# 东校区 2009 学年度第一学期 09 级《高等数学一》期中考试题

专业 通信软件 学号 09386391 姓名 李晓斌 评分 100

《中山大学授予学士学位工作细则》第六条：“考试作弊不授予学士学位。”

一、 求下列极限（每小题 7 分，共 28 分）

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$

解 $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{n}{n+\sqrt{1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}} = \cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

由夹逼定理可得 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$

解 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x+1)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{(x+1)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=-2\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=-2\times\frac{1}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x+2}$

解：原式 $=\cancel{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x+2}}$

$\cancel{=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x-2}}\right)^{x+2}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x-2}}\right)^{\frac{x-2}{2}\cdot 2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4}$

$=e^{-2}\cdot 1$

$=e^{-2}$

4. $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

解：原式 $=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$  $x\to 0^+$  $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$

$=\sqrt{2}$

二、 完成下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1、 设 $y=x\sqrt{x^2-a^2}$，求 $y'$。

解：$y'=\sqrt{x^2-a^2}+x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot 2x$

$=\sqrt{x^2-a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$=\frac{x^2-a^2+x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{2x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

2、 设 $y=\frac{\sin e^x}{1+x^2}$，求 $dy$。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos e^x\cdot e^x(1+x^2)-\sin e^x(2x)}{(1+x^2)^2}$  $dy=\left[\frac{e^x\cos e^x}{1+x^2}-\frac{2x\sin e^x}{(1+x^2)^2}\right]dx$

$=\left(\frac{\cos e^x\cdot e^x}{1+x^2}-\frac{2x\sin e^x}{(1+x^2)^2}\right)dx$

3、 已知 $ye^x+\ln y=1$，求 $y'(0)$。

解：对方程两边求导得

$y'e^x+ye^x+\frac{1}{y}\cdot y'=0$

$\left(e^x+\frac{1}{y}\right)y'=-ye^x$

$y'=\frac{-y^2e^x}{ye^x+1}$

当 $x=0$ 时 $y+\ln y=1$，$y=1$

$\cancel{y'(0)=\frac{-1\cdot e^0}{1\cdot e^0}}$

$y'(0)=\frac{-1\cdot e^0}{1\cdot e^0+1}=-\frac{1}{2}$

4、 设 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t(+\sin t)}{(1-\cos t)^2}}{a-a\cos t}$

$=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$

三、　求下列积分（每小题 7 分，共 28 分）：

1、$\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx$

解. 原式 $= \int \frac{1}{(x+3)(x-1)}dx$

$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+3}dx\right]$

$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C$

2、$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$，$(a>0)$

解：原式 $= x\cdot\sqrt{a^2-x^2} - \int x\, d\sqrt{a^2-x^2}$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)\,dx$

$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d\frac{x}{a}$

$2\int\sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

3、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$，

解. 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{1+\sin^2 x}d\sin x$

令 $t=\sin x$　$x=\frac{\pi}{2}$ 时 $t=1$　$x=0$ 时 $t=0$

原式 $= \int_0^1\frac{2t}{1+t^2}dt = \int_0^1\frac{dt^2}{1+t^2}$

$= \int_0^1\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}$

$= \ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1$

$= \ln 2$

4、$\int_0^1 \arctan x\,dx$

解：$\int_0^1 \arctan x\,dx = x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,d\arctan x$

$= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$= x\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx^2}{1+x^2}$

$= x\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$= x\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

四、（6 分）证明：$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sin x}{e^x(1+x^2)}dx \le \frac{\pi}{12e}$

证明：$\because 1\le x\le\sqrt{3}$　$\therefore \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} \le \frac{\sin x}{e(1+x^2)} \le \frac{1}{e(1+x^2)}$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} \le \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{e(1+x^2)} = \frac{1}{e}\arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12e}$

即 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} \le \frac{\pi}{12e}$

五、（5 分）求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 绕 $x$ 轴旋转构成的旋转体的体积.

解：$V_x = \int_{-a}^{a}\pi y^2 dx$

$= \int_{-a}^{a}\pi(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3 dx$　~~为偶函数~~

$= 2\int_0^a \pi(a^2-x^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}})dx$

$= 2\pi(a^2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}})\Big|_0^a$

$= \frac{32}{105}\pi a^3$

六．（5 分）证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=k$，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，

则在 $(a,b)$ 内至少有一点 $\xi$，使 $f(\xi)=k$.

证明：设 $F(x)=f(x)-k$

$F(a)=f(a)-k=0$

$F(b)=f(b)-k=0$

~~$F'(x)=f'(x)$~~　$\because f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$

① 若 $f'_+(a)>0$ 且 $f'_-(b)>0$

$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$　又 $x>a$

$\therefore f(x)>f(a)$　即存在点 $x_1$ 使 $f(x_1)>f(a)$

$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$　又 $x<b$

$\therefore f(x)<f(b)$　即存在点 $x_2$ 使 $f(x_2)<f(b)$

$F(x_1)=f(x_1)-k>f(a)-k=0$

$F(x_2)=f(x_2)-k<f(b)-k=0$

即 $F(x_1)>0$　$F(x_2)<0$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\therefore F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续

$F(x_1)\cdot F(x_2)<0$ 由零点存在性定理可知存在 $\xi$ 使 $F(\xi)=0$

即 $f(\xi)-k=0$　$f(\xi)=k$

② 若 $f'_+(a)<0$ 且 $f'_-(b)<0$

$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$　$x>a$　$f(x)<f(a)$

即存在点 $x_3$ 使 $f(x_3)<f(a)$

$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$　$x<b$

$f(x)>f(b)$　存在点 $x_4$ 使 $f(x_4)>f(b)$

$\therefore F(x_3)<0$　$F(x_4)>0$　$F(x_3)\cdot F(x_4)<0$

由零点存在性定理可知至少存在一点 $\xi$

使 $F(\xi)=f(\xi)-k=0$　$f(\xi)=k$

综上述 在 $(a,b)$ 内至少有一点 $\xi$ 使

$f(\xi)=k$