Plan du cours d'algèbre

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Semaine 1

- Espaces vectoriels réels
- Applications linéaires
- Matrices

Semaine 2

- Produit scalaire, projections, interprétations géométriques
- Réductions de matrices

Anne Sabourin

Produit scalaire

- Généraliser les « angles »en dimension quelconque (orthogonalité)
- Définir une distance dans $\mathbb{R}^n$ (une norme)
- **produit scalaire canonique** entre deux vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Produit scalaire et matrices :
  - Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = X^\top Y$$

  - Si $M \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $f \sim M$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} \langle x, f(y) \rangle &= X^\top M Y = (M^\top X)^\top Y \\ &= \langle f'(y), x \rangle \ ; \quad \text{où } f' \sim M^\top \end{aligned}$$

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Anne Sabourin

INSTITUT Mines-Télécom

TELECOM ParisTech

Propriétés du produit scalaire

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Le produit scalaire est

- **symétrique** :
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$
- Linéaire en ses deux variables (**bilinéaire**) : pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a
$$\langle a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = a\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + b\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2 \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle + b\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle$$
donc pour tout $\mathbf{x}$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = 0$.
- **défini positif** : pour tout $\mathbf{x}$,
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$
Avec égalité seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Norme, vecteurs unitaires

- **Norme euclidienne** d'un vecteur $\mathbf{x}$: notée $\|\mathbf{x}\|$: racine carrée de son produit scalaire avec lui-même

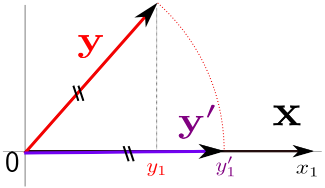
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

$\mathbf{x}$ est **unitaire** si $\|x\| = 1$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

(égalité $\Leftrightarrow$ $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ colinéaire)



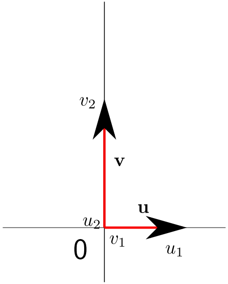
Anne Sabourin

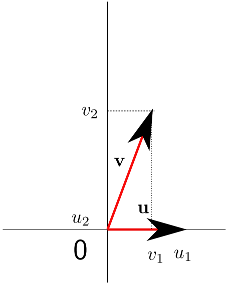
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux

Fondamentaux d'algèbre linéaire

- vecteurs **u** et **v** **orthogonaux** :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \qquad \text{(alors on écrit } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}\text{)}$$





- Sous-espaces E, F orthogonaux (on écrit $E \perp F$) :

$$\forall \mathbf{u} \in E, \ \forall \mathbf{v} \in F, \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Anne Sabourin

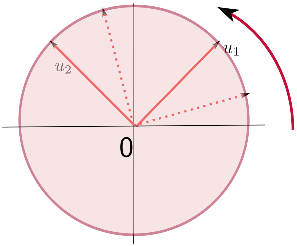
Bases orthonormales

- Bases « privilégiées » dans Rn

déf : Une famille $\mathcal{U}$ est une **base orthonormée** si

- C'est une base
- $\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \quad \text{(vecteurs de norme 1)} \\ 0 & \text{sinon} \quad \text{(orthogonalité deux à deux)} \end{cases}$

- **ex :** bases canoniques, $\left((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right)$ dans $\mathbb{R}^2$.



Fondamentaux d'algèbre linéaire

Anne Sabourin

Matrices orthogonales

- Une matrice carrée P est **orthogonale** si ses colonnes sont orthogonales deux à deux et unitaires, *i.e.*si

$$P_{[\cdot,i]}^{\top} P_{[\cdot,j]} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

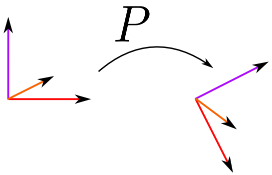
- autrement dit P est orthogonale $\Leftrightarrow$ $P^{\top} P = \mathbf{I}$
- On a alors $P^{-1} = P^{\top}$, donc aussi $PP^{\top} = \mathbf{I}$.
- De même $PP^{\top} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow P^{\top} = P^{-1} \quad \Rightarrow P^{\top} P = \mathbf{I}$.
- Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée orthogonale si sa matrice dans la base canonique l'est.

Invariances

- **application orthogonale $\Leftrightarrow$ préserve produits scalaires.**

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle = (MX)^\top (MY) = X^\top M^\top M Y = X^\top Y = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

- Conséquence : transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.



- **Changement de base orthonormée :** : P : matrice de passage de $(\mathbf{e})$ vers $\mathcal{U}$ **orthonormée**,
- alors : M' (matrice de f dans $\mathcal{U}$) est encore orthogonale.

  vérifiez-le : a) Q est orthogonale ; b) $M' = P^{-1}MP$.

Anne Sabourin

Supplémentaire orthogonal

F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

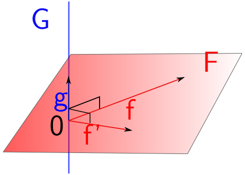
- **Supplémentaire orthogonal** de F, noté $F^\perp$ **:**

$$\mathbf{F}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^\mathbf{n} : \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{F}, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}\}.$$

$F^\perp$ est :

- un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- un **supplémentaire** de F dans $\mathbb{R}^n$: Tout $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière **unique**

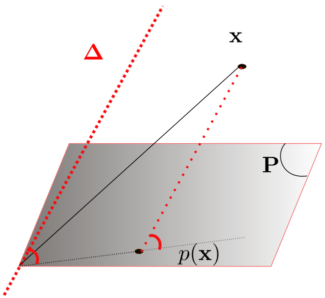
$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \qquad \mathbf{u} \in G, \mathbf{v} \in F$$



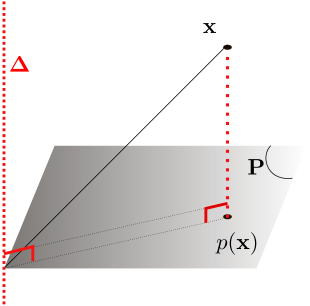
Fondamentaux d'algèbre linéaire

Anne Sabourin

Projections



Projection sur $P \parallel \Delta$



Projection orthogonale sur P

Anne Sabourin

Projections : définition mathématique

Deux définitions équivalentes ((i) ou (i)') :
Un projecteur est une application linéaire telle que

(i) $\exists$ décomposition de l'espace en somme de deux sous-espaces supplémentaires : $E = F \bigoplus G$, tels que

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow F \\ x = x_F + x_G &\mapsto x_F \end{aligned}$$

on a alors $F = \mathrm{Im}\, p$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$

(i)' p est **idempotente**, *i.e.* $p \circ p = p$

- Projecteur orthogonal : $F = G^{\perp}$
- Un projecteur p est orthogonal si et seulement si la matrice de p dans une base orthonormée est symétrique (**exercice)**

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Anne Sabourin

Utilisation des projections orthogonales

Point de F le plus proche de y

$=$

projection orthogonale $p(y)$ sur F.

'Expliquer' n observations $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par des variables explicatives $X = (\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n)$

$\Leftrightarrow$

Trouver $\hat{\mathbf{y}}$, combinaison linéaire des $\mathbf{x}_i$, proche de $\mathbf{y}$

$\Leftrightarrow$

Calculer la projection othogonale de $\mathbf{y}$ sur le sous espace engendré par les $\mathbf{x}_i$.

$$p(y) = \arg\min_{u \in F} \{\|y - u\|^2\}$$

problème d'optimisation convexe !