



## 东校区 2009 学年度第一学期 09 级 《高等数学一》期中考试题

一、求下列极限（每小题 7 分，共 28 分）

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$

2、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$

3、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x} \right)^{x+2}$

4、 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

二、完成下列各题（每小题 7 分，共 28 分）

1、设  $y = x\sqrt{x^2 - a^2}$ ，求  $y'$ 。

2、设  $y = \frac{\sin e^x}{1+x^2}$ ，求  $dy$ 。

3、已知  $ye^{x+1} \ln y = 1$ ，求  $y'(0)$ 。

4、设  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

三、求下列积分（每小题 7 分，共 28 分）

1、 $\int \frac{1}{x^2+2x-3} dx$

2、 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ， $(a>0)$

3、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$

4、 $\int_0^1 \arctan x dx$

四、(6 分) 证明:  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sin x}{e^x(1+x^2)} dx \leq \frac{\pi}{12e}$

五、(5 分) 求星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  ( $a > 0$ ) 绕  $x$  轴旋转构成的旋转体的体积。

六、(5 分) 证明: 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = f(b) = k$ ,  $f'_+(a) \cdot f'_-(b) > 0$ , 则在  $(a, b)$  内至少有一点  $\varepsilon$ , 使  $f(\varepsilon) = k$ 。