Trường Đại Học Công Nghiệp Tp.HCM
Khoa Công Nghệ Cơ Khí

Chương 2: Giải hệ phương trình tuyến tính

ThS. Hồ Thị Bạch Phương

IUH – 2022

Véc tơ : Véc tơ là 1 chuỗi số một chiều

Véc tơ hàng [3 5 6], véc tơ cột: $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

Véc tơ đơn vị $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ma trận : là 1chuỗi số 2 chiều

Ma trận zero $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ma trận đường chéo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Ma trận đơn vị $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận tam giác đường chéo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận

Ma trận đối xứng $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Ma trận tam giác trên $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Định thức của một ma trận

Xác định chỉ cho các ma trận vuông.

Dấu trừ

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-25) - 1(12+5) - 1(15-0) = -82$$

Tìm ma trận nghịch đảo:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Cộng và nhân ma trận

Cộng 2 ma trận A và B (chỉ tính khi 2 ma trận có cùng kích thước)

$$* \quad C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

Nhân 2 ma trận A (n x m) và B (p x q). Khi đó tích C = AB chỉ được xác định khi m = p.

$$* \quad C = AB \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i, j$$

Hệ phương trình tuyến tính

Một hệ phương trình tuyến tính có thể được biểu diễn ở các cách khác nhau:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2.5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 \qquad\quad - 6x_3 &= 7 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2.5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Hệ pt tuyến tính **Dạng ma trận**

Giải hệ pt tuyến tính

- Một hệ phương trình là không phù hợp nếu không tồn tại nghiệm cho hệ phương trình:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Một số hệ thống của phương trình có thể có vô số các nghiệm

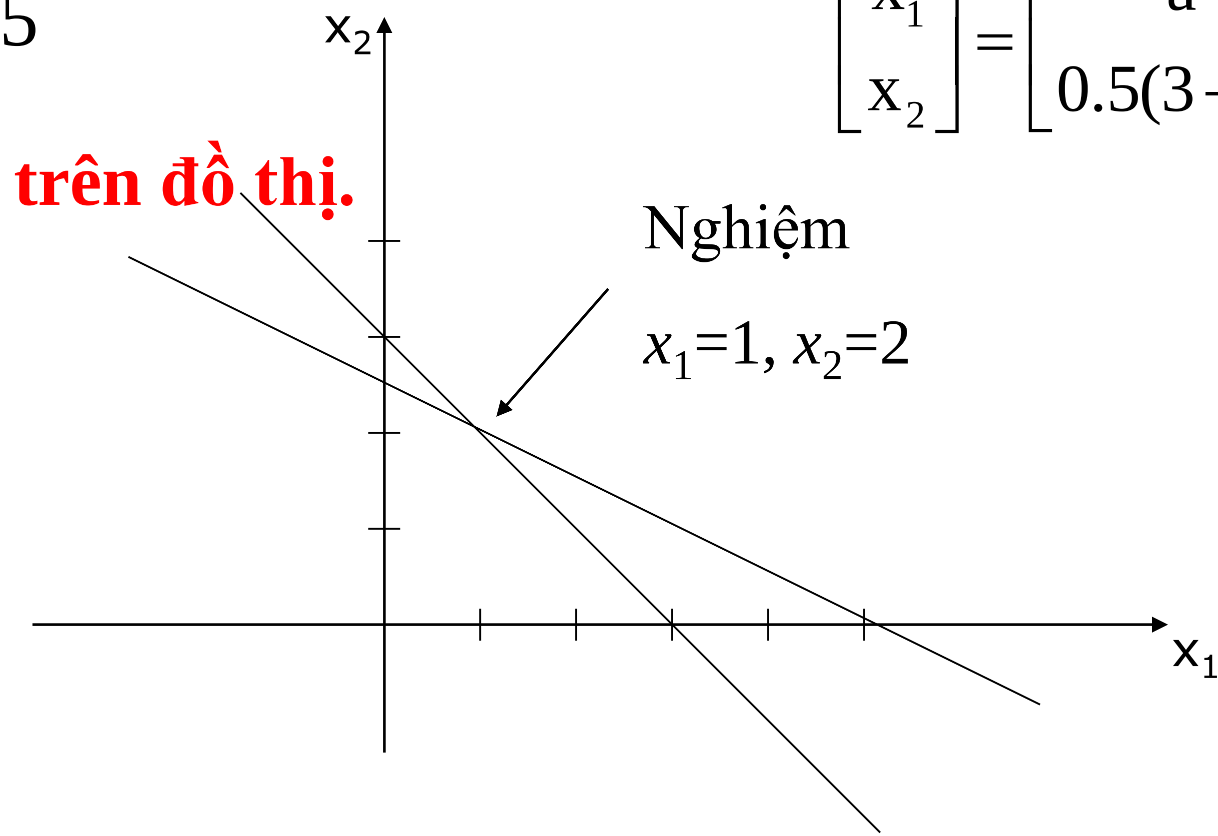
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Có vô số nghiệm

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0.5(3-a) \end{bmatrix}$$

Nghiệm của hệ trên đồ thị.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$



Nghiệm

x_1=1, x_2=2

Phép khử Gauss

- Phương pháp bao gồm 2 bước:
  - **Quá trình thuận:** hệ được rút gọn tới ma trận tam giác trên (hay còn gọi là dạng bậc thang)
  - **Quá trình ngược:** Giải hệ pt từ pt cuối cùng (hàng cuối của ma trận tam giác trên), giải cho x_n ,x_{n-1},…x_1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & 0 & a_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix}$$

Biến đổi các phần tử của hàng

Cộng các hàng lại với nhau:

Nhân bất kỳ hàng nào với hằng số khác 0.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}$$

Giải

Quá trình thuận

Bước 1: Khử x_1 từ các hàng 2, 3, 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -27 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Bước 2: Khử x_2 từ các hàng 3, 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Bước 3: Khử x_1 từ các hàng 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Quá trình ngược

Giải cho x_4 sau đó giải tuần tự cho x_3, x_2 và x_1.

$$x_4 = \frac{-3}{-3} = 1, \qquad x_3 = \frac{-9+5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-6-2(-2)-2(1)}{-4} = 1, \quad x_1 = \frac{16+2(1)-2(-2)-4(1)}{6} = 3$$

Công thức tổng quát quá trình thuận

Khử x_1

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &\leftarrow a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{1j} \quad (1 \le j \le n) \\ b_i &\leftarrow b_i - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) b_1 \end{aligned}\right\} 2 \le i \le n$$

Khử x_2

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &\leftarrow a_{ij} - \left(\frac{a_{i2}}{a_{22}}\right) a_{2j} \quad (2 \le j \le n) \\ b_i &\leftarrow b_i - \left(\frac{a_{i2}}{a_{22}}\right) b_2 \end{aligned}\right\} 3 \le i \le n$$

Khử x_k

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &\leftarrow a_{ij} - \left(\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) a_{kj} \quad (k \le j \le n) \\ b_i &\leftarrow b_i - \left(\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right) b_k \end{aligned}\right\} k+1 \le i \le n$$

Tiếp tục tới x_{n-1} được khử.

Quá trình ngược

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \qquad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n} x_n - a_{n-2,n-1} x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}} \qquad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}}$$

Ví dụ:

Dùng phép khử Gauss để giải hệ dưới đây.

Quá trình thuận

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \qquad \text{Pt1 pivot}$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \qquad pt2 \leftarrow pt2 - \left(\frac{2}{1}\right)pt1$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \qquad pt3 \leftarrow pt3 - \left(\frac{3}{1}\right)pt1$$

Bước 1: Khử x_1 từ phương trình 2 và 3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ -\ x_2 - 4x_3 &= -6 \\ -5x_2 - 7x_3 &= -17 \end{aligned}$$

Khử x_2 từ pt 3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ -\ x_2 - 4x_3 &= -6 \\ -5x_2 - 7x_3 &= -17 \end{aligned}$$

Pt 1 giữ nguyên

Pt 2 pivot

$$pt3 \leftarrow pt3 - \left(\frac{-5}{-1}\right) pt2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ -\ x_2 - 4x_3 = -6 \\ 13x_3 = 13 \end{cases}$$

Quá trình ngược

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{3,3}} = \frac{13}{13} = 1; \qquad x_2 = \frac{b_2 - a_{2,3}x_3}{a_{2,2}} = \frac{-6 + 4x_3}{-1} = 2$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3}{a_{1,1}} = \frac{8 - 2x_2 - 3x_3}{a_{1,1}} = 1$$

Nghiệm $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Định thức

Biến đổi các số hạng từ ma trận A → A’ như ở dưới không ảnh hưởng đến định thức:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix} \longrightarrow A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 13\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\det(A')=-13$$

Bao nhiêu giải pháp mà hệ pt AX=B có ?

Giải được: Det(A) $\neq$ 0: ma trận thu gọn không có các hàng zero.
Không giải được: Det(A) = 0: ma trận thu gọn có 1 hoặc nhiều hàng zero tương ứng với các phần tử B $\neq$ 0.
Vô số nghiệm: Det(A) = 0 :ma trận thu gọn có 1 hoặc nhiều hàng zero tương ứng với các phần tử B = 0.

Ví dụ:

Giải được

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Nghiệm

$$X=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$$

Không giải được

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Không giải được

$$0=-1$$

Không thể !!!

Vô số nghiệm

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

Vô số nghiệm

$$X=\begin{bmatrix}\alpha\\1-.5\alpha\end{bmatrix}$$

Lập trình Code:

Quá trình thuận

for k = 1: n-1

for i = k+1 : n

heso = $a_{i,k}$ / $a_{k,k}$

for j = k+1 : n

$a_{i,j} = a_{i,j} - heso * a_{k,j}$

end

$b_i = b_i - heso * b_k$

end

end

Quá trình ngược

$x_n = b_n / a_{n,n}$

for i = n-1 : 1

tong = b_i

for j = i+1 to n

tong = tong – $a_{i,j}$ * x_j

end

x_i = tong / $a_{i,I}$

end

PP khử Gauss với Scaled Partial Pivoting (SPP)

Các vấn đề với pp Gauss

- Nếu các phần tử pivot bằng không thì không sử dụng được phương pháp khử Gauss.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10^{-10} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Nếu các phần tử pivot (các phần tử trên đường chéo) rất bé thì sẽ có sai số do các phép tính làm tròn các con số sau dấu chấm thập phân.

Ví dụ

Giải hệ dùng pp khử Gauss với SPP.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ : Bước chuẩn bị

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Véc tơ tỉ lệ:

Không quan tâm đến dấu

Tìm phần tử lớn nhất trong mỗi hàng.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ Véc tơ tỉ lệ:

$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Véc tơ chỉ số

Tai sao véc tơ chỉ số

- Vectơ chỉ số được sử dụng bởi vì nó là dễ dàng hơn nhiều để trao đổi một phần tử chỉ số đơn so với trao đổi các giá trị của một hàng đầy đủ.
- Trong vấn đề thực tế với N rất lớn, sự trao đổi các phần tử của các hàng có thể không được thực tế.

Ví dụ:

Quá trình thuận- Bước 1: Khử x_1

Chọn pt pivot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & 4 \\ \boxed{5} & 8 & 6 & 3 \\ \boxed{4} & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S = [2 \quad 4 \quad 8 \quad 5] \\ L = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\,] \end{cases}$$

$$\text{Tỉ lệ} = \left\{ \frac{|a_{l_i,1}|}{S_{l_i}} \; i = 1,2,3,4 \right\} = \left\{ \frac{|1|}{2}, \frac{|3|}{4}, \frac{|5|}{8}, \boxed{\frac{|4|}{5}} \right\}$$

Lớn nhất ở l_4.

Pt 4 là pt pivot đầu tiên. Thay đổi l_4 và l_1.

L = [4 1 2 3]

Cập nhật A và B

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

Pt pivot đầu tiên

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -2.75 & 1.75 \\ 0 & 5.5 & -0.25 & -0.75 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 2.25 \\ \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

Quá trình thuận – Bước 2 Khử x_2

Chọn pt pivot lần thứ 2

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -2.75 & 1.75 \\ 0 & 5.5 & -0.25 & -0.75 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 2.25 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pt pivot thứ 2

$$S = [2\ \ 4\ \ 8\ \ 5\ ] \qquad L = [\ 4\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$$

$$\text{Tỉ lệ}: \left\{ \frac{|a_{l_i,2}|}{S_{l_i}}\ i = 2,3,4 \right\} = \left\{ \boxed{\frac{1.5}{2}}\ \ \frac{2.75}{4}\ \ \frac{5.5}{8} \right\} \Rightarrow L = [\ 4\,1\ 2\,3]$$

Quá trình thuận – Bước 3: Khử x_3

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & \boxed{-2.5 \quad 1.8333} & \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.6667 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 6.8333 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pt pivot thứ 3

$L = [\ 4\ 1\ 2\ \ 3]$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & -2.5 & 1.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & -2.5 & 1.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad L = [\ 4\ 1\ 2\ \ 3]$$

Quá trình ngược

$$x_4 = \frac{b_3}{a_{3,4}} = \frac{9}{2} = 4.5,\ \ x_3 = \frac{b_2 - a_{2,4}x_4}{a_{2,3}} = \frac{2.1667 - 1.8333x_4}{-2.5} = 2.4327$$

$$x_2 = \frac{b_1 - a_{1,4}x_4 - a_{1,3}x_3}{a_{1,2}} = \frac{1.25 - 0.25x_4 - 0.75x_3}{-1.5} = 1.1333$$

$$x_1 = \frac{b_4 - a_{4,4}x_4 - a_{4,3}x_3 - a_{4,2}x_2}{a_{l_1,1}} = \frac{-1 - 3x_4 - 5x_3 - 2x_2}{4} = -7.2333$$

Làm thế nào để biết kết quả đạt được là tốt ?

Cho AX=B

X là nghiệm nếu AX-B=0

Tính véc tơ R= AX-B

Bởi vì có sai số nên véc tơ R có thể không là zero.

Kết quả chấp nhận khi phần tử có gí trị lớn nhất của R nhỏ hơn ε

$$\max_i |r_i| \le \varepsilon$$

Nghiệm

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8673 \\ -0.3469 \\ 0.3980 \\ 1.7245 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

Bài tập

1. Cho hệ pt

$2x_2 + 5x_3 = 9$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$

$3x_1 + x_2 = 10$

Tính định thức.

2. Cho hệ pt

$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27$

$-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61.5$

$x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5$

(a) Giải hệ bằng pp khử Gauss. Trình bày tất cả các bước tính toán.

(b) Thay kết quả đạt được vào hệ pt trên để kiểm tra lại kết quả.

3 Dùng pp khử Gauss với spp để giải hệ:

$8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 22$

$10x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$

$12x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$

Thay kết quả đạt được vào hệ pt trên để kiểm tra lại kết quả.

Phương pháp khử Gauss-Jordan

- Phương pháp này giảm hệ pt AX=B tới IX=B mà **I là 1 ma trận đơn vị.**
- **Chỉ duy nhất quá trình thuận được thực hiện** và không cần quá trình ngược.
- Phương pháp này tính toán **chậm hơn 50% thời gian** so với pp Gauss.

Cho hệ pt: $$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Giải: Bước 1: Khử x_1 từ các pt 2 và 3.

Phương pháp khử Gauss-Jordan

- Phương pháp này giảm hệ pt AX=B tới IX=B mà **I là 1 ma trận đơn vị.**
- **Chỉ duy nhất quá trình thuận được thực hiện** và không cần quá trình ngược.
- Phương pháp này tính toán **chậm hơn 50% thời gian** so với pp Gauss.

Cho hệ pt: $$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Giải: Bước 1: Khử x_1 từ các pt 2 và 3.

$$\left.\begin{array}{l} pt1 \leftarrow pt1/2 \\ pt2 \leftarrow pt2 - \left(\dfrac{4}{1}\right) pt1 \\ pt3 \leftarrow pt3 - \left(\dfrac{2}{1}\right) pt1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bước 2: Khử x_2 từ các pt 1 và 3.

$$\left.\begin{aligned} pt2 &\leftarrow pt2/6 \\ pt1 &\leftarrow pt1 - \left(\frac{-1}{1}\right) pt2 \\ pt3 &\leftarrow pt3 - \left(\frac{0}{1}\right) pt2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1667 \\ 0 & 1 & -0.8333 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 1.1667 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1667 \\ 0 & 1 & -0.8333 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 1.1667 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bước 3: Khử x_3 từ các pt 1 và 2.

$$\left.\begin{array}{l} pt3 \leftarrow pt3/2 \\ pt1 \leftarrow pt1 - \left(\dfrac{0.1667}{1}\right) pt3 \\ pt2 \leftarrow pt2 - \left(\dfrac{-0.8333}{1}\right) pt3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PP Gauss-Jordan

Hệ pt
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Được chuyển đổi
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nghiệm
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Giá trị riêng – véc tơ riêng

Véc tơ riêng của 1 ma trận là các véc tơ mà thỏa pt: $Ax = \lambda x$

hoặc, $(A - \lambda I)x = 0$

Khi đó **λ là giá trị riêng nếu $\det(A - \lambda I) = 0$**

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3/4 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 3/4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3/4-\lambda)(1/2-\lambda)$$

$$\lambda = 1, \lambda = 3/4, \lambda = 1/2$$

Ma trận đối xứng - ma trận xác định dương:

- Nếu ma trận A đối xứng $A^T = A$ khi đó các giá trị riêng là số thực.
- Nếu ma trận A đối xứng dương, khi đó các giá trị riêng là số dương.

Ma trận vuông A ($p \times p$), A là **dương** nếu, cho tất cả $x \in R^p$, $x^T A x > 0$.

Phương pháp power (lũy thừa)

Phương pháp lặp để tìm giá trị riêng lớn nhất và véc tơ riêng.

$$[[A] - \lambda[I]]\{x\} = 0$$

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\}$$

Giải thuật viết trên Matlab

```
% Cho trước véc tơ cột y ngẫu nhiên khác không.
function [lambda,y]=powerMethod(A,y,n) % Đặt tên hàm
for (i=1:n)
    y = A*y;
    [cj] = max(abs(y)); % Giá trị lớn nhất của véc tơ y
    lambda = y(j);    % Giá trị riêng ước tính
    y = y/lambda; % Véc tơ riêng ước tính
end
```

Ví dụ: PP Power

Lần lặp 1:

1 véc tơ ban đầu ngẫu nhiên không zero.

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix} = 20 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ước tính giá trị riêng tạm thời.

Véc tơ riêng tạm thời.

Lần lặp 2:

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40 \\ -40 \\ 40 \end{Bmatrix} = 40 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{40 - 20}{40} \right| \times 100\% = 50\%$$

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$$
$$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2$$
$$\mathbf{x}_4 = A\mathbf{x}_3$$
$$\mathbf{x}_5 = A\mathbf{x}_4$$
$$\mathbf{x}_6 = A\mathbf{x}_5$$

Lần lặp 3:

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 \\ -80 \\ 60 \end{Bmatrix} = -80 \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix}$$

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{-80 - 40}{-80} \right| \times 100\% = 150\%$$

Lần lặp 4:

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50 \\ 70 \\ -50 \end{Bmatrix} = 70 \begin{Bmatrix} -0.71429 \\ 1 \\ -0.71429 \end{Bmatrix}$$

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{70 - (-80)}{70} \right| \times 100\% = 214\%$$

Lần lặp 5:

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.71429 \\ 1 \\ -0.71429 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48.51714 \\ 68.51714 \\ -48.51714 \end{Bmatrix} = 68.51714 \begin{Bmatrix} -0.71429 \\ 1 \\ -0.71429 \end{Bmatrix}$$

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{68.51714 - 70}{70} \right| \times 100\% = 2.08\%$$

Quá trình có thể được tiếp tục để tìm giá trị riêng = 68.284 và véc tơ riêng [-0.7071 1 -0.7071]

Chú ý rằng giá trị riêng nhỏ nhất và véc tơ riêng có thể được xác định bằng cách áp dụng pp power tới nghịch đảo của ma trận A.

Ví dụ:

Xem xét ma trận sau và tìm giá trị riêng và véc tơ riêng

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Véc tơ giả định ban đầu khác không $\{1\ 1\ 1\}^T$

Giải: Nhân ma trận [A] với $\{x\}$

Lần lặp 1:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{Bmatrix} = 5 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.6 \\ -0.2 \end{Bmatrix}$$

Ước tính giá trị riêng và véc tơ riêng tạm thời.

Lần lặp 2

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.6 \\ -0.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.6 \\ 1 \\ 0.2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.6 \\ 1 \\ 0.2 \end{Bmatrix} = 4.6 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.217 \\ 0.0435 \end{Bmatrix}$$

Lần lặp 3

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.217 \\ 0.0435 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.2174 \\ 0.4783 \\ -0.0435 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.2174 \\ 0.4783 \\ -0.0435 \end{Bmatrix} = 4.2174 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.1134 \\ -0.0183 \end{Bmatrix}$$

Lần lặp 4

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.1134 \\ -0.0183 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1134 \\ 0.2165 \\ 0.0103 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.1134 \\ 0.2165 \\ 0.0103 \end{Bmatrix} = 4.1134 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.0526 \\ 0.0025 \end{Bmatrix}$$

Tiếp tục sẽ đạt kết quả cuối cùng $\lambda = 4$ và $u_k = \{1\ 0\ 0\}^T$

Phương pháp Inverse Power

- PP Inverse Power tìm giá trị riêng nhỏ nhất.
- Các giá trị riêng của B = A^{-1} là nghịch đảo các giá trị riêng của A (i.e., $\mu = 1/\lambda$)
- Chúng ta có thể dùng pp power method cho w = Bx để tìm giá trị riêng lớn nhất của B – nhỏ nhất của A.
- Tính cho B thì lãng phí – thay vao đó dùng

$$\boxed{w = Bx = A^{-1}x \quad \Rightarrow x = Aw}$$

$$Ax = \lambda x; \quad B = A^{-1}$$

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1}x = \lambda Bx$$

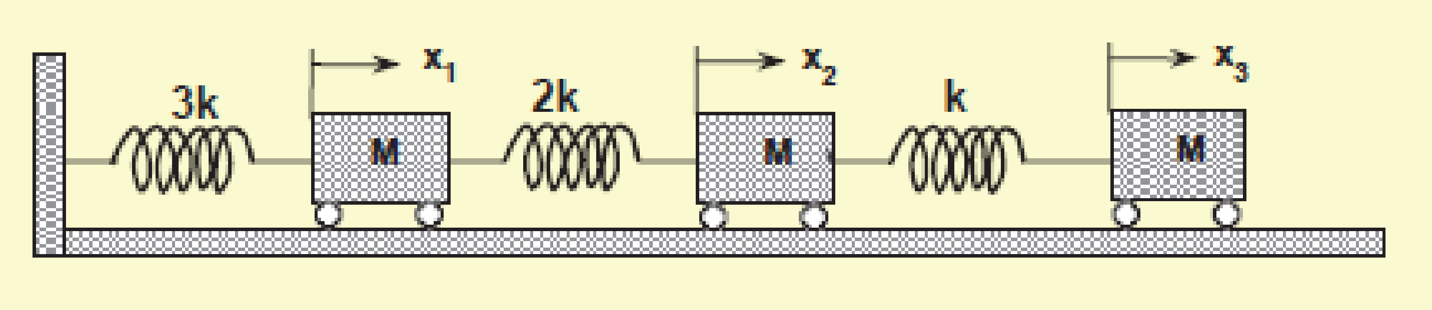
$$Bx = A^{-1}x = \left(\frac{1}{\lambda}\right)x; \qquad \mu = 1/\lambda$$

Giá trị riêng được dùng để giải pháp các bài toán trong kỹ thuật liên quan đến dao động, độ đàn hồi, hệ thống dao động, v.v…
Giá trị riêng cũng quan trọng cho phân tích trong xác suất thống kê.

Hệ Mass-Spring (Khối lượng – lò xo)

Vị trí cân bằng

Một hệ khối lượng và lò xo như sau: (bỏ qua các ma sát)



Phương trình dao động hệ

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -3kx_1 - 2k(x_1 - x_2)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -2k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3)$$

$$m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2)$$

m: là khối lượng vật 1,2 và 3.
k: độ cứng lò xo.
x_1, x_2, x_3 : độ giãn hoặc nén lò xo.

Từ lý thuyết dao động, các pt trên có thể biểu diễn theo: $x_i = a_i \cos(\omega t)$ và $x_i'' = -\omega^2 a_i \cos(\omega t)$, với ω: tần số và a_i: biên độ.

$$x_i = a_i \cos \omega t; \qquad d^2x/dt^2 = -\omega^2 a_i \cos \omega t$$

Đặt $\lambda = m\omega^2/k$ các phương trình dao động được biến đổi như sau:

$$-\frac{m\omega^2}{k} a_1 = -5a_1 + 2a_2 \quad ==> \quad 5a_1 - 2a_2 = \lambda a_1$$

$$-\frac{m\omega^2}{k} a_2 = 2a_1 - 3a_2 + a_3 \quad ==> \quad -2a_1 + 3a_2 - a_3 = \lambda a_2$$

$$-\frac{m\omega^2}{k} a_3 = a_2 - a_3 \quad ==> \quad -a_2 + a_3 = \lambda a_3$$

Sắp xếp lại

$$\begin{aligned} 5a_1 - 2a_2 &= \lambda a_1 \\ -2a_1 + 32a_2 - a_3 &= \lambda a_2 \\ -a_1 + a_2 &= \lambda a_3 \end{aligned} \quad ==> \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{x}\}} = \lambda \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{x}\}}$$

Hoặc

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A} - \mathbf{I}\,\lambda]} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{x}\}} = 0$$

Giải: 3 giá trị λ

$$\lambda_1 = 6.29 \qquad \lambda_2 = 2.29 \qquad \lambda_3 = 0.42$$

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.645 \\ 0.122 \end{Bmatrix} \qquad \{a\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.74 \\ 1.000 \\ -0.77 \end{Bmatrix} \qquad \{a\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0.55 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

Bài tập

4. Dùng pp Gauss-Jordan để giải hệ

$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4$

$3x_1 + x_2 + x_3 = 5$

5. Dùng pp Gauss-Jordan để giải hệ

$x_1 + x_2 - x_3 = -2$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 5$

$-1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$

Đáp án

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

6. Giải hệ pt:

$x_1 + x_2 - x_3 = -3$

$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$

$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$

(a)PP khử Gauss,

(b)PP khử Gauss với spp,

(c) PP Gauss-Jordan.

7. Dùng pp power để xác định giá trị riêng lớn nhất và véc tơ riêng tương ứng.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 8 & 10 \\ 8 & 4-\lambda & 5 \\ 10 & 5 & 7-\lambda \end{bmatrix}$$

8. Dùng pp power để xác định giá trị riêng lớn nhất và véc tơ riêng tương ứng. Véc tơ ban đầu khác không λ_0. Tính 4 lần lặp.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 8 & 3 & 4 \\ 10 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \lambda_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$