Chương 5: Phương trình vi phân

Tờ sờ tờ mờ hờ

Ngày 4 tháng 11 năm 2020

Mục lục

Hệ phương trình vi phân bậc nhất

Ví dụ 6: Sử dụng phương pháp R-K bậc 2 với $\alpha = \beta = 1, w_1 = w_2 = 0.5$ giải hệ ODE bậc nhất sau

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix} = F(X, Y) \qquad Y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tính $Y(0.1)$ và $Y(0.2)$ với $h = 0.1$

Bước 1:

$$K_1 = hF(X_0, Y_0) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0) \\ 1 - y_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 1 \\ 0.1(1 - (-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}$$

$$Y = Y(0) + K_1 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 0.1 \\ 1 + 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 1.2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = hF(\underbrace{X_0 + h}_{X}, \underbrace{Y_0 + K_1}_{Y}) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 1.2 \\ 0.1(1 - (-0.9)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.19 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình vi phân bậc nhất

$$Y_1 = Y(X_0 + h) = Y(0) + 0.5(K_1 + K_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.19 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -0.89 \\ 1.195 \end{bmatrix}$$

Bước 2:

$$K_1 = hF(X = 0.1, Y(0.1)) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2(0.1) \\ 1 - y_1(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1195 \\ 0.1890 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}$$

$$Y = Y(0.1) + K_1 = \begin{bmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 + 0.1195 \\ 1.195 + 0.1890 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.7705 \\ 1.3840 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = hF(\underbrace{X_0 + h}_{X}, \underbrace{Y_0 + K_1}_{Y}) = 0.1 \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \cdot 1.384 \\ 0.1(1 - (-0.7705) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1384 \\ 0.17705 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình vi phân bậc nhất

$$Y_2 = Y_1 + hF(X_1, Y_1) = Y(0.1 + h) = Y(0.1) + 0.5(K_1 + K_2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(0.2) \\ y_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 \\ 1.195 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.1195 \\ 0.1890 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1384 \\ 0.1771 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.7611 \\ 1.3780 \end{bmatrix}$$

Phương trình vi phân bậc cao

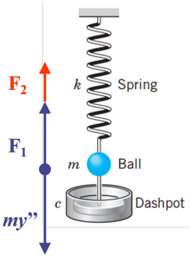
Ví dụ: Thiết lập và giải phương trình mô tả dao động của con lắc lò xo gồm một vật nặng có khối lượng $m = 2kg$ và lò xo có độ cứng $k = 5N/m$ trong môi trường có lực giảm chấn có dạng $F_2 = -3y'$. Kéo vật nặng rời khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn $y = 4cm$, chọn mốc thời gian tại lúc buông tay. Biết tại lúc buông tay vật nặng bắt đầu chuyển động với vận tốc đầu $v(t = 0) = y' = \frac{dy}{dt} = 0$. Yêu cầu lấy độ chính xác đến 10 chữ số thập phân.

Giải

Theo định luật II Newton ta có

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = ma$$

Con lắc chịu tác dụng của lực hồi phục $F_1 = -ky$ và lực giảm chấn $F_2 = -cy'$.



Vậy ta có

$$\sum_{i=1}^{2} = F_i = F_1 + F_2 = -ky - cy' = ma = my''$$

Hay có thể viết lại như sau $\qquad my'' + cy' + ky = 0$

Ngoài ra ta có thể sử dụng phương trình Lagrange loại hai để thiết lập phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ như trong môn học Dao Động Kỹ thuật, và cũng cho kết quả không đổi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^P \qquad (1)$$

Trong đó Q_i^P là lực suy rộng ứng với các lực hoạt động, Π là hàm thế năng và Φ là các hàm tiêu tán, q_i là các tọa độ suy rộng, $i = 1, ..., n$. Động năng T và thế năng Π của hệ

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = m\ddot{y} \qquad \Pi = \frac{1}{2}ky^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = ky$$

Q_i^P lúc này là lực giảm chấn $Q_i^P = -c\dot{y}$

Thế vào phương trình Lagrange loại II [phương trình (1)] ta cũng thu lại được phương trình vi phân bậc hai mô tả chuyển động của hệ.
Thay $m = 2kg, c = 3Ns/m, k = 5N/m$, ta được

$$2y'' + 3y' + 5y = 0$$

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ O tại vị trí cân bằng và chiều dương của trục Oy hướng xuống. Từ các điều kiện ban đầu theo giả thiết ta có $y(0) = 0.04, y'(0) = 0.00$. Bằng cách đặt biến mới

$$z_1 = y \Rightarrow y(0) = z_1(0) = 0.04$$
$$z_2 = y' \Rightarrow y'(0) = z_2(0) = 0.00$$

Phương trình vi phân bậc hai ở trên có thể viết lại thành hệ hai phương trình vi phân bậc nhất theo các biến mới z_1 và z_2 như sau

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -\frac{3}{2}z_2 - \frac{5}{2}z_1 \end{cases}$$

Ta biểu diễn dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\frac{3}{2}z_2 - \frac{5}{2}z_1 \end{bmatrix} = F(t, Z) \qquad Z(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Tính $Z(0.1)$ và $Z(0.2)$ với $h = 0.1$.
Bước 1:

$$K_1 = hF(t_0, Z_0) = 0.1 \begin{bmatrix} z_2(0) \\ -\frac{3}{2}z_2(0) - \frac{5}{2}z_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \times 0.00 \\ 0.1(-1.5 \times 0.00 - 2.5 \times 0.04) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}$$

$$Z = \underbrace{Z(0)}_{Z_0} + K_1 = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ -0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = hF(\underbrace{t_0 + h}_{t}, \underbrace{Z_0 + K_1}_{Z}) = 0.1 \begin{bmatrix} z_2 \\ -1.5z_2 - 2.5z_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 \times (-0.01) \\ 0.1 \times (-1.5(-0.01) - 2.5 \times 0.04) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0010 \\ -0.0085 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = Z(t_0 + h) = Z(0) + 0.5(K_1 + K_2)$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} z_1(0.1) \\ z_2(0.1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0010 \\ -0.0085 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0 + (-0.0010) \\ -0.01 + (-0.0085) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \times (-0.0010) \\ 0.5 \times (-0.0185) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03950 \\ -0.00925 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vậy tại thời điểm $t = 0.1$ giây sau khi buông tay, vật nặng nằm ở vị trí $y = 0.03950$ m so với vị trí cân bằng, và chuyển động với vận tốc $v = y' = -0.00925$ m/s.

Bước 2:

$$K_1 = hF(t=0.1, Z(0.1)) = 0.1\begin{bmatrix} z_2(0.1) \\ -1.5z_2(0.1) - 2.5z_1(0.1) \end{bmatrix}$$

$$= 0.1\begin{bmatrix} -0.00925 \\ -1.5 \times (-0.00925) - 2.5 \times 0.03950 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0009250 \\ -0.0084875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}$$

$$Z = Z(0.1) + K_1 = \begin{bmatrix} z_1(0.1) \\ z_2(0.1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0395000 \\ -0.0092500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0009250 \\ -0.0084875 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0385750 \\ -0.0177375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = hF(\underbrace{t_0 + 2h}_{t}, \underbrace{Z_1 + K_1}_{Z}) = 0.1 \begin{bmatrix} z_2 \\ -1.5z_2 - 2.5z_1 \end{bmatrix}$$

$$= 0.1 \begin{bmatrix} -0.0177375 \\ -1.5 \times (-0.0177375) - 2.5 \times 0.0385750 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.001773750 \\ -0.006983125 \end{bmatrix}$$

$$Z(0.2) = Z_2 = Z_1 + hF(t_1, Z_1) = Z(0.1 + h) = Z(0.1) + 0.5(K_1 + K_2)$$

$$\begin{bmatrix} z_1(0.2) \\ z_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.039500 \\ -0.009250 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -0.0009250 \\ -0.0084875 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.001773750 \\ -0.006983125 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0381506250 \\ -0.0169853125 \end{bmatrix}$$

Vậy tại thời điểm $t = 0.2$ giây sau khi buông tay, vật nặng nằm ở vị trí $y = 0.0381506250$ m so với vị trí cân bằng, và chuyển động với vận tốc $v = y' = -0.0169853125$ m/s.

Phụ lục
Code Matlab ví dụ cho SV tham khảo

```
%----------------------------------------------------------------
% Newton_Raphson method to solve the nonlinear equation%
%----------------------------------------------------------------
clc;
clear all;
close all;
format short;
syms x;
f=x-2*exp(-x);
eps=1.e-3;
x0=-1;
%------------------- Main programe --------------------------
% lenh subs(f,x) cho phep the x vao bieu thuc cua ham f
% lenh diff(f) cho phep tinh bieu thuc dao ham cua ham f
%----------------------------------------------------------------
f0=subs(f,x0);
df=diff(f);
dfx0=subs(df,x0);
err=1;
i=0;
```

```
while err>eps
    xi=x0-f0/dfx0;
    f0=subs(f,xi);
    dfx0=subs(df,xi);
    err=abs(xi-x0);
    K(i+1,1)=i;
    K(i+1,2)=x0;
    K(i+1,3)=subs(f,x0);
    K(i+1,4)=subs(df,x0);
    K(i+1,5)=xi;
    K(i+1,6)=err;
    i=i+1;
    x0=xi;
end
xi;
fxi=subs(f,xi);
fprintf('step     x_i        f(x_i)      df(x_i)    nghiem      err')
K
```

```
%--------------------- Draw the nonlinear equation -------------
hold on;grid on;
xx=-1:.1:2.5;
yy=subs(f,xx);
plot(xx,yy,'linewidth',1.5);
plot(xi,fxi,'o','markeredgecolor','g','markerfacecolor','r',...
    'markersize',10)
text(3,0,'f(x)=x-x^ (1/3)-2','color','black','fontsize',14)
%------------------- Ket thuc chuong trinh ----------------------
```

```
%-----------------------------------------------
% Giai he phuong trinh bang phep khu Gauss
%-----------------------------------------------
clc;
clear all;
close all;
%-----------------------------------------------
% Input to factor matrix of systerm equations
%-----------------------------------------------
A=[-5 1 16 -12;1 0 -4 3;0 -3 10 -5;4 8 -24 -3];
B=[-28;6;-2;1];
%-----------------------------------------------
% Khu thuan
% Lenh size(A,1) tra ve so dòng cua ma tran A
% Lenh size(A,2) tra ve so cot cua ma tran A
%-----------------------------------------------
for k=1:(size(A,1)-1)
    for i=(k+1):size(A,1)
        c=A(i,k)/A(k,k);
        for j=k:size(A,1)
```

```
            A(i,j)=A(i,j)-c*A(k,j);
        end
        B(i)=B(i)-c*B(k);
    end
    A
    B
end
%------------------------------------------------
% Khu nguoc
%------------------------------------------------
x=zeros(1,size(A,1));
for i=size(A,1):-1:1
   d=0;
   for j=(i+1):size(A,1)
       d=d+A(i,j)*x(j);
   end
   x(i)=(B(i)-d)/A(i,i);
end
x
%---------- ket thuc chuong trinh --------------
```

```
%-----------------------------------------------------------
% Sử dụng phép tính vi phân bậc 2 để tìm moment uốn trên dầm
%-----------------------------------------------------------
clc;
close all;
clear all;
format short;
h=0.2;
y=[0 0.01 0.02 0.04 0.08 0.15]
size(y,2)
for i=2:size(y,2)-1
    i
    ddy=(y(i+1)-2*y(i)+y(i-1))/h^2
    M=1.09*ddy
end
```

```
%------------------------------------------------%
% Tính tích phân bằng pp Gauss                   %
%------------------------------------------------%
clc;
clear all
syms t
%------------------------------------------------%
% Sử dụng công thức Gauss 3 điểm                 %
%------------------------------------------------%
c=[0.5556 0.8889 0.5556];
t1=[-0.7746 0  0.7746];
a=0;
b=15;
%-----------------------------------------------%
%            đổi cận về [-1,1]                  %
%-----------------------------------------------%
x=((b-a)/2)*t+(b+a)/2;
dx=((b-a)/2);
y=x^2+3*x+100;
I=0;
```

```
for i=1:length(c)
   c(i)
   f(i)=subs(y,t1(i))
   ff(i)=c(i)*f(i)*dx
   I=I+ff(i)
end
k=15;
z=(1/3)*k^3+1.5*k^2+100*k;
ff(i)
I
%----------- ket thuc chuong trinh -----------%
```

```
%-----------------------------------------------------------%
%      Giải phương trình vi phân bằng pp R-K bậc 2          %
%-----------------------------------------------------------%
clc;
close all;
clear all;
%----------------------- Input ------------------------------%
% Ký tự @ (a còng) trong cú pháp @(x,y) báo cho matlab biết %
% x và y là hai đối số của hàm f=y*x^2-1.1*y                %
%------------------------------------------------------------%
f=@(x,y)(y*x^2-1.1*y);
x0=0;
y0=1;
h=0.5;
alpha=1;
w1=1/(2*alpha);
w2=1-w1;
rx=1.5;
n=(rx-x0)/h;
%--------------------- Main programe -----------------------%
```

```
for i=1:n
    b(i,1)=i;
    b(i,2)=x0;
    b(i,3)=x0+h;
    b(i,4)=y0;
    K1=h*f(x0,y0);
    b(i,5)=K1;
    xk=x0+h;
    yk=y0+K1;
    K2=h*f(xk,yk);
    y1=y0+w1*K1+w2*K2;
    b(i,6)=K2;
    b(i,7)=y1;
    x0=x0+h;
    y0=y1;
end
b
%------------------ Ket thuc chuong trinh ----------------%
```

```
%---------------------------------------------------------%
% Hệ phương trình vi phân cấp 1
% Phương trình vi phân cấp 2
%---------------------------------------------------------%
clc;
close all;
clear all;
format long;
h=0.1;
x=0.2;
x0=0.0;
Z0=[0.1; 0];
K1=zeros(2,1);
K2=zeros(2,1);
n=(x-x0)/h;
for i=1:n
    i
    F=[Z0(2,1); 10-4*Z0(2,1)-3*Z0(1,1)];
    K1=h*F;
```

```
    %Z=Z0+K1;
%----------- midle-point menthod --------------------
    Z=Z0+0.5*K1;
%----------------------------------------------------
    F=[Z(2,1); 10-4*Z(2,1)-3*Z(1,1)];
    K2=h*F;
    %Z=Z0+0.5*(K1+K2)
%----------- midle-point menthod --------------------
    Z=Z0+K2
%----------------------------------------------------
    Z0=Z;
end
Z;
```

```
%-----------------------------------------------------%
% Hoặc có thể viết dưới dạng chương trình con như sau
%-----------------------------------------------------%
clc;
close all;
clear all;
format short;
h=0.1;
x=0.2;
x0=0.0;
Z0=[0.1; 0];
K1=zeros(2,1);
K2=zeros(2,1);
n=(x-x0)/h;
for i=1:n
    i
    [F]=Ffunction(Z0);
    K1=h*F;
    %Z=Z0+K1;
%----------- midle-point menthod -------------------
```

```
    Z=Z0+0.5*K1;
%-----------------------------------------------------
    [F]=Ffunction(Z);
    K2=h*F;
    %Z=Z0+0.5*(K1+K2)
%----------- midle-point menthod -------------------
    Z=Z0+K2
%-----------------------------------------------------
    Z0=Z;
end
Z;
%====================================================%
% Chương trình con được viết riêng ra một file khác
% và được đặt tên file là Ffunction.m
%====================================================%
function [F]=Ffunction(Z);
    F=[Z(2,1)+1; 10-4*Z(2,1)-3*Z(1,1)];
end
```