TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

KHOA TOÁN

=======***=======

ĐÀM HUỆ THU

ỨNG DỤNG HÀM LỒI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

Chuyên ngành: Đại số

HÀ NỘI - 2014

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

KHOA TOÁN

=======***=======

ĐÀM HUỆ THU

ỨNG DỤNG HÀM LỒI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

Chuyên ngành: Đại số

Người hướng dẫn khoa học:

TS. NGUYỄN THỊ KIỀU NGA

HÀ NỘI - 2014

LỜI CẢM ƠN

Em xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo trong tổ Đại số, đặc biệt cô giáo – TS.Nguyễn Thị Kiều Nga đã tận tình hướng dẫn và chỉ bảo cho em trong suốt quá trình nghiên cứu. Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong quá trình làm đề tài nhưng vẫn không tránh khỏi những thiếu sót, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy giáo, cô giáo và các bạn sinh viên để khóa luận của em được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, tháng 5 năm 2014

Sinh viên thực hiện

Đàm Huệ Thu

LỜI CAM ĐOAN

Em xin cam đoan khóa luận này là sự nỗ lực của bản thân, cùng sự giúp đỡ tận tình của Cô Nguyễn Thị Kiều Nga

Khóa luận này không trùng với kết quả của các tác giả khác. Em xin chịu hoàn toàn trách nhiệm về khóa luận của mình.

Hà Nội, tháng 5 năm 2014

Sinh viên thực hiện

Đàm Huệ Thu

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Trong chương trình giảng dạy và học tập bộ môn toán ở nhà trường phổ thông hiện nay, bất đẳng thức chiếm một vị trí quan trọng. Các bài toán về bất đẳng thức luôn hấp dẫn và là niềm say mê yêu thích của những người yêu Toán.

Có rất nhiều phương pháp chứng minh bất đẳng thức trong đó ứng dụng các tính chất của hàm lồi để chứng minh bất đẳng thức là một phương pháp mới , hay và hiệu quả.

Với lý do trên cùng sự đam mê của bản thân và sự giúp đỡ rất tận tình của cô Nguyễn Thị Kiều Nga em xin mạnh dạn thực hiện khóa luận với đề tài: " Ứng dụng hàm lồi trong chứng minh bất đẳng thức".

Nội dung khóa luận chia làm ba chương

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Trong chương này trình bày định nghĩa và tính chất của hàm lồi (lõm), bất đẳng thức Jensen và ứng dụng của bất đẳng thức Jensen trong việc chứng minh các bất đẳng thức khác.

Chương 2: Ứng dụng của hàm lồi trong chứng minh bất đẳng thức.

Chương này trình bày ứng dung của hàm lồi trong việc chứng minh các bất đẳng thức kinh điển, bất đẳng thức đại số, bất đẳng thức hình học, bất đẳng thức lượng giác, bất đẳng thức tích phân.

Chương 3: Sáng tạo bất đẳng thức .

Chương này trình bày phương pháp sáng tạo ra các bất đẳng thức dựa vào tính chất của hàm lồi.

Do trình độ và kinh nghiệm còn hạn chế nên khóa luận của em chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Em rất mong nhận được sự đóng góp của các thầy cô trong khoa Toán và các bạn sinh viên.

Em xin chân thành cảm ơn !

Hà Nội, tháng 5 năm 2014

Sinh viên thực hiện

Đàm Huệ Thu

Chương 1: KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm lồi.

1.1.1. Định nghĩa tập hợp lồi và hàm số lồi

a) Định nghĩa tập hợp lồi

Tập hợp *D* được gọi là tập lồi trong $\mathbb{R}$ nếu với mọi $a,b \in D$, mọi $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda \le 1$ thì $\lambda a + (1-\lambda)b \in D$.

b) Định nghĩa hàm số lồi

Giả sử *D* là tập lồi trong $\mathbb{R}$. Hàm số $f: D \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi trên *D* nếu như với mọi $x_1, x_2 \in D$, với mọi số $\lambda \in \mathbb{R}, 0 \le \lambda \le 1$ thì

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

c) Định nghĩa hàm số lõm

Giả sử *D* là tập lồi trong $\mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lõm trên *D* nếu $-f(x)$ là hàm lồi trên *D.*

1.1.2. Ý nghĩa hình học

Giả sử $x_1, x_2 \in I$; M_1 và M_2 là hai điểm bất kì của đường cong $y = f(x)$.

Khi đó tọa độ của M_1, M_2 tương ứng là $M_1(x_1; f(x_1)); M_2(x_2; f(x_2))$

Phương trình tham số của M_1M_2 là

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_1 - x_2)\lambda \\ y = f(x_1) + (f(x_1) - f(x_2))\lambda \end{cases} \qquad (0 < \lambda < 1; \lambda \text{ là tham số})$$

Như vậy, hàm số $f(x)$ là lồi trên *I* nếu với hai điểm bất kỳ M_1, M_2 của đường cong $y = f(x)$, cung M_1M_2 của đường cong nằm ở bên dưới đoạn M_1M_2

1.1.3. Ví dụ hàm lồi

Hàm số $f(x) = x^2$ lồi trên $(-\infty; +\infty)$

Thật vậy, với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty); x_1 \ne x_2$, ta có

+) $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2$

$$= \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2$$

+) $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2$

Xét $\lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 < \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2$

Hay $\lambda(1-\lambda)x_1^2 + (1-\lambda)(x_2^2 - 2\lambda x_1x_2 - (1-\lambda)x_2^2) > 0$.

Tức là $\lambda(1-\lambda)x_1^2 + \lambda(1-\lambda)(x_2^2 - 2x_1x_2) > 0$

Tương đương $\lambda(1-\lambda)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) > 0$

Hay $\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 > 0$

Suy ra $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Vậy $f(x) = x^2$ là hàm lồi trên $(-\infty;+\infty)$

1.2. Tính chất hàm lồi, hàm lõm

1.2.1. Tính chất 1

Cho *D* là tập lồi trong $\mathbb{R}$. Giả sử $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ là các hàm lồi xác định trên *D*. Cho $\lambda_1 > 0$ với mọi $i = \overline{1,n}$. Khi đó hàm số

$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$ cũng là hàm lồi trên *D*.

Chú ý

- Hàm lồi hai biến : Giả sử *D* là tập lồi trong $\mathbb{R}^2$. Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi trên *D* nếu như với mọi $(x_1, y_1);(x_{2,} y_2) \in D$, với mọi số $\lambda (0 \le \lambda \le 1)$

Ta có $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2; \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \le \lambda f(x_1; y_1) + (1-\lambda) f(x_1; y_1)$

- Hàm lồi ba biến : định nghĩa tương tự cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$, với *D* là tập lồi trong $\mathbb{R}^3$.

Kết luận này vẫn đúng với hàm lồi hai biến và ba biến.

1.2.2. Tính chất 2 (Điều kiện để một hàm số là hàm lồi)

Cho D là tập hợp lồi thuộc $\mathbb{R}^2$. Hàm $f(x,y): D \to \mathbb{R}^2$ là hàm lồi trên D khi và khi với mọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ thì hàm

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2; \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$$

là hàm lồi trên đoạn $[0,1]$

1.2.3. Tính chất 3 (Mối quan hệ giữa tập hợp lồi và hàm lồi)

Giả sử $f: D \to \mathbb{R}$, ở đây D là hàm lồi trong $\mathbb{R}$. Đặt

$$\text{epi } f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \le y, x \in D\right\}$$

(epi f được gọi là tập hợp trên đồ thị)

Hàm f là lồi trên D khi và chỉ khi epi f là tập hợp lồi trong $\mathbb{R}^2$

1.2.4. Tính chất 4

Cho D là tập hợp lồi trong $\mathbb{R}$, các hàm $f_1(x): D \to \mathbb{R}$ với $i = \overline{1,n}$ là các hàm lồi trên *D.*

Xét các hàm số sau trên D

$$f(x) = \max\left\{ f_1(x); f_2(x); \ldots; f_n(x)\right\}, \forall x \in D$$

Khi đó $f(x)$ là hàm lồi trên *D.*

1.2.5. Tính chất 5 (Điều kiện đủ cho tính lồi, lõm của hàm số)

Cho $f(x)$ là hàm số xác dịnh trên $[a,b]$ và có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in [a,b]$. Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in [a,b]$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $[a,b]$.

Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in [a,b]$ thì $f(x)$ là hàm lõm trên $[a,b]$.

1.2.6. Tính chất 6

Nếu $f(\mathrm{x})$ là hàm lồi trên (a,b) thì $f(\mathrm{x})$ liên tục trên (a,b)

1.2.7. Tính chất 7

Với mọi hàm số thì mọi cực tiểu địa phương đều là cực tiểu toàn cục.

1.2.8. Tính chất 8

Cho *D* là tập hợp lồi trong $\mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm số lồi xác định trên *D*. Gọi D_0 là tập hợp tất cả các điểm mà tại đó *f* đạt cực tiểu địa phương trên *D*. Khi đó D_0 là tập lồi.

1.3. Bất đẳng thức Jensen

1.3.1. Định nghĩa

Cho *D* là tập lồi trong $\mathbb{R}$, $f(x): D \to \mathbb{R}$ là hàm số xác định trên *D*. Khi đó $f(x)$ là hàm lồi trên *D* khi và chỉ khi với mọi số *n* nguyên dương, với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc *D*, với mọi số $\lambda_i \geq 0, (i = \overline{1, n})$ và $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ta có

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) có gọi là bất đẳng thức Jensen.

1.3.2. Chứng minh bất đẳng thức Jensen

Giả sử (1) được thỏa mãn. Khi đó, ứng với $n = 2$, f là hàm lồi trên *D* (theo định nghĩa)

Ngược lại, giả sử f là hàm lồi trên *D*. Ta chứng minh (1) bằng qui nạp

+) Với $n = 1$, (1) hiển nhiên đúng

+) Với $n = 2$, theo định nghĩa hàm lồi thì (1) cũng đúng.

Giả sử (1) đã đúng với $n = k \geq 2$. Xét với $n = k + 1$

Với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ thuộc *D*, mọi $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k+1}$ và $\sum_{i=1}^{k} \lambda_k = 1$

Ta có $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}$ (2)

(Rõ ràng ta có thể xét với $\lambda_i > 0$ với mọi $i = \overline{1, k+1}$ vì nếu không áp dụng giả thiết qui nạp sẽ suy ra điều phải chứng minh).

Đặt $\lambda = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$

Do $\lambda_i > 0, \forall i = \overline{1, k+1}$ mà $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, nên $0 < \lambda < 1$

Ta viết lại (2) dưới dạng sau đây

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i + (1-\lambda)(\frac{\lambda_k}{1-\lambda} + \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda} x_{k+1}) \qquad (3)$$

Do $x_k, x_{k+1} \in D; \frac{\lambda_k}{1-\lambda} > 0; \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda} > 0$ và $\frac{\lambda_k}{1-\lambda} + \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1$

Mà *D* là tập hợp lồi nên

$$\bar{x} = \frac{\lambda_k}{1-\lambda} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda} x_{k+1} \in D$$

Vế phải (3) được viết lại $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{k-1} x_{k-1} + (1-\lambda)\bar{x}$ (4)

Để ý rằng $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{k-1} + (1-\lambda) = \lambda + (1-\lambda) = 1$, nên từ (4) và từ giả thiết qui nạp ta có

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{k-1} x_{k-1} + (1-\lambda)\bar{x}) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \\ \lambda_{k-1} f(x_{k-1}) + (1-\lambda) f(\bar{x}) \end{aligned} \qquad (5)$$

Mặt khác, vì f là hàm lồi nên

$$f(\bar{x}) = f(\frac{\lambda_k}{1-\lambda} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda} x_{k+1}) \le \frac{\lambda_k}{1-\lambda} f(x_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{1-\lambda} f(x_{k+1}) \qquad (6)$$

Kết hợp (3), (4), (5), (6) suy ra $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Vậy (1) cũng đúng với $n = k+1$

Theo nguyên lý qui nạp, suy ra (1) đúng với mọi *n*. Đó là điều phải chứng minh.

1.3.3. Chú ý

- Bất đẳng thức Jensen có ý nghĩa rất quan trọng trong việc nghiên cứu về hàm lồi. Bất đẳng thức được sử dụng rộng rãi trong việc chứng minh các bất đẳng thức khác.

- Người ta hay sử dụng một dạng đặc biệt của bất đẳng thức Jensen sau

Nếu $f(x): D \to \mathbb{R}$ và $D \subset \mathbb{R}$. Khi đó với mọi n nguyên dương, với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in D$

Ta có

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Chương 2: ỨNG DỤNG HÀM LỒI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

2.1. Chứng minh các bất đẳng thức kinh điển

a) Cơ sở lý luận

Trong bất đẳng thức thì lớp bất đẳng thức kinh điển đóng vai trò quan trọng, là cơ sở để chứng minh rất nhiều các bất đẳng thức khác. Các loại bất đẳng thức này hay gặp nhất(dưới dạng tường minh hay không tường minh) trong đại số. Các bất đẳng thức kinh điển thường gặp là bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunhiacopxki, bất đẳng thức Holder, Bất đẳng thức Mincopxki, bất đẳng thức Karamata, Bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình toàn phương và trung bình điều hòa.

b) Sau đây là một lớp các bất đẳng thức kinh điển được chứng minh theo phương pháp hàm lồi.

2.1.1. Bất đẳng thức Cauchy

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

<u>Chứng minh</u>

Chỉ có một trong hai khả năng sau đây xảy ra

1. Tồn tại $a_i = 0\ (1 \leq i \leq n)$. Khi đó bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

2. $a_i > 0$, với mọi $i = \overline{1, n}$

Xét hàm số $f(x) = e^x$ với $x \in (-\infty, +\infty)$

Ta có $f(x) = e^x$ suy ra $f'(x) = e^x$. Vậy $f(x)$ là hàm lồi với mọi $x \in (-\infty, +\infty)$

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ đều dương, khi đó tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n$ sao cho

$$e^{x_1}=a_1, e^{x_2}=a_2, ..., e^{x_n}=a_n$$

Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}} \le \frac{e^{x_1}+e^{x_2}+...+e^{x_n}}{n}$$

Tức là $\left(e^{x_1+x_2+...+x_n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}+...+e^{x_n}}{n}$

Hay $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \le \dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$ hay $x_1=x_2=...=x_n$

Kết hợp cả hai trường hợp trên ta có điều phải chứng minh.

2.1.2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó ta có

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$

Chứng minh

Tương tự như 2.1.1, ta chỉ xét trường hợp $a_i>0; b_i>0; \forall i=\overline{1,n}$

Xét hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f''(x)>0$ với mọi x Do đó $f(x)$ là hàm lồi trên toàn trục số.

Với mọi $x=\dfrac{a_i}{b_i}, \lambda_i=\dfrac{b_i^2}{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}, i=\overline{1,n}$

Khi đó $\lambda_i>0, \forall i=\overline{1,n}$ và $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$

Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n)$$

Suy ra $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)^2 \le \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2$

Hay $\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} b_j}(b_1^2 \frac{a_1}{b_1} + b_2^2 \frac{a_2}{b_2} + ... + b_n^2 \frac{a_n}{b_n}) \le \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}(b_1^2 \frac{a_1^2}{b_1^2} + b_2^2 \frac{a_2^2}{b_2^2} + ... + b_n^2 \frac{a_n^2}{b_n^2})$

Suy ra $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \le (\sum_{j=1}^{n} b_j^2)(\sum_{j=1}^{n} a_j^2)$

Hay $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Tương đương $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}; i, j = \overline{1,n}$

Đó là điều phải chứng minh.

2.1.3. Bất đẳng thức Sacnơ

Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$, trong đó $b_j > 0\ (i = \overline{1,n})$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$.Ta có $f''(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho $x_i = \frac{a_i}{b_i}, \lambda = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}, i = \overline{1,n}$. Ta có

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n)$$

Suy ra $\left(\frac{b_1}{\sum_{j=1}^{n} b_j}\frac{a_1}{b_1} + ... + \frac{b_n}{\sum_{j=1}^{n} b_j}\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \le \frac{b_1}{\sum_{j=1}^{n} b_j}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 + ... + \frac{b_n}{\sum_{j=1}^{n} b_j}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$

Suy ra $\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \le \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n}$

hay $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

hay $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}; (i, j = \overline{1, n})$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.1.4. Bất đẳng thức Holder

Cho $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, ..., n,\ p > 0, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

<u>Chứng minh</u>

Do $p > 0, q > 0$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Do đó $p > 1$ Xét hàm số $f(x) = x^n, x > 0$

Ta có $f'(x) = px^{p-1}$ suy ra $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. Suy ra $f(x)$ lồi trên $(0, +\infty)$

Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \qquad (1)$$

Chọn $\lambda_i = \frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q}; x_i = a_i b_i^{1-q}$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$

Ta thấy $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^{1-q}\frac{b_j^q}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có

$$\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^p \le \frac{b_j^q}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q}\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i^{1-q})^p$$

Hay $\frac{1}{(\sum_{j=1}^{n} b_j^q)^p}(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^p \le \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q}\sum_{i=1}^{n} a_i^p b_i^q b_i^{p(1-q)}$ (3)

Do $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ suy ra $p+q-pq=0$ suy ra $p(1-p)+q=0$

Suy ra $b_i^q b_i^{p(1-q)}=1$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)}{(\sum b_j^q)^p} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{j=1}^{n} b_j^q} \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^p \le \sum_{i=1}^{n} a_i^p (\sum_{j=1}^{n} b_j^q)^{p-1}$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p-1}{p}}$

Hay $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.1.5. Bất đẳng thức Mincopxki

Cho hai dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thỏa mãn $a_i > 0, b_i > 0, i=\overline{1,n}$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 ... b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x)=\ln(1+e^x)$

Ta có $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ suy ra $f''(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ là hàm số lồi trên $\mathbb{R}$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen với $x_i=\ln\frac{b_i}{a_i}$ ta có

$$\ln(1+e^{\frac{\ln\frac{b_1}{a_1}+\ln\frac{b_2}{a_2}+...+\ln\frac{b_n}{a_n}}{n}})\le\frac{\ln(1+\frac{b_1}{a_1})+\ln(1+\frac{b_2}{a_2})+...+\ln(1+\frac{b_n}{a_n})}{n}$$

Suy ra $\ln(1+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}...\frac{b_n}{a_n}})\le\ln(\sqrt[n]{\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}{a_1.a_2....a_n}})$

Suy ra $1+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}...\frac{b_n}{a_n}}\le\sqrt[n]{\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}{a_1.a_2....a_n}}$

Suy ra $\sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2....b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\ln\frac{b_1}{a_1}=\ln\frac{b_2}{a_2}=...=\ln\frac{b_n}{a_n}\Leftrightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=...=\frac{b_n}{a_n}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.1.6. Bất đẳng thức Petrovica

Cho $f(x)$ lồi trên $[0,a]$, $\forall x_i\in[o,a]\,(i=1,2,...,n)$; $\sum_{i=1}^{n}x_i\in[0,a]$ thì

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le f(\sum_{i=1}^{n}x_i)+(n-1)f(0)$$

Chứng minh

Ta có $f(x_i)=f\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n}x_j}\sum_{j=1}^{n}x_j+\frac{\sum_{j\ne i}x_j}{\sum_{j=1}^{n}x_j}\cdot 0\right)$

Do $x_i \in [0,a]; \sum_{i=1}^{n} x_i \in [0,a]; \dfrac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} + \dfrac{\sum_{j\neq i} x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} = 1$

Vì f lồi trên $[0,a]$ nên áp dụng bất đẳng thức Jensen ta được

$$f\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{\sum_{j\neq i} x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \cdot 0 \right) \le \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} f(\sum_{j=1}^{n} x_j) + \frac{\sum_{j\neq i} x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} f(0) \qquad (1)$$

Cho $i = \overline{1,n}$ ta có n bất đẳng thức dạng 1. Cộng vế với vế của n bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le f(\sum_{i=1}^{n} x_i) + (n-1) f(0)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ hay $x_j = 0 \; (j = \overline{1,m})$.

2.1.7. Bất đẳng thức Vasic

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[0,a]$ và $x_1, x_2, ..., x_n; p_1, p_2, ..., p_n$ là các dãy số không âm thỏa mãn điều kiện:

1. $x_i \in [0,a], \forall i = 1,2,...,n$
2. $p_i \ge 1, \forall i = 1,2,...,n$
3. $\sum_{i=1}^{n_1 - 1} p_i x_i = \sum_{i=n_1}^{n_2 - 1} p_i x_i = ... = \sum_{i=n_k}^{n} p_i x_i$
4. $\dfrac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in [0,a]$.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le k f\left(\dfrac{1}{k} \sum_{i=n}^{n} x_i p_i \right) - \left(k - \sum_{i=n_k}^{n} x_i p_i \right) f(0)$

<u>Chứng minh</u>

Theo bất đẳng thức Petrorica tổng quát ta có

$$\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} p_i f(x_i) \le f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} p_i x_i\right) + \left(\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} p_i - 1\right) f(0) \qquad (1)$$

$(j = 0,1,...,k-1, n_0 = 1; n_k = n-1)$

Theo giả thiết ta có $\sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} p_i x_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Cộng từng vế k bất đẳng thức dạng (1) ta được

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le k f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - k\right) f(0)$$

Hay $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le k f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right) f(0)$

Ta có điều phải chứng minh.

2.1.8. Bất đẳng thức Young

Với hai số không âm bất kỳ a, b và $p > 0, q > 0$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Ta có $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (1).

Chứng minh

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng khi $a = 0$ hoặc $b = 0$. Giả sử $a > 0, b > 0$.

Xét hàm số $f(x) = e^x$ suy ra $f''(x) = e^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ lồi trên $\mathbb{R}$

$$f\left(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q\right) \le \frac{1}{p}(\ln a^p) + \frac{1}{q} f(\ln b^q)$$

hay $f(\ln a + \ln b) \le \frac{1}{p} f(p\ln a) + \frac{1}{q} f(q\ln b)$

hay $e^{\ln ab} \le \frac{1}{p} e^{p\ln a} + \frac{1}{q} e^{q\ln b}$

$\Leftrightarrow ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.1.9. Bất đẳng thức Karamatar

Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số liên tục và có đạo hàm cấp 2, $f'(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, giả thiết x_0, y_0, z_0 là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_0 \ge a_1 \\ x_0 + y_0 \ge a_1 + a_2 \\ x_0 + y_0 + z_0 = a_1 + a_2 + a_3 \end{cases} \quad \text{ở đây } a_1 \ge a_2 \ge a_3$$

Khi đó $f(x_0)+f(y_0)+f(z_0)\ge f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_0=a_1; x_1=a_2; x_2=a_3$.

<u>Chứng minh</u>

Trước hết ta chứng minh mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $f(x)\ge f(a_1)+(x-a)f'(a_1)$ (1)

Thật vậy

+) Nếu $x>a_1$ xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[a_1;x\right]$. Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a_1;x\right]$, $f(x)$ khả vi trên khoảng $\left(a_1;x\right)$. Do đó theo định lý Lagrange tồn tại $\xi_1\in\left(a_1;x\right)$ sao cho $f(x)-f(a)=(x-a)f(\xi_1)$

Do $f''(x)>0\,(\forall x\in\mathbb{R})$ nên $f'(x)$ là hàm đồng biến nên từ $\xi_1>a_1$ ta có $f'(\xi_1)>f'(a_1)$

Mặt khác $x-a_1>0\Rightarrow(x-a_1)f'(\xi_1)>(x-a_1)f'(a_1)$

Suy ra $f(x)-f(a_1)=(x-a_1)f'(\xi_1)>(x-a_1)f'(a_1)$

Hay $f(x)>f(a_1)+(x-a_1)f'(a_1)$ suy ra (1) đúng với $\forall x>a_1$.

+) Nếu $x<a_1$, xét hàm số liên tục trên đoạn $\left[x;a_1\right]$. Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trên $\left[x;a_1\right]$, khả vi trên $\left[x;a_1\right]$, theo định lý Lagrange tồn tại $\xi_2\in(x,a_1)$ sao cho $f(a_1)-f(x)=(a_1-x)f'(\xi_2)$

Tương đương

$$f(x)-f(a_1)=(x-a_1)f'(\xi_2)$$

Do $f'(x)>0\,(\forall x\in\mathbb{R})$ nên $f'(x)$ là hàm đồng biến, nên từ $\xi_2\in\left(x,a_1\right)$ suy ra $\xi_2<a_1$ suy ra $f'(\xi_2)<f'(a_1)$

Mặt khác $x<a_1$ suy ra $x-a_1$ nên $(x-a)f'(\xi_2)>(x-a_1)f'(a_1)$

Suy ra $f(x)-f(a_1)=(x-a_1)f'(\xi_2)>(x-a_1)f'(a_1)$

Hay $f(x)-f(a_1)=(x-a_1)f'(\xi_2)>(x-a_1)f'(a_1)$

Tương đương với $f(x)>f(a_1)+(x-a_1)f'(a_1)$. Suy ra (1) đúng với mọi $x<a_1$

+) Nếu $x=a_1$ thì (1) hiển nhiên đúng.

Vậy (1) đúng mọi $x\in\mathbb{R}$.

Tương tự ta cũng có $f(y)>f(a_2)+(y-a_2)f'(a_2)$ (2)

$f(z)>f(a_3)+(z-a_3)f'(a_3)$ (3) $(\forall y,z\in\mathbb{R})$

Do x_0,y_0,z_0 là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases}x_0\ge a_1\\ x_0+y_0\ge a_1+a_2\\ x_0+y_0+z_0=a_1+a_2+a_3\end{cases}\quad \text{ở đây } a_1\ge a_2\ge a_3 \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$f(x_0)+f(y_0)+f(z_0)\ge f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+(x_0-a_1)f'(a_1)+$$
$$(x_0-a_2)f'(a_2)+(x_0-a_3)f'(a_3)$$

Mặt khác, ta có

$$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+(x_0-a_1)f'(a_1)+(x_0-a_2)f'(a_2)+(x_0-a_3)f'(a_3)$$

$$=f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+(x_0-a_1)f'(a_1)+(y_0-a_2)f'(a_2)+(z_0-a_3)f'(a_3)$$

$= f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + c + (y_0 - a_2) f'(a_3) + (z_0 - a_3) f'(a_3)$
$+(x_0 - a_1) f'(a_3) - (y_0 - a_2) f'(a_3) + (x_0 - a_1) f'(a_2) + (y_0 - a_1) f'(a_2)$
$-(x_0 - a_1) f'(a_2) + (x_0 - a_3) f'(a_1)$
$= f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f'(a_3)(x_0 + y_0 + z_0 - a_1 - a_2 - a_3)$
$+(x_0 - a_1)(f'(a_2) + f'(a_3)) + (y_0 - a_2)(f'(a_2) - f'(a_3))$
$+(x - a_1)(f'(a_1) - f'(a_2))$
$= f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f'(a_3)(x_0 + y_0 - a_1 - a_2 - a_3) +$
$+ (x_0 + y_0 - a_1 - a_2)(f'(a_2) + f'(a_3) + (x_0 - a_1)(f'(a_1) - f'(a_2)))$ (5)

Do $f'(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên từ $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ta có

$f'(a_1) \geq f'(a_2) \geq f'(a_3)$. Kết hợp (4) suy ra vế phải của (5)

VP (5) $\geq f(a_1) + f(a_2) + f(a_3)$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $f(x_0) + f(y_0) + f(z_0) \geq f(a_1) + f(a_2) + f(a_3)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = a_1; y_0 = a_2; z_0 = a_3$

Vậy bất đẳng thức Karamatar được chứng minh.

2.1.10. Mối liên hệ giữa trung bình nhân, trung bình toàn phương và trung bình điều hòa.

Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. Ta xét các đại lượng sau

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + .. + x_n}{n}; \qquad m_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$
$$m_q = \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}; \qquad m_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

$m_a; m_g; m_q; m_h$ tương ứng gọi là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình toàn phương và trung bình điều hòa của các số $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ta có: $m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_q$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(x) > 0\ \forall x$. Do đó $f(x)$ là hàm lồi trên toàn trục số

Áp dụng bất đẳng thức Jensen (Chọn $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \frac{1}{n}$) ta có

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x)$$

Tương đương với $\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}$

Hay $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} \Leftrightarrow m_a \le m_q$ (1)

Xét hàm số $f(x) = -\ln x$, với $x > 0$

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x}$ suy ra $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, với mọi $x > 0$

Vậy $f(x)$ là hàm lồi khi $x > 0$. Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left[f(\frac{1}{x_1}) + f(\frac{1}{x_2}) + ... + f(\frac{1}{x_n})\right]$$

Suy ra $-\ln\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}{n} \le -\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{x_1} + \ln\frac{1}{x_2} + ... + \ln\frac{1}{x_n}\right]$

Suy ra $\ln \dfrac{n}{\dfrac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}}{n}} \le \ln\left(\dfrac{1}{x_1x_2...x_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ (2)

Áp dụng tính đồng biến của hàm số $y = \ln x$ với $x > 0$, từ (2) suy ra

$\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ suy ra $m_h \le m_g$

(3)

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$m_g \le m_a \quad (4)$$

Từ (1), (3), (4) ta có $m_h \le m_g \le m_a \le m_q$

2.2. Áp dụng hàm lồi chứng minh các bất đẳng thức đại số.

a) Cơ sở lý luận

- Dựa vào bài toán chọn f(x) là hàm thích hợp

- Chứng minh f(x) là hàm lồi(lõm)

- Sử dụng bất đẳng thức Jensen đưa ra lời giải

b) Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1 Cho $0 < a < 1; 0 < b < 1$ và $a + b = 1$. Chứng minh rằng

$$a^a + b^b \ge \sqrt{2}.$$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = x^x; 0 < x < 1$

Rõ ràng *f (x)* là hàm liên tục trên $(0,1)$

Suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x$ suy ra $f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$

Do đó $f''(x) = f'(x)(1 + \ln x) + \dfrac{1}{x} f(x)$

Hay $f''(x) = f(x)(1+\ln x)^2 + \dfrac{1}{x} f(x)$

Suy ra $f''(x) = x^x\left[(1+\ln)^2 + \dfrac{1}{x}\right]$ (1)

Từ (1) suy ra $f''(x) > 0, 0 < x < 1$. Do đó *f (x)* là hàm lồi trên $(0,1)$

Ta có $a^a + b^b = a^a + (1-a)^{1-a} = f(a) + f(1-a)$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Jensen với hàm lồi *f(x)* trên $(0,1)$, ta có

$$\frac{f(a)+f(1-a)}{2} \le f\left(\frac{a+1-a}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Từ đó (theo (2))

$$a^a + b^b \ge \sqrt{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 2</u> Cho a,b,c,d là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1-a}} + \frac{b}{\sqrt{1-b}} + \frac{c}{\sqrt{1-c}} + \frac{d}{\sqrt{1-d}} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ với mọi $x > 0$ và $x < 1$

Ta có $f'(x) = \dfrac{2-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$ suy ra $f''(x) = \dfrac{4-x}{8\sqrt{(1-x)^5}} > 0$ với mọi $x \in (0,1)$

Vậy *f (x)* là hàm lồi trên $(0,1)$.Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

Với mọi $a,b,c,d \in (0,1)$ thì

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \ge 4 + \frac{a+b+c+d}{4} = 4f(\frac{1}{4}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

hay $\dfrac{a}{\sqrt{1-a}} + \dfrac{b}{\sqrt{1-b}} + \dfrac{c}{\sqrt{1-c}} + \dfrac{d}{\sqrt{1-d}} \ge \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3 Chứng minh rằng $(2+\pi)^e < 2^{e-1}((1+\pi)^e + 1)$ (*)

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = (1+x)^e$ trên khoảng $(-1, +\infty)$

Ta có $f'(x) = e(1+x)^{e-1}$ suy ra $f''(x) = e(e-1)(1+x)^{e-2} > 0$ với mọi $x > -1$

Suy ra $f(x)$ lồi trên $(-1, +\infty)$

Suy ra $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}0) \le \frac{1}{2} f(\pi) + \frac{1}{2} f(0)$

Hay $(1+\frac{\pi}{2})^e \le \frac{1}{2}(1+\pi)^e + \frac{1}{2}$

Hay $(2+\pi)^e \le 2^{e-1}((1+\pi)^e + 1)$

Do $\pi > 0$ nên dấu đẳng thức không xảy ra

Vậy $(2+\pi)^e < 2^{e-1}((1+\pi)^e + 1)$.

Ví dụ 4 Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} ... a_n^{a_n} \ge \left(\frac{a_1 + a_1 + ... + a_1}{n} \right)^{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = x \ln x$ ta có

$f'(x) = \ln x + 1$ suy ra $f''(x) = \frac{1}{x} > 0,$ với mọi x>0

Suy ra $f(x)$ lồi trên $(0, +\infty)$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hai bộ số: $a_1, a_2, ..., a_n$ và n số $\frac{1}{n}$ ta được

$$f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}(f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n))$$

Hay

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\cdot\ln\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \le \frac{1}{n}(a_1\ln a_1 + a_2\ln a_2 + ... + a_n\ln a_n)$$

Điều này tương đương với $\ln\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+...+a_n} \le \ln(a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n})$

Tức là $\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+...+a_n} \le a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Ví dụ 5</u> Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên *n*, ta có

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{3n+1} > 1$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ với $x\in(0,+\infty)$.

Ta có $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ suy ra $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$, với $\forall x>0$

Vậy $f(x)$ lồi trên $(0,+\infty)$

Theo bất đẳng thức Jensen với mọi $x>0, k>x$ ta có

$$f(k)=f\left(\frac{(k-x)+(k+x)}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(k-x)+f(k+x))$$

Suy ra $2\frac{1}{k} < \frac{1}{k-x}+\frac{1}{k+x}$ (1)

Áp dụng (1) với $k=2n+1$ ta có

$$\frac{1}{(2n+1)-n}+\frac{1}{(2n+1+n)}>2\frac{1}{2n+1}$$

$$\frac{1}{(2n+1)-(n-1)}+\frac{1}{(2n+1)+(n+1)}>2\frac{1}{2n+1}$$

...

$$\frac{1}{(2n+1)-1}+\frac{1}{(2n+1)+1}>2\frac{1}{2n+1}$$

Cộng từng vế *n* bất đẳng thức trên và thêm vào mỗi vế $\frac{1}{2n+1}$ ta được

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+...+\frac{1}{3n+1}$$

$$>(2n+1)\frac{1}{2n+1}$$

Suy ra $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 6 Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{1+e^x}, x>0$

Ta có $f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ suy ra $f''(x)=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}>0$ với mọi $x>0$

Vậy $f(x)$ là hàm lồi với $x>0$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\quad (x_i>0, i=\overline{1,n})$$

Lấy $x_i=\ln a_i>0$ (do $a_i>0, i=\overline{1,n}$), ta có

$$\frac{1}{1+e^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n}{n}}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+e^{\ln a_1}}+\frac{1}{1+e^{\ln a_2}}+...+\frac{1}{1+e^{\ln a_n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\right) \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$ hay $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.3. Áp dụng hàm lồi chứng minh các bất đẳng thức hình học.

a) Cơ sở lý luận

Bất đẳng thức hình học là một phần quan trọng của lý thuyết bất đẳng thức. Một trong những phương pháp chứng minh bất đẳng thức hình học là sử dụng các tính chất của hàm lồi, đặc biệt là vận dụng bất đẳng thức Jensen.

Phương pháp sử dụng hàm lồi để giải lớp cấc bất đẳng thức hình học là

- Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng bất đẳng thức hàm số.
- Sử dụng các điều kiện quen thuộc phát hiện ra tính lồi, lõm của hàm số có mặt trong bất đẳng thức vừa lập.
- Vận dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi chứng minh tính đúng đắn của bất đẳng thức.

b) Một số ví dụ áp dụng

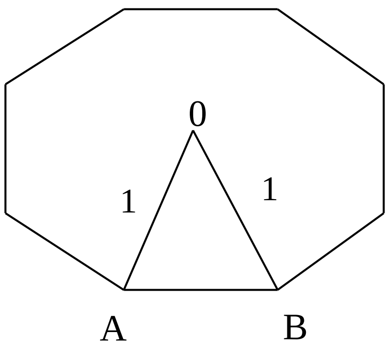
Ví dụ 1 Cho đường tròn có bán kính 1. Gọi S_n là diện tích đa giác đều *n* cạnh nội tiếp trong đường tròn này $(n \ge 4)$. Chứng minh rằng

i) $2S_{2n} > S_n + S_{4n}$

ii) $2S_{2n} > S_{n-1} + S_{4n-2}$.

Chứng minh

Gọi O là tâm đa giác đều n cạnh và AB là một cạnh của nó. Khi đó $AOB = \frac{2\pi}{n}$



Ta có $S_n = nS_{OAB} = n\frac{1}{2}OAOB\sin AOB$

Do đó $S_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$

i) Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}$ với $x \geq 3$

Ta chứng minh $2f(2x) > f(x) + f(4x)$ (4)

Ta có (1) tương đương

$$2\frac{2x}{2}\sin\frac{2\pi}{2x} > \frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x} + \frac{4x}{2}\sin\frac{2\pi}{4x}$$

Suy ra $4\sin\frac{\pi}{x} > \sin\frac{2\pi}{x} + 4\sin\frac{\pi}{2x}$

Suy ra $4.2\sin\frac{\pi}{2x}\cos\frac{\pi}{2x} > 4\sin\frac{\pi}{2x}\cos\frac{\pi}{2x}\cos\frac{\pi}{x} + 4\sin\frac{\pi}{2x}$

Suy ra $2\cos\frac{\pi}{2x} > \cos\frac{\pi}{2x}\cos\frac{\pi}{x} + 1$

Suy ra $\cos\frac{\pi}{2x} > 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{2x}\cos\frac{\pi}{2x}$

Suy ra $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{4x} > 1 - \sin\frac{\pi}{x}\cdot\sin\frac{\pi}{2x}$

Suy ra $2\sin^2\frac{\pi}{4x} < \sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{2x}$

Điều này tương đương $\sin\frac{\pi}{4x} < \sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{4x}$ (2)

Do $x \geq 3$ suy ra $\frac{\pi}{4x} < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos\frac{\pi}{4x} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có

$$\sin\frac{\pi}{x} > \sin\frac{\pi}{2x} = 2\sin\frac{\pi}{4x}\cos\frac{\pi}{4x} > 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4x} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4x}$$

Suy ra $\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{4x} > \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4x})\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4x}$

Do đó (2) đúng suy ra (1) đúng. Vậy (1) được chứng minh.

ii) Từ chứng minh phần a ta có $S_{4n} - S_{2n} < S_{2n} - S_n$ (3)

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2}\sin\frac{2\pi}{x}$ với $x \geq 3$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{2\pi}{x}$

$$f''(x) = -\frac{2\pi^2}{x^3}\sin\frac{2\pi}{x} < 0 \text{ khi } x \geq 3$$

Vậy $f(x)$ là hàm lồi khi $x \geq 3$. Khi đó, ta có với mọi $x_1, x_2 \geq 3$ và $x_1 \neq x_2$.

Ta có

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$$

Suy ra $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - f(x_1) > f(x_2) - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ (*)

Ta chọn $x_1 = n - 1, x_2 = n + 1$ khi đó

$$f(n)-f(n-1)>f(n+1)-f(n)$$

Hay $S_n - S_{n-1} > S_{n+1} - S_n$

Thực hiện liên tiếp các bất đẳng thức (*) ta có

$$S_n - S_{n-1} > S_{n+1} - S_n > S_{n+2} - S_{n+1} > ... > S_{2n} - S_{2n-1}$$

Hay $S_n - S_{n-1} > \dfrac{S_{2n} - S_n}{n}$ (4)

Trong (*) lấy $x_1 = 2n; x_2 = 2n+4$, ta có

$$f(2n+2)-f(2n)>f(2n+4)-f(2n+2)$$

Suy ra $S_{2n+2} - S_{2n} > S_{2n+4} - S_{2n+2} > ... > S_{4n+2} - S_{4n}$

Suy ra $S_{4n+2} - S_{4n} < \dfrac{S_{4n} - S_{2n}}{n}$ (5)

Từ (3),(4),(5) suy ra $2S_n - S_{n-1} > S_{4n+2} - S_{n-1}$

Hay $S_n + S_{4n} > S_{4n+2} + S_{n-1}$ (6)

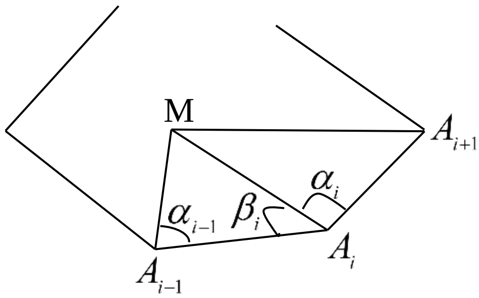
Từ (1) và (6) ta có $2S_{2n} > S_{4n+2} + S_{n-1}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Ví dụ 2</u> Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm *M* bất kì trong đa giác. Gọi $R_1, R_2, ..., R_n$ là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác tương ứng $MA_1A_2, MA_2A_3, ..., MA_nA_1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\prod_{i=1}^{n} R_i \geq \frac{1}{2^n \cos\frac{\pi}{n}} \prod_{i=1}^{n} MA_i$$

<u>Chứng minh</u>



Đặt $MA_iA_{i+1} = \alpha_i, i = \overline{1,n}$

$$\widehat{MA_iA_{i+1}} = \beta_i, i = \overline{1,n}$$

Qui ước $A_{n+1} = A_1;\ A_0 \equiv A_n$

Áp dụng định lí hàm số sin vào các tam giác $MA_1A_2, MA_2A_3, ..., MA_nA_1$ .Ta

có $$\frac{MA_2}{\sin\alpha_1} = \frac{MA_1}{\sin\beta_1} = 2R_1$$

Nhân từng vế các bất đẳng thức ta có

$$2^n R_1R_2...R_n = \frac{MA_2.MA_3...MA_n.MA_1}{\sin\alpha_1.\sin\alpha_2...\sin\alpha_{n-1}.\sin\alpha_n} = \frac{MA_2.MA_3...MA_n.MA_1}{\sin\beta_1.\sin\beta_2...\sin\beta_{n-1}.\sin\beta_n}$$

Tương đương

$$2^n R_1R_2...R_n = \frac{MA_2.MA_3...MA_n.MA_1}{(\sin\alpha_1\sin\beta_1)^{1/2}.(\sin\alpha_2\sin\beta_2)^{1/2}...(\sin\alpha_n.\sin\beta_n)^{1/2}} \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen với hàm lõm $f(x) = \sin x\ (0 < x < \pi)$

đồng thời kết hợp bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(\sin\alpha_1\sin\beta_1)^{1/2} \le \frac{\sin\alpha_i + \sin\beta_i}{2} \le \sin\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} = \sin\frac{A_i}{2},\ i = \overline{1,n}$$

Từ đó, ta có $$\prod_{i=1}^{n}(\sin\alpha_1\sin\beta_1)^{1/2} \le \sin\frac{A_1}{2}.\sin\frac{A_2}{2}...\sin\frac{A_n}{2} \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}...\sin\frac{A_n}{2} \le \left(\frac{\sin\frac{A_1}{2} + \sin\frac{A_2}{2} + ... + \sin\frac{A_n}{2}}{n}\right)^n \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm ta có

$$f(x) = \sin x, 0 < x < \pi$$

Mặt khác

$$\frac{\sin\frac{A_1}{2}+\sin\frac{A_2}{2}+...+\sin\frac{A_n}{2}}{n}\le\sin\frac{\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{2}+...+\frac{A_n}{2}}{n}\qquad(4)$$

$$=\sin\frac{A_1+A_2+...+A_n}{2n}$$

Do $A_1+A_2+...+A_n=(n-2)\pi$, từ đó (4) có dạng

$$\frac{\sin\frac{A_1}{2}+\sin\frac{A_2}{2}+...+\sin\frac{A_n}{2}}{n}\le\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=\cos\frac{\pi}{n}\qquad(5)$$

Kết hợp (1), (2), (3), và (5) ta thu được bất đẳng thức

$$2^n R_1R_2...R_n\ge\frac{MA_1.MA_2...MA_n}{\cos^n\frac{\pi}{n}}$$

Hay $\prod_{i=1}^{n}R_i\ge\frac{1}{2^n\cos^n\frac{\pi}{n}}\prod_{i=1}^{n}MA_i$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Ví dụ 3</u> Cho đa giác lồi n cạnh $(n>4)$. M là một điểm trong đa giác sao cho $AMA_{i+1}<\frac{\pi}{2}$ với mọi $i=\overline{1,n}$ với qui ước $A_{n+1}=A_i$, ở đây $A_1,A_2,...,A_n$ là các đỉnh (theo thứ tự) của đa giác. Đặt $x_i=MA_i,\ a_i=A_iA_{i+1},\ i=\overline{1,n}$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1^2}{x_1x_2}+\frac{a_2^2}{x_1x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_nx_1}\ge4n\sin^2\frac{\pi}{n}$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x)=\cos x$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$

Ta có $f'(x)=-\sin x$ do đó $f''(x)=-\cos x<0$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$

Vậy *f(x)* là hàm lõm với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Đặt $\alpha_i = A_i M A_{i+1}, \forall i = \overline{1,n}$. Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + ... + \cos\alpha_n}{n} \le \cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{n} = \cos\frac{2n}{\pi}$$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \le n.\cos\frac{2n}{\pi}$ (1)

Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác $A_i M A_{i+1}$ ta có

$\cos\alpha_i = \frac{x_1^2 + x_{i+1}^2 - a_i^2}{2x_i x_{i+1}} \ge 1 - \frac{a_i^2}{2x_i x_{i+1}}$ (2)

Vì (2) đúng với mọi $i = \overline{1,n}$, nên từ (2) ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \ge n - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{2x_i x_{i+1}} \quad (3)$$

Từ (1), (3) ta có $n\cos\frac{2\pi}{n} \ge n - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{2x_i x_{i+1}}$

Hay $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{2x_i x_{i+1}} \ge 2n(1 - \cos\frac{2\pi}{n})$

Tức là

$$\frac{a_i^2}{x_1 x_2} + \frac{a_i^2}{x_1 x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n x_1} \ge 4n\sin^2\frac{\pi}{n}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Các bài tập tương tự</u>

<u>Bài tập 1</u>

Gọi $a_1, a_2, ..., a_n$ là độ dài các cạnh của một đa giác n cạnh . Giả sử $(n-1)p$ là chu vi của đa giác ấy. Giả thiết rằng $a_i \le p\ (i = 1, 2, ..., n)$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{n}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} a_k} \le \frac{n-1}{n-2}$$

<u>Bài tập 2</u>

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Đặt $A_iA_{i+1} = a_i$ (Qui ước $A_{n+1} = A_i$) với $i = 1, 2, ..., n$. Cho M là một điểm bất kì trong đa giác. Gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta MA_iA_{i+1}, (i = \overline{1,n})$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{r_i} \ge 2n \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right).$$

2.4. Chứng minh các bất đẳng thức lượng giác.

a) Cơ sở lý luận

Trong lớp bất đẳng thức thì bất đẳng thức lượng giác thường là các bất đẳng thức khó. Sử dụng tính chất của hàm lồi, bất đẳng thức Jensen giúp chúng ta có một phương pháp giải ngắn gọn nhiều bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

Sau đây là một số bất đẳng thức lượng giác cơ bản sử dụng phương pháp hàm lồi ta có thể chứng minh dễ dàng.

b) Một số ví dụ

<u>Ví dụ 1</u> Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sin A \sin B \sin C \le \sin\frac{A+3B}{4} \sin\frac{B+3C}{4} \sin\frac{C+3A}{4}$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x) = \sin x$ trên $(0, \pi)$

Ta có $f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x<0$,mọi $x\in(0,\pi)$ suy ra $f(x)$ lõm trên $(0,\pi)$.

Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{A+3B}{4}\right)=f\left(\frac{A+B+B+B}{4}\right)\geq\frac{f(A)+3f(B)}{4}$$

Hay $\sin\frac{A+3B}{4}\geq\frac{\sin A+3\sin B}{4}$ (1)

Mặt khác theo Cauchy ta lại có

$\sin A+3\sin B=\sin A+\sin B+\sin B+\sin B\geq 4\sqrt[3]{\sin A.\sin^3 B}$ (2)

Từ (1) và từ (2) suy ra $\sin\frac{A+3B}{4}\geq\sqrt[4]{\sin A.\sin^3 B}$ (3)

Tương tự ta cũng có $\sin\frac{B+3C}{4}\geq\sqrt[4]{\sin B.\sin^3 C}$ (4)

$\sin\frac{B+3A}{4}\geq\sqrt[4]{\sin B.\sin^3 A}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra

$$\sin\frac{A+3B}{4}\sin\frac{B+3C}{4}\sin\frac{C+3A}{4}\geq\sin A\sin B\sin C$$

Dấu bằng xảy ra khi và chi khi $A=B=C$ hay ΔABC đều.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Ví dụ 2</u> Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 12$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0,\frac{\pi}{2})$. Ta có

$$f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x} \text{ suy ra } f''(x) = \frac{2\sin^2 x + 6\cos^2 x}{\sin 4x}$$

suy ra $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Vậy *f*(x) lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$

Mặt khác trong ΔABC thì $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) \leq \frac{1}{3}\left[f(\frac{A}{2}) + f(\frac{B}{2}) + f(\frac{A}{2})\right]$$

Do đó $\dfrac{1}{\sin^2 \frac{A+B+C}{6}} \leq \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}})$

Hay $\dfrac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq \dfrac{3}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} = 12$

Vậy $\dfrac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12$

Điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 3</u> Cho $-\frac{\pi}{2} \leq x_i \leq \frac{\pi}{2}$ với mọ $i = \overline{1,n}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos x_1} + \frac{1}{\cos x_2} + \ldots + \frac{1}{\cos x_n} \geq \frac{n}{\cos \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}}$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ với $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ suy ra $f''(x) = \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x} > 0$ với mọi $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

Do đó $f(x)$ là hàm lồi với mọi $0 < x < \pi$. Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)\right)$$

Điều này tương đương với

$$\frac{1}{\cos\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\cos x_1} + \frac{1}{\cos x_2} + ... + \frac{1}{\cos x_n}\right)$$

Hay $\frac{1}{\cos x_1} + \frac{1}{\cos x_2} + ... + \frac{1}{\cos x_n} \ge \frac{n}{\cos\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}}$

Vậy ta có điều phải chứng minh

<u>Ví dụ 4</u> Cho $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ và $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{n - \sum_{i=1}^{n} \tan^2 \alpha_i}{n + \sum_{i=1}^{n} \tan^2 \alpha_i} \le \cos\frac{2\pi}{n}$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x) = \tan^2 x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có $f''(x) = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x} > 0$ với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi trên $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\big(f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_n)\big)$$

Do đó $\tan^2\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n}\le\dfrac{\tan^2\alpha_1+\tan^2\alpha_2+...+\tan^2\alpha_n}{n}$

Tương đương $1+\tan^2\dfrac{\pi}{n}\le\dfrac{n+\sum_{i=1}^{n}\tan^2\alpha_i}{n}$

Hay $\dfrac{n}{n+\sum_{i=1}^{n}\tan^2\alpha_i}\le\dfrac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{2}}$

Tức là $\dfrac{2n}{n+\sum_{i=1}^{n}\tan^2\alpha_i}-1\le 2\cos^2\dfrac{\pi}{n}-1$

Do đó $\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n}\tan^2\alpha_i}{n+\sum_{i=1}^{n}\tan^2\alpha_i}\le\cos\dfrac{2\pi}{n}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5 Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}$ với $0<x<\pi$

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}$

Suy ra $f''(x)=-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos^3\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{4\cos^3\frac{x}{2}}\left(2-\cos^3\dfrac{x}{2}\right)>0,\forall x\in(0,\pi)$

Vậy $f(x)$ là hàm lồi trên $(0,\pi)$. Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \le \frac{1}{3}\left(f(A)+f(B)+f(C)\right)$$

Hay $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$

Hay $3\left(\sin\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{6}\right) \le \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

Hay $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}+\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Ví dụ 6</u> Cho $0 < x_i < \pi$ với mọi $i = \overline{1,n}$, Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin x_1}+\frac{1}{\sin x_2}+\ldots+\frac{1}{\sin x_n} \ge \frac{n}{\sin\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}$$

<u>Chứng minh</u>

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ với $0 < x < \pi$.

Ta có $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ Suy ra $f''(x) = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0$ với mọi $x \in (0,\pi)$

Do đó $f(x)$ là hàm lồi trên $(0,\pi)$. Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)$$

Hay $\frac{n}{\sin\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} \le \frac{1}{\sin x_1}+\frac{1}{\sin x_2}+\ldots+\frac{1}{\sin x_n}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Bài tập áp dụng</u>

<u>Bài 1</u>

Cho n là số nguyên dương

Giả sử $0 \le \alpha \le \pi$ với mọi $i = \overline{1;n}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_n}{n} \le \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{n}$$

<u>Bài 2</u>

Cho n là số nguyên dương

Giả sử $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ với mọi $i = \overline{1;n}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_n}{n} \le \cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{n}$$

2.5. Chứng minh các bất đẳng thức tích phân.

a) Cơ sở lý luận

Dựa vào tính chất của hàm lồi ta cũng có thể chứng minh được các bất đẳng thức tích phân.

b) Sau đây là một số ví dụ minh họa

<u>Ví dụ 1</u> Giả sử f là hàm lồi liên tục trên đoạn $[a,b]$. Chứng minh rằng

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)$$

<u>Chứng minh</u>

Với mọi $x \in [a,b], x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a$. Ta có $\frac{x-a}{b-a} \ge 0; \frac{b-x}{b-a} \ge 0$ và $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$

Vì hàm f lồi trên $[a,b]$ nên

$$f(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a\right) \le \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a) \text{ với mọi } x \in [a,b]$$

Do đó

$$\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx + \frac{f(a)}{b-a}\int_a^b (b-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}f(b)(b-a) + \frac{1}{2}f(a)(b-a)$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\left(f(b)+f(a)\right)$$

Vậy $\int_a^b f(x)d(x) \le \frac{1}{2}(b-a)(f(b)+f(a))$

* Bây giờ ta chứng minh $f(\frac{a+b}{2})(b-a) \le \int_a^b f(x)d(x)$

Đặt $x = \frac{a+b}{2} + t$. Khi đó $dx = dt$. Với $x = a$ thì $t = -\frac{b-a}{2}$, với $x = b$ thì $t = \frac{b-a}{2}$. Do đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{0} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt + \int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt \quad (1)$$

Trong tích phân thứ nhất ở vế phải của đẳng thức (1) ta thực hiện phép biến đổi biến số $t = -u$. Khi đó $dt = -du$ và

$$\int_{-\frac{b-a}{2}}^{0} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt = -\int_{\frac{b-a}{2}}^{0} f\left(\frac{a+b}{2}-u\right)du = \int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)dt$$

Thay vào (1) ta được

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]dt \quad (2)$$

Với mọi $t \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]; \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)$

Vì f lồi trên $[a,b]$ nên từ đó suy ra

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right)\text{ Với mọi } t\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]\quad(3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

__Ví dụ 2__ **(Bất đẳng thức MinCowsky)**

Giả sử $p\geq 1$, f và g là 2 hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$. Chứng minh rằng

$$\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\quad(1)$$

__**Chứng minh**__

Hiển nhiên (1) đúng với $p=1$.Giả sử $p>1$. Khi đó

$$|f(x)+g(x)|^p=|f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\leq|f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$$

$$+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\quad\forall x\in[a,b]$$

$$(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p dx)\leq\int_a^b|f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx$$

$$+\int_a^b|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx\quad(2)$$

Gọi q là số thực dương sao cho $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Áp dụng bất đẳng thức Holder cho hai hàm số $|f|$ và $|f+g|^{p-1}$ ta được

$$\int_a^b|f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx\leq(\int_a^b|f(x)|^p dx)^{1/p}(\int_a^b|f(x)+g(x)|^{(p-1)q}dx)^{\frac{1}{q}}$$

$$=(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx)^{\frac{1}{q}} \quad (3)$$

Tương tự

$$\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx \le (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx)^{\frac{1}{q}} \qquad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \le (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx)^{\frac{1}{q}} \ (5)$$

*) Nếu $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = 0$ thì bất đẳng thức được chứng minh.

*) Nếu $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx > 0$ thì chia cả hai vế của bất đẳng thức (5) cho $(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx)^{\frac{1}{q}}$ ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

<u>Bài tập áp dụng</u>

<u>Bài 1</u>

Cho hàm số f có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$. Chứng minh rằng

$$4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)d(x) \le f(1) + \int_0^1 f(x)d(x)$$

<u>Bài 2</u>

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{e^a - e^b}{a-b} < \frac{e^a + e^b}{2} \text{ với } a,b \in \mathbb{R}, a \ne b$$

Chương 3: SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC

3.1. Phương pháp sử dụng hàm lồi sáng tạo bất đẳng thức.

Theo phương pháp sau ta có thể sáng tạo các bất đẳng thức mới dựa vào hàm lồi

Bước 1: Lựa chọn hàm số trên một tập xác định bất kì sao cho hàm số đó lồi (hoặc lõm).

Bước 2: Dựa vào tính chất của hàm lồi để xây dựng bất đẳng thức

Bước 3: Sáng tạo bài toán

Bước 4: Cho lời giải hoặc gợi ý bằng phương pháp khác.

3.2. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Bước 1: Xét hàm $y = n(n-1)x^{n-2}$ với mọi $x > 0, n \in N^*; n \geq 3$.

Hiển nhiên $y > 0$, với mọi $x > 0$

Ta có $\int n(n-1)x^{n-2}dx = nx^{n-1} + c_1$

Chọn $c_1 = 0$ suy ra $\int n(n-1)x^{-2}dx = nx^{n-1}$ Mặt khác

$$\int nx^{n-1}dx = x^n + c_2$$

Chọn $c_2 = 0$ suy ra $\int nx^{n-1}dx = x^n$

Vậy ta có $f(x) = x^n$, với $n > 2, n \in N^*$ là hàm số lồi trên $(0, +\infty)$.

Bước 2: Theo bất đẳng thức Jensen, ta có

Với mọi $(a_1; a_2; ...; a_m) > 0$ thì

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n \geq m\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m}\right)^n = \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n}{m^{n-1}}$$

Bước 3: Sáng tạo bài toán

Với mọi $(a_1, a_2, ..., a_m) > 0$. Chứng minh rằng

$$a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n}{m^{n-1}}$$

<u>Bước 4</u>: Ta có thể chứng minh bài toán theo cách khác như sau

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\underbrace{(1+1+...+1)}_{m}\underbrace{(1+1+...+1)}_{m}\ldots\underbrace{(1+1+...+1)}_{m}(a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n)$$

$$\geq (a_1 + a_2 + ... + a_m)^n$$

Suy ra $a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n}{m^{n-1}}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Ví dụ 2</u>

<u>Bước 1:</u> Xét hàm số $f(x) = \sin(\sin x)$ trên $(0, \pi)$

Ta có $f'(x) = \cos x.\cos(\sin x)$

Suy ra $f''(x) = -\sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) < 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$

Suy ra $f(x)$ lõm trên $(0, \pi)$.

<u>Bước 2:</u> Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho 3 số A, B, C moi $x \in (0, \pi)$ ta được

$$\frac{\sin\sin A + \sin\sin B + \sin\sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right) \qquad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Jensen cho 3 số A, B, C với mọi $x \in (0, \pi)$ đối với hàm số $g(x) = \sin x$ với mọi $x \in (0, \pi)$ ta được

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{A + B + C}{3} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{\sin(\sin A) + \sin(\sin B) + \sin(\sin C)}{3} \leq \sin\left(\sin\frac{A + B + C}{3}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$

Bước 3: Sáng tạo bài toán

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin(\sin A)+\sin(\sin B)+\sin(\sin C)}{3}\le \sin\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bước 4: Cách giải khác:

Dùng bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được

$$\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}\le \sin\frac{x+y+z}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$. Lần lượt áp dụng bất đẳng thức này cho hai bộ số $\sin A, \sin B, \sin C$ và A, B, C ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3

Bước 1: Xét hàm số $f(x)=x^2$ suy ra $f'(x)=2x$. Do đó f lồi trên $\mathbb{R}$

Chọn $x_1=1,\ x_i=\dfrac{1}{(i-1)i}$ với $i=\overline{2,n}$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{(n-1)n}=2-\dfrac{1}{n}<2$ với $n\in\mathbb{N}^*$

Bước 2: Áp dụng bất đẳng thức Petrovica ta được

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\le f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)+(n-1)f(0)$$

Suy ra $1+\dfrac{1}{1^2.2^2}+\dfrac{1}{2^2.3^2}+...+\dfrac{1}{(n-1)^2.n^2}<(2-\dfrac{1}{n})^2$

Do các x_i khác nhau đôi một nên dấu bất đẳng thức không xảy ra.

Vậy $1+\dfrac{1}{1^2.2^2}+\dfrac{1}{2^2.3^2}+...+\dfrac{1}{(n-1)^2.n^2}<(2-\dfrac{1}{n})^2$

Bước 3: Sáng tạo bài toán

Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ chứng tỏ rằng

$$1+\frac{1}{1^2.2^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+...+\frac{1}{(n-1)^2.n^2}<(2-\frac{1}{n})^2$$

<u>Bước 4:</u> Cách giải khác

Dùng phương pháp qui nạp dễ dàng giải được bài toán trên.

<u>**Ví dụ 4**</u>

<u>Bước 1:</u> Xét hàm số $f(x)=x^3$ trên $(0,+\infty)$. Ta có *f (x)* khả vi hai lần và $f''(x)=6x>0$ với $x\in(0,+\infty)$ suy ra f lồi trên $(0,+\infty)$

<u>Bước 2:</u> Chọn $x_1=a, x_2=b, x_3=c$ và

$$\lambda_1=\frac{b}{a+b+c}, \lambda_2=\frac{c}{a+b+c}, \lambda_3=\frac{a}{a+b+c}$$

Theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$f\left(\frac{b}{a+b+c}a+\frac{c}{a+b+c}b+\frac{a}{a+b+c}c\right)\le\frac{b}{a+b+c}f(a)+$$

$$+\frac{c}{a+b+c}f(b)+\frac{a}{a+b+c}f(c)$$

Hay $\frac{b}{a+b+c}a^3+\frac{c}{a+b+c}b^3+\frac{a}{a+b+c}c^3\ge\left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^3$

Hay $(a+b+c)^2(ac^3+cb^3+ba^3)\ge(ab+bc+ca)^3$

<u>Bước 3:</u> Sáng tạo bài toán

Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta luôn có

$$(a+b+c)^2(ac^3+cb^3+ba^3)\ge(ab+bc+ca)^3$$

<u>Bước 4:</u> (Cách giải khác). Ta có

$$\begin{aligned}&(ab+bc+ca)^2=(\sqrt{b}.\sqrt{ba}+\sqrt{c}.\sqrt{cb}+\sqrt{a}.\sqrt{ac})^2\\&\le(a+b+c)(ba^2+cb^2+ac^2)\end{aligned}\qquad(1)$$

Lại có

$$ba^2+cb^2+ac^2=(\sqrt{ab}.\sqrt{ba}.\sqrt{a}+\sqrt{bc}.\sqrt{cb}.\sqrt{b}+\sqrt{ac}.\sqrt{ac}.\sqrt{c})^2$$

$$\le (ab+bc+ca)(ba^3+cb^3+ac^3) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(ab+bc+ca)^4 \le (a+b+c)^2(ab+bc+ca)(ac^3+cb^3+ba^3)$$

Hay $(a+b+c)^3(ac^3+ab^3+ba^3) \ge (ab+bc+ca)^3$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 5</u>

Bước 1: Xét hàm số $f(x)=e^x-\ln(x+1)$ trên $(1;+\infty)$

Ta có f khả vi đến cấp hai trên $(1;+\infty)$ và $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\in(-1;+\infty)$.

Vậy *f* lồi trên $(1;+\infty)$.

Bước 2: Do f lồi nên tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm (0;1) là $y=1$. Theo tính chất của hàm lồi thì mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đều nằm phía dưới đồ thị hàm số $y=f(x)$. Do đó ta có $e^x-\ln(x+1)\ge 1$ hay $e^x\ge \ln(x+1)+1$.

Bước 3: Sáng tạo bài toán

Chứng minh rằng $e^x>\ln(x+1)+1$ với mọi $x\in(-1;+\infty)$.

Bước 4: Cách giải khác

Ta có $e^x>x+1$ (1)

Suy ra $x+1\ge \ln(x+1)+1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $e^x\ge \ln(x+1)+1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0$

KẾT LUẬN

Các bài toán bất đẳng thức rất phong phú và đa dạng, đòi hỏi người giải phải vận dụng kiến thức một cách linh hoạt. Khóa luận trên đã đề cập đến các phương pháp ứng dụng hàm lồi vào chứng minh các lớp bất đẳng thức . Đây là phương pháp hay và độc đáo nhưng cũng mới lạ đối với các bạn học sinh trung học và học sinh trung học phổ thông. Hi vọng rằng khóa luận có thể cung cấp cho các bạn yêu toán một phương pháp mới để chứng minh được bất đẳng thức.

Do khuôn khổ của khóa luận và do năng lực của bản thân còn hạn chế nên em kính mong các thầy cô giáo và các bạn sinh viên đóng góp ý kiến để khóa luận của em được đầy đủ và hoàn thiện hơn. Một lần nữa em xin chân thành cám ơn cô **Nguyễn Thị Kiều Nga** đã tạo điều kiện và giúp đỡ em hoàn thành khóa luận này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phan Huy Khải, *Giải tích lồi và các bài toán sơ cấp*, NXB Giáo dục

2. Đỗ Văn Lưu, Phan Huy Khải , *Giải tích lồi*, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật 2000.

3. Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Hà Nội.

4. Ngô Thế Phiệt, *Một số phương pháp mới trong chứng minh bất đẳng thức.*

5. G.H.Hardy-J.E.Littlewood-G.Polya. *Bất đẳng thức.* Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp Hà nội -1981

6. *Tạp chí toán học và tuổi trẻ.*