Plan du cours de probabilités

Probabilités

Anne Sabourin

Semaine 3

- Probabilités discrètes
- Variables et vecteurs aléatoires discrets
- Espérance, espérance conditionnelle

Semaine 4

- Indépendance, variance, covariance
- Variables aléatoires continues
- Vecteurs aléatoires continus

Cadre continu multivarié

- $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé.
- Ensembles d'intérêt :

$$\{\mathbf{X} \in R\} \quad \text{où } R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \quad (\text{"rectangle"})$$

déf : X est un **vecteur aléatoire** (tout court) si

$$\{X \in R\} \text{ est un événement} \qquad (i.e., \{X \in R\} \in \mathcal{A}),$$

pour tout $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

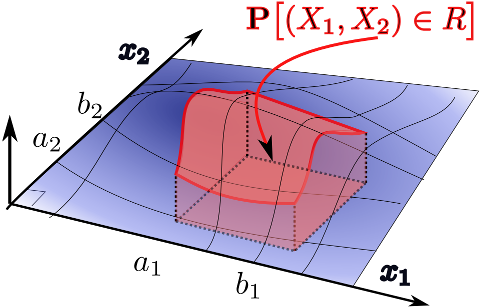
- Comme en 1D : les fonctions $X \to \mathbb{R}^d$ seront « toujours » des vecteurs aléatoires.

Vecteur aléatoire continu

déf : Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ est *continu* si

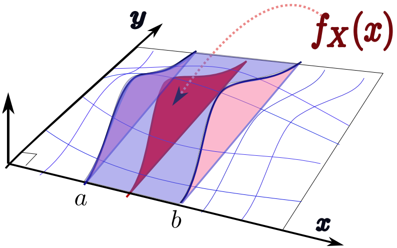
$\exists f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_d)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d = 1$ (densité), telle que pour tout rectangle $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in R) = \int_{[a_1,b_1]} \cdots \int_{[a_d,b_d]} f(x_1, \ldots, x_d)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d$$



Densités marginales (couple (X, Y) continu)

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b], Y \in \mathbb{R})$$
$$= \int_{x \in [a,b]} \underbrace{\left(\int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}} \mathbf{f}_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} \right)}_{\textbf{fonction de } x} \mathrm{d}x$$



$$f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) \, \mathrm{d}y \; ; \qquad f_Y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) \, \mathrm{d}x \, .$$

Anne Sabourin

Densité conditionnelle

Soit (X, Y) un couple continu, de densité jointe $f_{(X,Y)}$.

- Si on observe $\{X = x\}$, que sait-on sur Y ?
- **Problème :** $\mathbb{P}(\{X = x\}) = 0$: proba conditionnelle « sachant $\{X = x\}$ » n'existe pas.
- **Mais** si $f_X(x) \neq 0$ on peut définir :

Densité conditionnelle

Soit x tel que $f_X(x) \neq 0$. La fonction :

$$y \mapsto f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$$

est appelée « densité conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ ».

Remarque importante

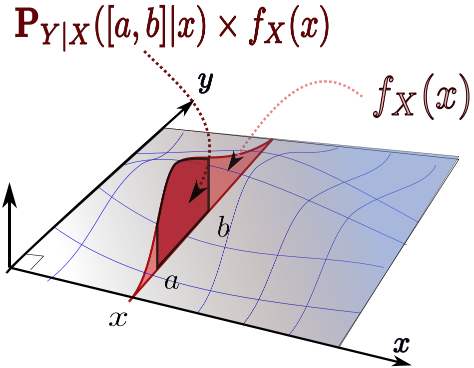
La fonction $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Loi conditionnelle

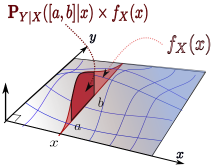
déf : La loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ est

La loi sur $\mathbb{R}$ dont la densité est $f_{Y|X}(\cdot \,|\, x)$.

$$\mathbb{P}_{Y|X}([a,b]|x) = \int_{y \in [a,b]} f_{Y|X}(\, y \,|\, x) \, \mathrm{d}y$$



Loi conditionnelle : preuve de l'interprétation géométrique



Rapport entre les aires foncées /claires :

$$\Delta = \frac{\int_{y\in[a,b]} f(x,y)\,\mathrm{d}y}{\int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{Y|X}([a,b]|x) &\overset{\text{déf}}{=} \int_{y\in[a,b]} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y \overset{\text{déf}}{=} \int_{y\in[a,b]} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{déf}}{=} \int_{y\in[a,b]} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = \frac{\int_{y\in[a,b]} f_{(X,Y)}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y} \\
&= \Delta
\end{aligned}$$

Utilisation de la loi conditionnelle

$(X, Y) : \Omega \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ couple aléatoire. On donne $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_{Y|X}$.
Loi de Y ?

$$
\begin{aligned}
\text{(cas discret) } \mathbb{P}\left(Y \in A\right) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}\left(X = x, Y \in A\right) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(Y \in A | X = x)\, \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{X}} \Big(\sum_{y \in A} \mathbb{P}_{Y|X}(y|x) \Big)\, \mathbb{P}(X = x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(cas continu) } \mathbb{P}\left(Y \in A\right) &= \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in A} f_{(X,Y)}(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}} \Big(\int_{y \in A} f_{Y|X}(y|x)\, \mathrm{d}y \Big) f_X(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Espérance conditionnelle

(X, Y) un couple aléatoire continu, de densité jointe $f_{(X,Y)}$.

On observe $\{X = x\}$. Que peut-on attendre de Y en moyenne ?

déf : l'espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$ est

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{x \in \mathbb{R}} y\, f_{Y|X}(y|x)\, \mathrm{d}y$$

- **remarque importante** : $g(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}(Y|X = x)$ est une fonction de x. Donc $\mathbb{E}(Y|X) \stackrel{\text{déf}}{=} g(X)$ est une variable aléatoire

Anne Sabourin

Espérance et espérance conditionnelle

On définit $\mathbb{E}(Y|X) \stackrel{\text{déf}}{=} g(X)$, où $g(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$.

prop : Espérance et espérance conditionnelle

Si Y est intégrable, alors $\mathbb{E}\left(Y|X\right)$ aussi et

$$\mathbb{E}\left(Y\right) = \mathbb{E}_X\Big(\mathbb{E}\left(Y|X\right)\Big)$$

preuve *c.f.* cas discret. Remarquer que $f_{Y|X}\, f_X = f_{(X,Y)}$.

intérêt : calculer $\mathbb{E}\left(Y\right)$ si on connaît f_X et $f_{Y|X}$.

- **ex :** (X, Y) couple aléatoire défini par :
  - $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$
  - Loi condit^{le} de Y : $Y|\{X = x\} \sim \mathcal{N}(x, \sigma^2)$.
- Espérance de Y ?
  $\mathbb{E}\left(Y|X = x\right) = x$ donc $\mathbb{E}\left(Y\right) = \mathbb{E}_X[\mathbb{E}\left(Y|X\right)] = \mathbb{E}_X[X] = \frac{1}{2}$

Probabilités

Vecteurs aléatoires continus

- Cadre multivarié, densité jointe, densités marginales
- Conditionnement : loi et espérance conditionnelle
- Indépendance
- Vecteurs Gaussiens

Anne Sabourin

Indépendance

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire

déf : Les variables aléatoires $X_1 \dots, X_d$ sont indépendantes si

Pour tout « rectangle » $R = A_1 \times \dots \times A_d \subset \mathbb{R}^d$ (les A_i sont des intervalles), les événements

$$\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_d \in A_d\}$$

sont indépendants.

(comparer avec le cas discret ...)

Caractérisation (cas où **X** est continu) :

Les X_i sont indépendantes si et seulement si la densité jointe du vecteur **X** est le produit des densités marginales :

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} f_{X_j}(x_j)$$

Vecteurs Gaussiens

$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ est appelé « Vecteur Gaussien »si toutes les combinaisons linéaires des X_i sont des gaussiennes.

prop : Construction (admis)

$$\mathbf{X} \text{ est Gaussien} \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R}^{d\times d}, \mu \in \mathbb{R}^d, N = (N_1, \ldots, N_d) : \quad X = \mu + AN$$

où $(N_1, \ldots, N_d)$ sont Gaussiennes standard, **indépendantes**.

- La loi de X est alors caractérisée **entièrement** par
  - Son espérance, $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mu$
  - Sa matrice de covariance,

$$\Sigma = AA^\top$$

preuve : pour Σ, vérifiez que $E(NN^\top) = \mathbf{I}_d$ et écrivez la définition matricielle de $\mathrm{Cov}(X)$.

Indépendance dans les vecteurs Gaussiens

Soit $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ un vecteur Gaussien.
Alors la réciproque : dé-corrélation $\Rightarrow$ indépendance devient vraie :

> Si la matrice de covariance Σ d'un vecteur Gaussien $\mathbf{X}$ est diagonale, alors ses composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.

pourquoi ?

- Densité en $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ (Si Σ inversible)

$$f_{\mu,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\det \Sigma|}} e^{\frac{-1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

- Si Σ est diagonale,
  densité jointe = produit de densités uni-variées
  donc variables indépendantes

Attention : vérifier que le **vecteur X** est Gaussien, pas seulement ses composantes X_i !

Densité Gaussienne : Exemple

$\theta = \pi/6$, $\mu = 0$, $\quad \Sigma = PDP^\top$, où

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta & \cos(\theta) \end{pmatrix} \textit{(vecteurs propres)} \qquad D = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \textit{(valeurs propres)}$$

Lignes de niveau de la densité :