Лаб 7 - Инф

Фам Куанг Туан

20 декабря 2020

M234. *Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка – четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют 1/3 их длины. С полученных 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две соторны которого составляют по 1/3 соответствующия сторон 8-угольника, и так далее. Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (то есть образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам).*

Обозначим через M_0 исходный квадрат, через $M_1, M_2, M_3, \dots$ – многоугольники, получаемое из M_0 последовательным отрезанием уголков. Удобно рассмотреть также многоугольник N_k, вершинами которого служат середины сторон $M_k (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Пусть A – произвольная вершина многоугольника M_k – а B и C – соседние с ней вершины. Чтобы получить из многоугольника M_k многоугольник M_{k+1}, нужно от каждой вершины A многоугольника M_k отрезать треугольник B_2AC_2 (см. рис.8) такой, что точки B_2 и C_2 делят, соответственно, отрезки $[AB]$ и $[AC]$ в отношении $1:2$. Пусть B_1 и C_1 середины отрезков и , то есть соседние вершины многоугольника N_k; тогда

$$| AC_2 | = \frac{2}{3} \, | AC_1 |, \tag{1}$$
$$| AB_2 | = \frac{2}{3} \, | AB_1 |.$$

При переходе от многоугольника N_k к многоугольнику N_{k+1} точки B_1 и C_1 остаются его вершинами, но уже не соседними: между ними появляется новая вершина A_1 середина отрезка $[B_2C_2]$. Таким образом, многоугольник N_{k+1} получается из многоугольника N_k добавлением к каждой его стороне B_1C_1 треугольника типа $B_1A_1C_1$.

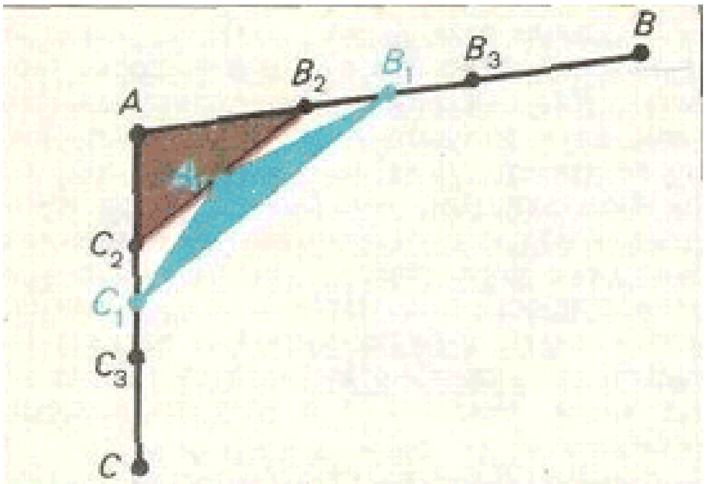

Рис. 8.

Из (1) следует, что площади отрезаемых и добавляемых треугольников связваны такими соотношениями:

$$S\,(B_2AC_2) = \frac{4}{9}\,S\,(B_1AC_1), \tag{2}$$

$$S\,(B_1A_1C_1) = \frac{1}{3}\,(B_1AC_1). \tag{3}$$

Пусть x_k – площадь многоугольника N_k, y_k – площадь M_k. Просуммировав (2) и (3) по всем вершинам A многоугольника M_k, получим:

$$y_k - y_{k+1} = \frac{4}{9}\,(y_k - x_k), \tag{4}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{3}\,(y_k - x_k); \tag{5}$$

отсюда

$$(y_{k+1} - x_{+1}) = \frac{2}{9}\,(y_k - x_k) \tag{6}$$

и

$$\frac{y_k - y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} = \frac{4}{3}. \tag{7}$$

Отметим точки $x_0, \; x_1, \; x_2, \dots$ и $y_0, \; y_1, \; y_2, \dots$ на числовой оси (рис. 9 и 10). Из соотношения (6) следует, что длина отрезка $[x_{k+1}, \; y_{k+1}]$ в $4\,\frac{1}{2}$ раза меньше длины отрезка $[x_k, \; y_k]$. Рассмотрим точку , делящую отрезок в отношении $3:4$; тогда

$$\frac{y_k - a}{a - x_k} = \frac{4}{3}. \tag{8}$$

Учитывая (7) и (8), получим, что

$$\frac{y_{k+1} - a}{a - x_{k+1}} = \frac{4}{3}; \tag{9}$$

значит, точка a делит в том же отношения $3:4$ и отрезок

$$[x_{k+1}, \; y_{k+1}].$$

Возьмем самый первый отрезок последовательности: $[x_k, \; y_k] = [\frac{1}{2}, 1]$; в отношении $3:4$ его делит точка a , такая, что $\frac{1-a}{a-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$, то есть?

$$a = \frac{5}{7}. \tag{10}$$

В силу сказанного, эта точка делит и отношении $3:4$ все отрезки $[x_k, \; y_k]$ $(k = 0, \; 1, \; 2, \dots)$; значит, каждый следующий отрезок последовательности $[x_k, \; y_k]$ полу-

Склады	Скупщики			
	1	2	3	4
1	80 35	120	150	50 40
2	60 25	70 10	90 40	120
3	120	50 50	110	100

Таблица. 6.

В клетках, которые не вошли в цикл, всё осталось по-старому.

– 1400 долларов – кругленькая сумма! Давай проверять другие пустые клетки. Может набредём на маршрут, который тоже стоит использовать. Вот, например, начнём с клетки (1,2). Для неё расходы изменятся на

$$120 + 60 - 70 - 80 = 30 > 0$$

Тысяча чертей! Маршрут (1,2) использовать не стоит. А, может быть, воспользоваться...

– Не трудись, Джо. Я уже проверял: больше из этого плана не выжмет ни доллара сам Данциг.

– Данциг, Данциг... это не тот ли, который обчистил «Бэнк оф...»?

– Нет, Джо, он не из наших. Это тот малый, который придумал этот метод. Правда, ещё до него какие-то красные... зазвонил телефон. Клифф снял трубку, подслушал и закричал:

– Сержант, отставить! Оцепить научную библиотеку штата! Мне – машину и набор наручников!

Немного теории

Что же позволило сэкономить на транспортных расходах 1400 долларов? Проследим за действиями ловких гангстеров. Сначала Бэйт нашёл допустимый план перевозок. Метод, которым он при этом воспользовался называется *методом минимального элемента* и понятно почему: в нём перевозки всё время ставятся на маршруты с минимальными тарифами, а если будут два маршрута с одинаковым тарифом, то предпочтение, естественно, нужно отдать тому из них, для которого возможная перевозка больше.

Получив допустимый план, Бэйт и Джо стали пытаться улучшить его *распределительным методом*. Это, пожалуй, самый простой, хотя и не самый быстрый способ улучшения плана перевозок. Но прежде чем излагать этот метод в общем виде, сформулируем строго транспортную задачу *линейного программирования*.

Пусть имеется m поставщиков (складов) и n потребителей, a_i – емкость i-го склада, а b_j – потребность j-го потребителя. Пусть x_{ij} – перевозка от i-го поставщика к j-му потребителю. Допустимы только такие планы перевозок, для которых