一． 求下列极限 （每小题 **7** 分，共 **28** 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{1+2n}\right)^{n}2$。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\ln(1+x)+\sin^2 x}$.　　4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)\sin\dfrac{1}{x}$

二．求下列函数的导函数（每小题 7 分，共 28 分）

$$=\lim_{x\to+\infty}(\arctan x)\sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot 0=0$$

1. $y=(\tan x)^{\sin x}$.　　2. $F(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{1+t}\,dt$ 求$F'(x)$.

3. $y=\ln\left|\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

4。$\begin{cases}x=t\ln t,\\ y=e^t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

三．求下列积分（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\int\dfrac{dt}{\sin t}$.　2。$\int\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$　3. $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$　4。

$$\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}$$

四．证明不等式：$\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\le\int_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\cos x}}dx\le\dfrac{1}{3}$　　（**7** 分）

五．设函数 $g(x)=(\sin 2x)f(x)$，其中函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

问：$g(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导，求出 $g'(0)$　（**7** 分）

六．设 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(0)=0$，对函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\ne 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$

（1） 确定 a 的值，使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

（2） 对于（1）确定的 a 值，证明 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。　（**6** 分）

参考答案

1 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}+1}=\frac{1}{2}$$

2 解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n}{1+2n}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore \exists N>0$

使 $0<\dfrac{1+n}{1+2n}<\dfrac{2}{3}$. $\forall n>N$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{1+2n}\right)^n=0$$

3 解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot\dfrac{1}{5x}\tan 5x}{\dfrac{1}{x}\ln(1+x)+\dfrac{\sin x}{x}\sin x}=\dfrac{5}{1+0}=5.$

4 解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}$

TWO

1 解：$\ln y=\sin x\ln(\tan x)$

2 解：$F'(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'-\sqrt{1+x^2}\left(x^2\right)'.$

$$\therefore \frac{y'}{y}=\cos x\ln(\tan x)+\sin x\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{x}}-2x\sqrt{1+x^2}.$$

$$\therefore y'=(\tan x)^{\sin x}\left(\cos x\ln(\tan x)+\frac{1}{\cos x}\right).$$

3 解：$y'=\dfrac{1}{\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\left(\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)'=\dfrac{1}{\tan\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\dfrac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\left(\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)'$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}\sin\left(2\sqrt{x}+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}\cos\left(2\sqrt{x}\right)}.$$

4 解： $\frac{dy}{dt}=e^t$， $\frac{dx}{dt}=\ln t+1$， $\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t}{\ln t+1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(\ln t+1)-\frac{1}{t}e^t}{(\ln t+1)^3}。$$

THERE

1 解：原式 $=\int\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\int\frac{dt}{2\tan\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}$. \

$$=\int\frac{d\tan\frac{t}{2}}{\tan\frac{t}{2}}=\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C.$$

2 解：原式 $=-2\int\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=-2\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C.$$

解：原式 $=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$$

解：原式 $=\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}dx=\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx-\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

$$=\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\cos^4 t}{\cos^2 t}dt=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}+C=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C.$$

$$\therefore 原式=-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$$

FOUR

证： $\because \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} \le \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\cos x}} \le \dfrac{x^2}{1} \quad x\in[0,1]$

$$\therefore \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^2dx \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x\cos x}}dx \le \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

FIVE

解： $\because$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续， $\therefore$ $g(x)=(\sin 2x)f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义且

$g(0)=0$

又 $\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin 2x)f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}f(x)=2f(0)$ 存在

$\therefore$ $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $g'(0)=2f(0)$。

SIX

解：(1) $\because$ $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续， $\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续， $\therefore$ 当 $x\ne0$ 时 $g(x)$ 连续，

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$， $\therefore$ 当 $a=f'(0)$ 时 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

（2）当 $x\ne0$ 时 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ 为连续函数，（$\because$ $f(x)$ 及 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续）

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0).$$

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$=g'(0)$

$\therefore$ $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。