Fondamentaux d'algèbre linéaire

Matrices

Définition, lien matrice-application linéaire

Produits - inverse - transposition

Changement de bases

Anne Sabourin

Plan du cours d'algèbre

Semaine 1

- Espaces vectoriels réels
- Applications linéaires
- Matrices

Semaine 2

- Produit scalaire, projections, interprétations géométriques
- Réductions de matrices

Matrices et applications linéaires

Objectifs

- Lien entre matrices et applications linéaires
- transposée
- inverse
- changement de base

Matrice associée à une application linéaire dans des bases de départ et d' arrivée

- Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ bases resp. de E et F.
- **Rappel :** f est déterminée par les $f(\mathbf{u}_j)$. Chaque $f(\mathbf{u}_j)$ s'écrit $f(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}\,\mathbf{v}_i$.
- La matrice M de f dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{, notée : } (m_{i,j})_{i \le m,\ j \le p}$$

retenir :

Colonne n^o j de M = coordonnées de $f(u_j)$ **dans** $\mathcal{V}$

- Donc $m_{i,j}$ = coordonnée de $f(u_j)$ sur le vecteur v_i

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Matrices

Définition, lien matrice-application linéaire

Produits - inverse - transposition

Changement de bases

Anne Sabourin

Multiplication Matrice $\times$ colonne

- Soit $M = (m_{i,j})_{i \leq m, j \leq p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, X une **matrice colonne**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$$

- Le produit « $M\,X$ » de X par M est la matrice colonne Y, de coordonnées $y_i = \sum_{j=1}^{p} m_{i,j}\,x_j$. ($i \leq n$).

$$\boxed{(MX)_{[i]} = \textbf{ligne } n^o\ i \textbf{ de } M \times \textbf{colonne } X}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \dots & m_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ x'_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Matrices

Définition, lien matrice-application linéaire

Produits - inverse - transposition

Changement de bases

Anne Sabourin

INSTITUT Mines-Télécom

TELECOM ParisTech

Calcul de $f(x)$ par un produit matrice-colonne

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, et $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ des bases de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.
Comment calculer $f(x)$ **?** (pour $x \in E$)

- Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ la matrice de f **dans les bases** $\mathcal{U}$ **et** $\mathcal{V}$, *i.e.* telle que $f(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}\mathbf{v}_j$.
- Si $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^p x_j\mathbf{u}_j$, on appelle $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée à x **dans la base** $\mathcal{U}$.
- de même, si $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i\,\mathbf{v}_i \in F$, quelconque, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: est la **matrice colonne** associée à **y dans la base** $\mathcal{V}$.

Par un calcul simple : $\mathbf{f(x) = y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{MX = Y}$

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Matrices

Base canonique

- On appelle **Base canonique** de $\mathbb{R}^p$ la famille

$$(\mathbf{e}) = (e_1, \ldots, e_p)$$

$$\text{où } e_i \text{ est le vecteur } (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}\, rang}, 0, \ldots).$$

- Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$.
- **attention** : si $\mathcal{U} \neq (\mathbf{e})$, $\mathbf{x} \neq \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{u}_i$.
- **Convention :** Si on ne précise pas les bases choisies, « la matrice de f » = « la matrice M associée à f dans les bases canoniques de départ et d'arrivée »
- Dans les bases canoniques, on identifie « le vecteur $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ » avec « la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ ».

Fondamentaux d'algèbre linéaire

Matrices

Définition, lien matrice-application linéaire

Produits - inverse - transposition

Changement de bases

Anne Sabourin

Produit de matrices

- Si $P \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$,le **produit** $Q = PM \in \mathbb{R}^{q\times p}$ est

$$(Q)_{[i,j]} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} m_{k,j} \quad (\text{ pour } i \leq q, j \leq p)$$

$$\boxed{(PM)_{[i,j]} = i^{eme} \text{ ligne de } P \times j^{eme} \text{ colonne de } M}$$

$$\begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ p_{i,1} & \dots & p_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{j}{\downarrow} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dots & m_{1,j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & m_{n,j} & \dots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{j}{\downarrow} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & q_{i,j} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

produit de matrices - composition d'applications linéaires

Anne Sabourin

- Soient $f : E = \mathbb{R}^p \rightarrow= F = \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow G = \mathbb{R}^q$.
  Alors $g \circ f : x \mapsto g\big[f(x)\big]$, de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$.
- $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ bases respectives de E, F, G et
  M : matrice de f dans $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$,
  P : matrice de g dans $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$,

Quelle est la matrice associée à $g \circ f$?

- on montre (comme pour l'action d'une matrice sur une matrice colonne) que

matrice de $g \circ f$:

PM **est la matrice de** $g \circ f$ **dans les bases** $\mathcal{U}$ **et** $\mathcal{W}$**.**

Matrice inverse

- Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire associée dans la base canonique.
- M est dite **inversible** si f est inversible.
- f est inversible $\Leftrightarrow$ Colonnes de M : base de $\mathbb{R}^n$ (**Rappel :** $f(e_j)$: $j^{\text{ème}}$ colonne de M.)

  $\Leftrightarrow$ (th. du rang) Colonnes de M linéairement indépendantes (libres) dans $\mathbb{R}^n$

  $\Leftrightarrow$ (th. du rang) Colonnes de M engendrent $\mathbb{R}^n$
- **Inverse de** M : la matrice M^{-1} telle que

$$M\,M^{-1} = M^{-1}\,M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} := \mathbf{I}$$

- **propriété :** $(MP)^{-1} = P^{-1}M^{-1}$ (si inversibles)

Matrice transposée

- M une matrice $n \times p$, $M = (m_{i,j})_{i \le n, j \le p}$.
- « **Matrice transposée de M** » : $M^\top$: obtenue en 'transformant les lignes en colonnes' : $M^\top_{[i,j]} = m_{j,i}$ et

$$M^\top = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phantom{m_{1,1}} & j & \phantom{m_{n,1}} \\ & \downarrow & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{n,1} \\ \vdots & m_{j,i} & \vdots \\ m_{1,p} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (i \le p, j \le n)$$

- pour un produit :

$$\Big(M\,P\Big)^\top = P^\top M^\top$$

Changement de base et matrice colonne d'un vecteur

- $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$: matrice de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{U}$.
- Matrice X' de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{U}'$? c'est à dire : coefficients x'_i, tels que $\mathbf{x} = \sum x'_i \mathbf{u}'_i$?)
- Soit P la **matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$** : ses colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{U}$,

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} [\mathbf{u}'_1]_u & \dots & [\mathbf{u}'_n]_u \end{array} \right) \quad \text{ie } \mathbf{u}'_j = \sum_i p_{i,j} \mathbf{u}_i$$

- P est inversible (vérifiez pourquoi)

Changement de base et matrice colonne d'un vecteur

$$\mathbf{x} = \sum_j x'_j \mathbf{u}'_j \quad (\text{ définition des } x'_i)$$

$$= \sum_j x'_j (\sum_i p_{i,j} \mathbf{u}_i) \quad (u'_j \text{ est la } j^{eme} \text{ colonne de } P)$$

$$= \sum_i (\sum_j p_{i,j} x'_j) \mathbf{u}_i$$

Or on sait que $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{u}_i$. Donc

$$X_{[i]} = x_i = \sum_j p_{i,j} x'_j = (PX')_{[i]}$$

c'est à dire $X = PX'$. Conclusion :

$$\boxed{X' = P^{-1} X}$$

Changement de bases et matrice d'une application linéaire

- Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ des bases de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ (**anciennes bases**),
- M la matrice de f dans $\mathcal{U}, \mathcal{V}$.
- Soient $\mathcal{U}', \mathcal{V}'$ de **nouvelles bases**, P et Q les matrices de passages de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}'$ et de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}'$.

- **Matrice M' de f dans $\mathcal{U}', \mathcal{V}'$?**

Changement de bases et matrice d'une application linéaire

- X, X' les matrices colonnes de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$.
- Y, Y' les matrices colonnes de $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$.
- P, Q : matrices de passages $\mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ et $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$.
- On cherche M' telle que :

$$Y = M\,X (\Leftrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x})) \Leftrightarrow \; Y' = M'\,X', \quad \forall X, X', Y, Y'.$$

Or $Y = Q\,Y'$ et $X = P\,X'$ (chgt de base colonne). Donc

$$\begin{aligned} Y = M\,X &\Leftrightarrow Q\,Y' = M\,P\,X' \\ &\Leftrightarrow Y' = Q^{-1} M\,P\,X'. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$M' = Q^{-1} M P$$

Conclusion de la semaine 1 d'algèbre

- Vocabulaire de base donné cette semaine
- à venir : géométrie, projections, réduction.