Plan du cours de probabilités

Semaine 3

- Probabilités discrètes
- Variables et vecteurs aléatoires discrets
- Espérance, espérance conditionnelle

Semaine 4

- Indépendance, variance, covariance
- Variables aléatoires continues
- Vecteurs aléatoires continus

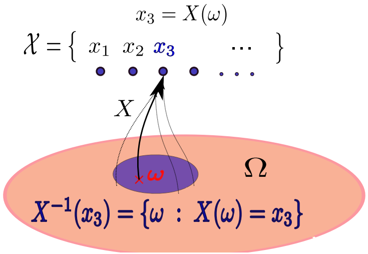
Anne Sabourin

Anne Sabourin

Variables aléatoires discrètes

- **v.a. discrète :** « quantité réelle aléatoire », X avec un nombre **fini ou dénombrable** de valeurs possibles $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$
- Une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
- **Image réciproque de $B \subset \mathbb{R}$ par X :**

$$X^{-1}(B) \overset{\text{(déf)}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} :$$



- Notation : « $X \in B$ » $= \{\omega : X(\omega) \in B)\} = X^{-1}(B)$.

v.a. discrète : définition, loi.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace de proba quelconque.

déf : une variable aléatoire discrète X est

Une fonction
$$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}, \quad (\mathcal{X} \text{ est discret})$$
$$\omega \longmapsto X(\omega),$$

telle que $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

la **Loi** $\mathbb{P}_X$ d'une v.a. discrète X est

Une probabilité discrète définie sur $\mathcal{X}$ par

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B\} = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

$\mathbb{P}_X$ déterminée par les $\mathbb{P}_X\{x_i\} = \mathbb{P}(\{X = x_i\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x_i\})$

Intérêt : on peut « oublier » Ω, travailler sur $\mathcal{X}$ directement !

Exemples : v.a. de Bernoulli et Catégorielle

- *Variable de Bernoulli* (pile ou face). Soit $p \in [0,1]$ (probabilité de succès) et $\mathcal{X} = \{0,1\}$.
  Une v.a. X est dite **de Bernoulli de paramètre** p si sa loi $\mathbb{P}_X$ (« loi de Bernoulli ») est

  $$\mathbb{P}_X\{1\} = p$$
  $$\mathbb{P}_X\{0\} = 1 - p$$

  On écrit $X \sim \mathrm{Bern}(p)$

- *Variable catégorielle :* lancer de dé à k faces : X est le résultat du lancer.

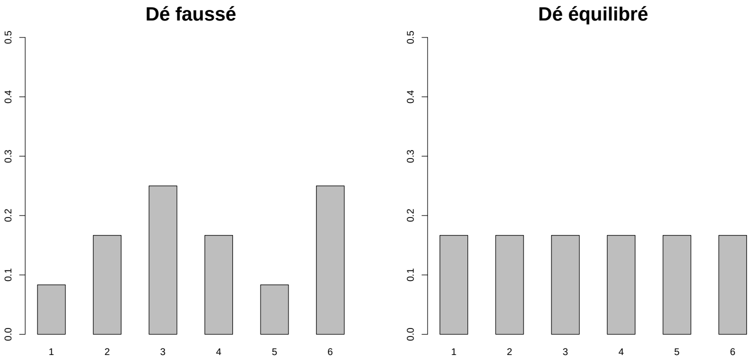
  $$\mathbb{P}_X\{i\} = \mathbb{P}(\{X = x_i\}) = p_i$$

  $$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

  X est dite **catégorielle de paramètres** $(p_1, \dots, p_k)$.

Représentation de la loi d'un v.a. : diagramme en bâtons

- Abscisse : valeurs possibles $x_i \in \mathcal{X}$ prises par X.
- hauteur des bâtons : probabilités $\mathbb{P}_X\{x_i\}$
- Somme des hauteurs $= 1$.



Vecteurs aléatoires discrets

ex : $\omega =$ client, on s'intéresse à *plusieurs* grandeurs :
$\mathbf{X}$(client) $=$ (âge, salaire, genre, profession)(client)
Notation : $\prod_{i=1}^{d} \mathcal{X}_i = \{(x_1, \dots, x_d) \; : x_i \in \mathcal{X}_i\}$.

- **Vecteur aléatoire** X **:** une fonction

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathcal{X} = \prod_{i=1}^{d} \mathcal{X}_i \qquad (\mathcal{X}_i \text{ discret})$$

$$\omega \mapsto \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_d(\omega))$$

- La **loi jointe** de $\mathbf{X}$ est la probabilité sur $\prod_{i=1}^{d} \mathcal{X}_i$ définie par

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}} : A \subset \prod_{i=1}^{d} \mathcal{X}_i \mapsto \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) = \mathbb{P}\{\mathbf{X} \in A\}$$

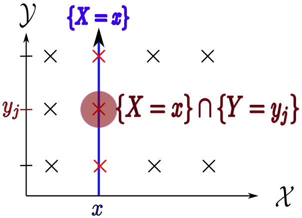
- $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ est déterminée par les quantités

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}\{(x_1, \dots, x_d)\} = \mathbb{P}\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_d = x_d\}$$

Lois marginales

- On connait $\mathbb{P}_{(X,Y)}$. **lois marginales** $\mathbb{P}_X$ **et** $\mathbb{P}_Y$?

$$\{X = x\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{X = x\} \cap \{Y = y_j\} \quad \text{(union disjointe)}$$



$$\mathbb{P}_\mathbf{X}\{\mathbf{x}\} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y_j\})$$

$$= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y_j})$$

- de même pour $\mathbb{P}_Y$

Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes.

- **Loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$:**

$$\mathbb{P}_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{B}|\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{Y} \in \mathbf{B}|\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}) \qquad (\mathbf{B} \subset \mathcal{Y})$$

- probas conditionnelles : $\mathbb{P}(Y \in B|\{X = x\}) = \frac{\mathbb{P}(\{Y \in B, X = x\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})}$

Conséquence : $\mathbb{P}_{Y|X}(B|\{X = x\}) = \dfrac{\mathbb{P}_{(X,Y)}(\{x\} \times B)}{\mathbb{P}_X\{x\}}$

- Intérêt : trouver $\mathbb{P}_Y(B)$ à partir de $\mathbb{P}_{Y|X}$ et $\mathbb{P}_X$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_Y(B) &\overset{\text{loi marg.}}{=} \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{x\} \times B) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_{Y|X}(B|\{X = x\})\mathbb{P}_X\{x\}.\end{aligned}$$

marginales, jointes, condition^{nelles} : exemple

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $\mathbb{P}$ uniforme sur Ω, signe$(a) = 1$ si $a \geq 0$,

$$X(\omega) = \text{signe}(\omega - 3)\,, \qquad Y(\omega) = (\omega - 3)^2.$$

exercice : déterminer la loi jointe du couple (X, Y), les lois marginales et les lois conditionnelles.

- loi jointe :

$X \backslash Y$	0	1	4	9
-1	0	$1/6$	$1/6$	0
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

- Loi de Y sachant $\{X = -1\}$:

y	0	1	4	9
$\mathbb{P}_Y(y \vert \{X = -1\})$	0	$1/2$	$1/2$	0

- Loi de Y sachant $\{X = 1\}$:

y	0	1	4	9
$\mathbb{P}_Y(y \vert \{X = 1\})$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

Anne Sabourin

Transformations de variables aléatoire

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_X(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
y	-1	-1	1	1	1	1

(jeu de dé)

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq 3 \\ -1 & \text{si } X \leq 2 \end{cases}$$

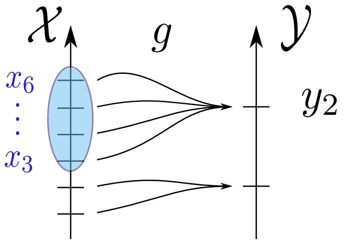
$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend left, "Y = g \circ X"] & \{1, \dots, 6\} \arrow[r, "g"] & \{-1, 1\} \end{tikzcd}$$

Loi de Y ?
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y\{-1\} &= \mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X \leq 2\}) \\ &= \sum_{\{i : x_i \leq 2\}} \mathbb{P}_X\{x_i\} \\ &= 1/6 + 1/6 = 1/3; \\ \mathbb{P}_Y\{1\} &= 2/3 \end{aligned}$$

Loi d'une transformée : cas général

Soit $X : \Omega \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$, et $Y(\omega) = g \circ X(\omega)$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend left, "Y = g \circ X"] & \mathcal{X} \arrow[r, "g"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$



Loi de la transformée $Y = g(X)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y(\{y\}) &= \mathbb{P}((g \circ X)^{-1}(\{y\})) \\ &= \mathbb{P}((X^{-1}(g^{-1}(\{y\})) \quad = \mathbb{P}_X(g^{-1}(\{y\})) \\ &= \sum_{\{i : g(x_i) = y\}} \mathbb{P}_X\{x_i\} \end{aligned}$$

$$X^{-1}(g^{-1}\{y\}) = \{\omega : X(\omega) \in g^{-1}\{y\}\} = \{\omega : g[X(\omega)] = y\} = (g \circ X)^{-1}\{y\}$$

Conclusion

- Bilan :
  - Loi d'une variable aléatoire : une nouvelle probabilité, définie directement sur l'espace d'intérêt $\mathcal{X}$.
  - Calculs de lois, conditionnement de variables aléatoires : découle de ce qui a été dit sur des événements.
- Prochaine vidéo : Comportements « moyens » : espérance, variance.