中山大学本科生期中考试

考试科目：《高等数学一》（珠海校区） 5班

学年学期：2015 学年第 2 学期　　姓　名：何炜佳　学　号：15328048

学 院/系：岭南学院　　学　院：岭南学院　年级专业：大一，经济学类 5

考试方式：闭卷

考试时长：90 分钟　　成绩评定：99　阅卷教师：

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

32

一、求下列极限（每小题 8分，共 32 分）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3}{n+2}-n\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n+2}-n\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2n-3}{n+2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2-\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$

$=-\frac{2}{1}$

$=-2$

2、$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(1+3x)}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot3x}{x}}$

$=e^6$

3、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\tan x}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x\cdot x}$

$=1$

4、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+6x+5}{9x^2-12x+4}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}{9-\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4}{9}}$

$=\frac{2}{3}$

20

二、求下列函数的导函数（每小题 10 分,共 20 分）。

1、设 $y=y(x)$ 是由 $e^y+xy=e$ 确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

+10

解：$\because y=y(x)$，$e^y+xy=e$，两边同时对x求导

$\therefore y'e^y+y+y'x=0$

$y'(e^y+x)=-y$

$y'=-\frac{y}{e^y+x}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^y+x}$ （其中，$e^y+x\neq0$）

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=-\frac{y'(e^y+x)-(y'e^y+1)y}{(e^y+x)^2}$

$=-\frac{-y+\frac{y^2e^y}{e^y+x}-y}{(e^y+x)^2}$

$=\frac{2y(e^y+x)-y^2e^y}{(e^y+x)^2}$

综上，$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{e^y+x}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y(e^y+x)-y^2e^y}{(e^y+x)^2}$

（其中，$e^y+x\neq0$）

2、求出参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

+10

解：$\because \begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(\arctan t)'}{(\ln\sqrt{1+t^2})'}=\frac{(\arctan t)'}{[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)]'}$

$=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}\ (t\neq0)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dt}{dx}$

$=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}$

$=-\frac{1+t^2}{t^3}\ (t\neq0)$

综上，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}\ (t\neq0)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1+t^2}{t^3}\ (t\neq0)$

34

三、求下列函数的不定积分或是定积分（每小题 8 分。共 32 分）。

1、$\int \tan^3 x \sec^2 x dx$ +8

解：原式 $= \int \tan^3 x \, d(\tan x)$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

2、$\int x \arctan x dx$ +8

解：原式 $= \frac{1}{2}\int \arctan x \, d(x^2)$

$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int x^2 d(\arctan x)$

$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$

$= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x + \arctan x - x) + C$

3、$\int \frac{x-1}{(x^2+2)^2}dx$ +8

解：原式 $= \int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx - \int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+2)^2} d(x^2+2) - \int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$

$= -\frac{1}{2(x^2+2)} - \int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$

令 $x = \sqrt{2}\tan t \, (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$ 则 $(x^2+2)^2 = 4\sec^4 t$

$dx = \sqrt{2}\sec^2 t dt$

$\therefore \int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx$

$= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t dt}{4\sec^4 t}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \cos^2 t dt$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int (\frac{1+\cos 2t}{2})dt$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}\int dt + \frac{\sqrt{2}}{16}\cos 2t \, d(2t)$

$= \frac{\sqrt{2}}{8}t + \frac{\sqrt{2}}{16}\sin 2t + C_1$ （C_1 为常数）

$\therefore \int \frac{x-1}{(x^2+2)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{8}t - \frac{\sqrt{2}}{16}\sin 2t + C$

其中，$t = \arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$

$\therefore \int \frac{x-1}{(x^2+2)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$

$\tan t = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$\cos t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}$

$-\frac{\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$

$\int \frac{x-1}{(x^2+2)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$ 合併！

$-\frac{\sqrt{2}}{16}\times 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}} + C$

$= \frac{-x-2}{4(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

4、$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$ +8

解：$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(x^4)$

令 $\sqrt{1-x^2} = t$ 当 $x=0$ 时，$t=1$，当 $x=1$ 时 $t=0$

则 $x^2 = 1-t^2$

$x^4 = (1-t^2)^2 = t^4 - 2t^2 + 1$

$\frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(x^4)$

$= \frac{1}{4}\int_1^0 t \, d(t^4 - 2t^2 + 1)$

$= \frac{1}{4}\int_1^0 (4t^4 - 4t^2)dt$

$= \int_1^0 (t^4 - t^2)dt$

$= (\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3)\Big|_1^0$

$= \frac{2}{15}$

四、（8分）

设函数 $f(x)\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

求 $f'(x)$，并且讨论导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

解：$\because f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=(x^2\sin\frac{1}{x})'$

$= 2x\cdot\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})\cdot x^2$

$= 2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad (x\neq 0)$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

$\because |\sin\frac{1}{x}|\leq 1 \quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

$\therefore f'(0)=0$. $\quad \therefore f'(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & (x\neq 0) \end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$

$\because |\sin\frac{1}{x}|\leq 1$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}=0$.

又 $\because$ ~~cos…~~ $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 极限不存在.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$ 极限不存在

$\therefore$ ~~f(x)~~ $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在，而 $f'(0)=0$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

五、证明题（8分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)dt$. 证明:

(a) 如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数;

(b) 如果 $f(x)$ 是单调减少函数，则 $F(x)$ 也是单调减少函数.（提示证明 $F'(x)<0$）

解：(a) $\because F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)dt$

$\therefore F(-x)=\int_0^{-x}(2t+x)f(t)dt$

又 $f(x)$ 是偶函数. $\therefore f(x)=f(-x)$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

令 $u=-t$，当 $t=0$ 时 $u=0$

当 $t=x$ 时 $u=-x$

$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)dt$

$=\int_0^{-x}(-2u-x)f(-u)d(-u)$

$=\int_0^{-x}(2u+x)f(u)du$

$=\int_0^{-x}(2t+x)f(t)dt=F(-x)$

$\therefore F(x)=F(-x)$. $F(x)$ 为偶函数

(b) $\because f(x)$ 为单调减少函数 $\therefore f'(x)\leq 0$.

$F(x)=\int_0^x 2tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$

$\therefore F'(x)=2xf(x)-[\int_0^x f(t)dt+xf(x)]$

$=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$

① 当 $x>0$ 时

由积分中值定理可知，$\exists c$，$c\in[0,x]$

$\int_0^x f(t)dt=f(c)(x-0)=xf(c)$

$\therefore 0<c<x$

$\therefore F'(x)=xf(x)-xf(c)$

$=x(f(x)-f(c))$

$\because f(x)$ 为单调减少函数，$0<c<x$

$\therefore f(x)$ ~~f(c)~~ $f(x)-f(c)<0$.

$F'(x)=x[f(x)-f(c)]<0$

② 当 $x<0$ 时 同理可证. $F'(x)<0$

~~综上 $F'(x)<0$~~ $\because f(x)$，$(2t-x)$ 均为连续函数

③ ~~当 $x=0$ 时~~ $\because F(x)$ 为连续函数

$\therefore F(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore F'(x)<0$ 恒成立

综上. $F(x)$ 为单调减少函数