'un vecteur aléatoire

$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire, chaque X_i de carré sommable.

- **Matrice de covariance** Σ du vecteur $\mathbf{X}$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_1,X_d) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_d,X_1) & \ldots & & \mathrm{Var}(X_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}$$

- En identifiant $\mathbf{X}$ à une matrice colonne :

$$\Sigma = \mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X})\big)\big(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X})\big)^\top\Big]$$

où l'espérance d'une matrice est définie terme à terme (comme pour un vecteur).

Propriétés d'une matrice de variance-covariance Σ

- Σ est **symétrique**.
- Conséquence : Σ est **diagonalisable en base orthonormée**
- Σ est « **positive** », c'est à dire
  - Toutes ses valeurs propres sont positives ,
  - Pour toute matrice colonne $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y} \geq 0$$

preuve considérons $\mathbf{X}$ comme une matrice colonne. On suppose $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = 0$.
Pour tout $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}^\top \mathbf{X} \in \mathbb{R}$ et $(\mathbf{y}^\top \mathbf{X})^2 \geq 0$. Donc

$$0 \leq \mathbb{E}\left[(\mathbf{y}^\top \mathbf{X})^2\right] = \mathbb{E}\left[(\mathbf{y}^\top \mathbf{X})(\mathbf{y}^\top \mathbf{X})^\top\right] = \mathbb{E}\left[(\mathbf{y}^\top \mathbf{X}\mathbf{X}^\top \mathbf{y}\right] = \mathbf{y}^\top \mathbb{E}(XX^\top)\mathbf{y}$$
$$= \mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y}$$

- Si Σ est **inversible**, $\mathbf{y}^\top \Sigma \mathbf{y} > 0$ pour toute matrice colonne $\mathbf{y}$.

Conclusion

- Cas discret traité.
- Deux derniers cours : cas continu