

CHƯƠNG 3-1: TÍNH CHẤT CỦA ENTROPY

TS. TRỊNH VĂN CHIẾN (SOICT-HUST)

QUY TẮC CHUỖI (1)

- Quy tắc chuỗi cho cặp biến ngẫu nhiên (X, Y)

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y | X)$$

- Xem xét X trước hay Y trước không làm thay đổi lượng tin chung (joint entropy)

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y | X) = H(Y) + H(X | Y)$$

- Ví dụ 1: Xem xét 3 biến ngẫu nhiên độc lập U, V, W có lượng tin riêng tương ứng là $H(U), H(V)$, và $H(W)$. Đặt $X=(U, V)$, $Y=(V, W)$. Tính

a) $H(X, Y)$

b) $H(X/Y)$

c) $I(X; Y)$

QUY TẮC CHUỖI (2)

- Joint entropy-lượng tin riêng của cặp biến ngẫu nhiên (X, Y) :

$$H(X) = H(U, V) = H(U) + H(V)$$

$$H(Y) = H(V, W) = H(V) + H(W)$$

$$\Rightarrow H(X, Y) = H(U, V, V, W) = H(U, V, W) = H(U) + H(V) + H(W)$$

- Lượng tin riêng có điều kiện

$$H(X | Y) = H(X, Y) - H(Y) = H(U) + H(V) + H(W) - H(V) - H(W) = H(U)$$

- Thông tin tương hỗ

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

QUY TẮC CHUỖI (3)

- Ví dụ 2: Cho 2 biến ngẫu nhiên X, Y có xác suất như sau

$P(x, y)$		x				$P(y)$
		1	2	3	4	
y	1	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/32$	$1/4$
	2	$1/16$	$1/8$	$1/32$	$1/32$	$1/4$
	3	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/4$
	4	$1/4$	0	0	0	$1/4$
$P(x)$		$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	

- Chứng minh $H(X, Y) = 27/8$ bits, $H(X) = 7/4$ bits, và $H(Y) = 2$ bits
- Tìm xác suất có điều kiện $P(x|y)$ và tính lượng tin riêng có điều kiện $H(X|Y)$

$P(x y)$		x				$H(X y)/\text{bits}$
		1	2	3	4	
y	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$7/4$
	2	$1/4$	$1/2$	$1/8$	$1/8$	$7/4$
	3	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	2
	4	1	0	0	0	0

$$H(X | Y) = 11/8$$

ỨNG DỤNG

Nén ảnh sử dụng biến đổi wavelet

$$H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1) = \sum_{i=1}^n H(X_i | \underbrace{X_{i-1}, \dots, X_1}_{\text{Known}})$$

Chứng minh: Sử dụng đệ quy ta có

$$H(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2 | X_1)$$

$$H(X_1, X_2, X_3) = H(X_3, X_2 | X_1) + H(X_1)$$

$$= H(X_3 | X_2, X_1) + H(X_2 | X_1) + H(X_1)$$



THÔNG TIN TƯƠNG HỒ CÓ ĐIỀU KIỆN (1)

- Thông tin tương hồ có điều kiện (conditional mutual information)

$$I(X;Y | Z) = H(X | Z) - H(X | Y, Z)$$

- Ví dụ 3: Biến ngẫu nhiên X : Nắng, Mưa. Biến ngẫu nhiên Y : Đúng, Sai:

- ✓ Thông tin tương hồ (mutual information) được định nghĩa là: $I(X;Y)$
- ✓ Nếu có thông tin Z về độ ẩm thì thông tin tương hồ có điều kiện là: $I(X;Y | Z)$

- Trường hợp tổng quát

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) &= \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_{i-1}, \dots, X_1) \\ &= I(X_1; Y) + I(X_2; Y | X_1) + \dots + I(X_n; Y | X_{n-1}, \dots, X_1) \end{aligned}$$

THÔNG TIN TƯƠNG HỒ CÓ ĐIỀU KIỆN (2)

- Trường hợp tổng quát

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_{i-1}, \dots, X_1) = I(X_1; Y) + I(X_2; Y | X_1) + \dots + I(X_n; Y | X_{n-1}, \dots, X_1)$$

- Chứng minh:

- ✓ Sử dụng định nghĩa của lượng tin riêng

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = H(X_1, X_2, \dots, X_n) - H(X_1, X_2, \dots, X_n | Y)$$

- ✓ Sử dụng quy tắc chuỗi

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = H(X_1) + H(X_2, \dots, X_n | X_1)$$

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n | Y) = H(X_1 | Y) + H(X_2, \dots, X_n | Y, X_1)$$

- ✓ Do đó

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = I(X_1; Y) + H(X_2, \dots, X_n | X_1) - H(X_2, \dots, X_n | Y, X_1)$$

- ✓ Tiếp tục sử dụng quy tắc chuỗi chúng ta được kết quả cần phải chứng minh

THÔNG TIN TƯƠNG HỖ CÓ ĐIỀU KIỆN (2)

- Trường hợp tổng quát

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_{i-1}, \dots, X_1) = I(X_1; Y) + I(X_2; Y | X_1) + \dots + I(X_n; Y | X_{n-1}, \dots, X_1)$$

- Chứng minh:

- ✓ Sử dụng định nghĩa của lượng tin riêng

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = H(X_1, X_2, \dots, X_n) - H(X_1, X_2, \dots, X_n | Y)$$

- ✓ Sử dụng quy tắc chuỗi

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = H(X_1) + H(X_2, \dots, X_n | X_1)$$

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n | Y) = H(X_1 | Y) + H(X_2, \dots, X_n | Y, X_1)$$

- ✓ Do đó

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = I(X_1; Y) + H(X_2, \dots, X_n | X_1) - H(X_2, \dots, X_n | Y, X_1)$$

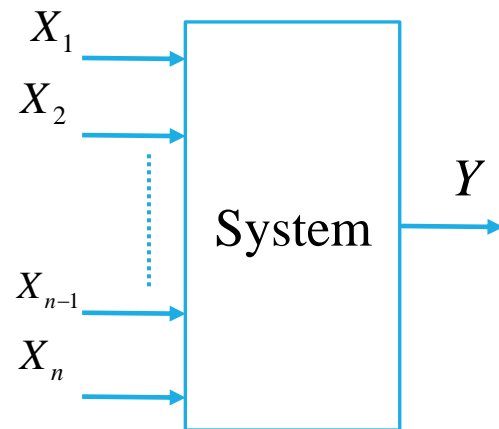
- ✓ Tiếp tục sử dụng quy tắc chuỗi chúng ta được kết quả cần phải chứng minh

THÔNG TIN TƯƠNG HỒ CÓ ĐIỀU KIỆN (3)

- Thông tin tương hồ (mutual information) và thông tin tương hồ có điều kiện (conditional mutual information) dùng để làm gì?

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_{i-1}, \dots, X_1)$$

- Từ phân tích tín hiệu đầu ra, liệu chúng ta giải mã được bao nhiêu tín hiệu đầu vào?



LƯỢNG TIN RIÊNG TƯƠNG ĐỐI CÓ ĐIỀU KIỆN

- Lượng tin riêng có điều kiện (conditional relative entropy)

$$D(p(y | x) \| q(y | x)) = \sum_x p(x) \sum_y p(y | x) \log_2 \frac{p(y | x)}{q(y | x)}$$

- Quy tắc chuỗi của lượng tin riêng tương đối có điều kiện

$$D(p(y | x) \| q(y | x)) = D(p(x) \| q(x)) + D(p(y | x) \| q(y | x))$$

**Khoảng cách giữa hai hàm mật độ xác suất (PDF) = Khoảng cách giữa margin +
Khoảng cách giữa xác suất có điều kiện**