Đại Học Công Nghiệp Tp.HCM
Khoa Kỹ Thuật Cơ Khí

Chương 1: Giải phương trình đại số

ThS. Hồ Thị Bạch Phương

IUH - 2022

Phương pháp số

Phương pháp số: Các giải thuật được dùng để đạt giải pháp số của một vấn đề toán học.

Tại sao cần phương pháp số ?

1. Không có giải pháp giải tích để giải bài toán.
2. Một giải pháp giải tích thì khó khăn để có được hoặc không thực tế.

Cơ bản trong phương pháp số:

Thực hành:

Có thể được tính trong một khoảng thời gian hợp lý.

Chính xác:

Xấp xỉ tốt so với giá trị thực,

Thông tin về các sai số xấp xỉ.

Giải các phương trình phi tuyến

Một vài phương trình đơn giản có thể được giải bằng pp giải tích:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

Nghiệm giải bằng pp giải tích $= \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$

$$x = -1 \text{ and } x = -3$$

Nhiều các pt khác không thể giải bằng pp giải tích:

$$\left.\begin{array}{r} x^9 - 2x^2 + 5 = 0 \\ x = e^{-x} \end{array}\right\}$$

Các phương pháp lặp để giải các phương trình phi tuyến.

- Phương pháp Bisection (Phương pháp chia đôi)

- Phương pháp Newton-Raphson (hay còn gọi là pp Newton – pp tiếp tuyến)

- Phương pháp Secant (Phương pháp cát tuyến, dây cung)

Độ chính xác

Độ chính xác có liên quan đến sự gần với các giá trị thực.

Định nghĩa sai số – Sai số thực

Có thể được tính nếu giá trị thực được biết:

Sai số thực tuyêt đối

E_t = |Giá trị thực – Giá trị xấp xỉ|

Phần trăm sai số tương đối

ε_t = {|Giá trị thực – Giá trị xấp xỉ|/|Giá trị thực|}*100

Sai số ước tính

Khi giá trị thực không được biết:

Sai số tuyêt đối ước tính

E_a = |Giá trị ước tính hiện tại – Giá trị ước tính trước|

Phần trăm sai số tương đối

ε_a = {| Giá trị ước tính hiện tại – Giá trị ước tính trước|/| Giá trị ước tính hiện tại |}*100

Tìm nghiệm phương trình

Cho trước một hàm liên tục f(x), tìm giá trị r sao cho f(r) = 0

Những vấn đề này được gọi là tìm nghiệm phương trình.

Nghiệm của phương trình

Một số r thỏa mãn một phương trình được gọi là nghiệm của phương trình.

Pt: $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x = -18$

Có 4 nghiệm: $-2,\ 3,\ 3,$ and -1.

i.e., $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = (x+2)(x-3)^2(x+1)$

Pt có 2 nghiêm đơn -2 và -1 và 1 nghiệm kép 3 (lặp lại 2 lần).

Khoảng phân ly nghiêm: Khoảng [a,b] được gọi lã khoảng phân ly nghiêm của phương trình nếu nó **chứa 1 và chỉ một nghiệm** của phương trình đó.

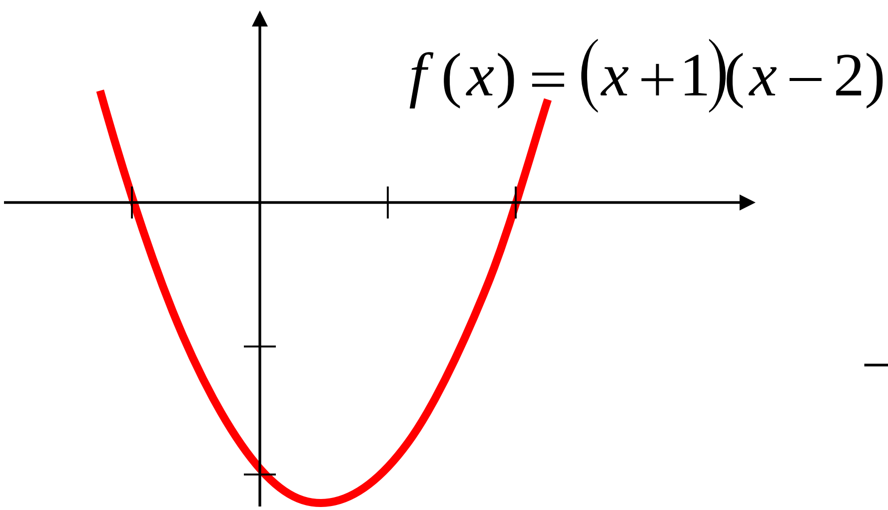
Zero của 1 hàm

f(x) là 1 hàm số thực của 1 biến thực. Bất cứ số r mà làm f(r) = 0 được gọi là zero của hàm.

Ví dụ:

2 và 3 là các zero của hàm f(x) = (x-2)(x-3).

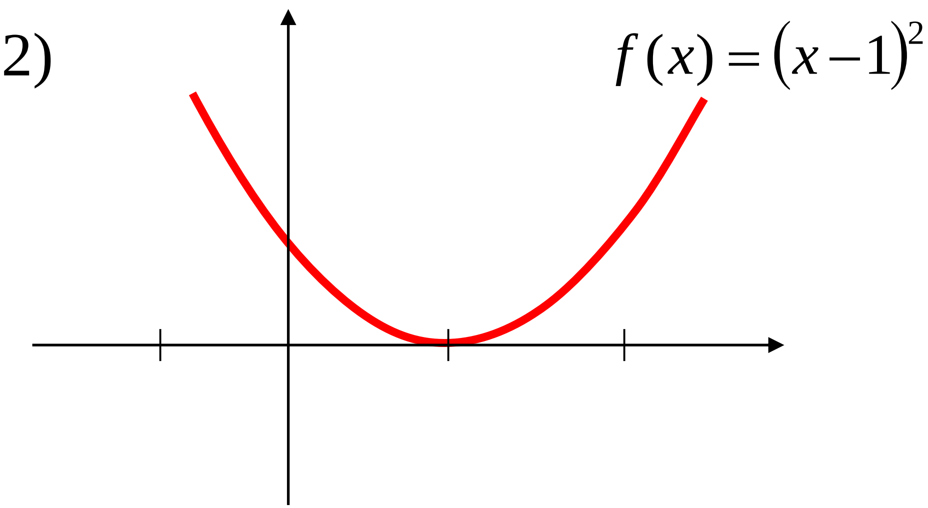
Các Zero đơn



$$f(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

Có 2 zero ở x = -1 và x = 2.

Các Zero kép



$$f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Có 2 zero (lặp lại 2 lần) tại x = 1

Lập luận

- Bất kỳ thứ tự đa thức bậc n có đúng n zero. (Zero có thể gồm : số thực và phức và có thể lặp nhiều lần).
- Bất kỳ đa thức với bậc lẻ có ít nhất một zero thực.
- Nếu 1 hàm có 1 zero ở *x = r* với lặp lại *m* lần khi đó hàm và đạo hàm *(m-1)* đầu tiên là zero ở ***x = r và đạo hàm lần m*** *ở r thì không là zero*.

Nghiệm của phương trình và Zero của hàm.

Cho pt:

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x = -18$$

Chuyển vế tất cả sang 1 bên của pt:

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$$

Gọi f(x) là: $f(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$

Các zero của hàm f(x) giống với nghiệm của pt:

Chúng là -2, 3, 3 và -1.

Phương pháp số

Nhiều phương pháp có sẵn để giải phương trình phi tuyến. Trong môn học này chúng ta sẽ học 3 phương pháp:

- Phương pháp Bisection
- Phương pháp Newton
- Phương pháp Secant

Tiêu chuẩn hội tụ

Một chuỗi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, được xem là hội tụ tới x nếu mỗi ε > 0 tồn tại N sao cho

$$\left|x_n - x\right| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Các tiêu chuẩn hội tụ

Hội tụ tuyến tính $\dfrac{\left|x_{n+1} - x\right|}{\left|x_n - x\right|} \le C$

Hội tụ bậc 2 $\dfrac{\left|x_{n+1} - x\right|}{\left|x_n - x\right|^2} \le C$

Hội tụ bậc p $\dfrac{\left|x_{n+1} - x\right|}{\left|x_n - x\right|^p} \le C$

Tốc độ hội tụ

• Chúng ta có thể so sánh các phương pháp khác nhau về tốc độ hội tụ của chúng.

• Hội tụ bậc hai là nhanh hơn so với tụ tuyến tính.

• Một phương pháp với hội tụ bậc q hội tụ nhanh hơn so với một phương pháp với hội tụ bậc p nếu q> p.

• Phương pháp hội tụ bậc p> 1 được cho là có sự hội tụ siêu tuyến tính.

Phương pháp Bisection : Giới thiệu

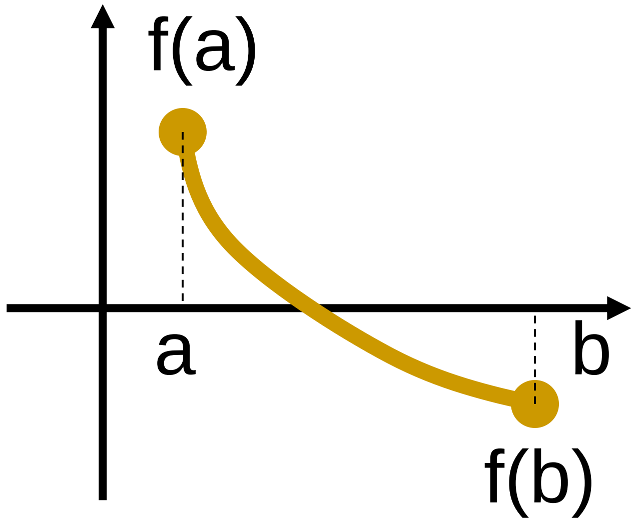
- Phương pháp Bisection là một trong những phương pháp đơn giản nhất để tìm zero của một hàm phi tuyến.

- Để sử dụng phương pháp này chúng ta cần biết khoảng nghiệm ban đầu mà được biết đến có chứa zero của hàm.

- Phương pháp này làm giảm một cách hệ thống các khoảng phân ly nghiệm này. Nó làm điều này bằng cách chia khoảng này thành hai phần bằng nhau, thực hiện một thử nghiệm đơn giản và dựa trên kết quả của các thử nghiệm, một nửa trong khoảng này được bỏ đi.

- Quá trình này được lặp đi lặp lại cho đến khi kích thước khoảng phân ly nghiệm mong muốn thu được.

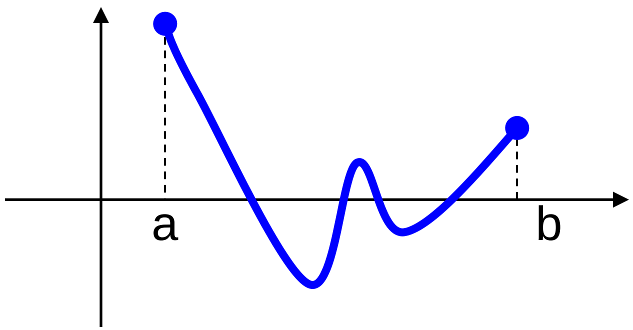
- Để hàm f(x) định nghĩa trên **khoảng phân ly nghiệm** [a,b].



Nếu 1 hàm là liên tục và f(a) và f(b) trái dấu (i.e. $f(a)*f(b) < 0$) khi đó hàm có tối thiểu 1 zero trong khoảng [a,b].

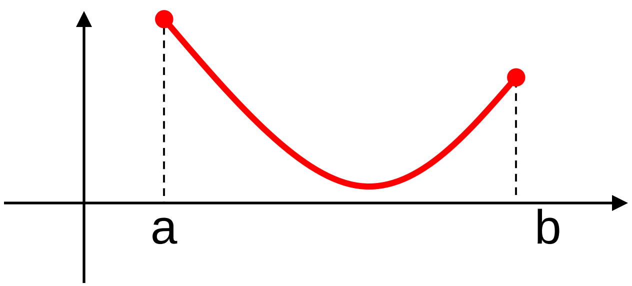
Ví dụ

- Nếu f(a) và f(b) cùng dấu, hàm có thể có một số chẵn của zero thực hoặc không có zero trong khoảng [a, b].



Hàm có 4 zero thực.

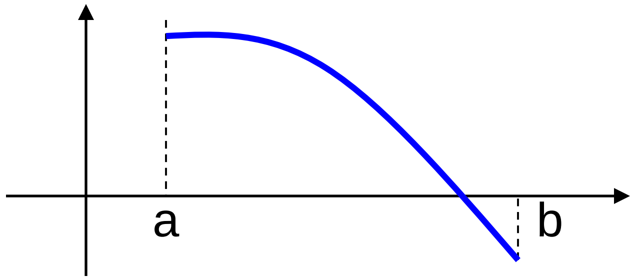
- Phương pháp Bisection có thể không dùng cho trường hợp sau:



Hàm không có zero.

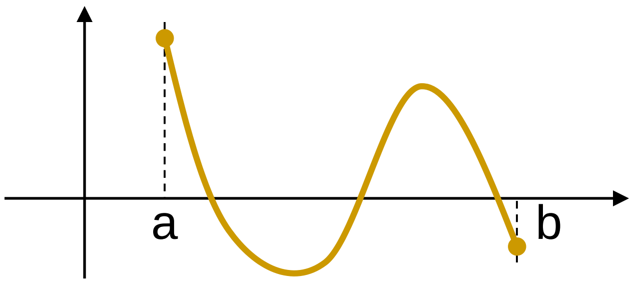
Ví dụ:

Nếu f(a) và f(b) trái dấu hàm có ít nhất 1 zero thực.



Hàm có 1 zero thực.

Phương pháp Bisection có thể được dùng để **tìm 1 trong các zero.**



Hàm có 3 zeros thực.

Phương pháp Bisection

Nếu hàm là liên tục trên [a,b] và f(a), f(b) trái dấu, phương pháp Bisection đạt 1 khoảng phân ly nghiệm mới mà còn lại chỉ một nữa của khoảng phân ly nghiệm hiện tại, và các dấu của hàm tại các điểm cuối của khoảng phân ly nghiệm khác nhau.

Điều này cho phép chúng ta lặp quá trình Bisection để giảm khoảng nghiệm mong muốn.

Phương pháp Bisection

Các giả định:

- Cho trước khoảng phân ly nghiệm [a,b]
- f(x) liên tục trên [a,b]
- f(a) và f(b) trái dấu với nhau (i.e. f(a)*f(b) < 0).

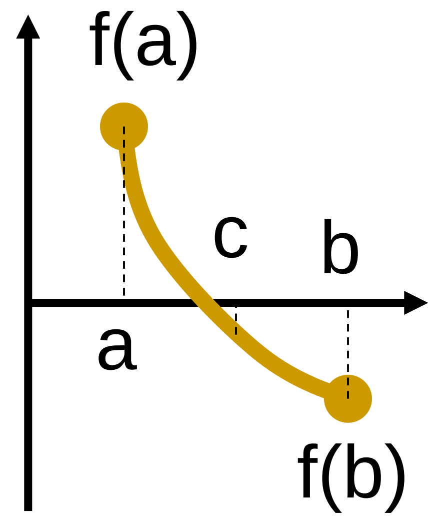
Những giả định này bảo đảm tồn tại tối thiểu 1 zero trên [a,b] và phương pháp bisection có thể được dùng để đạt một khoảng nghiệm nhỏ hơn mà chứa zero.

Giải thuật Bisection

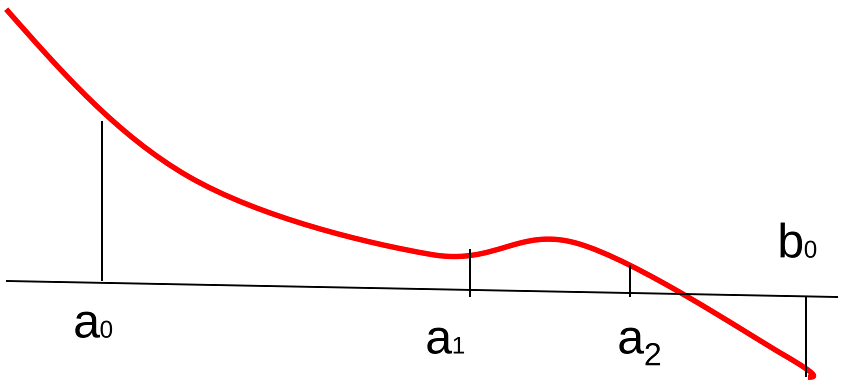
Vòng lặp

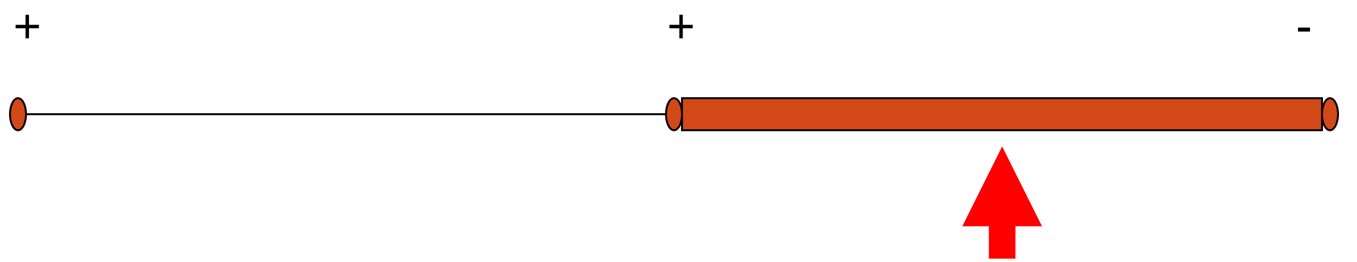
1. Tính toán điểm giữa c =(a+b)/2
2. Tính hàm f(c)
3. Nếu (If) f(a)*f(c) < 0 (then) khi đó khoảng mới [a, c]
   Nếu (If) f(a)*f(c) > 0 (then) khi đó khoảng mới [c, b]

Kết thúc vòng lặp

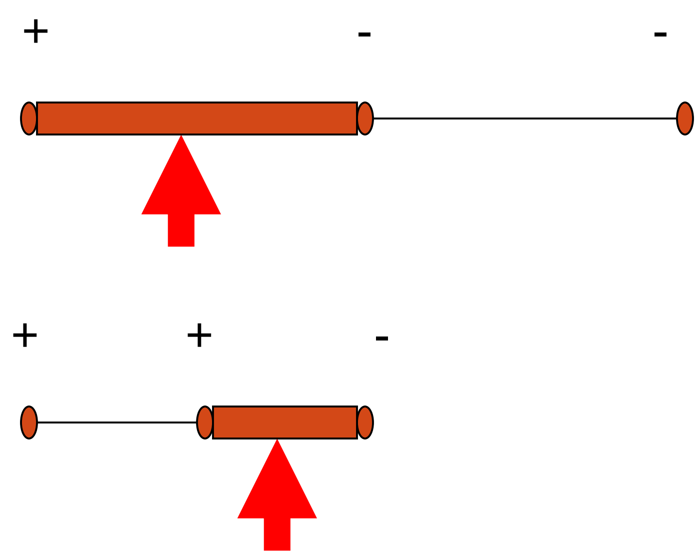


Phương pháp Bisection

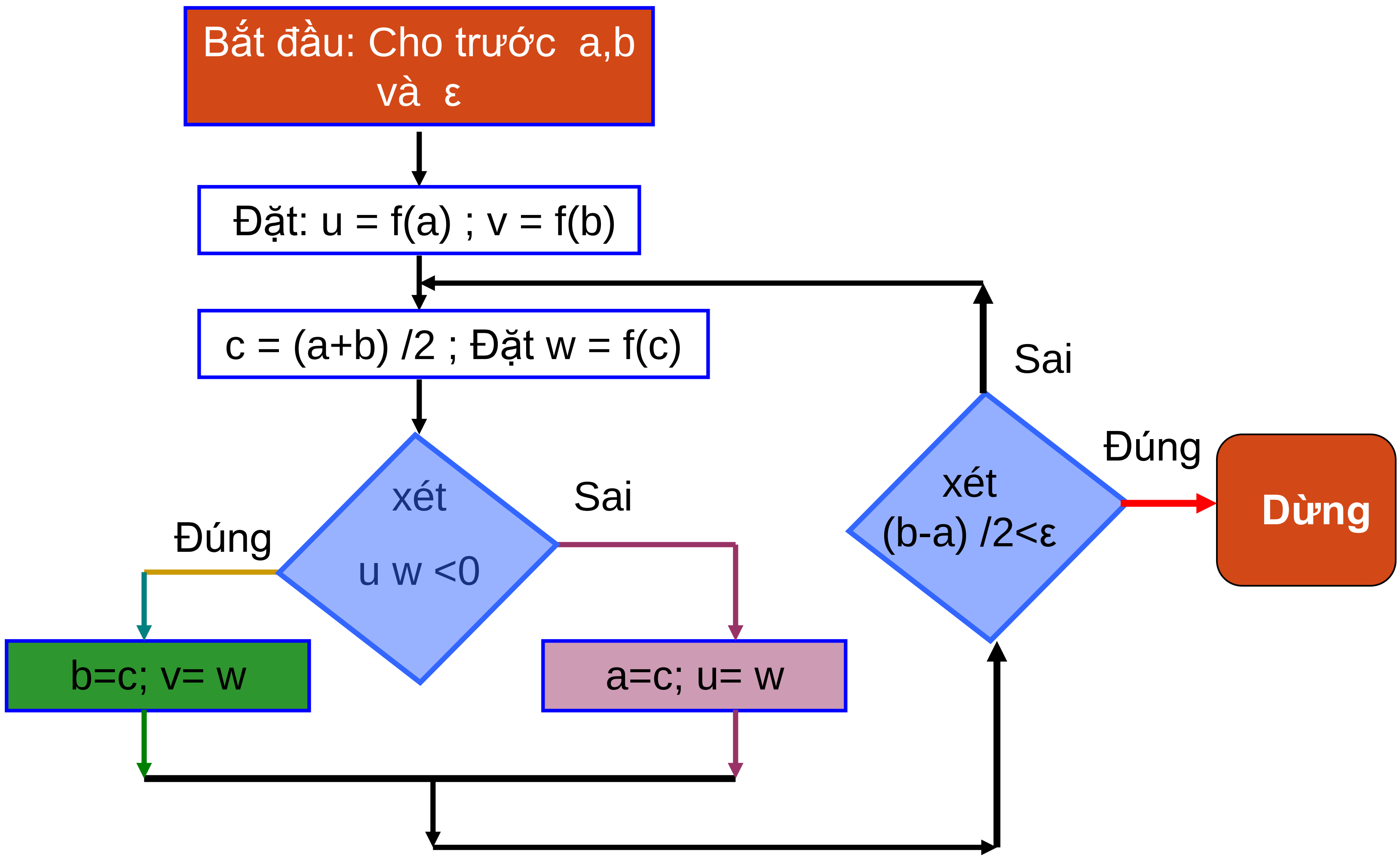




Sau mỗi lần lặp khoảng phân ly nghiệm sẽ giảm 1 nữa.



Sơ đồ của pp Bisection.



Ví dụ:

1. Có thể dùng pp Bisection để tìm zero cho hàm dưới trong khoảng [0, 2]

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Giải

f(x) thì liên tục trên khoảng [0, 2] và f(0)*f(2) = 1*3 = 3 > 0.

Giả định không thỏa mãn.

PP Bisection không thể dùng.

2. Có thể dùng pp Bisection để tìm zero cho hàm dưới trong khoang [0,1]

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Giải

f(x) thì liên tục trên khoảng [0, 1] và f(0)*f(1) = 1*(-1) = -1 < 0.

Giả định thỏa mãn.

PP Bisection có thể được dùng.

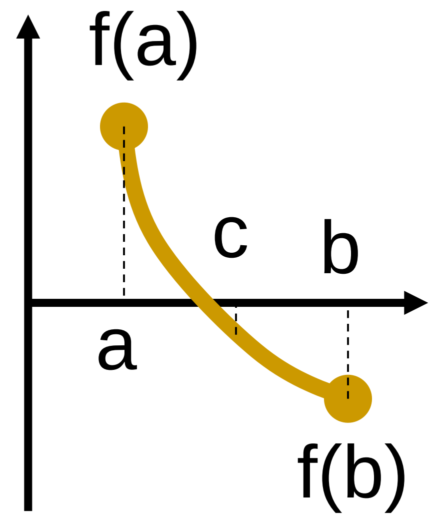
Ước tính tốt nhất và sai số

Phương pháp bisection đạt được một khoảng phân ly nghiệm mà bảo đảm để chứa một zero của hàm.

Các ước tính tốt nhất cho zero của hàm f (x) sau lần lặp đầu tiên của phương pháp bisection là điểm giữa của khoảng nghiệm ban đầu:

$$\text{Ước tính zero: } r = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{Sai số: } \leq \frac{b-a}{2}$$



Tiêu chuẩn dừng

Hai tiêu chuẩn dừng thông thường

1. Dừng sau 1 số lần lặp cho trước.
2. Dừng khi sai số tuyệt đối nhỏ hơn 1 giá trị cho trước.

c_n: là đểm giữa của khoảng nghiệm ở lần lặp thứ n (c_n thường được dùng để tìm nghiệm).
r: là zero của hàm.

Sau n lần lặp

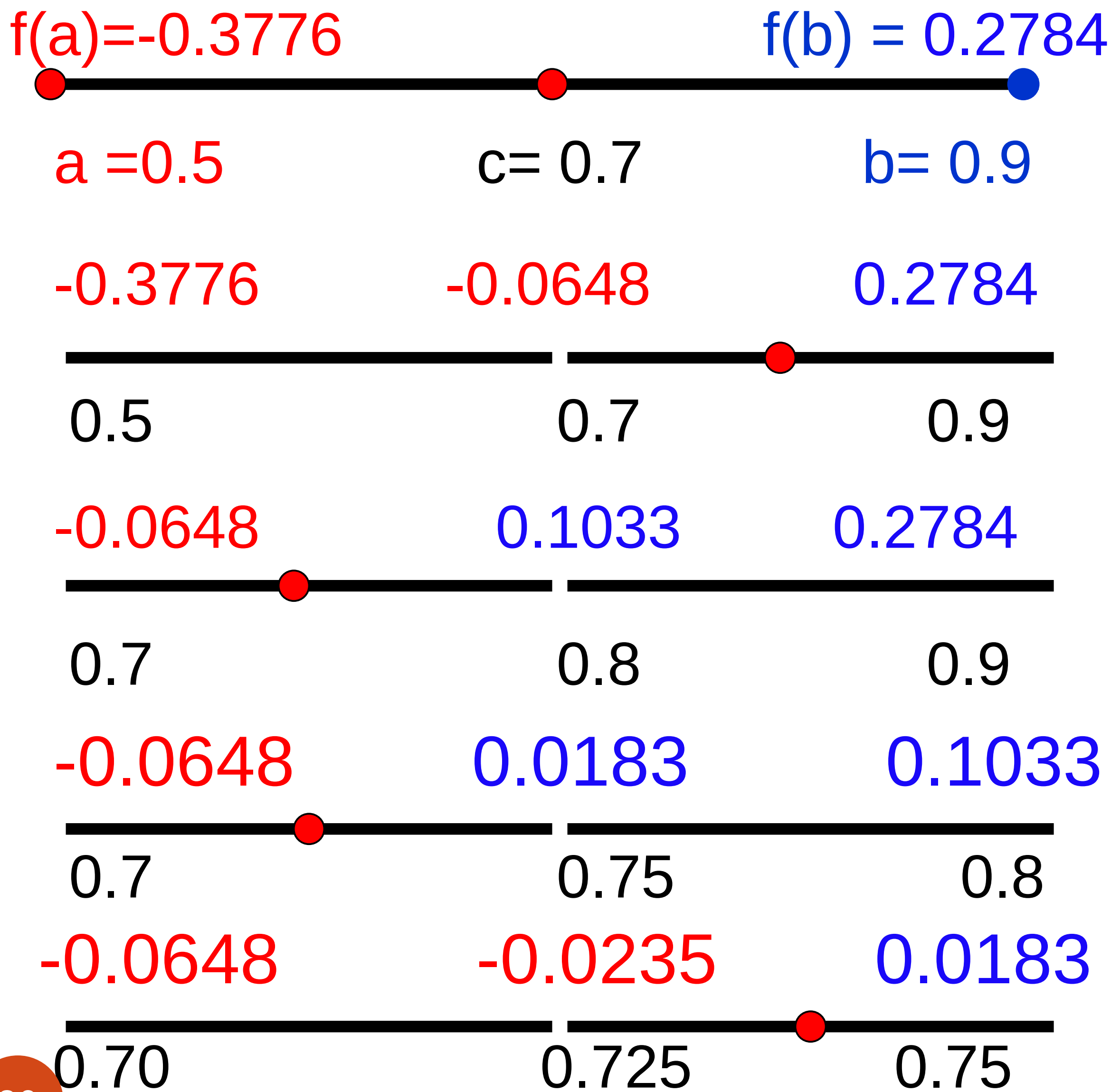
$$\text{Sai số } = \left| r - c_n \right| \le E_a^n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{\Delta x^0}{2^n}$$

PP Bisection

Đổi giá trị từ radian sang độ

Tìm nghiệm pt f(x) = x – cos(x)

Khoảng phân ly nghiệm ban đầu [0.5, 0.9]



Sai số < 0.2 = $(b-a)/2^n$

n = 1

Sai số < 0.1

n = 2

Sai số < 0.05

n = 3

Sai số < 0.025

n = 4

Sai số < 0.0125

n = 5

Tóm tắt

- Khoảng phân ly nghiệm ban đầu: [0.5,0.9]
- Sau 5 lần lặp: Khoảng nghiệm: [0.725, 0.75]
  - Ước tính cho nghiêm: 0.7375 và |Sai số | < 0.0125

Một chương trình Matlab của pp Bisection

```
a=.5; b=.9;
u=a-cos(a);
v=b-cos(b);
  for i=1:5
      c=(a+b)/2
      fc=c-cos(c)
      if u*fc<0
        b=c ; v=fc;
      else
        a=c; u=fc;
      end
  end
```

```
c =
    0.7000
fc =
   -0.0648
c =
    0.8000
fc =
    0.1033
c =
    0.7500
fc =
    0.0183
c =
    0.7250
fc =
  -0.0235
```

Ví dụ: Tìm nghiệm của f(x) trong khoảng [0,1]:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Giải

f(x) thì liên tục.

f(0) = 1, f(1) = -1 → f(0)*f(1) < 0

Pp Bisection có thể được dùng để tìm nghiêm.

Số lần lặp	**a**	**b**	**c= $\frac{(a+b)}{2}$**	**f(c)**	**$\frac{(b-a)}{2^n}$**
1	0	1	0.5	-0.375	0.5
2	0	0.5	0.25	0.266	0.25
3	0.25	0.5	.375	-7.23E-3	0.125
4	0.25	0.375	0.3125	9.30E-2	0.0625
5	0.3125	0.375	0.34375	9.37E-3	0.03125

Phương pháp Bisection

Ưu điểm

- Đơn giản và dễ lập trình.
- Đánh giá hàm sau mỗi lần lặp (tính f(c)
- .
- Kích thước của khoảng nghiệm giảm 50% sau mỗi lẫn lặp.
- Số lần lặp có thể được xác định trước.
- Không dùng đạo hàm.

Nhược điểm

- Chậm hội tụ
- Xấp xỉ tốt trung gian có thể được loại bỏ

Bài tập

1. Tìm nghiệm phương trình:

$f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$

Dùng 3 lần lặp với phương pháp Bisection. Giá trị ban đầu $x_0 = 5$ và $x_1 = 10$. Tính sai số sau mỗi lần lặp.

2. Tìm nghiệm phương trình với phương pháp Bisection :

$f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$.

Giá trị ban đầu $x_0 = 0$ và $x_1 = 1$. Lặp cho đến khi sai số dưới 1%.

3. Xác định nghiệm dương $\ln(x^2) = 0.7$.

Dùng 5 lần lặp với pp bisection với giá trị ban đầu $x_0 = 0.5$ và $x_1 = 2$ và tính sai số sau mỗi lần lặp.

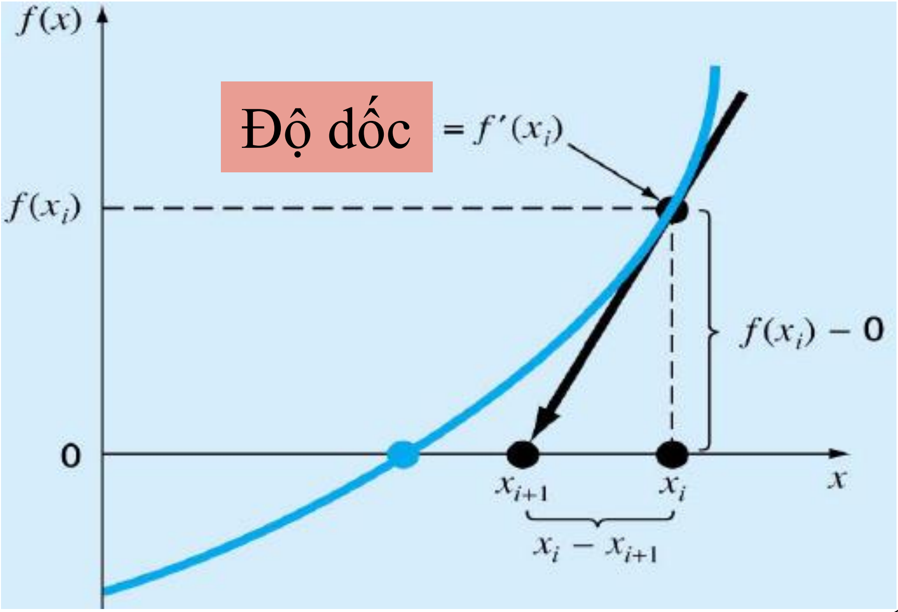
Phương pháp Newton-Raphson (Còn được biết như là pp Newton)

- Cho một nghiệm dự đoán ban đầu x_0, phương pháp Newton-Raphson sử dụng thông tin về hàm và đạo hàm của nó tại điểm đó để tìm một nghiệm dự đoán tốt hơn.

Giả định:

- ***f(x)*** liên tục và đạo hàm ***f'(x)*** được biết
- Cho trước giá trị đoán ban đầu x_0 sao cho $f'(x_0) \neq 0$

Nếu giá trị nghiệm ban đầu là x_i, khi đó tiếp tuyến tới hàm của x_i là $f'(x_i)$ được kéo xuống đến trục x để cung cấp một ước tính của nghiệm ở x_{i+1}.



Phương pháp Newton

Cho trước: Một nghiệm dự đoán (giá trị) ban đầu của f(x) = 0

Làm thế nào để ước tính nghiệm tốt hơn cho lần lặp sau?

Lý thuyết Taylor: $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h$

Tìm h sao cho $f(x + h) = 0$.

Công thức Newton - Rapshon

$\rightarrow h \approx -f(x)/f'(x)$.

Một giá trị mới của nghiệm : $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

Cho trước: $f(x), f'(x), x_0$

Giả định: $f'(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} &\text{for } i = 0:n \\ &\quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ &\text{end} \end{aligned}$$

f(x)

$$\begin{aligned} &\textit{function } [F] = F(X) \\ &\qquad F = X^\wedge 3 - 3 * X^\wedge 2 + 1 \end{aligned}$$

f'(x)

$$\begin{aligned} &\textit{function } [FP] = FP(X) \\ &\qquad FP = 3 * X^\wedge 2 - 6 * X \end{aligned}$$

```
% MATLAB PROGRAM
X = 4
for i = 1:5
    X = X - F(X) / FP(X)
end
```

Ví dụ

Tìm nghiệm của pt với pp Newton:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 \;,\; x_0 = 4$$

Giải

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Lần 1 $\quad x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \dfrac{33}{33} = 3$

Lần 2 $\quad x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3 - \dfrac{9}{16} = 2.4375$

Lần 3 $\quad x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.4375 - \dfrac{2.0369}{9.0742} = 2.2130$

Giá trị thể hiện trong bảng

k (Lần lặp)	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	**4**	**33**	**33**	**3**	1
1	**3**	**9**	**16**	**2.4375**	0.5625
2	**2.4375**	**2.0369**	**9.0742**	**2.2130**	0.2245
3	**2.2130**	**0.2564**	**6.8404**	**2.1756**	0.0384
4	**2.1756**	**0.0065**	**6.4969**	**2.1746**	0.0010

Ví dụ

Dùng pp Newton để tìm nghiệm của $f(x) = x^3 - x - 1$.
Dùng giá trị ban đầu: $x_0 = 1$.
Dừng nếu $|x_{k+1} - x_k| < 0.001$ hoặc $|f(x_k)| < 0.0001$.

Giải: 5 lần lặp của phép giải

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	Sai số
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000
1	1.5000	0.8750	5.7500	1.3478	0.1522
2	1.3478	0.1007	4.4499	1.3252	0.0226
3	1.3252	0.0021	4.2685	1.3247	0.0005
4	1.3247	0.0000	4.2646	1.3247	0.0000
5	1.3247	0.0000	4.2646	1.3247	0.0000

Ví dụ

Dùng pp Newton để tìm nghiệm của $f(x) = e^{-x} – x$

Dùng giá trị ban đầu: $x_0 = 1$. Dừng nếu

$$|x_{k+1} - x_k| < 0.001 \text{ hoặc } |f(x_k)| < 0.0001.$$

Giải: Dùng pp Newton để tìm nghiệm của

$f(x) = e^{-x} – x$ $\quad$ $f'(x) = -e^{-x} – 1$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	Sai số
0	1.0000	-0.6231	-1.3679	0.5379	0.4621
1	0.5379	0.0002	-1.5840	0.5670	0.0291
2	0.5670	0.1007	1.5672	<u>0.5671</u>	0.0001

Phân tích hội tụ

f(x), f'(x) và f''(x) liên tục ở $x \approx r$ mà f(r) = 0.
Nếu $f'(r) \neq 0$ khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\left|x_0 - r\right| \leq \delta \Rightarrow \frac{\left|x_{k+1} - r\right|}{\left|x_k - r\right|^2} \leq C$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{\max\limits_{\left|x_0 - r\right| \leq \delta} \left|f''(x)\right|}{\min\limits_{\left|x_0 - r\right| \leq \delta} \left|f'(x)\right|}$$

Phân tích hội tụ

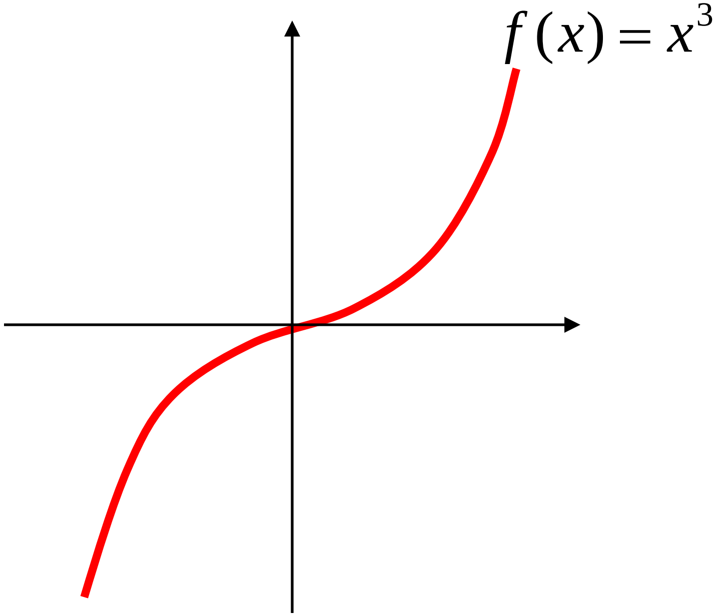
Khi nghiệm đoán là gần tới một nghiệm đơn của hàm khi đó phương pháp Newton được đảm bảo hội tụ bậc hai.

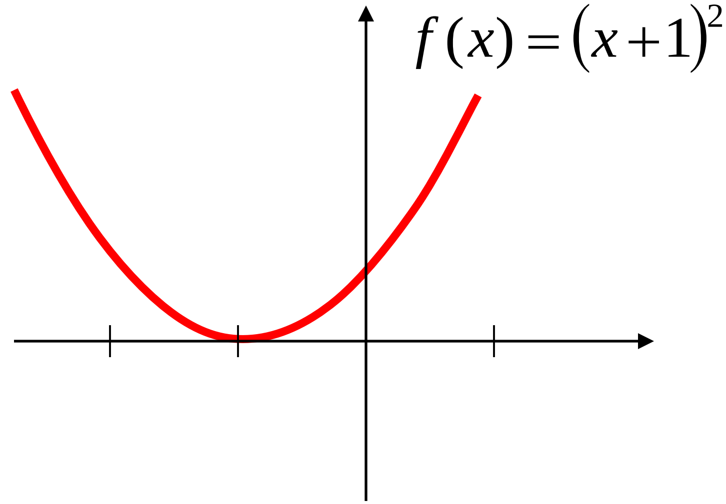
Hội tụ bậc hai nghĩa là số lượng các chữ số chính xác là gần gấp đôi ở mỗi lần lặp.

Vấn đề với pp Newton.

- Nếu nghiệm đoán ban đầu ở xa nghiệm của hàm, pp có thể không hội tụ..
- Pp Newton hội tu tuyến tính gần các zero kép { $\boldsymbol{f(r) = f'(r) = 0}$ }. Trong trường hợp này, thuật toán sửa đổi có thể được sử dụng để lấy lại sự hội tụ bậc hai.

Nghiệm kép

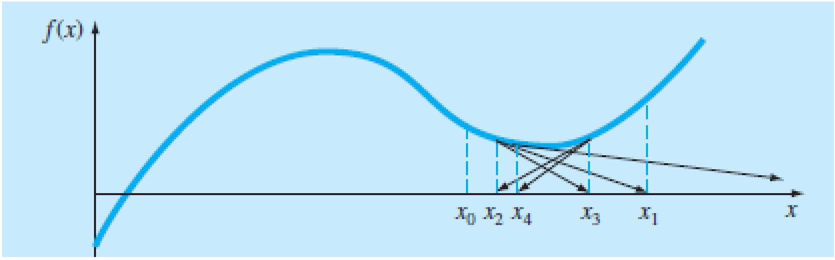




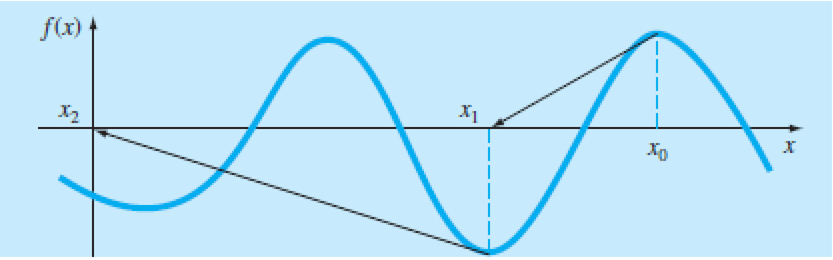
$\mathrm{f(x)}: 3$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{f(x)}: 2$

zero, x = 0 $\qquad\qquad$ **zero,** x = **-**1

Không hội tụ : pp Newton

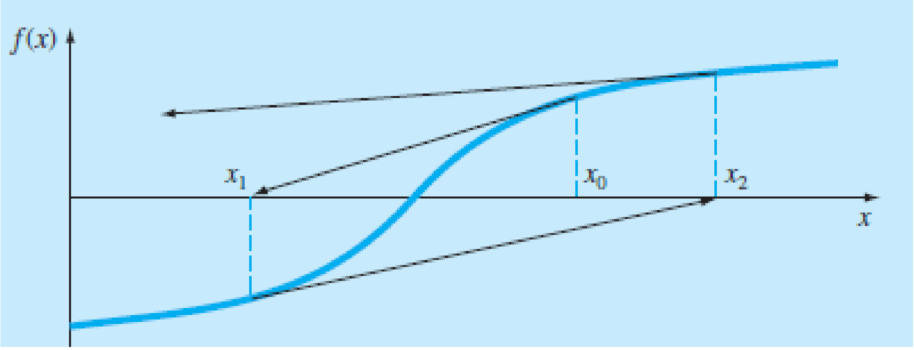


Các ước tính của nghiệm thì đi ra xa nghiệm của hàm.



Giá trị ***f'(x)*** = 0, giải thuật không thể dùng được.

Nếu giá trị ***f '(x)*** rất nhỏ khi đó $\boldsymbol{x_1}$ sẽ ở cách xa $\boldsymbol{x_0}$.



Giải thuật vòng giữa 2 giá trị x_1 và x_2

Pp Newton cho hệ phương trình phi tuyến.

Cho trước: X_0 nghiệm dự đoán ban đầu của $F(x) = 0$.

Phép lặp Newton

$$X_{k+1} = X_k - \left[F'(X_k)\right]^{-1} F(X_k)$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad F'(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \vdots \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Ví dụ

- Giải hệ phương trình sau với 2 lần lặp:

$$y + x^2 - 0.5 - x = 0$$

$$x^2 - 5xy - y = 0$$

$$x = 1,\ y = 0 \qquad \text{Giá trị ban đầu:}$$

$$F = \begin{bmatrix} y + x^2 - 0.5 - x \\ x^2 - 5xy - y \end{bmatrix},\ F' = \begin{bmatrix} 2x - 1 & 1 \\ 2x - 5y & -5x - 1 \end{bmatrix},\ X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải: Lần lặp 1:

$$F = \begin{bmatrix} y + x^2 - 0.5 - x \\ x^2 - 5xy - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =,\ F' = \begin{bmatrix} 2x - 1 & 1 \\ 2x - 5y & -5x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Lần lặp 2:

$$F=\begin{bmatrix}\mathbf{0.0625}\\ \mathbf{-0.25}\end{bmatrix}=,\ F'=\begin{bmatrix}\mathbf{1.5} & 1\\ 1.25 & -7.25\end{bmatrix}$$

$$X_2=\begin{bmatrix}1.25\\ 0.25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{1.5} & 1\\ 1.25 & -7.25\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0.0625}\\ \mathbf{-0.25}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2332\\ 0.2126\end{bmatrix}$$

Ví dụ

Giải hệ pt sau với 5 lần lặp:

$$y+x^2-1-x=0$$

$$x^2-2y^2-y=0$$

$$x=0,\ y=0\ \text{Giá trị ban đầu:}$$

$$F=\begin{bmatrix}y+x^2-1-x\\ x^2-2y^2-y\end{bmatrix},\ F'=\begin{bmatrix}2x-1 & 1\\ 2x & -4y-1\end{bmatrix},\ X_0=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Giải

Lần lặp	0	1	2	3	4	5
X_k	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{-0.5287} \\ \mathbf{0.1969} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{-0.5257} \\ \mathbf{0.1980} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{-0.5257} \\ \mathbf{0.1980} \end{bmatrix}$

Phương pháp Secant

Xem lại Pp Newton

Cho trước:

$$f(x),\ f'(x),\ x_0$$

$$f'(x_0) \neq 0$$

Vấn đề: f'(x) không có sẵn hoặc khó để đạt được bằng giải tích.

Một giá trị mới của nghiệm :

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$$

Phương pháp Secant

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nếu x_i và x_{i-1} là 2 điểm ban đầu

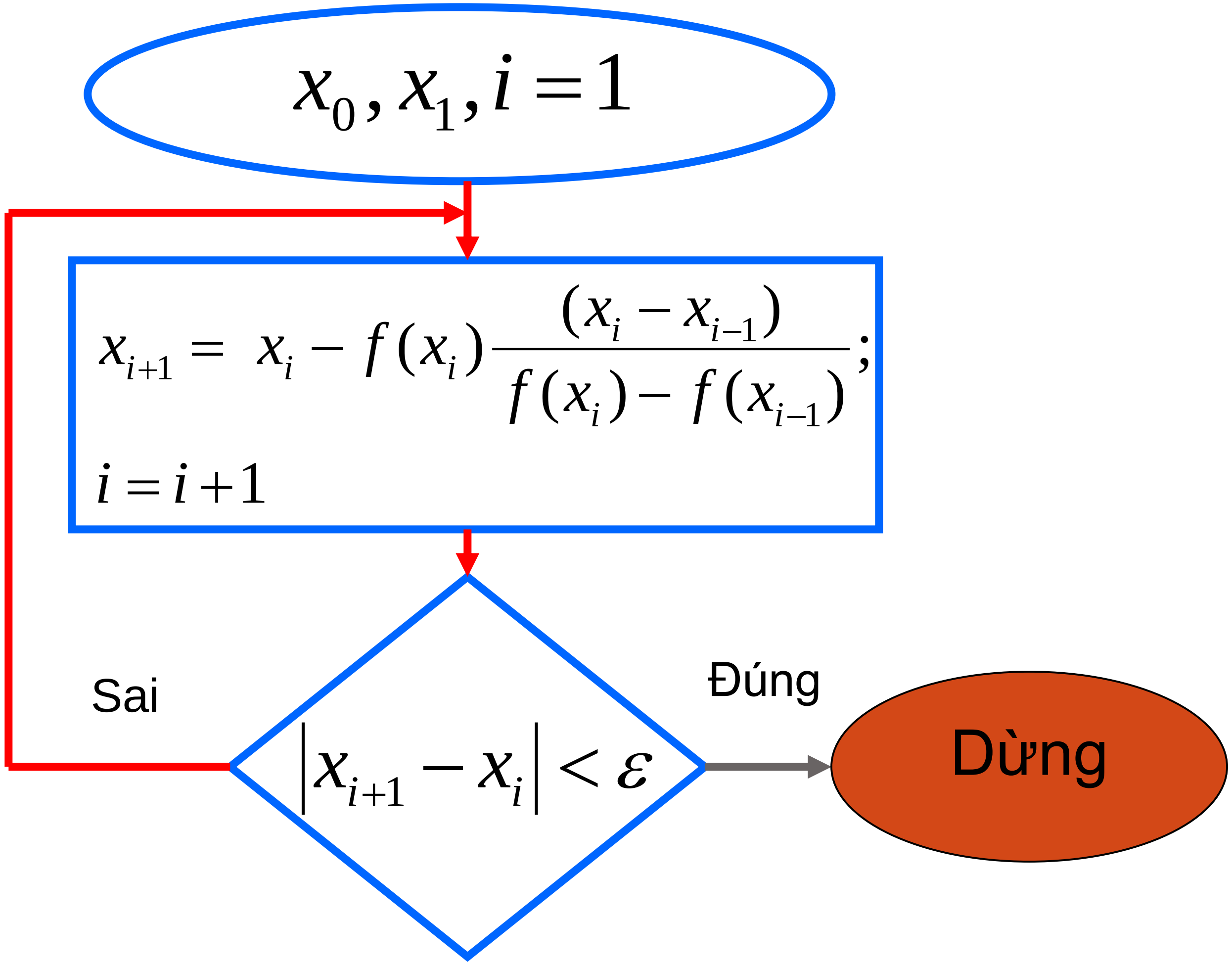
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}} = \quad x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Các giả định: Cho 2 điểm ban đầu x_i và x_{i-1} sao cho $f(x_i) \neq f(x_{i-1})$.

Giá trị mới (pp Secant) $x_{i+1} = x_i - f(x_i)\dfrac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$

PP Secant - Sơ đồ



Phương pháp Secant hiệu chỉnh

Trong phương pháp Secant hiệu chỉnh, chỉ duy nhất 1 giá trị ban đầu cần:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

Làm thế nào chọn δ ? Nếu chọn không đúng, pp có thể không hội tụ.

Ví dụ

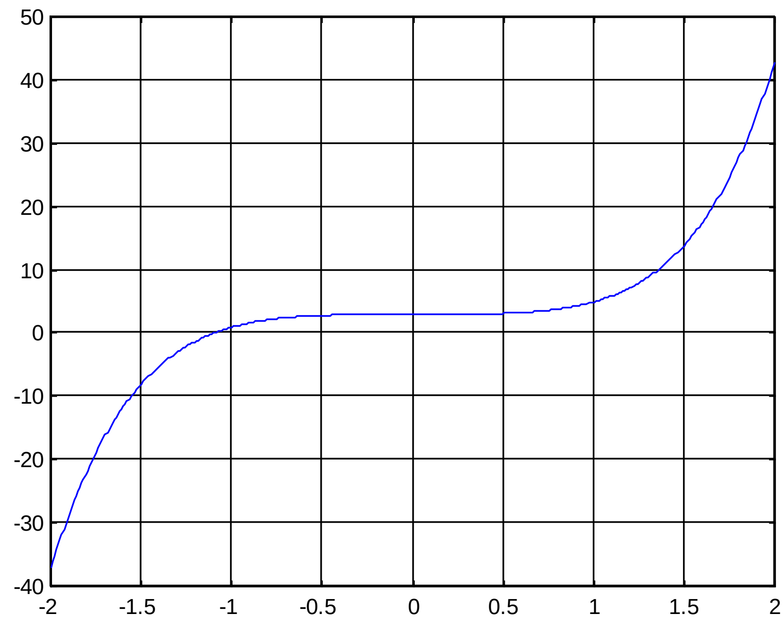
Tìm nghiệm pt bằng pp Secant

$$f(x) = x^5 + x^3 + 3$$

Giá trị ban đầu

$$x_0 = -1 \text{ and } x_1 = -1.1$$

Sai số < 0.001



x(i)	f(x(i))	x(i+1)	|x(i+1)-x(i)|
-1.0000	1.0000	-1.1000	0.1000
-1.1000	0.0585	-1.1062	0. 0062
-1.1062	0.0102	-1.1052	0.0009
-1.1052	0.0001	-1.1052	0.0000

Phân tích hội tụ

Tỉ lệ hội tụ của pp Secant là siêu tuyến tính:

$$\frac{|x_{i+1} - r|}{|x_i - r|^{\alpha}} \le C, \qquad \alpha \approx 1.62$$

r: nghiệm x_i: ước tính nghiệm ở lần lặp thứ i

Pp này tốt hơn pp Biection nhưng không tốt bằng pp Newton.

Tóm tắt

PP	Ưu điểm	Nhược điểm
Bisection	- Dễ, Tin cậy, Hội tụ. - Một lần ước tính hàm mỗi lần lặp. -Không cần tính đạo hàm.	- Chậm - Cần biết khoảng phân ly nghiêm [a,b] chứa nghiệm i.e., $f(a)*f(b) < 0$
Newton	- Nhanh (Nếu điểm đoán ban đầu gần nghiệm) - Hai lần ước tính hàm mỗi lần lặp.	- Có thể không hội tụ May diverge - Cần tính đạo hàm và điểm ban đầu x_0 sao cho $f'(x_0) \neq 0$.
Secant	- Nhanh (Chậm hơn Newton) - Một lần ước tính hàm mỗi lần lặp. -- Không cần tính đạo hàm.	- Có thể không hội tụ - Cần 2 điểm ban đầu x_0, x_1 sao cho $f(x_0)- f(x_1) \neq 0$.

Ví dụ

Dùng pp Secant để tìm nghiệm của pt

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

Hai điểm ban đầu $x_0 = 1$ và $x_1 = 1.5$.

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Giải

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906
2	1.0506	-0.7062
3	1.0836	-0.4645
4	1.1472	0.1321
5	1.1331	-0.0165
6	1.1347	-0.0005

Xem xét cơ cấu 4 khâu bản lề :

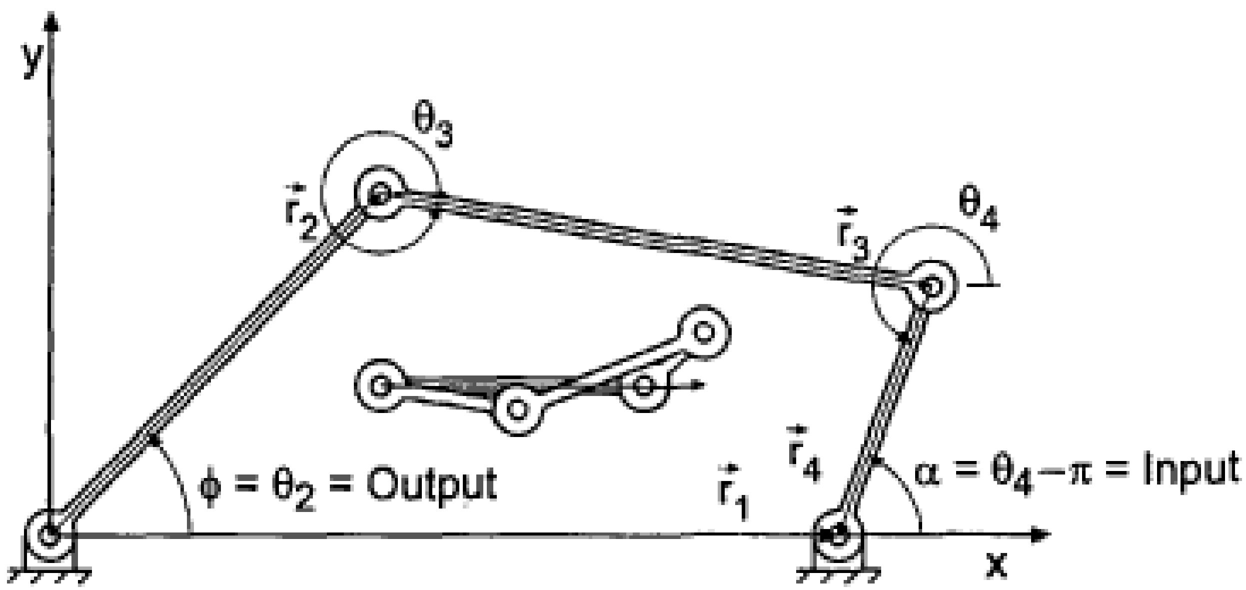
Góc $\alpha = \theta_4 - \pi$: là thông số đầu vào.

Góc $\Phi = \theta_2$ là đầu ra.

Phương trình véc tơ vòng :

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 - \vec{r}_1 = 0$$

(thể hiện mối quan hệ giữa Φ và α)



Để r_1 nằm trên trục x: Phương trình trên được viết lại theo các thành phần chiếu x và y.

$$r_2\cos(\theta_2) + r_3\cos(\theta_3) + r_4\cos(\theta_4) - r_1 = 0$$

$$r_2\sin(\theta_2) + r_3\sin(\theta_3) + r_4\sin(\theta_4) = 0$$

Từ 2 pt khử θ_3 và với $\theta_2 = \Phi$ và $\theta_4 = \alpha + \pi$, đơn giản ta có pt:

$$R_1\cos(\alpha) - R_2\cos(\phi) + R_3 - \cos(\alpha - \phi) = 0$$

Mà $R_1 = r_1/r_2$; $R_2 = r_1/r_4$; $R_3 = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)/2r_2r_4$

Xét cơ cấu 4 khâu bản lề với $r_1 = 10$, $r_2 = 6$, $r_3 = 8$ và $r_4 = 4$ khi đó ta có $R_1 = 5/3$, $R_2 = 5/2$, $R_3 = 11/6$ phương trình là

$$\frac{5}{3}\cos(\alpha) - \frac{5}{2}\cos(\phi) + \frac{11}{6} - \cos(\alpha - \phi) = 0$$

Phương pháp Bisection

Giải bài toán 4 khâu bản lề trình bày ở trên với $\alpha = 40^o$ bằng pp Bisection

Gọi lại pt:

$$\frac{5}{3}\cos(\alpha) - \frac{5}{2}\cos(\phi) + \frac{11}{6} - \cos(\alpha - \phi) = 0$$

Với $\alpha = 40^o$

$$f(\phi) = \frac{5}{3}\cos(40) - \frac{5}{2}\cos(\phi) + \frac{11}{6} - \cos(40 - \phi) = 0$$

Chọn $\Phi_a = 30^o$, $\Phi_b = 40^o$.

$$f(\phi_a) = f(30) = \frac{5}{3}\cos(40) - \frac{5}{2}\cos(30) + \frac{11}{6} - \cos(40 - 30) = -0.0397919$$

$$f(\phi_b) = f(40) = \frac{5}{3}\cos(40) - \frac{5}{2}\cos(40) + \frac{11}{6} - \cos(40 - 40) = 0.19496296$$

$$\phi_c = \frac{\phi_a + \phi_b}{2} = \frac{40 + 30}{2} = 35^o$$

Thay Φ_c = 35° vào pt ban đầu

$$f(\phi_c) = f(35) = \frac{5}{3}\cos(40) - \frac{5}{2}\cos(35) + \frac{11}{6} - \cos(40-35) = 0.06599926$$

Khi $f(\Phi_a)*f(\Phi_c) < 0$ và $\Phi_b = \Phi_c$ cho lần lặp tiếp và giữ nguyên Φ_a.

Tiêu chuẩn hội tụ : $|\Phi_a - \Phi_b| \leq 0.000001°$ cho lần lặp thứ 24 và kết quả trình bày ở bảng dưới.

i	ϕ_a, deg	$f(\phi_a)$	ϕ_b, deg	$f(\phi_b)$	ϕ_c, deg	$f(\phi_c)$
1	30.0	−0.03979719	40.0	0.19496296	35.0	0.06599926
2	30.0	−0.03979719	35.0	0.06599926	32.50	0.01015060
3	30.0	−0.03979719	32.50	0.01015060	31.250	−0.01556712
4	31.250	−0.01556712	32.50	0.01015060	31.8750	−0.00289347
5	31.8750	−0.00289347	32.50	0.01015060	32.18750	0.00358236
6	31.8750	−0.00289347	32.18750	0.00358236	32.031250	0.00033288
7	31.8750	−0.00289347	32.031250	0.00033288	31.953125	−0.00128318
...	...	...	...	...	...	...
22	32.015176	−0.00000009	32.015181	0.00000000	32.015178	−0.00000004
23	32.015178	−0.00000004	32.015181	0.00000000	32.015179	−0.00000002
24	32.015179	−0.00000002	32.015181	0.00000000	32.015180	−0.00000001
	32.015180	−0.00000001				

Phương pháp Newton

$$f(\phi) = R_1\cos(\alpha) - R_2\cos(\phi) + R_3 - \cos(\alpha - \phi) = 0$$

Đạo hàm của f(Φ)

$$f'(\phi) = R_2\sin(\phi) - \sin(\alpha - \phi) = 0$$

Pp Newton $$\phi_{i+1} = \phi_i - \frac{f(\phi_i)}{f'(\phi_i)}$$

Với $R_1 = 5/3$, $R_2 = 5/2$, $R_3 = 11/6$ và $\alpha = 40^o$, 2 phương trình trên là

$$f(\phi) = \frac{5}{3}\cos(40) - \frac{5}{2}\cos(\phi) + \frac{11}{6} - \cos(40 - \phi) = 0$$

$$f'(\phi) = \frac{5}{2}\sin(\phi) - \sin(40 - \phi) = 0$$

Cho lần lặp đầu tiên $\Phi_1 = 30^o$. Khi đó

$$f(\phi_1) = \frac{5}{3}\cos(40) - \frac{5}{2}\cos(30) + \frac{11}{6} - \cos(40 - 30) = -0.03979719$$

$$f'(\phi_1) = \frac{5}{2}\sin(30) - \sin(40 - 30) = 1.07635182$$

$$\phi_2 = 30 - \frac{-0.03979719*(180/\pi)}{1.07635182} = 32.118463^o$$

Thay Φ_2 = 32.118463º ta có f(Φ_2) = 0.00214376.
Tiếp tục các phép lặp và tiêu chuẩn hội tụ $|\Phi_{i+1} - \Phi_i| \leq 0.000001$ thỏa mãn ở lần lặp thứ 4.

Kết quả trình bày trong bảng:

i	ϕ_i, deg	$f(\phi_i)$	$f'(\phi_i)$	ϕ_{i+1}, deg	$f(\phi_{i+1})$
1	30.000000	−0.03979719	1.07635164	32.118463	0.00214376
2	32.118463	0.00214376	1.19205359	32.015423	0.00000503
3	32.015423	0.00000503	1.18646209	32.015180	0.00000000
4	32.015180	0.00000000	1.18644892	32.015180	0.00000000
	32.015180	0.00000000			

Bài tập

1. Tìm nghiệm phương trình:

$f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$

Dùng 3 lần lặp với phương pháp Bisection. Giá trị ban đầu $x_0 = 5$ và $x_1 = 10$. Tính sai số sau mỗi lần lặp.

2. Tìm nghiệm phương trình:

$f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x – 2$.

Dùng 3 lần lặp với phương pháp Bisection . Giá trị ban đầu $x_0 = 0$ và $x_1 = 1$. Lặp cho đến khi sai số dưới 10%.

3. Xác định nghiệm dương $\ln(x^2) = 0.7$.

Dùng 3 lần lặp với pp bisection với giá trị ban đầu $x_0 = 0.5$ và $x_1 = 2$ và tính sai số sau mỗi lần lặp.

4. Tìm nghiệm thực của $f(x) = -1 + 5.5x - 4x^2 + 0.5x^3$
$x_0 = 1.5$. Dùng pp Newton-Raphson với sai số $\varepsilon \leq 0.01\%$.

5. Tìm nghiệm thực lớn nhất $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.1$

a) Dùng pp Newton-Raphson với 3 lần lặp cho giá trị ban đầu $x_0 = 3.5$).

b) Dùng pp secant với 3 lần lặp cho giá trị ban đầu $x_0 = 2.5$ và $x_1 = 3.5$).

c) Dùng pp secant hiệu chỉnh với 3 lần lặp cho giá trị ban đầu $x_0 = 3.5$, $\delta = 0.01$).

6. Dùng pp Newton-Raphson để tìm nghiệm của pt $f(x) = e^{-0.5x}(4 - x) - 2$

Tìm với giá trị ban đầu x_0: Tính tối đa 5 lần lặp

(a) 2

(b) 6

(c) 8

(d) Giải thích các kết quả đạt được.

7. Tìm nghiệm của $f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x – 5$

a) Dùng pp Newton-Raphson với 3 lần lặp, cho $x_0 = 3$.

b) Dùng pp secant với 3 lần lặp, cho $x_0 = 3$, $x_1 = 4$.

8. Dùng pp Newton-Raphson và pp secant hiệu chỉnh ($\delta = 0.05$) để tìm nghiệm của $f(x) = x^5 - 16.05x^4 + 88.75x^3 - 192.0375x^2 + 116.35x + 31.6875$ dùng giá trị ban đầu của $x_0 = 0.5825$ và sai số $\varepsilon = 0.01\%$. Giải thích các kết quả đạt được.

9. Tìm nghiệm của các pt sau bằng pp Newton-Raphson

$y = -x^2 + x + 0.75$

$y + 5xy = x^2$.

Các giá trị ban đầu $x_0 = y_0 = 1.2$ và thảo luận kết quả.

10. Dùng pp secant để giải bài toán 4 khâu bản lề như trong bài giảng có pt như sau:

$$f(\phi) = R_1 \cos(\alpha) - R_2 \cos(\phi) + R_3 - \cos(\alpha - \phi) = 0$$

Với $R_1 = 5/3$, $R_2 = 5/2$, $R_3 = 11/6$ và $\alpha = 40^o$, và các giá trị cho lần lặp đầu tiên $\Phi_0 = 30^o$ và $\Phi_1 = 40^o$. Tính đến 5 lần lặp và sai số mỗi lần lặp.