CHƯƠNG 3-2: ĐƯỜNG BAO CỦA LƯỢNG TIN RIÊNG

TS. TRỊNH VĂN CHIẾN (SOICT-HUST)

TÍNH LỒI (1)

- Tính lồi (convexity): Một hàm số $f(x)$ là hàm lồi trong khoảng (a,b): Nếu với mỗi $x, y \in (a, b)$ và $0 \le t \le 1$ ta có

$$f\left(tx+(1-t)y\right) \le tf(x)+(1-t)f(y)$$

- Hàm số f(x,y) là lồi ngặt (strictly convex) nếu dấu bằng của bất đẳng thức trên xảy ra tại $\mathrm{t} = 0$.

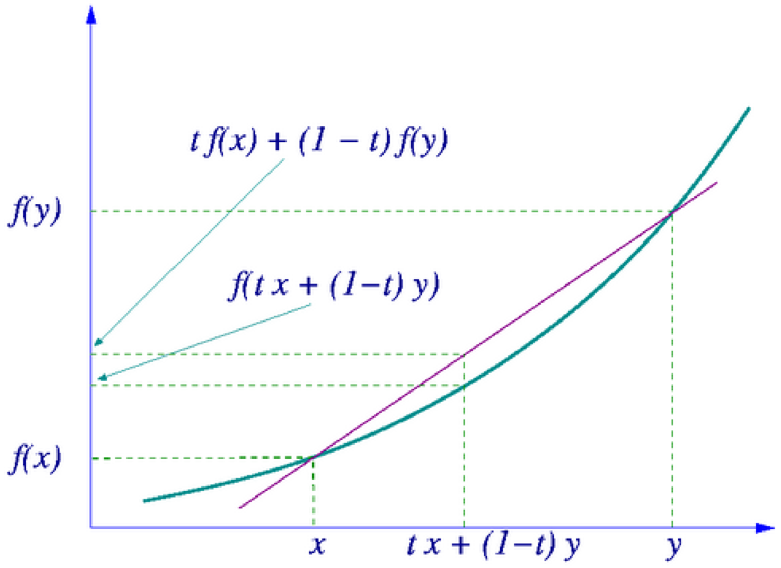
- Nếu đạo hàm cấp 2 của một hàm số $\ge$ (>) thì hàm đó

là hàm lồi hoặc lồi ngặt

- <u>Ví dụ</u>: Chứng minh hàm số $f(x) = x^2$ là hàm lồi ngặt:

a) Sử dụng định nghĩa

b) Sử dụng đạo hàm cấp 2



TÍNH LỒI (2)

a) Để chứng minh $f(x) = x^2$ là hàm lồi bằng sử dụng định nghĩa, ta có

$$f\left(tx+\left(1-t\right)y\right)=\left(tx+\left(1-t\right)y\right)^2;tf(x)=tx^2;(1-t)f(y)=(1-t)y^2$$

- Ta cần chứng minh

$$tx^2+(1-t)y^2 \geq \left(tx+\left(1-t\right)y\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq t\left(t-1\right)\left(x-y\right)^2$$

  - Bất phương trình cuối cùng luôn đúng với *t=0*
  - Trong các trường hợp khác bất phương trình luôn đúng

b) Đạo hàm cấp 2 của hàm là $f''(x) = 2 > 0$

BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN (1)

Định lý: (Bất đẳng thức Jensen) Nếu hàm f(x) là hàm lồi, ta có

$$E\{f(x)\} \geq f\left(E\{x\}\right)$$

Nếu f là hàm lồi ngặt (strictly convex), dấu bằng xảy ra khi *x* là hằng số

- Chứng minh: Đặt $x^* = E\{X\}$ và sử dụng khai triển Taylor ta có:

$$f(x) \geq f\left(x^*\right) + f'(x^*)\left(x - x^*\right) + \frac{f''(x^*)}{2}\left(x - x^*\right)^2$$

  - Vì hàm f(x) là hàm lồi nên: $f''(x^*) \geq 0$, do đó

$$f(x) \geq f\left(x^*\right) + f'(x^*)\left(x - x^*\right)$$

  - Lấy kì vọng cả 2 vế của bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh
- Bất đẳng thức Jensen sử dụng rộng rãi trong toán học và lý thuyết thông tin
- Ý nghĩa: Trung bình của một hàm lồi lớn hơn hoặc bằng giá trị hàm với đầu vào là trung bình của biến

BẮT ĐẲNG THỨC JENSEN (2)

- Một số ứng dụng của bất đẳng thức Jensen
  - $f(x) = x^2, E\left\{X^2\right\} \geq \left(E\left\{X\right\}\right)^2$
  - $f(x) = e^x, E\left\{e^X\right\} \geq e^{E\{X\}}$
- Trung bình số học (Arithmetic mean) ≥ trung bình hình học (geometric mean) ≥ trung bình điều hòa (harmonic mean)

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

  - Chứng minh: Sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi $f(x) = x\ln(x)$

ĐƯỜNG BAO CỦA LƯỢNG TIN RIÊNG TƯƠNG ĐỐI (1)

Bất đẳng thức tổng log (log-sum inequality): Với $a_1,\ldots,a_n > 0$ *và* $b_1,\ldots,b_n > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log\frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\log\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

Dấu bằng xảy ra nếu a_i/b_i là hằng số

- <u>Chứng minh</u>: Sử dụng bất đẳng thức Jensen với hàm lồi f(x) =xlog(x), vế phải của bất đẳng thức được viết lại như sau (**Chứng minh chi tiết-bài tập**)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)}\left(\frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\log\left(\frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

ĐƯỜNG BAO CỦA LƯỢNG TIN RIÊNG TƯƠNG ĐỐI (2)

Đường bao dưới của lượng tin riêng tương đối (relative entropy)

$$D(p(x)\,||\,q(x)) \geq 0$$

đẳng thức xảy ra nếu *p(x)=q(x)* với mọi *x*

- <u>Chứng minh:</u> Dựa vào định nghĩa của lượng tin riêng tương đối ta có

$$D(p(x)\,||\,q(x)) = \sum_x p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} \geq \left(\sum_x p(x)\right)\log\left(\frac{\sum_x p(x)}{\sum_x q(x)}\right) = 0$$

  - Ta đã sử dụng bất đẳng thức log-sum
- <u>Hệ quả</u>:
  - I(X;Y) ≥0: Dấu bằng xảy ra nếu X và Y là độc lập

ĐIỀU KIỆN LÀM GIẢM LƯỢNG TIN RIÊNG

Mối quan hệ giữa lượng tin riêng có điều kiện và lượng tin riêng

$$H(X|Y) \le H(X)$$

- <u>Chứng minh:</u> Vì thông tin tương hỗ là không âm nên ta có:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \ge 0$$

- Biết thông tin về biến ngẫu nhiên *Y* làm giảm sự không chắc chắn của *X*
- ***<u>Lưu ý</u>***: *H(X|Y=y)* có thể lớn hơn *H(X)*
    - Biết một thông tin mới có thể làm tăng tính không chắc chắn của *X*

ĐƯỜNG BAO CỦA LƯỢNG TIN RIÊNG

Mối quan hệ giữa lượng tin riêng xảy ra đồng thời và lượng tin riêng

$$H(X_1, ..., X_n) \le \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$$

Dấu bằng xảy ra nếu các biến ngẫu nhiên độc lập với nhau

- <u>Chứng minh</u>: Áp dụng quy tắc chuỗi ta có

$$H(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} H\left(X_i \mid X_{i-1}, ..., X_1\right) \le \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$$

CỰC ĐẠI LƯỢNG TIN RIÊNG

- Xét không gian rời rạc: Phân bố đều (uniform distribution) có lượng tin riêng cực đại trong tất cả các phân bố

<u>Định lý</u>: Cận trên của lượng tin riêng được xác định như sau:

$$H(X) \leq \log\left(|\tilde{X}|\right)$$

với $|\tilde{X}|$ là số giá trị có thể xảy ra với biến X. Dấu bằng xảy ra nếu X có phân bố đều

- <u>Chứng minh</u>: Xem xét một phân bố đều với biến ngẫu nhiên U, có $u(x) = 1/|\tilde{X}|$

$$0 \leq D(p(x)\,\|\,q(x)) = \sum p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} = \sum p(x)\log|\tilde{X}| - \left(-\sum p(x)\log p(x)\right) = \log|\tilde{X}| - H(X)$$

ĐẶC TÍNH LỒI CỦA LƯỢNG TIN RIÊNG TƯƠNG ĐỐI

<u>Định lý</u>: D(p(x)||q(x)) là hàm lồi với bộ mật độ xác suất p(x) và q(x)

$$D\left(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 \,\|\, \lambda q_1 + (1-\lambda)q_2\right) \le \lambda D\left(p_1 \,\|\, q_1\right) + (1-\lambda)D\left(p_2 \,\|\, q_2\right)$$

với $0 \le \lambda \le 1$.

- <u>Chứng minh</u>: Bằng việc sử dụng định nghĩa của lượng tin riêng tương đối và bất đẳng thức log-sum ta có

$$\begin{aligned}
& D\left(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 \,\|\, \lambda q_1 + (1-\lambda)q_2\right) \\
&= \left(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2\right)\log\left(\frac{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2}{\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2}\right) \\
&\le \lambda p_1 \log\left(\frac{\lambda p_1}{\lambda q_1}\right) + (1-\lambda)\log\left(\frac{(1-\lambda)p_2}{(1-\lambda)q_2}\right) \\
&= \lambda D(p_1 \,\|\, q_1) + (1-\lambda)D\left(p_2 \,\|\, q_2\right)
\end{aligned}$$

ĐẶC TÍNH LÕM CỦA LƯỢNG TIN RIÊNG

<u>Định lý</u>: Lượng tin riêng

$$H(p) = -\sum_i p_i \log p_i$$

là hàm lõm với véc-tơ ***p***

- <u>Chứng minh</u>: Sử dụng định nghĩa của lượng tin riêng ta có

$$H(p) = -\sum_{i\in\tilde{X}} p_i \log p_i = -\sum_{i\in\tilde{X}} p_i \log\left(\frac{p_i}{u_i} u_i\right)$$

$$= -\sum_{i\in\tilde{X}} p_i \log\left(\frac{p_i}{u_i}\right) - \sum_{i\in\tilde{X}} p_i \log(u_i)$$

$$= -D(p \| u) - \log\left(\frac{1}{|\tilde{X}|}\right) \sum_{i\in\tilde{X}} p_i$$

$$= \log\left(|\tilde{X}|\right) - D(p \| u)$$

TÍNH LỒI, LÕM CỦA THÔNG TIN TƯƠNG HỖ

- Hàm thông tin tương hỗ I(X;Y) có các tính chất sau đây:
  - Là hàm lõm của p(x) nếu giả sử p(y|x) đã biết
  - Là hàm lồi của p(y|x) nếu giả sử p(x)
- Phân tích: Hàm thông tin tương hỗ I(X;Y) được viết theo p(x) và p(y|x) như sau

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x)\, p\left(y \mid x\right) \log\left(\frac{p(y \mid x)}{p(y)}\right)$$

$$= \sum_{x,y} p(x)\, p(y \mid x) \log\left(p(y \mid x)\right) - \sum_{y} \left\{\sum_{x} p(x)\, p(y \mid x)\right\} \log\left\{\sum_{x} p\left(y \mid x\right) p(x)\right\}$$

  - Nếu cố định p(y|x) thì I(X;Y) là một hàm tuyến tính của p(x)
  - Cố định p(x), I(X;Y) cần chứng minh đây là hàm lõm của p(y|x) (**Bài tập**)

TỔNG KẾT

- Thông tin tương hỗ luôn không âm
- Ràng buộc điều kiện làm giảm lượng thông tin riêng
- Phân bố đều cực đại hóa lượng tin riêng
- Các đặc tính:
    - D(p||q) là hàm lồi của (p||q)
    - Lượng tin riêng H(p) là hàm lõm của p
    - Thông tin tương hỗ I(X;Y) là hàm lõm của p(x) và hàm lồi của p(y|x)