2020 第一学期高等数学一　期中考试试题

一、求下面数列或函数的极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)^n$.

二、设 0<a<b，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

三、设函数$f(x)$在开区间(a,b)连续，且$a<x_1<x_2<b$,证明：对$\forall\, p>0, q>0$，
在(a,b)内至少存在一点ξ,使$(p+q)f(\xi)=pf(x_1)+qf(x_2)$.

四、若$f'(x_0)$存在，求极限$\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-2\Delta x)}{\Delta x}$.

五、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & if\ x>0;\\ 1 & if\ x=0;\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & if\ -1\leqslant x<0;\end{cases}$,讨论函数$f(x)$的连续性.

六、设$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 求$f(x)$的间断点，并说明间断点所属的类型.

七、设$y=f(x)$在区间(a,b)内可导，且其值域含于(A,B)之内，又设$z=g(y)$在(A,B)内可导.
证明：不论y是自变量，还是中间变量，当$z=g(y)$时公式$dz=g'(y)dy$总是成立的.
(即证明：一阶微分具有形式不变性)

八、若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a<0$,则$\exists\ \delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)<0$.

九、计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$.

2. $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^2+1}dx$.

十、证明：函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}$在$x=0$的任意邻域内都是无界的，但当$x\to0$时，

$f(x)$不是无穷大量.

——cyc