中山大学本科生期末考试（回忆稿）
考试科目：《高等数学（一）》（A 卷）
学年学期：2020 学年第 2 学期　　　　　　　　　　　　　　姓 名：
学 院/系：数学学院　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学 号：
考试方式：闭卷　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学 院：
考试时长：120 分钟　　　　　　　　　　　　　　　　　　　专 业：
警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

1、求极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)$

2、$f(x)=x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ 求 f(0)的 2021 阶导数

3、求极限：？？

4、求不定积分：$\int xarcsinx\,dx$　我记得这个回忆有点小错误，应该有一个是有 x^2
不过课本课后习题做完就必没有问题惹~

7、设$f(x)$在[a,b]上可导，其中 a⩾0，证明：存在 $\varepsilon\epsilon(a,b)$ 使得:

$$2\varepsilon[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\varepsilon)$$

8、假设 f(x)二阶可导证明：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$

9、证明：0<x<$\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\frac{x}{\sin x}<\frac{tanx}{x}$

10、　　求封闭图形的面积：$\begin{cases}x=acos^3t\\y=asin^3t\end{cases}$ (t 为参数)

12、 求 $f(x)=e^{-x^2}$在 x=0 处的 n 阶导

13、 求 $z=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ 与 z=0 和 z=1 围成的封闭图形的体积

答案部分:

1、

$$\text{原式} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

$$= \int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

7、令 $g(x) = x^2$ 由柯西中值定理:

$\exists \xi \in (a, b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

故存在 $\xi \in (a, b)$,使得:

$$2\xi [f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2) f'(\xi)$$

8、证明：由洛必达法则：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}f''(x_0+h)=f''(x_0)$$

9. $\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$ $\quad \frac{\sin^2 x}{\cos x} > x^2$

只需证 $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cos x} - \cos x > x^2$

$f(x) = \sec x - \cos x - x^2$

$f'(x) = \sec x \tan x + \sin x - 2x$

$f''(x) = \sec x(\tan^2 x + \sec^2 x) + \cos x - 2$

$= (\sec x + \cos x - 2) + 2\sec x \tan^2 x$

$\because \frac{\pi}{2} > x > 0$ 时，$\sec x + \cos x > 2$

$\therefore f''(x) > 0 \quad \therefore f'(x) > f'(0) = 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $\uparrow$

$f(x) > f(0) = 0$

$\therefore \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$