

## Chương 3: Tính sai phân số

TS. Lê T. P. Nam

IUH – 2017

### Lý do dùng sai phân số:

Ước tính đạo hàm của 1 hàm bằng cách dùng các giá trị của hàm từ một tập hợp điểm rời rạc.

Phương trình vi phân thường (ODE).

Phương trình đạo hàm riêng (PDE).

- Làm thế nào chúng ta ước tính đạo hàm của 1 hàm từ bảng giá trị.
- Làm thế nào chúng ta xác định vận tốc và gia tốc từ bảng giá trị đo dịch chuyển.

Thời gian (Giây)	Chuyển vị (m)
0	30.1
5	48.2
10	50.0
15	40.2

Nhắc lại:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h$ : độ dài bước

### Lý thuyết Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x)h^3}{3!} + O(h^4)$$

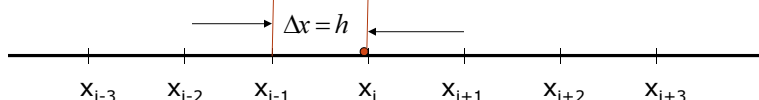
$$E = O(h^n)$$

Tồn tại số thực C, sao cho  $|E| \leq C|h|^n$

E theo bậc  $h^n \rightarrow E$  tiến đến zero ở tỉ lệ tương tự  $h^n$ .

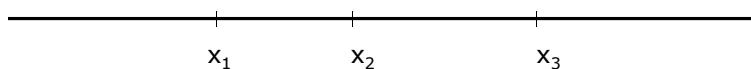
Nếu h nhỏ sẽ dẫn đến sai số nhỏ.

### Các điểm phân bố đều dọc trục x



Khoảng cách giữa 2 điểm gần nhất thì giống nhau và  $h = \Delta x$ .

### Các điểm phân bố không đều dọc trục x

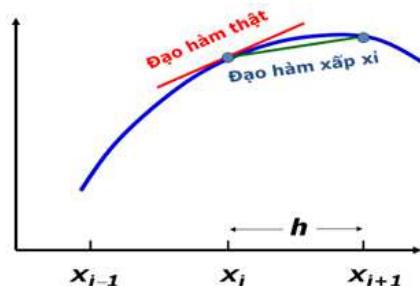


3

IUH-HK1-2017-2018

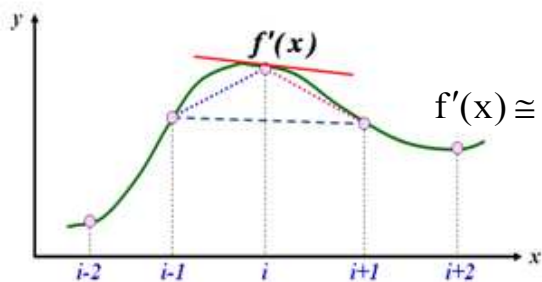
TS. Lê T. P. Nam

### Sai phân thuận



$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

### Đạo hàm bậc nhất



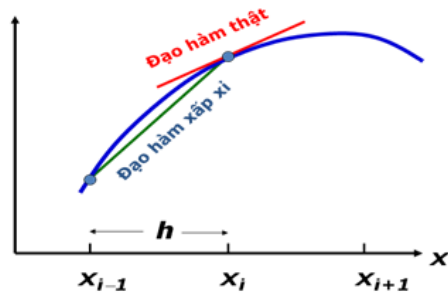
$$f'(x) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

4

IUH-HK1-2017-2018

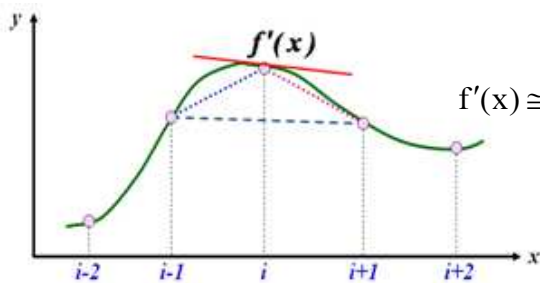
TS. Lê T. P. Nam

## Sai phân ngược



$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

## Đạo hàm bậc nhất



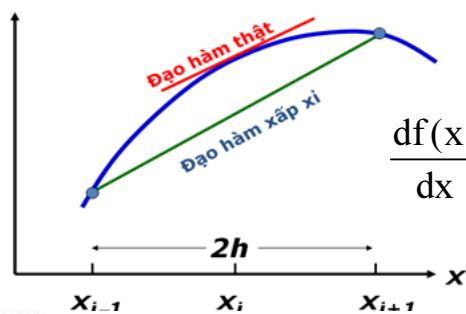
$$f'(x) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

5

IUH-HK1-2017-2018

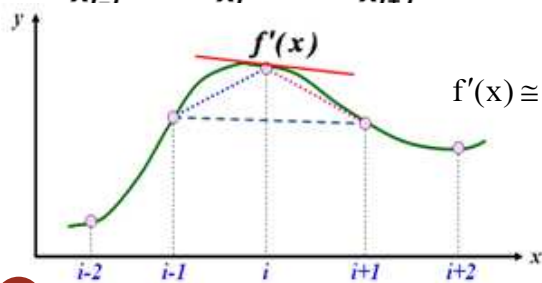
TS. Lê T. P. Nam

## Sai phân trung tâm



$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

## Đạo hàm bậc nhất



$$f'(x) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

6

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Sai phân số

- Cả hai sai phân thuận và ngược có sai số tỉ lệ tới bậc 1 của  $h$ . Điều này nghĩa là sai số giảm tuyến tính khi giảm  $h$ .
- Sai phân trung tâm có sai số tỉ lệ với bậc của  $h^2$ , nghĩa là sai số giảm bậc 2 với giảm  $h$ .

## Công thức sai phân có độ chính xác cao

- Công thức sai phân chính xác cao có thể được thiết lập bằng cách thêm các số hạng từ khai triển chuỗi Taylor.

Các công thức sai phân thuận và ngược được so sánh trong sự chính xác. Công thức sai phân trung tâm được mong đợi để cho ước tính tốt hơn

7

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

Tất cả các công thức sai phân trước là được tính ở 2 điểm liền nhau.

### Công thức sai phân độ chính xác cao cho $f'(x)$ : Được tính cho 3 điểm

Khai triển chuỗi Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots$$

Giải cho  $f'(x)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}h + O(h^2)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i))}{h^2} + O(h^2)$$

Thay vào công thức sai phân thuận cho xấp xỉ của  $f'(x)$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i))}{2h} + O(h^2)$$

Công thức sai phân  
với 3 điểm cho  $f'(x)$

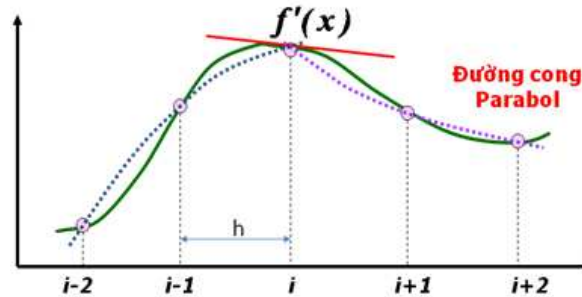
8

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Sai phân thuận : Tính với 3 điểm

$$f'(x) \cong \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{x_{i+2} - x_i} = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$



### Sai phân ngược: Tính với 3 điểm

$$f'(x) \cong \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{x_i - x_{i-2}} = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{2h}$$

9

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Sai phân trung tâm : tính với 3 điểm

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{12h}$$

### Công thức sai phân số trung tâm tính cho đạo hàm bậc 2

Hoặc

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

**Ví dụ 1:** Dùng các công thức sai phân tính với 3 điểm ( $h = 0.25$ ) để tính đạo hàm bậc nhất, tại  $x = 0.5$  từ bảng dữ liệu dưới đây

$x_{i-2} = 0.0$	$f(0.0) = 1.2$
$x_{i-1} = 0.25$	$f(0.25) = 1.103516$
$x_i = 0.5$	$f(0.5) = 0.925$
$x_{i+1} = 0.75$	$f(0.75) = 0.63633$
$x_{i+2} = 1.0$	$f(1.0) = 0.2$

10

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Giải**

**Sai phân thuận**

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.8594$$

**Sai phân ngược**

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925) - 4(1.035156) + 1.2}{2(0.25)} = -0.8781$$

**Sai phân trung tâm**

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8(0.636328) - 8(1.035156) + 1.2}{12(0.25)} = -0.9125$$

11

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 2:** Dùng các công thức sai phân thuận, ngược và trung tâm để ước lượng đạo hàm bậc nhất của hàm:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

ở  $x = 0.5$  dùng độ dài bước  $h = 0.5$  và  $h = 0.25$

**Giải:**

Chú ý đạo hàm có thể được tính trực tiếp:

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$

$$\text{Giá trị thực: } f'(0.5) = -0.9125$$

Trong ví dụ này, hàm và đạo hàm của nó được biết. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, chỉ có bảng dữ liệu có thể được cho trước.

12

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Giải với độ dài bước  $h = 0.5$**

$$f(0.5) = 0.925, f(0) = 1.2, f(1.0) = 0.2$$

• **Sai phân thuận:**

$$f'(0.5) \approx (0.2 - 0.925)/0.5 = -1.45$$

$$|\varepsilon_t| = |(-0.9125 + 1.45)/-0.9125| = 58.9\%$$

• **Sai phân ngược:**

$$f'(0.5) \approx (0.925 - 1.2)/0.5 = -0.55$$

$$|\varepsilon_t| = |(-0.9125 + 0.55)/-0.9125| = 39.7\%$$

• **Sai phân trung tâm:**

$$f'(0.5) \approx (0.2 - 1.2)/1.0 = -1.0$$

$$|\varepsilon_t| = |(-0.9125 + 1.0)/-0.9125| = 9.6\%$$

13

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Giải với độ dài bước  $h = 0.25$**

$$f(0.5) = 0.925, f(0.25) = 1.1035, f(0.75) = 0.6363$$

**Sai phân thuận:**

$$f'(0.5) \approx (0.6363 - 0.925)/0.25 = -1.155$$

$$|\varepsilon_t| = |(-0.9125 + 1.155)/-0.9125| = 26.5\%$$

**Sai phân ngược:**

$$f'(0.5) \approx (0.925 - 1.1035)/0.25 = -0.714$$

$$|\varepsilon_t| = |(-0.9125 + 0.714)/-0.9125| = 21.7\%$$

**Sai phân trung tâm:**

$$f'(0.5) \approx (0.6363 - 1.1035)/0.5 = -0.934$$

$$|\varepsilon_t| = |(-0.9125 + 0.934)/-0.9125| = 2.4\%$$

14

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 3:** Dùng công thức sai phân thuận và ngược 3 điểm để tính đạo hàm bậc nhất của

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

ở  $x = 0.5$  (các điểm phân bố đều dọc trục  $x$ ) với  $h = 0.25$  (giải chính xác = -0.9125)

**Giải:**

• **Sai phân thuận**

$$\begin{aligned} f'(0.5) &= \frac{-f(1) + 4f(0.75) - 3f(0.5)}{2(0.25)} \\ &= \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{0.5} = -0.859375, \quad |\varepsilon_t| = 5.82\% \end{aligned}$$

• **Sai phân ngược**

$$\begin{aligned} f'(0.5) &= \frac{3f(0.5) - 4f(0.25) + f(0)}{2(0.25)} \\ &= \frac{3(0.925) - 4(1.035156) + 1.2}{0.5} = -0.878125, \quad |\varepsilon_t| = 3.77\% \end{aligned}$$

15

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

**Ví dụ 4:** Khoảng cách  $x$  được đo từ 1 điểm cố định với khoảng thời gian là 0.5s

$t$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$x$	0.00	3.65	6.80	9.90	12.15

Dùng công thức sai phân trung tâm để tính gia tốc ở thời điểm  $t = 1.5$ s

**Giải:** Tính gia tốc nghĩa là chúng ta hướng đến tính  $x''(t)$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$x''(1.5) \approx \frac{x(2.0) - 2x(1.5) + x(1.0)}{0.5^2} = -3.40 \text{m/s}^2$$

Dấu trừ chỉ rằng chuyển động chậm dần.

16

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam



**Ví dụ 5:** Dùng công thức sai phân thuận tính đạo hàm của  $\cos(x)$  khi  $x = \pi/3$  với các độ dài bước  $h$  khác nhau  $h = 0.1$ , và  $0.01$ .

**Giải**

Tính chính xác đạo hàm  $f(x) = -\sin x = -\sin(60^\circ) = -0.86602$

**Sai phân thuận**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$h = 0.1; \frac{\cos((\pi/3 + 0.1) * (180/\pi)) - \cos(60^\circ)}{0.1} = \frac{0.41099 - 0.5}{0.1} = -0.89010$$

$$h = 0.01; \frac{\cos((\pi/3 + 0.01) * (180/\pi)) - \cos(60^\circ)}{0.01} = \frac{0.49131 - 0.5}{0.01} = -0.86900$$

17

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Phương pháp trong MATLAB

- $p = \text{polyfit}(x, y, n)$  – hệ số của đa thức  $P_n(x)$
- $\text{polyfit}(p, x)$  – Ước tính  $P_n(x)$
- $\text{polyder}(p)$  – Sai phân

$$x = [x(1), x(2), \dots, x(n)]$$

$$\text{diff}(x) = [x(2) - x(1), x(3) - x(2), \dots, x(n) - x(n-1)]$$

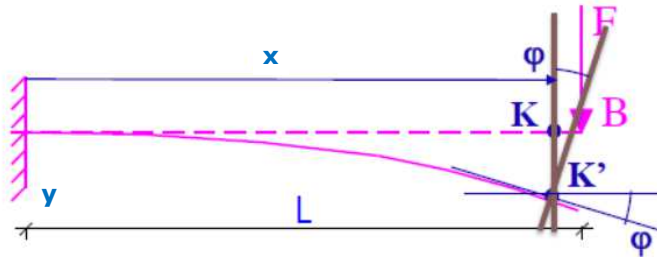
$$dy = \text{diff}(y) ./ \text{diff}(x) = \begin{cases} dy/dx & \text{ở } x_i \leftrightarrow \text{Sai phân thuận} \\ dy/dx & \text{ở } x_{i+1} \leftrightarrow \text{Sai phân nghịch} \end{cases}$$

18

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

## Tính chuyển vị của dầm chịu uốn cong



Độ võng  $y(x) = KK'$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi:

$$y'' = -M_x/EJ_x$$

M: mô men

E: hệ số mô đun đàn hồi

J: mô men quán tính.

19

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

Độ võng  $y$  của 1 dầm dọc theo chiều dọc dầm  $x$  được thể hiện trong bảng dưới. Mô men uốn ở bất kỳ điểm nào trên dầm được tính theo  $M(x) = 1.05y''(x)$ . Tính mô men uốn ở  $x = 0.4$  và  $0.6$ .

Vị trí $x$	Độ võng $y$
0.2	-0.15
0.4	-0.20
0.6	-0.20
0.8	-0.15

Giải : Công thức sai phân trung tâm tính đạo hàm bậc 2

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$\begin{aligned} y''(0.6) &= f(0.8) - 2f(0.6) + f(0.4) \\ &= (-0.15 - 2*(-0.2) + (-0.2))/0.04 \\ &= 1.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x=0.6) &= 1.05*y''(0.6) \\ &= 1.05*(1.25) = 1.3125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(0.4) &= f(0.6) - 2f(0.4) + f(0.2) \\ &= (-0.2 - 2*(-0.2) + (-0.15))/0.04 \\ &= 1.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x=0.4) &= 1.05*y''(0.4) \\ &= 1.05*(1.25) = 1.3125 \end{aligned}$$

20

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

### Bài tập

1. Dùng công thức sai phân trung tâm **2 và 3 điểm** để tính đạo hàm bậc nhất và đạo hàm bậc 2 cho hàm  $y = e^x$  ở  $x = 2$  với  $h = 0.1$ .

Đáp án: 7.389031439

2. Các dữ liệu của quãng đường đi theo thời gian của một tên lửa được thể hiện bảng dưới:

t, s	0	25	50	75	100	125
y, km	0	32	58	78	92	100

Dùng sai phân số **3 điểm** (thuận và ngược) để ước tính vận tốc và gia tốc của tên lửa ở mỗi thời điểm.

Đáp án:

t	y	v	a
0	0	1.40	-0.0096
25	32	1.16	-0.0096
50	58	0.92	-0.0096
75	78	0.68	-0.0096
100	92	0.44	-0.0096
125	100	0.20	-0.0096

21

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam

3. Tính đạo hàm bậc hai của hàm  $f(x) = e^{-x}\sin(x/2)$  tại  $x = 1.4$  dùng công thức sai phân trung tâm **2 và 3 điểm** ( $h = 0.2$ ) và tính sai số.

4. Tính đạo hàm bậc nhất theo công thức trung tâm **2 và 3 điểm** cho các hàm y sau:

a)  $y = x^2 \cos x$  với  $x = 0.4$ ,  $h = 0.1$ .

b)  $y = \tan(x/3)$  với  $x = 3$ ,  $h = 0.5$ .

c)  $y = x^3 + 4x - 15$  với  $x = 0$ ,  $h = 0.25$

22

IUH-HK1-2017-2018

TS. Lê T. P. Nam