Trường Đại Học Công Nghiệp Tp.HCM
Khoa Kỹ Thuật Cơ Khí

Chương 4: Tích phân số

TS. Lê T. P. Nam

IUH - 2017

Tích phân

Tích phân không xác định

$$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$$

Tích phân không xác định khác nhau ở giá trị c.

Tích phân xác định

$$\int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

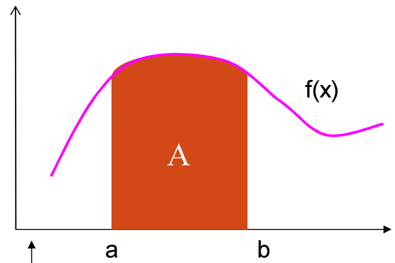
Tích phân xác định là số cụ thể.

Nếu f liên tục trên khoảng [a,b]. F là nguyên hàm của f

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Tích phân = diện tích (A) dưới đường cong

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



Công thức hình chữ nhật

Khoảng [a,b] được chia thành các khoảng nhỏ hơn.

$$P = \{a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b\}$$

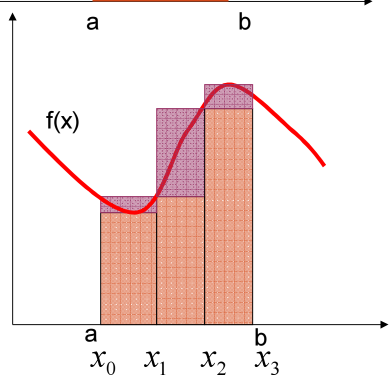
Định nghĩa:

$$m_i = \min\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$

$$M_i = \max\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$

Tổng dưới $L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$

Tổng trên $U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$

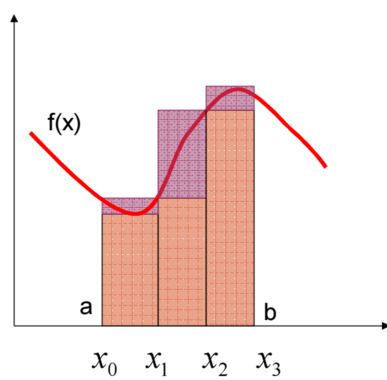


Tổng dưới $L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$

Tổng trên $U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$

Ước tính tích phân $= \dfrac{L+U}{2}$

Sai số $\le \dfrac{U-L}{2}$



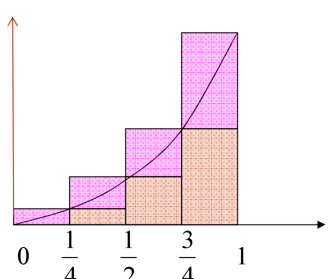
Ví dụ 1: $\displaystyle\int_0^1 x^2\, dx$

$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ n = 4: Chia 4 khoảng bằng nhau

$m_0 = 0, \quad m_1 = \frac{1}{16}, \quad m_2 = \frac{1}{4}, \quad m_3 = \frac{9}{16}$

$M_0 = \frac{1}{16}, \quad M_1 = \frac{1}{4}, \quad M_2 = \frac{9}{16}, \quad M_3 = 1$

$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{4}$ cho $i = 0,1,2,3$

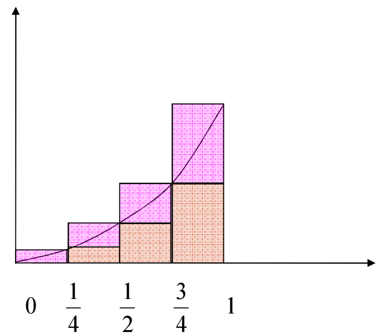


Tổng dưới $L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$

$$L(f,P)=\frac{1}{4}\left[0+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\right]=\frac{14}{64}$$

Tổng trên $U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$

$$U(f,P)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}+1\right]=\frac{30}{64}$$



Ước tính tích phân $=\frac{1}{2}\left(\frac{30}{64}+\frac{14}{64}\right)=\frac{11}{32}=0.34375$

Sai số $<\frac{1}{2}\left(\frac{30}{64}-\frac{14}{64}\right)=\frac{1}{8}$

- Ước tính dựa trên tổng hình chữ nhật thì dễ để đạt cho hàm **đơn điệu** (luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm).
- Hàm không đơn điệu, tìm cực trị của hàm có thể khó khăn và các phương pháp khác thì khả thi hơn.

Phương pháp Newton-Cotes

- Phương pháp Newton-Cotes, hàm được xấp xỉ bởi 1 đa thức n.
- Tính tích phân của đa thức thì dễ dàng.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\right)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx a_0(b-a)+a_1\frac{(b^2-a^2)}{2}+\ldots+a_n\frac{(b^{n+1}-a^{n+1})}{n+1}$$

- Phương pháp Trapezoid (Đa thức bậc 1 thì được dùng)

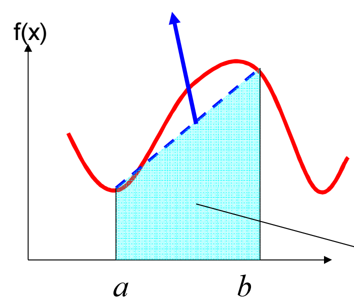
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0+a_1x\right)dx$$

- Qui tắc 1/3 Simpson (Đa thức bậc 2 được dùng)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)dx$$

Phương pháp Trapezoid (Công thức hình thang)

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



$$I=\int_a^b f(x)dx$$

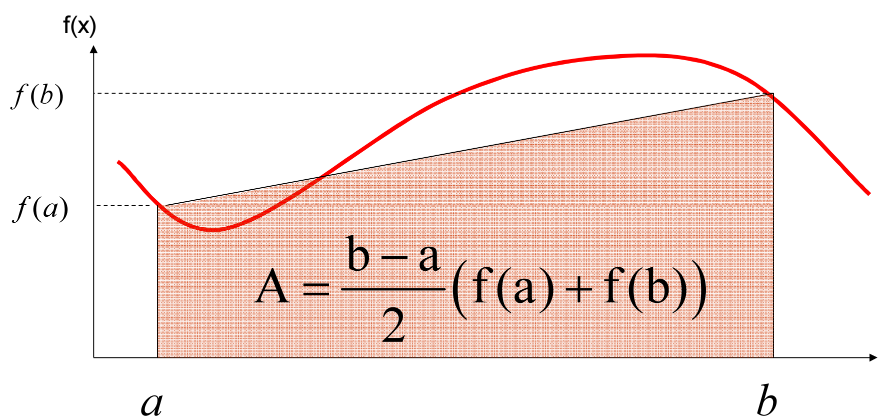
$$I\approx\int_a^b\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)dx$$

$$=\left(f(a)-a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x\Big|_a^b$$

$$+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$=(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

Phương pháp Trapezoid.



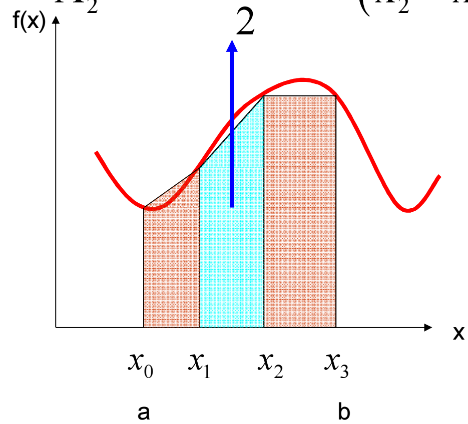
Phương pháp Trapezoid

Khoảng [a,b] được chia thành n khoảng nhỏ

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Tổng diện tích của các trapezoid.}$$

$$A_2 = \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2}(x_2 - x_1)$$



Phương pháp Trapezoid
Công thức tổng quát và trường hợp đặc biệt.

Nếu khoảng được chia thành n phần (không cần thiết chia đều)

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)}$$

Trường hợp đặc biệt (Chia đều các khoảng)

$$x_{i+1} - x_i = h \quad \text{for all} \quad i$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Ví dụ 2:

Cho bảng dữ liệu vận tốc của 1 vật.

Ước tính khoảng cách đi trong khoảng [0,3].

t (s)	0.0	1.0	2.0	3.0
v (m/s)	0.0	10	12	14

Khoảng cách = Tích phân của vận tốc

$$\text{Khoang cach} = \int_0^3 V(t)\,dt$$

Khoảng được chia thành 3 khoảng . Các điểm là {0,1, 2, 3}

t (s)	0.0	1.0	2.0	3.0
V (m/s)	0.0	10	12	14

PP Trapezoid

$$h = x_{i+1} - x_i = 1$$

$$T = h\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_n)\right)\right]$$

$$\text{Khoang cach} = 1\left[(10+12) + \frac{1}{2}(0+14)\right] = 29$$

Sai số trong ước tính tích phân

Giả định f''(x) là liên tục trên [a,b].

Các khoảng chia đều nhau: h

Nếu pp Trapezoid được dùng để xấp xỉ:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Khi đó

Sai số $= -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$ mà $\xi \in [a,b]$

$$|\text{Sai số}| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Ví dụ 3: Cần bao nhiêu khoảng để tính

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

chính xác tới 5 chữ số thập phân.

Giải $\int_0^{\pi} \sin(x)dx,$ tim h de $|\text{sai so}| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

$$|\text{Sai so}| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$b=\pi;\ a=0;\quad f'(x)=\cos(x);\quad f''(x)=-\sin(x)$$

$$|f''(x)| \le 1 \ \Rightarrow |\text{Sai so}| \le \frac{\pi}{12} h^2 \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow\ h^2 \le \frac{6}{\pi}\times 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad h \le 0.00437$$

$$\Rightarrow\ n \ge \frac{(b-a)}{h} = \frac{\pi}{0.00437} = 719 \text{ khoang}$$

Ví dụ 4:

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
f(x)	2.1	3.2	3.4	2.8	2.7

Dùng pp Trapezoid để tính $\int_1^3 f(x)dx$

Giải $$T(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)\big(f(x_{i+1})+f(x_i)\big)$$

Trường hợp đặc biệt: $h=x_{i+1}-x_i$ cho tất cả i,

$$T(f,P)=h\left[\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}\big(f(x_0)+f(x_n)\big)\right]$$

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
f(x)	2.1	3.2	3.4	2.8	2.7

$$\int_1^3 f(x)dx\approx h\left[\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+\frac{1}{2}\big(f(x_0)+f(x_n)\big)\right]$$

$$=0.5\left[3.2+3.4+2.8+\frac{1}{2}(2.1+2.7)\right]$$

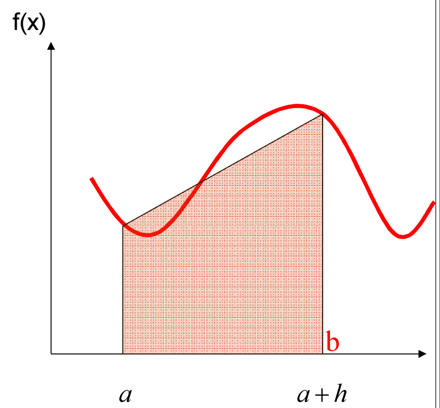
$$=5.9$$

PP Trapezoid đệ quy

Ước tính trên 1 khoảng

$$h = b - a$$

$$R(0,0) = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$



PP Trapezoid đệ quy

Ước tính trên 2 khoảng

$$h = \frac{b-a}{2}$$

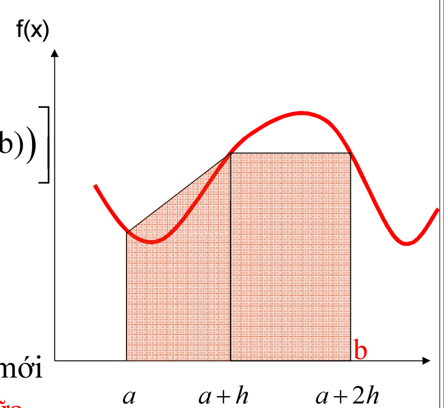
$$R(1,0) = \frac{b-a}{2}\left[f(a+h) + \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)\right]$$

$$R(1,0) = \frac{1}{2}R(0,0) + h\big[f(a+h)\big]$$

Dựa trên ước tính trước

Dựa trên điểm mới

Điểm giữa khoảng



PP Trapezoid đệ quy

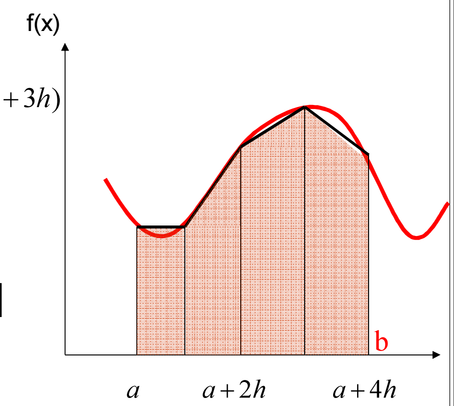
$$h = \frac{b-a}{4}$$

$$R(2,0) = \frac{b-a}{4}\left[f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)\right]$$

$$R(2,0) = \frac{1}{2}R(1,0) + h\left[f(a+h) + f(a+3h)\right]$$

Dựa trên ước tính trước

Dựa trên điểm mới



PP Trapezoid đệ quy

$$R(0,0) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$R(n,0) = \frac{1}{2}R(n-1,0) + h\left[\sum_{k=1}^{2^{(n-1)}} f\big(a + (2k-1)h\big)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2^n}$$

$$h = b - a, \qquad \mathrm{R}(0{,}0) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2}, \qquad R(1{,}0) = \frac{1}{2}R(0{,}0) + h\left[\sum_{k=1}^{1} f\big(a + (2k-1)h\big)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2^2}, \qquad R(2{,}0) = \frac{1}{2}R(1{,}0) + h\left[\sum_{k=1}^{2} f\big(a + (2k-1)h\big)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2^3}, \qquad R(3{,}0) = \frac{1}{2}R(2{,}0) + h\left[\sum_{k=1}^{2^2} f\big(a + (2k-1)h\big)\right]$$

....

$$h = \frac{b-a}{2^n}, \qquad R(n{,}0) = \frac{1}{2}R(n-1{,}0) + h\left[\sum_{k=1}^{2^{(n-1)}} f\big(a + (2k-1)h\big)\right]$$

Ví dụ 5:

Dùng pp Trapezoid đệ quy để tính

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

Tính đến R(3,0) và ước lượng sai số

n	h	R(n,0)
0	(b-a)=π/2	(π/4)[sin(0) + sin(π/2)]=0.785398
1	(b-a)/2=π/4	R(0,0)/2 + (π/4) sin(π/4) = 0.948059
2	(b-a)/4=π/8	R(1,0)/2 + (π/8)[sin(π/8)+sin(3π/8)] = 0.987116
3	(b-a)/8=π/16	R(2,0)/2 + (π/16)[sin(π/16)+sin(3π/16)+sin(5π/16)+ sin(7π/16)] = 0.996785

Sai số ước tính = |R(3,0) – R(2,0)| = 0.009669

Ưu điểm của pp Trapezoid đệ quy

- Cho kết quả như pp Trapezoid tiêu chuẩn.
- Giảm thời gian tính toán từ các thông tin có sẵn.
- Hữu dụng nếu số lần lặp không biết trước.

Lý do dùng pp Trapezoid

PP Trapezoid:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}\left(f(x_0)+f(x_n)\right)\right]$$

Nó có thể được biểu diễn như

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i\ f(x_i)$$

$$\text{ma}\ \ c_i = \begin{cases} h & i = 1,2,\dots,n-1 \\ 0.5h & i = 0\ \ \text{va}\ \ n \end{cases}$$

Công thức tích phân tổng quát

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i \, f(x_i)$$

c_i : trọng số (weight), x_i: các điểm

Vấn đề làm thế nào chúng ta chọn c_i và x_i để công thức trên cho 1 xấp xỉ tốt của tích phân.

↓

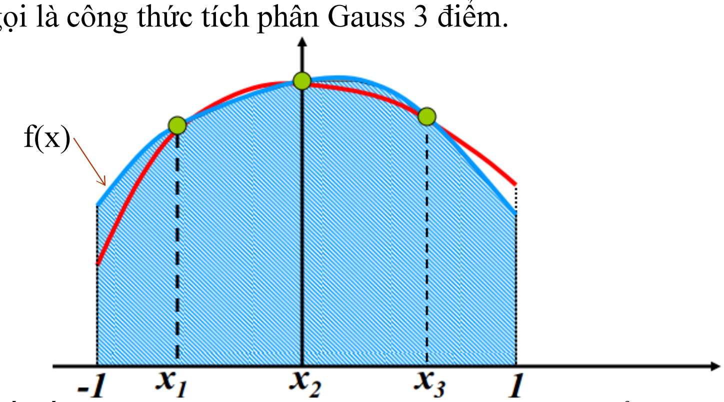
Tích phân Gauss

Công thức tích phân Gauss

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

Trong khoảng [-1, 1]

Được gọi là công thức tích phân Gauss 3 điểm.



Trọng số xấp xỉ c_1, c_2, và c_3, và các giá trị x_1, x_2, và x_3 để tính hàm $f(x_1)$, $f(x_2)$ và $f(x_3)$.

Bằng cách giả định công thức biểu diễn chính xác cho tích phân tới đa thức bậc n

$$\int_{-1}^{1}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n\right)dx$$

Qui tắc tổng quát xấp xỉ tích phân **cho n điểm**

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + ... + c_nf(x_n)$$

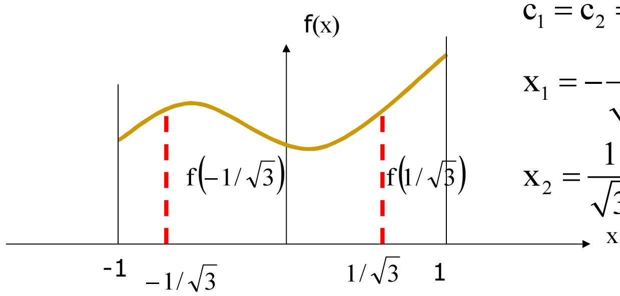
thì tính chính xác cho đến đa thức bậc 2n -1

Bảng giá trị: Trọng số (weight) c và giá trị x cho công thức tích phân Gauss với n điểm.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Lưu ý: Các giá trị x_i nằm trong khoảng [-1, 1]

Điểm n	Trọng số (weight) c_i	Giá trị x_i
2	c_1 = 1.000000000 c_2 = 1.000000000	x_1 = -0.577350269 x_2 = 0.577350269
3	c_1 = 0.555555556 c_2 = 0.888888889 c_3 = 0.555555556	x_1 = -0.774596669 x_2 = 0.000000000 x_3 = 0.774596669
4	c_1 = 0.347854845 c_2 = 0.652145155 c_3 = 0.652145155 c_4 = 0.347854845	x_1 = -0.861136312 x_2 = -0.339981044 x_3 = 0.339981044 x_4 = 0.861136312
5	c_1 = 0.236926885 c_2 = 0.478628670 c_3 = 0.568888889 c_4 = 0.478628670 c_5 = 0.236926885	x_1 = -0.906179846 x_2 = -0.538469310 x_3 = 0.000000000 x_4 = 0.538469310 x_5 = 0.906179846
6	c_1 = 0.171324492 c_2 = 0.360761573 c_3 = 0.467913935 c_4 = 0.467913935 c_5 = 0.360761573 c_6 = 0.171324492	x_1 = -0.932469514 x_2 = -0.661209386 x_3 = -0.2386191860 x_4 = 0.2386191860 x_5 = 0.661209386 x_6 = 0.932469514



$c_1 = c_2 = 1$

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773$

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773$

Công thức tích phân Gauss cho 2 điểm (chú ý $c_1 = c_2 = 1$)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 1 * f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + 1 * f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Tính chính xác cho đa thức bậc 3 hoặc thấp hơn.

Ví dụ 6:

Dùng tích phân Gauss với 2 điểm để tính tích phân:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

n	x_i	c_i
2	± 0.57753	1

Giải:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 1 * e^{-(-0.57753)^2} + 1 * e^{-(0.57753)^2}$$

$$= 2*0.7165 = 1.433$$

Các trị số trong bảng tính Gauss cho tích phân trong khoảng [-1,1],

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

vậy làm thế nào để **mở rộng tích phân Gauss để tính tích phân trong khoảng [a,b]**

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Giải quyết vấn đề: Bất kỳ tích phân xác định trong khoảng [a,b] đều có thể chuyển đổi thành tích phân xác định trong khoảng [-1,1]

$$x = mt + d$$

t: như là biến mới ϵ [-1,1]

Nếu $x = a,\quad t = -1$

Nếu $x = b,\quad t = 1$

Vậy ta có:

$$m = \frac{b-a}{2}$$

Khi đó

$$d = \frac{b+a}{2}$$

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \longrightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt$$

Thay các giá trị x, và dx vào tích phân

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt$$

Ví dụ 7: Dùng tích phân Gauss với 2 điểm để tính tích phân:

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

Giải:

Đổi khoảng từ [0, 2] đến [-1, 1]

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt \longrightarrow \int_{-1}^1 e^{-(t+1)^2} dt$$

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)\,dt \approx 1 * e^{-(-0.57753+1)^2} + 1 * e^{-(0.57753+1)^2}$$

$$= 0.9195$$

Ví dụ 8:

Tính tích phân f(x) từ a = 0 tới b = 0.8 với tích phân Gauss 2 và 3 điểm

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Giá trị chính xác: **1.64053**

Giải:

- Biến đổi từ [0, 0.8] tới [-1, 1]

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt$$

$$I = \int_0^{0.8} f(x)dx = \frac{(0.8-0)}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{(0.8-0)t + 0.8 + 0}{2}\right)dt$$

$$= 0.4\int_{-1}^1 f(0.4t + 0.4)dt$$

Hoặc thay x = 0.4t + 0.4 vào tích phân

$$I = 0.4\int_{-1}^{1} f\left(0.4t + 0.4\right)dt$$

$$= 0.4\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} 0.2 + 25(0.4t+0.4) - 200(0.4t+0.4)^2 \\ +675(0.4t+0.4)^3 - 900(0.4t+0.4)^4 + 400(0.4t+0.4)^5 \end{bmatrix}dt$$

Chọn công thức tp 2 điểm:

$$I = 0.4\int_{-1}^{1} f\left(t\right)dt \quad t = \pm 0.57735, c = 1$$

$$I \approx 0.51674 + 1.30583 = 1.82257$$

Sai số: (|1.64053 – 1.82257|/1.64053)*100 = **11.096%**

Vì 2 điểm chỉ chính xác đến bậc 3

Công thức tp 3 điểm: $\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2) + c_3 f(t_3)$

$$I = 0.4\int_{-1}^{1} f\left(0.4t + 0.4\right)dt$$

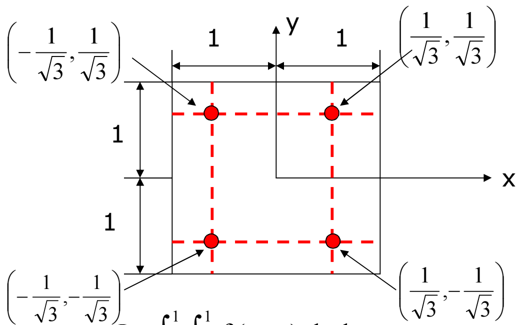
$$= 0.4\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} 0.2 + 25(0.4t+0.4) - 200(0.4t+0.4)^2 \\ +675(0.4t+0.4)^3 - 900(0.4t+0.4)^4 + 400(0.4t+0.4)^5 \end{bmatrix}dt$$

n	t_i	c_i
3	0	0.88889
	± 0.77459	0.55556

$$I \approx 0.28130 + 0.87325 + 0.48600 = 1.64055$$

Sai số: (|1.64053 – 1.64055|/1.64053)*100 = 0.0012%

Tích phân 2 chiều



$$\boxed{I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dxdy}$$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dxdy$$

$$\approx \int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j f(x,y_j)\right)dx$$

Dùng công thức tích phân Gauss 1 chiều cho x

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j f(x_i,y_j)$$

Dùng công thức tích phân Gauss 1 chiều cho y

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} f(x_i,y_j)$$

Mà $c_{ij} = c_i c_j$

Với tích phân Gauss cho 2 điểm n=2

$$I \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij} f(x_i,y_j)$$

$c_{ij} = c_i\ c_j = 1$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Số điểm tích phân (n x n) Gauss IP=1,2,3,4

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{IP=1}^{4} c_{IP} f_{IP}$$

Công thức

$$\boxed{I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dxdy \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij} f(x_i,y_j)}$$

Một n^2 thì tính chính xác cho đa thức bậc (2n-1)

Thu gọn hệ lực phân bố

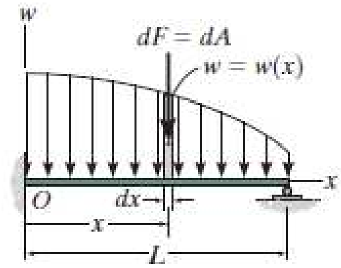
Chúng ta giả sử có lực áp suất phân bố đều trên một mặt phẳng như sau:

Trị số của lực tổng $\mathbf{F}_R$

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$$

A : Diện tích

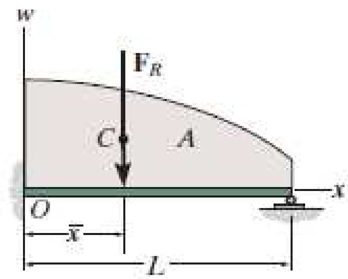


Vị trí của $\mathbf{F}_R$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \sum \mathbf{M}_O$$

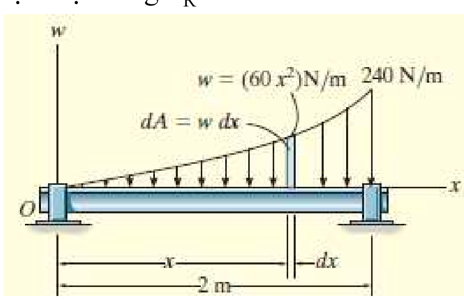
$$-\bar{x}\mathbf{F}_R = -\int_L xw(x)dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L xw(x)dx}{\int_L w(x)dx} = \frac{\int_A xdA}{\int_A dA}$$



Ví dụ 9: Xác định trị số lực tổng $\mathbf{F}_R$:

Giải



Khi hàm w = w(x) được cho trước, bài toán sẽ được giải bằng cách lấy tích phân

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}$$

Diện tích $dA = wdx = 60x^2dx$

$$\mathbf{F}_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A = \int_0^2 60x^2dx = 60\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

Tính chính xác: $= 60\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 160\text{N}.$

Tính với pp Gauss: $\mathbf{F}_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A = \int_0^2 60x^2dx = 60\int_0^2 x^2dx$

Biến đổi khoảng [0, 2] thành [-1,1] theo công thức

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{2-0}{2}t + \frac{2+0}{2}\right)\frac{2-0}{2}dt$$

$$= \int_{-1}^{1}(t+1)dt$$

Chọn 2 điểm c_i và t_i từ bảng giá trị Gauss

c_1 = 1.00000	x_1 = -0.577350269
c_2 = 1.000000	x_2 = 0.577350269

$\int_{-1}^{1} f(t)dt \cong \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i)$ = 60*[1*(-0.577350269 + 1)^2 + 1*(0.577350269 + 1)^2]
= 159.9930

Sai số = ((160 – 159.9930)/160)*100= 0.004375%.

Bài tập:

1. Tích tính phân $\int_1^2 x^3dx$

Bằng công thức hình chữ nhật và hình thang. Chia khoảng [1,2] thanh 4 khoảng bằng nhau $\Delta x = h = 0.25$.
Đáp án: Công thức hình chữ nhật 3.725 và hình thang 3.8.

2. Dùng công thức hình thang tính tích phân.

$$\int_0^4 \left(1 - e^{-2x}\right) dx$$

Với đoạn [0, 4] chia thành 2 và 4 khoảng bằng nhau. Tính sai số cho mỗi trường hợp biết giá trị chính xác 3.500168.

Đáp án: $n = 2; 2.963033 \quad \varepsilon_t = 15.35\%$
$n = 4; 3.343703 \quad \varepsilon_t = 4.47\%$

3. Dùng công thức hình thang tính tích phân.

$$\int_0^{\pi/2} (6+3\cos x)\,dx$$

Với đoạn [0, $\pi/2$] chia thành 2 (n =2) và 4 (n =4) khoảng bằng nhau. Tính sai số cho mỗi trường hợp biết giá trị chính xác 12.42478.

Đáp án:

$$n=2;\quad 12.26896 \quad \varepsilon_t = 1.254\%$$

$$n=4; 12.38613 \quad \varepsilon_t = 0.311\%$$

4. Dùng công thức hình thang tính tích phân từ bảng dữ liệu sau..

x	−2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	35	5	−10	2	5	3	20

5. Dùng công thức tích phân Gauss 2 và 3 điểm để tích các tích phân sau
Và tính sai số mỗi trường hợp.

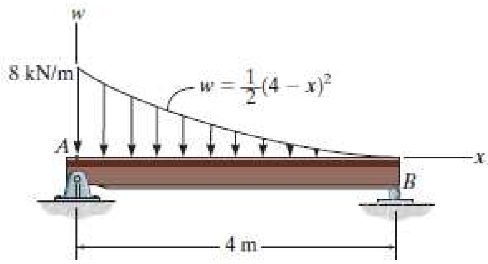
$$I = \int_1^2 \left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 ; \text{chinh xac } 25.83333$$

Đáp án: 2 điểm 25.8067 sai số 0.103%
3 điểm 25.8322 sai số 0.0044%

$$I = \int_0^3 xe^x dx; \text{chinh xac } 41.17107$$

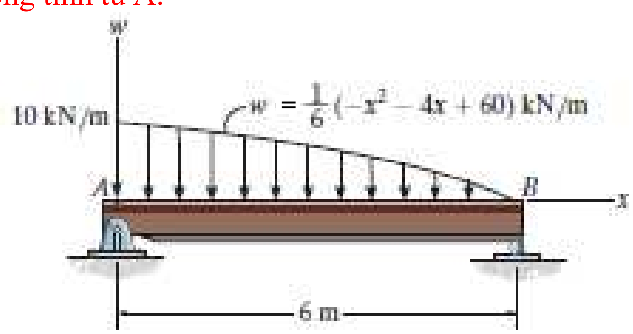
Đáp án: 2 điểm 39.6075 sai số 3.7977%
3 điểm 41.1313 sai số 0.09657%

6. Cho dầm chịu lực phân bố như trên hình, lực phân bố được thu gọn thành một lực tổng và dùng tích phân Gauss 3 điểm để xác định giá trị lực tổng. (Các trọng số $c_1 = 0.5556$, $c_2 = 0.8889$, $c_3 = 0.5556$ và các điểm $x_1 = -0.7746$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.7746$). Tính vị trí của lực tổng tính từ A.



Đáp án: Lực tổng 10.6667kN, vị trí ≈ 1m

7. Cho dầm chịu lực phân bố như trên hình, lực phân bố được thu gọn thành một lực tổng và dùng tích phân Gauss 3 điểm để xác định giá trị lực tổng. (Các trọng số $c_1 = 0.5556$, $c_2 = 0.8889$, $c_3 = 0.5556$ và các điểm $x_1 = -0.7746$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.7746$). Tính vị trí của lực tổng tính từ A.



Đáp án: Lực tổng ≈ 36kN, vị trí ≈ 2.16m