

## Chương 5: Phương trình vi phân

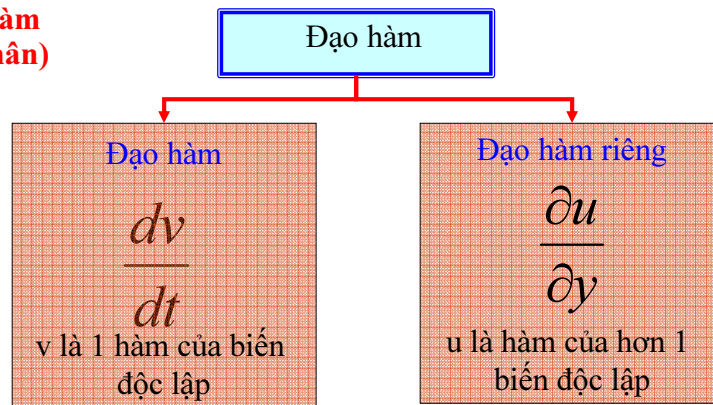
TS. Lê T. P. Nam

IUH - 2017

### Mục tiêu của chương

- Giải phương trình vi phân (**Ordinary Differential Equations ODEs**).
- Sự quan trọng của phương pháp số giải ODEs.
- Đánh giá độ tin cậy của các phương pháp.

**Đạo hàm  
(vi phân)**



## Phương trình vi phân

### Phương trình vi phân

#### Phương trình vi phân

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 6tv = 1$$

Gồm 1 hay nhiều đạo hàm của các hàm ẩn số.

#### Phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Gồm 1 hoặc nhiều đạo hàm toàn phần của các hàm ẩn số.

3

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Phương trình vi phân (Ordinary differential equation ODE)

**Phương trình vi phân (ODEs)** gồm một hoặc nhiều đạo hàm của các hàm ẩn với 1 biến độc lập.

**Ví dụ:**

$$\frac{dv(t)}{dt} - v(t) = e^t$$

$x(t)$ : Hàm ẩn

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

$t$ : Biến độc lập

4

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Bậc của 1 phương trình vi phân

Bậc của 1 phương trình vi phân là bậc của đạo hàm cao nhất.

Ví dụ:

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t \quad \text{Bậc 1 ODE}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t) \quad \text{Bậc 2 ODE}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} + 2x^4(t) = 1 \quad \text{Bậc 2 ODE}$$

5

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## ODE tuyến tính

Một phương trình vi phân ODE là tuyến tính nếu hàm và đạo hàm của nó xuất hiện với lũy thừa 1. Không có tích của hàm và/hoặc đạo hàm của nó.

Ví dụ:

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t \quad \text{ODE tuyến tính}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2t^2x(t) = \cos(t) \quad \text{ODE phi tuyến}$$

$$\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{x(t)} = 1 \quad \text{ODE phi tuyến}$$

6

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## ODE phi tuyến

### Một phương trình ODE là phi tuyến nếu

Nếu hàm và đạo hàm của nó xuất hiện lớn hơn 1. Có tích giữa hàm và/hoặc đạo hàm của nó.

Ví dụ:

$$\frac{dx(t)}{dt} - \cos(x(t)) = 1$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5 \frac{dx(t)}{dt} x(t) = 2$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| + x(t) = 1$$

7

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Giải phương trình vi phân bằng pp số

$$x(t) = \cos(2t)$$

Là nghiệm của pt vi phân

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$$

Tất cả các hàm với  $x(t) = \cos(2t) + c$  là nghiệm của pt vi phân trên với  $c$  là hằng số.

**Để có thể giải pt vi phân bậc  $n$  chúng ta cần  $n$  điều kiện.**

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0 \quad \text{ODE bậc 2}$$

$$x(0) = a$$

$$\dot{x}(0) = b$$

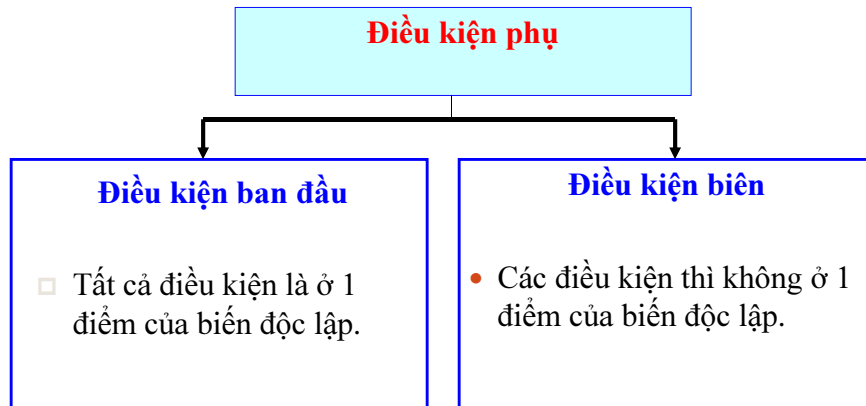
2 điều kiện cần để giải.

8

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Điều kiện phụ (Auxiliary Conditions)



9

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Bài toán giá trị biên và giá trị ban đầu.

### Bài toán giá trị ban đầu

- Tất cả điều kiện là ở 1 điểm của biến độc lập.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$
$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2.5$$

Giống  
nhau

### Bài toán giá trị biên

- Các điều kiện thì không ở 1 điểm của biến độc lập
- Giải bài toán này khó hơn bài toán giá trị ban đầu.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$
$$x(0) = 1, x(2) = 1.5$$

Khác  
nhau

10

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Phân loại pt vi phân ODEs

Các pt vi phân có thể được phân loại theo các cách khác nhau:

- **Bậc** : ODE bậc 1; ODE bậc 2; ODE bậc  $n$  .
- **Tuyến tính**: ODE tuyến tính; ODE phi tuyến.
- **Điều kiện phụ**: Các bài toán giá trị ban đầu; Các bài toán giá trị biên

**Phương pháp giải tích để giải** ODEs thì có sẵn cho ODEs tuyến tính và các loại đặc biệt cho ODEs phi tuyến.

### Phương pháp số

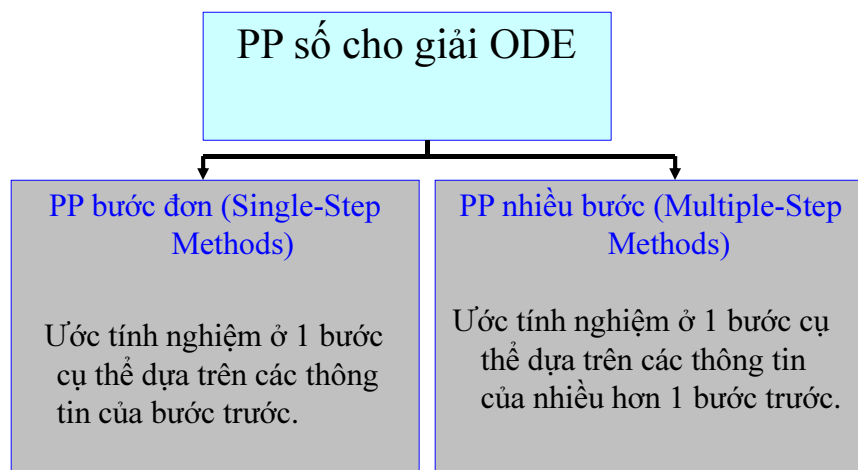
- PP số được dùng để đạt 1 đồ họa hoặc 1 bảng của hàm.
- Hầu hết pp số dùng để giải các pt vi phân dựa trên trực tiếp hoặc gián tiếp dựa trên khai triển chuỗi Taylor.

11

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Phân loại phương pháp



12

IUH-HK1-2017-2018

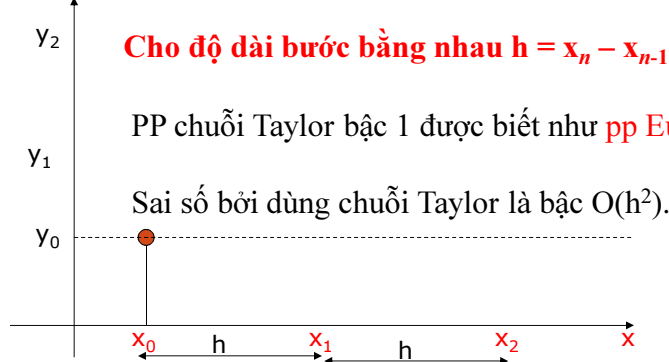
TS. Lê T. P. Nam

## Phương pháp chuỗi Taylor

Bài toán đề được giải quyết với pt vi phân bậc 1:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$y(x_0 + h), y(x_0 + 2h), y(x_0 + 3h), \dots$$



13

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## PP chuỗi Taylor bậc 1 (PP Euler)

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} + O(h^2)$$

Chú ý: Chia thành  $n$  khoảng bằng nhau trên trục  $x$

$$x_n = x_0 + n \cdot h, \quad y_n = y(x_n),$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = f(x_i, y_i)$$

**Phương pháp Euler**

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

14

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Phương pháp Euler

Bài toán:

Cho trước pt vi phân:  $y'(x) = f(x, y)$

Với điều kiện ban đầu:  $y_0 = y(x_0)$

Tính  $y_i = y(x_0 + ih)$  cho  $i = 1, 2, \dots$

### Phương pháp Euler

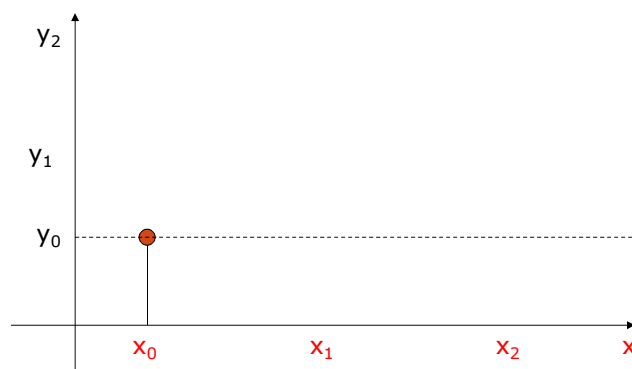
$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad \text{cho } i = 1, 2, \dots$$

15 IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Nội suy của pp Euler.

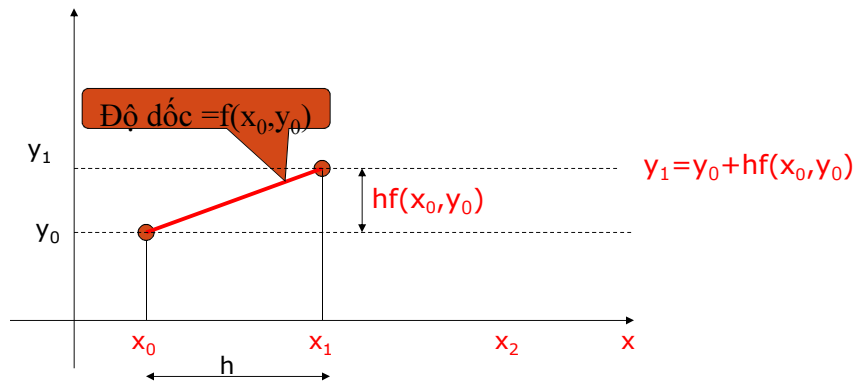


16 IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam



## Nội suy của pp Euler.

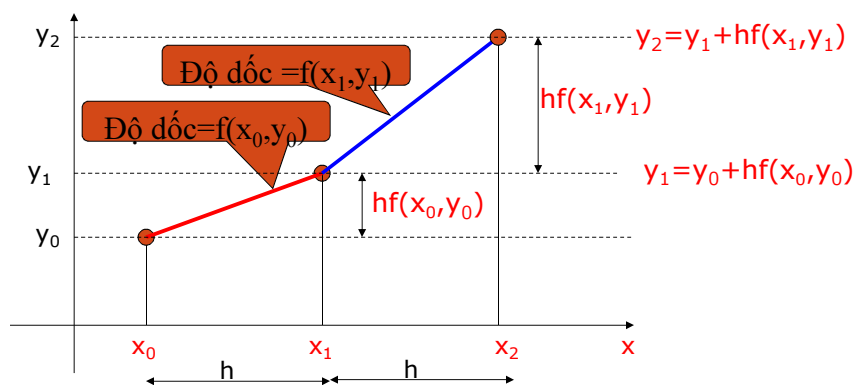


17

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Nội suy của pp Euler.



18

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

Nếu độ dài bước **KHÔNG** bằng nhau lúc đó thay  $h_i = x_i - x_{i-1}$

Lúc đó chúng ta giải xấp xỉ pt vi phân theo PP Euler như sau:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) * (x_1 - x_0)$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) * (x_2 - x_1)$$

$\vdots$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) * (x_{i+1} - x_i)$$

19

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Ví dụ 1:

Dùng pp Euler để giải pt vi phân ODE:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2, \quad y(1) = -4$$

Tính  $y(1.01)$ ,  $y(1.02)$  và  $y(1.03)$ .

Đk ban đầu

$$f(x, y) = 1 + x^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -4, \quad h = 0.01$$

#### Giải: PP Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$B1: \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = -4 + 0.01(1 + (1)^2) = -3.98$$

$$B2: \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = -3.98 + 0.01(1 + (1.01)^2) = -3.9598$$

$$B3: \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = -3.9598 + 0.01(1 + (1.02)^2) = -3.9394$$

20

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

$$f(x, y) = 1 + x^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -4, \quad h = 0.01$$

**Bảng tóm tắt kết quả**

i	$x_i$	$y_i$
0	1.00	-4.00
1	1.01	-3.98
2	1.02	-3.9595
3	1.03	-3.9394

i	$x_i$	$y_i$	Giá trị thực $y_i$
0	1.00	-4.00	-4.00
1	1.01	-3.98	-3.97990
2	1.02	-3.9595	-3.95959
3	1.03	-3.9394	-3.93909

21

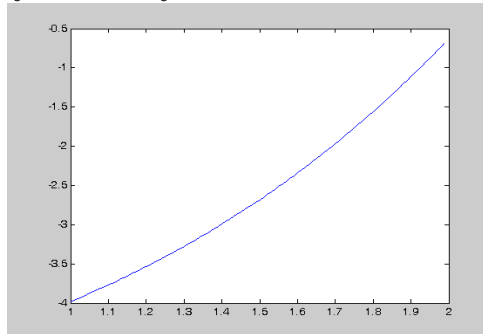
IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

$$f(x, y) = 1 + x^2, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -4, \quad h = 0.01$$

Đồ thị của kết quả pt

vi phân trên trong  
khoảng  $1 < x < 2$



### Các loại sai số

**Sai số cục bộ:** Sai số do việc sử dụng các chuỗi Taylor để tính  $y(x + h)$  chỉ trong một bước.

**Sai số toàn cục:** Sai số tích lũy trên nhiều bước.

**Sai số làm tròn:** Sai số do số lượng hữu hạn các bit được sử dụng trong việc đại diện của các con số.

22

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Lập trình pp Euler

Viết 1 chương trình Matlab cho pp Euler để giải pt

$$\frac{dv}{dt} = 1 - 2v^2 - t, \quad v(0) = 1 \quad \text{Cho } t_i = 0.01i \text{ với } i = 1, 2, 3, \dots, 100$$

$h = 0.01$

```
f=inline('1-2*v^2-t','t','v')
```

```
h=0.01
```

```
t=0
```

```
v=1
```

```
T(1)=t;
```

```
V(1)=v;
```

```
for i=1:100
```

```
    v=v+h*f(t,v)
```

```
    t=t+h;
```

```
    T(i+1)=t;
```

```
    V(i+1)=v;
```

```
end
```

Xác định ODE

Điều kiện ban đầu

Vòng lặp chính

PP Euler

Lưu trữ

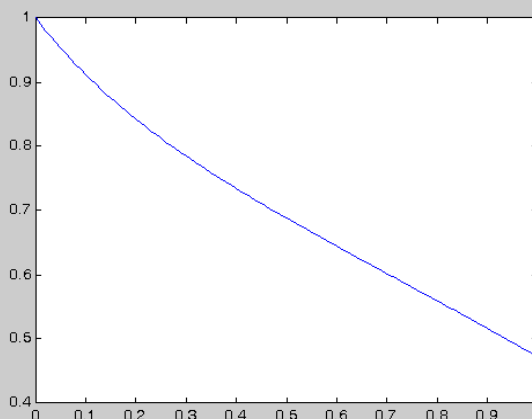
23 IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Lập trình pp Euler

Vẽ kết quả

Lệnh vẽ:  
`plot(t,v)`



24 IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Ví dụ 2: PP Euler

- Cho pt vi phân:  $y' = 3 - 2x - 0.5y$

Điều kiện ban đầu :  $y(0) = 1$

Dùng pp Euler với  $h = 0.2$  để giải pt vi phân trên ở  $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ , và  $1.0$ . **Phân tích sai số biết giải chính xác:**

$$y = 14 - 4x - 13e^{-0.5x}$$

**Giải:**

Cho ngắn gọn đặt  $f_i = f(x_i, y_i)$

$$y_1 = y_0 + f_0 \cdot h = 1 + (3 - 0 - 0.5)(0.2) = 1 + 2.5(0.2) = 1.5$$

$$y_2 = y_1 + f_1 \cdot h = 1.5 + (3 - 2(0.2) - 0.5(1.5))(0.2) \approx 1.87$$

$$y_3 = y_2 + f_2 \cdot h = 1.87 + (3 - 2(0.4) - 0.5(1.87))(0.2) \approx 2.123$$

$$y_4 = y_3 + f_3 \cdot h = 2.123 + (3 - 2(0.6) - 0.5(2.123))(0.2) \approx 2.2707$$

$$y_5 = y_4 + f_4 \cdot h = 2.2707 + (3 - 2(0.8) - 0.5(2.2707))(0.2) \approx 2.32363$$

25

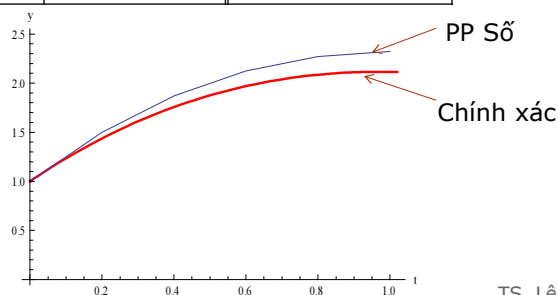
IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Phân tích sai số:

$$\text{Sai số} = \frac{|y_{\text{chính xác}} - y_{\text{so}}|}{y_{\text{chính xác}}} \times 100$$

x	Chính xác y	Xấp xỉ (Số) y	% Sai số
0	1	1	0
0.2	1.43711	1.5	4.38
0.4	1.7565	1.87	6.46
0.6	1.96936	2.123	7.8
0.8	2.08584	2.2707	8.86
1	2.1151	2.32363	9.8591083



26

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Ví dụ 3: Pp Euler

- Cho pt vi phân  $y' = 4 - x + 2y$ , dk  $y(0) = 1$   
Dùng pp Euler với  $h = 0.1$  để giải xấp xỉ pt vi phân trên ở  $x = 0.1, 0.2, 0.3$ , và  $0.4$ . Phân tích sai số biết giải chính xác.

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}e^{2x}$$

**Giải:**

Cho ngắn gọn đặt  $f_i = f(x_i, y_i)$

$$y_1 = y_0 + f_0 \cdot h = 1 + (4 - 0 + (2)(1))(0.1) = 1.6$$

$$y_2 = y_1 + f_1 \cdot h = 1.6 + (4 - 0.1 + (2)(1.6))(0.1) = 2.31$$

$$y_3 = y_2 + f_2 \cdot h = 2.31 + (4 - 0.2 + (2)(2.31))(0.1) \approx 3.15$$

$$y_4 = y_3 + f_3 \cdot h = 3.15 + (4 - 0.3 + (2)(3.15))(0.1) \approx 4.15$$

**Phân tích sai số: Bài tập về nhà**

27

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Bài tập: PP Euler

- Cho pt vi phân

$$y' = 3 - 2x - 0.5y,$$

Điều kiện ban đầu :  $y(0) = 1$

Dùng pp Euler với  $h = 0.1, 0.05, 0.25, 0.01$  để giải pt vi phân trên ở  $x = 1, 2, 3, 4$ , và  $5$ . Phân tích sai số biết giải chính xác.

$$y = 14 - 4x - 13e^{-0.5x}$$

- Cho pt vi phân

$$y' = -2y + \cos(4x)$$

Điều kiện ban đầu :  $y(0) = 3$ .

Dùng pp Euler với  $h = 0.2$  để giải pt vi phân trên ở  $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  và  $1$ . Phân tích sai số biết giải chính xác là:

$$y = 2.9e^{-2x} + 0.1\cos(4x) + 0.2\sin(4x).$$

28

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## PP Runge-Kutta (RK) bậc 2

Đặt  $K_1 = h f(x_i, y_i)$

$$K_2 = h f(x_i + \alpha h, y_i + \beta K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + w_1 K_1 + w_2 K_2$$

**Bài toán:** Tìm  $\alpha, \beta, w_1, w_2$  sao cho  $y_{i+1}$  càng chính xác càng tốt.

- Khai triển chuỗi Taylor ở bậc 2 và dùng các qui tắc sai phân số ta sẽ tìm được các mối liên hệ giữa  $\alpha, \beta, w_1, w_2$  (xem chi tiết trong giáo trình). Khi đó ta có các pt cho mối liên hệ giữa  $\alpha, \beta, w_1, w_2$  sau:

**Chọn  $\alpha, \beta, w_1, w_2$  sao cho thỏa các pt sau**

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_2 \alpha = 0.5, \quad \text{và} \quad w_2 \beta = 0.5$$

**Dạng khác của RK bậc 2**

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \alpha h, y_i + \beta h k_1)$$

**Chú ý:** Giá trị  $K_{1,2} \neq k_{1,2}$

$$y_{i+1} = y_i + h(w_1 k_1 + w_2 k_2)$$

29

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Chọn các giá trị $\alpha, \beta, w_1$ và $w_2$

**Chọn  $\alpha = 1, \beta = 1, w_1 = w_2 = 0.5$ .** Khi đó pp RK bậc 2 thành

$$K_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h f(x_i + h, y_i + K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

**Đây còn gọi là pp Heun với Corrector đơn**

**Chọn  $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, w_1 = 0, w_2 = 1$ .** Khi đó pp RK bậc 2 thành

$$K_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$$

**Đây còn gọi là pp điểm giữa**

$$y_{i+1} = y_i + K_2 = y_i + h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$$

30

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Pp RK bậc 2:**

$$\alpha w_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta w_2 = \frac{1}{2}, \quad w_1 + w_2 = 1$$

**Chọn 1 số  $\alpha$  khác 0 :**  $\beta = \alpha$ ,  $w_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$ ,  $w_2 = \frac{1}{2\alpha}$   
và tính theo  $\alpha$ .

Khi đó pp RK bậc 2 thành

$$K_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) K_1 + \frac{1}{2\alpha} K_2$$

31

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 4:** Dùng pp RK bậc 2 để tìm  $y(1.02)$

$$y'(x) = 1 + y^2 + x^3, \quad y(1) = -4, \quad h = 0.01, \quad \alpha = 1$$

**Giải**

Bước 1:

$$\begin{aligned} K_1 &= h f(x_0 = 1, y_0 = -4) = 0.01(1 + y_0^2 + x_0^3) \\ &= 0.18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= h f(x_0 + h, y_0 + K_1) \\ &= 0.01(1 + (y_0 + 0.18)^2 + (x_0 + 0.01)^3) \\ &= 0.1662 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1 + 0.01) &= y(1) + (K_1 + K_2) / 2 \\ &= -4 + (0.18 + 0.1662) / 2 \\ &= -3.8269 \end{aligned}$$

32

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam



Buoc 2:

$$K_1 = h f(x_1 = 1.01, y_1 = -3.8269)$$

$$= 0.01(1 + y_1^2 + x_1^3) = 0.1668$$

$$K_2 = h f(x_1 + h, y_1 + K_1)$$

$$= 0.01(1 + (y_1 + 0.1668)^2 + (x_1 + 0.01)^3)$$

$$= 0.1546$$

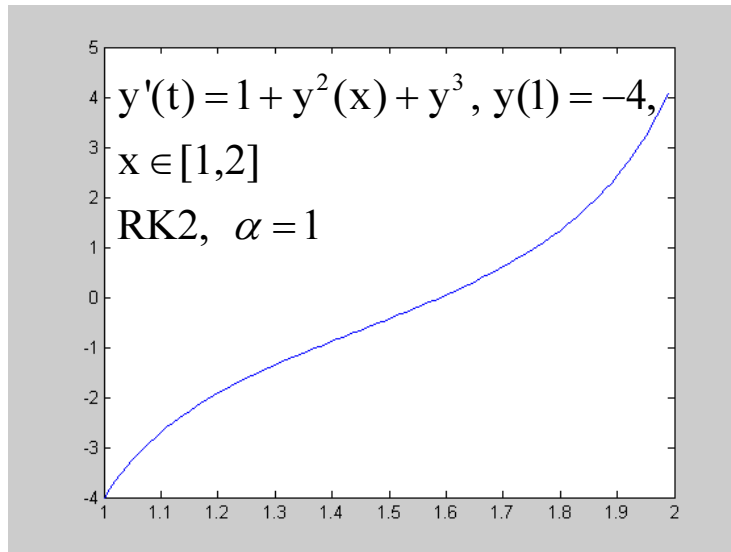
$$y(1.01 + 0.01) = y(1.01) + (K_1 + K_2) / 2$$

$$= -3.8269 + (0.1668 + 0.1546) / 2 = -3.6662$$

33

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam



34

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### PP Runge-Kutta bậc cao:

Pp RK bậc cao thì có sẵn và nó thì chính xác hơn nhưng yêu cầu nhiều tính toán hơn.

#### Được biết như RK bậc 3

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1h + 2k_2h)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Sai số cục bộ là  $O(h^4)$  và sai số toàn cục là  $O(h^3)$ .

#### Tóm tắt

Pp Runge Kutta cho kết quả chính xác mà không cần tính các đạo hàm bậc cao.

Pp RK bậc 2 có sai số cục bộ  $O(h^3)$  và sai số toàn cục  $O(h^2)$ .

Pp RK bậc cao sẽ có các sai số trên nhỏ hơn

35

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Hệ phương trình vi phân (ODE) bậc 1:

Các pp cho giải hệ pt vi phân bậc 1 ODEs.

Chúng ta mở rộng các pp Euler và RK2 để giải hệ pt vi phân bậc 1.

$$\text{Cho } \frac{dY(X)}{dX} = F(X, Y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \dots \\ f_n(x, y) \end{bmatrix}, \quad Y(X_0) = \begin{bmatrix} y_1(x_{01}) \\ y_2(x_{02}) \\ \dots \\ y_n(x_{0n}) \end{bmatrix}$$

#### Pp Euler để giải 1 hệ của n pt vi phân bậc 1.

PP Euler :

$$Y_1 = Y(x_0 + h) = Y_0 + h F(X_0, Y_0) \quad \mathbf{X, Y} \text{ là 1 véc tơ có chiều dài } n.$$

$$Y_2 = Y(x_0 + 2h) = Y_1 + h F(X_1, Y_1)$$

$$Y_3 = Y(x_0 + 3h) = Y_2 + h F(X_2, Y_2) \quad \mathbf{F(Y, X)} \text{ là hàm giá trị véc tơ}$$

36

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 5:** PP Euler cho giải hệ pt vi phân ODE bậc 1

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix} = F(X, Y), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tính  $Y(0.1)$  và  $Y(0.2)$  với  $h = 0.1$

**Giải**

B1:

$$Y_1 = Y(0 + h) = Y_0 + h F(X_0, Y_0)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0) \\ 1 - y_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 0.1 * 1 \\ 1 + 0.1(1 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

B2:

$$Y_2 = Y(0 + 2h) = Y_1 + h F(X_1, Y_1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0.2) \\ y_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0.1) \\ 1 - y_1(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 + 0.1 * 1.2 \\ 1.2 + 0.1(1 + 0.9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.78 \\ 1.39 \end{bmatrix}$$

37

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 6:** Pp RK bậc 2 với  $\alpha = 1, \beta = 1, w_1 = w_2 = 0.5$  cho giải hệ pt vi phân ODE bậc 1

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix} = F(X, Y), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tính  $Y(0.1)$  và  $Y(0.2)$  với  $h = 0.1$

**Giải**

$$B1: K_1 = h F(0, Y(0)) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0) \\ 1 - y_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = h F(0 + 1 * h, Y(0) + K_1) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0) + 0.2 \\ 1 - (y_1(0) + 0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.19 \end{bmatrix}$$

$$Y(0 + h) = Y(0) + 0.5(K_1 + K_2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.19 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.89 \\ 1.195 \end{bmatrix}$$

38

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

$$\begin{bmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix} = F(X, Y), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B2: \quad K_1 = h F(0.1, Y(0.1)) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0.1) \\ 1 - y_1(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1195 \\ 0.1890 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = h F(0.1 + 1 * h, Y(0.1) + K_1) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0.1) + 0.189 \\ 1 - (y_1(0.1) + 0.1195) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1384 \\ 0.1771 \end{bmatrix}$$

$$Y(0.1 + h) = Y(0.1) + 0.5(K_1 + K_2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0.2) \\ y_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 \\ 1.195 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0.1195 \\ 0.1890 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1384 \\ 0.1771 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.7611 \\ 1.3780 \end{bmatrix}$$

39

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Bài tập

3. Dùng pp RK bậc 2 (pp điểm giữa để giải pt vi phân sau), x trong khoảng  $[0, 2]$ ,  $y(0) = 1$  và với  $h = 0.5$  và  $h = 0.25$ .

$$y' = yx^2 - 1.1y$$

4. Giải pt vi phân sau dùng pp RK2 (pp Heun) với x trong khoảng  $[0, 1]$  với  $h = 0.25$ ,  $y(0) = 1$ .

$$y' = (1 + 4x)y^{0.5}$$

40

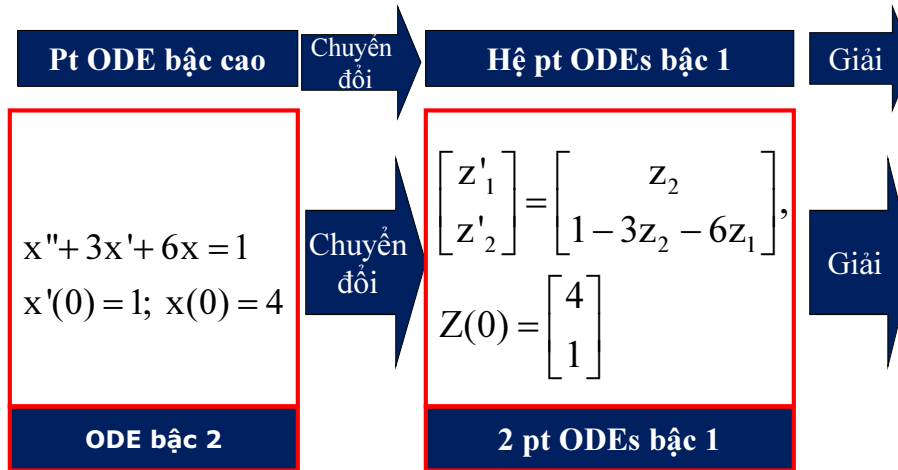
IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Pt vi phân bậc cao

Làm thế nào để giải pt ODE bậc cao  $x'' + 3x' + 6x = 1$

Cách tổng quát để giải pt ODE bậc cao



41

IUH-HK1-2017-2018

**Z là 1 véc tơ (khác z)**

TS. Lê T. P. Nam

## Quá trình chuyển đổi

### 1. Chọn các biến phụ thuộc

Một cách là để lấy biến phụ thuộc ban đầu và các đạo hàm của nó đến một bậc thấp hơn đạo hàm cao nhất.

### 2. Viết các phương trình vi phân theo các biến mới.

### 3. Biểu diễn các phương trình dưới dạng ma trận.

### Chú ý trong quá trình chuyển đổi

1. Pt vi phân có **bậc n** bất kỳ được chuyển đổi sang một **hệ n pt vi phân bậc 1**.
2. Có vô số cách để lựa chọn các biến mới. Kết quả là, đối với mỗi pt vi phân bậc cao có một số lượng vô hạn của tập hợp các hệ pt vi phân bậc 1 tương đương.
3. Sử dụng một bảng để làm cho việc chuyển đổi dễ dàng hơn.

42

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 7:** Chuyển đổi pt ODE bậc cao tới ODEs bậc 1

**Giải**  $x'' + 3x' + 6x = 1, \quad x'(0) = 1; \quad x(0) = 4$

1. Chọn các biến mới: ODE bậc 2 nên cần 2 biến

$$z_1 = x$$

$$z_2 = x'$$

Còn lại đạo hàm bậc 1

Tên cũ	Tên mới	Giá trị ban đầu	Phương trình
$x$	$z_1$	4	$z'_1 = z_2$
$x'$	$z_2$	1	$z'_2 = 1 - 3z_2 - 6z_1$

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 1 - 3z_2 - 6z_1 \end{bmatrix}, Z(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

43

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 8:** Chuyển đổi pt ODE bậc cao tới ODEs bậc 1

$$x''' + 2x'' + 7x' + 8x = 0$$

$$x''(0) = 9, \quad x'(0) = 1; \quad x(0) = 4 \quad \text{Giải}$$

1. Chọn các biến mới: ODE bậc 3 nên cần 3 biến

Tên cũ	Tên mới	Giá trị ban đầu	Phương trình
$x$	$z_1$	4	$z'_1 = z_2$
$x'$	$z_2$	1	$z'_2 = z_3$
$x''$	$z_3$	9	$z'_3 = -2z_3 - 7z_2 - 8z_1$

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -2z_3 - 7z_2 - 8z_1 \end{bmatrix}, \quad Z(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

44

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 9:** Chuyển đổi pt ODE bậc cao tới ODEs bậc 1

$$x''' + 5x'' + 2x' + 8y = 0$$

$$y'' + 2xy + x' = 2$$

$$x(0) = 4; x'(0) = 2; x''(0) = 9; y(0) = 1; y'(0) = -3$$

**Giải**

1. Chọn các biến mới: ODE bậc 3 cho 2 biến nên cần (3+2) biến.

Tên cũ	Tên mới	Giá trị ban đầu	Phương trình
x	$z_1$	4	$z'_1 = z_2$
$x'$	$z_2$	2	$z'_2 = z_3$
$x''$	$z_3$	9	$z'_3 = -5z_3 - 2z_2 - 8z_4$
y	$z_4$	1	$z'_4 = z_5$
$y'$	$z_5$	-3	$z'_5 = 2 - z_2 - 2z_1z_4$

45

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Giải pt vi phân bậc 2

- Giải pt dùng pp Euler. Dùng  $h = 0.1$ , tính tại 0.1 và 0.2

$$x'' + 2x' + 8x = 2$$

$$x(0) = 1; x'(0) = -2$$

**Giải** Chọn các biến mới:  $z_1 = x, z_2 = x'$

Pt bậc 2 được biểu diễn

$$Z' = F(Z) = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 2 - 2z_2 - 8z_1 \end{bmatrix}, Z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

46

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

$$F(Z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ 2 - 2z_2 - 8z_1 \end{bmatrix}, Z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, h = 0.1$$

$$\begin{aligned} Z(0 + 0.1) &= Z(0) + hF(Z(0)) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 - 2(-2) - 8(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -2.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(0.2) &= Z(0.1) + hF(Z(0.1)) \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 \\ -2.2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -2.2 \\ 2 - 2(-2.2) - 8(0.8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58 \\ -2.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Tóm tắt:** Các công thức dùng trong giải pt vi phân bậc 1 ODE được dùng để giải hệ pt vi phân bậc 1.

Khi đó thay vì là các biến và hàm vô hướng chúng ta có các biến và hàm dưới dạng véc tơ.

Pt ODEs bậc cao được chuyển đổi thành hệ bậc 1.

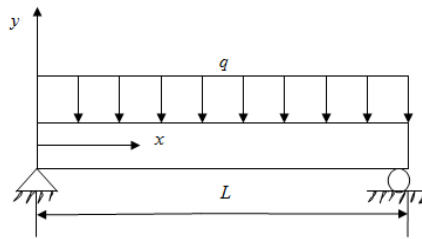
47

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Ứng dụng giải bài toán độ võng dầm chịu lực phân bố

**Giải cho Bài toán giá trị (điều kiện) biên**  
**Dùng lại tính sai phân số chương 3**



Phương trình vi phân cho độ uốn y: x: vị trí dọc theo dầm

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q(L-x)^2}{2EI}$$

E: hệ số Young

I: mô men

q: tải

L: chiều dài dầm

Điều kiện biên

$$y(x=0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x=0) = 0$$

48

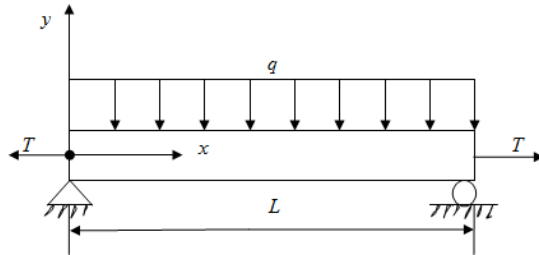
IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam



**Ví dụ 10:** Độ võng  $y$  của 1 dầm chịu lực phân bố và lực kéo,  $T$ , đúng tâm như sau:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{Ty}{EI} = \frac{qx(L-x)}{2EI}$$



Cho  $T = 7200\text{N}$ ,  $q = 5400\text{N/in}$ ,  $L = 75\text{ in}$ ,  $E = 30\text{Msi}$ ,  $I = 120\text{ in}^4$

Tính  $y$  tại  $x = 50\text{ in}$  với độ dài bước  $h = \Delta x = 25\text{in}$ , dùng công thức sai phân trung tâm.

49

IUH-HK1-2017-2018

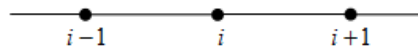
TS. Lê T. P. Nam

Thay các giá trị đã cho vào:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{7200y}{(30 \times 10^6)(120)} = \frac{(5400)x(75-x)}{2(30 \times 10^6)(120)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \times 10^{-6} y = 7.5 \times 10^{-7} x(75-x)$$

Xấp xỉ đạo hàm bậc 2 bằng công thức sai phân trung tâm



$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

50

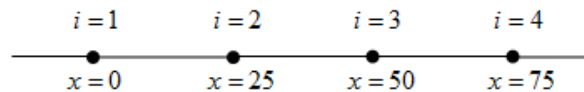
IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

Chúng ta viết lại pt:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} - 2 \times 10^{-6} y_i = 7.5 \times 10^{-7} x_i (75 - x_i) \quad (*)$$

Khi  $\Delta x = 25$  in ta có 4 điểm trên dầm



$$x_1 = 0$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 0 + 25 = 25$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 25 + 25 = 50$$

$$x_4 = x_3 + \Delta x = 50 + 25 = 75$$

51

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

Ở đây chúng ta không có bảng giá trị cho trước về độ võng.

**Điểm 1:**  $x_1 = 0, y_1 = 0$  theo điều kiện biên tựa trên gối

**Điểm 2:** Viết lại pt (\*) cho điểm 2

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(25)^2} - 2 \times 10^{-6} y_2 = 7.5 \times 10^{-7} x_2 (75 - x_2)$$

$$0.0016y_1 - 0.003202y_2 + 0.0016y_3 = 7.5 \times 10^{-7} (25)(75 - 25)$$

$$0.0016y_1 - 0.003202y_2 + 0.0016y_3 = 9.375 \times 10^{-4}$$

**Điểm 3:** Viết lại pt (\*) cho điểm 3

$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{(25)^2} - 2 \times 10^{-6} y_3 = 7.5 \times 10^{-7} x_3 (75 - x_3)$$

**Điểm 4:**  $x_4 = 75, y_4 = 0$  theo điều kiện biên tựa trên con lăn

52

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

Sắp xếp các pt của 4 điểm dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0016 & -0.003202 & 0.0016 & 0 \\ 0 & 0.0016 & -0.003202 & 0.0016 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.375 \times 10^{-4} \\ 9.375 \times 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5852 \\ -0.5852 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(50) = y(x_3) \approx y_3 = -0.5852''$$

53

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Bài tập

**5.** Dùng pp Euler và RK 2 (pp Heun) để giải pt vi phân sau:

$$y'' - 0.5y' + y = 0.$$

với  $y(0) = 2$  và  $y'(0) = 0$ . Giải cho  $x$  từ 0 đến 4 với  $h = 0.1$ .

**6.** Dùng pp Euler và RK 2 (điểm giữa) để giải pt vi phân sau

$$y'' + 0.6y' + 8y = 0$$

mà  $y(0) = 4$  và  $y'(0) = 0$  giải  $x = 0$  đến  $x = 5$  với  $h = 0.5$

54

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam