《高等代数》（B 卷）参考答案

一、填空题（共2小题，第1小题18分，第2小题6分，共24分）

1. (a) $\begin{bmatrix}7\\7\\14\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}7\\0\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix}7\\0\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\1\\3\\6\end{bmatrix}$ (c) 2 (d) 1 (e) $2\begin{bmatrix}7\\0\\2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$ or $3\begin{bmatrix}7\\0\\2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7\\1\\3\\6\end{bmatrix}$

(f) $\frac{2}{7}\begin{bmatrix}7\\7\\14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ (每小题 3 分)

2. (a) $3^3+2^3=35$ (b) 1 (每小题 3 分)

二、选择题（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. B 2. D

三、计算题（共4小题，第1小题10分，第2、3小题各12分，第4小题15分，共49分）

1.

(a) $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&2\end{bmatrix}\longrightarrow U=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$ （3 分）

The free variable is x_2. The complete solution is

$$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}.$$ （3 分）

(b) A basis is $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$ （4 分）

2.

(a) $T\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)=T\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right)-T\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)=\left[\begin{smallmatrix}-6\\5\end{smallmatrix}\right].$ （3 分）

(b) $A=\left[\begin{smallmatrix}-4&-6\\3&5\end{smallmatrix}\right].$ （3 分）

(c) The eigenvalues of A are 2 and -1, so $B=\left[\begin{smallmatrix}2&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right].$ （3 分）

$$\mathcal{C}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$ （3 分）

3. (a) Not consistent (2分), $\hat{b} = \vec{q}_1 + 2\vec{q}_2 + 3\vec{q}_3$, $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (5分)

(b) $\|4\vec{q}_4 + 5\vec{q}_5\| = \sqrt{(4\vec{q}_4 + 5\vec{q}_5)^T(4\vec{q}_4 + 5\vec{q}_5)} = \sqrt{16\|\vec{q}_4\|^2 + 25\|\vec{q}_5\|^2} = \sqrt{41}$ (5分)

4. (a) (3分)

$A = A^2 = I - 2cE + 3c^2E \implies 3c^2 = c$ so $c = 0$ or $c = 1/3$. Thus $A = I$ or $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ which upon squaring is itself.

(b) (3分)

$I = A^TA = A^2 = I - 2c + 3c^2E \implies 3c^2 = 2c$ so $c = 0$ or $c = 2/3$. Thus $A = I$ or $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ which upon squaring is the identity.

(c) (3分)

The matrix is symmetric, so all values of c make A diagonalizable.

(d) A has eigenvalues 1-3c, 1, 1, so A is invertible when $c \neq \frac{1}{3}$. (3分)

(e) 1-3c > 0, so $c < \frac{1}{3}$. (3分)

四、证明题（共2小题，第1小题7分，第2小题10分，共17分）

1. Col $AB \subseteq$ Col A, Row $AB \subseteq$ Row B (4分); rank AB = dim Col $AB \leq$ dim Col A = rank A, rank AB = dim Row $AB \leq$ dim Row B = rank B (3分)

2. (a) According to question 1, 0≤rank(A^{n+1})≤rank(A^n)≤ ⋯ ≤rank(A^1)≤rank(A^0) = rank(I) = n. There are $n+2$ inequalities between $n+1$ integers, so at least one inequality is in fact an equality and $0 \leq k \leq n$. (4分)

(b) ⇒: If rank(A^{k+1}) = rank(A^k), Col A^{k+1} = Col A^k because Col $A^{k+1} \subseteq$ Col A^k. So $A^{k+1}\vec{x}$ = any columen of A^k is consistent. (3分)

⇐: rank(A^k) = rank($A^{k+1}X$) $\leq$ rank(A^{k+1}) by according to question 1. On the other hand, rank(A^k) $\geq$ rank(A^{k+1}) according to question 1. (3分)