Probabilités

Espérance, espérance conditionnelle

Anne Sabourin

Plan du cours de probabilités

Semaine 3

- Probabilités discrètes
- Variables et vecteurs aléatoires discrets
- Espérance, espérance conditionnelle

Semaine 4

- Indépendance, variance, covariance
- Variables aléatoires continues
- Vecteurs aléatoires continus

Espérance : définition intuitive, cadre

$X : \Omega \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ une v.a. discrète. On tire x au hasard selon $\mathbb{P}_X$.

Combien obtient-on « en moyenne » ?

Convention : v.a. « positive ou sommable »

- X est **positive** si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, *i.e.* $\forall x \in \mathcal{X}$, $x\,\mathbb{P}_X\{x\} \geq 0$.
- **sommable** si

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} |x| \mathbb{P}_X\{x\} \text{ est finie.} \quad \text{(Attention : \textbf{valeurs absolues}!)}$$

Espérance : définition intuitive, cadre

$X : \Omega \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ une v.a. discrète. On tire x au hasard selon $\mathbb{P}_X$.

Combien obtient-on « en moyenne » ?

Convention : v.a. « positive ou sommable »

- X est **positive** si $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, *i.e.* $\forall x \in \mathcal{X}$, $x\,\mathbb{P}_X\{x\} \geq 0$.
- **sommable** si

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} |x| \mathbb{P}_X\{x\} \text{ est finie.} \quad (\text{Attention : } \textbf{valeurs absolues}\,!)$$

De même, si $\mathcal{X}$ discret, quelconque et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$,

- $g(X)$ est **positive** si $\mathbb{P}(g(X) \geq 0) = 1$, *i.e.* $\forall x \in \mathcal{X}$, $g(x)\,\mathbb{P}_X\{x\} \geq 0$.
- **sommable** si $\sum_{x \in \mathcal{X}} |g(x)| \mathbb{P}_X\{x\}$ est finie.

Espérance d'une v.a. discrète

Combien obtient-on « en moyenne » ?

Idée : prendre la moyenne pondérée par les $\mathbb{P}_X\{x\}$.

def : Espérance, espérance d'un transformée

$X : \Omega \to \mathcal{X}$ une v.a. discrète, $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.
On suppose X est à valeurs réelles, positive ou sommable (*resp.* $g(X)$ positive ou sommable).

L'espérance de X (*resp.* $g(X)$) est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,\mathbb{P}_X\{x\}$$

$$\left(\textit{resp.} \quad \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in\mathcal{X}} g(x)\,\mathbb{P}_X\{x\} \quad\right)$$

Exemple : dé

- $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$, fini, donc X est évidemment sommable.
- Dé équilibré :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i\mathbb{P}_X\{i\} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

- Dé faussé :

Exemple : dé

- $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$, fini, donc X est évidemment sommable.
- Dé équilibré :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i\mathbb{P}_X\{i\} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

- Dé faussé :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_X\{x\}$	$1/12$	$2/12$	$3/12$	$2/12$	$1/12$	$3/12$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{6} i\mathbb{P}_X\{i\} \\ &= 1.\frac{1}{12} + 2.\frac{2}{12} + 3.\frac{3}{12} + 4.\frac{2}{12} + 5.\frac{1}{12} + 6.\frac{3}{12} \\ &= 3.75\end{aligned}$$

Anne Sabourin

Changement de variable : exemple

X : dé équilibré ; $g(X) = -10\,\mathbb{1}_{\{1,\dots,5\}}(X) + 20\,\mathbb{1}_{\{6\}}(X)$

$$\text{où} \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(fonction indicatrice)}$$

- En utilisant **uniquement** $\mathbb{P}_X$ et la définition de $\mathbb{E}\,(g(X))$:

$$\mathbb{E}\,(g(X)) = \sum_{i=1}^{6} g(x_i)\underbrace{\mathbb{P}_X\{i\}}_{p_i=\frac{1}{6}}$$
$$= -10\,p_1 + \cdots + -10\,p_5 + 20\,p_6 = -5.$$

Changement de variable : exemple

X : dé équilibré ; $g(X) = -10\,\mathbb{1}_{\{1,\dots,5\}}(X) + 20\,\mathbb{1}_{\{6\}}(X)$

où $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (fonction indicatrice)

- En utilisant **uniquement** $\mathbb{P}_X$ et la définition de $\mathbb{E}(g(X))$:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{6} g(x_i)\underbrace{\mathbb{P}_X\{i\}}_{p_i=\frac{1}{6}}$$

$$= -10\,p_1 + \dots + -10\,p_5 + 20\,p_6 = -5.$$

- **En posant** $Y = g(X)$: $\mathbb{P}_Y\{-10\} = 5/6$, $\mathbb{P}_Y\{20\} = 1/6$,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(\mathbf{Y}) = -10\,\mathbb{P}_Y\{-10\} + 20\,\mathbb{P}_Y\{20\} = -5$$

Théorème de changement de variable

X une v.a. discrète, $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g(X)$ positive ou sommable.

$$\text{Alors } \mathbb{E}\left(g(X)\right) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \, \mathbb{P}_Y\{y\}$$

où l'on a posé $Y = g(X)$ et $\mathbb{P}_Y$ la loi de Y.

preuve. $\mathcal{X} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} g^{-1}\{y\}$ (disjointe) : car $x \in g^{-1}\{g(x)\}$ et « $x \in g^{-1}\{y_i\} \cap g^{-1}\{y_j\}$ » est impossible.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(g(X)\right) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) \mathbb{P}_X\{x\} \quad \text{(par définition)} \\
&= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x \in g^{-1}\{y\}} \underbrace{g(x)}_{=y} \mathbb{P}_X\{x\} \quad (\textit{c.f.} \text{ ci-dessus}) \\
&= \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \underbrace{\sum_{x \in g^{-1}\{y\}} \mathbb{P}_X\{x\}}_{\mathbb{P}_Y\{y\}}
\end{aligned}$$

Propriétés de l'espérance 1 : linéarité

prop : Si X, Y sont deux v.a. discrètes, chacune sommable, et si $a, b \in \mathbb{R}$, (ou si X, Y, a, b sont ≥ 0), alors,
$aX + bY$ est sommable et

$$\mathbb{E}(a\,X + b\,Y) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Propriétés de l'espérance 1 : linéarité

Anne Sabourin

prop : Si X, Y sont deux v.a. discrètes, chacune sommable, et si $a, b \in \mathbb{R}$, (ou si X, Y, a, b sont ≥ 0), alors, $aX + bY$ est sommable et

$$\mathbb{E}(a\,X + b\,Y) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX + bY) &= \sum_{i,j}(ax_i + by_j)\mathbb{P}_{(X,Y)}(x_i, y_j) \\
&= a\sum_i x_i \sum_j \mathbb{P}_{(X,Y)}(x_i, y_j) + b\sum_j y_j \sum_i \mathbb{P}_{(X,Y)}(x_i, y_j) \\
&= a\sum_i x_i\,\mathbb{P}_X(x_i) + b\sum_j y_j\,\mathbb{P}_Y(y_j) \\
&= a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

Preuve rigoureuse si $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ finis, encore vrai par passage à la limite (admis)

linéarité, exemple : loi binomiale

Loi binomiale : n jeux de pile ou face $(0,1)$, somme des résultats.

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \,, \qquad \text{où } X_i : \text{Bernoulli}(p)$$

- $\mathbb{E}(S)$?

linéarité, exemple : loi binomiale

Loi binomiale : n jeux de pile ou face $(0, 1)$, somme des résultats.

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \,, \qquad \text{où } X_i : \text{Bernoulli}(p)$$

- $\mathbb{E}(S)$?
- Par linéarité, $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$
- Espérance d'une Bernoulli : $E(X_i) = p.1 + 0.(1-p) = p$. $(\dots$ en moyenne, on gagne $p)$
- Conclusion

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np \,.$$

Propriétés de l'espérance 2 : monotonie

L'espérance est 'monotone'

1. Si $X \geq 0$ (positive), $\mathbb{E}(X) \geq 0$
2. Si $X \geq Y$ (*i.e.* $X - Y$ positive), Xet Y sommables, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$

Propriétés de l'espérance 2 : monotonie

L'espérance est 'monotone'

1. Si $X \geq 0$ (positive), $\mathbb{E}(X) \geq 0$
2. Si $X \geq Y$ (*i.e.* $X - Y$ positive), Xet Y sommables, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$

preuve :

1. L'hypothèse signifie : $\forall i, x_i p_i \geq 0$. Donc $\mathbb{E}(X) = \sum x_i\, p_i \geq 0$.
2. On pose $g(X, Y) = (Y - X)$.
   $g(X, Y)$ est positive, *i.e.* $g(x, y)\mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x, y)\} \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) &\overset{\text{linéarité}}{=} \mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(g(X, Y)) \\ &= \sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \underbrace{g(x, y)}_{\geq 0}\, \mathbb{P}(\omega) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Une inégalité classique

Soit X une v.a. discrète, sommable. on a

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}\left(|X|\right)$$

exemple pile ou face (-1,1) : $\mathbb{P}_X(-1) = 1/2$, $\mathbb{P}_X(1) = 1/2$:

- $|\mathbb{E}(X)| = |-1/2 + 1/2| = 0$
- $\mathbb{E}(|X|) = 1/2\,|-1| \; + \; 1/2\,|1| = 1.$

preuve : inégalité triangulaire pour les valeurs absolues

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X)| &= \left| \sum_i x_i \, \mathbb{P}_X\{x_i\} \right| \\ &\leq \sum_i |x_i| \, \mathbb{P}_X\{x_i\} \\ &= \mathbb{E}\left(|X|\right) \end{aligned}$$

Espérance conditionnelle

On observe $X = x$. Qu'attendre de Y en moyenne ?

Rappel : loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ (vidéo 2) :

$$\mathbb{P}_{Y|X}(\{y\}|\{X = x\}) = \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\}}{\mathbb{P}_X\{x\}}$$

déf : Espérance conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$

« Espérance de Y » calculée avec la loi conditionnelle

$$\mathbb{E}(Y \mid \{X = x\}) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \mathbb{P}_{Y|X}(\{y\}|x)$$

C'est une fonction de x ! donc « l'Espérance de Y sachant X »

$E(Y|X) : \omega \mapsto E(Y|\{X = X(\omega)\})$ est une variable aléatoire.

Espérance conditionnelle et espérance : exemple

On tire une boule au hasard parmi 2 blanches et 8 noires.

- Si « noire », on perd 10.
- Si « blanche », on joue au dé. On gagne 20$\times$ le dé obtenu.

Doit on jouer ? (**Combien gagne-t-on en moyenne ?**)

Espérance conditionnelle et espérance : exemple

On tire une boule au hasard parmi 2 blanches et 8 noires.

- Si « noire », on perd 10.
- Si « blanche », on joue au dé. On gagne $20\times$ le dé obtenu.

Doit on jouer ? (**Combien gagne-t-on en moyenne ?**)

$X = \{0, 1\}, \mathbb{P}_X\{1\} = 2/10$.
$Y =$ gain à la fin de la partie.

- Sachant $\{X = 0\}$: $\mathbb{E}(Y|\{X = 0\}) = -10 * 1 = -10$.
- Sachant $\{X = 1\}$: $\mathbb{E}(Y|\{X = 1\}) = 20 * 3.5 = 70$.

Moyenne des deux espérances , pondérée par les $\mathbb{P}_X\{i\}$

$$\mathbb{E}(Y) = 0.8(-10) + (0.2 * 70) = -8 + 14 = 6$$

On a calculé l'espérance (sous $\mathbb{P}_X$) de l'espérance conditionnelle.

Espérance conditionnelle et espérance

$\mathbb{E}\left(Y \mid X = x\right)$: étape pour calculer l'espérance $\mathbb{E}\left(Y\right)$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\}}_{\mathbb{P}_Y\{y\}}$$

Espérance conditionnelle et espérance

$\mathbb{E}\left(Y \mid X = x\right)$: étape pour calculer l'espérance $\mathbb{E}\left(Y\right)$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\}}_{\mathbb{P}_Y\{y\}}$$

$$= \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{Y|X}\Big(\{y\}|\{X = x\}\Big)\mathbb{P}_X\{x\}$$

Espérance conditionnelle et espérance

$\mathbb{E}(Y \mid X = x)$: étape pour calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} y \underbrace{\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\}}_{\mathbb{P}_Y\{y\}}$$

$$= \sum_{y\in\mathcal{Y}} y \sum_{x\in\mathcal{X}} \mathbb{P}_{Y|X}\Big(\{y\}|\{X = x\}\Big)\mathbb{P}_X\{x\}$$

$$= \sum_{x\in\mathcal{X}} \mathbb{P}_X\{x\} \underbrace{\sum_{y\in\mathcal{Y}} y\, \mathbb{P}_{Y|X}\Big(\{y\}|\{X = x\}\Big)}_{\mathbb{E}(Y \mid \{X=x\}):\ \text{fonction de } x}$$

Espérance conditionnelle et espérance

$\mathbb{E}(Y \mid X = x)$: étape pour calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{(X,Y)}\{(x,y)\}}_{\mathbb{P}_Y\{y\}} \\
&= \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{Y|X}\Big(\{y\}|\{X=x\}\Big)\mathbb{P}_X\{x\} \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_X\{x\} \underbrace{\sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, \mathbb{P}_{Y|X}\Big(\{y\}|\{X=x\}\Big)}_{\mathbb{E}(Y \mid \{X=x\}):\ \text{fonction de } x} \\
&= \mathbb{E}_X\Big(\mathbb{E}(Y \mid X)\Big)
\end{aligned}$$

- « $\mathbb{E}_X[\,\cdot\,]$ » : espérance par rapport à la loi $\mathbb{P}_X$.
- « $\mathbb{E}_X\Big(\mathbb{E}(Y \mid X)\Big)$ » signifie « $\mathbb{E}(g(X))$, avec $g(x) = \mathbb{E}(Y \mid X = x)$ »

Conclusion de la semaine

- Variables discrètes : presque terminé, reste le cas d'indépendance.
- La semaine prochaine :
  - Variables discrètes, suite et fin
  - Cas des variables continues.

Anne Sabourin