

# TUYỂN TẬP 100 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN KHỐI 8 CÁC TỈNH-HUYỆN NĂM 2023-2024



A handwritten signature in black ink, which appears to read "Ho Khắc Vũ".

**Người tổng hợp, sưu tầm : Thầy giáo Hồ Khắc Vũ  
Zalo-hotline : 03.4348.1625-03.5352.6757**

**Thành phố Tam Kỳ - tỉnh Quảng Nam  
15-03-2024**

PHÒNG GD &amp; ĐT SƠN

ĐỀ KHẢO SÁT SINH GIỎI CẤP HUYÊN

HÒA

LỚP 8 NĂM HỌC 2023-2024

MÔN TOÁN

Thời gian : 150 phút ( không kể thời gian giao

*đề)***Bài 1:( 4 điểm)**

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1)  $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$

2)  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$

**Bài 2: ( 3 điểm)**

- 1) Với giá trị nào của a và b thì đa thức :  $x^3 + ax^2 + 2x + b$  chia hết cho đa thức:  $x^2 + x + 1$ .

2) Chứng minh rằng  $x^5 - 5x^3 + 4x$  chia hết cho 120 với mọi x nguyên

### Bài 3 : (3 điểm)

Giải các phương trình sau:

$$1) \ x^2 - 4x + 4 = 25$$

$$2) \frac{x-17}{2001} + \frac{x-21}{1997} + \frac{x+2}{1010} = 4$$

### Bài 4 :(4 điểm)

$$1) \text{ Chứng minh rằng: } a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$$

2) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

### Bài 5: ( 6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M thuộc cạnh BC. Gọi E và F

theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên BC thì:

- 1) Chu vi của tứ giác MEAF không đổi.
- 2) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với EF luôn đi qua điểm K cố định.
- 3) Tam giác KEF có diện tích nhỏ nhất khi M là trung điểm của BC.

- Hết-

(Giám thị không giải thích gì thêm)

## ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

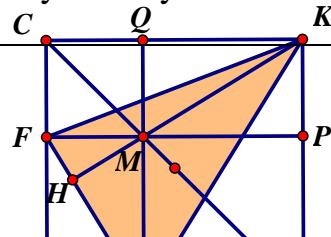
Bài	Ý	Đáp án	Điểm
1	$(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$ Đặt $y = x^2 + x$ ta được $y^2 - 2y - 15 = y^2 - 5y + 3y - 15$ $= y(y - 5) + 3(y - 5)$ $= (y - 5)(y + 3)$ $= (x^2 + x - 5)(x^2 + x + 3)$	0,25 0,5 0,5 0,25 0,5	
2	$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$ $= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24$ Đặt $a = x^2 + 5x + 4$ ta được $a(a + 2) - 24 = a^2 + 2a - 24$	0,25	

	$= a^2 + 6a - 4a - 24$ $= a(a + 6) - 4(a + 6)$ $= (a + 6)(a - 4)$ $= (x^2 + 5x + 10)(x^2 + x)$ $= x(x + 1)(x^2 + 5x + 10)$	0,5 0,25 0,5 0,25 0,25
	<p>Đa thức : <math>x^3 + ax^2 + 2x + b</math> chia hết cho đa thức: <math>x^2 + x + 1</math> thì ta</p> <p>được một nhị thức bậc nhất có hệ số bậc 1 bằng 1 và hệ số tự</p> <p>do bằng b nên ta có:</p>	0,5
1	$x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)(x + b)$	
2	$= x^3 + bx^2 + x^2 + bx + x + b$ $\Leftrightarrow (a - b + 1)x^2 + (2 - b)x = 0$ $\Leftrightarrow b = 2 \text{ và } a = -1$	0,5
2	Chứng minh rằng $x^5 - 5x^3 + 4x$ chia hết cho 120	

	$\begin{aligned}x^5 - 5x^3 + 4x &= x(x^4 - 5x^2 + 4) \\&= x(x^4 - x^2 - 4x^2 + 4) \\&= x[x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)] \\&= x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \\&= (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)\end{aligned}$ <p>Ta có <math>x - 2 ; x - 1 ; x ; x + 1 ; x + 2</math> là 5 số nguyên liên tiếp với mỗi <math>x</math> nguyên nên</p> $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) \vdots 5!$ <p>Hay <math>(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) \vdots 120</math></p>	0,5
3	$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 = 25 &\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 5^2 \\&\Leftrightarrow x - 2 = 5 \text{ hoặc } x - 2 = -5 \\&\Leftrightarrow x = 7 \text{ hoặc } x = -3\end{aligned}$	0,5 0,5 0,5

	$\frac{x-17}{2001} + \frac{x-21}{1997} + \frac{x+2}{1010} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{x-17}{2001} - 1 + \frac{x-21}{1997} - 1 + \frac{x+2}{1010} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x-2018}{2001} + \frac{x-2018}{1997} + \frac{x-2018}{1010} = 0$ $\Leftrightarrow (x-2018) \left( \frac{1}{2001} + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1010} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2018$	0,5 0,5 0,5
4	$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$ $\Leftrightarrow \left( a^2 - a + \frac{1}{4} \right) + \left( b^2 - b + \frac{1}{4} \right) + \left( c^2 - c + \frac{1}{4} \right) > 0$ $\Leftrightarrow \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( b - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( c - \frac{1}{2} \right)^2 > 0 \text{ luôn đúng với mọi } a, b, c$	2

	Suy ra đpcm	
		2
	Đặt $b + c - a = x$ (1); $a + c - b = y$ (2); $a + b - c = z$ (3)	
	Suy ra: lấy (2) + (3) ta được $2a = y + z$	
	(1) + (3) ta được $2b = x + z$	
	(1) + (2) ta được $2c = x + y$	0,5
	Với $x, y, z > 0$	
2	Thay vào bài toán ta được:	
	$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$	0,5
	Ta có: $\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} = \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right)$	
	$\geq 2 + 2 + 2 = 6$ (áp dụng bất đẳng thức cô si cho hai số dương)	0,5
	Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$	



			0,5
	H.v		
5	1	Xét MEAF : có $A = E = F = 90^\circ$ $\Rightarrow$ MEAF là hình chữ nhật. $\Rightarrow ME = AF; MF = AE$ Mặt khác : $\Delta ABC$ vuông cân	0,5

	<p>Nên <math>\Delta CFM</math> vuông cân</p> $\Rightarrow CF = FM = AE$ <p>Nên chu vi <math>MEAF = AE + EM + FM + AF</math></p> $= 2(AF + FM) = 2(AF + FC)$ $= 2AC$ không đổi vì AC không đổi.	0,5
	<p>Gọi K là điểm đối xứng của A qua BC.</p> <p>Vì <math>\Delta ABC</math> vuông cân nên AK cũng là đường trung trực của BC</p> <p>Suy ra : ABKC là hình vuông.</p> <p>Gọi <math>P = FM \cap BK</math>; <math>Q = ME \cap CK</math>; H là hình chiếu của M xuống EF.</p> <p>Suy ra : + MPKQ là hình chữ nhật.</p> <p>+ MFCQ; MEBP là hình vuông.</p>	0,5

	<p>Xét <math>\Delta MFE</math> và <math>\Delta KPM</math> :</p> <p><math>FM = KP (= MQ)</math>; <math>ME = MP</math> ( 2 cạnh của hình vuông MEBP);</p> <p><math>EMF = P = 90^\circ</math></p> <p>Nên <math>\Delta MFE = \Delta KPM</math> ( c - g - c)</p> <p>Suy ra: <math>MEF = KMP</math></p> <p>Mặt khác : <math>MEF + EMH = 90^\circ</math></p> <p>Nên <math>MEF + EMH + EMP = 180^\circ</math> hay M; H và K thẳng hàng.</p> <p>Vậy HM luôn đi qua điểm K cố định hay đường thẳng đi qua M vuông góc với EF luôn đi qua điểm K cố định.</p>	0,5
	$S_{KEF} = S_{ABCD} - (S_{AEF} + S_{CKF} + S_{BEK})$	0,5

	<p>mà <math>S_{CKF} + S_{BEK} = \frac{1}{2}(CK \cdot CF + KB \cdot EB) =</math></p> $\frac{1}{2}KB \cdot (EB + CF) = \frac{1}{2}KB \cdot AB = \frac{S_{ABCD}}{2}$ <p>Vậy <math>S_{KEF}</math> nhỏ nhất khi <math>S_{AEF}</math> lớn nhất.</p>	0,5
	<p>Mặt khác : <math>S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF</math> đạt giá trị lớn nhất khi <math>AE = AF</math> (bđthúc Cô si)</p> <p>Hay Max <math>S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{S_{ABCD}}{8}</math></p> <p>Nên Min <math>S_{KEF} = S_{ABCD} - (S_{AEF} + S_{CKF} + S_{BEK}) =</math></p> $S_{ABCD} - \left( \frac{S_{ABCD}}{2} + \frac{S_{ABCD}}{8} \right) = \frac{3S_{ABCD}}{8}$	0,5

			0,5
--	--	--	-----

( *Ghi chú : Nếu học sinh giải theo cách khác đúng thì cũng cho đủ điểm câu hỏi*

*đó)*

TRƯỜNG THCS NGHĨA ĐÔNG

ĐỀ THI KĐCL VÒNG 2 MÔN TOÁN 8

---

NĂM HỌC 2023-2024

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

---

**Câu 1: (4 điểm)** Cho biểu thức:  $P = \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm  $x$  để  $P = 7$ .

**Câu 2: (3 điểm)**

a) Tìm  $a$  nguyên để  $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$  chia hết cho  $a^2 + 3$ .

b) Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 11}$  với  $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{4}$ .

**Câu 3: (4 điểm)**

a) Cho  $x, y$  là số hữu tỷ khác 1 thỏa mãn  $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$ .

Chứng minh  $M = x^2 + y^2 - xy$  là bình phương của một số hữu tỷ

b) Tìm số nguyên tố  $p$  sao cho  $2p + 1$  là lập phương của một số tự nhiên.

**Câu 4: (7 điểm)**

Cho điểm  $M$  di động trên đoạn thẳng  $AB$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  vẽ các hình vuông  $AMCD$ ,  $BMEF$ .

a) Chứng minh rằng:  $AE \perp BC$ .

b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AE$  và  $BC$ . Chứng minh ba điểm  $D, H, F$  thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng đường thẳng  $DF$  luôn đi qua một điểm cố định khi điểm  $M$  di động trên đoạn thẳng  $AB$ .

**Câu 5: (2 điểm)**

a) Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh rằng nếu  $2n+1$  và  $3n+1$  là các số chính phương thì  $n$  chia hết cho 40.

b) Tìm các số nguyên  $x$  và  $y$  thỏa mãn  $x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2$ .

----- Hết -----

Họ và tên: ..... Số báo danh: .....

### HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
1a	<p>1. ĐKXĐ: <math>x \neq 1</math>.</p> <p>Ta có: <math>P = \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1}\right)</math></p> $= \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x^2 + 1)} - \frac{2x}{(x-1)(x^2 + 1)}\right)$	0.5đ 0.5đ

$$= \left( \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right) : \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x^2 + 1)} \right) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x-1)(x^2 + 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$$

0.5đ

Vậy với  $x \neq 1$  ta có  $P = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$ .

0.5đ

2. Với  $P = 7 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = 7$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 7(x-1).$$

**1b**

0.5đ

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (TM)} \\ x = 4 \text{ (TM)} \end{cases}$$

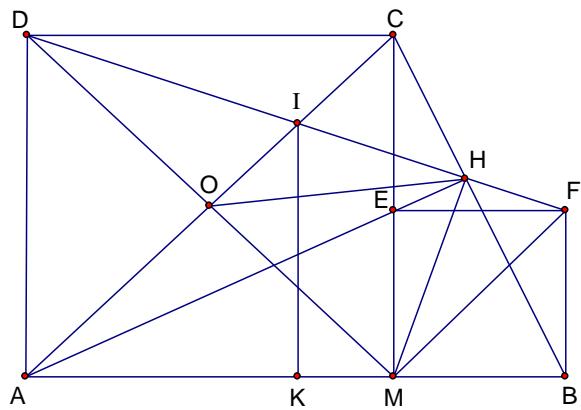
	Vậy $P = 7$ với $x \in \{2; 4\}$ .	1.0đ
		0.5đ
2a	<p>+ ) Thực hiện phép chia <math>a^3 - 2a^2 + 7a - 7</math> cho <math>a^2 + 3</math>, kết quả :</p> $a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$ <p>+ ) Lập luận để phép chia hết thì <math>4a - 1</math> phải chia hết cho <math>a^2 + 3</math></p> $(4a - 1):(a^2 + 3)$ $\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1):(a^2 + 3) \quad (\text{vì } a \in \mathbb{Z} \text{ nên } 4a + 1 \in \mathbb{Z})$ $\Rightarrow (16a^2 - 1):(a^2 + 3)$ $\Rightarrow [16(a^2 + 3) - 49]:(a^2 + 3)$ $\Rightarrow 49:(a^2 + 3)$ <p>+ ) Tìm <math>a</math>, thử lại và kết luận <math>a \in \{-2; 2\}</math></p>	0,25đ 0,25đ 0,25đ

		0,5đ
		0,25đ
	<p>Ta có <math>\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3x - 1</math></p> <p>Khi đó <math>x^3 = x^2 \cdot x = (3x - 1)x = 3x^2 - x = 3(3x - 1) - x = 8x - 3</math></p> <p><math>x^4 = x^3 \cdot x = (8x - 3)x = 8x^2 - 3x = 8(3x - 1) - 3x = 21x - 8</math></p> <p><math>x^5 = x^4 \cdot x = (21x - 8)x = 21x^2 - 8x = 21(3x - 1) - 8x = 55x - 21</math></p> <p>Suy ra <math>P = \frac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 11} = \frac{(55x - 21) - 4(8x - 3) - 17x + 9}{(21x - 8) + 3(3x - 1) + 2x + 11}</math></p> <p><b>2b</b></p> <p><math>= \frac{6x}{32x} = \frac{3}{16}</math> ( do <math>x \neq 0</math> ). Vậy <math>P = \frac{3}{16}</math>.</p>	0,5
		0,25

		0,5
	<p>Ta có <math>\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)</math></p> $\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy=1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y=\frac{3xy+1}{2}$	0,75đ
3a	<p>Ta có <math>M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy+1}{2}\right)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy-1}{2}\right)^2</math></p> <p>Vì <math>x, y \in Q</math> nên <math>\frac{3xy-1}{2}</math> là số hữu tỷ.</p> <p>Vậy <math>M</math> là bình phương của một số hữu tỷ</p>	0,75đ

	Đặt $2p + 1 = a^3$ ( $a \geq 0$ )	
	Vì $p$ là số nguyên tố và $2p + 1 = a^3 \Rightarrow a$ lẻ. Đặt $a = 2k + 1$ ( $k \in \mathbb{N}$ )	0.5đ
	Khi đó: $2p + 1 = (2k + 1)^3$	
	$\Leftrightarrow 2p = (2k + 1)^3 - 1$	
	$\Leftrightarrow 2p = 2k(4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1)$	0.5đ
<b>3b</b>	$\Leftrightarrow p = k(4k^2 + 6k + 3)$	
	$\Rightarrow \begin{cases} p : k \\ p : 4k^2 + 6k + 3 \end{cases}$	0.5đ
	Do $p$ là số nguyên tố, $k < 4k^2 + 6k + 3 \Rightarrow k = 1$	0.5đ
	Khi đó: $p = 13$ (là số nguyên tố)	
	Thử lại: $2 \cdot 13 + 1 = 27 = 3^3$	

Vậy số nguyên tố cần tìm là 13.



$$\DeltaAME = \DeltaCMB \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \angle EAM = \angle BCM$$

$$\text{Mà } \angle BCM + \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EAM + \angle MBC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$$

Vậy  $AE \perp BC$

0,5đ

		0,5đ
<b>4b</b>	<p>Gọi O là giao điểm của AC và BD.</p> <p><math>\Delta AHC</math> vuông tại H có HO là đường trung tuyến</p> $\Rightarrow HO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DM$ <p><math>\Rightarrow \Delta DHM</math> vuông tại H</p> $\Rightarrow \angle DHM = 90^\circ$	0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ

	<p>Chứng minh tương tự ta có: <math>\angle MHF = 90^\circ</math></p> <p>Suy ra: <math>\angle DHM + \angle MHF = 180^\circ</math></p> <p>Vậy ba điểm D, H, F thẳng hàng.</p>	0,5đ
4c	<p>Gọi I là giao điểm của AC và DF.</p> <p>Ta có: <math>\angle DMF = 90^\circ \Rightarrow MF \perp DM</math> mà <math>IO \perp DM \Rightarrow IO // MF</math></p> <p>Vì O là trung điểm của DM nên I là trung điểm của DF</p> <p>Kẻ IK <math>\perp AB</math> (<math>K \in AB</math>)</p> <p><math>\Rightarrow IK</math> là đường trung bình của hình thang ABFD</p> $\Rightarrow IK = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2}$ (không đổi)	0,5đ
	<p>Do A, B cố định nên K cố định, mà IK không đổi nên I cố định.</p>	0,5đ

	Vậy đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB	0,5đ
	a) Giả sử $2n+1 = m^2, 3n+1 = k^2 \quad (m, k \in N^*) \Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.  $\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) : 4$ , Suy ra : n chẵn, k lẻ  Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và $(3, 8) = 1$ nên	0,25đ 0,25đ
5	Từ $3n+1 = k^2 \Rightarrow 3n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) : 8 \Rightarrow n : 8$ (1)  Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:  Nếu n chia cho 5 dư 1 thì $2n + 1$ chia cho 5 dư 3. ( vô lí )  Nếu n chia cho 5 dư 2 thì $3n + 1$ chia cho 5 dư 2. ( vô lí )  Nếu n chia cho 5 dư 3 thì $2n + 1$ chia cho 5 dư 2. ( vô lí )  Nếu n chia cho 5 dư 4 thì $3n + 1$ chia cho 5 dư 3. ( vô lí )	0,25đ

	Vì $(5, 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.	0,25đ
b)	Ta có $x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = -y^2 + y + 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = (1 + y)(2 - y)$ Do $(x + y)^2 \geq 0, \forall x, y$ nên $(1 + y)(2 - y) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 2$ . Suy ra $y \in \{-1; 0; 1; 2\}$	0,25đ
	Với $y = -1$ , PT trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in Z$	0,25đ
	Với $y = 0$ , PT trở thành $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x \notin Z$	
	Với $y = 1$ , PT trở thành $x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x \notin Z$	
	Với $y = 2$ , PT trở thành $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in Z$ .	
	Vậy có 2 cặp $(x; y)$ thỏa mãn đê bài $(1; -1); (-2; 2)$ .	0,25đ

		0,25đ
--	--	-------

**ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI - THCS PHÚ ĐIÊN BẮC TỪ LIÊM**

**MÔN: TOÁN 8 -2023-2024**

*Thời gian làm bài 90 phút*

**Bài 1: (4 điểm)** Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left( \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)$

1) Rút gọn biểu thức P

2) Tìm x để  $P = \frac{-1}{2}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi  $x > 1$

**Bài 2: (3 điểm)** 1) Tìm x, y, z biết:  $5x^2 + 11y^2 + 28z^2 - 14xy - 16yz + 8zx - 20z + 5 = 0$

2) Giải phương trình:  $\frac{x-1}{2015} + \frac{x-2}{2014} + \frac{x-3}{2013} + \dots + \frac{x-2014}{2} + x = 4030$ .

**Bài 3: (4 điểm)** 1) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của:  $N = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

2) Chứng minh rằng, nếu:  $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \\ a + b + c = abc \end{cases}$  thì  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

**Bài 4: (1 điểm)** Chứng minh rằng: Trong  $n+1$  số tự nhiên bất kỳ  $a_1; a_2; \dots; a_n; a_{n+1}$  luôn tìm được hai số sao cho hiệu của chúng chia hết cho  $n$ .

**Bài 5: (8 điểm)** Cho hình vuông ABCD độ dài cạnh a ( $a > 0$ , a không đổi), M bất kì trên cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C vẽ hình vuông AMHN. Qua M kẻ đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E, AH cắt CD tại F.

- 1) Chứng minh  $BM = CN$
- 2) Chứng minh N, D, C thẳng hàng
- 3) Gọi O và K thứ tự là tâm của hình vuông AMHN và ABCD. Tứ giác EMFN là hình gì? Chứng minh đường thẳng OK đi qua B.
- 4) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M di động trên BC.

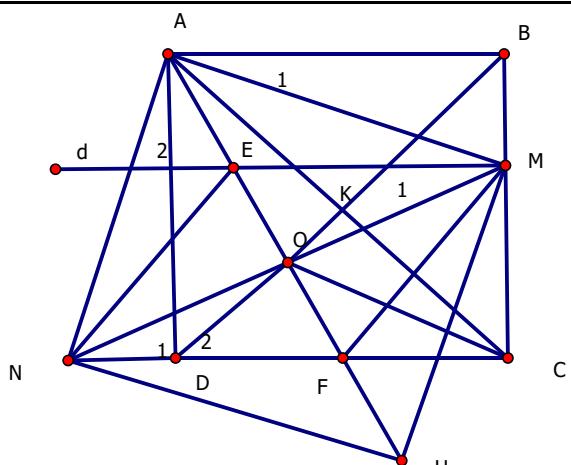
**ĐÁP ÁN**

BÀI	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
<b>1.1</b>	Điều kiện: $x \neq 0; x \neq \pm 1$	0,5
(2 đ)	$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left( \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)$ $= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{(x+1)(x-1) + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$ $= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)}$ $= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$	0,5
		0,5
		0,5
		0,5

<b>1.2</b> (1 đ)	$P = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$  $x = \frac{1}{2}$	0,5  0,5
<b>1.3</b> (1 đ)	$P = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$  Áp dụng bđt Cô si ta có $P \geq 4$  Min P = 4. Dấu bằng xảy ra khi x=2	0,5  0,5
<b>2.1</b> (1,5 đ)	$5(4z^2 - 4z + 1) + 5x^2 + 11y^2 + 8z^2 - 14xy - 16yz + 8zx = 0$ $\Leftrightarrow 5(2z-1)^2 + 3(x-y)^2 + 2(x-2y+2z)^2 = 0$ $Khi (x; y; z) = (1; 1; 1)$	0,5  0,5  0,5
<b>2.2</b> (1,5 đ)	Biến đổi thành $\frac{x-1}{2015} + \frac{x-2}{2014} + \dots + \frac{x-2014}{2} + \frac{x-2015}{1} - 2015 = 0$  $\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2015} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2014} - 1\right) + \dots + \left(\frac{x-2014}{2} - 1\right) + \left(\frac{x-2015}{1} - 1\right) = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow \frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2015} + \dots + \frac{x-2016}{2} + \frac{x-2016}{1} = 0$ $\Leftrightarrow (x-2016) \left( \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) = 0; \text{Do } \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \neq 0$ Nên $x - 2016 = 0 \Leftrightarrow x = 2016.$	0,5
		0,5
<b>3.1</b> (2 đ)	Khi đó ta có : $N = \left( \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \right) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ Vậy $\text{Min } N = \frac{1}{2}$ khi $x = -1$	0,5
	$N = \left( \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \right) + 1 + \frac{1}{2} = \frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} = \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$	0,5
	Vậy $\text{Max } N = \frac{3}{2}$ khi $x = 1$	0,5
		0,5

<b>3.2</b> (2 đ)	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 4$ $\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right) = 4$ $\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2.$	1  0,5  0,5
<b>4</b> (1đ)	<p>Chia một số bất kỳ cho <math>n</math> có thể nhận được một trong <math>n</math> số dư <math>0; 1; 2; \dots; n-2; n-1</math>. Có <math>n+1</math> số, có <math>n</math> số dư. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho <math>n</math>.</p> <p>Không mất tổng quát giả sử hai số đó là <math>a_p</math> và <math>a_q</math></p> <p><math>\left(p; q \in \{1; 2; \dots; n; n+1\}\right)</math> và <math>a_p &gt; a_q</math>. Ta có:</p> $a_p = n.k_p + r \quad (r \in N; 0 \leq r \leq n-1)$ $a_q = n.k_q + r$ <p>Khi đó <math>a_p - a_q = n.(k_p - k_q) : n</math>.</p>	0,5

	Đây chính là hai số có hiệu của chúng chia hết cho $n$ . Bài toán được chứng minh.	0,5
		0.5
5.1	$\angle A_1 = \angle A_2$ (cùng phụ $\angle DAM$ )	0.5
(1.5	$\Rightarrow \triangle DAN = \triangle BAM$ (g.c.g)	0.5
d)	$\Rightarrow BM = DN$	0.5
5.2	$\angle AND = \angle ABM = 90^\circ$	0.5
(1.5 d)	$\Rightarrow \angle D_1 + \angle ADC = 180^\circ$  $\Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng	0.5
		0.5

<b>5.3</b>	+ Vì $d \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \angle M_1 = \angle ONF$  (3 đ) $\Rightarrow \Delta OME \cong \Delta ONF (g.c.g) \Rightarrow EM = FN$  Vì AMHN là hình vuông $\Rightarrow AH$ là trung trực của MN  $\Rightarrow EM = EN, HM = HN$  $\Rightarrow EM = EN = HM = HN \Rightarrow MENF$ là hình thoi  + Vì $\triangle MCN$ vuông tại C có CO là trung tuyến thuộc cạnh huyền  $\Rightarrow OC = OM = ON \Rightarrow OC = OA$  mà $KA = KC \Rightarrow O, K$ thuộc trung trực AC  Lại có BD là trung trực của AC $\Rightarrow$ đường thẳng OK đi qua B,D	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
<b>5.4</b>	$FM = FN = FD + DN$	0.5

(1,5 đ)	$C_{CMF} = FM + CM + CF = FD + DN + CM + CF$ $= (CM + BM) + (FC + FD)$ $= CD + CB = a + a = 2a$ Không đổi khi M di động trên BC.	0.5 0.5
---------	--	------------

TRƯỜNG THCS QUẢNG THÁI

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN: TOÁN LỚP 8

(Thời gian làm bài: 150 phút)

**Đề bài**

Bài 1: ( 2 điểm)

Phân tích thành nhân tử

a.  $x^4 + x^3 - 4x - 4$

b.  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

**Bài 2: (2 điểm):** Cho biểu thức

$$A = \left( \frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left( x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

a, Tìm điều kiện của  $x$  để  $A$  xác định.

b, Rút gọn biểu thức  $A$ .

c, Tìm giá trị của  $x$  để  $A > 0$

**Bài 3: (5 điểm).**

a) Giải phương trình:  $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2 + 9x - 9}{(2x+1)(2x+7)} .$

b) Tìm  $x$  biết:  $6x^4 - 11x^3 + 3x^2 + 11x - 6x^2 - 3 = 0.$

c) Tìm các số nguyên  $x, y$  thoả mãn  $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0 .$

**Bài 4: (3 điểm).**

a) Cho  $abc \neq \pm 1$  và  $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$ . Chứng minh rằng  $a = b = c$ .

b) Đa thức  $f(x) = 4x^3 + ax + b$  chia hết cho các đa thức  $x-2; x+1$ . Tính  $2a-3b$ .

**Bài 5: (6,0 điểm)**

Cho hình thang ABCD ( $AB // CD, AB < CD$ ). Qua A vẽ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $BD$  ở E và cắt  $CD$  ở K. Qua B kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AC$  ở F và cắt  $CD$  ở I. Chứng minh rằng:

a)  $DK = CI$

b)  $EF // CD$

c)  $AB^2 = CD \cdot EF$

**Bài 6: ( 2điểm )** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x+y+z=3$ . Chứng minh

rằng:  $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$ .

.....Hết.....

### HÓA ĐỀ DẪN CHẤM TOÁN 8

BÀI	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> P <input type="checkbox"/> N	<input type="checkbox"/> I <input type="checkbox"/> M
<b>Bài 1</b> 2đ	<p>a) <math>x^4 + x^3 - 4x - 4 = x^3(x+1) - 4(x+1)</math></p> <p><math>= (x+1)(x^3 - 4)</math></p>	1,0
<b>Bài 2</b> 2đ	<p>b) <math>(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1</math></p> <p><math>= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1</math></p> <p><math>= [(x^2 + 5x + 5) - 1][(x^2 + 5x + 5) + 1] + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2</math></p>	1,0
<b>Bài 2</b> 2đ	a) $x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0$	0,25

	<p>b) <math>A = \left( \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \frac{6}{x+2}</math></p> $= \frac{x-2(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2}$ $= \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{1}{2-x}$	1,0
	<p>c) Để <math>A &gt; 0</math> thì <math>\frac{1}{2-x} &gt; 0 \Leftrightarrow 2-x &gt; 0 \Leftrightarrow x &lt; 2</math></p>	0,75
<b>Bài 3</b> <b>5đ</b>	<p>a) ĐK: <math>x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}</math></p>	

$$\begin{aligned}
 & \frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2 + 9x - 9}{(2x+7)(2x+1)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{4x^2 + 20x + 21 - 4x^2 - 12x - 5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2 + 16x + 7 - 6x^2 - 9x + 9}{(2x+7)(2x+1)} \\
 \Leftrightarrow & \frac{8x + 16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2 + 7x + 16}{(2x+7)(2x+1)} \\
 \Rightarrow & 8x + 16 = -2x^2 + 7x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = 0$

2,0

b) Ta có:  $6x^4 - 11x^3 + 3x^2 + 11x - 6x^2 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 6x^2(x^2 - 1) - 11x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(6x^2 - 11x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(3x-1)(2x-3) = 0$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \left\{ \pm 1; \frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}$ .

1,0

c) Ta có:  $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) = 41$$

	$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (x+y)^2 = 41$ <p>Vì <math>x, y \in Z</math>, <math>2x-1</math> là số nguyên lẻ và <math>41 = 5^2 + 4^2</math> nên <math>\begin{cases} (2x-1)^2 = 25 \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases}</math></p> $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = \pm 5 \\ x+y = \pm 4 \end{cases}$ <p>Từ đó suy ra các cặp <math>(x; y)</math> cần tìm là <math>(3; 1); (3; -7); (-2; 6); (-2; -2)</math>.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
--	--	--------------------------

a) Từ  $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ .

Do đó:

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc}; b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c - a}{ac}; c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$$

Suy ra:  $(a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2 b^2 c^2}$

$$\Leftrightarrow (a - b)(b - c)(c - a)(a^2 b^2 c^2 - 1) = 0$$

**Bài 4**

**3đ**

Suy ra  $a = b = c$

1,5

b) Đa thức  $f(x) = 4x^3 + ax + b$  chia hết cho các đa thức  $x-2; x+1$  nên:

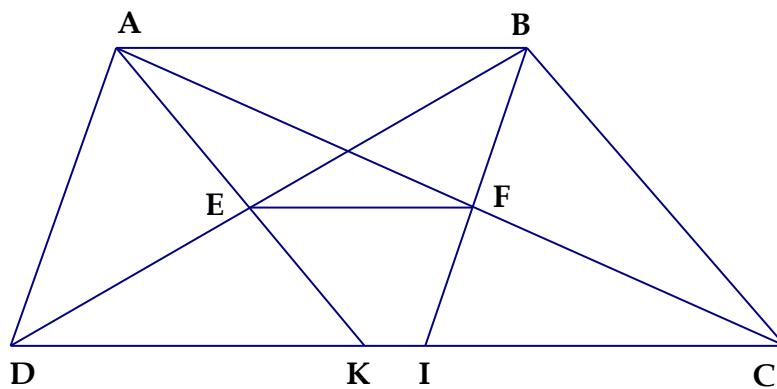
$$f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được  $a = -12; b = -8$

	Vậy $2a - 3b = 0$	
--	-------------------	--

1,5



**Bài 5**

a)

**6đ**

Tứ giác ABCK có:

$$AB \parallel CK \text{ (} AB \parallel CD, K \in CD\text{)}$$

$$AK \parallel BC \text{ (gt)}$$

$\Rightarrow$  ABCK là hình bình hành

$$\Rightarrow CK = AB$$

$$\Rightarrow DK = CD - CK = CD - AB \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có  $DI = AB$

$$\Rightarrow IC = CD - DI = CD - AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $DK = IC$

b)

$\triangle DEK$  có  $AB // DK$ , theo hệ quả định lý Ta-let ta có:

$$\frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK} \quad (3)$$

$\triangle FIC$  có  $AB // IC$ , theo hệ quả định lý Ta-let ta có:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC} \quad (4)$$

$$\text{Mà: } DK = IC \text{ (câu a)} \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5) suy ra: } \frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC}$$

2,0

$\Delta AKC$  có  $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF // KC$  (định lý Ta-lét đảo)

$\Rightarrow EF // CD$

c)

$$\text{Ta có: } \frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} \text{ (vì } AB = CK\text{)} \quad (6)$$

$\Delta BCD$  có  $EK // BC$ , theo định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} \quad (7)$$

$\Delta BDI$  có  $EF // DI$ , theo định lý Ta-let ta có:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{DI}$$

Mà  $DI = AB$

Suy ra:  $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB} \quad (8)$

Từ (6), (7), (8) suy ra:  $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$

2,0

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EF$$

2,0

Bài 6 2đ	<p>Đặt <math>P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}</math></p> $= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$ <p>Áp dụng BĐT <math>\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}</math> và <math>\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)</math> với <math>a, b, c</math> dương, dấu bằng xảy ra <math>\Leftrightarrow a = b = c</math>.</p> <p>Ta có <math>\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{z} + 1 \right)</math></p> <p>Bởi vậy</p> $\begin{aligned} P &= \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}. \text{(ĐPCM)} \end{aligned}$	

PHÒNG GD&ĐT YÊN ĐỊNH

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN

VĂN HÓA VÒNG I CẤP TỈNH

Môn thi: Toán Thời gian thi: 150 phút (*không kể thời*

*gian giao đề) năm 2023-2024*

Đề thi gồm: 01 trang

		2,0
--	--	-----

*Ghi chú: Học sinh làm cách khác đúng văn cho điểm tối đa*

Câu 1. (4 điểm)

a) Cho biểu thức  $M = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

Rút gọn  $M$  và Tìm  $a$  để  $M > 0$

b) Cho  $x + y + z = 1$  và  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ . Tính  $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$

Câu 2. (4 điểm)

a) Giải các phương trình sau:

$$(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

b) Cho  $x + y = 1$  và  $xy \neq 0$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2 + 3} = 0$$

Câu 3. (4 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  sao cho:  $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$

b) Cho  $a, b, c$  là các số nguyên khác 0,  $a \neq c$  sao cho  $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$ . Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 + c^2$

không phải là số nguyên tố.

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  nhọn, các đường cao  $AA', BB', CC', H$  là trực tâm.

a) Tính tổng  $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi  $AI$  là phân giác của tam giác  $ABC$ ;  $IM, IN$  thứ tự là phân giác của góc

$AIC$  và góc  $AIB$ . Chứng minh rằng:  $AN.BI.CM = BN.IC.AM$

c) Chứng minh rằng:  $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho  $a, b, c$  là ba số dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

## HỘNG ĐỘN CHỘM MỘN TỘN KHỔI 8

Câu	Đáp án	Biểu diễn
1	<p>a) Điều kiện: <math>a \neq 0; a \neq 1</math></p> <p>Ta có: <math>M = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{a^3+4a}{4a^2}</math></p> $\begin{aligned} &= \left[ \frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)} \\ &= \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\ &= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\ &= \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4} \end{aligned}$ <p>Để <math>M &gt; 0 \Leftrightarrow 4a &gt; 0 \Leftrightarrow a &gt; 0</math></p> <p>Kết hợp với điều kiện suy ra <math>M &gt; 0</math> khi <math>a &gt; 0</math> và <math>a \neq 1</math></p>	

b) Tù  $x + y + z = 1 \Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 1$

Mà  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x + y + z)^3 - z^3 - (x^3 + y^3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x + y + z - z) \left[ (x + y + z)^2 + (x + y + z)z + z^2 \right] - (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + xz + yz + z^2 + z^2 - x^2 + xy - y^2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x + y)(3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x + y)3(y + z)(x + z) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ x = -z \end{cases}
 \end{aligned}$$

\*Nếu  $x = -y \Rightarrow z = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

\*Nếu  $y = -z \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

\*Nếu  $x = -z \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

a) )  $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

Đặt  $y = x^2 + x$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$x^2 + x = -6$  vô nghiệm vì  $x^2 + x + 6 > 0$  với mọi  $x$

$$x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) - (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$$

b) Biến đổi  $\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)}$

$$= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} (do \quad x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ & } x - 1 = -y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-y)(x+y)(x^2 + y^2) - (x-y)}{xy(x^2y^2 + y^2x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)} \\
&= \frac{(x-y)(x^2 + y^2 - 1)}{xy[x^2y^2 + xy(x+y) + x^2 + y^2 + xy + 2]} \\
&= \frac{(x-y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2y^2 + (x+y)^2 + 2]} = \frac{(x-y)[x(x-1) + y(y-1)]}{xy(x^2y^2 + 3)} \\
&= \frac{(x-y)[x(-y) + y(-x)]}{xy(x^2y^2 + 3)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2 + 3)} \\
&= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2 + 3} \text{ Suy ra điều phải chứng minh}
\end{aligned}$$

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
3 &3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 - (x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1) = -41 \\
&\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 - (2x)^2 = 41 \\
&\Leftrightarrow (3x + y + 1)(y - x + 1) = 41
\end{aligned}$$

Đặt :  $3x + y + 1 = a$  và  $y - x + 1 = b$ . Suy ra  $a$  và  $b$  là các ước của 41, có tích bằng

41. Nhận thấy 41 là số nguyên tố, từ đó ta có các trường hợp như bảng sau:

$a$	-41	-1	1	41
$b$	-1	-41	41	1
$x = \frac{a-b}{4}$	-10	10	-10	10
$y = \frac{a+3b-4}{4}$	-12	-32	30	10

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là  $(-10; -12); (10; -32); (-10; 30); (10; 10)$

b) Ta có:  $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a-c)(b^2 - ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$

Mà

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b)$$

Ta thấy  $a^2 + b^2 + c^2 > 3$  do đó nếu  $a^2 + b^2 + c^2$  là các số nguyên tố thì xảy ra các

trường hợp sau:

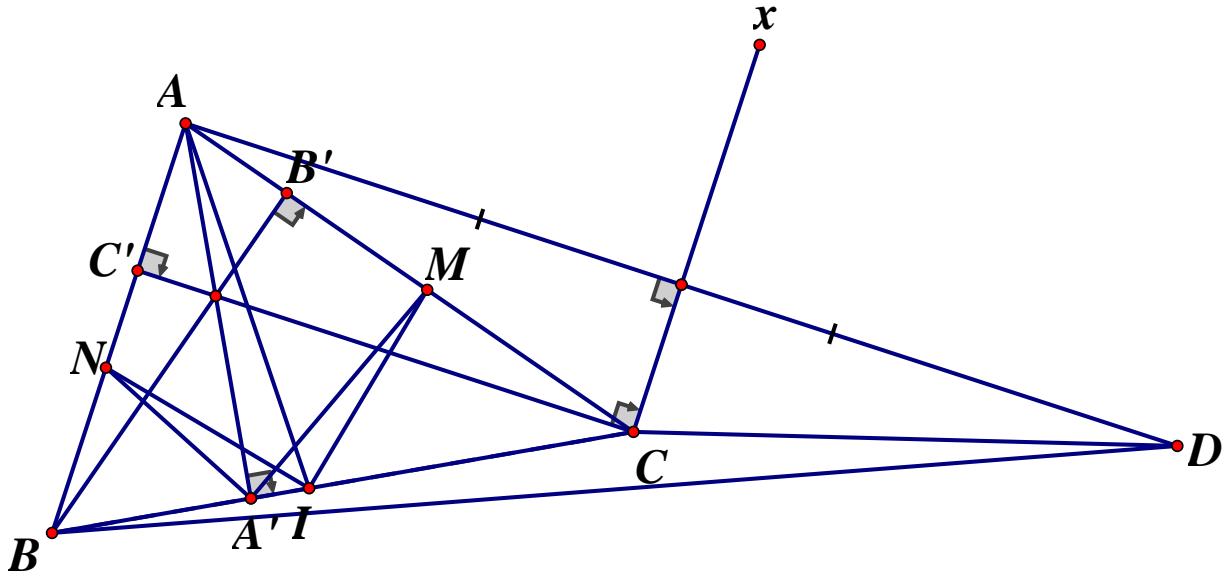
$$\begin{aligned}
 1) & a + c - b = 1; a + c + b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1 \\
 \Rightarrow & (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (ktm)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) & a + c + b = 1, a + c - b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1 \\
 \Rightarrow & (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (ktm)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) & a + c + b = -1, a + c - b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1 \\
 \Rightarrow & (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) & a + c - b = -1, a + c + b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1 \\
 \Rightarrow & (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)
 \end{aligned}$$

4



$$\text{a) } \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'}$$

Tương tự:  $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác  $ABC, ABI, AIC$ :

$$\begin{aligned}\frac{BI}{IC} &= \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI} \\ \Rightarrow \frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1 \\ \Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM &= BN \cdot IC \cdot AM\end{aligned}$$

c) Vẽ  $Cx \perp CC'$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $Cx$

Chứng minh được góc  $BAD$  vuông,  $CD = AC$ ,  $AD = 2 \cdot CC'$

Xét 3 điểm  $B, C, D$  ta có:  $BD \leq BC + CD$

$\Delta BAD$  vuông tại A nên:  $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow AB^2 + AD^2 &\leq (BC + CD)^2 \\ AB^2 + 4CC'^2 &\leq (BC + AC)^2 \\ 4CC'^2 &\leq (BC + AC)^2 - AB^2\end{aligned}$$

Tương tự:

$$4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$$

$$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

Chứng minh được:  $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + AC)^2}{AA'{}^2 + BB'{}^2 + CC'{}^2} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC \Leftrightarrow AB = AC = BC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $x, y, z > 0$  ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu " $=$ " xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

5

Thật vậy, với  $a, b \in \mathbb{R}$  và  $x, y > 0$  ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 y + b^2 x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu " $=$ " xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (\*\*) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu " $=$ " xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT (\*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$  nên  $\frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy  $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ . (đpcm)

### ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN HSG MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC 2023-2024

**Câu 1 (4,0 điểm).** Cho biểu thức:  $A = \frac{x^2+x+1}{1-x^3} + \left( \frac{x}{x^2-2x+1} + \frac{x}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}$ , với  $x \neq \pm 1$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho  $A \leq 1$ .

**Câu 2 (4 điểm).**

1) Giải phương trình:  $(2x^2 - 6x + 5)(2x - 3)^2 = 1$

2) Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn điều kiện:  $ab = 1, a + b \neq 0$ .

$$\text{Chứng minh rằng } A = \frac{1}{(a+b)^3} \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$= 1$$

**Câu 3(4 điểm).**

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $x^2 + 2xy - 3y^2 = x + 7y$ .

2) Cho  $x, y$  là các số nguyên sao cho  $x^2 - 2xy - y$  và  $xy - 2y^2 - x$  đều chia hết cho 5. Chứng minh

rằng  $2x^2 + y^2 + 2x + y$  cũng chia hết cho 5.

**Câu 4(6 điểm).** Trong mặt phẳng, cho hai điểm  $B, C$  cố định với  $BC = 2a (a > 0)$  và điểm

$A$  thay đổi sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ; đường

thẳng qua  $A$  vuông góc  $AM$  cắt các đường phân giác các góc  $AMB$  và  $AMC$  lần lượt

tại  $P$ ,  $Q$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $MP$  với  $AB$  và  $E$  là giao điểm của  $MQ$  với  $AC$ .

1) Giả sử  $AC = 2AB$ , tính số đo góc  $BQC$ .

2) Chứng minh rằng  $\frac{PD}{QE} = \left(\frac{MP}{MQ}\right)^3$ .

3) Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác  $ACQ$  và  $ABP$  theo  $a$ .

**Câu 5(2 điểm).** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn:  $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ ,  $y \geq 1$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{(x - 4xy + y)^2}$

## HƯỚNG DẪN CHẤM

<b>Câu 1</b> <b>(4đ)</b>	<p><b>1) Rút gọn A.</b></p> $  \begin{aligned}  A &= \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left( \frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} \\  &= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \left( \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}  \end{aligned}  $ $  = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} - \frac{1}{x-1}  $ $  = \frac{2x}{(x^2 + 1)(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x-1)} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)(x-1)}  $ $  = \frac{-(x-1)^2}{(x^2 + 1)(x-1)} = \frac{1-x}{x^2 + 1}. \text{ Vậy: } A = \frac{1-x}{x^2 + 1} \quad (\text{với } x \neq \pm 1).  $	0,5 0,5 0,5 0,5
	<p><b>2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho <math>A \leq 1</math>.</b></p> $  \begin{aligned}  A \leq 1 &\Leftrightarrow A - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^2 + 1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x+x^2)}{x^2 + 1} \leq 0 \\  &\Leftrightarrow x^2 + x \geq 0 \quad (\text{vì } x^2 + 1 > 0 \ \forall x)  \end{aligned}  $	0,5 0,5

	$\Leftrightarrow x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$  Kết hợp với ĐKXĐ ta được: $A \leq 1 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x \geq 0, x \neq 1$ .	0,5
Câu 2 (4đ)	<p>1) Giải các phương trình <math>(2x^2 - 6x + 5)(2x - 3)^2 = 1</math></p> <p>Phương trình đã cho tương đương với</p> $(4x^2 - 12x + 10)(2x - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow [(2x - 3)^2 + 1](2x - 3)^2 = 2$ <p>Đặt <math>t = (2x - 3)^2</math> (<math>t \geq 0</math>) ta được:</p> $t(t + 1) = 2 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \text{ (loai)} \end{cases}$ <p>Với <math>t = 1 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}</math></p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: <math>S = \{1; 2\}</math></p>	0.75 0.5 0.5

0.25

2. Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn điều kiện:  $ab = 1, a + b \neq 0$ .

$$\text{Cmr: } A = \frac{1}{(a+b)^3} \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1$$

với  $ab = 1, a + b \neq 0$

$$A = \frac{1}{(a+b)^3} \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3 (ab)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4 (ab)^2} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5 (ab)}$$

$$= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+b)^2} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^5}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a+b)^2 + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a^2 + b^2 + 2) + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 + b^2) + 4}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + 2)^2}{(a+b)^4}$$

0.25

0.25

0.25

$$= \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)^2}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{[(a+b)^2]^2}{(a+b)^4}$$

$$= 1$$

Vậy  $A = 1$ , với  $ab = 1, a + b \neq 0$

0.25

0.25

0.25

0.25

0.25

Câu 3I

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $x^2 + 2xy - 3y^2 = x + 7y \dots (1)$

(4d)	$(1) \Leftrightarrow x^2 + (2y-1)x - 3y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left[ x + \frac{2y-1}{2} \right]^2 - \left[ 3y^2 + 7y + \frac{(2y-1)^2}{4} \right] = 0$ $\Leftrightarrow (2x+2y-1)^2 - (4y+3)^2 = -8 \Leftrightarrow (2x-2y-4)(2x+6y+2) = -8 \Leftrightarrow (x-y-2)(x+3y+1) = -2.$	0,5
	Vì $x, y$ là các số nguyên nên $x-y-2, x+3y+1$ là các ước nguyên của 2 và có tích bằng -2. Ta có các trường hợp:	0,5
	Trường hợp 1: $\begin{cases} x+3y+1=1 \\ x-y-2=-2 \end{cases}$ . Giải ra được: $(x, y) = (0, 0)$ .	
	Trường hợp 2: $\begin{cases} x+3y+1=2 \\ x-y-2=-1 \end{cases}$ . Giải ra được: $(x, y) = (1, 0)$ .	0,75
	Trường hợp 3: $\begin{cases} x+3y+1=-1 \\ x-y-2=2 \end{cases}$ . Không tồn tại $x, y$ nguyên.	
	Trường hợp 4: $\begin{cases} x+3y+1=-2 \\ x-y-2=1 \end{cases}$ . Không tồn tại $x, y$ nguyên.	
	Vậy có hai cặp số nguyên $(x, y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(0, 0)$ và $(1, 0)$ .	
	2) Cho $x, y$ là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.	

<p>Đặt <math>a = x^2 - 2xy - y, b = xy - 2y^2 - x, c = 2x^2 + y^2 + 2x + y</math>.</p> <p>Ta có</p> $a - b = (x - y)(x - 2y + 1).$ <p>Do <math>a</math> và <math>b</math> chia hết cho 5 nên <math>a - b</math> chia hết cho 5.</p> <p>Suy ra <math>x - y \vdots 5</math> hoặc <math>x - 2y + 1 \vdots 5</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Trường hợp 1:</b> Nếu <math>x - y \vdots 5</math> thì <math>x \equiv y \pmod{5}</math>. Khi đó</li> </ul> $a \equiv x^2 - 2x^2 - x = -(x^2 + x) \pmod{5};$ $c \equiv 2x^2 + x^2 + 2x + x = 3(x^2 + x) \pmod{5}.$ <p>Do <math>a \vdots 5</math> nên <math>x^2 + x \vdots 5</math> hay <math>c \vdots 5</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Trường hợp 2:</b> Nếu <math>x - 2y + 1 \vdots 5</math> thì <math>x \equiv 2y - 1 \pmod{5}</math>. Khi đó</li> </ul> $a \equiv (2y - 1)^2 - 2(2y - 1)y - y = -3y + 1 \pmod{5};$ $c \equiv 2(2y - 1)^2 + y^2 + 2(2y - 1) + y \equiv 9y^2 - 3y \equiv 3y(3y - 1) \pmod{5}.$	0.25 0.25 0.25 0.5 0.5
---	------------------------------------

	Do $a:5$ nên $3y - 1:5$ hay $c:5$ . (Đpcm)	0.25
Câu 4 (6,0đ)	<p>1) <u>Giả sử <math>AC = 2AB</math>, tính số đo góc <math>BQC</math>.</u></p> <p>Ta có <math>MA = MC</math> và <math>ME</math> là phân giác của góc <math>AMC</math> nên <math>ME</math> là đường trung trực của đoạn <math>AC \Rightarrow QA = QC</math> và <math>QEC = 90^\circ</math></p>	1.0 0.5

vì  $MQ$  là đường trung trực của đoạn  $AC$  và  $AM \perp AQ$  nên  $MC \perp QC$

0.5

Xét hai tam giác vuông  $ABC$  và  $ECQ$

có  $ACB = EQC$  (cùng phụ góc  $QCE$ ) và  $AB = EC$  (vì  $2EC = AC = 2AB$ )

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ECQ \Rightarrow CQ = CB$  hay tam giác  $BCQ$  vuông cân tại  $C$ ,

do đó  $BQC = 45^\circ$

**2) Chứng minh rằng**

$$\frac{PD}{QE} = \left( \frac{MP}{MQ} \right)^3.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{PD}{QE} = \left( \frac{MP}{MQ} \right)^3.$$

0.5

Ta có  $MP, MQ$  là các đường phân giác của các góc  $AMB$  và  $AMC$

0.5

nên  $MP \perp MQ$

0.5

Tương tự chứng minh câu a ta được  $AD \perp MP, AE \perp MQ$

Suy ra tam giác vuông  $APM$  đồng dạng tam giác vuông  $DPA$

$$\Rightarrow PD \cdot PM = PA^2 \quad (1)$$

0.5

Tương tự, ta có  $QE \cdot QM = QA^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{PD}{QE} = \frac{QM \cdot PA^2}{PM \cdot QA^2} \quad (3)$

Tương tự, lại có :  $PA \cdot PQ = PM^2 \quad (4)$  và  $QA \cdot QP = QM^2 \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra  $\frac{PA}{QA} = \frac{PM^2}{QM^2} \quad (6)$

Từ (3) và (6) suy ra  $\frac{PD}{QE} = \left( \frac{MP}{MQ} \right)^3 \quad (DPCM)$

**3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP theo a.**

Vì  $MQ$  là trung trực của đoạn  $AC$  và  $MP$  là trung trực của đoạn  $AB$

0.5

suy ra  $CQ = QA, BP = AP$  và  $BCQP$  là hình thang vuông

0.5

	<p>Do đó <math>S_{BCQP} = \frac{(BP+CQ).BC}{2} = \frac{PQ.BC}{2} \geq \frac{BC^2}{2} = 2a^2</math> (*)</p> <p>Kẻ <math>AH</math> vuông góc <math>BC</math> thì <math>S_{ABC} = \frac{AH.BC}{2} \leq \frac{AM.BC}{2} = a^2</math> (**)</p> <p>Từ (*) và (**) suy ra <math>S_{ABP} + S_{ACQ} = S_{BCQP} - S_{ABC} \geq 2a^2 - a^2 = a^2</math>.</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi <math>H \equiv M</math>, khi đó khi tam giác <math>ABC</math> vuông cân tại A.</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác <math>ACQ</math> và <math>ABP</math> là <math>a^2</math> khi tam giác <math>ABC</math> vuông cân tại A.</p>	0.25 0.5
Câu 5 (2,0đ)	<p><b>Câu 5 (2 điểm):</b> Cho <math>x, y</math> là các số thực dương thỏa mãn: <math>\frac{1}{3} &lt; x \leq \frac{1}{2}</math>, <math>y \geq 1</math>.</p> <p><b>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:</b> <math>A = x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{(x-4xy+y)^2}</math>.</p> <p>Ta có: <math>A = x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{(x-4xy+y)^2} = x^2 + y^2 + \frac{1}{\left[4 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right]^2}</math></p>	0.5

	<p>Đặt <math>\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b</math>. Do <math>\frac{1}{3} &lt; x \leq \frac{1}{2}, y \geq 1 \Rightarrow 2 \leq a &lt; 3; b \leq 1</math>, ta có:</p> $A = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{[4-(a+b)]^2}$ <p>vì <math>2 \leq a &lt; 3; 0 &lt; b \leq 1 \Rightarrow 4 - (a+b) &gt; 0</math></p> <p>Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:</p> $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{[4-(a+b)]^2} \geq \frac{2}{b[4-(a+b)]} \geq \frac{8}{(4-a)^2}$ $\Rightarrow A \geq \frac{1}{a^2} + \frac{8}{(4-a)^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{8}{(4-a)^2} - \frac{7}{a^2} \geq \frac{16}{a(4-a)} - \frac{7}{a^2} \geq \frac{64}{(a+4-a)} - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$ <p>xảy ra khi <math>a = 2; b = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = 1</math></p> <p>vậy <math>\text{Min}A = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = 1</math></p>	0.25 0.75 0.25 0.25
--	---	------------------------------

UBND HUYỆN BÁ THƯỚC

ĐỀ GIAO LUU HSG CẤP HUYỆN

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NĂM HỌC: 2023-2024

MÔN: Toán lớp 8

THỜI GIAN LÀM BÀI: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Câu I: (4 điểm)

1) Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

2) Cho các số a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thoả mãn:

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2023. \text{ Tính } M = c^2(a+b)$$

Câu II: ( 4 điểm)

1) Tìm x biết:  $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$

2) Tìm a, b đôi một khác nhau thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 2023 = 0; \quad b^3 - 3b^2 + 5b + 2017 = 0 \quad \text{và } a - b = 4$$

Câu III: ( 4 điểm)

1) Tìm x, y nguyên thoả mãn:  $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$

2) Cho ba số nguyên x, y, z thoả mãn  $x^2 + y^2 = 2z^2$ . Chứng minh rằng  $x^2 - y^2$  chia hết cho 48.

Câu IV: ( 6 điểm)

Cho  $\Delta ABC$  vuông tại A, có  $ABC = 75^\circ$ , trên cạnh AC lấy 2 điểm E và P sao cho  $AEB = EBP = PBC$ .

Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ C xuống đường thẳng BP, đường thẳng CI cắt BE ở F

1, Chứng minh:  $\Delta ECF$  cân

2, Trên tia đối tia EB lấy điểm K sao cho  $EK = BC$ , tính số đo các góc của  $\Delta BCK$

3, Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên BK, D là trung điểm của đoạn CH, L là hình chiếu vuông góc

của H trên BD. Chứng minh KL vuông góc với LC

Câu V: ( 2 điểm)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thoả mãn  $x + y + z = 0$  và  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ . Tìm giá trị lớn

nhất của  $A = x^{24} + y^{12} + z^{2024}$

### ĐÁP ÁN

Câu I:

1) a)  $A = \left( \frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$  ĐK:  $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$

$$A = \left[ \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{2}{x+1} \right] : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$$

$$A = \left[ \frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \right] : \frac{x^2(x-2)}{x(x^2-x+1)}$$

$$A = \left[ \frac{x+1+x+1-2x^2+2x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \right] : \frac{x(x-2)}{x^2-x+1}$$

$$A = \frac{-2x^2+4x}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$$

$$A = \frac{-2x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} = \frac{-2}{x+1}$$

Vậy  $A = \frac{-2}{x+1}$  với  $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$

b) Ta có:  $A = \frac{-2}{x+1}$  với  $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$

Vì x nguyên  $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$  nên  $x+1$  nguyên và  $x+1$  khác 0.

Để A có giá trị nguyên khi  $x+1$  là ước của 2.

Mà ước của 2 là -1; 1; -2; 2.

$$x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (không thoả mãn)}$$

$$x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thoả mãn)}$$

$$x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thoả mãn)}$$

$$x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy A nguyên khi  $x \in \{-3; -2; 1\}$

2) Ta có:  $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2023$ .

$$\Leftrightarrow a^2b - ab^2 + ca^2 - cb^2 = 0 \Leftrightarrow ab(a-b) + c(a-b)(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(ab + bc + ac) = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 0 \text{ (vì a khác b)}$$

Lại có:  $c^2(a+b) - a^2(b+c) = ac^2 - a^2c + bc^2 - a^2b = ac(c-a) + b(c-a)(c+a)$

$$= (c-a)(ac + bc + ab) = 0$$

Do  $ab + bc + ca = 0$

Vậy với a, b, c thoả mãn yêu cầu đề bài thì M = 2023

Câu II:

1) Ta có:  $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+3) \left[ \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy  $x \in \{-3; 2\}$

2) Từ các điều kiện đã cho ta có

$$(a-1)^3 + 2(a-1) - 2020 = 0(1), (b-1)^3 + 2(b-1) + 2020 = 0(2)$$

Cộng tương ứng với vế của (1) và (2) ta có:

$$(a-1)^3 + (b-1)^3 + 2(a+b-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2) \left[ (a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 \right] + 2(a+b-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2) \left[ (a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2 \right] = 0$$

$$\text{Vì } (a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2 = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 + 2 > 0, \forall a, b$$

$$\text{Nên } a+b-2 = 0 \Leftrightarrow a+b = 2 \quad (*)$$

$$\text{Lại có: } a-b = 4 \quad (**) \quad (*)$$

Từ (\*) và (\*\*) tìm được  $a=3$  và  $b=-1$

Thử lại ta thấy  $a=3$  và  $b=-1$  không thoả mãn

Vậy không tồn tại giá trị  $a, b$  thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu III:

1) Ta có:  $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 = 85 - (y - 2x^2)^2$$

Lập luận  $x^4 \leq 85 < 4^4$ . Mà  $x \in \mathbb{Z}$  suy ra  $x^4 \in \{0^4; 1^4; 2^4; 3^4\}$

$x^4 = 0^4$  thì  $y^2 = 85$  (loại)

$x^4 = 1^4$  thì  $(y - 2)^2 = 84$  (loại)

$x^4 = 2^4$  thì  $(y - 8)^2 = 69$  (loại)

$$x^4 = 3^4 \text{ thì } (y - 18)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 18 = 2 \\ y - 18 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ y = 16 \end{cases}$$

Khi đó:  $\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy có 4 cặp  $(x; y)$  là:  $(3; 20); (-3; 20); (3; 16); (-3; 16)$

2) Vì  $x^2 + y^2 = 2z^2$  nên  $x, y$  cùng tính chẵn lẻ.

Suy ra:  $x + y; x - y$  cùng chẵn.

Đặt  $x + y = 2m, x - y = 2n \quad (m, n \in \mathbb{N}^*, m > n)$

$$\Rightarrow 2z^2 = (m+n)^2 + (m-n)^2 = 2(m^2 + n^2) \Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$$

Nếu  $m$  và  $n$  cùng không chia hết cho 4 thì  $m^2 + n^2$  chia cho 4 dư 2

$\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$  chia cho 4 dư 2. Vô lí.

Suy ra  $m$  hoặc  $n$  chia hết cho 4  $\Rightarrow mn:4$  (1)

Nếu  $m$  và  $n$  cùng không chia hết cho 3 thì  $m^2 + n^2$  chia cho 3 dư 2

$\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$  chia cho 3 dư 2. Vô lí.

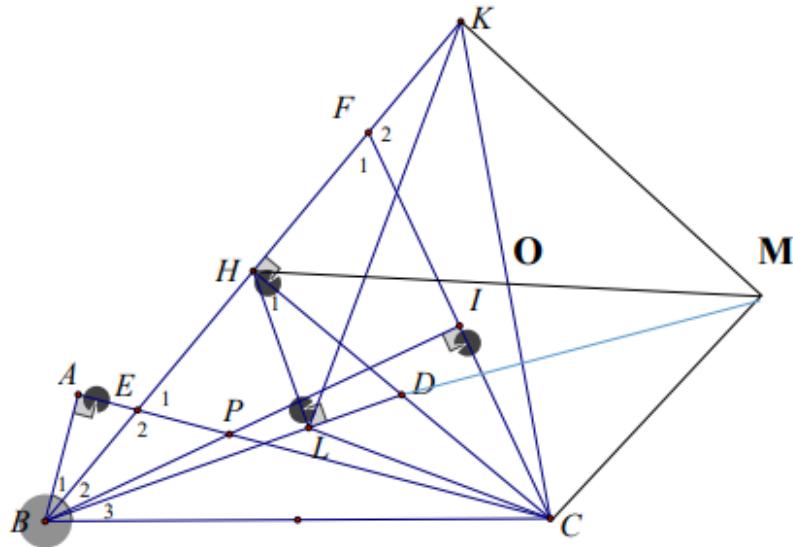
Suy ra  $m$  hoặc  $n$  chia hết cho 3  $\Rightarrow mn:3$  (2)

Vì  $(3, 4) = 1$  nên từ (1), (2)  $\Rightarrow mn:12$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 4mn : 48$$

Vậy  $x^2 - y^2 : 48$

Câu IV:



1) Vì  $\angle ABE = \angle EBP = \angle PBC = \frac{\angle ABC}{3} = 25^\circ \Rightarrow \angle EBP = \angle PBC \Rightarrow BI$  là phân giác, mà  $BI \perp FC$

Nên  $\triangle BFC$  có  $BI$  vừa là phân giác vừa là đường cao

$\Rightarrow \triangle BFC$  là tam giác cân tại B

$$\Rightarrow F_1 = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ = E_1 \Rightarrow \triangle ECF \text{ cân tại } C$$

2)  $\triangle BFC$  có  $BI$  vừa là đường cao vừa là tia phân giác

$$\Rightarrow BC = BF \text{ mà } BC = EK \Rightarrow BF = EK \Rightarrow BE + EF = EF + FK \Rightarrow BE = FK$$

Mà  $\hat{E}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{F}_2 \Rightarrow \triangle BEC = \triangle KFC(c.g.c)$

$\Rightarrow BC = CK \Rightarrow \triangle BCK$  là tam giác cân tại C

$$\Rightarrow \angle CBK = 50^\circ = \angle CKB, \text{ vậy } \angle BCK = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

### 3) Vẽ hình chữ nhật CHKM

Chứng minh : BCMH là hình bình hành (vì có CM // BH và CM = BH do H là trung điểm BK, bởi tam giác

BCK cân tại C)

suy ra L, D, M thẳng hàng

$$\Rightarrow LO = \frac{1}{2} HM = \frac{1}{2} CK \text{ (HM = CK, tính chất hình chữ nhật)}$$

Suy ra tam giác CLK vuông tại L

Câu V:

+ ) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử x; y ≥ 0

$$\Rightarrow z = -x - y \leq 0 \text{ (do } x + y + z = 0\text{)}$$

+ ) Vì  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

$$\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq -2z$$

$$+ ) -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi z = -1 và x + y = 1

Vậy Max A = 2 khi một số bằng – 1 và tổng hai số còn lại bằng 1

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI OLYMPIC 27/4 NĂM HỌC 2023-2024**

**THỊ XÃ PHÚ MỸ**

**MÔN: TOÁN LỚP 8**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Thời gian làm bài: 120 phút**

**Ngày thi: 21 tháng 02 năm 2024**

**Bài 1 (5,0 điểm):**

a) Cho  $x + \frac{1}{x} = 3$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

b) Phân tích đa thức  $x^3 - x^2 - 4$  thành nhân tử.

c) Xác định các số hữu tỷ p và q để đa thức  $x^3 + px + q$  chia hết cho đa thức

$$x^2 - 2x - 3$$

**Bài 2 (2,5 điểm):** Cho biểu thức  $C = \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$

a) Rút gọn biểu thức C.

b) Tính giá trị của biểu thức C khi  $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

**Bài 3 (3,0 điểm):**

a) Giải phương trình:  $\frac{x-2022}{1} + \frac{x-2021}{2} + \frac{x-2020}{3} + \dots + \frac{x-1}{2022} + \frac{x}{2023} = 2023$ .

b) Tìm các cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn đẳng thức  $2xy - x + y = 3$ .

**Bài 4 (3,0 điểm):**

a) Chứng minh rằng  $n(n^2 + 11)$  chia hết cho 6 với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

b) Trong 43 học sinh làm bài kiểm tra, không có học sinh nào bị điểm dưới 2, chỉ

có 2 học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm

kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

c) Cho  $x, y$  là hai số thực thỏa mãn  $x + y + 4 = 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$ .

**Bài 5 (5,0 điểm):**

Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGK. Chứng minh rằng:

- a)  $AK = BC$ .
- b)  $AK \perp BC$ .
- c) Các đường thẳng KA, BF, CD đồng quy.

**Bài 6 (1,5 điểm):**

Trên đường thẳng cho các điểm A, B, C, D xếp theo thứ tự đó và  $AB = CD$ . Cho M là điểm bất kì không nằm trên đường thẳng AB. Chứng minh rằng:  $MA + MD > MB + MC$ .

—Hết—

*Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh ..... Số báo danh .....

Chữ ký của giám thị 1 .....

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI OLYMPIC 27/4 NĂM HỌC 2022-2023

THỊ XÃ PHÚ MỸ

MÔN: TOÁN LỚP 8

Ngày thi: 21 tháng 02 năm 2023

### HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 8

#### I. Hướng dẫn chung:

1) *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với các ý cơ bản học sinh phải trình bày,*

*nếu học sinh giải theo cách khác mà đúng và đủ các bước thì vẫn cho điểm tối đa.*

2) *Điểm toàn bài là tổng điểm của các ý, các câu và không làm tròn.*

#### II. Đáp án và thang điểm:

Bài	Câu	Nội dung trình bày	Điểm
-----	-----	--------------------	------

**Bài 1 (5,0 điểm):**

a) Cho  $x + \frac{1}{x} = 3$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) Phân tích đa thức  $x^3 - x^2 - 4$  thành nhân tử.

c) Xác định các số hữu tỷ  $p$  và  $q$  để đa thức  $x^3 + px + q$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 2x - 3$

1. (5.0đ)	a)  (1.5đ)	$A = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 3^2 - 2 = 7$	0,5x3
	b)	$x^3 - x^2 - 4 = (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4)$	1,0
	(2.0đ)	$= x^2(x - 2) + x(x - 2) + 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$	0,5x2
	c)	$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$	0,5

	<p><b>(1.5đ)</b> Gọi thương khi chia <math>x^3 + px + q</math> cho <math>x^2 - 2x - 3</math> là <math>Q(x)</math>. Do dư 0 nên ta có:</p> $x^3 + px + q = (x^2 - 2x - 3)Q(x)$ <p>Hay <math>x^3 + px + q = (x - 3)(x + 1)Q(x)</math></p>	0,25
	<p>Vì đẳng thức đúng với mọi <math>x</math> nên lần lượt cho <math>x = 3, x = -1</math> ta được:</p> $\begin{cases} 27 + 3p + q = 0 \\ -1 - p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p + q = -27 \\ -p + q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ q = -6 \end{cases}$ <p>Vậy với <math>p = -7; q = -6</math> thì <math>x^3 + px + q</math> chia hết cho <math>x^2 - 2x - 3</math></p>	0,75
	<p><b>Bài 2 (2,5 điểm):</b> Cho biểu thức <math>C = \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}</math></p> <p>a) Rút gọn biểu thức C.</p> <p>b) Tính giá trị của biểu thức C khi <math>\left( x - \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}</math></p>	

	ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$	0,25
a)  (1.5đ)	$  \begin{aligned}  C &= \left( \frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \\  &= \left( \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} - x \right) : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\  &= (1+x^2) : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\  &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} \\  &= (1+x^2)(1-x)  \end{aligned}  $	1.25
2.  (2.5đ)	Ta có $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x - \frac{2}{3} = \pm \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (KTMĐK)} \\ x = \frac{1}{3} \text{ (TMĐK)} \end{cases}$	0,25
b)  (1.0đ)	<p>Với <math>x = \frac{1}{3}</math>, ta có:</p> $C = \left[ 1 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right] \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$	0,25x2
	Vậy khi $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ thì $C = \frac{20}{27}$	0,25

**Bài 3 (3,0 điểm):**

a) Giải phương trình:

$$\frac{x-2022}{1} + \frac{x-2021}{2} + \frac{x-2020}{3} + \dots + \frac{x-1}{2022} + \frac{x}{2023} = 2023$$

b) Tìm các cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn đẳng thức  $2xy - x + y = 3$ .

<b>Bài 3 (3.0đ)</b>	<b>a) (1,5đ)</b>	$\frac{x-2022}{1} + \frac{x-2021}{2} + \frac{x-2020}{3} + \dots + \frac{x-1}{2022} + \frac{x}{2023} = 2023$ $\Leftrightarrow \left( \frac{x-2022}{1} - 1 \right) + \left( \frac{x-2021}{2} - 1 \right) + \dots + \left( \frac{x-1}{2022} - 1 \right) + \left( \frac{x}{2023} - 1 \right) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \frac{x-2023}{1} + \frac{x-2023}{2} + \dots + \frac{x-2023}{2022} + \frac{x-2023}{2023} = 0$ $\Leftrightarrow (x-2023) \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) = 0$	0,5
		mà $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \neq 0$ $\Leftrightarrow x - 2023 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2023$	0,25x2

	Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{2023\}$	
	$2xy - x + y = 3$ $\Leftrightarrow 4xy - 2x + 2y = 6$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x(2y - 1) + (2y - 1) = 5$ $\Leftrightarrow (2y - 1)(2x + 1) = 5$	0,25x2
b)  (1,5đ)	$\left  \begin{array}{l} 2x+1=5 \\ 2y-1=1 \end{array} \right.$ (Vì $x$ nguyên dương nên $2x + 1 \geq 3$ )  $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$	0,25x2
	Vậy cặp số nguyên dương $(x; y) = (2; 1)$	0,25

**Bài 4 (3,0 điểm):**

a) Chứng minh rằng  $n(n^2 + 11)$  chia hết cho 6 với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

b) Trong 43 học sinh làm bài kiểm tra, không có học sinh nào bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học

sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau

(điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

c) Cho  $x, y$  là hai số thực thỏa mãn  $x+y+4=0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy.$$

		Ta có $n(n^2 + 11) = n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = n(n-1)(n+1) + 12n$	0,5
	a)	Vì $n(n-1)(n+1) \vdots 6$ và $12n \vdots 6$	0,25
4.	(1.0đ)	Nên $n(n-1)(n+1) + 12n \vdots 6$ hay $n(n^2 + 11) \vdots 6$	0,25
	(3.0đ)	Vì có 43 học sinh làm bài kiểm tra, không có học sinh nào bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh đạt điểm 10.	0,5
	b)	Nên có 41 học sinh phân thành 8 loại điểm (từ 2 đến 9)	
	(1.0đ)	Giả sử trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp có:	0,25

	5.8 = 40 học sinh, ít hơn 1 học sinh so với 41.	
	Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau	0,25
c) (1.0đ)	$  \begin{aligned}  P &= 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy \\  &= 2(x+y)^3 - 6xy(x+y) + 3(x+y)^2 - 6xy + 10xy \\  &= 2(-4)^3 - 6xy(-4) + 3(-4)^2 + 4xy \\  &= 28xy - 80 = 28x(-4-x) - 80 \\  &= -28(x^2 + 4x + 4) + 32 = -28(x+2)^2 + 32  \end{aligned}  $	0,5
	Vì $P = -28(x+2)^2 + 32 \leq 32$ Nên GTLN của $P$ là 32, đạt được khi $x = y = -2$	0,5

**Bài 5 (5,0 điểm):**

Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGK. Chứng minh rằng:

a)  $AK = BC$

b)  $AK \perp BC$

c) Các đường thẳng  $KA, BF, CD$  đồng qui.

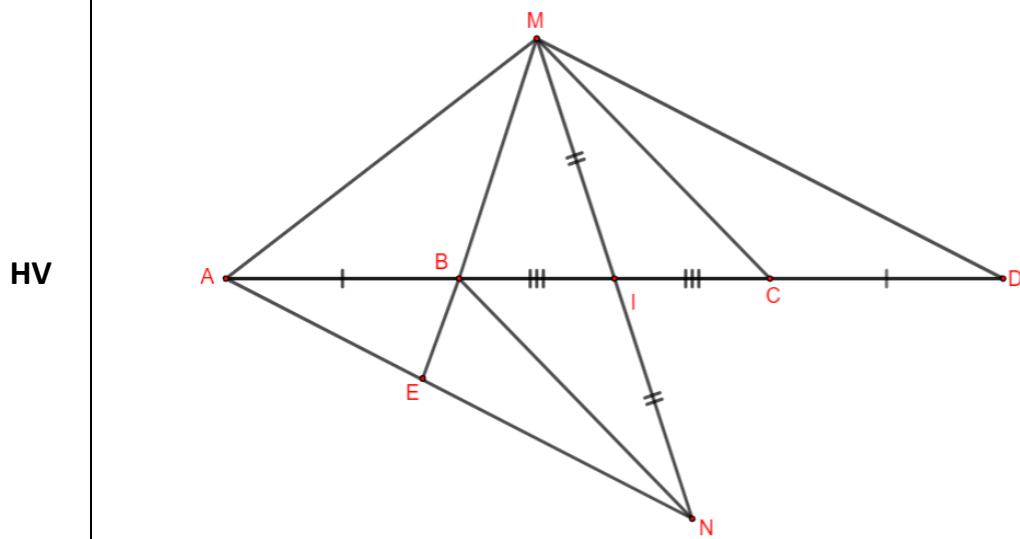
5. (5,0đ)		
a) (2,0đ)	<p><b>Chứng minh: <math>AK = BC</math></b></p> <p>Xét <math>\angle AEK</math> và <math>\angle BAC</math>, có:</p> <p><math>EA = AB</math> (gt); <math>EK = AC</math> (<math>=AG</math>)</p> <p><math>AEK = BAC</math> (vì cùng bù với <math>EAG</math>)</p>	0,75

	<p><math>\angle AEK = \angle BAC</math> (c.g.c)</p>	0,75
	<p>  <math>AK = BC</math> (hai cạnh tương ứng) (đpcm)</p>	0,5
	<p><b>Chứng minh: <math>AK \perp BC</math></b></p>	
	<p>Gọi H là giao điểm của AK và BC</p> <p>Ta có <math>EKA = KAG</math> (so le trong, <math>EK // AG</math>)</p>	
b)	<p>và <math>EKA = ACH</math> (vì <math>\angle AEK = \angle BAC</math>)</p>	0,75
(2.0đ)	<p>  <math>KAG = ACH</math></p>	
	<p>Mặt khác: <math>KAG + HAC = 90^\circ \Rightarrow ACH + HAC = 90^\circ</math></p>	0,75
	<p>Vì <math>\angle AHC</math>, có <math>ACH + HAC = 90^\circ</math> (cmt)</p>	
	<p>  <math>\angle AHC</math> vuông tại H   <math>AH \perp BC</math> hay <math>AK \perp BC</math> (đpcm)</p>	0,5
c)	<p><b>Chứng minh: Các đường KA, BF, CD đồng quy</b></p>	

	<p>(1.0đ) Gọi I là giao điểm của CK và BF</p> <p>Chứng minh: <math>\angle AKC = \angle CBF</math> (c.g.c)</p> <p style="margin-left: 40px;">  <math>\angle ACK = \angle BFC</math> mà <math>\angle ACK + \angle KCF = 90^\circ</math></p> <p style="margin-left: 40px;">  <math>\angle BFC + \angle KCF = 90^\circ</math></p> <p style="margin-left: 40px;">  <math>\angle ICF</math> vuông tại I   <math>BF \perp KC</math></p>	0,5
	Chứng minh tương tự: $CD \perp KB$	0,25
	Vì KA, BF, CD là ba đường thẳng chứa ba cao của $\triangle KBC$ nên ba đường thẳng này đồng quy. (đpcm)	0,25

**Bài 6 (1,5 điểm):**

Trên đường thẳng cho các điểm A, B, C, D xếp theo thứ tự đó và  $AB = CD$ . Cho M là điểm bất kì không nằm trên đường thẳng AB. Chứng minh rằng:  $MA + MD > MB + MC$ .



6.  
(1.5đ)

**Chứng minh:  $MA + MD > MB + MC$**

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

0,5

Ta có  $AB = CD$  (gt) | I là trung điểm của đoạn thẳng AD

Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua I

|  $NA = MD$ ,  $NB = MC$ .

0,5

|  $MA + MD = MA + NA = MA + EA + EN$

	<p>mà <math>^{\circ}\text{MEA}</math> có <math>\text{MA} + \text{EA} &gt; \text{ME}</math> (BĐT tam giác)</p> <p>và <math>\text{ME} = \text{MB} + \text{BE}</math></p> <p>  <math>\text{MA} + \text{MD} &gt; \text{MB} + \text{BE} + \text{EN}</math></p>	0,25
	<p>mà <math>^{\circ}\text{BEN}</math> có <math>\text{BE} + \text{EN} &gt; \text{NB}</math> (BĐT tam giác)</p> <p>  <math>\text{MA} + \text{MD} &gt; \text{MB} + \text{NB}</math></p> <p>  <math>\text{MA} + \text{MD} &gt; \text{MB} + \text{MC}</math> (đpcm)</p>	0,25

## PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HSG LỚP 6, 7, 8 CẤP HUYỆN

**ĐOAN HÙNG**

**NĂM HỌC 2022 - 2023**

**Đề thi môn: TOÁN. Lớp 8.**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Thời gian làm bài: 120 phút**

(Không kể thời gian phát đề)

Ghi chú:

- Thí sinh lựa chọn đáp án phần trắc nghiệm khách quan chỉ có một lựa chọn đúng.
- Thí sinh làm bài thi trắc nghiệm và tự luận trên tờ giấy thi, không làm bài trên tờ đề thi.

### I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1. Cho hai số  $a, b$  thỏa mãn  $a + b = 1$ . Giá trị của biểu thức

$$P = 2a^3 + 6ab + 2b^3 - 2023 \text{ bằng}$$

- A. -2023.                    B. -2022.                    C. -2021.                    D. -2019.

Câu 2. Khi chia đa thức  $f(x)$  chia cho  $(x + 2)$  dư -12; khi chia  $f(x)$  cho  $(x - 3)$  dư 28. Đa thức dư khi chia  $f(x)$

cho  $(x^2 - x - 6)$  là

- A.  $8x + 4$                     B.  $4x + 8$                     C.  $3x - 2$                     D.  $-2x + 3$

Câu 3. Cho  $a, b$  là hai số thỏa mãn  $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$  với mọi  $x$  sao cho các phân thức có nghĩa.

Khi đó hiệu  $2a - b$  bằng

- A. -19.                    B. 19.                    C. 32.                    D. -32.

Câu 4. Cho  $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{3}{8}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$  bằng (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

- A.  $\frac{3}{8}$       B.  $\frac{8}{3}$       C.  $\frac{1}{7}$       D.  $-\frac{1}{7}$

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của  $x$  nguyên để biểu thức A nhận giá trị nguyên?

$$A = \left( \frac{x}{x^2-4} - \frac{6}{3x-6} + \frac{1}{x+2} \right) : \frac{6}{x+2} \quad (\text{với } x \neq \pm 2; x \neq 0)$$

- A. 1.      B. 2.      C. 4.      D. 8.

Câu 6. Điều kiện của hệ số a để phương trình  $x - a^2x + a = \frac{x^2}{x^2-1} + \frac{1}{1-x^2}$  (ẩn x) có nghiệm duy nhất là

- A.  $a \neq 0; a \neq 1; a \neq 2.$       C.  $a \neq \pm 1$   
 B.  $a \neq \pm 1; a \neq -2; a \neq 0.$       D.  $a \neq \pm 1; a \neq 0; a \neq \pm 2.$

Câu 7. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 132m. Nếu tăng chiều dài thêm 8m và giảm chiều rộng đi 4m

thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm  $52\ m^2$ . Chiều dài của hình chữ nhật là

- A. 29.      B. 37.      C. 62.      D. 52.

Câu 8. Số các số nguyên dương thỏa mãn bất phương trình  $\frac{1-2x}{4} - 2 < \frac{1-5x}{8}$  là

- A. 11.      B. 12.      C. 13.      D. 14.

Câu 9. Cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Kẻ tia phân giác  $AD$  của góc  $BAC$  ( $D \in BC$ ), tia phân giác  $BI$  của

góc  $ABD$  ( $I \in AD$ ). Khi đó tỉ số  $\frac{AI}{ID}$  bằng

- A.  $\frac{ac}{a+c}$       B.  $\frac{b+c}{c}$       C.  $\frac{b+c}{ac}$       D.  $\frac{b+c}{a}$

Câu 10. Cho hình thang  $ABCD$  có đáy  $AB = 9$  cm,  $CD = 16$  cm, đường chéo  $AC = 12$  cm và  $BCD = 52^\circ$ . Số

đo góc  $CAD$  bằng

- A.  $138^\circ$       B.  $52^\circ$       C.  $128^\circ$       D.  $148^\circ$

Câu 11. Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $G$  thuộc cạnh  $CD$  sao cho  $DG = \frac{1}{5}DC$ . Gọi  $E$  là giao điểm của

$AG$  và  $BD$ . Kết quả của tỉ số  $DE : DB$  là

- A.  $\frac{1}{5}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{6}$

Câu 12. Cho hình thang ABCD có AB = 5 cm, CD = 15 cm, độ dài hai đường chéo AC = 16 cm, BD = 12 cm.

Diện tích hình thang ABCD bằng

A.  $96 \text{ cm}^2$

B.  $192 \text{ cm}^2$

C.  $100,8 \text{ cm}^2$

D.  $72 \text{ cm}^2$

Câu 13. Cho hình thoi ABCD có cạnh AB = a. Một đường thẳng bất kì qua C cắt tia đối của các tia BA, DA

lần lượt tại M và N. Khi đó tích BM.DN có giá trị bằng

A.  $a^2$

B.  $\frac{3}{2}a^2$

C.  $2a^2$

D.  $4a^2$

Câu 14. Cho hình thang ABCD có AB là đáy nhỏ, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O kẻ đường

thẳng song song với AB cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N. Hệ thức nào sau đây đúng?

A.  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$ .

B.  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{MN}$

C.  $\frac{1}{CD} + \frac{1}{MN} = \frac{1}{AB}$

D.  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{MN}{2}$ .

Câu 15. Cho hình chữ nhật ABCD có  $AD = 6\text{ cm}$ ,  $AB = 8\text{ cm}$  và hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với  $DB$ , d cắt BC kéo dài tại E. Kẻ CH vuông góc với  $DE$  tại H. Khi đó tỉ số diện tích  $\frac{S_{EHC}}{S_{EBD}}$  bằng

- A.  $\frac{4}{5}$       B.  $\frac{16}{25}$       C.  $\frac{256}{625}$       D.  $\frac{25}{16}$

Câu 16. Một rô bốt chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 5m dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 10m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 15m dừng lại 3 giây. Cứ như vậy đi từ A đến B hết tất cả thời gian đi và dừng lại là 551 giây. Biết rằng rô bốt luôn chuyển động với vận tốc  $2,5\text{m/giây}$ . Khoảng cách từ A đến B dài bao nhiêu mét?

- A. 380 m      B. 1900 m      C. 950 m      D. 1127,5 m.

## II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Tìm số nguyên tố p để  $p^2 + 2$  và  $p^3 + 2$  đều là các số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:  $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$ .

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho hai số thực phân biệt  $a, b \neq 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$ . Tính giá trị của biểu thức

$$T = [(a-1)(b-1) + 2022]^{2023}$$

b) Giải phương trình  $\frac{5}{x^2+1} + \frac{7}{x^2+3} - \frac{3x^2+6}{x^2+5} = 0$ .

Câu 3. (4,0 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho  $AE = BF$ . Kẻ DM vuông góc với EC tại M.

a) Chứng minh rằng D, M, F thẳng hàng.

b) Tìm số đo góc BMD khi  $AE = BE$ .

c) Khi E di chuyển trên AB và vẫn luôn thỏa mãn  $AE = BF$ , tìm vị trí của E để diện tích tam giác DEF là nhỏ nhất?

Câu 4. (1,0 điểm) Cho  $x, y, z$  là 3 số thực dương thỏa mãn  $x(x-z) + y(y-z) = 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức  $P = \frac{x^3}{x^2+z^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+4}{x+y}$ .

**ĐÁP ÁN****I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm)**

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	C	B	C	B	D
9	10	11	12	13	14	15	16
D	C	D	A	A	A	C	C

**II. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm)**

Câu 1:

a) – Xét  $p = 2$ , thay vào  $p^2 + 2$  ta có  $p^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$  là hợp số

Suy ra  $p = 2$  (loại)

- Xét  $p = 3$  thay vào ta có:

$$p^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11 \text{ là số nguyên tố}$$

$$p^3 + 2 = 3^3 + 2 = 29 \text{ là số nguyên tố}$$

Suy ra  $p = 3$  (thỏa mãn)

- Xét  $p > 3$

Trong ba số tự nhiên liên tiếp  $p - 1; p; p + 1$  tồn tại một số chia hết cho 3. Vì

$p > 3$  và  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  không chia hết cho 3

Nếu  $p - 1$  hoặc  $p + 1$  chia hết cho 3 thì

$$(p-1)(p+1) \vdots 3 \Rightarrow p^2 - 1 \vdots 3$$

$$\Rightarrow p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3 \vdots 3$$

$\Rightarrow p^2 + 2$  là hợp số nên trường hợp  $p > 3$  loại

Vậy  $p = 3$ .

b)  $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) = 21 - 3y^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 21 - 3y^2 \quad (1)$$

Vì  $2(x+1)^2 \geq 0, \forall x$  nên  $21 - 3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 7$

Vì  $y \in Z$  nên  $y^2 \in \{0; 1; 4\}$

- Với  $y^2 = 0$  thay vào (1) ta có  $2(x+1)^2 = 21 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{21}{2} \notin Z$  (loại)

- Với  $y^2 = 1$  thay vào (1) ta có:  $2(x+1)^2 = 18 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}$$

- Với  $y^2 = 4$  thay vào (1) ta có:  $2(x+1)^2 = 21 - 12 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{9}{2} \notin Z$  (loại)

Vậy các cặp giá trị ( $x, y$ ) thỏa mãn yêu cầu của đề bài là:

(2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)

Câu 2:

a) Áp dụng HĐT:  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Với  $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = -1$  ta có:  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - 1 + \frac{3}{ab} = 0$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 \right) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{a} + 1 \right)^2 + \left( \frac{1}{b} + 1 \right)^2 + \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 \right] > 0 \text{ với mọi } a, b \neq 0$$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow a + b = ab \Leftrightarrow ab - a - b = 0$$

$$\text{Do đó: } T = (ab - a - b + 1 + 2022)^{2023} = 2023^{2023}$$

$$\text{Vậy } T = 2023^{2023}$$

$$\text{b) } \frac{5}{x^2+1} + \frac{7}{x^2+3} - \frac{6+3x^2}{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{5}{x^2+1} - 1 \right) + \left( \frac{7}{x^2+3} - 1 \right) + \left( 2 - \frac{6+3x^2}{x^2+5} \right) = 0$$

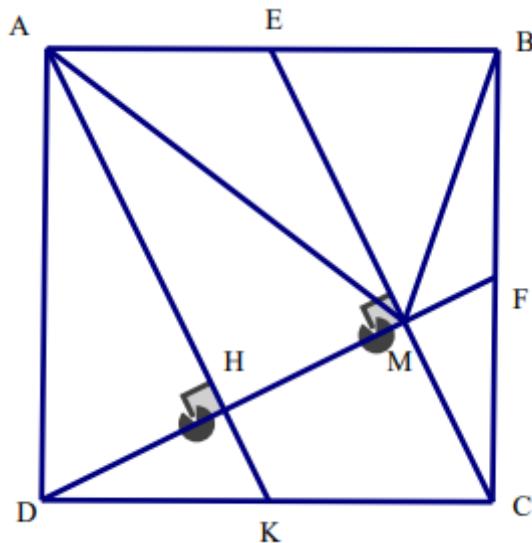
$$\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x^2+1} + \frac{4-x^2}{x^2+3} + \frac{4-x^2}{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2) \left( \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+5} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \left( \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+5} \right) > 0, \forall x \text{ nên } 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình S = {-2; 2}

Câu 3:



a) Giả sử DF cắt EC tại M

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB = BC \\ AE = BF \end{cases} \Rightarrow EB = FC.$$

Xét tam giác BEC và tam giác CFD, ta có:  $EB = FC; BC = CD; B = C = 90^\circ$

$$\Rightarrow \Delta BEC \cong \Delta CFD$$

$$\Rightarrow ECB = FDC$$

Mà  $ECB + ECD = 90^\circ$  nên  $ECD + FDC = 90^\circ \Rightarrow DMC = 90^\circ$

Hay  $DM \perp EC$

Mà DM vuông góc với EC tại M (gt)

Vậy D, M, F thẳng hàng

b) Kẻ AH vuông góc với DM, K là giao của DC và AH

Ta có: AECK là hình bình hành  $\Rightarrow AE = CK$

Lại có:  $\begin{cases} AE = \frac{1}{2}AB \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow KC = \frac{1}{2}DC$

$\Rightarrow$  K là trung điểm của DC

Ta lại có KH // CM suy ra H là trung điểm của DM.

Nhưng: AH  $\perp$  DM  $\Rightarrow$  ADM là tam giác cân tại A.

$$\Rightarrow AD = AM$$

Mà AD = AB  $\Rightarrow$  AM = AB  $\Rightarrow$  ABM cân tại A

Từ ADM cân tại A ta có:  $AMD = \frac{180^\circ - DAM}{2}$

Từ ABM cân tại A ta có:  $AMB = \frac{180^\circ - BAM}{2}$

$$\Rightarrow AMD + AMB = \frac{180^\circ - DAM}{2} + \frac{180^\circ - BAM}{2}$$

$$\Rightarrow BMD = 135^\circ$$

c) Ta có:  $\Delta EBC = \Delta FCD$

$$\Rightarrow S_{EMFB} + S_{MFC} = S_{DMC} + S_{MFC}$$

$$\Rightarrow S_{EMFB} = S_{DMC}$$

$$\Rightarrow S_{DEM} + S_{EMFB} = S_{DEM} + S_{DMC}$$

$$\Rightarrow S_{DEBF} = S_{DEC}$$

Lại có:  $S_{DEC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC$  không đổi

$\Rightarrow S_{DEBF}$  không đổi

Ta lại có:  $BE \cdot BF \leq \frac{1}{4} (BE + BF)^2$

$$\Rightarrow BE \cdot BF \leq \frac{1}{4} (BE + AE)^2$$

$$\Rightarrow BE \cdot BF \leq \frac{1}{4} \cdot AB^2$$

$\Rightarrow BE \cdot BF$  lớn nhất khi  $BE = BF$

$\Rightarrow S_{B_EF}$  lớn nhất khi  $BE = BF$

Mà  $S_{DEF} = S_{DEBF} - S_{B_EF}$  nên  $S_{DEF}$  nhỏ nhất khi  $BE = EA$

$S_{DEF}$  nhỏ nhất khi E là trung điểm của AB.

Khi đó S tam giác EFD bằng  $\frac{3}{8}$  diện tích hình vuông ABCD

Câu 4:

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{x^3}{x^2 + z^2} = x - \frac{xz^2}{x^2 + z^2} \geq x - \frac{xz^2}{2xz} = x - \frac{z}{2}.$$

Tương tự  $\frac{y^3}{y^2 + z^2} \geq y - \frac{z}{2}$

Suy ra:  $P \geq x + y - z + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}$

Theo giả thiết:  $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \Rightarrow P \geq x + y + \frac{4}{x + y} \geq 4$

Vậy  $P_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

Câu 1:

$$P = 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 6ab - 2023 = 2(a^2 + 2ab + b^2) - 2023 = -2021$$

Câu 2:

$$f(x) = (x+2) \cdot Q(x) - 12$$

$$f(x) = (x-3) \cdot P(x) + 28$$

$$f(x) = (x^2 - x - 6) \cdot G(x) + ax + b$$

$$f(-2) = -12 \Rightarrow -2a + b = -12$$

$$f(3) = 28 \Rightarrow 3a + b = 28$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$$

Câu 3:

$$\frac{a(x-2) + b(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{32x-19}{x^2-x-2} \text{ đúng với mọi } x \neq 2; x \neq -1$$

$$\Rightarrow (a+b)x - 2a + b = 32x - 19 \text{ đúng với mọi } x \neq 2; x \neq -1$$

$$\Rightarrow -2a + b = -19 \Rightarrow 2a - b = 19$$

Câu 5:

Thu gọn A được kết quả  $A = \frac{1}{2-x}$ . Để A nhận giá trị nguyên thì

$$2-x \in U(1) = \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{1; 3\}$$

Câu 6:

Biến đổi phương trình trở thành:  $x(1-a^2) = -a+1$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi  $1-a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$

Câu 7:

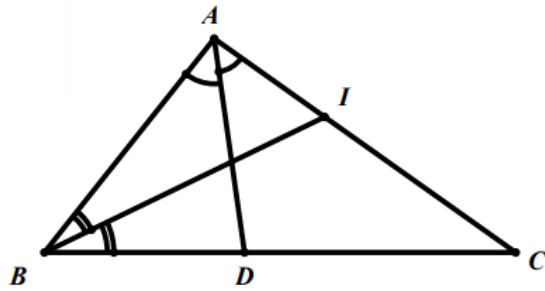
Gọi chiều dài hình chữ nhật là x , chiều rộng là  $66 - x$

Ta có phương trình:  $(x+8)(62-x) = x(66-x)+52$

Giải phương trình ta được  $x = 37$

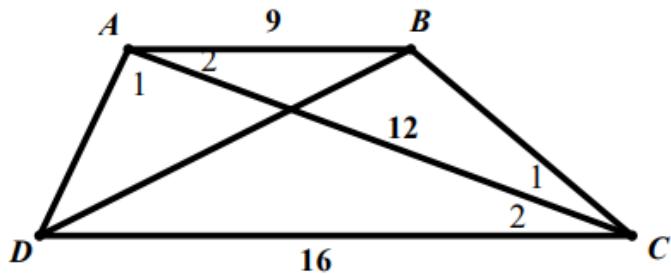
Câu 8: Giải bất phương trình ta được  $x < 15$

Câu 9:



$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{DB+DC} = \frac{AB+AC}{BC} = \frac{b+c}{a}$$

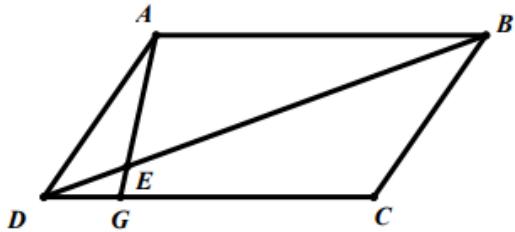
Câu 10:



$$\triangle BAC \sim \triangle ACD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \hat{A}_l = ABC$$

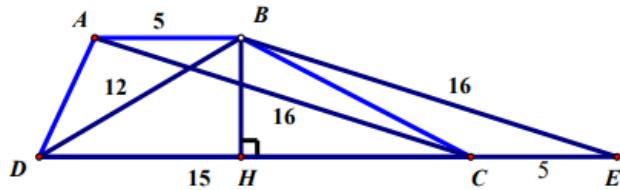
$$\text{Mà } ABC + BCD = 180^\circ \Rightarrow ABC = 128^\circ \Rightarrow CAD = ABC = 128^\circ$$

Câu 11:



Vì  $AB \parallel CD$  nên  $\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{AB} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{5} \Rightarrow DE = \frac{1}{5} EB \Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{6}$

Câu 12:

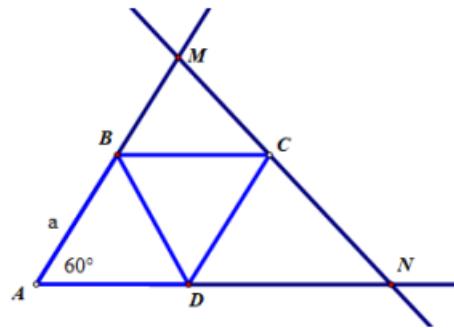


Ké  $BE \parallel AC$ , E thuộc đường thẳng DC. Có  $BD^2 + BE^2 = DE^2$  suy ra  $\Delta BDE$  vuông

$$\Delta HDB \sim \Delta BDE \Rightarrow BH = \frac{BE \cdot BD}{DE} = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9,6$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Câu 13:

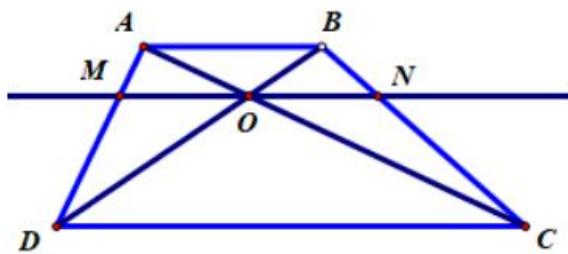


$$\text{Vì } BC \parallel AN \Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN}$$

$$\text{Vì } CD \parallel AM \Rightarrow \frac{AD}{ND} = \frac{CM}{CN}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{AD}{ND} \Rightarrow BM \cdot ND = AD \cdot BA = a^2$$

Câu 14:



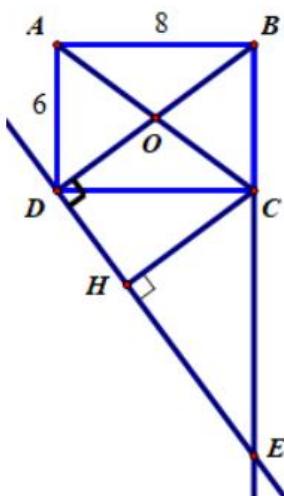
Áp dụng định lý Ta-let và hệ quả ta có:

$$\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$$

Ta lại có:  $\frac{ON}{CD} = \frac{OB}{DB}; \frac{OM}{AB} = \frac{OD}{DB} \Rightarrow \frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD} = \frac{OB+OD}{DB} = \frac{DB}{DB} = 1$

Vì  $OM = ON = \frac{MN}{2}$  nên  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

Câu 15:



$$\Delta CHD \sim \Delta DCB (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow CD^2 = CH \cdot BD$$

$$\frac{S_{EHC}}{S_{EBD}} = \left( \frac{CH}{DB} \right)^2 = \left( \frac{CH \cdot DB}{DB^2} \right)^2$$

$$= \left( \frac{CD^2}{BD^2} \right)^2 = \left( \frac{8^2}{10^2} \right)^2 = \frac{256}{625}$$

Câu 16:

Gọi số lần đi là  $x$  (lần) ( $x \in \mathbb{N}^*$ )

Số lần dừng là  $x - 1$  (lần)

Thời gian đi là  $\frac{5}{2,5} + \frac{10}{2,5} + \dots + \frac{5x}{2,5} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x = x(x+1)$  (giây)

Thời gian dừng là:  $1 + 2 + 3 + \dots + (x-1) = \frac{x(x-1)}{2}$  (giây)

Theo đề bài ta có:  $x(x+1) + \frac{x(x-1)}{2} = 551$

Giải phương trình ta được:  $\begin{cases} x = 19 \text{ (chọn)} \\ x = -\frac{58}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$

Thời gian đi là  $19 \cdot (19 + 1) = 380$  (giây)

Khoảng cách AB là:  $2,5 \cdot 380 = 950$  (m)

**UBND HUYỆN YÊN ĐỊNH**

**KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8**

**PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO CHỌN ĐỘI TUYỂN VÒNG 1 DỰ THI**

**HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH****NĂM HỌC: 2024 – 2025****ĐỀ CHÍNH THỨC****Môn thi: Toán****Thời gian: 150 phút****(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1: (4 điểm)

1. Cho biểu thức  $P = \left( \frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5-x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x-5}{2x^2 + 10x} + \frac{2x}{5-x}$  với  $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$

Rút gọn biểu thức P.

2. Cho ba số a, b, c khác 0 và thỏa mãn:  $a + b + c = 0$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình:  $(4x-5)^2(2x-3)(x-1)=9$ 

2. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn

$$a^3 + 1 = 3a; b^3 + 1 = 3b; c^3 + 1 = 3c.$$

Chứng minh:

a)  $a + b + c = 0$

b)  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$

Câu 3: (4 điểm)

1. Tìm tất cả các số  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $x^4 + y + 4 = y^2 - x^2$

2. Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  có dạng  $p = a^2 + b^2 + c^2$ , trong đó  $a, b, c$  là các số nguyên dương thỏa mãn  $a^4 + b^4 + c^4$  chia hết cho  $p$ .

Câu 4: (6 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh là  $a$ . Điểm E thuộc cạnh BC, F là giao điểm của AE và DC, G là giao điểm của DE và BF. Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho  $BE = DM$ . Gọi T là trung điểm của EM.

1. Chứng minh tam giác AEM vuông cân và ba điểm B, T, D thẳng hàng.

2. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của AB với CG và DG. Chứng minh IE // BD.

3. Tìm vị trí điểm E trên cạnh BC để tổng BK + CF đạt GTNN.

Câu 5: (2 điểm)

Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $x + y + xy = 3$ . Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

### ĐÁP ÁN

Câu 1:

1. Với  $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$  ta có:

$$P = \left( \frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5-x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x-5}{2x^2 + 10x} + \frac{2x}{5-x}$$

$$P = \left[ \frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right] : \frac{2x-5}{2x(x+5)} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x+5)(x-5)} : \frac{2x-5}{2x(x+5)} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{2x(x+5)}{2x-5} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{5 \cdot (2x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{2x(x+5)}{2x-5} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{10}{x-5} - \frac{2x}{x-5}$$

$$= \frac{10-2x}{x-5} = \frac{2(5-x)}{x-5} = -2$$

Vậy  $P = -2$  với  $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$ .

2. Tùy  $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^2=(-c)^2 \Rightarrow a^2+b^2-c^2=-2ab$

Tương tự,  $b^2+c^2-a^2=-2bc$ ;  $c^2+a^2-b^2=-2ca$

$$\text{Do đó: } P = \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ca} = -\frac{c+a+b}{2abc} = 0$$

Câu 2:

$$1. \quad (4x-5)^2(2x-3)(x-1)=9$$

$$\Leftrightarrow (16x^2 - 40x + 25)(2x^2 - 5x + 3) = 9$$

$$\Leftrightarrow [8(2x^2 - 5x) + 25](2x^2 - 5x + 3) = 9$$

Đặt  $2x^2 - 5x = t$

$$\Rightarrow (8t + 25)(t + 3) = 9$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 + 49t + 66 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 2)(8t + 33) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \text{ hoặc } t = -\frac{33}{8}$$

$$+) t = -2 \Rightarrow 2x^2 - 5x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) t = -\frac{33}{8} \Rightarrow 2x^2 - 5x = -\frac{33}{8} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + \frac{33}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 10x + \frac{33}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm vì } \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 > 0, \forall x)$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

2. a) Tùy giả thiết:  $a^3 + 1 = 3a; b^3 + 1 = 3b; c^3 + 1 = 3c$ . ta có:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 3(a-b) \\ b^3 - c^3 = 3(b-c) \\ c^3 - a^3 = 3(c-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3(1) \\ b^2 + bc + c^2 = 3(2) \\ c^2 + ca + a^2 = 3(3) \end{cases} \quad (\text{vì } a, b, c \text{ đều một khái niệm})$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a^2 - c^2 + ab - bc = 0 \Leftrightarrow (a-c)(a+b+c) = 0 \Leftrightarrow a+b+c = 0 \quad (\text{vì } a, b, c \text{ đều một khái niệm})$$

b) Cộng (1), (2), (3) vế với vế ta có:  $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab + bc + ca = 9$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab + 2bc + 2ca = 18 \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + 0 = 18$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

Câu 3:

$$1. Ta có: x^4 + y + 4 = y^2 - x^2 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y)(x^2 - y + 1) = -4$$

Ta có  $x, y$  nguyên;  $(x^2 + y + x^2 - y + 1) = 2x^2 + 1$  là số lẻ

Nên  $x^2 + y$  và  $x^2 - y + 1$  phải có một số là số lẻ

Ta có bảng sau:

$x^2 - y + 1$	-1	-4	4	1
$x^2 + y$	4	1	-1	-4
y	3	3	-2	-2
$x^2$	1	-2 (loại)	1	-2 (loại)
x	1; -1		1; -1	

Vậy các số nguyên  $(x, y)$  cần tìm là:  $(1; 3); (-1; 3); (1; -2); (-1; -2)$ .

2. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử:  $a \geq b \geq c \geq 1$ .

Ta có:  $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Vì p là số nguyên tố và  $p = a^2 + b^2 + c^2$ , với  $a \geq b \geq c \geq 1$ . nên  $p \geq 3$

Suy ra  $a^4 + b^4 + c^4$  chia hết cho p khi và chỉ khi  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$  chia hết cho p hay

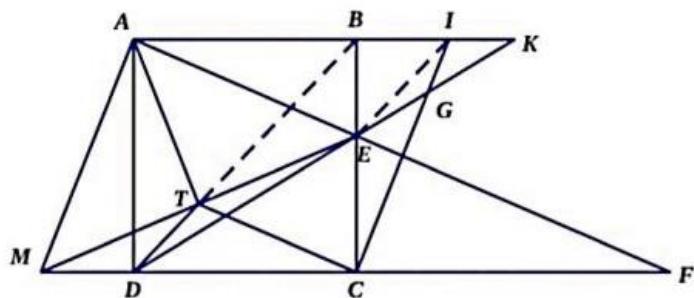
$$a^2b^2 + c^2(b^2 + a^2) : p \Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 : p \Leftrightarrow (ab - c^2)(ab + c^2) : p.$$

Vì  $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$  và  $p$  là số nguyên tố nên  $ab - c^2 = 0$

$\Leftrightarrow ab = c^2 \Leftrightarrow a = b = c$  (vì  $a \geq b \geq c \geq 1$ .)  $\Leftrightarrow p = 3a^2 \Leftrightarrow a = b = c = 1$  và  $p = 3$ .

Vậy có duy nhất một số nguyên tố thỏa mãn là  $p = 3$ .

Câu 4:



1. Xét  $\Delta ADM$  và  $\Delta ABE$  có:  $AD = AB = a$ ;  $ADM = ABE = 90^\circ$ ;  $MD = BE$  (gt)

Suy ra  $\Delta ADM \cong \Delta ABE$  (c.g.c)  $\Rightarrow AM = AE$  (các cạnh tương ứng) (1)

Và  $DAM = BAE$  (các góc tương ứng)

Mà  $DAE + BAE = DAB = 90^\circ \Rightarrow MAD + DAE = 90^\circ \Rightarrow MAE = 90^\circ$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\DeltaAME$  vuông cân tại A.

Ta có:  $\DeltaAME$  vuông cân tại A, T là trung điểm của ME

nên  $AT = \frac{1}{2}ME$  (trung tuyến ứng với cạnh huyền)

Tương tự  $CT = \frac{1}{2}ME$

Suy ra:  $TA = TC$ .

Mà  $BA = BC$ ,  $DA = DC$  (cạnh của hình vuông) nên 3 điểm T, B, D cùng nằm trên đường trung trực của AC.

Suy ra B, T, D thẳng hàng.

2. Vì ABCD là hình vuông nên  $AB // CD \Rightarrow BK // DF$  và  $AK // DF$ .

Xét tam giác DCG có  $IK // CF$  nên theo định lý Thales ta có:  $\frac{IK}{CD} = \frac{IG}{GC}$

Chứng minh tương tự ta được  $\frac{IG}{GC} = \frac{IB}{CF}$ . Từ đó suy ra  $\frac{IK}{IB} = \frac{CD}{CF}$  (1)

Xét các tam giác EDC và ECF có  $AK // DF$ , theo định lý Thales ta có:

$$\frac{KE}{ED} = \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CF} \quad (2)$$

Ta lại có  $AB = CD$  nên từ (1) và (2) suy ra  $\frac{IK}{IB} = \frac{KE}{ED}$

Tam giác BKD có:  $\frac{IK}{IB} = \frac{KE}{ED}$  nên IE // BD (Theo định lý Thales đảo)

3. Xét tam giác CEF có AB // CF nên theo định lý Thales ta có:  $\frac{AB}{CF} = \frac{BE}{CE}$  (3)

Xét tam giác DEC có BK // CD nên theo định lý Thales ta có:  $\frac{BK}{CD} = \frac{BE}{CE}$  (4)

Từ (3) và (4) suy ra  $\frac{BK}{CD} = \frac{AB}{CF} \Leftrightarrow BK \cdot CF = AB \cdot CD = a^2$

Do  $BK \cdot CF = a^2$  không đổi nên  $BK + CF \geq 2\sqrt{BK \cdot CF} = 2a$  đạt GTNN khi và chỉ khi  $BK = CF = a$ .

Khi đó E là trung điểm của BC.

Câu 5:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = 1$ .

Vậy GTNN của P là  $\frac{5}{2}$  khi  $x = y = 1$ .

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒ**

**ĐỀ THI OLYMPIC 27/4 CẤP HUYỆN**

**HUYỆN XUYÊN MỘC**

**NĂM HỌC 2023 – 2024**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**MÔN: TOÁN – LỚP 8**

Ngày thi: 12 tháng 12 năm 2023

*Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)*

**Câu 1:** (4,0 điểm)

Cho biểu thức  $A = \frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-3} + \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{(x+1)(x-3)}$  ( $x \neq -1; x \neq 3$ )

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để A nhận giá trị nguyên.

**Câu 2:** (3,5 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $4x^4 - 5x^2 + 1$

b) Chứng minh rằng:  $B = 5n^3 + 10n$  chia hết cho 15 với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 3:** (4,0 điểm)

a) Cho  $A = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)$  và  $B = 3^{32}$

Hãy so sánh giá trị của  $A$  và  $B$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 75$ .

**Câu 4:** (7,0 điểm)

Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ), đường cao  $AH$ . Lấy điểm  $K$  trên  $HC$  sao cho

$AH = HK$ . Từ  $K$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BC$ , từ  $A$  vẽ đường thẳng vuông

góc với  $AH$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $E$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $AHKE$  là hình vuông.

b) Gọi  $P$  là giao điểm của  $KE$  và  $AC$ . Chứng minh rằng  $AB = AP$ .

- c) Qua  $P$  vẽ đường thẳng song song với  $AB$ , qua  $B$  vẽ đường thẳng song song với  $AC$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $Q$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $PB$  và  $AQ$ . Chứng minh  $I, H, E$  thẳng hàng.
- d) Tính góc  $AKQ$ ?

**Câu 5:** (1,5 điểm)

Cho 1 lưới ô vuông có kích thước  $4 \times 4$ . Người ta điền vào mỗi ô của lưới 1 trong các số  $-4, 0, 4$ . Xác định tổng các số theo từng cột, theo từng hàng và theo từng hàng chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

©HẾT©

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1:** (4,0 điểm)

Cho biểu thức  $A = \frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-3} + \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{(x+1)(x-3)} \quad (x \neq -1; x \neq 3)$

- a) Rút gọn biểu thức  $A$
- b) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để  $A$  nhận giá trị nguyên.

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{x(x-3)}{(x+1)\cdot(x-3)} + \frac{3\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(x+1)} + \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{(x-3)\cdot(x+1)} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 3x + 3 + x^3 - 4x^2 - 3}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x+1)\cdot(x-3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\text{b) } A = \frac{x^2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

Để  $A$  nguyên khi  $x$  nguyên thì:

$$x+1 \in U(1) = \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{0; -2\}$$

**Câu 2:** (3,5 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $4x^4 - 5x^2 + 1$

b) Chứng minh rằng:  $B = 5n^3 + 10n$  chia hết cho 15 với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Lời giải

$$\text{a)} \quad 4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 9x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (3x)^2$$

$$= (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 3x + 1)$$

$$= (2x - 1)(x - 1)(2x + 1)(x + 1)$$

$$\text{b)} \quad B = 5n^3 + 10n = 5n^3 - 5n + 15n = 5n(n^2 - 1) + 15n$$

$$= 5n(n - 1)(n + 1) + 15n$$

Vì  $n(n - 1)(n + 1)$  chia hết cho 3 nên  $5n(n - 1)(n + 1)$  chia hết cho 15

Mà  $15n$  chia hết cho 15. Do đó  $B$  chia hết cho 15.

**Câu 3:** (4,0 điểm)

$$\text{a)} \quad \text{Cho } A = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) \text{ và } B = 3^{32}$$

Hãy so sánh giá trị của  $A$  và  $B$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 75$ .

### Lời giải

$$\text{a)} A = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) = (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)$$

$$A = (3^8 - 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) = (3^{16} - 1)(3^{16} + 1) = (3^{32} - 1)$$

Vì  $3^{32} - 1 < 3^{32}$  nên  $A < B$

$$\text{b)} A = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 75 = x^4 - 2x^2 \cdot 2x + 4x^2 + 3x^2 - 12x + 12 + 63$$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 4x + 4) + 63$$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 3(x + 2)^2 + 63 \geq 63$$

Min  $A = 63$  khi  $x = 2$

**Câu 4:** (7,0 điểm)

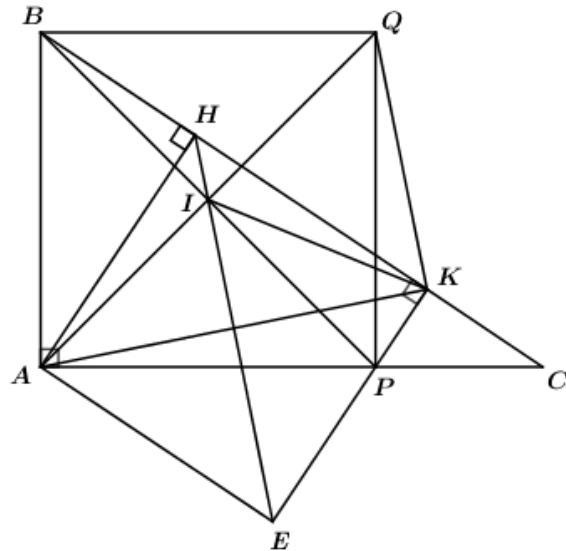
Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A (AB < AC)$ , đường cao  $AH$ . Lấy điểm  $K$  trên  $HC$  sao cho

$AH = HK$ . Từ  $K$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BC$ , từ  $A$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $AH$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $E$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $AHKE$  là hình vuông.

- b) Gọi  $P$  là giao điểm của  $KE$  và  $AC$ . Chứng minh rằng  $AB = AP$ .
- c) Qua  $P$  vẽ đường thẳng song song với  $AB$ , qua  $B$  vẽ đường thẳng song song với  $AC$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $Q$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $PB$  và  $AQ$ . Chứng minh  $I, H, E$  thẳng hàng.
- d) Tính góc  $AKQ$ ?

### Lời giải



a) Xét tứ giác  $AHKE$  có:  $A = 90^\circ$ ,  $K = 90^\circ$ ,  $H = 90^\circ$

$\Rightarrow AHKE$  là hình chữ nhật.

Mà  $HA = HK$  (gt)

$\Rightarrow AHKE$  là hình vuông.

b) Có  $AHKE$  là hình vuông (c/m câu a) suy ra  $\begin{cases} A = K = H = E = 90^\circ \\ AH = KH = KE = EA \end{cases}$

Xét  $\Delta AHB$  và  $\Delta AEP$  có:

$$\left. \begin{array}{l} AHB = AEP \\ AH = AE \\ HAB = EAP (= 90^\circ - HAP) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AHB = \Delta AEP (c.g.c) \Rightarrow AB = AP.$$

c) Có  $AHKE$  là hình vuông (c/m câu a)

Nên đường thẳng  $HE$  là trung trực của  $AK$  (1)

Xét tứ giác  $ABQP$  có:  $BAP = 90^\circ$   $AB = AP$   $\left. \begin{array}{l} AB // PQ, AP // BQ \end{array} \right\} \Rightarrow ABQP$  là hình vuông

$$\Rightarrow IA = IA = IP = IQ$$

Trong tam giác vuông  $BPK$  có  $KI$  là trung tuyén nên  $KI = PI$  mà

$IP = IA \Rightarrow IA = IK$  hay  $I$  thuộc trung trực của  $AK$  (2)

Từ (1) và (2) ta có  $H, I, E$  thẳng hàng.

d) Trong tam giác  $AQK$  có  $IK = IA$  (cmt)

Mà  $IA = IQ \Rightarrow IA = IQ = IK$

Nên tam giác  $AQK$  vuông tại  $K$ . Vậy  $\angle AKQ = 90^\circ$  (đpcm)

**Câu 5:** (1,5 điểm)

Cho 1 lưới ô vuông có kích thước  $4 \times 4$ . Người ta điền vào mỗi ô của lưới 1 trong các

số  $-4, 0, 4$ . Xem tổng các số theo từng cột, theo từng hàng và theo từng hàng chéo.

Chứng minh rằng trong tất cả các tổng luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

### Lời giải

Có tất cả 10 tổng gồm 4 tổng theo cột, 4 tổng theo hàng và 2 tổng theo đường chéo.

Mỗi tổng gồm 4 số hạng mà mỗi số hạng nhận 1 trong 3 số là  $4, -4, 0$ . Nên mỗi tổng

là 1 số nguyên. Gọi các tổng là  $S_i$  với  $i = 1, 2, 3, \dots, 10$

$S_i$  sẽ nhận 9 giá trị là  $-16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16$ .

Mà ta lại có 10  $S_i$ , nên sẽ luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

↔ HẾT ↔

# TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

## ĐỀ THI KIỂM ĐỊNH CHẤT LƯỢNG

### ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG MÔN TOÁN LỚP 8

NĂM HỌC 2022 – 2023

(Thời gian làm bài 120 phút)

#### Bài 1. (5,0 điểm)

- Chứng minh rằng  $n(3n^2 + 2022)$  chia hết cho 9 với mọi số nguyên n
- Xác định các hệ số a, b để đa thức  $f(x) = x^4 + ax^2 + b$  chia hết cho đa thức

$$g(x) = x^2 - 3x + 2$$

- Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng  $A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$  là số chính phương

#### Bài 2. (4,0 điểm)

- Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn:  $x^2 + 2y^2 + xy - 2xy^2 = x + y + 1$

2. Tìm số thực  $x$  thỏa mãn:  $(x - 2022)^3 + (x - 2023)^3 = (2x - 4045)^3$

**Bài 3.** (4,0 điểm)

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = (x-2)^2 + (2x+1)^2$$

2. Cho các số thực  $x, y$  có  $x+y=2$  chứng tỏ rằng  $xy \leq 1$

**Bài 4.** (6,0 điểm)

1. Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho  $AM = CN$ .

a) Chứng minh  $\triangle MDN$  vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh O, C, K thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ), đường cao AH. Kẻ HD

vuông góc AB (D thuộc AB). Gọi I là trung điểm của AD, trên tia đối của tia

BC lấy điểm K sao cho  $BK = BH$ . Chứng minh KD vuông góc với HI.

**Bài 5. (1,0 điểm)** Cho x là số thực sao cho  $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh rằng với mọi số

nguyên dương n thì  $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

----- Hết -----

## HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN TOÁN 8

Câu	Nội dung	Điểm

	<b>Chứng minh rằng <math>n(3n^2 + 2022)</math> chia hết cho 9 với mọi số nguyên n</b>	1,5
1     <b>(5,0 đ)</b>	<p>Ta có: <math>n(3n^2 + 2022) = n.(3n^2 - 3 + 2025)</math></p> $= 3n(n - 1)(n + 1) + 2025n$ <p>Vì <math>n(n - 1)(n + 1)</math> là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3 <math>\Rightarrow 3n(n - 1)(n + 1) \vdots 9</math></p> <p>Mặt khác: <math>2025 \vdots 9</math> nên <math>2025n \vdots 9</math></p> <p>Từ đó suy ra <math>3n(n - 1)(n + 1) + 2025n \vdots 9</math> hay <math>n(3n^2 + 2022) \vdots 9</math></p>	0,75     0,25   0,25   0,25
2	<b>Xác định các hệ số a, b để đa thức <math>f(x) = x^4 + ax^2 + b</math> chia hết cho đa thức <math>g(x) = x^2 - 3x + 2</math></b>	1,5
	Ta có: $g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$	0,5

	Theo bài ra, $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ nên $f(x)$ cũng chia hết cho $x - 1$ và $x - 2$  $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ 16+4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow 15+3a=0 \Rightarrow a=-5$  $\Rightarrow b = -1 - a = -1 + 5 = 4$  Vậy $a = -5, b = 4$	0,25 0,5 0,25
<b>3</b>	$A=n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$	2,0
	$A = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) + 1$  $A = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$ là số chính phương với mọi số tự nhiên $n$	1,5 0,5
<b>2</b> <b>(4,0đ)</b>	<b>Tìm các cặp số nguyên <math>x, y</math> thỏa mãn :</b>  $x^2 + 2y^2 + xy - 2xy^2 = x + y + 1$	2,0

	$x^2 + 2y^2 + xy - 2xy^2 = x + y + 1$ $\Leftrightarrow 2y^2(1-x) - x(1-x) - y(1-x) = 1$ $\Leftrightarrow (1-x)(2y^2 - x - y) = 1 \quad (1)$ <p>Vì <math>x, y</math> nguyên nên <math>1-x</math> và <math>2y^2 - x - y</math> nguyên</p> $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=1 \\ 2y^2-x-y=1 \end{cases} \text{ hoac} \begin{cases} 1-x=-1 \\ 2y^2-x-y=-1 \end{cases}$ $TH1: \begin{cases} 1-x=1 \\ 2y^2-x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (y-1)(2y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} (TM)$ $TH2: \begin{cases} 1-x=-1 \\ 2y^2-x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (y-1)(2y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} (KTM)$ <p>Vậy: <math>x = 0; y = 1</math> hoặc <math>x = 2; y = 1</math></p>	1,0    0,5
--	--	------------------------

--	--	--	--

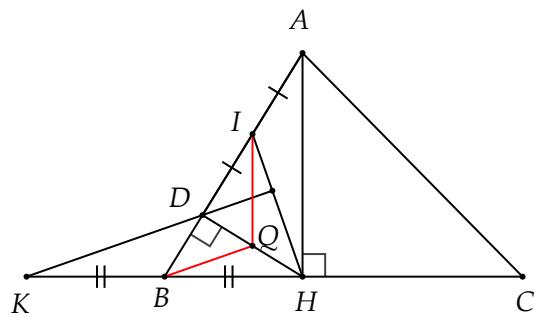
		0,5
2	<p><b>Giải phương trình:</b> <math>(x - 2022)^3 + (x - 2023)^3 = (2x - 4045)^3</math></p>	2,0
	$(x - 2022)^3 + (x - 2023)^3 = (2x - 4045)^3$ <p>Đặt <math>x - 2022 = a, x - 2023 = b \Rightarrow 2x - 4045 = a + b</math></p> <p>Phương trình đã cho trở thành:</p> $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ $\Leftrightarrow a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ $\Leftrightarrow 3ab(a + b) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2022 = 0 \\ x - 2023 = 0 \\ 2x - 4045 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ x = 2023 \\ x = \frac{4045}{2} \end{cases}$	0,5 0,5 0,5

	Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2022; 2023; \frac{4045}{2}\}$	0,5
3 (4,0đ)	<b>1</b> Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x-2)^2 + (2x+1)^2$	2,0
	$A = (x-2)^2 + (2x+1)^2 = 5x^2 + 5 \geq 5$	1,0
	Dấu bằng xảy ra khi $x=0$ . Vậy $A_{\min}=5$ khi $x=0$	1,0
	<b>2</b> Cho các số thực $x, y$ có $x+y=2$ chứng tỏ rằng $xy \leq 1$	2,0
	Ta có $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2 + 4xy \geq 4xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$ $\Rightarrow 2^2 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq 1$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$	1,0 0,5 0,5

	<p><b>Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm M,</b></p> <p><b>trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho <math>AM = CN</math>.</b></p> <p><b>c) Chứng minh <math>\triangle MDN</math> vuông cân</b></p> <p><b>d) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh O, C, K thẳng hàng.</b></p>	
4 (6,0đ)		1 0,5
<b>a</b>	Xét $\triangle ADM$ và $\triangle CDN$ có:	

	<p><math>AD = DC</math> (gt)</p> <p><math>ADM = DCN = 90^\circ</math></p> <p><math>\Rightarrow \Delta ADM = \Delta CDN</math> (c.g.c)</p> <p><math>\Rightarrow DM = DN</math> (2 cạnh tương ứng) (1)</p> <p>Do <math>\Delta ADM = \Delta CDN \Rightarrow ADM = CDN</math></p> <p>Mà:</p> <p><math>ADM + MDC = 90^\circ</math></p> <p><math>\Rightarrow MDN = 90^\circ</math> (2)</p> <p>Từ (1) và (2) <math>\Rightarrow \Delta MDN</math> vuông cân</p>	1,0
<b>b</b>	<p>Do tứ giác ABCD là hình vuông nên CO là đường trung trực của BD (3)</p> <p><math>\Delta BMN</math> vuông tại B, có K là trung điểm của MN</p> <p><math>\Rightarrow BK = MK = \frac{1}{2}MN</math></p>	0,5

	<p><math>\Delta MDN</math> vuông tại D có K là trung điểm của MN</p> $\Rightarrow DK = \frac{1}{2}MN$ <p><math>\Rightarrow BK = DK \Rightarrow K</math> thuộc đường trung trực của BD (4)</p> <p>Từ (3) và (4) <math>\Rightarrow C; O; K</math> thẳng hàng.</p>	0,5
2	<p><b>Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (<math>AB &lt; AC</math>), đường cao AH. Kẻ HD vuông góc AB (<math>D</math> thuộc AB). Gọi I là trung điểm của AD, trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho <math>BK = BH</math>.</b></p> <p><b>Chứng minh KD vuông góc với HI.</b></p>	0,5



Lấy  $Q$  là trung điểm của  $HD$ , nối  $BQ$ .

Xét tam giác DHA có:  $IA = ID$  (gt);  $QD = QH$  (cách vẽ)

$\Rightarrow IQ$  là đường trung bình

$\Rightarrow IQ // AH$

0,5

Mà  $AH \perp BC$  (gt)

$\Rightarrow IQ \perp BC$  (quan hệ từ vuông góc đến song song)

Xét  $\triangle IBH$  có 2 đường cao  $HD$  và  $IQ$ ;  $HD$  cắt  $IQ$  tại  $Q$

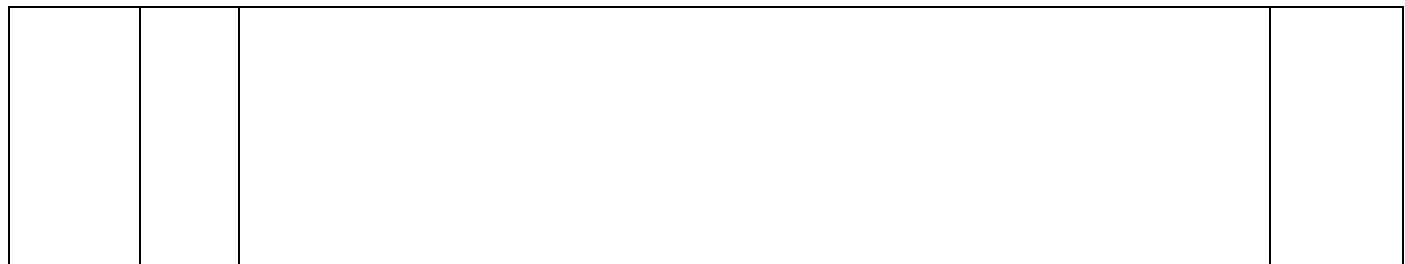
$\Rightarrow Q$  là trực tâm  $\Rightarrow BQ \perp IH$  (tính chất trực tâm)

Xét  $\triangle HKD$  có:

0,5

	<p><math>QH = QD</math> (cách vẽ)</p> <p><math>BH = BK</math> (gt)</p> <p><math>\Rightarrow BQ</math> là đường trung bình</p> <p><math>\Rightarrow BQ // KD</math> mà <math>BQ \perp IH</math> (CMT)</p> <p><math>\Rightarrow KD \perp IH</math> (quan hệ từ vuông góc đến song song)</p> <p>(ĐPCM)</p>	0,5
5 (1,0đ)	<p><b>Cho <math>x</math> là số thực sao cho <math>x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}</math>. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương <math>n</math> thì <math>x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}</math></b></p> <p>Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.</p> <p>Đặt <math>S_n = x^n + \frac{1}{x^n}</math> với <math>n \in \mathbb{Z}^+</math>.</p> <p>Khi đó:</p> <p>+ Bài toán đúng với <math>n = 1</math>: <math>S_1 = 2 \in \mathbb{Z}</math>.</p>	1,0

	<p>+ Giả sử bài toán đúng với hay <math>S_k = x^k + \frac{1}{x^k} \in Z</math></p> <p>Ta cần chứng minh bài toán đúng với <math>n = k + 1</math>:</p> <p>Thật vậy:</p> $S_{k+1} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left( x + \frac{1}{x} \right) \left( x^k + \frac{1}{x^k} \right) - \left( x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} \right) \in Z$ <p>Theo nguyên lý quy nạp thì <math>S_n = x^n + \frac{1}{x^n} \in Z</math>.</p>	0,5
		0,5



<b>PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO</b> <b>THÀNH PHỐ THANH HÓA</b>	<b>KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP THÀNH PHỐ</b> <b>Năm học: 2023-2024</b> <b>Môn thi: Toán</b> <i>Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)</i> <i>Đề gồm 5 câu</i> <i>Ngày thi: 10/02/2023</i>
--	---

**Câu 1:** (4.0 điểm) Cho biểu thức  $A = \left[ \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x(x^2+2)}{x^2+1}$

- 1) Rút gọn biểu thức A.
- 2) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

**Câu 2:** (4.0 điểm)

- 1) Giải phương trình sau:  $x(x+2)^2 = \frac{45}{x+4}$

2) Cho  $a+b=1$  và  $ab \neq 0$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

**Câu 3:** (4.0 điểm)

- 1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $x^2y^2 = 4x^2y - y^3 - 4x^2 + 3y^2 - 1$
- 2) Cho số tự nhiên  $n \geq 2$  và số nguyên tố  $p$  thỏa mãn  $p-1$  chia hết cho  $n$  đồng

thời  $n^3-1$  chia hết cho  $p$ . Chứng minh rằng  $n+p$  là một số chính phương.

**Câu 4:** (6.0 điểm) Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  (khác  $B,C$ ), qua điểm  $A$  kẻ tia  $Ax$  vuông góc với  $AM$  cắt tia  $CD$  tại điểm  $F$ .

- 1) Chứng minh rằng  $AM = AF$
- 2) Trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $M$  sao cho , gọi giao điểm của  $AM, AN$  với  $BD$  lần lượt tại  $Q$  và  $P$  ; gọi  $I$  là giao điểm của  $MP$  và  $NQ$ . Chứng minh  $AI \perp MN$  tại  $H$ .
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác  $AMN$  khi  $M, N$  thay đổi.

**Câu 5:** (2.0 điểm) Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của tam giác.

Chứng minh:  $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} \geq a+b+c$

## ĐÁP ÁN

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>1) (2 điểm)</p> <p>Ta có: <math>A = \left[ \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x(x^2+2)}{x^2+1}</math></p> <p>ĐKXĐ: <math>x \neq \pm 2, x \neq 0</math></p>	0,25đ
	<p>Khi đó: <math>A = \frac{x^2+2}{x^2+1} \left( \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)</math></p> $= \frac{x^2+2}{x^2+1} \cdot \frac{(x-2)(x+1) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4}$	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
	$= \frac{x^2+2}{x^2+1} \cdot \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{2(x^2+2)}{x^2+1} = \frac{2x^2+4}{x^2+1}$ <p>KL: Vậy <math>A = \frac{2x^2+4}{x^2+1}</math> với <math>x \neq \pm 2, x \neq 0</math></p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p>
	2) (2 điểm)	0,5

$$A = \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1} \text{ với } x \neq \pm 2, x \neq 0$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) + 2}{x^2 + 1} = 2 + \frac{2}{x^2 + 1}$$

Để A có giá trị nguyên thì  $\frac{2}{x^2 + 1}$  nguyên, suy ra  $x^2 + 1 \in U(2)$

0,5

Vì  $x^2 + 1 > 0$  nên  $x^2 + 1 \in \{1; 2\}$

$$+) x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (loại)}$$

0,5

$$+) x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ (T/m)}$$

Vậy  $x \in \{-1; 1\}$

0,5

$$1) (2 điểm) Giải phương trình sau: x(x+2)^2 = \frac{45}{x+4}$$

ĐKXĐ:  $x \neq -4$

0,25

$x = 0$  không phải là nghiệm của phương trình nên phương trình tương đương với:

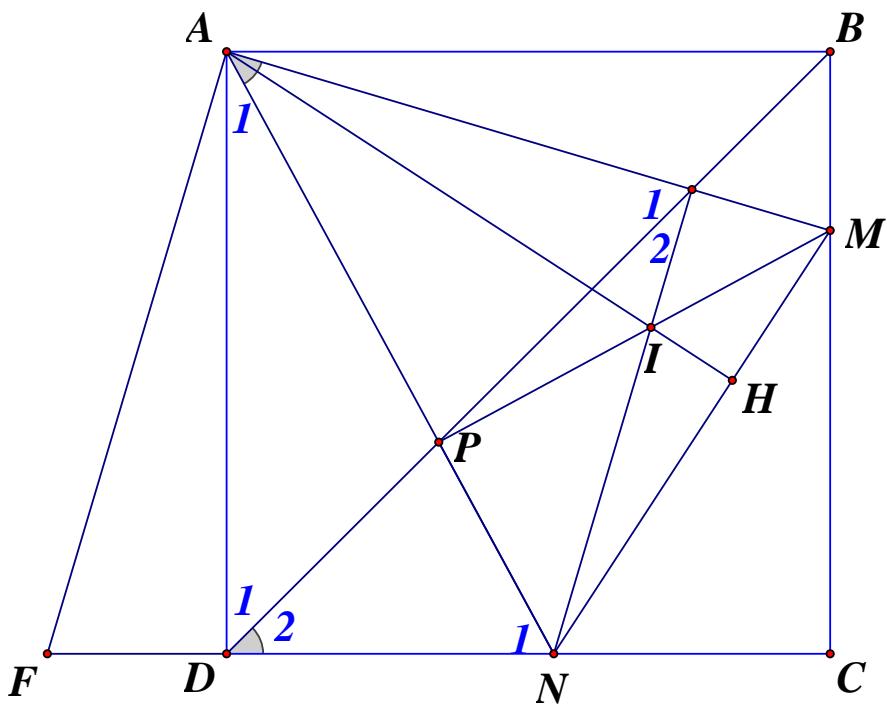
0,5

	$(x+2)^2 = \frac{45}{x^2 + 4x} \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{45}{(x+2)^2 - 4}$	
	Đặt $y = (x+2)^2$ ; ( $y \geq 0$ ), phương trình trở thành:  $y = \frac{45}{y-4} \Leftrightarrow y^2 - 4y - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 & (l) \\ y = 9 & (n) \end{cases}$	0,5
	Với $y = 9 \Rightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3 \\ x+2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$ (thỏa mãn đk)	0,5
	Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; -5\}$	0,25
	2) (2 điểm) Cho $a+b=1$ và $ab \neq 0$ . Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$	
	Với $a+b=1$ và $ab \neq 0$ ta có:  $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{a(a^3-1) + b(b^3-1)}{(a^3-1)(b^3-1)} = \frac{(a^4 + b^4) - (a+b)}{a^3b^3 - (a^3 + b^3) + 1} = \frac{(a^2 + b^2) - 2a^2b^2 - 1}{a^3b^3 - (a+b)^3 + 3ab(a+b) + 1}$	0,5
	$= \frac{[(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 - 1}{a^3b^3 + 3ab}$ (Vì $a+b=1$ và $ab \neq 0$ )	0,5

	$= \frac{1 - 4ab + 4a^2b^2 - 2a^2b^2 - 1}{ab(a^2b^2 + 3)}$ (Vì $a+b=1$ và $ab \neq 0$ )	0,5
	$= \frac{2ab(ab-2)}{ab(a^2b^2 + 3)} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2 + 3}$ (Vì $ab \neq 0$ )	0,5
	Vậy $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2 + 3}$ với $a+b=1$ và $ab \neq 0$	
	<b>1) (2 điểm)</b> Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 = 4x^2y - y^3 - 4x^2 + 3y^2 - 1$	
	$\begin{aligned} x^2y^2 &= 4x^2y - y^3 - 4x^2 + 3y^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x^2y^2 - 4x^2y + 4x^2 &= -y^3 + 3y^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x^2(y^2 - 4y + 4) &= -y^3 + 3y^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x^2(y-2)^2 &= -y^3 + 3y^2 - 1 \end{aligned}$	0,5
	+ ) Xét $y = 2$ : PT vô nghiệm	0,25
	+ ) Xét $y \neq 2$ Ta có: $x^2 = \frac{-y^3 + 3y^2 - 1}{y^2 - 4y + 4} = -y - 1 + \frac{3}{y^2 - 4y + 4}$	0,25
	Vì $x^2 \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2 \in U(3)$	0,25
	Do $(y-2)^2$ là số chính phương nên $(y-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y-2=1 \\ y-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=1 \end{cases}$ ( $T/m: y \neq 2$ )	

	+ ) Với $y = 3$ thì $x^2 = -1$ (vô lí)	0,25
	+ ) Với $y = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} (T/m: x \in \mathbb{Z})$	0,25
		0,25
	Vậy $(x,y) \in \{(1;1), (-1;1)\}$	
	2) (2 điểm) Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố $p$ thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho $n$ đồng thời $n^3 - 1$ chia hết cho $p$ . Chứng minh rằng $n + p$ là một số chính phương.	
	Ta có: $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$	0,25
	Vì $p-1:n \Rightarrow p-1 \geq n \Rightarrow p \geq n+1 > n-1 \Rightarrow n-1 \nmid p$	

	Do đó: $(n-1)(n^2+n+1) : p \Rightarrow n^2 + n + 1 : p$  Từ $p-1 : n \Rightarrow p-1 = kn (\forall k \geq 1) \Rightarrow p = kn+1 \quad (*)$	0,5
	Suy ra: $n^2 + n + 1 : kn+1 \Rightarrow kn+1 \leq n^2 + n + 1 \Rightarrow kn \leq n^2 + n \Rightarrow k \leq n+1 \quad (1)$	0,25
	$n^2 + n + 1 : kn+1 \Rightarrow k(n^2 + n + 1) - n(kn+1) : kn+1 \Leftrightarrow [(k-1)n+k] : kn+1$	0,5
	Vì $k \geq 1 \Rightarrow (k-1)n+k > 0.$  Nên suy ra $(k-1)n+k \geq kn+1 \Leftrightarrow kn-n+k \geq kn+1 \Rightarrow k \geq n+1 \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra: $k = n + 1$ . Khi đó $n+p = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (đpcm).	0,25



1) **Chứng minh rằng:**  $AM = AF$

Xét  $\triangle ABM$  và  $\triangle ADF$  vuông tại B; D có:

$AB = AD$  (cạnh hìn vuông)

$BAM = DAF$  (cùng phụ  $MAD$ )

2,0

Suy ra:  $\triangle ABM = \triangle ADF$  (cgv-gn)

$\Rightarrow AM = AF$  (đpcm)

	<b>2) Chứng minh:</b> $AI \perp MN$ tại $H$ .	
	<p>Ta có: <math>D_2 = PAQ (= 45^\circ)</math> kết hợp <math>APQ = DPN</math> (đối đỉnh)</p> <p>Suy ra: <math>\Delta PDN \sim \Delta PAQ</math> (<math>g.g</math>) <math>\Leftrightarrow Q_1 = N_1</math> (1) và <math>\frac{PN}{PQ} = \frac{PD}{PA}</math> kết hợp <math>APQ = DPN</math></p> <p>Suy ra: <math>\Delta PDA \sim \Delta PNQ</math> (<math>g.g</math>) <math>\Leftrightarrow Q_2 = A_1</math> (2)</p>	<b>0,75</b>
	<p>Từ (1) và (2) suy ra: <math>Q_1 + Q_2 = N_1 + A_1 = 90^\circ</math> (vì tam giác AND vuông tại D)</p> <p>Suy ra: <math>AQN = 90^\circ \Rightarrow NQ \perp AM</math> tại Q.</p> <p>Cmtt: <math>MP \perp AN</math> tại P.</p>	<b>0,75</b>
	<p>Khi đó <math>\Delta AMN</math> có hai đường cao NQ và MP cắt nhau tại I <math>\Rightarrow</math> I là trực tâm.</p> <p>Suy ra AI là đường cao thứ ba của tam giác <math>\Rightarrow AI \perp MN</math> tại H. (đpcm)</p>	<b>0,5</b>
	<p><b>3) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN khi M, N thay đổi.</b></p> <p>Gọi <math>BM = x</math>; <math>DN = y</math> (<math>0 &lt; x; y &lt; a</math>).</p>	<b>0,75</b>

Khi đó:

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{NMC} = a^2 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(a-x)(a-y)$$

$$= a^2 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(a^2 - ax - ay + xy) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}xy$$

Lại có:

$$\Delta MAN = \Delta FAN \left( AM = AF; AN \text{ chung}, \angle MAN = \angle FAN = 45^\circ \right) \Rightarrow AH = AD$$

Suy ra:  $S_{MAN} = \frac{1}{2}AH \cdot MN = \frac{1}{2}AD \cdot MN$ . Đặt  $MN = t \Rightarrow S_{MAN} = \frac{1}{2}at$

Mà  $t = MN = MH + NH = MB + ND = x + y (t > 0)$ .

Khi đó:  $S_{MAN} = \frac{1}{2}at = \frac{1}{2}(a^2 - xy) \Rightarrow at = a^2 - xy$ , thay  $x = t - y$

$$\Rightarrow at = a^2 - (t - y)y \Leftrightarrow at = a^2 + y^2 - ty \Leftrightarrow a^2 - at + \frac{t^2}{4} - ty + y^2 - \frac{t^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 + a^2 - ta - \frac{t^2}{4} = 0. \text{ Vì } \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - ta - \frac{t^2}{4} \leq 0$$

0,75

$$\Leftrightarrow -a^2 + ta + \frac{t^2}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4ta - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (t+2a)^2 \geq 8a^2 \Leftrightarrow t+2a \geq 2\sqrt{2}a \Rightarrow t \geq a(2\sqrt{2}-2)$$

Suy ra:  $S_{AMN} \geq \frac{1}{2} a \cdot a(2\sqrt{2}-2) = a^2(\sqrt{2}-1)$ .

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{t}{2} \\ t=a(2\sqrt{2}-2) \end{cases} \Leftrightarrow x=y=a(\sqrt{2}-1)$ . 0,5

Vậy  $\min(S_{AMN}) = a^2(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow BM = DN = a(\sqrt{2}-1)$

**5** Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của tam giác.

**Chứng minh:**  $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} \geq a+b+c$

Vì  $a, b, c$  là 3 cạnh của tam giác nên:

$$a+b-c > 0; -a+b+c > 0; a-b+c > 0$$

**0,5**

**2d**

Đặt:  $x = a+b-c > 0; y = -a+b+c > 0; z = a-b+c > 0$

Ta có:  $x+y+z = a+b+c$ ,  $a = \frac{y+z}{2}$ ;  $b = \frac{x+z}{2}$ ;  $c = \frac{x+y}{2}$

$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + 3x + 3y + 3z \right) = \frac{1}{4} \left[ 3(x+y+z) + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{xy}{z} + 2 \frac{yz}{x} + 2 \frac{zx}{y} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 3(x+y+z) + \frac{y}{2} \left( \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{x}{2} \left( \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{z}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} [3(x+y+z) + (x+y+z)] = x+y+z$$

Mà  $x+y+z = a+b+c$

1

Suy ra:  $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} \geq a+b+c$

0,5

PHÒNG GIÁO DỤC HUYỆN

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN LỚP 8

CHƯƠNG MỸ

NĂM HỌC 2023-2024

Trường THCS Ngọc Hoà

MÔN: TOÁN

(Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề)

**Bài 1:** (3đ) Chứng minh đẳng thức:  $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = \cotg 45^\circ$

**Bài 2:** (4đ) Cho biểu thức  $Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$

a) Tìm điều kiện của  $x$  để  $Q$  có nghĩa

b) Rút gọn biểu thức  $Q$

**Bài 3:** (3,5đ) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = \frac{y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-4}}{xy}$

**Bài 4:** (3,75đ) Chứng minh rằng nếu  $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$

với  $x \neq y, yz \neq 1, xz \neq 1, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$\text{thì } x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

**Bài 5:** (3,75đ) Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm cạnh BC. Từ đỉnh M vẽ góc  $45^\circ$  sao cho các cạnh của góc này lần lượt cắt AB, AC tại E, F.

Chứng minh rằng:  $S_{\Delta MEF} < \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

**Bài 6:** (2đ) Từ một điểm A ở ngoài đường tròn ( $O ; R$ ), ta kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là một điểm bất kỳ trên đường thẳng đi qua các trung điểm của AB và AC. Kẻ tiếp tuyến MK của đường tròn ( $O$ ). Chứng minh  $MK = MA$



### HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

<i>Bài</i>	<i>Nội dung – Yêu cầu</i>	<i>Điểm</i>
1	$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= 1 \\ &= \cotg 45^\circ \end{aligned}$	1đ 0,5đ 0,75đ 0,25đ 0,5đ
2a	Q có nghĩa $\Leftrightarrow x > 1$ và $x \neq 2$	0,5đ

2b	$Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ $Q = \frac{\sqrt{(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$ $Q = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$ $Q = \frac{ \sqrt{x-1} - 1  + \sqrt{x-1} + 1}{ x-2 } \cdot \frac{x-2}{x-1}$	
		0,75đ

\* Nếu  $1 < x < 2$  ta có:

$$Q = \frac{1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

$$Q = \frac{2}{1-x}$$

\* Nếu  $x > 2$  ta có:

$$Q = \frac{\sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} + 1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1}$$

	$Q = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$	
		0,75đ
		0,25đ
		0,5đ
		0,25đ
		0,25đ
		0,5đ

		0,25
3	<p>Với điều kiện <math>x \geq 1, y \geq 4</math> ta có:</p> $M = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-4}}{y}$ <p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm,</p> <p>Ta có: <math>\sqrt{x-1} = \sqrt{1(x-1)} \leq \frac{1+x-1}{2} = \frac{x}{2}</math></p> $\Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{vì } x \text{ dương})$ <p>Và: <math>\sqrt{y-4} = \frac{1}{2}\sqrt{4(y-4)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{4}</math></p> $\Rightarrow \frac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \frac{1}{4} \quad (\text{vì } y \text{ dương})$	0,25đ 0,75đ 0,5đ

	Suy ra: $M = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2, y = 8$	0,75đ
		0,5đ
		0,25đ
4	$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$	0,5đ

$$\Leftrightarrow (x^2 - yz)(y - xyz) = (y^2 - xz)(x - xyz)$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 + xy^3z + x^2z - x^2yz^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2y - xy^2) - (x^3yz - xy^3z) + (x^2z - y^2z) - (x^2yz^2 - xy^2z^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y) - xyz(x^2 - y^2) + z(x^2 - y^2) - xyz^2(x-y) = 0$$

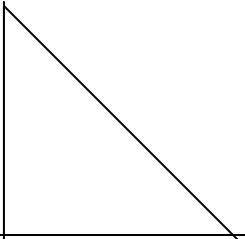
$$\Leftrightarrow (x-y) \left[ xy - xyz(x+y) + z(x+y) - xyz^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow xy - xyz(x+y) + z(x+y) - xyz^2 = 0 \quad (\text{vi } x \neq y \Rightarrow x-y \neq 0)$$

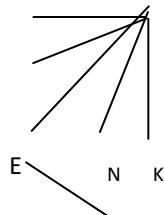
$$\Leftrightarrow xy + xz + yz = xyz(x + y) + xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{xyz(x+y) + xyz^2}{xyz} \quad (\text{vì } xyz \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = x + y + z$$

			0,5d
			0,5d
5		B	

P M



0,25đ

0,25đ

A  $\square$  F Q C

0,5đ

Kẻ MP  $\perp$  AB tại P, MQ  $\perp$  AC tại Q

0,5đ

Kẻ Ex // AC, EC cắt MQ tại K và cắt MF tại N

Do  $\angle EMF = 45^\circ$  nên tia ME, MF nằm giữa hai tia MP và MQ

$$\Rightarrow S_{\Delta MEN} < S_{\Delta MEK} = \frac{1}{2} S_{MPEK}$$

0,5đ

và  $S_{\Delta FEN} < S_{\Delta QEK} = \frac{1}{2} S_{QAEK}$  ( $S_{\Delta FEN} < S_{\Delta QEK}$  vì có cùng chiều cao nhưng đáy EN bé hơn

đáy EK)

Suy ra:  $S_{\Delta MEN} + S_{\Delta FEN} < \frac{1}{2} S_{APMQ} \Leftrightarrow S_{\Delta MEF} < \frac{1}{2} S_{APMQ}$  (\*)

Chứng minh được:  $S_{\Delta MAP} = \frac{1}{2} S_{\Delta MAB}$

0,5đ

$$S_{\Delta MAQ} = \frac{1}{2} S_{\Delta MAC}$$

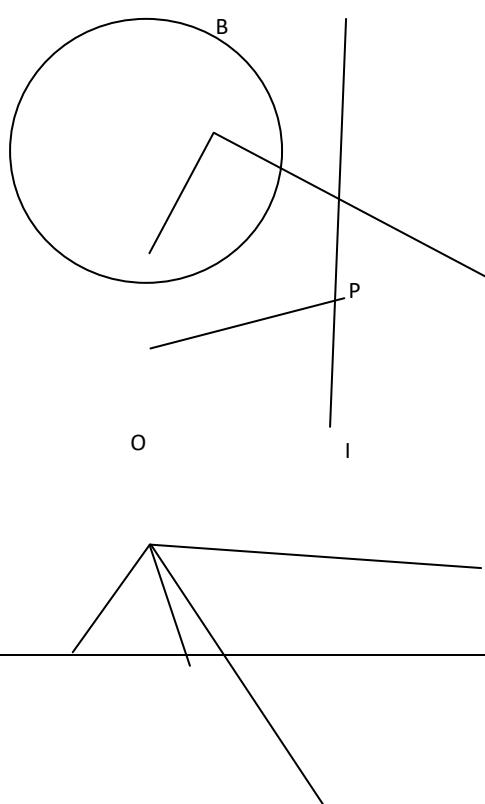
$$\Rightarrow S_{APMQ} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \quad (**)$$

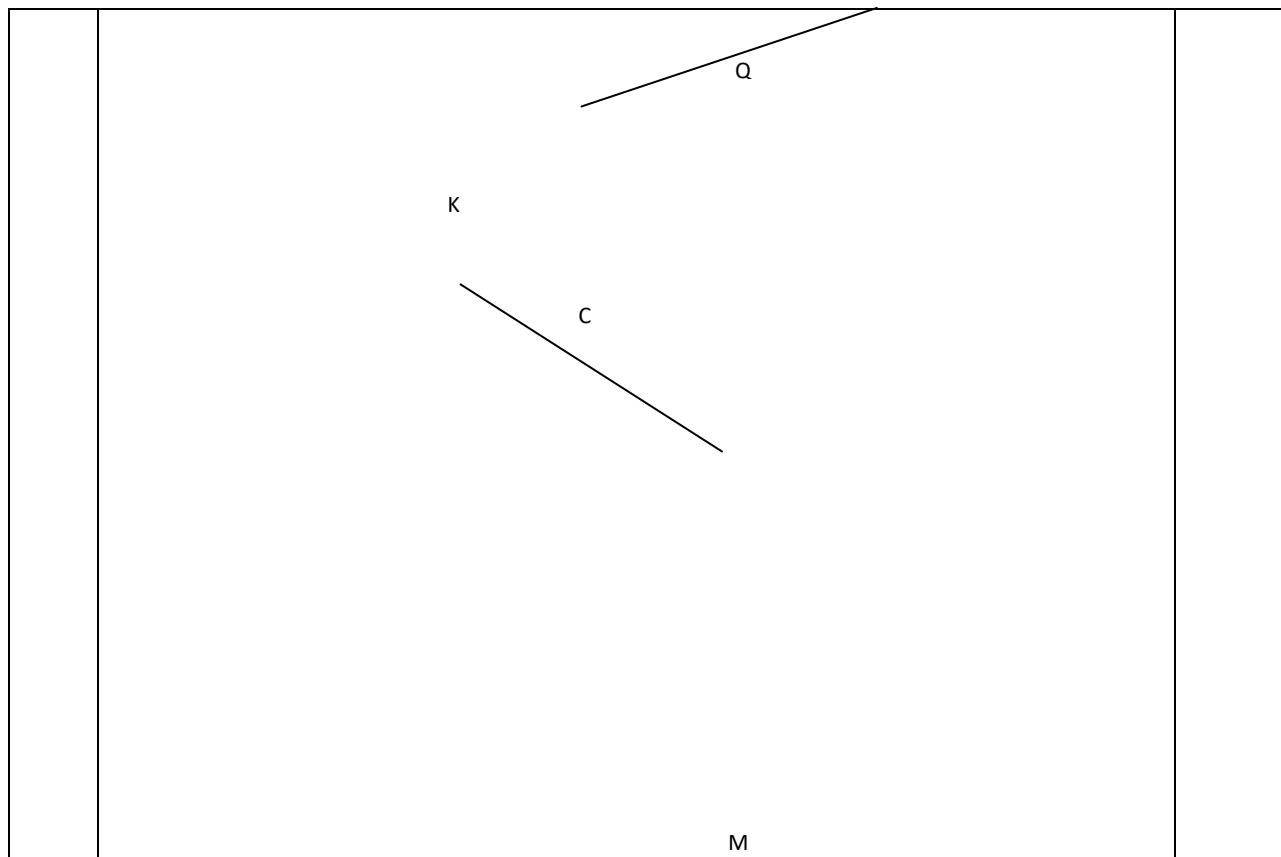
0,5đ

Từ (\*) và (\*\*) ta có:  $S_{\Delta MEF} < \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

0,25đ

6





Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB,AC. Giao điểm của OA và PQ là I.

AB và AC là hai tiếp tuyến nên  $AB = AC$  và AO là tia phân giác của  $\angle BAC$

$\Rightarrow \Delta PAQ$  cân ở A và  $AO \perp PQ$

Áp dụng Pitago ta có:

0,25đ

$MK^2 = MO^2 - R^2$  ( $\Delta MKO$  vuông tại K)

0,25đ

	$MK^2 = (MI^2 + OI^2) - R^2 \quad (\Delta MOI \text{ vuông tại } I)$  $MK^2 = (MI^2 + OI^2) - (OP^2 - PB^2) \quad (\Delta BOP \text{ vuông tại } B)$  $MK^2 = (MI^2 + OI^2) - [(OI^2 + PI^2) - PA^2] \quad (\Delta IOP \text{ vuông tại } I \text{ và } PA = PB)$  $MK^2 = MI^2 + AI^2 \quad (\Delta IAP \text{ vuông tại } I)$  $MK^2 = MA^2 \quad (\Delta IAM \text{ vuông tại } I)$  $\Rightarrow MK = MA$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
--	---	---

**ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN****Năm học: 2023-2024-----****Môn thi: Toán 8****Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)****Bài 1 (4,5 điểm).**

- 1.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$  (với  $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$ ).

- a) Rút gọn biểu thức  $A$ .  
 b) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x, y$  thoả mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y)$$

- 2.** Cho các số dương  $x, y$  thoả mãn  $x + y = 1$ . Chứng minh rằng  $x^3 + y^3 + xy \geq \frac{1}{2}$

**Bài 2 (5,0 điểm).**

a) Giải phương trình  $(x^2 - 3x + 2)(x - 5)(x - 6) = 252$

b) Cho  $B = n^3 - 2019n^2 + 2n$  ( $n$  là số nguyên). Chứng minh rằng  $B$  chia hết cho 6.

c) Cho biểu thức  $P = \frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3}$ . Tìm  $x$  là số nguyên để giá trị của biểu thức  $P$  là số nguyên.

### Bài 3 (4,0 điểm).

a) Cho tam giác có ba cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ . Chứng minh rằng

tam giác đó là tam giác đều.

b) Cho  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $x + y + z = 2023$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức:

$$M = \frac{x^3 + y^3}{2xy} + \frac{y^3 + z^3}{2yz} + \frac{z^3 + x^3}{2zx}.$$

c) Một nhóm học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi Toán quốc tế đến từ 9 quốc gia:

Trung Quốc, Mỹ, Hàn Quốc, Canada, Đức, Anh, Iran, Nam Phi, Pháp. Mỗi nước chỉ có

đúng một học sinh. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm trên. Tính xác suất của biến cő:

A: “Học sinh được chọn đến từ châu Á”.

B: “Học sinh được chọn đến từ châu Âu”.

**Bài 4 (4,5 điểm).**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các đường cao  $BE$  và  $CF$  cắt nhau tại  $H$ . Trên đoạn  $BH$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AMC = 90^\circ$ .

a) Chứng minh  $\Delta AEB \sim \Delta AFC$ .

b) Chứng minh  $AM^2 = AE \cdot AC$

c) Trên đoạn  $CH$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = AM$ . Tính số đo góc  $ANB$ .

**Bài 5 (2,0 điểm).**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Kẻ  $HE$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ , lấy điểm  $M$  trên đoạn  $HC$  sao cho  $BH = HM$ . Chứng minh rằng  $AM$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $HE$ .

----- HẾT -----

### HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN 8

**Bài 1 (4,5 điểm).**

Câu	Lời giải	Điểm
1.1 (2,5 đ)	<p>a) <math display="block">A = \left( \frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}</math></p> $= \left[ \frac{x^2}{x(x+y)} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y(x+y)} \right] : \frac{x^2 + xy + y^2}{x+y}$	0,25
	$= \frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x+y) - xy^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$	0,25

	$= \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,25
	$= \frac{(x-y)[xy - (x+y)^2]}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,25
	$= \frac{-(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2} = \frac{y-x}{xy}$	0,5
	b) $x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x = 1, y = -2$ (TMĐK $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$ )	0,25
	Với $x = 1$ và $y = -2$ , ta có: $A = \frac{-2-1}{-2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$	0,25
1.2	b) Vì $x + y = 1$ nên $y = 1 - x$ .	0,25
(2,0 đ)	Ta có $x^3 + y^3 + xy = x^3 + (1-x)^3 + x(1-x)$	0,25

	$= x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + x - x^2 = 2x^2 - 2x + 1$	0,5
	$= 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$	0,5
	$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ . Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$	0,5

Bài 2 (5,0 điểm).

Câu	Lời giải	Điểm
2.a (1,5 đ)	<p>a) <math>(x^2 - 3x + 2)(x - 5)(x - 6) = 252</math></p> $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 5)(x - 6) = 252$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 6)(x - 2)(x - 5) = 252$ $\Leftrightarrow (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10) = 252$	0,25
	Đặt $x^2 - 7x + 8 = y$ khi đó PT trên trở thành: $\Leftrightarrow (y - 2)(y + 2) = 252 \Leftrightarrow y^2 = 256 \Leftrightarrow y = 16$ hoặc $y = -16$ .	0,25

	Với $y = 16$ , ta có $x^2 - 7x + 8 = 16 \Leftrightarrow (x - 8)(x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow x = 8; x = -1$	0,25
	Với $y = -16$ , ta có: $x^2 - 7x + 8 = -16 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 24 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} = 0$ (PT vô nghiệm)	0,25
	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 8\}$	0,25
<b>2.b</b>  <b>(2,0 đ)</b>	b) $B = n^3 - 2019n^2 + 2n = (n^3 - 3n^2 + 2n) - 2016n^2$ $= n(n^2 - 3n + 2) - 2016n^2$ $= n(n - 1)(n - 2) - 2016n^2$	0,25 0,25 0,25
	Ta có: $n(n - 1)(n - 2)$ là ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3. Do đó: $n(n - 1)(n - 2) : 6$ (1)	0,5
	Lại có $2016n^2 : 6$ (2)	0,5

	Từ (1) và (2) suy ra: $B$ chia hết cho 6.	0,25
2.c (1,5 đ)	c) $P = \frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3} = \frac{x^3 + 3x - 2x^2 - 6 + 4x + 13}{x^2 + 3}$ $= \frac{x(x^2 + 3) - 2(x^2 + 3) + 4x + 13}{x^2 + 3} = x - 2 + \frac{4x + 13}{x^2 + 3}$	0,25
	Vì $x$ là số nguyên nên $x - 2$ là số nguyên.	0,25
	Để giá trị $P$ là số nguyên thì $4x + 13 \vdots (x^2 + 3)$	
	$\Rightarrow (4x - 13)(4x + 13) \vdots (x^2 + 3)$	0,25
	$\Rightarrow 16x^2 - 169 \vdots (x^2 + 3) \Rightarrow 16(x^2 + 3) - 217 \vdots (x^2 + 3)$	0,25
	Suy ra $217 \vdots (x^2 + 3)$ , mà $x^2 + 3 \geq 3$	0,25
	nên $x^2 + 3 = 7$ hoặc $x^2 + 3 = 31 \Rightarrow x^2 = 4; x^2 = 28$	
	Ta có $x = \pm 2$ là giá trị cần tìm.	0,25

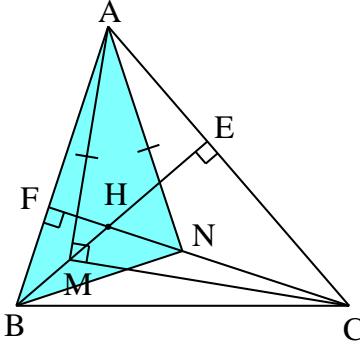
**Bài 3 (3,0 điểm).**

Câu	Lời giải	Điểm
<b>3.a</b> <b>(1,5)</b> d)	<p>a) Ta có <math>a^3 + b^3 + c^3 = 3abc</math></p> $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc = 0$ $\Leftrightarrow [(a+b)^3 + c^3] - 3ab(a+b+c) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2] - 3ab(a+b+c) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2 - 3ab] = 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 0$	0,25
	Vì $a, b, c$ là ba cạnh của tam giác nên $a + b + c > 0$ .	
	Do đó $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0 \Leftrightarrow a = b = c$	0,25
	Vậy tam giác trên là tam giác đều.	
<b>3.b</b>	b) $M = \frac{x^3 + y^3}{2xy} + \frac{y^3 + z^3}{2yz} + \frac{z^3 + x^3}{2zx}$	0,25

<p><b>(1,5)</b></p> <p>d)</p>	$= \frac{x^2}{2y} + \frac{y^2}{2x} + \frac{y^2}{2z} + \frac{z^2}{2y} + \frac{z^2}{2x} + \frac{x^2}{2z}$ <p>Áp dụng bất đẳng thức <math>a^2 + b^2 \geq 2ab</math>, ta có:</p> $\frac{x^2}{2y} + \frac{z^2}{2y} = \left( \frac{x}{\sqrt{2y}} \right)^2 + \left( \frac{z}{\sqrt{2y}} \right)^2 \geq 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2y}} \cdot \frac{z}{\sqrt{2y}} = \frac{xz}{y}$ <p>Tương tự: <math>\frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{2x} \geq \frac{yz}{x}</math>; <math>\frac{x^2}{2z} + \frac{y^2}{2z} \geq \frac{xy}{z}</math></p> <p>Do đó: <math>M = \frac{x^3 + y^3}{2xy} + \frac{y^3 + z^3}{2yz} + \frac{z^3 + x^3}{2zx} \geq \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}</math></p> <p>Áp dụng bất đẳng thức <math>(a + b)^2 \geq 4ab</math>, ta có:</p> $\frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z = 2023 \text{ nên } M \geq 2023.$ <p>Dấu “=” xảy ra khi <math>x = y = z = \frac{2023}{3}</math></p> <p>Vậy GTNN của biểu thức M là <math>2023</math> khi <math>x = y = z = \frac{2023}{3}</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
-------------------------------	--	---

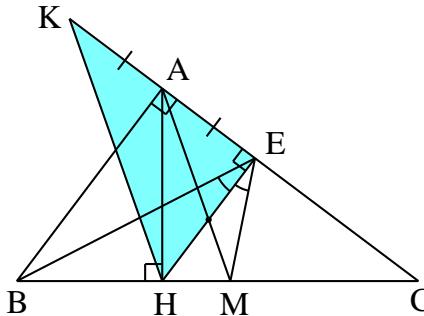
3c (1,0)	<p>Số biến có thực nghiệm là 9</p> <p><b>a/</b> Học sinh được chọn đến từ châu Á là học sinh đến từ Trung Quốc, Hàn Quốc, Iran nên số lần xảy ra của biến cő A là 3.</p> <p>Vậy xác suất của biến cő A là <math>\frac{3}{9} = \frac{1}{3}</math>.</p> <p><b>b/</b> Học sinh được chọn đến từ châu Âu là học sinh đến từ Đức, Anh, Pháp nên số lần xảy ra của biến cő B là 3.</p> <p>Vậy xác suất của biến cő B là <math>\frac{3}{9} = \frac{1}{3}</math>.</p>	<p>0,5</p> <hr/> <p>0,5</p>
-------------	---	-----------------------------

**Bài 4 (4,5 điểm).**

Câu	Lời giải	Điểm
<b>4.a</b> <b>(1,0 đ)</b>	 <p>a) Xét <math>\Delta AEB</math> và <math>\Delta AFC</math> có:  <math>AEB = AFC (= 90^\circ)</math> và <math>A</math> (chung)  Suy ra: <math>\Delta AEB \sim \Delta AFC</math> (g.g)</p>	0,5
<b>4.b</b> <b>(1,5 đ)</b>	<p>b) Xét <math>\Delta AEM</math> và <math>\Delta AMC</math> có:  <math>AEM = AMC (= 90^\circ)</math>  <math>MAE</math> (chung)  Suy ra: <math>\Delta AEM \sim \Delta AMC</math> (g.g)</p>	0,5
	$\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AM^2 = AE \cdot AC$ (1)	0,5
<b>4.c</b> <b>(2,0 đ)</b>	<p>c) <math>\Delta AEB \sim \Delta AFC</math> nên: <math>\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB \cdot AF = AE \cdot AC</math> (2)  Từ (1) và (2) suy ra: <math>AM^2 = AF \cdot AB</math></p>	0,25

	Vì $AN = AM$ nên $AN^2 = AF \cdot AB$	0,5
	Suy ra: $\Delta ANB \sim \Delta AFN$ (c.g.c)	0,5
	$\Rightarrow ANB = AFN = 90^\circ$	0,5

Bài: 5 (2,0 điểm)

Câu	Lời giải	Điểm
	 <p>Trên tia đối của tia <math>AC</math> lấy điểm <math>K</math> sao cho <math>AK = AE</math>.</p> <p>Vì <math>HE \parallel AB</math> nên <math>\frac{BH}{BC} = \frac{AE}{AC}</math></p> <p>(định lí Thales)</p>	0,25
	<p>Mà <math>AE = AK</math> nên <math>\frac{BH}{BC} = \frac{AK}{AC}</math> (1)</p>	0,25
	<p>Ta có <math>BEH = HEM</math> nên <math>EH</math> là đường phân giác trong của <math>\Delta BEM</math>.</p>	0,25

	Lại có $HE \perp AC$ nên $EC$ là đường phân giác ngoài của $\Delta BEM$	0,25
	Suy ra: $\frac{MH}{BH} = \frac{CM}{CB} \left(= \frac{EM}{BE}\right)$	0,25
	$\Rightarrow \frac{BH}{CB} = \frac{HM}{CM}$ (2)	0,25
	Từ (1), (2) suy ra: $\frac{AK}{AC} = \frac{HM}{CM} \Rightarrow AM \parallel HK$ (theo định lí đảo Thales)	0,25
	$\Delta EHK$ có $AK = AE$ và $AM \parallel HK$ nên $AM$ đi qua trung điểm của $HE$ (đpcm)	0,25
	<i>Lưu ý: Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng, lập luận chặt chẽ, kiến thức phù hợp với cấp học thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.</i>	

## MÔN TOÁN 8

Thời gian làm bài :120 phút

**PHẦN I: ĐIỀN KẾT QUẢ:****Câu 1:** Xác định các hệ số  $a, b$  để đa thức  $f(x) = x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức

$$x^2 + x - 6$$

**Câu 2:** Tính giá trị của biểu thức  $P = 4x^2 + 5x + 1$  biết  $|x| = 2$ .**Câu 3:** Tìm  $x; y$  để biểu thức:  $B = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 2014$  đạt GTNN**Câu 4:** Hiệu các bình phương của 2 số tự nhiên lẻ liên tiếp bằng 40. Tìm hai số.**Câu 5:** Tìm các số  $x, y$  biết  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$  và  $x - 2y = -12$ .**Câu 6:** Tìm  $n$  nguyên dương để:  $n^2 - 3n + 1$  là số chính phương**Câu 7:** Cho  $x - 2y = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = x^2 + y^2 + 4$

**Câu 8:** Bạn Hùng được mừng tuổi 24 tờ tiền loại 20 000đ, 50 000đ, 100 000đ. Biết giá trị mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi Hùng có bao nhiêu tiền mừng tuổi khi đó?

**Câu 9:** Tính diện tích của hình thang vuông biết hình thang đó có 1 góc  $45^0$ ,

độ dài 2 đáy lần lượt là 8cm; 12 cm

**Câu 10:** Cho tam giác ABC, trên AB lấy điểm N sao cho  $AN=4NB$ . Kẻ NM song song với BC. Biết  $BC=20\text{cm}$ . Tính NM

## PHẦN II: TRÌNH BÀY CHI TIẾT :

**Câu 11:**

a) Tìm các số x, y, z biết :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

$$\text{và } x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3^{2010}$$

b) Cho 3 số thực x; y; z đôi một khác nhau và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$$\text{Tính } A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{zx}{y^2 + 2zx} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$$

**Câu 12:** Cho hình bình hành ABCD. Các tia phân giác của các góc A, B, C, D của hình bình hành lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H.

- a) Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh rằng  $EG = FH$  và bằng hiệu giữa hai cạnh kề một đỉnh của hình bình hành ABCD.
- c) Hình bình hành ABCD cần có thêm điều kiện gì để EFGH là hình vuông?

- Hết -

### ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

**PHẦN I: ĐIỀN KẾT QUẢ :** (10 điểm mỗi câu đúng cho 1 điểm)

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5

a=-7; b=6	P= 27; P=7	x= 2; y=2	9;11	x =6; y =9
<b>Câu 6</b>	<b>Câu 7</b>	<b>Câu 8</b>	<b>Câu 9</b>	<b>Câu 10</b>
n=3	$\frac{21}{5}$	900.000 đồng	40cm <sup>2</sup>	NM=16 cm

**PHẦN II: TRÌNH BÀY CHI TIẾT :**

<b>Câu 11</b>	Ta có:  a) $\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 &= 2xy + 2yz + 2zx \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x-y=0 \text{ và } y-z=0 \text{ và } z-y=0 \\ \Leftrightarrow x=y=z \end{aligned}$  $x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3^{2010}$	1,5 đ
---------------	--	-------

	$\Leftrightarrow x^{2009} + x^{2009} + x^{2009} = 3^{2010}$ $\Leftrightarrow 3 \cdot x^{2009} = 3 \cdot 3^{2009}$ $\Leftrightarrow x^{2009} = 3^{2009}$ $\Leftrightarrow x = 3$	1,5 đ
Câu	ĐKXĐ : $x ; y ; z \neq 0$	

**12:** Từ giả thiết:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{yz + xz + xy}{xyz} = 0 \Rightarrow yz + xz + xy = 0$

$$\Rightarrow yz = -xy - xz \Rightarrow x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - xz = (x - z)(x - y)$$

Tương tự ta có:  $z^2 + 2xy = (z - x)(z - y)$

$$y^2 + 2xz = (y - z)(y - x)$$

Khi đó:  $A = \frac{yz}{(x - z)(x - y)} + \frac{xz}{(y - z)(y - x)} + \frac{xy}{(z - x)(z - y)}$

	$  \begin{aligned}  &= \frac{yz(y-z) + xz(z-x) + xy(x-y)}{(x-z)(x-y)(y-z)} \\  &= \frac{yz(y-z) - xz(x-z) + xy[(x-z) - (y-z)]}{(x-z)(x-y)(y-z)} \\  &= \frac{yz(y-z) - xz(x-z) + xy(x-z) - xy(y-z)}{(x-z)(x-y)(y-z)} \\  &= \frac{x(x-z)(y-z) - y(y-z)(x-z)}{(x-z)(x-y)(y-z)} \\  &= \frac{(x-z)(x-y)(y-z)}{(x-z)(x-y)(y-z)} = 1  \end{aligned}  $	2,5đ
Câu 13:		
	<p>Tam giác AHD có: <math>HAD + HDA = 1/2(A+D) = 90^0</math>. Nên</p> <p><math>AHD = 90^0</math></p> <p>Tương tự: <math>BFC = 90^0</math>, <math>AEB = 90^0</math></p> <p>Do đó tứ giác EFGH là hình chữ nhật.</p>	1,5đ
	<p>C/m tam giác ABM cân tại B, do đó E là trung điểm của AM.</p> <p>C/m tương tự G là trung điểm của CN.</p>	1,5đ

	<p>Nên BG là đường trung bình của hình bình hành AMCN  nên <math>EG = 1/2(MC+AN)=MC</math>.</p> <p>Suy ra <math>MC=CB-BM= CB-BA</math></p> <p>Vậy <math>EG=FH=CB-AB</math></p>	
	<p>C/m <math>EG//AD</math> , <math>FH//AB</math></p> <p>Hình chữ nhật EFGH là hình vuông <math>\Leftrightarrow EG \perp FH \Leftrightarrow AD \perp AB</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \angle A = 90^\circ \Leftrightarrow ABCD</math> là hình chữ nhật</p> <p>( Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)</p>	<b>1,5đ</b>

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN

TOÁN 8 VÒNG II NĂM HỌC 2023 – 2024

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

Ngày thi 09 tháng 12 năm 2023

Đề thi có 01 trang

Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đền

**Bài 1: (4,0 điểm).**a) Phân tích đa thức:  $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$  thành nhân tử.b) Cho  $a + b = x + y$  và  $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ .Chứng minh:  $a^n + b^n = x^n + y^n$  (với mọi số tự nhiên n)**Bài 2: (4,0 điểm).**

a) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu  $4a^2 + 3ab - 11b^2$  chia

hết cho 5 thì  $a^4 - b^4$  chia hết cho 5.

b) Tìm phần dư của phép chia đa thức  $P(x)$  cho  $(x-1)(x+2)$ . Biết rằng đa thức  $P(x)$  chia cho  $(x-1)$  dư 7 và chia cho  $(x+2)$  dư 1.

**Bài 3: (4,0 điểm).**

a) Tìm  $x$  biết:  $(x-1)(x^2 + 3x - 7) = |x^3 - 1|$

b) Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$

**Bài 4: (6,0 điểm).**

**1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.**

**Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:**

a) Tam giác DFE cân.

b) K là trung điểm của CF.

**2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho**

H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP.

Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.

**Bài 5: (2,0 điểm).**

Cho các số thực  $a, b, c$  dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

Chứng minh:  $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$

-----Hết-----

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU CHẤM

*Biểu chấm gồm 02 trang*

**KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 - VÒNG II**

**NĂM HỌC 2023 – 2024**

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm

	a) Phân tích đa thức: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$ thành nhân tử.	2,0
	Ta có: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = (2x + y)^3 - 6xy(2x + y) + z^3 - 6xyz$	0,75
	$= (2x + y + z)[(2x + y)^2 - z(2x + y) + z^2] - 6xy(2x + y + z)$	0,75
	$= (2x + y + z)(4x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - yz)$	0,5
Bài 1 4,0đ	b) Cho $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ . Chứng minh: $a^n + b^n = x^n + y^n$ (với mọi số tự nhiên $n$ )	2,0
	Do $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (a - x)(a + x) = (y - b)(y + b)$ Mà $a + b = x + y$ nên $a - x = y - b$ $\Rightarrow (y - b)(a + x) = (y - b)(y + b) \Rightarrow (y - b)(a + x) - (y - b)(y + b) = 0$ $\Rightarrow (y - b)(a + x - b - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x - b - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x = b + y \end{cases}$	0,5
	Xảy ra 2 trường hợp:  TH1: $b = y$ khi đó $a = x$ thì $a^n + b^n = x^n + y^n$  TH 2: $a + x = b + y$ mà $a + b = x + y \Rightarrow a = y$ và $b = x$  Khi đó $a^n + b^n = x^n + y^n$	

	Vậy với $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ thì $a^n + b^n = x^n + y^n$ (với mọi số tự nhiên $n$ ).	0,5
		0,5
		0,5
a)	Với $a, b$ là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.	2,0
Bài 2	Ta có: $4a^2 + 3ab - 11b^2 : 5 ; 5a^2 + 5ab - 10b^2 : 5$	
4.0đ	$(5a^2 + 5ab - 10b^2) - (4a^2 + 3ab - 11b^2) : 5$ $\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 : 5 \Rightarrow (a + b)^2 : 5$  $\Rightarrow a + b : 5 \quad (\text{Vì } 5 \text{ là số nguyên tố})$	0,5
		0,5

$$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) : 5$$

0,5

0,5

**b) Tìm phần dư của phép chia đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $(x-1)(x+2)$ . Biết**

**rằng đa thức  $P(x)$  chia cho  $(x-1)$  dư 7 và chia cho  $(x+2)$  dư 1.**

2,0

Do  $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$  là đa thức bậc hai nên phần dư của phép chia  $P(x)$

0,25

cho  $(x-1)(x+2)$  là một đa thức có bậc nhỏ hơn 2.

Gọi phần dư cần tìm là  $ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

Ta có tồn tại các đa thức  $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$  thỏa mãn:

0,75

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x)(x-1)(x+2) + ax + b \\ P(x) = Q_2(x)(x-1) + 7 \\ P(x) = Q_3(x)(x+2) + 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } P(1) = 7 \text{ nên } a + b = 7$$

$$\text{Vì } P(-2) = 1 \text{ nên } -2a + b = 1$$

$$\text{Từ đó ta được } \begin{cases} a + b = 7 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy phần dư cần tìm là:  $2x + 5$ .

0,25

0,25

0,25

0,25

	<b>a) Tìm x biết:</b> $(x-1)(x^2 + 3x - 7) =  x^3 - 1 $	<b>2,0</b>
	Vì $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ ; Do $x^2 + x + 1 > 0 \forall x$	
	Nên ta xét 2 trường hợp	0,25
	TH1: Nếu $x \geq 1$ ta có	
<b>Bài 3 4,0đ</b>	$(x-1)(x^2 + 3x - 7) = x^3 - 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x - 7) = (x-1)(x^2 + x + 1)$	0,75
	$\Leftrightarrow (x-1)(2x-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-8=0 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=4 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$	
	TH2: Nếu $x < 1$ ta có	
	$(x-1)(x^2 + 3x - 7) = -(x^3 - 1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x - 7) = -(x-1)(x^2 + x + 1)$	
	$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 4x - 6) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+3=0 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (không thỏa mãn)} \\ x=-3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$	
	Vậy $x \in \{1; -3; 4\}$	

0,75

0,25

b) Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$  (1)

2,0

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$

Ta thấy  $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$

$$x^4 + x^2 + 20 + 8x^2 = x^4 + 4x^2 + 5x^2 + 20 = (x^2 + 4)(x^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) < y(y + 1) \leq (x^2 + 4)(x^2 + 5)$$

0,5

Vì  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên ta xét các trường hợp sau

$$+ TH1: y(y + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Với } x^2 = 9, \text{ ta có } y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$$

0,25

$$\Leftrightarrow y = 10 ; y = -11 \text{ (t.m)}$$

$$+ TH2. y(y + 1) = (x^2 + 2)(x^2 + 3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$$

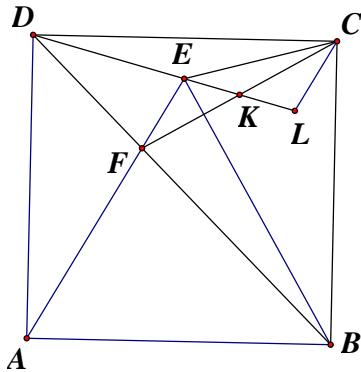
$$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$$

$$+ TH3. y(y + 1) = (x^2 + 3)(x^2 + 4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$$

$$+ TH4. x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 9x^2 + 20 \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

0,25

	Với $x^2 = 0$ , ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5 ; y = 4$	
		0,25
		0,25
		0,25
Bài 4.1 4,0đ	<p>1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.</p> <p>Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:</p> <p>a) Tam giác DFE cân.</p> <p>b) K là trung điểm của CF.</p>	4,0



a) Ta có  $\triangle ABE$  đều nên  $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$  tại A  $\Rightarrow DAE = 30^\circ$

0,5

$\triangle ABD$  vuông cân tại A nên  $BDA = 45^\circ$  và  $DAF = 30^\circ \Rightarrow DFE = 75^\circ$

0,75

c/m  $\triangle ADE$  cân tại A

Câu 1 Suy ra  $\triangle DFE$  cân tại D.

0,75

4,0đ

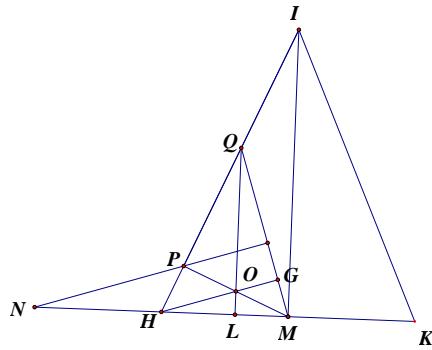
b) Vì  $ADE = 75^\circ \Rightarrow CDE = 15^\circ$

Từ  $DEF = 75^\circ \Rightarrow LEF = 105^\circ$

Từ C đường thẳng song song với AE cắt DK ở L.

0,5

	<p>Ta có <math>DLC = FEL = 105^0 \Rightarrow DCL = 60^0</math></p> <p>Suy ra: <math>\Delta ABE</math> đều</p> <p><math>EBA = 60^0; DBA = 45^0 \Rightarrow FBE = 15^0</math></p> <p><math>\Rightarrow FBE = LDC; DC = BE; FEB = LCD</math></p> <p><math>\Delta FEB = \Delta LCD (g.c.g) \Rightarrow CL = EF</math></p> <p>Mà <math>CL // FE \Rightarrow CEFL</math> là hình bình hành <math>\Rightarrow CK = KF</math></p>	0,5
Bài 4.2 2,0đ	<p><b>2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP. Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.</b></p>	2,0



2. Gọi O là trung điểm của PM  $\Rightarrow$  OQ là đường trung bình của tam giác IMP

0,5

$\Rightarrow$  OQ // IM

$\Rightarrow$  Mà IM vuông góc với HK  $\Rightarrow$  OQ vuông góc với HK

0,5

$\Rightarrow$  Lại có MP vuông góc với HI  $\Rightarrow$  O là trực tâm của tam giác QHM

$\Rightarrow$  HO vuông góc với QM.

0,5

Vì OH là đường trung bình của tam giác NMP nên OH // PN

NP vuông góc với QM.

		0,5
	<p><b>Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn <math>a^2 + b^2 + c^2 = 3</math>. Chứng minh rằng:</b></p> $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$	
<b>Bài 5</b> <b>2,0đ</b>	<p>Đặt <math>E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2}</math></p> <p>Chứng minh được bất đẳng thức <math>\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}</math></p> <p>Ta có: <math>E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} = \frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2} + \frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2} + \frac{4c^4}{2c^3+2c^2a^2}</math></p> <p>Áp dụng <math>\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}</math> ta có: <math>E \geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2a^2b^2+2b^3+2b^2c^2+2c^3+2c^2a^2}</math></p> <p>Vì <math>\frac{a^2+1}{2} \geq a</math> nên <math>a^4 + a^2 \geq 2a^3</math>; <math>\frac{b^2+1}{2} \geq b</math> nên <math>b^4 + b^2 \geq 2b^3</math>; <math>\frac{c^2+1}{2} \geq c</math> nên <math>c^4 + c^2 \geq 2c^3</math></p>	0,25

$$E \geq \frac{(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2}{2a^3 + 2a^2b^2 + 2b^3 + 2b^2c^2 + 2c^3 + 2c^2a^2} \geq \frac{36}{a^4 + a^2 + 2a^2b^2 + b^4 + b^2 + 2b^2c^2 + c^4 + c^2 + 2c^2a^2}$$

$$E \geq \frac{36}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow E \geq \frac{36}{12}$$

0,25

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

0,25

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3 \Rightarrow \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$$

$$\text{Vậy } \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$$

0,25

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

0,25

0,25

		0,25
		0,25

PHÒNG GD&ĐT YÊN ĐỊNH

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN

---

VĂN HÓA VÒNG I CẤP TỈNH

Trường THCS Yên Phú

Môn thi: Toán Thời gian thi: 150 phút (*không kể thời*

*gian giao đề*)

Đề thi gồm: 01 trang

**Câu 1 (4 điểm):** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- a) Rút gọn biểu thức  $A$
- b) Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $A$  nhận giá trị nguyên
- c) Tìm  $x$  để  $|A| = A$

**Câu 2 (4 điểm):** a) Giải phương trình:  $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) - 2x^2 = 0$ .

b) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n, z$  thỏa mãn:  $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$ .

**Câu 3 (4 điểm):** a) Biết  $4a^2 + b^2 = 5ab$  với  $2a > b > 0$ .

Tính giá trị biểu thức:  $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

b) Cho số tự nhiên  $n > 3$ . Chứng minh rằng nếu  $2^n = 10a + b$  ( $0 < b < 10$ ) thì tích  $ab$  chia hết cho 6

**Câu 4. (6 điểm)** 1. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy E, trên tia đối của tia CB lấy F sao cho  $AE = CF$

a) Chứng minh  $\Delta EDF$  vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi I là trung điểm của  $EF$ .

Chứng minh  $O, C, I$  thẳng hàng

2. Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại A. Các điểm  $D, E$  theo thứ tự di chuyển trên

$AB, AC$  sao cho  $BD = AE$ . Xác định vị trí điểm  $D, E$  sao cho:

a)  $DE$  có độ dài nhỏ nhất

b) Tứ giác  $BDEC$  có diện tích nhỏ nhất

**Câu 5. (2 điểm)** Cho  $a, b, c$  là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
		0,5

1	<p>a) ĐKXD: <math>x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}</math></p> $A = \left( \frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$ $= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$ <p>b) Để <math>A</math> nguyên, thì <math>2 : (1-2x)</math></p> <p>Từ đó tìm được <math>x = 1</math> và <math>x = 0</math></p> <p>Kết hợp điều kiện <math>\Rightarrow x = 0</math></p> <p>c) Ta có:</p> $ A  = A \Leftrightarrow A > 0$ $\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ <p>Kết hợp với điều kiện: <math>-1 \neq x &lt; \frac{1}{2}</math></p>	<p>1,5 1 0,5 0,5</p> <p>0,5 0,5</p> <p>0,5 1 0,5</p>
	<p>a) <math>(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) - 2x^2 = 0</math></p> $\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2$	

	+ ) Xét với $x = 0$ ta có:  $9 = 0$ Vô lí  + ) Xét với $x \neq 0$ . Chia cả hai vế cho $x^2$ ta được:  $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2$  2 $\Leftrightarrow (x - 3 + \frac{3}{x})(x - 2 + \frac{3}{x}) = 2$  Đặt $x + \frac{3}{x} = a$ , ta được :  $(a - 3).(a - 2) = 2$  $\Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$  $\Leftrightarrow (a - 1). (a - 4) = 0$  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$  TH 1: Với $a = 1$  $\Leftrightarrow x + \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$  $\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} = 0$  0,5	0,5
--	---	-----

$$\Leftrightarrow x = \emptyset$$

TH 2: Với  $a = 4$

$$\Leftrightarrow x + \frac{3}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy  $x = 1$  hoặc  $x = 3$

**b)**  $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2^n = 153.$$

TH1: Nếu  $n$  là số chẵn:  $n = 2m$  ( $m \in \mathbb{N}$ )

$$\Leftrightarrow z^2 - 2^{2m} = 153$$

$$\Leftrightarrow (z - 2^m) \cdot (z + 2^m) = 153$$

Do  $z, m$  là số tự nhiên và  $(z - 2^m) < (z + 2^m)$

$$\Leftrightarrow (z - 2^m) \cdot (z + 2^m) = 153 = 1 \cdot 153 = 3 \cdot 51 = 9 \cdot 17$$

Từ đó tìm được  $z = 13$ ;  $m = 2$

Suy ra  $z = 13$ ;  $n = 4$ .

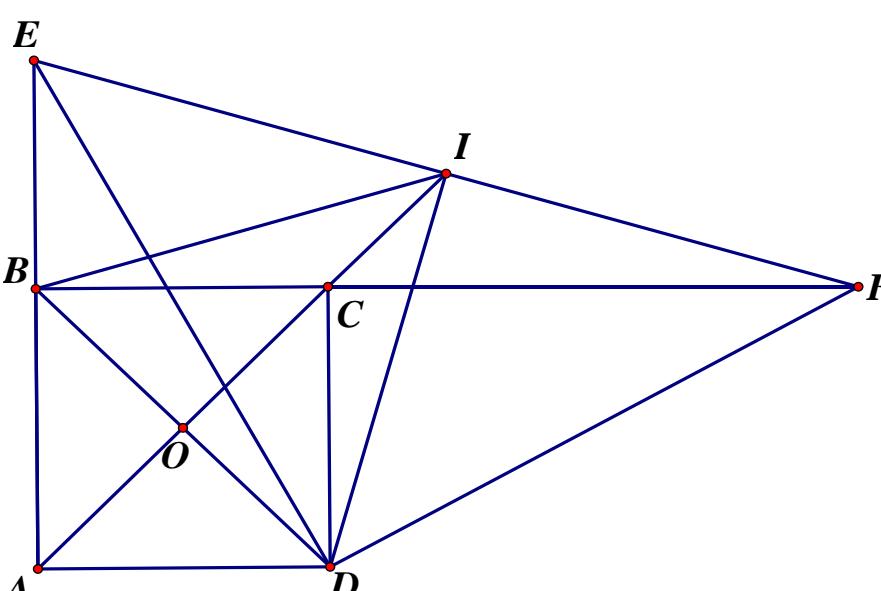
0,5

0,5

0,5

	<p>TH2: Nếu n là số lẻ: <math>n = 2m + 1</math></p> $\Leftrightarrow z^2 - 2^{2m+1} = 153 \Leftrightarrow z^2 - 2 \cdot 2^{2m} = 153$ $\Leftrightarrow z^2 - 2 \cdot 4^m = 153$ <p>Ta có : <math>2 \cdot 4^m</math> chia cho 3 dư 2</p> <p>Mà 153 chia cho 3 dư 0</p> <p>Suy ra: <math>z^2</math> chia cho 3 phải dư 2</p> <p>Mà <math>z^2</math> chỉ có thể chia cho 3 dư 0 hoặc dư 1.</p> <p>Suy ra không tồn tại m, z.</p> <p>Vậy <math>z = 13</math>; <math>n = 4</math>.</p>	0,5
3	<p>a) Biết <math>4a^2 + b^2 = 5ab</math> với <math>2a &gt; b &gt; 0</math>.</p> <p>Tính giá trị biểu thức: <math>C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}</math></p> <p>Ta có: <math>4a^2 + b^2 = 5ab</math> Suy ra: <math>4a^2 - 5ab + b^2 = 0</math></p> $\Rightarrow (a-b)(4a-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a = \frac{b}{4} \end{cases}$ <p>Do <math>2a &gt; b &gt; 0</math> nên: <math>a = b</math></p>	0.5 0,5

	Thay vào C ta được:	
	$C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$	0,5
	Vậy $C = \frac{1}{3}$	0,5
	b) Ta có: $2^n = 10a + b$ nên $b \neq 2$ . Hay $ab \neq 2$ .	
	Ta đi chứng minh: $ab \neq 3$ .	0,5
	Ta có $2^n$ có chữ số tận cùng là b.	
	Đặt: $n = 4k + r$ ( $k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$ )	
	Suy ra $2^n = 16^k \cdot 2^r$ .	
	TH1: Nếu $r = 0$ thì $2^n = 16^k$ , có tận cùng là 6 nên $b = 6$ .	0,5
	Suy ra $ab \neq 6$ .	
	TH2: Nếu $1 \leq r \leq 3$ thì $2^n = 16^k \cdot 2^r$	0,5
	$\Rightarrow 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) \neq 10$	
	Suy ra $2^n$ có tận cùng là 2	
	Nên $b = 2 \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) \neq 3 \Rightarrow a \neq 3$ .	
	Nên $ab \neq 6$	0,5

	Vậy ab : 6	
1.	 <p>a)</p>	
4	<p>Ta có : <math>\Delta ADE = \Delta CDF</math> (c.g.c) <math>\Rightarrow \Delta EDF</math> cân tại D</p> <p>Mặt khác <math>\Delta ADE = \Delta CDF</math> (c.g.c) <math>\Rightarrow BED = CFD</math></p> <p>Mà <math>BED + DEF + EFB = 90^\circ \Rightarrow BFD + DEF + EFB = 90^\circ</math></p> <p><math>\Rightarrow EDF = 90^\circ</math>. Vậy <math>\Delta EDF</math> vuông cân.</p>	0,5 0,5 0,5

b)

Theo tính chất đường chéo hình vuông  $\Rightarrow CO$  là trung trực BD

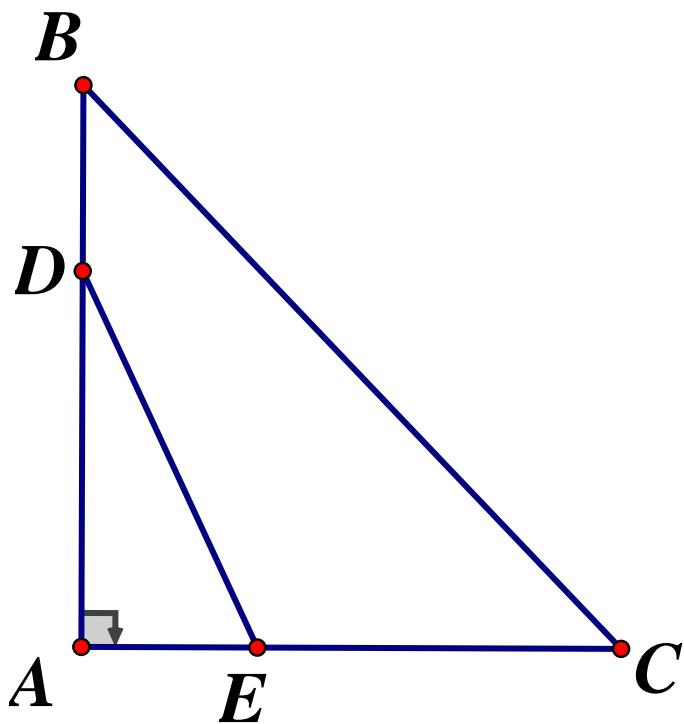
Mà  $\Delta EDF$  vuông cân  $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$

Tương tự  $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

$\Rightarrow I$  thuộc đường trung trực của  $DB \Rightarrow I$  thuộc đường thẳng CO

Nên  $O, C, I$  thẳng hàng

2.



a)

Đặt  $AB = AC = a$  không đổi;  $AE = BD = x (0 < x < a)$

Áp dụng định lý Pytago với  $\Delta ADE$  vuông tại A có:

0,5

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) - a^2 \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

0,5

Ta có  $DE$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow DE^2$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow D, E$  là trung điểm của  $AB, AC$

0,5

**b)**

Tứ giác  $BDEC$  có diện tích nhỏ nhất

$$\text{Ta có: } S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot (AB - AD) = -\frac{1}{2} (AD^2 - AB \cdot AD)$$

0,5

$$= -\frac{1}{2} \left( AD^2 - 2 \cdot \frac{AB}{2} \cdot AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2} \left( AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$$

0,5

$$\text{Vậy } S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8} AB^2 \text{ không đổi}$$

Do đó  $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8} AB^2$  khi  $D, E$  lần lượt là trung điểm  $AB, AC$

0,5

Cho  $a, b, c$  là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

$$\text{Áp dụng Bất đẳng thức C-B-S: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

5	<p>Ta có: <math>\frac{9}{a+3b+2c} = \frac{9}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}</math></p> <p>Suy ra: <math>\frac{9ab}{a+3b+2c} \leq \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2}</math></p> <p>Tương tự ta có: <math>\frac{9bc}{b+3c+2a} \leq \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{b}{2}</math></p> <p><math>\frac{9ca}{c+3a+2b} \leq \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} + \frac{c}{2}</math></p> <p>Công các vế với nhau ta được:</p> $\frac{9ab}{a+3b+2c} + \frac{9bc}{b+3c+2a} + \frac{9ca}{c+3a+2b} \leq \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2} + \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{b}{2} + \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} + \frac{c}{2} = \frac{3(a+b+c)}{2}$ <p>Suy ra: <math>\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}</math></p> <p>Dấu '=' xảy ra khi : <math>a = b = c = 1</math></p>	1
---	--	---

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8**

**HUYỆN HOÀNG HÓA**

**NĂM HỌC: 2023 – 2024**

**Môn thi: Toán**

**Thời gian làm bài: 150 phút**

(không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức:  $P = \left[ \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$ , với  $x \neq 0, \pm 1$ .

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm giá trị của x để  $P = 1$ .

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho  $a + b + c = 0$  và  $abc \neq 0$ . Chứng minh:

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 0.$$

2. Cho đa thức:  $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ . Xác định hệ số  $a; b; c$  biết  $f(x)$  chia hết cho  $x - 2$  và  $f(x)$  chia cho  $x^2 - 1$  dư  $2x$ .

3. Bác Hoàng gửi vào ngân hàng 500 triệu đồng theo thẻ thức lãi kép theo định kì với lãi suất 5,5% mỗi năm (tức là nếu đến hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn kì kế tiếp). Tính số tiền bác Hoàng nhận được sau 3 năm là (cả gốc và lãi).

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên  $x; y$  thỏa mãn:  $2x^2 + 4x + 2 = 3(7 - y^2)$

2. Tìm tất cả số nguyên tố  $p; q; r$  thỏa mãn:  $(p^2 + 1)(q^2 + 1) = r^2 + 1$

Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm M bất kỳ (không trùng với A, B). Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống MC.

1. Chứng minh:  $BH^2 = HM \cdot HC$ .

2. Đường thẳng qua D vuông góc với DM cắt đường thẳng BC tại K; đường thẳng qua D vuông góc với MK cắt BC tại E. Chứng minh:  $\Delta KDM$  vuông cân và  $\Delta DKE$  đồng dạng với  $\Delta BKD$ .

3. Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho  $BN = BM$ . Chứng minh rằng: khi điểm M di chuyển trên cạnh AB thì góc DHN luôn có số đo không đổi.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Đường quốc lộ và đường ống dẫn dầu cắt nhau tạo thành một góc nhỏ hơn  $45^\circ$ , trong góc này có bãi đỗ xe ô tô ở vị trí A (hình vẽ). Cần phải xây trạm cung cấp xăng ở vị trí nào trên đường ống để các loại xe xuất phát từ bãi đỗ xe A đến cây xăng rồi ra đường quốc lộ với đường đi ngắn nhất.

2. Cho  $x, y, z$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{3(y+z-x)} + \frac{y}{3(x+z-y)} + \frac{z}{3(x+y-z)} \geq 1$$

### ĐÁP ÁN

Câu 1:

1. Với  $x \neq 0, \pm 1$  ta có:

$$P = \left[ \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$P = \left[ \frac{(x-1)^3}{(x^2+x+1)(x-1)} - \frac{1-2x^2+4x}{(x^2+x+1)(x-1)} + \frac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} \right] : \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}$$

$$P = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 1 + 2x^2 - 4x + x^2 + x + 1}{(x^2+x+1)(x-1)} : \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$P = \frac{x^3 - 1}{(x^2+x+1)(x-1)} \cdot \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

Vậy  $P = \frac{x^2+1}{x+1}$  với  $x \neq 0, \pm 1$ .

2. Đe  $P = \frac{x^2 + 1}{x + 1} = 1$  thì  $x^2 + 1 = x + 1$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vì ĐKXĐ là  $x \neq 0, \pm 1$  nên  $x = 0; x = 1$  không thỏa mãn

Vậy không tồn tại  $x$  để  $P = 1$

Câu 2:

$$\begin{aligned} 1. \text{Ta có: } & \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\ &= \frac{1}{(b+c)^2 - 2bc - a^2} + \frac{1}{(a+c)^2 - 2ac - b^2} + \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab - c^2} \\ &= \frac{1}{(a+b+c)(b+c-a)-2bc} + \frac{1}{(a+b+c)(a-b+c)-2ac} + \frac{1}{(a+b+c)(a+b-c)-2ab} \\ &= \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b+c}{abc} = 0 (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

2. Gọi thương của  $f(x)$  cho  $x - 2$  là  $P(x)$  mà  $f(x)$  chia hết cho  $x - 2$

$$\text{nên } f(2) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-2)P(2) = 0$$

$$\Rightarrow 32 + 4a + 2b + c = 0 \quad (1)$$

Gọi thương của  $f(x)$  cho  $x^2 - 1$  là  $Q(x)$  mà  $f(x)$  chia  $x^2 - 1$  dư  $2x$

$$\text{nên } f(1) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x+1).Q(1) = 2$$

$$\text{và } f(-1) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x+1).Q(-1) = -2$$

$$\Rightarrow 2 + a + b + c = 2 \quad (2) \text{ và } 2 + a - b + c = -2 \quad (3)$$

Lấy (2) + (3) ta được  $4 + 2a + 2c = 0 \Rightarrow a + c = -2$

Thay  $a + c = -2$  vào (2) ta được  $b = 2$

$$\text{Lấy } (1) - (2) \text{ ta được } 30 + 3a + b = -2 \Rightarrow 3a = -34 \Rightarrow a = -\frac{34}{3} \Rightarrow c = \frac{28}{3}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{34}{3}; b = 2; c = \frac{28}{3}$$

3. Vì Bác Hoàng gửi theo thể thức lãi kép nên số tiền bác Hoàng nhận được sau 3 năm là:  $500(5,5\% + 1)^3$

$$= 587,1206875 \text{ (triệu đồng)}$$

Đáp số: 587,1206875 triệu đồng

Câu 3:

$$1. \text{Ta có: } 2x^2 + 4x + 2 = 3(7 - y^2) \Rightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2)$$

$$\text{Do } 2(x+1)^2 > 0 \text{ nên } 3(7 - y^2) > 0 \Rightarrow 7 - y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 7$$

$$\Rightarrow y^2 \in \{0; 1; 4\} \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} \quad (y \in \mathbb{Z})$$

Với  $y = \pm 2$  thì  $x$  không tồn tại ( $x \in \mathbb{Z}$ )

Với  $y = \pm 1$  thì  $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2; x = -4$

Với  $y = 0$  thì  $x$  không tồn tại ( $x \in \mathbb{Z}$ )

Vậy  $(x; y)$  là  $(2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)$

2. Do  $p; q; r$  là số nguyên tố nên  $p; q; r \geq 2$

$$\Rightarrow p^2 + 1 \geq 5; q^2 + 1 \geq 5; r^2 + 1 \geq 5$$

$$\Rightarrow (p^2 + 1)(q^2 + 1) \geq 25 \Rightarrow r^2 + 1 \geq 25 \Rightarrow r > 7 \text{ mà } r \text{ là số nguyên tố}$$

$$\text{nên } r^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 + 1)(q^2 + 1) \equiv 2 \pmod{3}$$

Do vai trò của  $p$  và  $q$  là như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử

$$p^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3} \text{ và } q^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p = 3 \text{ và } q^2 \equiv 1 \pmod{3}. \text{ Khi đó ta có } 10(q^2 + 1) = r^2 + 1$$

Do  $q \geq 2$  nên

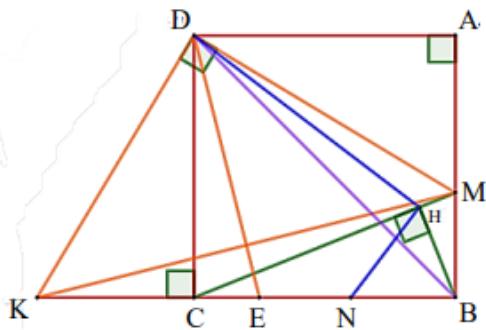
$$+ Xét q = 2 \Rightarrow r = 7$$

$$+ Xét q > 2 \Rightarrow q^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 10(q^2 + 1) \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow r^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4} \text{ (vô lí)}$$

Vậy  $(p; q; r)$  là  $(3; 2; 7); (2; 3; 7)$

Câu 4:



1. Xét  $\Delta HBM$  và  $\Delta HCB$  có:  $MHB = BHC = 90^\circ$

$$HMB = HBC \text{ (cùng phụ } HCB)$$

$$\Rightarrow \Delta HBM \sim \Delta HCB \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{HM}{HB} \Rightarrow HB^2 = HM \cdot HC$$

2. Xét  $\Delta AMD$  vuông tại A và  $\Delta CKD$  vuông tại C có:

$$AD = DC \text{ (hình vuông ABCD)}$$

$$ADM = CDK \text{ (cùng phụ } MDC)$$

Do đó:  $\Delta AMD = \Delta CKD$  (cạnh góc vuông – góc nhọn)

$$\Rightarrow DM = DK$$

Xét  $\Delta DMK$  có  $DMK = 90^\circ$ ;  $DM = DK$  nên  $\Delta DMK$  vuông cân tại D (đpcm)

Do DB là đường chéo của hình vuông ABCD nên  $DBC = 45^\circ$

Vì  $\Delta DMK$  vuông cân tại D có đường cao DE nên DE vừa là đường cao vừa là đường phân giác của  $MDK$

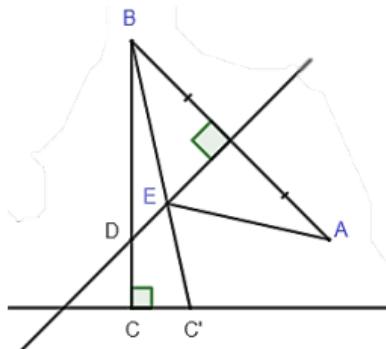
$$\Rightarrow EDK = 45^\circ$$

Xét  $\Delta DKE$  và  $\Delta BKD$  có: K chung

$$EDK = DBK = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta DKE \sim \Delta BKD (g-g) (\text{đpcm})$$

Câu 5:



Ta thấy khu dân cư A và điểm lối thoát ra đường quốc lộ nằm cùng về một phía đường ống dẫn dầu. Gọi

B là điểm đối xứng với A qua đường ống dẫn dầu.

Từ B hạ đường vuông góc xuống đường quốc lộ, cắt đường ống dẫn dầu tại D và cắt đường quốc lộ tại C

Vậy D chính là nơi ta xây tạm cung cấp xăng và đoạn đường AD + DC là đoạn đường ngắn nhất nên ta

phải mở.

Thật vậy, gọi E là điểm bất kì trên đường ống dẫn dầu, C' là giao điểm của BE xuống đường quốc lộ.

Ta có:  $AE + EC' = BE + EC' \geq BC' \geq BC$

(Do BC là đoạn đường ngắn nhất từ B đến đường quốc lộ)

**TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI**

**ĐỀ KĐCL HỌC SINH KHỐI 6, 7, 8 NĂM HỌC 2023-2024**

---

**Môn: Toán 8**

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

---

**Câu 1:** (4,0 điểm) Cho biểu thức  $A = \left( \frac{2x^2+4}{x^3-8} - \frac{x}{x^2+2x+4} \right) \cdot \left( 2 - \frac{8}{x^2} \right)$  với  $x \neq 0$  và  $x \neq 2$

a) Chứng minh  $A = \frac{2x+4}{x^2}$ .

b) Tính giá trị của biểu thức A biết  $|2x-3|=1$ .

**Câu 2: (5,0 điểm)**

- a) Phân tích đa thức  $C = x^2 + 5xy + 6y^2$  thành nhân tử.
- b) Chứng minh rằng  $M = a^3 - a$  chia hết cho 6 với mọi số nguyên a.
- c) Cho  $P = n^4 + 4$ . Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

**Câu 3: (4,0 điểm)** a) Giải các phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10.$$

- b) Cho đa thức  $P_{(x)} = x^4 + ax^2 + bx + c$  chia hết cho đa thức  $(x-1)^3$ . Tìm a, b, c.
- c) Cho 2 số không âm a; b thỏa mãn  $a^2 + b^2 \leq a + b$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = 2019 + \left( \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)^{2020}.$$

**Câu 4:** (7,0 điểm): Cho hình vuông  $ABCD$  có 2 đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $O$ . Trên cạnh  $AB$  lấy  $M$  ( $0 < MB < MA$ ) và trên cạnh  $BC$  lấy  $N$  sao cho  $MON = 90^\circ$ .

Gọi  $E$  là giao điểm của  $AN$  với  $DC$ , gọi  $K$  là giao điểm của  $ON$  với  $BE$ .

a) Chứng minh  $\Delta MON$  vuông cân.

b) Chứng minh:  $MN \parallel BE$  và  $BKN = OCN$ .

c) Qua  $K$  vẽ đường song song với  $OM$  cắt  $BC$  tại  $H$ .

$$\text{Chứng minh: } \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1.$$

----- *Hết* -----

Họ và tên học sinh: ..... SBD: .....

**TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI****HƯỚNG DẪN CHẤM KĐCL MÔN TOÁN 8****NĂM HỌC 2022 – 2023.****(Đáp án gồm 4 trang)**

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
<b>Câu 1</b>  (4,0 điểm)	a  (2.0 đ)	a) Chứng minh $A = \frac{2x+4}{x^2}$	0,5  1,0

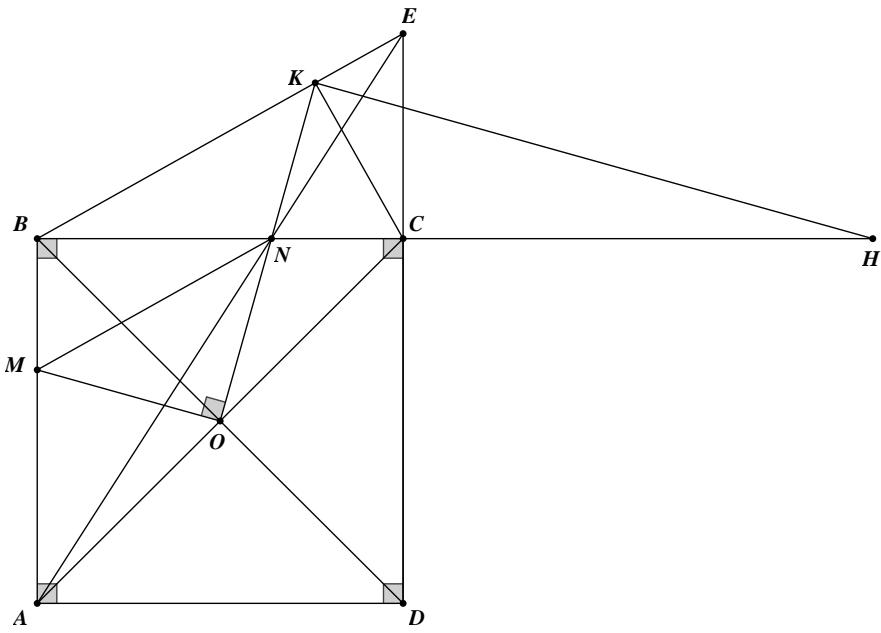
	$A = \left( \frac{2x^2 + 4}{x^3 - 8} - \frac{x}{x^2 + 2x + 4} \right) \cdot \left( 2 - \frac{8}{x^2} \right)$ $A = \left( \frac{2x^2 + 4}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} - \frac{x(x-2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \right) \cdot \left( \frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2} \right)$ $A = \left( \frac{2x^2 + 4 - x^2 + 2x}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \right) \cdot \left( \frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2} \right)$ $A = \left( \frac{x^2 + 2x + 4}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \right) \cdot \left( \frac{2x^2 - 8}{x^2} \right)$ $A = \left( \frac{1}{(x-2)} \right) \cdot \left( \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2} \right)$ $A = \frac{2x+4}{x^2}$  <p>Vậy <math>A = \frac{2x+4}{x^2}</math></p>	0,5
b (1,5 đ)	<p>a) Ta có <math> 2x-3 =1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=1 \\ 2x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(ko TMDK) \\ x=1(TMDK) \end{cases}</math></p> <p>Với <math>x=1</math> thay vào biểu thức A ta có <math>A = \frac{2 \cdot 1 + 4}{1^2} = 6</math></p> <p>Vậy với <math>x=1</math> thì <math>A=6</math></p>	0,5

			0,5
	a (2,0 đ)	$C = x^2 + 5xy + 6y^2 \Rightarrow C = \dots = (x+3y)(x+2y)$	2,0
Câu 2 (5,0 điểm)	b (1,5 đ)	$M = a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên M có ít nhất 1 thừa số chẵn và 1 số chia hết cho 3 với mọi a nguyên, mà $(2,3)=1$ nên M chia hết cho 6	1,0 0,5
	c 1,5đ	$P = n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ Ta có: $0 < n^2 - 2n + 2 \leq n^2 + 2n + 2$ Mà P là số nguyên tố $\Rightarrow n^2 - 2n + 2 = 1$ và $n^2 + 2n + 2$ là số nguyên tố $\Rightarrow n = 1$ ( thỏa mãn )	0.5 0.5

			0.5
		a) $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$	
		$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-161}{23} - 4 = 0$	1,0
		$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-158}{21} + \frac{x-158}{23} = 0$	
		$\Leftrightarrow (x-258) \left( \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0$	0.5
		$\Leftrightarrow x - 258 = 0 \Leftrightarrow x = 258$	
		(4,0)	
điểm)	b	$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	
		Thực hiện phép chia đa thức $P_{(x)}$ cho đa thức $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ta được	
		thương là $x+3$ và dư là	
		$(a+6)x^2 + (b-8)x + c + 3$	
		1,0đ	

		<p>Để đa thức <math>P_{(x)} = x^4 + ax^2 + bx + c</math> chia hết cho đa thức <math>(x-1)^3</math> thì</p> <p><math>(a+6)x^2 + (b-8)x + c + 3 = 0</math> với mọi giá trị của <math>x</math></p> $\Leftrightarrow \begin{cases} a+6=0 \\ b-8=0 \\ c+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=8 \\ c=-3 \end{cases}$ <p>Vậy <math>a = -6, b = 8, c = -3</math></p>	0.5
			0.5

	<p>Ta có: <math>a^2 + 1 \geq 2a, b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)</math></p> <p>Mà <math>a^2 + b^2 \leq a + b \Rightarrow 2(a + b) \leq a^2 + b^2 + 2 \leq a + b + 2 \Rightarrow a + b \leq 2</math></p> <p>Mặt khác với <math>x, y</math> là 2 số dương ta có: <math>\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &gt; \frac{4}{x+y}</math></p> <p>Do đó:</p> $0 \leq \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{a+1} + 1 - \frac{1}{b+1} = 2 - \left( \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \leq 2 - \frac{4}{a+b+2} \leq 1$ <p><b>c</b> Suy ra: <math>\left( \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)^{2020} \leq 1 \Rightarrow 2019 + \left( \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)^{2020} \leq 2019 + 1 \Rightarrow S \leq 2020</math></p> <p><b>(1.0 đ)</b> Dấu “=” xảy ra khi và khi <math>a = b = 1</math>.</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của <math>S</math> là 2020, xảy ra khi <math>a = b = 1</math>.</p>	0.25
--	--	------

			0.25
			0.25
Câu 4  (6,0 điểm)	0.5đ		0.5

	a). Chứng minh $\Delta MON$ vuông cân	
	Xét $\Delta AOM$ và $\Delta BON$ , có:	
	$OAM = OBN (= 45^\circ)$	0.5
	$OA = OB$ ( tính chất hình vuông)	
	$AOM = BON$ ( cùng phụ với $BOM$ )	
A (3,0 đ)	Suy ra $\Delta AOM = \Delta BON$ (g.c.g) $\Rightarrow OM = ON$	0.5
	Xét $\Delta MON$ có $OM = ON$ (cmt) và $MON = 90^\circ$ (gt)	1,0
	Suy ra $\Delta MON$ vuông cân tại $O$ (đpcm).	
		1,0

	b). Chứng minh: $MN \parallel BE$  Do $\Delta AOM = \Delta BON$ (cmt) nên $AM = BN \Rightarrow AB - BM = BC - CN \Rightarrow BM = CN$  Suy ra $\frac{AM}{BM} = \frac{BN}{CN}$ , mà $\frac{BN}{CN} = \frac{AN}{EN}$ (hệ quả định lí Tales).  Nên $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{EN} \Rightarrow MN \parallel BE$ (định lí Tales đảo) (đpcm).	0.5
B  (2,5 đ)	+.) Chứng minh: $BKN = OCN$  Do $MN \parallel BE$ (cmt) nên $MNO = BKO = 45^\circ$ (2 góc đồng vị)  Mà $BCO = 45^\circ \Rightarrow BKO = BCO = 45^\circ$ hay $BKN = OCN$ (đpcm).	0.5

				0.5
		c). Qua $K$ vẽ đường song song với $OM$ cắt $BC$ tại $H$ . Chứng minh:		0.25
		$\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1.$		
		Ta có: $KH \parallel OM$ (gt), $OM \perp OK \Rightarrow KH \perp OK$ hay $KH \perp NK$ .		0.25
		Suy ra $\angle CKH = \angle NKH - \angle CKN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow KC$ là phân giác của $\angle NKH$ .		
		Mà $CK \perp BE$ (cmt) suy ra $KB$ là phân giác ngoài tại đỉnh $K$ của $\triangle NKH$ .		0.25
<b>c (1,0đ)</b>		$\Rightarrow \frac{KN}{KH} = \frac{CN}{CH} = \frac{BN}{BH}$ (tính chất đường phân giác của tam giác) (1)		
		Tương tự ta có $KN$ là phân giác trong và $KH$ là phân giác ngoài của $\triangle BKC$		0.25
		$\Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{CN}{BN} = \frac{CH}{BH}$ (tính chất đường phân giác của tam giác) (2)		
		Từ (1) và (2) suy ra:		0.25

	$\frac{KN}{KH} + \frac{KC}{KB} = \frac{BN + CH}{BH} \Rightarrow \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = \frac{BN + CH + CN}{BH}$ $\Rightarrow \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = \frac{BH}{BH} = 1 \text{ (đpcm).}$	0.25
--	---	------

\* **Học sinh làm bằng cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.**

PHÒNG GD & ĐT HƯNG HÀ

TRƯỜNG THCS LÊ DANH PHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN

THÁNG 12. NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: Toán 8 - Thời gian làm bài: 120 phút**Bài 1** (4,5 điểm).

- 1) Cho các số  $a, b, c$  thỏa mãn  $(a+b+c)(ab+bc+ca)=2024$  và  $abc=2024$ .

Tính giá trị của biểu thức:  $P = (b^2c + 2024)(c^2a + 2024)(a^2b + 2024)$ .

- 2) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $A = x^4 - 1980x^2 - 1981x - 1980$

b)  $B = (x-y)z^3 + (y-z)x^3 + (z-x)y^3$

**Bài 2** (4,5 điểm). Tìm x, biết:

a)  $\frac{x+10}{2014} + \frac{x-2008}{2016} + \frac{x-4030}{2018} = \frac{x+4}{2020} + \frac{x+4046}{2022} - 6$

b)  $(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$

c)  $(x-2)^3 - (x+5)(x^2 - 5x + 25) + 6x^2 = 11$

**Bài 3** (4,0 điểm).

Cho hai biểu thức:  $P = \left( \frac{2}{a^2 - 5a + 4} + \frac{3}{a^2 - 16} \right) : \frac{a+1}{a^2 + 3a - 4}$  và

$$Q = \frac{a-4}{a^2 - 4a + 9}$$

- a) Rút gọn biểu thức  $P$ ;
- b) Tính giá trị của  $P$  biết  $a+1=|3|$ ;
- c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $B = P.Q$ .

**Bài 4** (2,0 điểm).

Cho hình thang  $(AB//CD)$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt  $BC$  tại  $I$ , cắt  $AD$  tại  $J$ . Chứng minh rằng  $\frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

**Bài 5** (4,0 điểm). Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AK$ . Trong tam giác  $ACK$  kẻ phân giác trong  $AE$ .

- a) Chứng minh rằng tam giác  $ABE$  cân.

b) Chứng minh rằng  $\frac{BK}{BE} = \frac{EK}{EC}$ .

**Bài 6** (1,0 điểm). Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

--- Hết ---

**BIỂU ĐIỂM CHẤM KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN TOÁN 8****THÁNG 12. NĂM HỌC 2023 - 2024****Bài 1 (4,5 điểm).**

- 1) Cho các số  $a, b, c$  thỏa mãn  $(a + b + c)(ab + bc + ca) = 2024$  và  $abc = 2024$ .

Tính giá trị của biểu thức:  $P = (b^2c + 2024)(c^2a + 2024)(a^2b + 2024)$ .

- 2) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $A = x^4 - 1980x^2 - 1981x - 1980$

b)  $B = (x - y)z^3 + (y - z)x^3 + (z - x)y^3$

Câu	Nội dung	Điểm
1.1) 1,5đ	<p>Theo bài ra: <math>(a + b + c)(ab + bc + ca) = 2024</math> và <math>abc = 2024</math></p> $\Rightarrow (a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$ $\Rightarrow a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 = abc$	0,5 0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Rightarrow (a^2b + 2abc + bc^2) + (a^2c + ac^2)b + (ab^2 + b^2c) = 0$ $\Rightarrow b(a+c)^2 + ac(a+c) + b^2(a+c) = 0$ $\Rightarrow (a+c)(ab+bc+ac+b^2) = 0$ $\Rightarrow (a+c)[a(b+c) + a(b+c)] = 0$ $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0.$ <p>Khi đó: <math>P = (b^2c + 2024)(c^2a + 2024)(a^2b + 2024)</math></p> $= (b^2c + abc)(c^2a + abc)(a^2b + abc) \quad (\text{vì ....})$ $= a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a) = 0.$ <p>Vậy <math>P = 0</math> khi <math>a, b, c</math> thỏa mãn đề bài.</p>	
1.2a) 1,5đ	$A = x^4 - 1980x^2 - 1981x - 1980$ $A = x^4 - 1980x^2 - x - 1980x - 1980$ $A = (x^4 - x) - 1980(x^2 + x + 1)$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$A = x(x-1)(x^2 + x + 1) - 1980(x^2 + x + 1)$ $A = (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1980)$	0,5
	$A = (x^2 + x + 1)(x + 44)(x - 45)$	0,5
1.2b)	<p>Ta có : <math>B = (x - y)z^3 + (y - z)x^3 + (z - x)y^3</math></p> $= z^3(x - y) + x^3[-(x - y) - (z - x)] + y^3(z - x)$ $= z^3(x - y) - x^3(x - y) + y^3(z - x) - x^3(z - x)$	0,5
	$= (x - y)(z^3 - x^3) + (z - x)(y^3 - x^3)$ $= (x - y)(z - x)(z^2 + zx + x^2) + (z - x)(y - x)(y^2 + xy + x^2)$	0,5
	$= (x - y)(z - x)(z^2 + zx + x^2 - y^2 - xy - x^2)$ $= (x - y)(z - x)(z - y)(z + y + x)$	0,5

**Bài 2** (4,5 điểm). Tìm x, biết:

a)  $\frac{x+10}{2014} + \frac{x-2008}{2016} + \frac{x-4030}{2018} = \frac{x+4}{2020} + \frac{x+4046}{2022} - 6$

b)  $(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$

c)  $(x-2)^3 - (x+5)(x^2 - 5x + 25) + 6x^2 = 11$

Câu	Nội dung	Điểm
a) 1,5đ	$\frac{x+10}{2014} + \frac{x-2008}{2016} + \frac{x-4030}{2018} = \frac{x+4}{2020} + \frac{x+4046}{2022} - 6$ $\Rightarrow \left( \frac{x+10}{2014} + 1 \right) + \left( \frac{x-2008}{2016} + 2 \right) + \left( \frac{x-4030}{2018} + 3 \right) = \left( \frac{x+4}{2020} + 1 \right) + \left( \frac{x+4046}{2022} - 1 \right)$ $\Rightarrow \frac{x+2024}{2014} + \frac{x+2024}{2016} + \frac{x+2024}{2018} - \frac{x+2024}{2020} - \frac{x+2024}{2022} = 0$ $\Rightarrow (x+2024) \left( \frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right) = 0$ $\Rightarrow x+2024 = 0 \text{ (vì } \left( \frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right) \neq 0)$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Rightarrow x = -2024$  Vậy $x = -2024$	0,5
b) 1,5đ	$(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$ $\Rightarrow (x - 1)(x - 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$ $\Rightarrow [(x - 1)(2x - 5)][(x - 2)(2x - 3)] = 6$ $\Rightarrow (2x^2 - 7x + 5)(2x^2 - 7x + 6) = 6 \quad (1)$  Đặt $2x^2 - 7x + 5 = t$ , khi đó (1) trở thành: $t(t + 1) = 6$ $t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 2 \end{cases}$ + Với $t = -3 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + 4 = 0$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} = 0$ <p>(vô lí vì <math>\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} &gt; 0 \quad \forall x</math>)</p> <p>+ Với <math>t = 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0</math></p> $\Rightarrow 2x^2 - x - 6x + 3 = 0$ $\Rightarrow (2x^2 - x) - (6x - 3) = 0 \Rightarrow x(2x - 1) - 3(2x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 3)(2x - 1) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ <p>Vậy <math>x \in \left\{3; \frac{1}{2}\right\}</math></p>	0,5
c)	$(x - 2)^3 - (x + 5)(x^2 - 5x + 25) + 6x^2 = 11$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
1,5đ	$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 - 125 + 6x^2 = 11$	
	$12x - 133 = 11$ $12x = 144$	0,5
	$x = 12$ Vậy $x = 12$ .	0,5

**Bài 3** (4,0 điểm).

Cho hai biểu thức:  $P = \left( \frac{2}{a^2 - 5a + 4} + \frac{3}{a^2 - 16} \right) : \frac{a+1}{a^2 + 3a - 4}$  và

$$Q = \frac{a-4}{a^2 - 4a + 9}$$

- a) Rút gọn biểu thức  $P$ ;
- b) Tính giá trị của  $P$  biết  $a + 1 = |3|$ ;

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $B = P.Q$ .

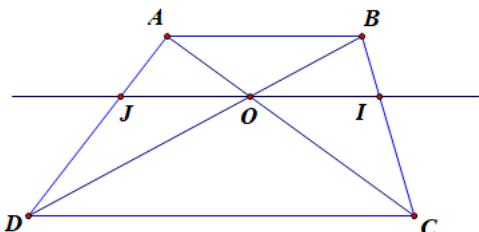
Câu	Nội dung	Điểm
a) 2,0đ	$P = \left( \frac{2}{a^2 - 5a + 4} + \frac{3}{a^2 - 16} \right) : \frac{a+1}{a^2 + 3a - 4}$ $= \left[ \frac{2}{(a-1)(a-4)} + \frac{3}{(a-4)(a+4)} \right] : \frac{a+1}{(a-1)(a+4)}$	0,5
	$= \frac{2(a+4) + 3(a-1)}{(a-1)(a-4)(a+4)} : \frac{a+1}{(a-1)(a+4)}$	0,5
	$= \frac{5a+5}{(a-1)(a-4)(a+4)} \cdot \frac{(a-1)(a+4)}{a+1}$	0,5
	$= \frac{5(a+1)}{(a-4)(a+1)}$ $= \frac{5}{a-4}$	0,5

	Vậy $P = \frac{5}{a-4}$ .	
b) 1,0đ	b) Theo câu a) $P = \frac{5}{a-4}$ với $a \neq \pm 1; a \neq \pm 4$  Theo bài ra: $a+1= 3  \Rightarrow a+1=3 \Rightarrow a=2$	0,5
	Với $a=2$ thỏa mãn ĐKXĐ, thay $a=2$ vào $P = \frac{5}{a-4}$ ta được:	
	$P = \frac{5}{2-4} = -\frac{5}{2}$	0,5
	Vậy $P = -\frac{5}{2}$ khi a thỏa mãn đề bài.	
c) 1,0đ	Xét $B = P.Q = \frac{5}{a-4} \cdot \frac{a-4}{a^2-4a+9} = \frac{5}{a^2-4a+9}$ , với $a \neq \pm 1; a \neq \pm 4$  Do $a^2 - 4a + 9 = (a-2)^2 + 5 \geq 5$ với mọi $a$	0,5
	$\Rightarrow B = \frac{5}{a^2-4a+9} \leq \frac{5}{5} = 1$	0,5

	Dấu " $=$ " xảy ra khi $a = 2$ (thỏa mãn ĐKXĐ)  Vậy GTLN của $B = 1$ khi $a = 2$	
--	--	--

**Bài 4** (2,0 điểm).

Cho hình thang  $(AB//CD)$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với hai đáy cắt  $BC$  tại  $I$ , cắt  $AD$  tại  $J$ . Chứng minh rằng  $\frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

Câu	Nội dung	Điểm
a) 2,0đ		
	Xét $\Delta ABD$ có $OJ//AB \Rightarrow \frac{OJ}{AB} = \frac{OD}{DB}$ (1)	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Xét <math>\Delta DBC</math> có <math>OI//DC \Rightarrow \frac{OI}{CD} = \frac{OB}{BD}</math> (2)</p> <p>Xét <math>\Delta ABC</math> có <math>OI//AB \Rightarrow \frac{OI}{AB} = \frac{OC}{AC}</math> (3)</p> <p>Xét <math>\Delta ADC</math> có <math>OJ//DC \Rightarrow \frac{OJ}{DC} = \frac{AO}{AC}</math> (4)</p>	
	Từ (1),(2),(3) và (4) suy ra:	
	$\frac{OJ}{AB} + \frac{OI}{CD} + \frac{OI}{AB} + \frac{OJ}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$ $\Rightarrow \frac{IJ}{AB} + \frac{IJ}{DC} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC}$	0,5
	$\Rightarrow \frac{IJ}{AB} + \frac{IJ}{DC} = 1 + 1 = 2$ $\Rightarrow \frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$	

**Bài 5** (4,0 điểm). Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AK$ . Trong tam giác  $ACK$  kẻ phân giác trong  $AE$ .

a) Chứng minh rằng tam giác  $ABE$  cân.

b) Chứng minh rằng  $\frac{BK}{BE} = \frac{EK}{EC}$ .

Câu	Nội dung	Điểm
a) 2,0đ	<p>Ta có <math>BEA = ECA + EAC</math>,</p> <p>mà <math>EAC = EAK</math> vì <math>AE</math> là phân giác,</p> <p><math>ECA = KAB</math> vì cùng phụ với <math>ABC</math></p>	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Do đó <math>BEA = ECA + EAC = KAB + EAK = BAE</math>.</p> <p>Vậy <math>\Delta ABE</math> cân tại <math>B</math>.</p>	1,0
b) 2,0đ	<p>Hạ <math>EF \perp AB</math>, do <math>\Delta ABE</math> cân tại <math>B</math> nên <math>BA = BE</math></p> <p>Chứng minh <math>\Delta KBA = \Delta FBE</math> (cạnh huyền – góc nhọn)</p> $\Rightarrow AK = EF, BK = BF$ <p>Chứng minh <math>EF // AC</math>.</p>	0,5
	<p>Xét <math>\Delta AKC</math> có <math>\frac{EK}{EC} = \frac{AK}{AC}</math></p> <p>Suy ra <math>\frac{EK}{EC} = \frac{AK}{AC} = \frac{EF}{AC}</math></p>	0,5
	<p>Xét <math>\Delta ABC</math> có</p> $EF // AC \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BA}$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	Khi đó $\frac{EK}{EC} = \frac{BF}{BA} \Rightarrow \frac{BK}{BE} = \frac{EK}{EC}$	0,5

**Bài 6** (1,0 điểm). Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Đặt: <math>x = a + b + 2c, y = 2a + b + c, z = a + b + 3c (x, y, z &gt; 0)</math>.</p> <p>Từ đó tính được <math>a = z + y - 2x, b = 5x - y - 3z, c = z - x</math></p> <p>Biểu thức đã cho trở thành</p> $A = \frac{4(z+y-2x)}{x} + \frac{(5x-y-3z)+3(z-x)}{y} - \frac{8(z-x)}{z}$ $= \frac{4z+4y}{x} - 8 + \frac{2x}{y} - 1 + \frac{8x}{z} - 8 = \left( \frac{4y}{x} + \frac{2x}{y} \right) + \left( \frac{4z}{x} + \frac{8x}{z} \right) - 17.$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Mặt khác áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:</p> $\left(\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{8x}{z}\right) \geq 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} + 2\sqrt{\frac{4z}{x} \cdot \frac{8x}{z}}$ $= 2\sqrt{8} + 2\sqrt{32} = 12\sqrt{2}.$ <p>Do đó <math>A \geq 12\sqrt{2} - 17</math>.</p>	
	<p>Dấu đẳng thức xảy ra khi</p> $\frac{4y}{x} = \frac{2x}{y}, \frac{4z}{x} = \frac{8x}{z} \Leftrightarrow x = y\sqrt{2}, z = x\sqrt{2} = 2y$ $\Leftrightarrow x = k\sqrt{2}, y = k, z = 2k (k > 0)$ <p>Vậy <math>\min A = 12\sqrt{2} - 17</math> khi</p> $a = (3 - 2\sqrt{2})k, b = (5\sqrt{2} - 7)k, c = (2 - \sqrt{2})k, (k > 0).$	0,5

PHÒNG GD&amp;ĐT TP. BẮC GIANG

**ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI****TRƯỜNG THCS NGÔ SỸ LIÊN****NĂM HỌC 2023 - 2024****ĐỀ CHÍNH THỨC****MÔN KHẢO SÁT: TOÁN 8***Ngày khảo sát: 21/12/2023**(Đề có: 01 trang)**Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề***Câu 1:** (5,0 điểm)1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $M = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2$ 2) Cho ba số  $a, b, c$  khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn điều kiện
$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$$
Tính giá trị của biểu thức:  $A = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$ .

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $D = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$  biết  $a + b = 1$  và  $a > 0; b > 0$ .

**Câu 2:** (4,0 điểm)

1) Tìm x, y nguyên biệt  $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$ .

2) Chứng minh rằng:  $A = n^3 + 6n^2 + 8n$  chia hết cho 48 với  $n$  chẵn.

**Câu 3:** (4,0 điểm)

1) Tìm số tự nhiên  $n$  để  $n^2 + 4n + 2013$  là số chính phương.

2) Cho  $a, b, c$  là các số nguyên khác 0,  $a \neq c$  sao cho  $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$ .

Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 + c^2$  không phải là số nguyên tố.

**Câu 4:** (6,0 điểm)

1. Cho hình thoi  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo vẽ hình chữ nhật  $AOBE$ .

Đường thẳng  $OE$  cắt  $AB, CD$  lần lượt ở  $G, F$ . Đường thẳng  $DE$  cắt  $AB, OA$  lần lượt ở  $H, I$

.Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $OF$ . Chứng minh:

a) Tứ giác  $ADOE$  là hình bình hành

b) Ba điểm  $G, I, M$  thẳng hàng

c) Ba đường thẳng  $AC, CD, MN$  đồng quy

d)  $12.EH \cdot ED = 4BD^2 + AC^2$

2. Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  vẽ các tia  $Ax$  và  $By$  vuông góc với  $AB$ . Gọi  $C$  là một điểm thuộc tia  $Ax$ . Đường thẳng vuông góc với  $OC$  tại  $O$  cắt tia  $By$  ở  $D$ . Chứng minh:

- a)  $AC + BD = CD$
- b)  $CO$  là tia phân giác của  $ACD$

**Câu 5: (1,0 điểm)** Cho các số thực  $a, b, c \geq 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

————— HẾT —————

### HƯỚNG DẪN CHÁM THI KSHSG TOÁN 8

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm

	$M = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2$  1 $= [(x^2 + 2x + 1) - x] \cdot [(x^2 + 2x + 1) + x] + x^2$ $= (x+1)^4 - x^2 + x^2$ $= (x+1)^4$	0,75
1		0,75
2	- Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$  Do đó, $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1 \Rightarrow A = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} = -1$  - Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b} = 2$  Do đó, $a+b=2c, b+c=2a, c+a=2b \Rightarrow a=b=c$ , trái giả thiết  Vậy $A = -1$	0,75
3	$a+b=1$ và $a>0; b>0$ .	

Ta có  $D = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$

$$= \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2$$

$$= \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2$$

$$= 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy  $D \geq 8 + 4 \cdot 2 + 2 = 18$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $D$  là 18 khi  $a = b = \frac{1}{2}$

Ta có  $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + 2y^2 - y + 2xy - x = -3$$

2 1

$$\Leftrightarrow x(x+y) + y(2y-1) + x(2y-1) = -3$$

$$\Leftrightarrow x(x+y) + (2y-1)(x+y) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1) = -3$$

1

0,5

0,5

	<p>Do <math>x, y</math> nguyên nên <math>\begin{cases} x+y \in U(3) \\ x+2y-1 \in U(3) \end{cases}</math></p> <p>Lập bảng và tìm được <math>(x; y) \in \{(-6; 5); (4; -3); (-8; 5); (6; -3)\}</math></p> <p>Vậy <math>(x; y) \in \{(-6; 5); (4; -3); (-8; 5); (6; -3)\}</math></p>	1
		1
2	<p>Ta có: <math>A = n^3 + 6n^2 + 8n = n(n^2 + 6n + 8) = n(n+2)(n+4)</math></p> <p>Vì <math>n</math> là số chẵn nên đặt <math>n = 2k</math> (<math>k \in \mathbb{Z}</math>), khi đó:</p> <p><math>A = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)</math></p> <p>Vì <math>k(k+1)(k+2)</math> là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên:</p> <p>- Tồn tại một số là bội của 2 nên <math>k(k+1)(k+2) \vdots 2</math> nên <math>A \vdots 16</math></p>	1

	<p>- Tồn tại một số là bội của 3 nên <math>k(k+1)(k+2) \vdots 3</math></p> <p>Vậy <math>A</math> chia hết cho các số 3; 16 mà <math>(3,16)=1</math> nên <math>A \vdots (3 \cdot 16) \Rightarrow A \vdots 48</math>.</p>	1
3	<p>Giả sử <math>n^2 + 4n + 2013 = m^2, (m \in \mathbb{N})</math>.</p> <p>Suy ra <math>(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009</math></p> $\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$ <p>Mặt khác <math>2009 = 2009 \cdot 1 = 287 \cdot 7 = 49 \cdot 41</math> và <math>m+n+2 &gt; m-n-2</math> nên có các trường hợp sau xảy ra:</p> <p>+ Trường hợp 1: <math>\begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}</math></p> <p>+ Trường hợp 2: <math>\begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}</math></p> <p>+ Trường hợp 3: <math>\begin{cases} m+n+2 = 49 \\ m-n-2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}</math></p> <p>Vậy các số cần tìm là: 1002; 138; 2 .</p>	1

Ta có:  $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a-c)(b^2-ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$ . Mà

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b)$$

Ta thấy  $a^2 + b^2 + c^2 > 3$  do đó nếu  $a^2 + b^2 + c^2$  là các số nguyên tố

thì xảy ra các trường hợp sau:

$$1) a+c-b=1; a+c+b=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=1, b=\pm 1$$

$$2) a+c+b=1, a+c-b=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=1, b=\pm 1$$

(Không thỏa mãn điều kiện đầu bài a khác c)

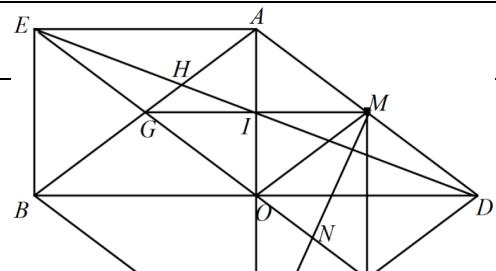
$$3) a+c+b=-1, a+c-b=-(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \quad (ktm)$$

$$4) a+c-b=-1, a+c+b=-(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1$$

	(Không thỏa mãn điều kiện đầu bài a khác c)	
	KL...	1
4		1



1	<p>a) Ta có <math>AE \parallel OB</math> và <math>AE = OB</math> (vì <math>AOBE</math> là hình chữ nhật)</p> <p>Nên <math>AE \parallel OD</math> và <math>AE = OD</math> (vì <math>OB = OD</math>)</p> <p>Do đó tứ giác <math>ADOE</math> là hình bình hành.</p> <p>b) Ta có <math>G</math> là trung điểm của <math>AB</math> (vì <math>AOBE</math> là hình chữ nhật)</p> <p><math>I</math> là trung điểm của <math>AO</math> (vì <math>ADOE</math> là hình bình hành)</p>	0,5 0,5

	$M$ là trung điểm của $AD$	0,5
	Nên $IM, IG$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $AOB, AOD$  $\Rightarrow IG//OB$ và $IM//OD$  $\Rightarrow G, I, M$ thẳng hàng	0,5
c)	Ta có $O, M, F$ lần lượt là trung điểm của $AC, AD, CD$  Nên $OM, MF$ lần lượt là đường trung bình của tam giác $ACD$  $\Rightarrow OM//CD$ và $MF//AC$ hay $OM//CF$ và $MF//OC$  Do đó tứ giác $OCFM$ là hình bình hành  Mà $N$ là trung điểm của $OF$  $\Rightarrow N$ là trung điểm của $MC$  Vậy ba đường thẳng $AC, CD, MN$ đồng quy.	0,5
		0,5

d)  $\Delta AOE$  có  $AG, EI$  là hai đường trung tuyến cắt nhau tại  $H$  nên  $H$  là trọng tâm của  $\Delta AOE$

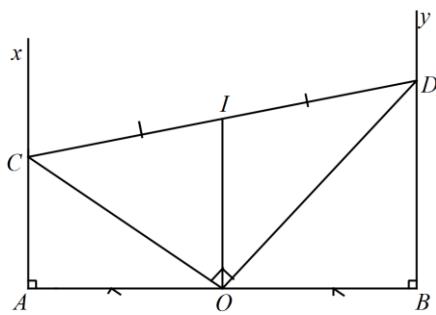
$$\Rightarrow EH = \frac{2}{3}EI \Rightarrow EH \cdot ED = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}ED \cdot ED = \frac{1}{3}ED^2$$

0,5

$$\Rightarrow EH \cdot ED = \frac{1}{3}(BD^2 + EB^2) \Rightarrow EH \cdot ED = \frac{1}{3}\left(BD^2 + \frac{1}{4}AC^2\right)$$

0,5

$$\Rightarrow 12 \cdot EH \cdot ED = 4BD^2 + AC^2$$



2

a) Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$

Tứ giác  $ACDB$  là hình thang (do  $AC//BD$ )

$\Rightarrow OI$  là đường trung bình của hình thang  $ACDB$

$$\Rightarrow OI = \frac{AC + BD}{2} \Rightarrow AC + BD = 2.OI \quad (1)$$

Ta lại có  $\Delta OCD$  vuông tại  $O$

Có  $OI$  là đường trung tuyế̄n

$$\Rightarrow OI = \frac{CD}{2} \Rightarrow 2.OI = CD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $AC + BD = CD$

b) Ta có  $\Delta OCD$  vuông tại  $O$  có  $OI$  là đường trung tuyế̄n

$$\Rightarrow OI = IC$$

$$\Rightarrow \Delta IOC \text{ cân tại } I \Rightarrow IOC = ICO$$

Mà  $IOC = ACO$  (So le trong)

$$\Rightarrow ACO = ICO$$

Vậy  $CO$  là tia phân giác  $ACD$ .

			1
	<p><b>Ta có</b> <math>(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1, a \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2a-1} \geq \frac{1}{a^2}</math></p> $\Rightarrow VT \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3$ <p><b>Ta lại có:</b> <math>\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}; \frac{8}{(a+b)^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b}</math></p>		
5	<p><b>Tương tự ta có:</b> <math>\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{b+c}; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{a+c}</math></p> <p><b>Suy ra:</b> <math>\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c}</math></p> <p>Do vậy: <math>\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c}</math></p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi <math>a = b = c = 1</math>.</p>	0,5	

				0,5

**Ghi chú:** Nếu học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa

**TRƯỜNG THCS MINH KHAI**

**ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI**

*Ngày 23 tháng 10 năm 2023*

**Môn Toán 8 – Năm học 2023 – 2024**

*Thời gian 120 phút*

**ĐỀ BÀI:**

**Bài 1 ( 4 điểm) :**

1) Tìm x; y biết:

a)  $(x-1)^3 + 3(x-3)^2 - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = (x+2)^3 - (x-3)(x^2 + 9) + 6x^2 + 5$

b)  $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 9 = 0$

2) Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $A = x^7 - 18x^6 + 19x^5 - 31x^4 - 53x^3 + 35x^2 - 16x + 3$  với  $x = 17$

b)  $A = 6 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$

### Bài 2 (4 điểm)

a) Cho  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ;  $x+y+z \neq 0$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$H = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

b) Cho các số thực  $x; y; z$  thỏa mãn đẳng thức:  $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ .

Tính giá trị biểu thức:  $P = (x+y)^{2021} + (x+1)^{2022} + (y-1)^{2023}$

**Bài 3 ( 4 điểm):** a) Cho  $n$  là số tự nhiên lẻ. Chứng minh  $n^3 - n$  chia hết cho 24

b) Cho ba số  $a; b; c$  thỏa mãn  $a+b+c=0$  và  $a^2+b^2+c^2=2024$ . Tính giá trị của

biểu thức:  $A=a^4+b^4+c^4$

**Bài 4( 2 điểm )** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+2103$$

**Bài 5 ( 6 điểm ) :** Cho tam giác ABC đều. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D; trên

tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho  $AD = AE$ . Gọi M; N; P; Q theo thứ tự là

trung điểm của BE; AD; AC; AB

- a) Chứng minh rằng tứ giác BCDE là hình thang cân
- b) Chứng minh rằng tứ giác CNEQ là hình thang
- c) Trên tia đối của tia MN lấy H sao cho  $HM = MN$ . Chứng minh rằng BH vuông góc với BD và  $EB = 2 \cdot MN$
- d) Tam giác MNP đều

## -----HẾT-----

**ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM**

Bài	Nội dung	Biểu điểm
1	1) Tìm x; y biết:  (4đ) a) $(x-1)^3 + 3(x-3)^2 - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = (x+2)^3 - (x-3)(x^2 + 9) - 9x^2 + 1$  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 18x + 27 - x^3 - 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 3x^2 - 9x + 27 - 9x^2 + 1$ $-15x + 18 = 3x + 36$ $x = -1$ KL:  b) $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 = 0$	0,5  0,5

	Biến đổi được thành: $(2x+y-3)^2 + 3(y-1)^2 = 0$	
	Biện luận tìm được $x=1; y=1$	
	KL:	0,5
		0,5
2)	Tính giá trị của các biểu thức sau:	
a)	$A = x^7 - 18x^6 + 19x^5 - 31x^4 - 53x^3 + 35x^2 - 16x + 3$ với $x=17$	
	Ta có $x=17 \Rightarrow \begin{cases} 18=x+1 \\ 19=x+2 \\ 31=2x-3 \\ 53=3x+2 \\ 35=2x+1 \\ 16=x-1 \end{cases}$	
	$\Rightarrow A = x^7 - (x+1)x^6 + (x+2)x^5 - (2x-3)x^4 - (3x+2)x^3 + (2x+1)x^2 - (x-1)x + 3$	
	Biến đổi tìm được $A=20$	
b)	$A = 6 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$	

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$$

$$\Rightarrow 5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2023} + 5^{2024}$$

$$\Rightarrow 5A - A = 5^{2024} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{2024} - 1}{4}$$

0,5

0,5

0,5

0,5

**2**  
**(4đ)**

a) Cho  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ;  $x + y + z \neq 0$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$H = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

Biến đổi đưa giả thiết về dạng :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz \\ \Rightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) &= 0 \end{aligned}$$

Dựa vào  $x+y+z \neq 0$  tìm ra được  $x = y = z$

Tính được  $H = 8$

b) Cho các số thực  $x; y; z$  thỏa mãn đẳng thức:  $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ .

Tính giá trị biểu thức:  $P = (x+y)^{2021} + (x+1)^{2022} + (y-1)^{2023}$

Biến đổi  $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$  tìm ra được  $x = -2; y = 2$

Từ đó tính được  $P = 2$

KL :

1đ

0,75đ

0,25đ

1,5

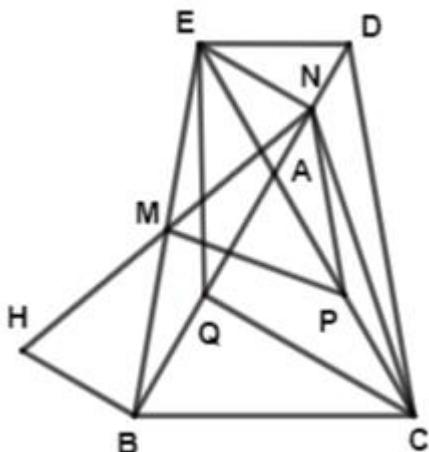
		0,5
3	a) Cho $n$ là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24	
(4d)	Ta có $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$	0,25
	Vì $n$ lẻ nên $n$ có dạng $n=2k+1$	0,25
	Từ đó tính được $n^3 - n = 4k(k+1)(k+2) + 4k(k+1)(k-1)$	1
	Sử dụng tính chất chia hết chứng minh đk $n^3 - n$ chia hết cho 24	0,5
	b) Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 10$ . Tính giá trị của	
	biểu thức: $A = a^4 + b^4 + c^4$	
	Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2=0$	
	$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 0$	
	$\Rightarrow ab + bc + ac = -5$	
	$\Rightarrow (ab + bc + ac)^2 = 25$	

	$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 25$  Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 10$  $\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 100$  $\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 0$ Dựa vào giả thiết và áp dụng bất đẳng thức tam giác ra điều phải chứng minh	1đ
4	Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:	
(2đ)	$\begin{aligned} B &= 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 2103 \\ &= (3y - 2x - 8)^2 + (x - 4)^2 + 2023 \end{aligned}$ Biện luận tìm ra $B \geq 2023$	1đ
	Dấu bằng xảy ra khi $x = 4$ ; $y = \frac{16}{3}$	0,75đ
		0,25đ

5

(6)

đ)



a) Tứ giác BCDE là hình thang cân

Tứ giác BCDE là hình thang cân

↑

BCDE là hình thang ;       $DB = EC$

↑

↑

$DE // BC$        $EA = AD; AB = AC$

↑

↑

$EDA = ABC$        $\Delta EAD$  đều ;  $\Delta ABC$  đều

1,5đ

b) Chứng minh rằng tứ giác CNEQ là hình thang

↑

$EN \parallel CQ$

↑

$EN \perp BD$        $CQ \perp BD$

↑

↑

$\Delta EAD$  đều       $\Delta ABC$  đều

c) Trên tia đối của tia  $MN$  lấy  $H$  sao cho  $HM = MN$ . Chứng minh rằng  $BH$

vông góc với  $BD$  và  $EB = 2.MN$

1,5đ

\* Chứng minh  $BH \perp BD$

↑

$HB \parallel EN$  ;  $EN \perp BD$

↑

ENBH là hình bình hành

\*Chứng minh  $EB = 2MN$

↑

$\Delta BEN$  vuông tại N có MN là trung tuyến

1,5đ

d) Tam giác MNP đều

Tam giác MNP đều

↑

$\Delta MNP$  cân tại N;  $MNP = 60^\circ$

↑

↑

$MN = NP$

$MNA + ANP = 60^\circ$

↑

$$\begin{cases} \text{ANP} + \text{APN} = 180^\circ - \text{NAP} = 60^\circ \\ \text{APN} = \text{MNA} \end{cases}$$

1,5đ

PHÒNG GIÁO DỤC NGHỊ LỘC

**ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2023-2024**

**TRƯỜNG THCS PHÚC THỌ**

---

**MÔN: TOÁN 8**

**(Thời gian làm bài 120 phút)**

---

**Bài 1 (4,0 điểm)**

1) Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2}$

2) Tính giá trị của biểu thức  $B = x^6 - 50x^5 + 50x^4 - 50x^3 + 50x^2 - 50x + 50$  tại  $x =$

**Bài 2 (4,0 điểm)**

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử  $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$

2) Tìm số tự nhiên  $n$  để  $n^2 + 2n + 20$  là số chính phương.

**Bài 3 (5,0 điểm)**

1) Cho các số thực  $a, b, c$  thoả mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

2) Cho  $a, b, c$  là các số nguyên thoả mãn  $a + b + 2024c = c^3$ . Chứng minh

rằng:  $a^3 + b^3 + c^3$  chia hết cho 6

3) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thoả mãn

$$x^2 - xy - 2022x + 2023y - 2024 = 0$$

**Bài 4 (6,0 điểm)**

1) Cho hình vuông ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho  $AM = BN = CP = DQ$ .

a) Chứng minh MNPQ hình vuông.

b) Tìm vị trí của M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC ( $AB < AC$ ), M là trung điểm của BC. Một đường

thẳng qua

M và song song với phân giác của góc BAC cắt AC, AB lần lượt tại E, F.

Chứng minh  $CE = BF$

**Bài 5 (1,0 điểm):**

Cho các số nguyên dương a và b thoả mãn  $S = a^2 + b^2 + ab + 3(a+b) + 2023$

chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia a - b cho 5

---

*Họ và tên thí sinh:*

.....

*Số báo danh:*

.....*Phòng*.....

### **ĐÁP ÁN BIỂU ĐIỂM CHẤM TOÁN 8**

Bài	Nội dung	Điểm
<b>Bài1</b> <b>(4,0 đ)</b>	$\begin{aligned} 1) \ A &= \frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2} = \frac{(63-47)(63+47)}{(215-105)(215+105)} \\ &= \frac{16.110}{110.320} = \frac{1}{20} \end{aligned}$	1,0
	2) Ta có $x = 49$ nên $x + 1 = 50$ thay vào biểu thức B, ta được	0,5
	$\begin{aligned} B &= x^6 - (x+1)x^5 + (x+1)x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\ &= x^6 - x^6 - x^5 + x^5 + x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$	0,5 0,5 0,5 0,5
<b>Bài 2</b>	1) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2 = x(x^2 - 2x + 1 - y^2)$	0,5

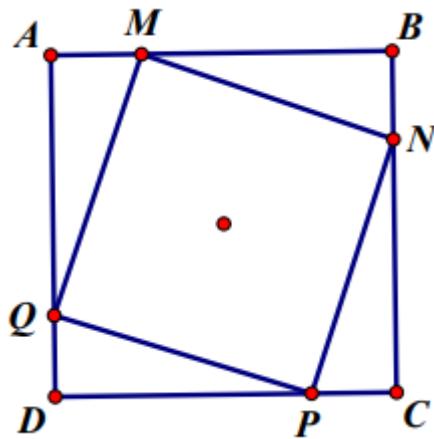
<b>(4,0 đ)</b> $  \begin{aligned}  &= x \left[ (x^2 - 2x + 1) - y^2 \right] \\  &= x \left[ (x-1)^2 - y^2 \right] \\  &= x(x-1-y)(x-1+y) \\  &= x(x-y-1)(x+y-1)  \end{aligned}  $	0,5
	0,5
	0,5
	0,25
2) Đặt $p^2 = n^2 + 2n + 20$ $  \begin{aligned}  p^2 &= (n+1)^2 + 19 \\  p^2 - (n+1)^2 &= 19 \\  (p-n-1)(p+n+1) &= 19  \end{aligned}  $	0,25
	0,25

	<p>Do <math>p, n</math> là các số tự nhiên nên <math>(p - n - 1) &lt; (p + n + 1)</math></p> <p>Khi đó <math>\begin{cases} p - n - 1 = 1 \\ p + n + 1 = 19 \end{cases}</math></p> <p>Suy ra <math>n = 8</math> (TM)</p>	0,25 0,25 0,25 0,25 0,5
<b>Bài 3</b> <b>(5,0 đ)</b>	<p>1) <math>\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = \frac{abc}{abbc+abc+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{cb}{cab+cb+b}</math></p> $= \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{bc+b+1}$ $= \frac{1+b+bc}{bc+b+1} = 1 \text{ (đpcm)}$	0,5 0,5

		0,5
2) Ta có $a + b + 2024c = c^3$		
$a + b + c = c^3 - c - 2022c$ $a + b + c = c(c-1)(c+1) - 2022c$		
Ta có $c(c-1)(c+1):6; 2022c:6$ nêu $(a+b+c):6$	0,5	
Xét $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$  $= a(a-1)(a+1) + b(b-1)(b+1) + c(c-1)(c+1)$		
Ta có $a(a-1)(a+1):6; b(b-1)(b+1):6; c(c-1)(c+1):6$		
Nếu $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)$ chia hết cho 6		
Mà $(a+b+c):6$ (cm trên)		
Vậy $(a^3 + b^3 + c^3):6$ (đpcm)	0,5	

		0,25
		0,25
3) $x^2 - xy - 2022x + 2023y - 2024 = 0$		
$\begin{aligned} &x^2 - xy + x - 2023x + 2023y - 2023 - 1 = 0 \\ &(x^2 - xy + x) - (2023x - 2023y + 2023) = 1 \\ &x(x - y + 1) - 2023(x - y + 1) = 1 \\ &(x - y + 1)(x - 2023) = 1 \end{aligned}$		0,5

	Trường hợp 2: $\begin{cases} x - y + 1 = -1 \\ x - 2023 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = -2020 \end{cases}$  Vậy cặp số $(x, y)$ là $(2024, 2024); (-2022, -2020)$	0,5
		0,5
	1)  <b>Bài 4</b> <b>(6,0 đ)</b>	0,5



0,5

a) Chứng minh được MNPQ là hình vuông

2,0

b)  $S_{MNPQ}$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $S_{AMQ}$  lớn nhất, mà  $S_{AMQ} = \frac{AM \cdot AQ}{2}$

0,5

$$\text{Ta có } AM \cdot AQ = AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4}$$

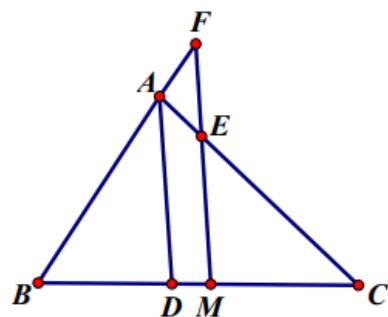
$S_{AMQ}$  lớn nhất là  $\frac{AB^2}{8}$ , đạt được khi  $AM = MB$

0,5

Vậy  $S_{MNPQ}$  nhỏ nhất khi và chỉ khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.

0,5

2)



0,5

Gọi AD là phân giác của góc BAC

$$\text{Ta có: } AD \parallel FM \text{ nên } \frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow \frac{BF}{BM} = \frac{BA}{BD} \quad (1)$$

$$ME \parallel AD \text{ nên } \frac{CE}{CA} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD} \quad (2)$$

Do AD là phân giác nên ta có:  $\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$  (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra  $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM}$ , mà  $BM = CM$  nên  $BF = CE$  (đpcm)

0,25

0,25

0,5

		0,5
Bài 5 (1,0 đ)	<p>Ta có <math>S = a^2 + b^2 + ab + 3(a+b) + 2023</math> chia hết cho 5 nên ta được:</p> $4a^2 + 4b^2 + 4ab + 12(a+b) + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2020$ chia hết cho 5 $4a^2 + 4b^2 + 4ab + 12(a+b) + 12$ chia hết cho 5 $(2a+b+3)^2 + 3(b+1)^2$ chia hết cho 5 <p>Đặt <math>x = 2a + b + 3</math>, <math>y = b + 1</math> thì ta được <math>x^2 + 3y^2 \vdots 5</math></p> <p>+ Nếu <math>y^2</math> chia hết cho 5, khi đó <math>x^2</math> cũng phải chia hết cho 5. Từ đó ta có:</p> $\begin{cases} (2a+b+3)^2 \vdots 5 \\ (b+1)^2 \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a+b+3) \vdots 5 \\ (b+1) \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a+b+3) \vdots 5 \\ 3(b+1) \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow (2a-2b) \vdots 5$ <p>Suy ra <math>2(a-b) \vdots 5</math>. Vậy số dư khi chia <math>a - b</math> cho 5 là 0</p>	0,25
		0,25

	<p>+ Nếu <math>y^2</math> chia 5 dư 1, thì <math>x^2</math> chia 5 phải dư 2. Vô lí</p> <p>+ Nếu <math>y^2</math> chia 5 dư 4, thì <math>x^2</math> chia 5 phải dư 3. Vô lí</p> <p>Kết luận: Vậy số dư khi chia <math>a - b</math> cho 5 là 0</p>	
		0,25

**Lưu ý : Nếu học sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa**

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN

---

TOÁN 8 VÒNG II NĂM HỌC 2023 – 2024**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

Ngày thi 09 tháng 12 năm 2023

Đề thi có 01 trang

*Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đê***Bài 1: (4,0 điểm).**a) Phân tích đa thức:  $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$  thành nhân tử.b) Cho  $a + b = x + y$  và  $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ .Chứng minh:  $a^n + b^n = x^n + y^n$  (với mọi số tự nhiên n)**Bài 2: (4,0 điểm).**a) VỚI a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu  $4a^2 + 3ab - 11b^2$ 

chia

hết cho 5 thì  $a^4 - b^4$  chia hết cho 5.

b) Tìm phần dư của phép chia đa thức  $P(x)$  cho  $(x-1)(x+2)$ . Biết

rằng đa thức  $P(x)$  chia cho  $(x-1)$  dư 7 và chia cho  $(x+2)$  dư 1.

**Bài 3: (4,0 điểm).**

a) Tìm  $x$  biết:  $(x-1)(x^2 + 3x - 7) = |x^3 - 1|$

b) Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$

**Bài 4: (6,0 điểm).**

1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.

Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DFE cân.

b) K là trung điểm của CF.

2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho

H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP.

Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.

**Bài 5: (2,0 điểm).**

Cho các số thực  $a, b, c$  dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .

Chứng minh:  $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$

-----Hết-----

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU CHẤM

*Biểu chấm gồm 02 trang*

**KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 - VÒNG II**

**NĂM HỌC 2023 – 2024**

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
	<b>a) Phân tích đa thức: <math>8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz</math> thành nhân tử.</b>	<b>2,0</b>
	Ta có: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = (2x + y)^3 - 6xy(2x + y) + z^3 - 6xyz$	0,75
	$= (2x + y + z)[(2x + y)^2 - z(2x + y) + z^2] - 6xy(2x + y + z)$	0,75
	$= (2x + y + z)(4x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - yz)$	0,5
<b>Bài 1 4,0đ</b>	<b>b) Cho <math>a + b = x + y</math> và <math>a^2 + b^2 = x^2 + y^2</math>. Chứng minh: <math>a^n + b^n = x^n + y^n</math> (với mọi số tự nhiên n)</b>	<b>2,0</b>
	$Do a^2 + b^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (a - x)(a + x) = (y - b)(y + b)$ $Mà a + b = x + y \text{ nên } a - x = y - b$ $\Rightarrow (y - b)(a + x) = (y - b)(y + b) \Rightarrow (y - b)(a + x) - (y - b)(y + b) = 0$ $\Rightarrow (y - b)(a + x - b - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x - b - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x = b + y \end{cases}$	0,5
	Xảy ra 2 trường hợp:  TH1: $b = y$ khi đó $a = x$ thì $a^n + b^n = x^n + y^n$	

	<p>TH 2: <math>a + x = b + y</math> mà <math>a + b = x + y \Rightarrow a = y</math> và <math>b = x</math></p> <p>Khi đó <math>a^n + b^n = x^n + y^n</math></p> <p>Vậy với <math>a + b = x + y</math> và <math>a^2 + b^2 = x^2 + y^2</math> thì <math>a^n + b^n = x^n + y^n</math> (với mọi số tự nhiên <math>n</math>).</p>	0,5
		0,5
		0,5
Bài 2 4.0đ	<p>a) Với <math>a, b</math> là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu <math>4a^2 + 3ab - 11b^2</math> chia hết cho 5 thì <math>a^4 - b^4</math> chia hết cho 5.</p> <p>Ta có: <math>4a^2 + 3ab - 11b^2 : 5 ; 5a^2 + 5ab - 10b^2 : 5</math></p> $(5a^2 + 5ab - 10b^2) - (4a^2 + 3ab - 11b^2) : 5$ $\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 : 5 \Rightarrow (a + b)^2 : 5$	2,0

	$\Rightarrow a + b \vdots 5$ (Vì 5 là số nguyên tố)	0,5
	$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) \vdots 5$	0,5
		0,5
b) Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $(x-1)(x+2)$ . Biết		
rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7 và chia cho $(x+2)$ dư 1.		2,0
Do $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ là đa thức bậc hai nên phần dư của phép chia $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn 2.		0,25
Gọi phần dư cần tìm là $ax + b$ ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).		
Ta có tồn tại các đa thức $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ thỏa mãn:		0,75

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x)(x-1)(x+2) + ax + b \\ P(x) = Q_2(x)(x-1) + 7 \\ P(x) = Q_3(x)(x+2) + 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } P(1) = 7 \text{ nên } a + b = 7$$

$$\text{Vì } P(-2) = 1 \text{ nên } -2a + b = 1$$

$$\text{Từ đó ta được } \begin{cases} a + b = 7 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy phần dư cần tìm là:  $2x + 5$ .

0,25

0,25

0,25

		0,25
	a) Tìm x biết: $(x-1)(x^2 + 3x - 7) =  x^3 - 1 $	2,0
	Vì $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ ; Do $x^2 + x + 1 > 0 \forall x$	
	Nên ta xét 2 trường hợp	0,25
<b>Bài 3</b>	$(x-1)(x^2 + 3x - 7) = x^3 - 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x - 7) = (x-1)(x^2 + x + 1)$ $\Leftrightarrow (x-1)(2x-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-8=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=4 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$	0,75
<b>4,0đ</b>	$(x-1)(x^2 + 3x - 7) = -(x^3 - 1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x - 7) = -(x-1)(x^2 + x + 1)$ $\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 4x - 6) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+3=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (không thỏa mãn)} \\ x=-3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$	

Vậy  $x \in \{1; -3; 4\}$

0,75

0,25

b) Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$  (1)

2,0

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$

Ta thấy  $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$

$$x^4 + x^2 + 20 + 8x^2 = x^4 + 4x^2 + 5x^2 + 20 = (x^2 + 4)(x^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) < y(y + 1) \leq (x^2 + 4)(x^2 + 5)$$

0,5

Vì  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên ta xét các trường hợp sau

$$+ TH1: y(y + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Với } x^2 = 9, \text{ ta có } y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$$

0,25

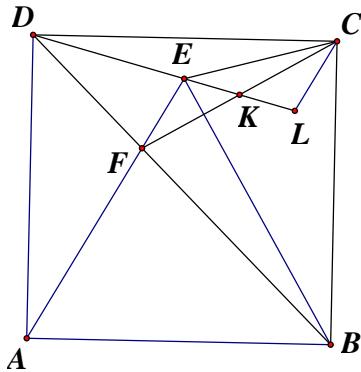
$$\Leftrightarrow y = 10; y = -11 \text{ (t.m)}$$

$$+ TH2. y(y + 1) = (x^2 + 2)(x^2 + 3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$$

$$+ TH3. y(y + 1) = (x^2 + 3)(x^2 + 4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$$

	+ TH4. $x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 9x^2 + 20 \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$	0,25
	Với $x^2 = 0$ , ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5 ; y = 4$	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
Bài 4.1 4,0đ	<p>1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.</p> <p>Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:</p> <p>a) Tam giác DFE cân.</p> <p>b) K là trung điểm của CF.</p>	4,0



a) Ta có  $\triangle ABE$  đều nên  $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$  tại A  $\Rightarrow DAE = 30^\circ$

0,5

$\triangle ABD$  vuông cân tại A nên  $BDA = 45^\circ$  và  $DAF = 30^\circ \Rightarrow DFE = 75^\circ$

0,75

c/m  $\triangle ADE$  cân tại A

Câu 1 Suy ra  $\triangle DFE$  cân tại D.

0,75

4,0đ

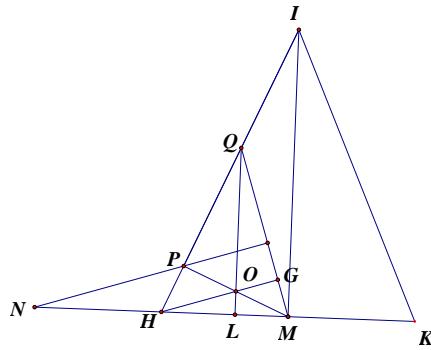
b) Vì  $ADE = 75^\circ \Rightarrow CDE = 15^\circ$

Từ  $DEF = 75^\circ \Rightarrow LEF = 105^\circ$

Từ C đường thẳng song song với AE cắt DK ở L.

0,5

	<p>Ta có <math>DLC = FEL = 105^0 \Rightarrow DCL = 60^0</math></p> <p>Suy ra: <math>\Delta ABE</math> đều</p> <p><math>EBA = 60^0; DBA = 45^0 \Rightarrow FBE = 15^0</math></p> <p><math>\Rightarrow FBE = LDC; DC = BE; FEB = LCD</math></p> <p><math>\Lambda FEB = \Lambda LCD (g.c.g) \Rightarrow CL = EF</math></p> <p>Mà <math>CL // FE \Rightarrow CEFL</math> là hình bình hành <math>\Rightarrow CK = KF</math></p>	0,5
Bài 4.2 2,0đ	<p><b>2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP. Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.</b></p>	2,0



2. Gọi O là trung điểm của PM  $\Rightarrow$  OQ là đường trung bình của tam giác IMP

0,5

$\Rightarrow$  OQ // IM

$\Rightarrow$  Mà IM vuông góc với HK  $\Rightarrow$  OQ vuông góc với HK

0,5

$\Rightarrow$  Lại có MP vuông góc với HI  $\Rightarrow$  O là trực tâm của tam giác QHM

$\Rightarrow$  HO vuông góc với QM.

0,5

Vì OH là đường trung bình của tam giác NMP nên OH // PN

NP vuông góc với QM.

		0,5
	<p><b>Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn <math>a^2 + b^2 + c^2 = 3</math>. Chứng minh rằng:</b></p> $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$	
<b>Bài 5</b> <b>2,0đ</b>	<p>Đặt <math>E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2}</math></p> <p>Chứng minh được bất đẳng thức <math>\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}</math></p> <p>Ta có: <math>E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} = \frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2} + \frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2} + \frac{4c^4}{2c^3+2c^2a^2}</math></p> <p>Áp dụng <math>\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}</math> ta có: <math>E \geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2a^2b^2+2b^3+2b^2c^2+2c^3+2c^2a^2}</math></p> <p>Vì <math>\frac{a^2+1}{2} \geq a</math> nên <math>a^4 + a^2 \geq 2a^3</math>; <math>\frac{b^2+1}{2} \geq b</math> nên <math>b^4 + b^2 \geq 2b^3</math>; <math>\frac{c^2+1}{2} \geq c</math> nên <math>c^4 + c^2 \geq 2c^3</math></p>	0,25

$$E \geq \frac{(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2}{2a^3 + 2a^2b^2 + 2b^3 + 2b^2c^2 + 2c^3 + 2c^2a^2} \geq \frac{36}{a^4 + a^2 + 2a^2b^2 + b^4 + b^2 + 2b^2c^2 + c^4 + c^2 + 2c^2a^2}$$

$$E \geq \frac{36}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow E \geq \frac{36}{12}$$

0,25

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

0,25

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3 \Rightarrow \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$$

$$\text{Vậy } \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$$

0,25

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

0,25

0,25

		0,25
		0,25

**TRƯỜNG THCS MINH KHAI      ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LẦN**

*Ngày 26 tháng 12 năm 2022*

**2**

**Môn Toán 8 – Năm học 2022 – 2023**

*Thời gian 120 phút*

**ĐỀ BÀI:**

**Bài 1 ( 4 điểm)**

Cho biểu thức:

$$A = \left( \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{x^2 + x - 2} + \frac{x+1}{1-x} \right) \cdot \frac{x^2 - 22}{x^2 + 3x - 10} \quad (x \neq \pm 2; x \neq 1; x \neq -5)$$

- 1) Rút gọn A
- 2) Tính giá trị của biểu thức A khi x thoả mãn:  $2x^3 + 40 - 8x - 10x^2 = 0$
- 3) Tìm các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên

**Bài 2( 4 điểm):**

- 1) Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên n thì  $B = 5n^3 + 15n^2 + 10n$  chia hết cho 30
- 2) Đa thức  $f(x)$  chia cho  $x - 5$  dư 2015, chia cho  $x + 2$  dư 2022. Tìm dư của phép chia đa thức  $f(x)$  cho  $x^2 - 3x - 10$ .

**Bài 3(4 điểm):**

1) Gọi  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của 1 tam giác thỏa mãn  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

Chứng minh tam giác đó đều

2) Cho  $x, y$  thoả mãn:  $y(x+y) \neq 0$  và  $x^2 - xy = 2y^2$ . Tính  $A = \frac{3x-y}{x+y}$

**Bài 4 (6,0 điểm)** Cho hình thoi ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo vẽ

hình chữ nhật AOBE. Đường thẳng OE cắt AB, CD lần lượt ở G, F. Đường

thẳng DE cắt AB, OA lần lượt ở H, I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và

OF. Chứng minh:

1) Tứ giác ADOE là hình bình hành

2) Ba điểm G, I, M thẳng hàng

3) Ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy

4)  $12.EH \cdot ED = 4BD^2 + AC^2$

**Bài 5( 2 điểm):** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:  $A = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$

-----HẾT-----

### HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Đáp án	Điểm
1  (4đ)	<p>1) Rút gọn A</p> <p>ĐKXĐ: <math>x \neq \pm 2; x \neq 1; x \neq -5</math></p>	0,5đ

	$A = \left( \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{x^2 + x - 2} + \frac{x+1}{1-x} \right) \cdot \frac{x^2 - 22}{x^2 + 3x - 10}$ $A = \left[ \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{(x-1)(x+2)} - \frac{x+1}{x-1} \right] \cdot \frac{x^2 - 22}{(x-2)(x+5)}$ $A = \left[ \frac{x}{(x+2)} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{(x-1)(x+2)} - \frac{x+1}{x-1} \right] \cdot \frac{x^2 - 22}{(x-2)(x+5)}$ $A = \frac{x(x-1) - (x^2 - x^3 - 6) - (x+1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x-2)(x+5)}$ $A = \frac{x^2 - x - x^2 + x^3 + 6 - x^2 - 3x - 2}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x-2)(x+5)}$ $A = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x-2)(x+5)}$ $A = \frac{(x-2)(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x-2)(x+5)}$ $A = \frac{x^2 - 22}{x+5}$	0,5đ
	<b>KL:</b>	0,5đ
	2) Tính giá trị của biểu thức A khi x thoả mãn: $2x^3 + 40 - 8x - 10x^2 = 0$	

Ta có:  $2x^3 + 40 - 8x - 10x^2 = 0$

	$\Leftrightarrow \dots$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 & (\text{tm} \text{dk} \text{x} \text{d}) \\ x=2 & (\text{ko tm} \text{dk} \text{x} \text{d}) \\ x=-2 & (\text{ko tm} \text{dk} \text{x} \text{d}) \end{cases}$	0,75đ
	Thay $x = 5$ tìm ra $A = \frac{3}{10}$ và KL	0,25đ
	3) Ta có:	
	$A = \frac{x^2 - 22}{x + 5} = \frac{x^2 - 25 + 3}{x + 5} = x - 5 + \frac{3}{x + 5}$   $Vì x \text{ nguyên} \Rightarrow (x - 5); (x + 5) \text{ nguyên}$   Để A nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{x+5}$ nguyên $\Rightarrow 3 : (x + 5) \Rightarrow (x + 5) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$   Lập bảng:	0,5đ

	x + 5	1	-1	3	-3	
	x	- 4	- 6	- 2	- 8	
	Đối chiếu	t/m	t/m	Ko t/m	t/m	
	đk					
Kl: Vậy để A nhận giá trị nguyên thì: $x \in \{-4; -6; -8\}$						0,5đ
2 (4đ)	1) Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên n thì $B = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ chia hết cho 30 Ta có: $B = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ $= 5n(n+1)(n+2)$					
	Dựa vào dấu hiệu chia hết cm được B chia hết cho 30 và kết luận					
	2) Đa thức $f(x)$ chia cho $x - 5$ dư 2015, chia cho $x + 2$ dư 2022. Tìm					

	<p>dư của phép chia đa thức <math>f(x)</math> cho <math>x^2 - 3x - 10</math>.</p> <p>Gọi thương và dư trong phép chia lần lượt là <math>q(x)</math> và <math>r(x) = ax + b</math></p> $f(x) = (x^2 - 3x - 10) \cdot q(x) + ax + b$ $= (x - 5)(x + 2) \cdot q(x) + ax + b$ <p>Theo Bơ du:</p> $\begin{cases} f(5) = 2015 \\ f(-2) = 2022 \end{cases}$ <p><math>\Rightarrow</math> Tìm ra <math>a = -1</math> và <math>b = 2020</math></p> <p>KL</p>	0,5đ
3 (4đ)	<p>1) Gọi <math>a, b, c</math> là độ dài ba cạnh của 1 tam giác thỏa mãn</p> $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$ <p>Chứng minh tam giác đó đều</p>	1đ

<p>Ta có: <math>a^3 + b^3 + c^3 = 3abc</math>.</p> $\Leftrightarrow \dots\dots\dots$ $\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$ $\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \quad (\text{Vì } a; b; \text{ là độ dài 3 cạnh của tam giác nên } a + b + c > 0)$ <p>Giải thích <math>\Rightarrow a=b=c</math></p> <p>KL:</p>	<p>1đ</p> <p>1đ</p> <p>0,5đ</p>
<p>2) Cho <math>x; y</math> thoả mãn: <math>y(x+y) \neq 0</math> và <math>x^2 - xy = 2y^2</math>. Tính <math>A = \frac{3x-y}{x+y}</math></p> <p>Ta có: <math>x^2 - xy = 2y^2</math></p> $\Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = 0$	

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y & (\text{ko tmdk}) \\ x=2y & (\text{tmdk}) \end{cases}$ <p>Thay <math>x = 2y</math> vào A ta được: <math>A = \frac{5}{3}</math></p>	1đ 0,5đ
4 (6đ)	<p>Vẽ hình đúng đến ý nào chấm đến đó</p>	
	<p>a) Tứ giác ADOE là hình bình hành</p> <p>Ta có <math>AE \parallel OB</math> và <math>AE = OB</math> (vì AOBE là hình chữ nhật)</p>	1đ

	<p>Nên <math>AE \parallel OD</math> và <math>AE = OD</math> (vì <math>OB = OD</math>)</p> <p>Do đó tứ giác <math>ADOE</math> là hình bình hành.</p>	
b)	<p>Ba điểm <math>G, I, M</math> thẳng hàng</p> <p>Ta có <math>G</math> là trung điểm của <math>AB</math> (vì <math>AOBE</math> là hình chữ nhật)</p> <p><math>I</math> là trung điểm của <math>AO</math> (vì <math>ADOE</math> là hình bình hành)</p> <p><math>M</math> là trung điểm của <math>AD</math></p> <p>Nên <math>IM, IG</math> lần lượt là đường trung bình của tam giác <math>AOB</math>, <math>AOD</math></p> <p><math>\Rightarrow IG \parallel OB</math> và <math>IM \parallel OD</math></p> <p><math>\Rightarrow G, I, M</math> thẳng hàng</p>	2đ
c)	<p>Ba đường thẳng <math>AC, CD, MN</math> đồng quy</p>	2đ

Ta có O,M,F lần lượt là trung điểm của AC,AD,CD

Nên OM, MF lần lượt là đường trung bình của tam giác ACD

$\Rightarrow OM // CD$  và  $MF // AC$  hay  $OM // CF$  và  $MF // OC$

Do đó tứ giác OCFM là hình bình hành

Mà N là trung điểm của OF

$\Rightarrow N$  là trung điểm của MC

Vậy ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy.

d)  $12.EH.ED = 4BD^2 + AC^2$

1đ

$\Delta AOE$  có AG, EI là hai đường trung tuyến cắt nhau tại H nên H là trọng tâm của  $\Delta AOE$

$$\Rightarrow EH = \frac{2}{3}EI \Rightarrow EH.ED = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} ED.ED = \frac{1}{3} ED^2$$

	$\Rightarrow EH \cdot ED = \frac{1}{3} (BD^2 + EB^2) \Rightarrow EH \cdot EB = \frac{1}{3} \left( BD^2 + \frac{1}{4} AC^2 \right)$ $\Rightarrow 12 \cdot EH \cdot ED = 4BD^2 + AC^2$	
5  (2d)	<p>2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: <math>A = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}</math></p> $A - 4 = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} - 4$ <p>Xét hiệu: <math>= \dots \dots \dots</math></p> $= \frac{-(2x+3)^2}{x^2 + 9}$	
	<p>Giải thích suy ra <math>A \leq 4</math></p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi <math>x = -\frac{3}{2}</math></p> <p>KL</p>	1đ 1đ

**Chú ý: Học sinh có cách giải khác đúng vẫn cho điểm**



UBND THÀNH PHỐ HỘI AN

**KÌ THI CHỌN HSG CẤP THÀNH PHỐ**

**PHÒNG GIÁO DỤC&ĐÀO TẠO**

**NĂM HỌC 2023-2024**

**MÔN: Toán. LỚP 8**

Thời gian làm: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Gồm có 01 trang

**Câu 1 (4,0 điểm):** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a)  $x^7 + x^5 + 1$       b)  $a^3(c - b^2) + b^3(a - c^2) + c^3(b - a^2) + abc(abc -$

1)

**Câu 2 (4,0 điểm):**

a) Cho  $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ . Tính giá trị của biểu thức sau:

$$P = (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2$$

b) Tính tổng các hệ số của đa thức:  $A(x) = (x^2 - x + 3)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2019}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$B = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 6x - 8y - 2z + 13$$

**Câu 3 (4,0 điểm):** Giải các phương trình sau:

a)  $(x + 3)(x+4)(x + 5)(x + 6) = 120$

b)  $\frac{x+2052}{30} + \frac{x+2014}{4} + \frac{x+47}{1975} = \frac{x+4}{2018} + \frac{x+3}{2019}$

**Câu 4 (6,0 điểm) :**

Cho hình chữ nhật ABCD, điểm P thuộc đường chéo BD (P khác B và D). Gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

a) Chứng minh AM // BD.

HUYỆN HẢI HẬU

Năm học 2023 – 2024

**Môn: TOÁN 8****CHÍNH THỨC**Thời gian: 120 phút (*Không kể thời gian giao đề*)

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB. Chứng minh ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

**Câu 5 (2,0 điểm) :**

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:  $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

b) Chứng minh bất đẳng thức:  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

-----Hết-----

**Bài 1. (6,0 điểm).**

1) Cho  $x > \sqrt{3}$  thỏa mãn:  $x + \frac{3}{x} = 5$ . Tính giá trị các biểu thức

$$A = x^2 + \frac{9}{x^2}; B = x^3 + \frac{27}{x^3}; C = x - \frac{3}{x}$$

2) a. Cho 3 số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 0$ .

Chứng minh rằng  $a^5 + b^5 + c^5 = \frac{5}{2}abc(a^2 + b^2 + c^2)$

b. Tìm số thực  $x$  thỏa mãn  $(3x - 2)^5 + (5 - x)^5 + (-2x - 3)^5 = 0$

**Bài 2.** (3,5 điểm).

1) Cho hai số thực phân biệt  $x, y$  thỏa mãn  $x^3 + y^3 = 8 - 6xy$ . Tính  $x + y$ .

2) Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $2x^2 - 8x = 13 - 3y^2$

**Bài 3.** (1,5 điểm). Xác định số tự nhiên  $n$  sao cho  $n+1, 4n^2 + 8n + 5$  và  $6n^2 + 12n + 7$  đồng

thời là số nguyên tố

**Bài 4.** (7,0 điểm)

1) Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ ,  $M$  là điểm tùy ý trên đường chéo  $BD$ . Kẻ

$$ME \perp AB, MF \perp AD$$

a. Chứng minh ba đường thẳng  $DE, BF, CM$  đồng quy

b. Xác định vị trí của điểm  $M$  để diện tích tứ giác  $AEMF$  lớn nhất

2) Cho bốn điểm  $A, B, E, H$  thẳng hàng theo thứ tự đó,  $AB = 2cm, EH = 3cm$ . Vẽ về

một phía của  $AH$  các hình vuông  $ABCD, BEFG, EHIK$  thì  $D, G, K$  thẳng hàng. Tính

diện tích hình vuông  $BEFG$ .

**Bài 5.** (2,0 điểm).

1) Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab + 2bc + 3ca$$

2) Trong một tam giác đều cạnh 1, ta đặt 17 điểm. Chứng minh rằng, tồn tại hai

điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn  $\frac{1}{4}$

----- Hết -----

Họ và tên thí

Số báo

sinh:.....

danh:.....

Giám thị số

Giám thị số

1:.....

2:.....

## HUYỆN HẢI HẬU

## ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH GIỎI

Năm học 2023 – 2024

**Môn: TOÁN 8**Thời gian: 120 phút (*Không kể thời gian giao đề*)

**Chú ý:** Cách giải nêu trong đáp án chỉ là một phương án, các cách giải khác đúng, phù hợp với chương trình thì  
cho điểm tương đương. Điểm toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

Bài	Nội dung	Điểm
<b>Bài 1</b>	<p>Ta có:</p> <p>1) <math>x + \frac{3}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} + 6 = 25 \Rightarrow A = 19</math></p>	0,5đ

	$B = x^3 + \frac{27}{x^3} = \left(x + \frac{3}{x}\right) \left(x^2 + \frac{9}{x^2} - 3\right) = 5(19 - 3) = 80$	0,5đ
	$C = x - \frac{3}{x} \Rightarrow C^2 = x^2 + \frac{9}{x^2} - 6 = 19 - 6 = 13 \Rightarrow C = \pm\sqrt{13}$	0,5đ
	Mà $x > \sqrt{3} \Rightarrow C = \sqrt{13}$	0,5đ
	Kết luận:...	
2)	<p>a)</p> $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^5 = -c^5$ $\Leftrightarrow a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = -c^5$ $\Leftrightarrow a^5 + 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) + b^5 = -c^5$ $\Leftrightarrow a^5 + b^5 + c^5 = -5ab[(a^3 + b^3) + 2ab(a + b)]$ $= -5ab(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab)$ $= -5ab(-c)(a^2 + ab + b^2)$ $= 5abc \cdot \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{2}$	0,5đ 0,5đ

$$= \frac{5}{2}abc \left[ (a+b)^2 + a^2 + b^2 \right]$$

$$= \frac{5}{2}abc(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (dpcm)}$$

b)  $(3x-2)^5 + (5-x)^5 + (-2x-3)^5 = 0$

0,5đ

Áp dụng kết quả câu a, ta có:

$$\frac{5}{2}(3x-2)(5-x)(-2x-3) \left[ (3x-2)^2 + (5-x)^2 + (-2x-3)^2 \right] = 0$$

Vì  $\left[ (3x-2)^2 + (5-x)^2 + (-2x-3)^2 \right] > 0$

0,5đ

Tìm được  $x = \frac{2}{3}; x = 5; x = -\frac{3}{2}$ .

Kết luận

0,5đ

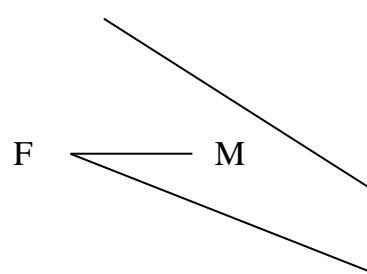
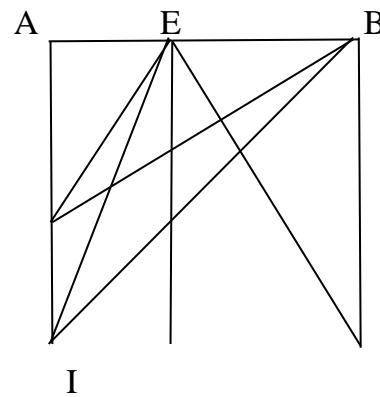
0,5đ

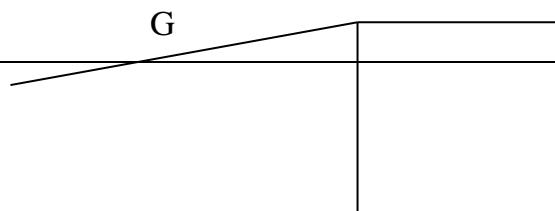
			$0,5d$
			$0,5d$
<b>Bài 2</b>	$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 8 - 6xy \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 8 + 6xy &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 6xy &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y-2) \left[ (x+y)^2 + (x+y)2 + 4 \right] - 3xy(x+y-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y-2)(x^2 + y^2 + 2x + 2y - xy + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2(x^2 + y^2 + 2x + 2y - xy + 4) = 0 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ (x+2)^2 + (y+2)^2 + (x-y)^2 = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x=y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-4 \end{cases}\end{aligned}$	$0,5d$	
1)	<p>Vậy <math>x+y=2</math> hoặc <math>x+y=-4</math></p>	$0,5d$	

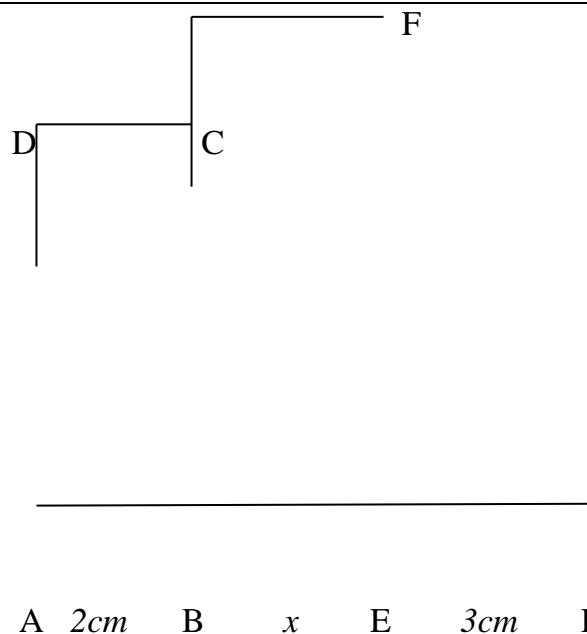
		$0,75d$
		$0,25d$
<b>2)</b>	$\begin{aligned} 2x^2 - 8x &= 13 - 3y^2 \\ \Leftrightarrow 2(x-2)^2 &= 3(7-y^2) \end{aligned}$ <p>Vì <math>2(x-2)^2 : 2 \Rightarrow 3(7-y^2) : 2 \Rightarrow 7-y^2 : 2 \Rightarrow y^2</math> lẻ</p> <p>Lại có <math>7-y^2 \geq 0</math> nên chỉ có <math>\hat{y}^2 = 1</math></p> <p>Khi đó ta có: <math>2(x-2)^2 = 3.6 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 5; x = -1</math></p> <p>Từ đó tìm được các số nguyên <math>(x; y) \in \{(5;1), (5;-1), (-1;1), (-1;-1)\}</math></p>	$0,5d$
		$0,5d$
		$0,5d$
<b>Bài 3</b>	<p>+ <math>n = 0</math>: không thỏa mãn</p> <p>+ <math>n \neq 0</math>: Đặt <math>n+1 = p</math> (<math>p &gt; 1</math>) thì</p> $4n^2 + 8n + 5 = 4(n+1)^2 + 1 = 4p^2 + 1 = 5p^2 - (p-1)(p+1)$	

	$6n^2 + 12n + 7 = 6(n+1)^2 + 1 = 6p^2 + 1 = 5p^2 + 5(p-2)(p+2)$ <p>Nếu <math>p</math> chia cho 5 dư 1 hoặc 4 thì <math>(p-1)(p+1) \vdots 5</math> suy ra <math>4n^2 + 8n + 5 \vdots 5</math> mà  <math>4n^2 + 8n + 5 &gt; 5 \forall n \in N^*</math> nên <math>4n^2 + 8n + 5</math> không phải là số nguyên tố</p> <p>Nếu <math>p</math> chia cho 5 dư 2 hoặc 3 thì <math>(p-2)(p+2) \vdots 5</math> suy ra <math>6n^2 + 12n + 7 \vdots 5</math> mà  <math>6n^2 + 12n + 7 &gt; 5 \forall n \in N^*</math> nên <math>6n^2 + 12n + 7</math> không phải là số nguyên tố</p> <p>Vậy <math>p \nmid 5</math>, để <math>p</math> là số nguyên tố thì <math>p = 5</math>, do đó <math>n = 4</math></p> <p>Thử lại <math>n = 4</math> ta có: <math>n+1 = 5</math>, <math>4n^2 + 8n + 5 = 105</math> và <math>6n^2 + 12n + 7 = 151</math> đều là số nguyên tố. Vậy <math>n = 4</math></p>	$0,5d$ $0,25d$ $0,25d$ $0,5d$
<b>Bài 4</b>	a)	
1)	Chứng minh: $\Delta DAE \cong \Delta CDF$ ( $2cgv$ ) $\Rightarrow$ góc $FCD =$ góc $EDA$	

<p>Từ đó cm được: <math>CF \perp DE</math></p> <p>Chứng minh tương tự: <math>CE \perp BF</math></p> <p>Gọi <math>N</math> là giao điểm của <math>EM</math> và <math>CD</math>, <math>I</math> là giao điểm của <math>CM</math> và <math>EF</math></p> <p>Chứng minh <math>\Delta CMN = \Delta EFM \Rightarrow \text{góc } CMN = \text{góc } EFM</math></p> <p><math>\Delta CMN</math> vuông tại <math>N \Rightarrow \text{góc } CMN + \text{góc } MCN = 90^\circ</math></p> <p>Mà <math>\text{góc } MCN = \text{góc } IMF</math> (đồng vị)</p> <p>Suy ra <math>\text{góc } IMF + \text{góc } IFM = 90^\circ \Rightarrow CI \perp EF</math></p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>1đ</p>
--	-----------------------------------



	D            N            C	
	Xét tam giác $CEF$ có: $CI \perp EF, ED \perp CF, CE \perp BF$ (cmt)	
	Suy ra ba đường thẳng $DE, BF, CM$ đồng quy (đpcm)	
b) Đặt $AF = x$ , ta có $S_{AEMF} = (a - x)x = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$	$0,5d$	
Diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất khi $x = \frac{a}{2}$ , tức là $F$ là trung điểm của	$1d$	
$AD$		
Suy ra $M$ là trung điểm của $BD$	$0,5d$	
		$0,5d$
2)	K            I	
		



Đặt  $BE = x$

Ta có:  $S_{ABGD} + S_{BEKG} = S_{AEKD}$ ,

Theo CT tính diện tích hình thang ta có:  $\frac{(2+x)^2}{2} + \frac{(x+3)x}{2} = \frac{(2+3)(2+x)}{2}$

Từ đó ta có  $x^2 = 6$

Vậy diện tích hình vuông BEFG là 6

0,5đ

1đ

1đ

<p><b>Bài 5</b></p> <p>1) <math>P = ab + 2bc + 3ca = \dots = a(b+c) + 2c(a+b)</math></p> <p>Mà <math>a+b+c=6 \Rightarrow b+c=6-a, a+b=6-c</math></p> <p>Từ đó ta có <math>P = a(6-a) + 2c(6-c) = -(a^2 - 6a + 9) - 2(c^2 - 6c + 9) + 27</math></p> $= -(a-3)^2 - 2(c-3)^2 + 27 \leq 27$ <p>Lí luận chỉ ra <math>P_{\max} = 27</math> khi <math>a=c=3, b=0</math></p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
<p>2) Ta chia tam giác đều đã cho thành 16 tam giác đều cạnh là <math>\frac{1}{4}</math></p> <p>Khi đó 2 điểm bất kì thuộc cùng một tam giác có khoảng cách nhỏ hơn <math>\frac{1}{4}</math></p> <p>Đặt 17 điểm trong tam giác đều đã cho, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 2 điểm nằm trong cùng một tam giác nhỏ đã chia.</p> <p>Hai điểm này có khoảng cách nhỏ hơn <math>\frac{1}{4}</math> (đpcm)</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>

		0,5đ
--	--	------

**UBND HUYỆN THỌ XUÂN ĐỀ GIAO LUÚ, THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG**

**TRƯỜNG THCS**

**LẦN 1, NĂM HỌC 2023-2024**

**THỊ TRẤN LAM SƠN**

**Môn: TOÁN – Lớp 8**

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề.

*(Đề thi gồm có 02 trang)*

**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM: (4,0 điểm) (Viết đáp án vào tờ giấy thi)**

**Câu 1:** Cho  $a, b, c$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ . Tính giá trị của biểu thức  $Q = (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2$  là?

**Câu 2:** Cho các số  $a, b, c$  thỏa mãn  $\frac{5}{a-15} = \frac{10}{b-30} = \frac{7}{c-21}$  và  $abc = 700$ . Khi đó  $a + b - c$  bằng bao nhiêu?

**Câu 3:** Cho đa thức  $f(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ . Hãy tìm dư trong phép chia đa thức  $f(x)$  cho đa thức  $h(x) = x^2 - 1$ ?

**Câu 4:** Giá trị của  $x$  thỏa mãn  $\frac{26}{3}x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$  là?

**Câu 5:** Xác định đa thức  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ , biết rằng  $f(x)$  chia hết cho  $x + 2$  và khi chia cho  $x^2 - 1$  thì dư  $x + 5$ ?

**Câu 6:** Cho tam giác ABC cân tại A, tia phân giác của góc ABC cắt AC tại D. Cho biết BC = 10cm, AB = 15cm. Độ dài đoạn thẳng DC là?

**Câu 7:** Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi  $S_1, S_2, S_3, S_4$  lần lượt là diện tích của các tam giác ABO, BCO, CDO, ADO. Biết  $S_1 \cdot S_3 = 31$  thì  $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4$  bằng bao nhiêu?

**Câu 8:** Hai bạn Nam và Hà gieo đồng thời hai con xúc xắc. Ở mỗi lần gieo tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc được ghi lại như sau:

Tổng g	2 chá m	3 chá m	4 chá m	5 chá m	6 chá m	7 chá m	8 chá m	9 chá m	10 chá m	11 chá m	12 chá m
Số lần	6	9	12	18	10	5	8	7	13	2	10

Xác suất của biến cố: “Tổng số chấm xuất hiện là số nguyên tố” là?

## II. PHẦN TỰ LUẬN: (16,0 điểm)

### Câu 1: (2,0 điểm)

a) Phân tích đa thức thành nhân tử:  $x^3 - 19x + 30$

b) Cho  $x = by + cz$ ;  $y = ax + cz$ ;  $z = ax + by$  và  $x + y + z \neq 0$ ;  $xyz \neq 0$ .

Chứng minh:  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

### Câu 2: (4,0 điểm)

a) Tìm  $x$  thỏa mãn:  $(2x+1)(x+1)^2(2x+3) = 18$

b) Tìm hai số  $x; y$  thỏa mãn các đẳng thức sau:  $x^3 + y^3 - xy = 1 - x + y$  và  $7(xy - 1) = x - y$

**Câu 3: (3,0 điểm)**

a) Tìm cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$

b) Cho  $m; n; t$  là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn:  $m-n=n-t=a$  ( $a \in N^*$ ). Chứng minh

rằng  $a$  chia hết cho 6.

**Câu 4: (6,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A(AB < AC)$  gọi  $AD$  là tia phân giác của góc  $BAC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  trên  $AB$  và  $AC$ ;  $E$  là giao điểm của  $BN$  và  $DM$ ,  $F$  là giao điểm của  $CM$  và  $DN$ .

a) Chứng minh tứ giác  $AMDN$  là hình vuông và  $EF//BC$ .

b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $BN$  và  $CM$ . Chứng minh  $AN^2 = AB.FN$

c) Gọi  $P$  là điểm trên  $AN$ ,  $Q$  là điểm trên  $AM$  sao cho  $AP = MQ$ . Tìm vị trí của  $P$  và  $Q$  để diện tích tứ giác  $MQPN$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 5: (1,0 điểm)** Cho các số dương  $x, y, z$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{y+3z} + \frac{1}{z+3x} \geq \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{y+2z+x} + \frac{1}{z+2x+y}$$

..... Hết .....

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ

THỊ TRẤN LAM SƠN

HƯỚNG DẪN CHẤM GIAO LƯU HSG LỚP 8 - LẦN 1

Năm học 2023 - 2024

**Môn: Toán****I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (4 điểm). Mỗi câu đúng cho 0,5 điểm.**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Kết quả	81	16	$5x$	$\frac{-1}{2}$	$f(x) = x^3 + x^2 + 4$	6cm	961	$\frac{2}{5}$

**II. PHẦN TỰ LUẬN (16 điểm).**

Câu	Ý	Nội dung	Điểm

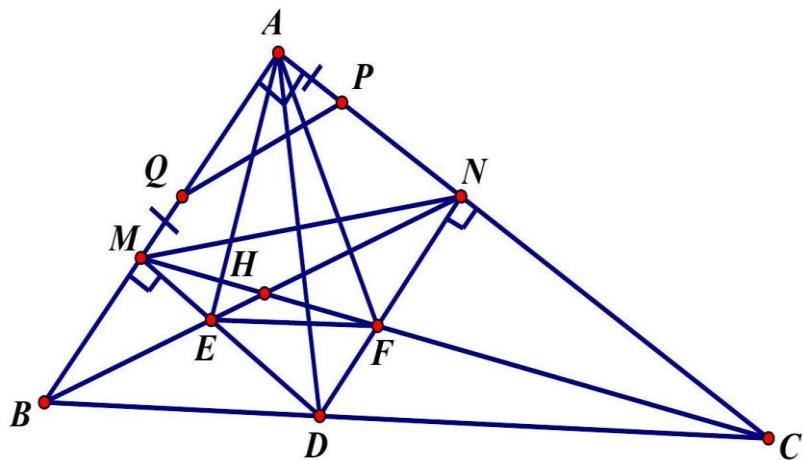
1	$x^3 - 19x + 30 = x^3 - 4x - 15x - 30$	0,25
2,0	$= x(x^2 - 4) - (15x - 30)$	
a	$= x(x - 2)(x + 2) - 15(x - 2)$	0,25
1,0	$= (x - 2)(x^2 - 2x - 15)$	
	$= (x - 2)(x^2 + 3x - 5x - 15)$	0,25
	$= (x - 2)(x + 3)(x - 5)$	0,25
	Đặt $x = by + cz$ (1); $y = ax + cz$ (2); $z = ax + by$ (3)	
b	Công vế với vế của (1) và (2) ta có: $x + y = ax + by + 2cx = z + 2cz$	0,25
1,0	Suy ra: $2cz = x + y - z \Rightarrow c = \frac{x + y - z}{2z} \Rightarrow 1 + c = \frac{x + y + z}{2z}$	
	$\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{2z}{x+y+z}$	0,25
	Tương tự: $1 + a = \frac{x+y+z}{2x} \Rightarrow \frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$	
	$1 + b = \frac{x+y+z}{2y} \Rightarrow \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$	

	Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$	0,25
		0,25
<b>2</b>	$(2x+1)(x+1)^2(2x+3) = 18$	
<b>4,0</b>	$\Leftrightarrow (2x+1)(2x+2)^2(2x+3) = 72$	0,25
	Đặt $2x+2 = y$ , ta có: $(y-1)y^2(y+1) = 72$	
<b>a</b>	$\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0$	0,5
2,0	$\Leftrightarrow (y^2 - 9)(y^2 + 8) = 0$	
	Giải ra tìm được $y = 3$ hoặc $y = -3$	0,5
	tìm được $x = 0,5$ hoặc $x = -2,5$	0,5
	Kết luận...	0,25

	Ta có: $x^3 + y^3 - xy = 1 - x + y$ (1) và $7(xy - 1) = x - y$ (2)	
	$(2) \Rightarrow y - x = 7 - 7xy$ thay vào (1) ta được $x^3 + y^3 = 8 - 6xy$	
	$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 6xy - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 8 + 6xy - 3xy(x+y) = 0$	
	$\Leftrightarrow (x+y-2)[(x+y)^2 + 2(x+y) + 4] - 3xy(x+y-2) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x+y-2)(x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y) = 0$	
<b>b</b>	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y = 0 \end{cases}$	0,5
2,0	Nếu $x+y-2=0 \Rightarrow y=2-x$ thay vào (2), ta được $7x(2-x)+2-2x=7$	0,5
	$\Leftrightarrow 7x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=\frac{5}{7} \Rightarrow y=\frac{9}{7} \end{cases}$	
	Nếu $x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y = 0$	
	$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x+2)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=y=-2$ (không thỏa mãn (2)).	0,5
	Vậy các số x; y thỏa mãn bài toán là: $x=y=1$ hoặc $x=\frac{5}{7}, y=\frac{9}{7}$ .	

			0,5
<b>3</b>	Ta có: $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - y^2 \leq (y+1)^3$	0,25	
<b>3,0</b>	Mặt khác: $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + 5y^2 + 2 > (y-1)^3$	0,25	
	Khi đó: $(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3$		
<b>a</b>	TH1: $x^3 = y^3 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{1}{2}(l) \end{cases} \Rightarrow x = -1$	0,25	
1,5	TH2: $x^3 = (y+1)^3 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow x = 1$	0,25	
	Trả lời .....	0,25	
		0,25	
<b>b</b>	Ta có: $m-n=n-t=a$ ( $a \in N^*$ )		

	1,5	Suy ra $n = t + a; m = n + a = t + 2a$  Do đó ta có $t; t+a; t+2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3  Xét số dư của ba số nguyên tố $t; t+a; t+2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2.  Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.  Mặt khác $(t+a)-t = a; (t+2a)-t = 2a; (t+2a)-(t+a) = a$ .  Suy ra $a$ hoặc $2a$ chia hết cho 3. Mà $(2,3) = 1$ nên $a \nmid 3$ (1)  Vì $m, n$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên $m, n$ là các số lẻ $\Rightarrow m-n$ là số chẵn nên $a \nmid 2$ (2)  Từ (1) và (2) kết hợp với $(2,3)=1$ ta có $a \nmid 6$ .	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	4  6,0		



	<p>a * Chứng minh tứ giác <math>AMDN</math> là hình vuông</p> <p>2,0 +) Xét tứ giác <math>AMDN</math> có: <math>AMD = 90^\circ</math>; <math>AND = 90^\circ</math>; <math>MAN = 90^\circ</math></p> <p>Suy ra tứ giác <math>AMDN</math> là hình chữ nhật</p> <p>+ ) Hình chữ nhật <math>AMDN</math> có <math>AD</math> là phân giác của <math>MAN</math> nên tứ giác</p>	0,25
		0,25

	<p><math>AMDN</math> là hình vuông.</p> <p>* Chứng minh <math>EF//BC</math>.</p> <p>+ ) Vì <math>ND//AB</math> hay <math>DF//MB</math> áp dụng định lí Tha-les ta có: <math>\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}</math> (1)</p> <p>Vì <math>MD//AC</math> áp dụng định lí Tha-les ta có: <math>\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}</math> (2)</p> <p>Tứ giác <math>AMDN</math> là hình vuông nên <math>AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}</math> (3)</p> <p>Tam giác <math>DNE</math> với <math>DN//MB</math> ta có: <math>\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}</math> (4) (bài toán phụ)</p> <p>Từ (1),(2),(3),(4) suy ra <math>\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF//DC</math> hay <math>EF//BC</math></p>	0,25
		0,25
		0,5

	<b>b</b>	Vì $AMDN$ là hình vuông nên $AN = DN$ suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5)	0,5
2,0		Vì $DN//AB$ áp dụng bài toán phụ ta có $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6) và $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}$ (7)	0,5
		Mà $AMDN$ là hình vuông nên $AM = AN$ suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8)	0,5
		Từ (5), (6), (7), (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB.FN$	0,5
			0,5
	<b>c</b>	Vì $AN = AM; PN = AQ \Rightarrow AP = MQ$ .	0,25
2,0		Ta có :	
		$S_{APQ} = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} QM \cdot AQ = \frac{1}{2} AQ(AM - AQ) = -\frac{1}{2}(AQ^2 - AQ \cdot AM)$ $= -\frac{1}{2} \left( AQ^2 - 2AQ \cdot \frac{AM}{2} + \frac{AM^2}{4} \right) + \frac{AM^2}{8}$ $= -\frac{1}{2} \left( AQ - \frac{AM}{2} \right)^2 + \frac{AM^2}{8} \leq \frac{AM^2}{8}$	0,5

	<p>Suy ra : <math>S_{PQMN} = S_{AMN} - S_{APQ} \geq \frac{1}{2} AM^2 - \frac{1}{8} AM^2 = \frac{3}{8} AM^2</math></p> <p>dấu "<math>=</math>" xảy ra khi <math>AQ = \frac{AM}{2}</math>.</p> <p>Vậy diện tích tứ giác <math>PQMN</math> có giá trị nhỏ nhất là <math>\frac{3}{8} AM^2</math> khi <math>Q</math> là trung điểm của <math>AM</math>; <math>P</math> là trung điểm của <math>AN</math></p>	0,5
		0,5
5 1,0	<p>Áp dụng bất đẳng thức <math>\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}</math> với hai số dương <math>a, b</math> ta có:</p> $\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{y+2z+x} \geq \frac{4}{2x+4y+2z} \Rightarrow \frac{1}{x+3y} + \frac{1}{y+2z+x} \geq \frac{2}{x+2y+z}$ <p>Tương tự, ta có: <math>\frac{1}{y+3z} + \frac{1}{z+2x+y} \geq \frac{2}{y+2z+x}</math>;</p>	0,25

	$\frac{1}{z+3x} + \frac{1}{x+2y+z} \geq \frac{2}{z+2x+y}$ <p>Cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi <math>x = y = z</math>.</p>	0,25
		0,25
		0,25

**Chú ý:**

1. *Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.*
2. *Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình hoặc vẽ sai hình cơ bản thì không chấm điểm bài hình.*
3. *Điểm chấm chi tiết đến 0,25 đ.*

UBND QUẢNG XƯƠNG

**GIAO LUƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN**

TRƯỜNG THCS NGỌC

**Năm học 2023 - 2024****Môn: Toán 8**Thời gian: **150** phút (*không kể thời gian giao đê*)

Ngày ... tháng 01 năm 2024

*(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)***Câu 1(4,0 điểm).**

Cho biểu thức       $A = \left( \frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x-3} + \frac{3x^2+3}{9-x^2} \right) : \left( \frac{x-1}{x-3} - \frac{1}{2} \right)$  với  $x \neq \pm 3, x \neq -1$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn  $x^3 - 3x - 2 = 0$ **Câu 2(4,0 điểm).**

1. Tìm x, biết :                   $(x+5)^4 + (x-4)^4 = (2x+1)^4$

2. Gieo ngẫu nhiên một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cỗ sau:

- a) A: "Mặt sấp xuất hiện hai lần"
- b) B: "Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần"

**Câu 3(4,0 điểm).**

1. Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:

$$2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0.$$

2. Tìm các số  $a, b, c$  sao cho đa thức  $P(x) = ax^3 + bx + c$  chia hết cho  $x + 2$  và khi chia cho  $x^2 - 1$  thì dư  $x + 5$

**Câu 4(6,0 điểm).**

1. Cho hình chữ nhật ABCD, gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường chéo AC. Gọi M, N, K theo thứ tự là trung điểm của AH, AB, CD.

a) Gọi I là trung điểm của CN, chứng minh rằng I là trung điểm của BK.

b) Tính số đo góc BMK.

2. Cho tam giác MNP có góc M bằng  $120^0$ . Đường phân giác của góc M cắt cạnh NP ở D.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{MD}$$

**Câu 5(2,0 điểm).** Cho x, y là hai số dương thỏa mãn  $x + y = 1$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2 + y^2}$$


---

UBND HUYỆN QUẢNG XƯƠNG

**HƯỚNG DẪN CHẤM**TRƯỜNG THCS QUẢNG NGỌC**GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN****NĂM HỌC 2023-2024****MÔN: TOÁN****Thời gian làm bài: 150 phút***Hướng dẫn chấm có 05 trang, gồm 05 câu*

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>1. (2điểm)</p> $A = \left( \frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x-3} + \frac{3x^2+3}{9-x^2} \right) : \left( \frac{x-1}{x-3} - \frac{1}{2} \right)$ $= \left[ \frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x-3} - \frac{3x^2+3}{(x-3)(x+3)} \right] : \frac{2(x-1)-(x-3)}{2(x-3)}$ $= \frac{2x(x-3)+x(x+3)-(3x^2+3)}{(x-3)(x+3)} : \frac{2x-2-x+3}{2(x-3)}$ $= \frac{2x^2-6x+x^2+3x-3x^2-3}{(x-3)(x+3)} : \frac{x+1}{2(x-3)}$	0,5 đ

<p><b>Câu 1</b> <b>(4,0 điểm)</b></p> <p><math display="block">\frac{-3x-3}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{2(x-3)}{x+1} = \frac{-3(x+1)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{2(x-3)}{x+1} = \frac{-6}{x+3}</math></p> <p>Vậy <math>P = \frac{-6}{x+3}</math></p>	0,5 đ 0,25 đ 0,75đ
<p>2) (2 điểm) ĐKXĐ: <math>x \neq \pm 3, x \neq -1</math></p> <p>Ta có: <math>x^3 - 3x - 2 = 0</math></p> $\Leftrightarrow x^3 - 8 - 3x + 6 = 0$ $(x-2)(x^2 + 2x + 4) - 3(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ)} \\ x=-1 \text{ (Không thỏa mãn ĐKXĐ)} \end{cases}$ <p>Thay <math>x = 2</math> vào biểu thức A, ta được: <math>A = \frac{-6}{2+3} = \frac{-6}{5}</math></p>	1,0đ

	Vậy $A = \frac{-6}{5}$ tại $x = 2$	0,5đ
		0,25đ
		0,25đ
	<b>1.(2điểm).</b> Tìm $x$ , biết:  $(x + 5)^4 + (x - 4)^4 = (2x + 1)^4 \quad (1)$  Đặt $x + 5 = y, x - 4 = z$ thì $2x + 1 = y + z$  Phương trình (1) cóa dạng:  $y^4 + z^4 = (y + z)^4$ $\Leftrightarrow y^4 + z^4 = y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4$	0,5đ

<p><b>Câu 2</b> <b>(4,0 điểm)</b></p>	$\Leftrightarrow 2yz(2y^2 + 3yz + 2z^2) = 0$ <p>Thay <math>y = x + 5</math>, <math>z = x - 4</math>, ta được:</p> $2(x+5)(x-4)(7x^2 + 7x + 22) = 0$ $\Leftrightarrow (x+5)(x-4) = 0 \text{ (do } 7x^2 + 7x + 22 = 7(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{81}{4} > 0 \forall x\text{)}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+5=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=4 \end{cases}$ <p>Vậy <math>x = -5</math>; <math>x = 4</math></p>	<p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p>
	<p>2) (2 điểm).</p> <p>Kí hiệu: Khi gieo đồng xu được mặt sấp là: S; được mặt ngửa là: N</p> <p>Vì đồng xu là đồng chất, cân đối và việc gieo là ngẫu nhiên nên ta có bốn biến cố đồng khả năng là:</p>	<p>0,25đ</p>

	SS, SN, NS, NN  Từ kết quả trên ta thấy:  Biến cõ A xuất hiện 1 lần nên $P(A) = \frac{1}{4} = 25\%$  Biến cõ B xuất hiện 3 lần nên $P(B) = \frac{3}{4} = 75\%$	0,75đ  0,5đ  0,5đ
Câu 3  (4,0điểm)	<p>1) (2 điểm)</p> $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (2x^2 + xy + x) + (2xy + y^2 + y) + (2x + y + 1) = -1$ $\Leftrightarrow x(2x + y + 1) + y(2x + y + 1) + (2x + y + 1) = -1$ $\Leftrightarrow (2x + y + 1)(x + y + 1) = -1$ $*) \begin{cases} 2x + y + 1 = 1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$ $*) \begin{cases} 2x + y + 1 = -1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$	0,75đ  0,5đ

	Vậy: $(x; y) = \{(2; -4); ((-2; 2)\}$	0,5đ
		0,25đ
2) (2 điểm)		
	Gọi $Q_1(x)$ và $Q_2(x)$ lần lượt là thương trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $x + 2$ và $x^2 - 1$ . Ta có:	
	$ax^3 + bx + c = (x + 2)Q_1(x) \quad \forall x \quad (*)$	0,25đ
	Và $ax^3 + bx + c = (x^2 - 1)Q_2(x) + x + 5 \quad \forall x \quad (**)$	0,25đ
	Do (*) đúng với mọi $x$ nên thay $x = -2$ vào (*) ta được:	
	$-8a - 2b + c = 0 \quad (1)$	0,5đ
	Do (**) đúng với mọi $x$ nên thay $x = -1, x = 1$ vào (**) ta được:	
	$-a - b + c = 4 \quad (2)$	
	$a + b + c = 6 \quad (3)$	0,5đ

	<p>Cộng từng vế của (2) và (3), ta được: <math>2c = 10 \Leftrightarrow c = 5</math>. Thay <math>c=5</math> vào (1) và (2) ta được :</p> $\begin{cases} -8a - 2b + 5 = 0 \\ -a - b + 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a - 2b = -5 \\ -a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b = 0,5 \end{cases}$ <p>Vậy <math>a = b = 0,5</math>; <math>c = 5</math> là giá trị cần tìm</p>	
		0,5đ
<p>1)</p> <p><b>Câu 4</b> <b>(6,0 điểm)</b></p>	<p>a) (2 điểm)</p> <p>Do ABCD là hình chữ nhật nên</p> <p><math>AB // CD</math>, suy ra <math>NB // KC</math> (1)</p>	

	Vì N, K là trung lần lượt là trung điểm của AB và CD nên	
	$NB = \frac{1}{2}AB, KC = \frac{1}{2}CD$ , mà $AB = CD$ (do ABCD là hình chữ nhật)	
	Suy ra $NB = KC$ (2)	
	Từ (1) và (2) suy ra NBCK là hình bình hành	0,5đ
	Mặt khác, ABCD là hình chữ nhật nên $NBC = 90^\circ$	
	Suy ra NBCK là hình chữ nhật, mà I là trung điểm của CN	
	Vậy I là trung điểm của BK	0,5đ
		0,25đ

<p>b) (2 điểm)</p>	<p>Ta có: <math>NA = NB</math> (GT)</p> <p><math>MA = MH</math> (GT)</p> <p>Suy ra <math>MN</math> là đường trung bình của tam giác <math>ABH</math></p> <p><math>\Rightarrow MN // BH</math>, mà <math>BH \perp AC</math> (GT)</p> <p><math>\Rightarrow MN \perp AC</math></p> <p>Ta có <math>\Delta MNC</math> vuông tại <math>M</math> có <math>MI</math> là trung tuyến nên <math>MI = \frac{1}{2}CN</math></p> <p>Theo câu a) túc giác <math>NBCK</math> là hình chữ nhật nên <math>CN = BK</math></p> <p>Suy ra <math>MI = \frac{1}{2}BK</math></p> <p>Trong <math>\Delta BMK</math> có trung tuyến <math>MI = \frac{1}{2}BK</math>, suy ra tam giác <math>BMK</math> vuông tại <math>M</math>.</p> <p>Vậy <math>BMK = 90^\circ</math></p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5 đ</p> <p>0,5đ</p>
--------------------	--	--------------------------------------

		0,25đ
	2) (2 điểm)	
	<p></p> <p>Vì MD là phân giác của góc NMP nên</p> $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}NMP = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$ <p>Qua D kẻ đường thẳng song song với MN cắt MP tại E</p> <p>Suy ra <math>D_1 = M_1</math> (hai góc so le trong)</p> <p>Mà <math>M_1 = M_2</math> (GT) nên <math>D_1 = M_2 = 60^\circ</math></p>	0,25đ

<p>Suy ra tam giác MDE là tam giác đều</p> $\Rightarrow MD = ME = DE$ <p>Tam giác MNP có DE // MN, áp dụng hệ quả của định lí Thales</p> <p>Ta có: <math>\frac{DE}{MN} = \frac{PE}{MP} \Rightarrow \frac{MD}{MN} = \frac{PE}{MP}</math> (do DE = MD)</p> $\Rightarrow \frac{MD}{MN} = \frac{MP - ME}{MP} \Rightarrow \frac{MD}{MN} = 1 - \frac{ME}{MP}$ <p>Hay <math>\frac{MD}{MN} = 1 - \frac{MD}{MP}</math> (vì ME = MD)</p> $\Rightarrow \frac{MD}{MN} + \frac{MD}{MP} = 1 \Rightarrow \frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{MD}$ (Chia hai vế cho MD)	0,25đ
<p>Vậy <math>\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{MD}</math></p>	0,25đ
	0,5đ

		0,5đ
	Áp dụng bất đẳng thức: Với $a > 0, b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ Ta có:  $\frac{1}{2xy} + \frac{1}{x^2+y^2} \geq \frac{4}{2xy+x^2+y^2} = \frac{4}{(x+y)^2} = \frac{4}{1^2} = 4$  Ta lại có $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 1^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{2xy} \geq 2$  $\Rightarrow P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2+y^2} = \left( \frac{1}{2xy} + \frac{1}{x^2+y^2} \right) + \frac{1}{2xy} \geq 4 + 2 = 6$  Đâu “=” xảy ra khi $x = y = 1/2$  Vậy $\text{Min } P = 6$ khi $x = y = 1/2$	0,25đ  0,5đ  0,5đ

		0,25đ
		0,25đ
		0,25đ

*Ghi chú: Trên đây chỉ là HD, HS không làm theo đáp án, mà làm cách khác nhưng đúng  
vẫn cho điểm tối đa.*

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8**

**HUYỆN HOÀNG HÓA**

**NĂM HỌC: 2023-2024**

**Môn thi: Toán**

Thời gian làm bài: 150 phút (*không kể thời gian giao đề*)

(Đề thi này có 05 câu, gồm 01 trang)

**Câu 1.** (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức:  $A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left( \frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1-x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$ , với  $x \neq \pm 1$ .

Rút gọn biểu thức A. Tính giá trị biểu thức A khi x thỏa mãn:  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

2. Cho a, b, c là ba số đôi một không đồng nhau thỏa mãn:  $ab + bc + ca = 5$ .

Tính giá trị của biểu thức:  $P = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(5+a^2)(5+b^2)(5+c^2)}$ .

**Câu 2.** (4,0 điểm)

1. Giải phương trình:  $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$ .

2. Tìm a, b sao cho đa thức  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$  chia hết cho đa thức

$$g(x) = x^2 + x - 2.$$

**Câu 3.** (4,0 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn:  $x^2 + xy = 2022x + 2023y + 2024$ .

2. Cho  $x, y$  là các số nguyên sao cho  $x^2 - 2xy - y$  và  $xy - 2y^2 - x$  đều chia hết cho

5. Chứng minh rằng  $2x^2 + y^2 + 2x + y$  cũng chia hết cho 5.

**Câu 4. (6,0 điểm)**

Cho hình vuông ABCD. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao

điểm của AK và DE. HẠ  $DM \perp CE$ .

1. Chứng minh tứ giác ADKE là hình chữ nhật, từ đó suy ra  $AM \perp KM$ .

2. Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh  $\Delta ADM$  cân và tính số đo  
của góc ANB.

3. Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng  $CF \leq 2EF$ .

**Câu 5. (2,0 điểm)**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương:  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq 6.$$

..... Hết .....

Họ tên thí sinh : ..... Số báo danh : ..... Giám thị

số 1 : ..... Giám thi số 2: .....

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HSG LỚP 8**

**HUYỆN HOÀNG HOÁ**

**NĂM HỌC 2022 – 2023**

**MÔN: TOÁN**

*Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang*

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1. (4,0 điểm)	1	<p>với <math>x \neq \pm 1</math> <math>A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left( \frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}</math></p> $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \left( \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} - \frac{1}{x-1}$ $= \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{(x^2 + 1)(x-1)} - \frac{1}{x-1}$ $= \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x-1)} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)(x-1)} = \frac{-(x-1)^2}{(x^2 + 1)(x-1)} = \frac{1-x}{x^2 + 1}.$ <p>Vậy: <math>A = \frac{1-x}{x^2 + 1}</math> (với <math>x \neq \pm 1</math>).</p>	0.25

			0.25
			0.25
			0.25
			0.25
	Với $x \neq \pm 1$ Ta có $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-3) = 0$		0.25
	$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (L)} \\ x = -2 \text{ (T / m)} \\ x = 3 \text{ (T / m)} \end{cases}$		0.25
	Với $x = -2 \Rightarrow A = \frac{3}{5}$		0.25

	Với $x = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$	0.25
		0.25
<b>2</b>	<p>Ta có <math>ab + bc + ca = 5 \Rightarrow a^2 + 5 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)</math></p> <p>Tương tự: <math>b^2 + 5 = (b+c)(b+a)</math>; <math>c^2 + 5 = (c+a)(b+c)</math></p> $P = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(5+a^2)(5+b^2)(5+c^2)} = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)}$ $= \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = 1$	0.5 0.5 0.5
		0.5

		Ta có: $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$	
		$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3)(x+1) = 192$	
		$\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)(x+3) = 192 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 192 \quad (*)$	0.25
		Đặt $t = x^2 + 2x + 1$ ( $\text{ĐK: } t \geq 0$ ) $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = t - 4$	0.25
Câu 2. (4,0 điểm)	1	Thay vào (*) ta được $t(t-4) = 192 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 192 = 0 \Leftrightarrow (t-16)(t+12) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 16 (\text{TM}) \\ t = -12 (\text{KTM}) \end{cases}$	0.25
		Với $t = 16 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 16 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \\ x+1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$	
		Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; 5\}$	0.25

			0.25
			0.5
			0.25
<b>2</b>	<p>Ta có : <math>g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)</math></p> <p>Vì <math>f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4</math> chia hết cho đa thức <math>g(x) = x^2 + x - 2</math></p> <p>Nên tồn tại một đa thức <math>q(x)</math> sao cho <math>f(x) = g(x) \cdot q(x)</math></p> $\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2) \cdot (x-1) \cdot q(x)$ <p>Với <math>x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b= -a -6(1)</math></p>	0.25	

		Với $x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$  Thay (1) vào (2). Ta có : $2a - (-a - 6) + 6 = 0 \Rightarrow a = -4;$  $b = -2$  Vậy $a = -4; b = -2$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
<b>Câu 3.</b>  (4,0 điểm)	<b>1</b>	$x^2 + xy = 2022x + 2023y + 2024$  $\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - 2023) = 1$  Vì $x; y$ nguyên nên $x+y+1$ và $x-2023$ là ước của 1	0.5 0.25

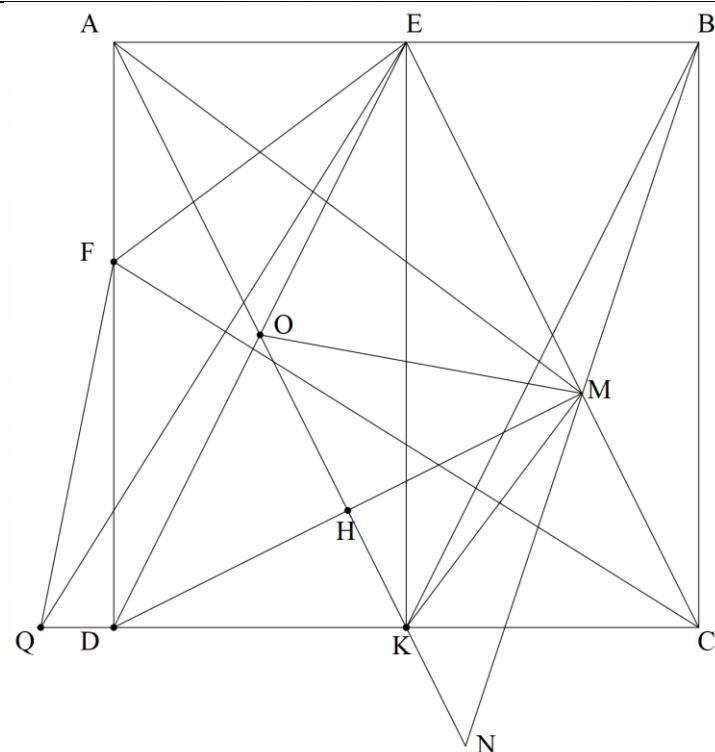
	$<=> \begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x - 2023 = -1 \end{cases}$  <p>TH1: <math>\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases} &lt;=&gt; \begin{cases} y = -2024 \\ x = 2024 \end{cases}</math></p>  <p>TH2: <math>\begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x - 2023 = -1 \end{cases} &lt;=&gt; \begin{cases} y = -2024 \\ x = 2022 \end{cases}</math></p>  <p>Vậy các cặp <math>(x;y)</math> nguyên cần tìm là: <math>\{(2024;-2024);(2022;-2024)\}</math></p>	0.5
		0.25
		0.25
		0.25
2	<p>Đặt <math>a = x^2 - 2xy - y, b = xy - 2y^2 - x, c = 2x^2 + y^2 + 2x + y</math>.</p> <p>Ta có <math>a - b = (x - y)(x - 2y + 1)</math>.</p> <p>Do <math>a</math> và <math>b</math> chia hết cho 5 nên <math>a - b</math> chia hết cho 5.</p> <p>Suy ra <math>x - y \vdots 5</math> hoặc <math>x - 2y + 1 \vdots 5</math>.</p>	0.5

	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Trường hợp 1:</b> Nếu <math>x \equiv y \pmod{5}</math> thì <math>x \equiv y \pmod{5}</math>. Khi đó</li> </ul> $a \equiv x^2 - 2x^2 - x = -(x^2 + x) \pmod{5};$ $c \equiv 2x^2 + x^2 + 2x + x = 3(x^2 + x) \pmod{5}.$ <p>Do <math>a \equiv 0 \pmod{5}</math> nên <math>x^2 + x \equiv 0 \pmod{5}</math> hay <math>c \equiv 0 \pmod{5}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Trường hợp 2:</b> Nếu <math>x \equiv 2y - 1 \pmod{5}</math> thì <math>x \equiv 2y - 1 \pmod{5}</math>. Khi đó</li> </ul> $a \equiv (2y - 1)^2 - 2(2y - 1)y - y = -3y + 1 \pmod{5};$ $c \equiv 2(2y - 1)^2 + y^2 + 2(2y - 1) + y \equiv 9y^2 - 3y \equiv 3y(3y - 1) \pmod{5}.$ <p>Do <math>a \equiv 0 \pmod{5}</math> nên <math>3y - 1 \equiv 0 \pmod{5}</math> hay <math>c \equiv 0 \pmod{5}</math>.</p> <p>Từ hai trường hợp trên suy ra ĐPCM</p>	0.25
		0.5

0.25

**Câu 4**(6,0  
điểm)

m



--	--	--

	<b>1</b>	Chứng minh được AEKD là hình chữ nhật.	1.0
	<b>3</b>	<p>Ta có O là giao điểm của 2 đường chéo AK và DE nên</p> $OA = OE = OK = OD = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}DE$ $\Rightarrow MO = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}AK \Rightarrow \Delta AMK \text{ vuông tại } K \Rightarrow AM \perp KM \text{ (ĐPCM)}$	1.0
	<b>2</b>	Gọi H là giao điểm của AK và DM	1.0
	<b>1,5</b>	<p>Chứng minh được AECK là hình bình hành .</p> <p>Từ đó suy ra <math>AK // CE \Rightarrow HK // MC</math> mà <math>KD = KC \Rightarrow HD = HM</math></p> <p>kết hợp với <math>DM \perp CE \Rightarrow AH \perp DM</math></p>	0.25
		$\Rightarrow \Delta ADM$ cân tại A	0.25

	<p><math>\Rightarrow AD = AM = AB \Rightarrow \Delta AMB</math> cân tại A</p> <p>Do <math>\Delta ADM</math> cân tại A <math>\Rightarrow AMD = \frac{180^\circ - DAM}{2}</math></p> <p>Do <math>\Delta ABM</math> cân tại A <math>\Rightarrow AMB = \frac{180^\circ - BAM}{2}</math></p> <p><math>\Rightarrow AMD + AMB = \frac{180^\circ - DAM + 180^\circ - BAM}{2} = \frac{360^\circ - (DAM + BAM)}{2} = \frac{360^\circ - DAB}{2} = \frac{360^\circ - 135^\circ}{2} = 135^\circ</math></p> <p><math>\Rightarrow BMD = 135^\circ</math></p> <p>Lại có BMD là góc ngoài của tam giác vuông HMN từ đó tính được</p> <p><math>ANB = 45^\circ</math></p>	0.25
		0.25

			0.25
3	<p>Qua E vẽ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q</p> <p>Xét hình vuông ABCD có EK là đường trung bình .</p> <p>Suy ra <math>EK = AD = CD</math>, <math>EK \parallel AD \Rightarrow AD \perp CD \Rightarrow EKQ = 90^\circ</math></p> <p>Xét <math>\triangle CDF</math> và <math>\triangle EKQ</math> có:</p> <p><math>KEQ = FCQ</math> (cùng phụ với góc <math>EQC</math>); <math>CD = EK</math>; <math>EKQ = CDF = 90^\circ</math></p> <p><math>\Rightarrow \triangle CDF \cong \triangle EKQ</math> (g.c.g) <math>\Rightarrow CF = EQ</math> ( Hai cạnh tương ứng)</p> <p>Xét <math>\triangle CEQ</math> có CF là đường phân giác đồng thời là đường cao.</p> <p>Suy ra <math>\triangle CEQ</math> cân tại C <math>\Rightarrow CF</math> cũng là đường trung trực</p>	0.25	
			0.25

	<p><math>\Rightarrow FE = FQ</math> (tính chất đường trung trực) <math>\Rightarrow EF + FQ = 2EF</math></p> <p><math>\Rightarrow EQ \leq EF + FQ = 2EF</math>. Dấu “=” xảy ra khi E; Q, F thẳng hàng</p> <p>Mà <math>EQ = FC \Rightarrow FC \leq 2EF</math> (ĐPCM)</p>	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 5 . (2,0 điểm)	<p>Ta có: <math>\frac{1+3a}{1+b^2} = (1+3a)\left(1 - \frac{b^2}{1+b^2}\right) = 1+3a - \frac{b^2(1+3a)}{1+b^2}</math></p> <p>Ta chứng minh được <math>\frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{2}</math>. Thật vậy: <math>\frac{b}{1+b^2} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow</math></p>	0,25

$$\frac{2b-1-b^2}{2(1+b^2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(b-1)^2}{2(1+b^2)} \leq 0 \text{ đúng với mọi } b.$$

Do đó  $\frac{b^2}{1+b^2} \leq \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{-b^2}{1+b^2} \geq \frac{-b}{2}$

0,25

$$\text{Khi đó } \frac{1+3a}{1+b^2} = 1+3a - \frac{b^2(1+3a)}{1+b^2} \geq 1+3a - \frac{b(1+3a)}{2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta cũng chứng minh được: } \frac{1+3b}{1+c^2} \geq 1+3b - \frac{c(1+3b)}{2} \quad (2)$$

$$\text{Và } \frac{1+3c}{1+a^2} \geq 1+3c - \frac{a(1+3c)}{2} \quad (3)$$

0,25

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq 3 + 3(a+b+c) - \frac{b(1+3a) + c(1+3b) + a(1+3c)}{2}$$

$$= 3 + 3(a+b+c) - \frac{(a+b+c) + 3(ab+bc+ca)}{2} = \frac{5(a+b+c)}{2} - \frac{3}{2}$$

Lại có:

	$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \forall a; b; c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$ $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow a+b+c \geq 3.$ Do đó $\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq \frac{5.3}{2} - \frac{3}{2} = 6.$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$	0,25 0.25 0.25 0.25
--	---	------------------------------

			0.25
--	--	--	------

Ghi chú:

-Học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.

-Bài hình nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm.

UBND HUYỆN HIỆP HÒA

**ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LẦN 2**

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**NĂM HỌC 2023-2024**

**MÔN: TOÁN 8**

**Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Bài 1 (5,0 điểm):**

1) Phân tích đa thức thành nhân tử

a)  $x^2 - x - 2022 \cdot 2023$       b)  $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

2) Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

3) Cho  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Biết  $f(x)$  chia cho  $x - 2$  dư 5,  $f(x)$  chia cho  $x +$

1

đư - 4. Tính  $M = (a^{2019} + b^{2019})(b^{2021} + c^{2021})(c^{2023} + a^{2023})$

**Bài 2 (4,0 điểm):**

Cho  $A = \left( \frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3} \right) : \frac{1}{x-1}$  ( $x \neq 1$ )

1) Rút gọn A

2) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

**Bài 3 (4,0 điểm):**

1) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn :

$$x + y + z = \frac{1}{2} ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$$

Chứng minh rằng:  $M = (x^3 + y^3)(y^{2013} + z^{2013})(z^{2023} + x^{2023}) = 0$

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn  $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$

Chứng minh rằng  $a + b + c + d$  chia hết cho 6

**Bài 4 (6,0 điểm):** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm của

2 đường chéo. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho góc IOM bằng  $90^\circ$ .

Gọi N là giao điểm của AM và CD.

a) Chứng minh  $BI = CM$

b) Tính diện tích tứ giác BIOM theo a

c) Chứng minh  $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

**Bài 5 (1,0 điểm):** Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^5}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^5}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

----- Đề gồm 01 trang-----

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**HDC MÔN THI: TOÁN 8**



\_\_\_\_\_

Bài	Nội dung	Điểm
1(5đ)	<p>1) a) <math>x^2 - x - 2022 \cdot 2023 = x^2 - x - 2022(2022 + 1)</math></p> $= x^2 - x - 2022^2 - 2022$ $= \dots\dots (x + 2022)(x - 2023)$ <p>b) <math>a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)</math></p> $= a^3(b - c) - b^3(b - c) - b^3(a - b) + c^3(a - b)$ $= \dots\dots = (a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	2) Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z; trong đó cạnh huyền là z	

	(x, y, z là các số nguyên dương )	0.25
	Ta có $xy = 2(x+y+z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2)  Từ (2) suy ra $z^2 = (x+y)^2 - 2xy$ , thay (1) vào ta có :  $z^2 = (x+y)^2 - 4(x+y+z)$ $z^2 + 4z = (x+y)^2 - 4(x+y)$ $z^2 + 4z + 4 = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4$ $(z+2)^2 = (x+y-2)^2$ , suy ra $z+2 = x+y-2$	0.5 0.25
	$z = x + y - 4$ ; thay vào (1) ta đ- ợc :  $xy = 2(x+y+x+y-4)$ $xy - 4x - 4y = -8$ $(x-4)(y-4) = 8 = 1.8 = 2.4$	0.5
	Từ đó ta tìm đ- ợc các giá trị của x , y , z là :  $(x=5,y=12,z=13) ; (x=12,y=5,z=13) ;$ $(x=6,y=8,z=10) ; (x=8,y=6,z=10)$	
	3) Gọi đa thức thương của $f( x )$ cho $x - 2$ và $x + 1$ lần lượt là $Q_1$ và $Q_2$  Theo bài ra ta có $f( x ) = ( x - 2)Q_1 + 5 = ( x + 1)Q_2 - 4$	0.25

	<p>Vì <math>f(x)</math> chia cho <math>x - 2</math> dư 5 nên <math>f(2) = 5 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + c = 5</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 4a + 2b + c = -3</math> (*)</p> <p>Vì <math>f(x)</math> chia cho <math>x + 1</math> dư -4 nên <math>f(-1) = -4</math></p> <p><math>\Rightarrow -1 + a - b + c = -4 \Leftrightarrow a - b + c = -3</math> (**)</p> <p>Từ * và ** <math>\Rightarrow a = -b</math></p> <p>Thay <math>a = -b</math> vào M ta có <math>M = 0</math></p>	0.25
2(4 đ)	<p>1) <math>A = \left( \frac{2x^2+2}{x^3-1} + \frac{x^2-x+1}{x^4+x^2+1} - \frac{x^2+3}{x^3-x^2+3x-3} \right) : \frac{1}{x-1}</math> (<math>x \neq 1</math>)</p> <p><math>= \left( \frac{2x^2+2}{x^3-1} + \frac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} - \frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+3)} \right) : \frac{1}{x-1}</math></p> <p><math>= \dots \dots \dots</math></p> <p><math>= \frac{2x^2+2+x-1-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} : \frac{1}{x-1}</math></p> <p><math>= \frac{x^2}{x^2+x+1}</math></p> <p>KL:.....</p>	0,5 0,5 0,5

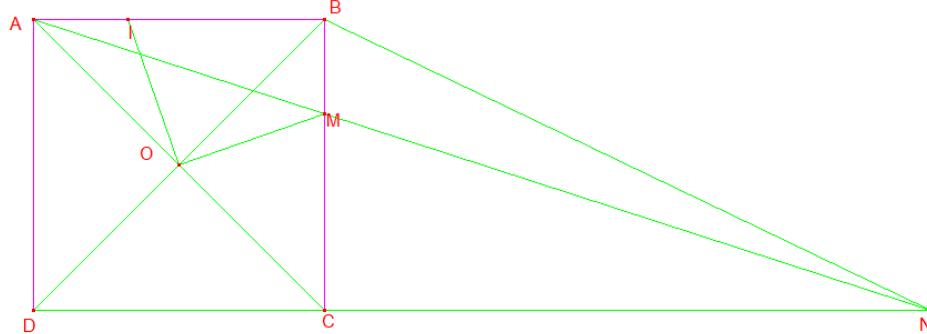
		0,75
		0,25
	<p>2) Ta có</p> $x^2 \geq 0$ $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ <p>Vì <math>\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} &gt; 0</math> nên <math>A \geq 0</math> (1)</p> <p>Xét hiệu <math>\frac{4}{3} - A = \dots = \frac{(x+2)^2}{3(x^2+x+1)}</math></p> <p>Lập luận <math>\Rightarrow A \leq \frac{4}{3}</math> (2)</p> <p>Từ (1) và (2) <math>\Rightarrow 0 \leq A \leq \frac{4}{3}</math>. Vì <math>A</math> là số nguyên nên <math>A \in \{0; 1\}</math></p> <p>Với <math>A = 0 \Rightarrow \dots x = 0</math> (TM) 0.25</p> <p>Với <math>A = 1 \Rightarrow \dots x = -1</math> (TM)</p> <p>KL...</p>	

		0.25
		0.5
		0.5
3 (4d)	<p>Ta có <math>x + y + z = 0,5</math> (1) <math>\Rightarrow 2x + 2y + 2z = 1</math></p> <p>Ta có <math>\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2x+2y+2z}{xyz} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2</math> (2) (vì <math>1/x + 1/y + 1/z &gt; 0</math>)</p> <p>Tù (1) và (2) <math>\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0</math></p> <p>Nếu <math>x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow M = 0</math></p>	0,25

	Nếu $y + z = 0 \Rightarrow M = 0$	
	Nếu $z + x = 0 \Rightarrow M = 0$	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
		0,25
	2) Ta có $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$	
	$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$	0,25
	Vì 6 chia hết cho 6 nên $6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$ chia hết cho 6	0,25
	$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ chia hết cho 6	0,25
	Xét hiệu $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d)$	0,25
	$= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$	0,25
	Chứng minh $a^3 - a; b^3 - b; c^3 - c; d^3 - d$ chia hết cho 6	0,5
	$\Rightarrow a + b + c + d$ chia hết cho 6	0,25

4

0,5



a) Chứng minh  $\Delta BIO = \Delta CMO$  (g.c.g)

$\Rightarrow BI = CM$  ( 2 cạnh tương ứng)

1,5

0,5

a) Ta có  $\Delta BIO = \Delta CMO$  nên  $S_{BIO} = S_{CMO}$

0,5

$$S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$$

	$= S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4}a^2$	1,5
	c) Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AN cắt CD tại E  Chứng minh $AE = AM$  Xét tam giác ANE vuông tại A có AD vuông góc NE có	0,5
	$S_{AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE$  $\Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2 (*)$  Áp dụng định lý pytago ta có: $NE^2 = AN^2 + AE^2 (**)$	0,5
	$(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2}$  Vì $AE = AM$ và $CD = AD \Rightarrow$ đpcm	0,25
5 (1 đ)	Ta có $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2)$ ( $a, b > 0$ )  $\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$  $\dots \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ (Luôn đúng)	0,5 0,25

<p>Do đó <math>\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow \frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a^3 - a^2b}{3}</math>;</p> <p>Chứng minh tương tự...</p> <p>Ta được: <math>VT \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + \frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a}{3}</math></p> <p>Vì vai trò của a, b, c như nhau, nên ta giả sử <math>a \geq b \geq c &gt; 0</math></p> $\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a &= a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) \\ &= a^2(a-b) + b^2(b-a+a-c) + c^2(c-a) = (a-b)^2(a+b) + (a-c)(b-c)(b+c) \geq 0 \end{aligned}$ <p>(Với mọi <math>a \geq b \geq c &gt; 0</math>).</p> <p>Từ đó <math>\Rightarrow VT \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}</math> Dấu “=” xảy ra <math>\Leftrightarrow a=b=c</math></p>	0,25
	0,25
	0,25

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC****LỚP 8 CẤP HUYỆN****NĂM HỌC 2023-2024****MÔN THI: TOÁN**

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 12/01/2023

**Câu 1: (4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức  $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$  với  $x \neq 2; x \neq 3$ .

Rút gọn A và tìm số nguyên x để A chia hết cho 2.

2. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thoả mãn:  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  và  $abc \neq 0$ .

Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$

**Câu 2: (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình:  $\frac{2x}{3x^2-5x+2} + \frac{13x}{3x^2+x+2} = 6$

2. Phân tích đa thức sau thành phân tử:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$$

**Câu 3: (4,0 điểm)**

1. Tìm cặp số nguyên  $(x; y)$  thoả mãn phương trình:  $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$
2. Cho  $x; y$  là các số nguyên khác  $0; 1; -1$  và  $x^3 + y^3$  chia hết cho  $xy$ .

Chứng minh rằng  $x^2 + 1$  không chia hết cho  $y$ .

**Câu 4: (6,0 điểm)**

Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E, I$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ ;  $M$  là điểm đối xứng với  $I$  qua  $E$ .

1. Chứng minh tứ giác  $ABIM$  là hình bình hành.
2. Gọi  $N, F$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BD$ ;  $K$  là điểm đối xứng với  $I$  qua  $F$ .

Chứng minh: ba đường thẳng  $IN$ ;  $MF$ ;  $KE$  đồng quy.

3. Gọi  $O$  là giao hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Kí hiệu  $S; S_1; S_2$  lần lượt là diện tích tứ giác  $ABCD$ , tam giác  $AOB$  và tam giác  $COD$ . Biết  $S_1 = a^2; S_2 = b^2$  với  $a, b$  là các số dương cho trước. Tìm điều kiện của tứ giác  $ABCD$  để  $S = (a+b)^2$

**Câu 5: (2,0 điểm)**

Cho các số dương  $x, y$  thoả mãn  $2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y$ .

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN**

**MÔN TOÁN**

Câu	Ý	Tóm tắt nội dung hướng dẫn	Điểm
		<b>Cho biểu thức</b> $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$ với $x \neq 2; x \neq 3$ .	
		+ ) Với $x \neq 2; x \neq 3$ ta có:	
		$A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x} = \frac{(2x-9)-(x+3)(x-3)+(2x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$	0,5
Câu 1 (2,5)	<b>a)</b>	$= \frac{2x-9-x^2+9+2x^2-3x-2}{(x-3)(x-2)}$	0,25
	<b>d)</b>	$= \frac{x^2-x-2}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-3}$	0,5
		Vậy với $x \neq 2; x \neq 3$ thì $A = \frac{x+1}{x-3}$	0,25
		+ ) Ta có: $A = \frac{x+1}{x-3}$ chia hết cho 2 thì A phải nhận giá trị nguyên.	0,25
		Do x nguyên nên A nhận giá trị nguyên khi $x+1$ chia hết cho $x-3$ .	

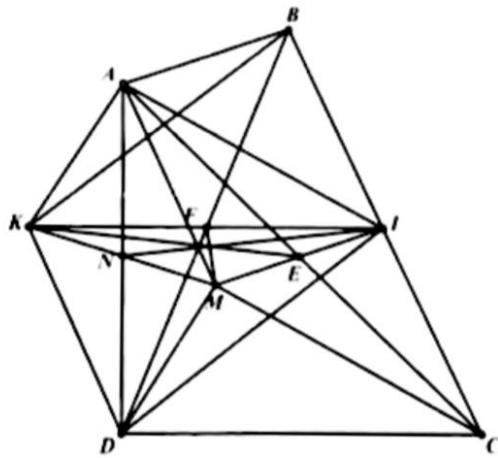
	Mà $x + 1 = x - 3 + 4$ nên suy ra 4 chia hết cho $x - 3$ $\Rightarrow x - 3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$ . Suy ra $x \in \{4; 2; 5; 1; 7; -1\}$	0,5
	+) Đối chiếu với điều kiện $x \neq 2; x \neq 3$ và thử lại ta thấy $x \in \{7; -1\}$ là giá trị cần tìm.	0,25
	<b>Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thoả mãn:</b>  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$ .  <b>Tính giá trị biểu thức</b> $P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$	
2	+) Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$	
(1,5)	Do $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ với a, b, c đôi một khác nhau nên suy ra  <b>d)</b> $a + b + c = 0$ .	0,5
	Khi đó:  $\frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{a^2 + (b+c)(b-c)} = \frac{ab^2}{a^2 + (-a)(b-c)} = \frac{b^2}{a+c-b} = \frac{b^2}{-b-b} = \frac{b}{-2}$  Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{c}{-2}; \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{a}{-2}$	0,5

	Công theo vế các đẳng thức trên ta được:  $P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} = -\frac{1}{2}(a+b+c) = 0$ Vậy $P = 0$ .	0,5
Câu 2	<b>Giải phương trình:</b> $\frac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \frac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6$	
1 (2d)	Điều kiện xác định: $x \notin \left\{a; \frac{2}{3}\right\}$	0,25
	Với điều kiện trên PT đã cho tương đương với	
	$2x(3x^2 + x + 2) + 13x(3x^2 - 5x + 2) = 6(3x^2 + x + 2)(3x^2 - 5x + 2)$	0,25
	$\Leftrightarrow 54x^4 - 117x^3 + 105x^2 - 78x + 24 = 0$	
	$\Leftrightarrow (2x-1)(3x-4)(9x^2 - 3x + 6) = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; x = \frac{3}{4}$ (do $9x^2 - 3x + 6 = 0$ vô nghiệm)	0,5
	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right\}$	0,25
2	<b>Phân tích đa thức sau thành phân tử:</b>	

	(2d)	$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$	
	Đặt		
		$B = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$	0,5
		Và $x^4 + y^4 + z^4 = a, x^2 + y^2 + z^2 = b, x + y + z = c$	
		Khi đó: $B = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2$	
		Ta có: $a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2), b - c^2 = -2(xy + yz + zx)$	0,75
		Vậy: $B = -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2$	0,75
		$B = 4(2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz) = 8xyz(x + y + z)$	
Câu 1 3 (2d)	<b>Tìm cặp số nguyên (x;y) thoả mãn phương trình:</b>		
	$x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$		
	<p>Phương trình <math>x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5 \Leftrightarrow y(x^2 + 2) = x^3 + 3x - 5</math></p> $\Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} = x + \frac{x - 5}{x^2 + 2}$ (do $x^2 + 2 > 0$ )		
		Với x nguyên, để y nguyên thì x - 5 chia hết cho $x^2 + 2$	0,5

	Suy ra $(x+5)(x-5)$ chia hết cho $x^2 + 2 > 0$	
	Suy ra 27 chia hết cho $x^2 + 2 > 0$ do đó $x^2 + 2 > 0$ chỉ có thể là 3; 9; 27.	0,5
	Từ đó ta có $x \in \{1; -1; 5; -5\}$	
	Thay lần lượt các giá trị của x vào đề bài ta tìm được các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn đề bài là $(-1; -3); (5; 5)$ .	0,5
2 (2d)	<p><b>Cho <math>x; y</math> là các số nguyên khác <math>0; 1; -1</math> và <math>x^3 + y^3</math> chia hết cho <math>xy</math>.</b></p> <p><b>Chứng minh rằng <math>x^2 + 1</math> không chia hết cho <math>y</math>.</b></p> <p>Vì <math>x^3 + y^3</math> chia hết cho <math>xy</math> nên <math>\frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}</math> là số nguyên.</p> <p>Đặt: <math>\frac{x^2}{y} = \frac{a}{b}; \frac{y^2}{x} = \frac{m}{n}</math> với <math>(a, b) = 1; (m, n) = 1; b &gt; 0; n &gt; 0</math></p>	0,25
	<p>Theo giả thiết ta có <math>\frac{a}{b} + \frac{m}{n}</math> là số nguyên nêu</p> $\frac{an + bm}{bn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} an + bm : b \\ an + bm : n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} an : b \\ bn : n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n : b \\ b : n \end{cases} \Rightarrow n = b \quad (1)$	0,5
	Mặt khác: $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{x} = xy \in \mathbb{Z}$ nên $am : n \Rightarrow a : n$ (vì $(m, n) = 1$ ) $\quad (2)$	0,5

	Từ (1) và (2) suy ra $a:b \Rightarrow x^2:y$	0,25
	Do đó: $x^2 + 1:y \Leftrightarrow 1:y \Leftrightarrow y = \pm 1$ . Không xảy ra do $y \neq \pm 1$ Vậy $x^2 + 1$ không chia hết cho y.	0,5
Câu 4	<p><b>Cho tứ giác <math>ABCD</math>. Gọi <math>E, I</math> lần lượt là trung điểm của <math>AC</math> và <math>BC</math>; <math>M</math> là điểm đối xứng với <math>I</math> qua <math>E</math>.</b></p> <p><b>1. Chứng minh tứ giác <math>ABIM</math> là hình bình hành.</b></p> <p><b>2. Gọi <math>N, F</math> lần lượt là trung điểm của <math>AD</math> và <math>BD</math>; <math>K</math> là điểm đối xứng với <math>I</math> qua <math>F</math>. Chứng minh: ba đường thẳng <math>IN; MF; KE</math> đồng quy.</b></p> <p><b>3. Gọi <math>O</math> là giao hai đường chéo <math>AC</math> và <math>BD</math>. Kí hiệu <math>S; S_1; S_2</math> lần lượt là diện tích tứ giác <math>ABCD</math>, tam giác <math>AOB</math> và tam giác <math>COD</math>.</b></p> <p><b>Biết <math>S_1 = a^2; S_2 = b^2</math> với <math>a, b</math> là các số dương cho trước. Tìm điều kiện của tứ giác <math>ABCD</math> để <math>S = (a+b)^2</math></b></p>	



	Vì M đối xứng với I qua E nên E là trung điểm của MI	
1	Tứ giác AICM có E là trung điểm của hai đường chéo AC và MI nên AICM là hình bình hành.	0,75
(2d)	$\Rightarrow AM \parallel IC$ và $AM = IC$ . Mà $IC = BI$ và $B, I, C$ thẳng hàng suy ra $AM \parallel BI$ và $AM = BI$ .	0,75
	Tứ giác AMIB có $AM \parallel BI$ và $AM = BI$ nên là hình bình hành	0,5
2	Tương tự câu a, tứ giác BKDI là hình bình hành	0,5
(2d)	$\Rightarrow KD \parallel BI$ ; $KD = BI$ mà $AM \parallel BI$ ; $AM = BI$ (do ABMI là hình bình hành) $\Rightarrow KD \parallel AM$ ; $KD = AM \Rightarrow AMKD$ là hình bình hành $\Rightarrow N$ là trung điểm của MK	0,75

	<p>Xét <math>\Delta MKI</math> có N, F, E lần lượt là trung điểm của MK; KI; MI</p> <p>Suy ra IN; MF, KE là ba đường trung tuyến của tam giác</p> <p><math>\Rightarrow</math> IN; MF; KE đồng quy (ĐPCM)</p>	0,75
3		
(2d)	<p>Ta có <math>\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} \Rightarrow S_{AOD} \cdot S_{BOC} = a^2 b^2</math></p> <p>Áp dụng BĐT: <math>(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (S_{AOD} + S_{BOC})^2 \geq 4a^2 b^2</math></p> <p><math>\Rightarrow S_{AOD} + S_{BOC} \geq 2ab</math>. Do a, b&gt;0</p>	0,5 0,5
	<p>Ta có <math>S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{AOD} + S_{BOC} + S_{COD} \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2</math> không đổi</p>	0,5
	<p>Dấu “=” xảy ra khi <math>\Leftrightarrow S_{AOD} = S_{BOC} \Leftrightarrow AB // CD</math> hay ABCD là hình thang</p>	0,5

	Vậy: $S_{ABCD} = (a + b)^2$ khi tứ giác ABCD là hình với hai đáy là: AB // CD	
Câu 5 (2d)	<p><b>Cho các số dương x, y thoả mãn</b> <math>2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8</math>.</p> <p><b>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</b> <math>P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y</math>.</p> <p>Từ giả thiết <math>2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \leq 9</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 \leq 9</math>, suy ra <math>(x+y)^2 \leq 9 \Rightarrow 0 &lt; x+y \leq 3</math></p> <p>Do x, y &gt; 0 nên ta có:</p> $P = \left( \frac{2}{x} + 2x \right) + \left( \frac{4}{y} + y \right) - 4x - 4y \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot 2x} + 2\sqrt{\frac{4}{y} \cdot y} - 4(x+y)$ <p>Suy ra <math>P \geq 8 - 4(x+y) \geq 8 - 4 \cdot 3 = -4</math> (do <math>0 &lt; x+y \leq 3</math>).</p> <p>Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi x = 1 và y = 2.</p>	0,5

**Chú ý:**

- Bài hình nếu HS không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không tính điểm.
- HS nếu làm theo cách khác mà vẫn đúng thì vẫn chấm điểm tối đa bài đó.
- Điểm chấm chi tiết đến 0,25 đ.

PHÒNG GD&amp;ĐT YÊN ĐỊNH

**ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI LỚP 8**

TRƯỜNG THCS YÊN GIANG

NĂM HỌC 2023-2024

**MÔN THI: TOÁN**

Ngày thi: 06/3/2021

*Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)***Câu 1: (4 điểm).**

$$\text{Cho biểu thức } M = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$$

1) Rút gọn biểu thức M.

2) Tính giá trị của biểu  $N = \frac{a^3 - 9a^2 + 15a - 4}{a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4}$  khi  $M = \frac{1}{2}$ .**Câu 2: ( 4 điểm).**1) Giải phương trình:  $(6x+7)^2 = \frac{6}{(x+1)(3x+4)}$ .

2) Tìm đa thức  $P(x)$  biết  $P(x)$  chia cho  $x + 3$  dư 1; chia cho  $x - 4$  dư 8;

chia cho  $(x + 3)(x - 4)$  được thương là  $3x$  và còn dư.

### Câu 3: ( 4 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $x^4 - y^4 - 2y^2 = 25$

2) Cho các số tự nhiên  $m, n$  thỏa mãn:  $4m^2 + m = 5n^2 + n$ . Chứng minh rằng

$m - n$  và  $5m + 5n + 1$  đều là số chính phương.

### Câu 4: (6 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Tia phân giác của góc BAD cắt BD ở M, tia phân giác của góc ABC cắt AC ở N.

1) Chứng minh rằng  $MN // CD$ .

2) Gọi I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác AIK cân.

3) Tính diện tích tam giác AOM khi AD = 14cm, AB = 35cm, AM = 12cm.

**Câu 5: (2,0 điểm)**

Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}$$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: ..... Số

báo danh: .....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

**HƯỚNG DẪN CHẤM****ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI TOÁN 8.****CỤM GIAO LƯU:****HOÀNG HÓA – YÊN ĐỊNH – QUĂNG XƯƠNG – THỌ****XUÂN.**

<b>Câu</b> <b>1</b> <b>(4)</b> <b>đ)</b>	<p><b>1) Rút gọn biểu thức M.</b></p> <p>- Điều kiện: <math>a \neq 0; a \neq 1</math></p> $M = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$ $= \left[ \frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)}$ $= \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$	<b>0,5</b>
---	---	------------

		0,5
	$= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2 + a + 1)} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4}$	0,5
	$= \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{4a}{a^2 + 4}$	0,5
	Vậy : $M = \frac{4a}{a^2 + 4}$ ( với $a \neq 0; a \neq 1$ ).	
	<b>2) Tính giá trị của biểu</b> $N = \frac{a^3 - 9a^2 + 15a - 4}{a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4}$ khi $M = \frac{1}{2}$ .	
	Ta có : $M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 - 8a + 4 = 0$ (1).	
	Nhận xét : Các nghiệm của (1) đều thỏa mãn điều kiện $a \neq 0; a \neq 1$ .	0,5
	Thực hiện phép chia đa thức $a^3 - 9a^2 + 15a - 4$ cho đa thức $a^2 - 8a + 4$	0,5

	ta được: $a^3 - 9a^2 + 15a - 4 = (a^2 - 8a + 4)(a - 1) + 3a$	
	Thực hiện phép chia đa thức $a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4$ cho đa thức $a^2 - 8a + 4$ ta được: $a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4 = (a^2 - 8a + 4)(a^2 - 1) + 2a$	0,5
	$N = \frac{a^3 - 9a^2 + 15a - 4}{a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4} = \frac{(a^2 - 8a + 4)(a - 1) + 3a}{(a^2 - 8a + 4)(a^2 - 1) + 2a} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$	0,5
	Vậy $M = \frac{3}{2}$ .	
Câ	<b>1) Giải phương trình:</b> $(6x + 7)^2 = \frac{6}{(x+1)(3x+4)}$ .	

<p><b>u</b></p> <p>- Điều kiện: <math>x \neq -1; x \neq -\frac{4}{3}</math>. Ta có :</p> <p><b>2</b></p> $(6x+7)^2 = \frac{6}{(x+1)(3x+4)} \Leftrightarrow (6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72 \quad (1)$ <p><b>(4)</b></p> <p><b>d)</b> Đặt <math>6x+7 = t</math>. Phương trình (1) trở thành:</p>	0,5
$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2 - 1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$	0,5
$\Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0 \quad (\text{Vì } t^2 + 8 > 0) \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3$	0,5
<p>Với <math>t = 3 \Rightarrow 6x+7 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}</math> (thỏa mãn).</p> <p>Với <math>t = -3 \Rightarrow 6x+7 = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{3}</math> (thỏa mãn).</p>	0,5
<p>Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm : <math>S = \left\{ \frac{-2}{3}; \frac{-5}{3} \right\}</math></p> <p><b>2) Tìm đa thức <math>P(x)</math> biết <math>P(x)</math> chia cho <math>x + 3</math> dư 1; chia cho <math>x - 4</math> dư 8;</b></p>	

chia cho  $(x + 3)(x - 4)$  được thương là  $3x$  và còn dư.

Vì đa thức  $(x + 3)(x - 4)$  có bậc là 2 nên đa thức dư khi chia  $P(x)$  cho  $(x$

$+3)(x - 4)$  có dạng  $R(x) = ax + b$

0,5

$$\Rightarrow P(x) = (x + 3)(x - 4) \cdot 3x + ax + b$$

Vì khi chia đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $x + 3$  thì dư bằng 1 nên :

0,5

$$P(-3) = -3a + b = 1 \quad (1).$$

Vì khi chia đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $x - 4$  thì dư bằng 8 nên :

$$P(4) = 4a + b = 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :  $\begin{cases} -3a + b = 1 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$

0,5

Vậy:  $P(x) = (x + 3)(x - 4) \cdot 3x + x + 4 = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$

0,5

Câ 3	<b>1) Tìm tất cả các cặp số nguyên <math>(x; y)</math> thỏa mãn: <math>x^4 - y^4 - 2y^2 = 25</math></b>	
(4)	$x^4 - y^4 - 2y^2 = 25 \Leftrightarrow x^4 - (y^2 + 1)^2 = 24 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1) = 24$	0,5
d)	Suy ra: $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ là các ước của 24 và có tích bằng 24.	
	Vì $(x^2 + y^2 + 1) - (x^2 - y^2 - 1) = 2y^2 + 2$ là số chẵn nên $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ có cùng tính chẵn lẻ. Mà tích của chúng bằng 24 là số chẵn nên $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ đều là số chẵn.	0,5
	Vì $x^2 + y^2 + 1 > 0$ nên $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ là các ước chẵn dương. Mà $x^2 + y^2 + 1 > x^2 - y^2 - 1$ ; nên ta có các trường hợp :	0,5
	Trường hợp 1 : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 12 \\ x^2 - y^2 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ . ( loại )	0,5

Trường hợp 2 :  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 6 \\ x^2 - y^2 - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y^2 = 0 \end{cases}$ . ( loại )

Vậy không tồn tại cặp số nguyên  $(x; y)$  nào thỏa mãn đề bài :

**2) Cho các số tự nhiên  $m, n$  thỏa mãn:  $4m^2 + m = 5n^2 + n$ . Chứng**

**minh rằng  $m-n$  và  $5m+5n+1$  đều là số chính phương.**

Tacó  $4m^2 + m = 5n^2 + n$

0,5

$$\Leftrightarrow 5(m^2 - n^2) + m - n = m^2 \Leftrightarrow (m - n)(5m + 5n + 1) = m^2 \quad (1)$$

Vậy  $(m-n);(5m+5n+1)$  là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa

mãn (\*) nên chúng đều là các số chính phương.

Đặt :  $d = UCLN(m-n, 5m+5n+1)$ . Suy ra :

0,5

$$\begin{cases} m-n:d \\ 5m+5n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m-5n:d \\ 5m+5n+1:d \end{cases} \Rightarrow 10m+1:d \quad (2)$$

Mặt khác, từ (1) suy ra :  $m^2:d^2 \Rightarrow m:d \Rightarrow 10m:d$  (3).

0,5

Từ (2) và (3) suy ra :  $1:d \Rightarrow d = 1$  (Vì d là số tự nhiên).

Vì  $\text{UCLN}(m-n, 5m+5n+1) = 1$  nên  $m-n, 5m+5n+1$  là hai số nguyên

0,5

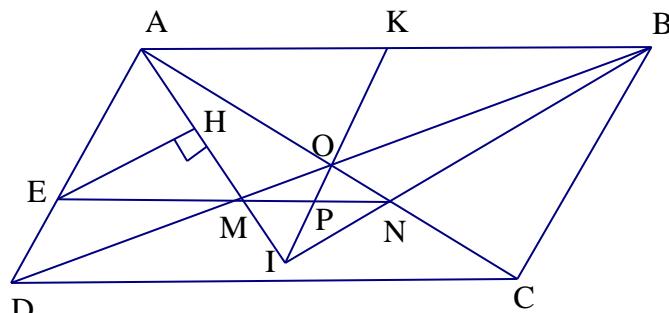
tổ cùng nhau. Khi hai số nguyên tổ cùng nhau mà có tích là một số chính phương thì cả hai số đó đều là số chính phương.

Vậy  $m-n$  và  $5m+5n+1$  đều là số chính phương.

Câu

4

(6,



1) Chứng minh rằng  $MN // CD$ .

<p><b>0d</b></p> <p>Đặt <math>AB = a, AD = b</math>. Áp dụng tính chất đường phân giác ta có :</p> <p>)</p> $\frac{DM}{MB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DM}{DM + MB} = \frac{AD}{AD + AB} \Leftrightarrow \frac{DM}{BD} = \frac{b}{b+a}.$	0,5
<p>Mà <math>BD = 2 \cdot DO</math> ( tính chất hình bình hành). Suy ra : <math>\frac{DM}{DO} = \frac{2b}{b+a}</math>. (1)</p>	0,5
<p>Tương tự, vì <math>BN</math> là đường phân giác của tam giác <math>ABC</math> nên :</p> $\frac{CN}{NA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CN}{CN + NA} = \frac{BC}{BC + AB} \Leftrightarrow \frac{CN}{BD} = \frac{b}{b+a} \Leftrightarrow \frac{CN}{CO} = \frac{2b}{b+a}. \quad (2)$	0,5
<p>Từ (1) và (2) suy ra : <math>\frac{DM}{DO} = \frac{CN}{CO}</math>. Suy ra <math>MN // CD</math>.</p>	0,5
<p><b>2) Gọi I là giao điểm của <math>AM</math> và <math>BN</math>, K là giao điểm của <math>OI</math> và <math>AB</math>.</b></p> <p><b>Chứng minh tam giác <math>AIK</math> cân.</b></p>	
<p>Vì <math>AI, BI</math> là hai đường phân giác của hai góc kề cạnh <math>AB</math> của hình bình</p>	0,5

hành ABCD nên  $AI \perp BI$ . Suy ra tam giác AIB vuông tại I.

Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác AIK và BIK, ta có:

0,5

$$\frac{PM}{KA} = \frac{IP}{IK}, \quad \frac{PN}{KB} = \frac{IP}{IK}, \text{ suy ra : } \frac{PM}{KA} = \frac{PN}{KB} \Leftrightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{KA}{KB} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác AOK và BOK, ta có:

0,5

$$\frac{PM}{KB} = \frac{OP}{OK}, \quad \frac{PN}{KA} = \frac{OP}{OK}, \text{ suy ra : } \frac{PM}{KB} = \frac{PN}{KA} \Leftrightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{KB}{KA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :  $\frac{KA}{KB} = \frac{KB}{KA} \Leftrightarrow KA^2 = KB^2 \Leftrightarrow KA = KB$ .

0,5

Suy ra IK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB của tam giác vuông AIB. Suy ra KA = KI. Vậy tam giác AIK cân tại K.

**3) Tính diện tích tam giác AOM khi AD = 14cm, AB = 35cm, AM = 12cm.**

Gọi E là giao điểm của MN và AD. Từ E kẻ EH vuông góc với AM.

0,5

Vì EM // AB, AM là đường phân giác của góc BAD dễ thấy tam giác

AEM cân tại E, H là trung điểm của AM. Suy ra AH = 6 cm.

Áp dụng định lí Ta-lét, tính chất đường phân giác ta có :

0,5

$$\frac{EA}{ED} = \frac{BM}{MD} = \frac{AB}{AD} \Leftrightarrow \frac{EA}{EA+ED} = \frac{AB}{AB+AD} \Leftrightarrow \frac{EA}{AD} = \frac{AB}{AB+AD}$$

$$\Leftrightarrow EA = \frac{AB \cdot AD}{AB + AD} = \frac{35 \cdot 14}{35 + 14} = 10$$

Áp dụng định lí pitago vào tam giác vuông AEH .

0,5

$$EH^2 = EA^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Leftrightarrow EH = 8cm$$

$$S_{AEM} = \frac{EH \cdot AM}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2} = 48cm^2, \quad S_{AMD} = \frac{AD \cdot S_{AEM}}{AE} = \frac{12 \cdot 48}{8} = 168cm^2$$

Theo câu a :  $\frac{DM}{DO} = \frac{2b}{b+a} \Leftrightarrow \frac{DM}{DO-DM} = \frac{2b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{DM}{MO} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$

0,5

$$S_{AOM} = \frac{OM \cdot S_{AMD}}{MD} = \frac{3.168}{4} = 126 \text{cm}^2.$$

**Câu** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x+y+z=3$ .

**u**

**Tìm giá trị lớn nhất của:**  $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$

**5****(2,**

0,5

$$\text{Đặt } P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$$

**0đ**  
)

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$$

Áp dụng BĐT  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$  và  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  với  $a, b, c$

0,5

dương, dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

$$\text{Ta có } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{z} + 1 \right)$$

Bởi vậy

0,5

$$\begin{aligned} P &= \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right) \\ &= \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

0,5

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là  $\frac{3}{2}$ . Đạt được tại  $x = y = z = 1$ .

HẾT

**Chú ý:**

- 1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.**
- 2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.**

PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH

**ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CỤM**

**CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 2**

**Năm học 2023-2024**

**Môn Toán 8**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đê)

---

**Câu 1: (5,0 điểm)**

- a) Tìm a,b để đa thức  $F(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$  chia hết cho đa thức  $g(x) = x^2 + x - 2$
- b) Tìm số tự nhiên n để  $p = n^3 - 3n^2 + n - 3$  là số nguyên tố
- c) Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{4x}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{15x + 6}{x^4 - 1} \right) : \frac{x+2}{x^2 - 1}$ . (Với  $x \neq \pm 1; x \neq -2$ )

Rút gọn biểu thức A rồi tìm giá trị lớn nhất của A

**Câu 2: (4,0 điểm)**

- a) Giải phương trình:  $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$
- b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn:  $x^2 - y^2 + y = 0$ .

**Câu 3: (4,0 điểm)**

- a) Cho các số  $a, b, c$  khác 0 thỏa mãn  $a + b = c + \frac{1}{2023}$  và  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 2023$

Tính giá trị của biểu thức:  $B = (a^{99} + b^{99} - c^{99}) \left( \frac{1}{a^{99}} + \frac{1}{b^{99}} - \frac{1}{c^{99}} \right)$

- b) Với  $n$  là số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5. Chứng minh:  $2n^5 + n^4 - 10n^3 + 8n - 1$  chia hết cho 80.

**Câu 4: (6,0 điểm)**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và  $AB < AC$ , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh:  $\angle AEF = \angle ABC$

- b) Gọi M là điểm đối xứng của H qua D. Giao điểm của EF với AM là N.

Chứng minh:  $HN \cdot AD = AN \cdot DM$ .

- c) Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh ba điểm I, D, K thẳng hàng.

**Câu 5. (1,0 điểm)** Cho a,b,c là các số thỏa mãn  $|a| < 1$ ;  $|b| < 1$ ;  $|c| < 1$  và  $ab + bc + ca =$

2

Chứng minh  $\frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq 6$

.....**Hết.**.....

*Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....*

***Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.***

## HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 8

*(Gồm 04 trang)*

Câu	Nội dung	Điểm
1(5đ)	<p><b>Câu 1: (5,0 điểm)</b></p> <p>a) Tìm a,b để đa thức <math>F(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4</math> chia hết cho đa thức <math>g(x) = x^2 + x - 2</math></p> <p>b) Tìm số tự nhiên n để <math>p = n^3 - 3n^2 + n - 3</math> là số nguyên tố</p> <p>c) Cho biểu thức: <math>A = \left( \frac{4x}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{15x + 6}{x^4 - 1} \right) : \frac{x+2}{x^2 - 1}</math>. (Với <math>x \neq \pm 1; x \neq -2</math>)</p> <p>Rút gọn biểu thức A rồi tìm giá trị lớn nhất của A</p>	
	<p>a) Gọi đa thức thương khi chia <math>F(x)</math> cho <math>g(x)</math> là <math>Q(x)</math>, ta có:</p> $ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x^2 + x - 2) \cdot Q(x)$ <p>đúng với mọi giá trị của x</p>	

	$\rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x - 1)(x + 2)$ . Q(x) đúng với mọi giá trị của x	0,5
	- Xét tại $x = 1$ ta có: $a + b + 10 - 4 = 0 \rightarrow a + b = -6$ (1)	0,5
	- Xét tại $x = -2$ ta có: $-8a + 4b - 20 - 4 = 0 \rightarrow -8a + 4b = 24$ (2)	
	Từ (1) và (2) tìm được $a = -4$ ; $b = -2$	0,5
<b>b)</b>		
	Ta có $p = (n^2+1)(n-3)$	1,0
	Mà $n^2+1 \geq 1$ nên để p nguyên tố thì ta có các TH sau:	
	TH1: $n^2 + 1 = 1$ và $n - 3$ nguyên tố	
	$n^2+1 = 1 \rightarrow n = 0$ , khi đó $n - 3 = -3$ không nguyên tố	0,5
	TH2: $n - 3 = 1$ và $n^2 + 1$ nguyên tố	
	$n - 3 = 1 \rightarrow n = 4$ , khi đó $n^2+1 = 17$ nguyên tố	

	Vậy $n = 4$	0,5
	c)	
	Rút gọn đúng $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$	1,0
	Tìm max A:	
	$A = 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \leq 4$ . Dấu '=' xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ (T/m)	
	Vậy $\max A = 4$ khi $x = \frac{1}{2}$	1,0
2(4đ)	<b>Câu 2: (4,0 điểm)</b>	
	a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$	
	b) Tìm $x, y$ nguyên thỏa mãn: $x^2 - y^2 + y = 0$ .	

<p><b>a)</b> <math>\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}</math></p>	
--	--

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \quad (1)$$

0,5

ĐK:  $x \neq -4 ; x \neq -5 ; x \neq -6 ; x \neq -7$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

0,5

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -13 \text{ (t/m)} ; x = 2 \text{ (t/m)}$$

0,5

Vậy  $S = \{-13 ; 2\}$

0,5

<p><b>b)</b> <math>(2,0)</math></p>	
-------------------------------------	--

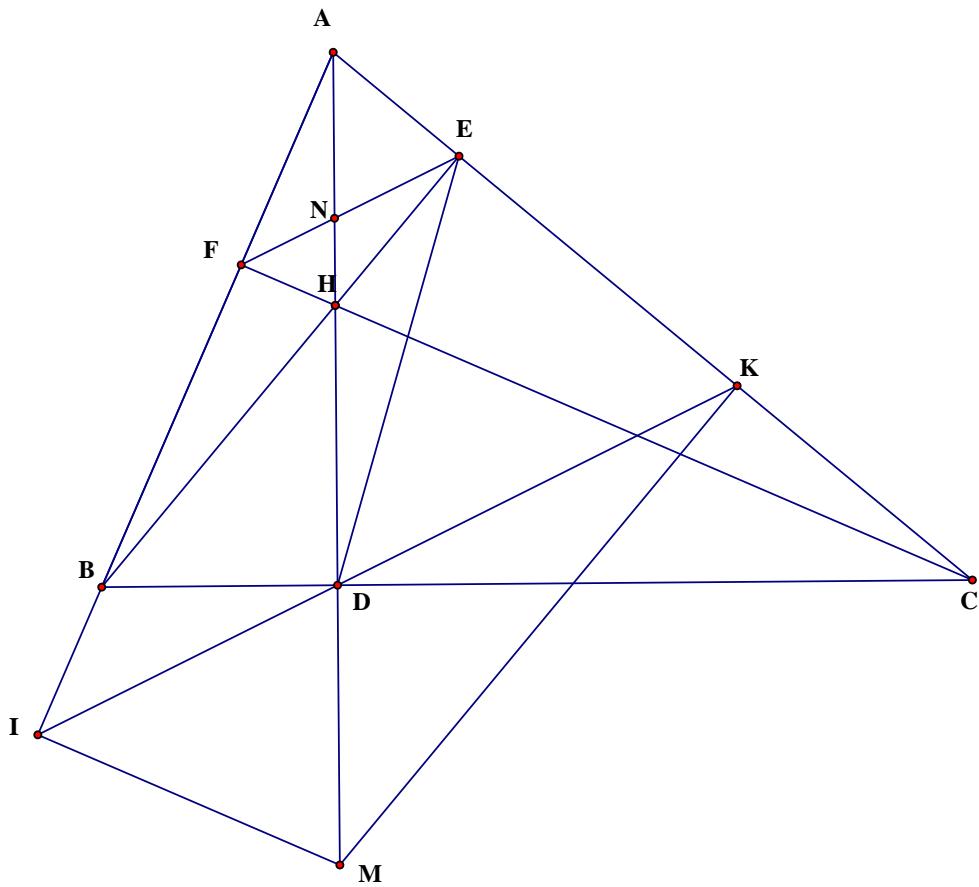
$$x^2 - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - (2y-1)^2 = -1$$

	$\Leftrightarrow (2x+2y-1)(2x-2y+1) = -1 = -1 \cdot 1$  Giải 2 TH ta đ- ợc 2 nghiệm là (0; 0); (1; 0).	1.0  1.0
3(6đ)	<p><b>Câu 3: (4,0 điểm)</b></p> <p>a) Cho các số <math>a, b, c</math> khác 0 thỏa mãn <math>a+b=c+\frac{1}{2023}</math> và <math>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+2023</math></p> <p>Tính giá trị của biểu thức: <math>B=(a^{99}+b^{99}-c^{99})\left(\frac{1}{a^{99}}+\frac{1}{b^{99}}-\frac{1}{c^{99}}\right)</math></p> <p>b) Với <math>n</math> là số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 .</p> <p>Chứng minh: <math>2n^5 + n^4 - 10n^3 + 8n - 1</math> chia hết cho 80.</p>	
	<p>a) (2,0đ) Ta có <math>a+b=c+\frac{1}{2023} \Rightarrow a+b-c=\frac{1}{2023} \Rightarrow \frac{1}{a+b-c}=2023</math></p> <p><math>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+2023 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=2023</math></p>	

	$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b-c}$  $\Rightarrow \frac{a+b}{ab} - \frac{a+b-c+c}{c(a+b-c)} = 0 \Rightarrow (a+b) \frac{ac+bc-c^2-ab}{abc(a+b-c)} = 0 \Rightarrow (a+b)(b-c)(a-c) = 0$	0,75
	Nếu $a+b = 0 \rightarrow A = 1$	
	Nếu $b - c = 0 \rightarrow A = 1$	0,75
	Nếu $a - c = 0 \rightarrow A = 1$	
	Vậy $A = 1$	0,5
b)	$\begin{aligned} Ta\ có\ 2n^5 + n^4 - 10n^3 + 8n - 1 &= (n^4 - 1) + (2n^5 - 10n^3 + 8n) \\ &= (n^4 - 1) + 2n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \end{aligned}$	0,5
	Ta thấy Với mọi n lẻ thì $2n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ chia hết cho 5 và 16	

	<p><math>\rightarrow 2n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)</math> chia hết cho 80 (1)</p> <p>Với <math>n</math> không chia hết cho 5 thì <math>n^4 - 1 = n^{5-1} - 1</math> chia hết cho 5 (Fermat)</p> <p>Với <math>n</math> lẻ nên <math>n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n-1)(n+1)</math> chia hết cho 16</p> <p><math>\rightarrow n^4 - 1</math> chia hết cho 80 (2)</p> <p><math>\rightarrow</math>Từ (1) và (2) <math>\rightarrow</math> đpcm</p>	0,5 0,5 0,5
4(6đ)	<p><b>Câu 4:</b> (6,0 điểm)</p> <p>Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và <math>AB &lt; AC</math>, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.</p> <p>a) Chứng minh: <math>AEF = ABC</math></p> <p>b) Gọi M là điểm đối xứng của H qua D. Giao điểm của EF với AM là N.</p> <p>Chứng minh: <math>HN \cdot AD = AN \cdot DM</math>.</p> <p>c) Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh ba điểm I, D, K thẳng</p>	

hàng.



a) Xét  $\triangle AEB$  và  $\triangle AFC$  có :

EAB chung

$$\angle AEB = \angle AFC (= 90^\circ)$$

0,5

	<p>Do đó <math>\triangle AEB \sim \triangle AFC</math> (g.g) <math>\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}</math></p> <p>Xét <math>\triangle AEF</math> và <math>\triangle ABC</math> có : <math>BAC</math> chung</p> $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \text{ (vì } \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \text{ )}$	0,5
	<p>Do đó <math>\triangle AEF \sim \triangle ABC</math> (c.g.c) <math>\Rightarrow AEF = ABC</math></p>	0,5
b)	Chứng minh tương tự câu a ta được : $CED = CBA$ .	
	<p>Do đó : <math>AEG = CED</math></p> <p>Vì <math>BEG + AEG = BED + CED = 90^\circ</math> nên <math>BEG = BED \Rightarrow EB</math> là tia phân giác</p> <p>của góc <math>DEF</math></p>	0,5
	Tam giác NED có EH là tia phân giác của $DEN$ nên: $\frac{HN}{HD} = \frac{EN}{ED}$ (1)	

<p>Vì <math>EA \perp EH</math> nên <math>EA</math> là tia phân giác ngoài tại đỉnh <math>E</math> của <math>\triangle DEN</math>.</p> $\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{EN}{ED} \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra : <math>\frac{HN}{HD} = \frac{AN}{AD}</math>, mà <math>HD=DM</math> ( Do <math>M</math> là điểm đối xứng của <math>H</math> qua <math>D</math>)</p> <p>Nên <math>\frac{HN}{DM} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow HN \cdot AD = AN \cdot DM</math></p>	0,5
<p>c) <math>\frac{HN}{DM} = \frac{AN}{AD} = \frac{AN + HN}{AD + DM} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AM}</math></p> <p><math>\triangle AMI</math> có <math>HF//MI</math> (cùng <math>\perp AB</math>) <math>\Rightarrow \frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AM}</math> (định lí Ta lét)</p>	0,5

	Mà $\frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AM}$ nên $\frac{AF}{AI} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow FN // ID$ (định lí Ta lét đảo) (3)  $\triangle AMK$ có $HE//MK$ (cùng $\perp AC$ ) $\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AM}$ (định lí Ta lét),  $\triangle AIK$ có $\frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AM} = \frac{AE}{AK} \Rightarrow IK // FE$ (Định lí Ta lét đảo) (4)  Từ (3) và (4) suy ra I, K, D thẳng hàng	0,5    0,5   0,5
Câu 5(1,0)	<b>Câu 5. (1,0 điểm)</b>  Cho $a, b, c$ là các số thực thỏa mãn $ a  < 1;  b  < 1;  c  < 1$ và $ab + bc + ca = 2$ .	

Chứng minh  $\frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq 6$

Chứng minh được BĐT: Với  $a,b,c$  bất kỳ và  $x,y,z$  là các số dương ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*) \quad \text{Đ dấu '=' xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

vì  $|a| < 1; |b| < 1; |c| < 1$  nên  $1 - b^2; 1 - c^2; 1 - a^2$  là các số dương. Áp dụng

0,25

$$\text{BĐT(*) ta có: } \frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3-(b^2+c^2+a^2)}$$

$$\text{Lại có } (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad (b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc;$$

0,25

$$(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 + a^2 \geq 2ca$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \text{Đ dấu '=' xảy ra khi } a = b = c$$

$$\Rightarrow -(a^2 + b^2 + c^2) \leq -(ab + bc + ca) \Rightarrow 3 - (a^2 + b^2 + c^2) \leq 3 - (ab + bc + ca)$$

vì  $|a| < 1; |b| < 1; |c| < 1$  nên  $3 - (a^2 + b^2 + c^2) > 0; 3 - (ab + bc + ca) > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 - (a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{1}{3 - (ab + bc + ca)} = \frac{1}{3 - 2} = 1 \quad (\text{do } ab + bc + ca = 2)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 4$$

Mà  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 2$  ( $\text{do } ab + bc + ca = 2$ )

Nên  $\frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq 2 + 4 = 6$

0,25

Dấu '=' xảy ra khi  $\begin{cases} \frac{a}{1-b^2} = \frac{b}{1-c^2} = \frac{c}{1-a^2} \\ a = b = c \\ ab + bc + ca = 2 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

Vậy  $\frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq 6$ . Dấu '=' xảy ra khi  $a = b = c = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

				0,25

**Ghi chú:** - Học sinh giải cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Câu 4 nếu học sinh không vẽ hoặc vẽ hình sai thì không chấm.

**PHÒNG GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO****ĐỀ KSCL HSG CẤP HUYỆN****HUYỆN NAM TRỰC****NĂM HỌC 2023 - 2024****ĐỀ CHÍNH THỨC****Môn : Toán 8**

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. ( 5 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a)  $x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$

b)  $x^3 - 9x^2 + 6x + 16.$

2) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn  $ab + bc + ca = 2023$ . Chứng minh rằng

$$A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$$
 là số chính phương

Câu 2. (5 điểm)

1) Tìm x biết:

a)  $x^2 - 4x + 3 = 0$

b)  $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$

2) Tìm x , y nguyên thoả mãn:  $xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$ .

Câu 3. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ( $AB > AC$ ) có đường cao  $AH$  và  $BK$  cắt nhau tại  $D$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $P$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $M$ .

- a) Chứng minh  $AHBP$  là hình vuông.
- b) Chứng minh  $HP = 2MK$  và  $\Delta BHD = \Delta AHC$ .
- c) Qua  $D$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AH$  tại  $D$ , qua  $C$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $C$ ,

hai đường thẳng này cắt nhau tại  $Q$ . Chứng minh  $P, K, Q$  thẳng hàng.

Câu 4. (2,0 điểm)

- 1) Tìm đa thức dư khi chia đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $(x-1)(x^2+1)$  biết đa thức  $P(x)$  chia cho  $x-1$  được dư là 4 và khi chia cho  $x^2 + 1$  được dư là  $3x + 5$ .
- 2) Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy.$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Lấy 2020 điểm thuộc miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 2024 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác ban đầu là  $1 \text{ cm}^2$ . Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2024 điểm đã cho có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4042} \text{ cm}^2$

**ĐÁP ÁN**

Câu 1:

1) a)  $x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$

$$= x^2 - xy - 4xy + 4y^2 + x - y$$

$$= x(x - y) - 4y(x - y) + (x - y)$$

$$= (x - y)(x - 4y + 1)$$

b)  $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$

$$= x^3 - 8x^2 - x^2 + 8x - 2x + 16$$

$$= x^2(x - 8) - x(x - 8) - 2(x - 8)$$

$$= (x - 8)(x^2 - x - 2)$$

$$= (x - 8)(x^2 - 2x + x - 2)$$

$$= (x - 8)(x - 2)(x + 1)$$

2) Ta có:  $ab + bc + ca = 2023$

$$\Rightarrow a^2 + 2023 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(b + a) = (a + c)(a + b)$$

Chứng minh tương tự ta có:  $b^2 + 2023 = (b + a)(b + c); c^2 + 2023 = (c + a)(c + b)$

$$\text{Khi đó: } A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023) = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2$$

Vì  $a, b, c$  là các số nguyên nên  $a+b, b+c, c+a$  là các số nguyên

Do vậy  $[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$  là số chính phương hay  $A$  là số chính phương.

Vậy  $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$  là số chính phương với các số nguyên  $a, b, c$

thỏa mãn  $ab + bc + ca = 2023$ .

Câu 2:

$$1) \text{ a)} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy  $x \in \{1; 3\}$

$$\text{b)} \quad (x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$$

Đặt  $x^2 - 7 = y$ . Khi đó ta có:

$$(y+3)(y-3) = 72$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 9 = 72$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 9 \Rightarrow x^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Với } y = -9 \Rightarrow x^2 - 7 = -9 \Leftrightarrow x^2 = -2 \text{ (Vô lí vì } x^2 \geq 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\text{Vậy } x \in \{-4; 4\}$$

$$2) \quad xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y^2 + 2y + 1) - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y+1)^2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y+1)^2 - 3(y+1) = -3$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(xy + x - 3) = -3$$

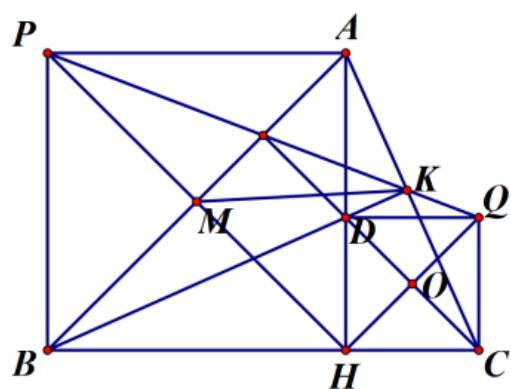
$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y+1 \in \mathbb{Z}; xy + x - 3 \in \mathbb{Z} \text{ mà } -3 = 1 \cdot (-3) = 3 \cdot (-1)$$

Ta có bảng giá trị sau:

$y + 1$	1	-3	-1	3
$y$	0	-4	-2	2
$xy + x - 3$	-3	1	3	-1
$x$	0	$\frac{-4}{3}$	-6	$\frac{2}{3}$
	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn	Loại

Vậy các cặp giá trị nguyên  $(x; y)$  cần tìm là:  $(0; 0); (-6; -2)$

Câu 3:



a) Ta có P đối xứng với H qua M nên M là trung điểm của PH.

Xét tứ giác AHBP có M là trung điểm của AB và M là trung điểm của PH

Suy ra AHBP là hình bình hành

Lại có  $AHB = 90^\circ$  (do AH là đường cao của tam giác ABC)

Do đó AHBP là hình chữ nhật.

Suy ra  $PBH = 90^\circ$  mà  $ABH = 45^\circ$  nên BA là phân giác của PBH

Hình chữ nhật AHBP có BA là phân giác của PBH nên AHBP là hình vuông.

b) Xét  $\Delta ABK$  vuông tại K có KM là đường trung tuyến nên  $KM = \frac{1}{2}AB$

Lại có AHBP là hình vuông nên  $PH = AB$

Do đó:  $KM = \frac{1}{2}PH \Rightarrow PH = 2KM$

Chứng minh  $HBD = HAC$  (cùng phụ với  $ACB$ )

Vì AHBP là hình vuông nên  $AH = HB$

Chứng minh  $\Delta BHD = \Delta AHC$  (cạnh huyền – góc nhọn)

Gọi O là giao điểm của DC, QH

C/m HDQC là hình vuông nên  $DC = QH$  và O là trung điểm của DC, QH

Ta có  $\Delta DKC$  vuông tại K có KO là đường trung tuyến nên  $KO = \frac{1}{2}DC$

Do đó  $KO = \frac{1}{2}QH \Rightarrow \Delta KQH$  vuông tại K nên  $\angle HKQ = 90^\circ$

Chứng minh tương tự  $\angle HKP = 90^\circ$

Do đó  $\angle PKQ = 180^\circ$

Vậy P, K, Q thẳng hàng.

Câu 4:

1) Vì đa thức  $(x-1)(x^2+1)$  có bậc là 3

$\Rightarrow P(x)$  chia cho đa thức  $(x-1)(x^2+1)$  có thương là  $Q(x)$  và đa thức dư có dạng là  $ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x-1)(x^2+1)Q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a \\ &= [(x-1)Q(x) + a](x^2+1) + bx + c - a \end{aligned}$$

Do đó  $P(x)$  chia cho  $x^2 + 1$  dư  $bx + c - a$

$$\text{Mà } P(x) \text{ chia } x^2 + 1 \text{ dư } 3x + 5 \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c - a = 5 \end{cases} \quad (1)$$

Lại có  $P(x)$  chia  $(x-1)$  dư 4  $\Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$

$$2) Ta có: C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$$

$$= x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy$$

$$= x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$$

Do  $x + y = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$  thay vào C ta được:

$$C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy$$

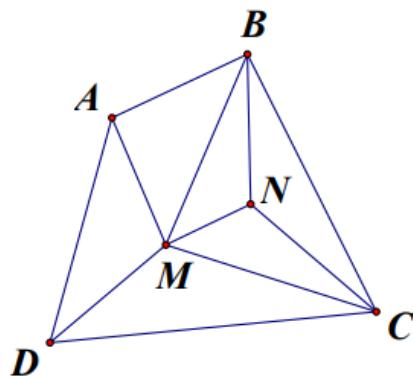
$$= x^2y^2 + 12xy + 4$$

$$= (x^2y^2 + 2xy \cdot 6 + 36) - 32$$

$$= (xy + 6)^2 - 32 \geq -32$$

Dấu = xảy ra khi  $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

Câu 5:



Xét tứ giác ABCD có diện tích bằng  $1\text{ cm}^2$ .

Với điểm thứ nhất M, ta có 4 tam giác chung đỉnh M đôi một không có điểm trong chung.

Với điểm thứ hai N phải là điểm trong của một trong 4 tam giác trên.

Nối N với 3 đỉnh của tam giác đó, tạo nên 3 tam giác chung đỉnh N.

Tuy nhiên số tam giác đôi một không có điểm trong chung chỉ tăng thêm 2 vì mất đi một tam giác chứa điểm N.

Số tam giác không có điểm trong chung lúc này là:  $4 + 2$

Tương tự với  $2020 - 2 = 2018$  điểm còn lại, cuối cùng số tam giác đôi một không có điểm trong chung là:

$$4 + 2 + 2018 \cdot 2 = 4042$$

Tổng diện tích của 4042 các tam giác đó bằng  $1\text{ cm}^2$ , nên tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4042}\text{ cm}^2$ .

PHÒNG GD&amp;ĐT TP. BẮC GIANG

**ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI****TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN****NĂM HỌC 2023-2024****ĐỀ CHÍNH THỨC****MÔN KHẢO SÁT: TOÁN 8**

Ngày khảo sát: 11/02/2023

(Đề có: 01 trang)

*Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề***Câu 1:** (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức  $M = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$ , với  $a \neq 0; a \neq 1$ .

a) Rút gọn  $M$ .b) Tìm giá trị của  $a$  để  $M$  đạt giá trị lớn nhất.2) Cho các số thực  $a, b$  thỏa mãn:  $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$ . Tính giá trị của biểu thức

$$M = 3a^3 - 2b^4 + 2022.$$

**Câu 2:** (4,0 điểm)1) Giải phương trình:  $x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

2) Tìm đa thức  $f(x)$  biết  $f(x)$  chia cho  $(x-3)$  dư 2;  $f(x)$  chia cho  $(x+4)$  dư 9 và

$f(x)$  chia cho  $(x^2 + x - 12)$  được thương là  $(x^2 + 3)$  và còn dư.

**Câu 3:** (4,0 điểm)

1) Tìm các cặp số tự nhiên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $x^2 + 3^y = 3026$

2) Cho  $a$  và  $b$  là các số tự nhiên thoả mãn  $2a^2 + a = 3b^2 + b$ . Chứng minh rằng:  $a - b$  và  $2a + 2b + 1$  là các số chính phương.

**Câu 4:** (6,0 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  nhọn có các đường cao  $AD, BE, CF$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

1)  $\Delta ABC$  đồng dạng với  $\Delta AEF$ .

$$2) \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1.$$

$$3) \frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \geq 4.$$

**Câu 5:** (1,0 điểm)

Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $y^2 + yz + z^2 = 1011 - \frac{3x^2}{2}$ . Tìm giá trị lớn

nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $Q = x + y + z$ .

.....HẾT.....

*Cần bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu 1		5.0
1.1a (2,0 điểm)	$M = \left[ \frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)}$ $M = \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$ $M = \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$	0.5 0.5 0.5

	$M = \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{4a}{a^2 + 4}$	0.5
	KL	
1.1b  (1.5 diểm)	Ta có $M = \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{(a^2 + 4) - (a^2 - 4a + 4)}{a^2 + 4} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2 + 4}$  Vì $\frac{(a-2)^2}{a^2 + 4} \geq 0$ với mọi $a$ nên $1 - \frac{(a-2)^2}{a^2 + 4} \leq 1$ với mọi $a$ .  Đấu " = " xảy ra khi $\frac{(a-2)^2}{a^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (tm)  Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a = 2$ .	0.5 0.5 0.5
1.2  (1.5 diểm)	Ta có $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$  $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a + 2b + 2 = 0$  $\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = 0$	0.5

	$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \\ (b+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$	0.5
	<p>Thay <math>\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}</math> vào <math>M = 3a^3 - 2b^4 - 1</math> ta được <math>M = 3 \cdot 1^3 - 2(-1)^4 + 2022 = 2023</math></p> <p>Vậy giá trị của biểu thức <math>M = 2023</math>.</p>	0.5
Câu 2		4.0
2.1 (2.0 điểm)	<p>+ ) <math>x = 0</math> không là nghiệm của phương trình</p> <p>+ ) Chia cả hai vế của phương trình cho <math>x^3</math> ta được:</p> $x^3 - 3x^2 + 6x - 7 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow (x^3 + \frac{1}{x^3}) - 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6(x + \frac{1}{x}) - 7 = 0$ <p>Đặt <math>t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2</math>; <math>x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t</math></p> <p>Thay vào phương trình ta được:</p>	0.5

	$t^3 - 3t - 3(t^2 - 2) + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$ $\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ $\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \text{ vô nghiệm}$	
	KL	0.5
2.2 (2.0 điểm)	<p>Do <math>f(x)</math> chia cho <math>x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)</math> được thương là <math>x^2 + 3</math> còn dư nên ta có :</p> $f(x) = (x+4)(x-3)(x^2 + 3) + a.x + b$ <p>Cho <math>x = -4 \Rightarrow f(x) = -4a + b = 9</math></p> <p>Cho <math>x = 3 \Rightarrow f(x) = 3a + b = 2</math></p> <p>Khi đó ta có hệ: <math>\begin{cases} -4a + b = 9 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}</math></p>	0.5 0.5 0.5 0.5

	Đa thức cần tìm: $f(x) = (x+4)(x-3)(x^2 + 3) - x + 5$	0.5
Câu 3		4.0
3.1 (2 điểm)	<p>Xét <math>y = 0 \Rightarrow x^2 = 3026 - 1 = 3025 \Rightarrow x = 55</math></p> <p>Xét <math>y &gt; 0 \Rightarrow 3^y : 3</math> còn <math>x^2 : 3</math> dư 0 hoặc 1</p> <p><math>\Rightarrow x^2 + 3^y : 3</math> dư 0 hoặc dư 1, Mà 3026 chia 3 dư 2, vô lý</p>	0.5 0.5 0.5
	KL: Vậy $(x; y) = (55; 0)$ .	0.5
3.2 (2 điểm)	$2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (2a^2 - 2b^2) + (a - b) = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2 \quad (1)$ <p>Gọi <math>(a - b; 2a + 2b + 1) = d</math>.</p>	0.5

	Khi đó: $b^2 = (a-b)(2a+2b+1) : d^2 \Rightarrow b : d$	0.5
	Mà $a-b : d \Rightarrow a : d \Rightarrow 2a+2b : d \Rightarrow (2a+2b+1) - (2a+2b) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$	0.5
	Như vậy: $(a-b; 2a+2b+1) = 1$ .	

Câu 4		
4.1 (2 điểm)	<p>Chứng minh đúng: <math>\Delta AEB \sim \Delta AFC</math>.</p> <p>Suy ra: <math>\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}</math></p> <p>Chứng minh đúng: <math>\Delta ABC \sim \Delta AEF</math></p>	0.5 0.5 1.0

	Chỉ ra được: $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$	0.5
4.2 (2.0 diểm)	Tương tự: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$ ; $\frac{HF}{CF} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$ .	0.5
	Suy ra: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB}}{S_{ABC}}$	0.5
	$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$	0.5
4.3 (1.0 diểm)	Dựng đường thẳng $d$ đi qua $C$ song song với $AB$ . Gọi $K$ là điểm đối xứng với $A$ qua $d$ .  Chứng minh được góc $BAK$ vuông, $CK=AC$ , $AK = 2CF$ .  Xét ba điểm $B$ , $C$ , $K$ ta có $BK \leq BC + CK$ .  Tam giác $BAK$ vuông tại $A$ nên:	0.5

	$\begin{aligned} AB^2 + AK^2 &= BK^2 \Rightarrow AB^2 + AK^2 \leq BC + CK^2 \\ \Rightarrow AB^2 + 4CF^2 &\leq BC + CK^2 \Rightarrow 4CF^2 \leq BC + CA^2 - AB^2. \end{aligned}$	
	Hoàn toàn tương tự ta có	0.5
	$\begin{aligned} 4AD^2 &\leq AB + AC^2 - BC^2, \\ 4BE^2 &\leq AB + BC^2 - AC^2. \end{aligned}$	
	Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có	0.5
Câu 5		
(1 điểm)	<p>Ta có <math>y^2 + yz + z^2 = 1011 - \frac{3x^2}{2}</math></p> $\Leftrightarrow 2y^2 + 2yz + 2z^2 = 2022 - 3x^2$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 2022 - x^2 + 2xy - y^2 - z^2 + 2xz - x^2$	0.5

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 2022 - (x-y)^2 - (x-z)^2 \leq 2022$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2022} \leq x+y+z \leq \sqrt{2022}$$

$$\Rightarrow x+y+z \text{ nhỏ nhất bằng } -\sqrt{2022} \text{ khi } x=y=z = \frac{-\sqrt{2022}}{3}$$

0.5

$$x+y+z \text{ lớn nhất bằng } \sqrt{2022} \text{ khi } x=y=z = \frac{\sqrt{2022}}{3}$$

**Lưu ý khi chấm bài:**

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic.

Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.

- Với bài toán hình học nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.

**ĐỀ SỐ 1****ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH****ĐỀ CHÍNH THỨC****Môn thi: Toán 8***(Đề thi gồm: 01 trang)**Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)***Câu 1:** (4,0 điểm): Phân tích đa thức thành nhân tử:

a.  $x^2 + 7x + 12$

b.  $x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023$

**Câu 2:** (4,0 điểm):

a. Chứng minh rằng nếu:  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$  thì  $x = y = z$

b. Tìm dư trong phép chia đa thức  $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2022$

cho đa thức  $x^2 + 10x + 21$ .

**Câu 3:** (4,0 điểm):

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = 2x^2 + 3x - 4$

b. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:  $2xy + 3x - 5y = 9$

**Câu 4:** (7,0 điểm):

Cho hình vuông ABCD. Qua A vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau lần lượt cắt đường thẳng BC tại P và R, cắt đường thẳng CD tại Q và S.

a. Chứng minh  $\Delta AQR$  và  $\Delta APS$  là các tam giác cân.

b. QR cắt PS tại H; M, N lần lượt là trung điểm của QR và PS. Chứng minh tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

c. Chứng minh P là trực tâm  $\Delta SQR$ .

d. Chứng minh MN là đường trung trực của AC.

e. Chứng minh bốn điểm M, B, N, D thẳng hàng.

**Câu 5:** (1,0 điểm):

Chứng minh:  $B = n^3 - 6n^2 + 11n - 6 \vdots 24$  với  $n$  là một số tự nhiên lẻ.

Hết

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu.*

- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh:

.....

Cán bộ coi thi số 1: ..... Cán bộ coi thi số 2:

.....

## HƯỚNG DẪN CHẤM

### ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

#### Môn: Toán 8

Câu	Nội dung	Điểm
<b>Câu 1</b> <span style="font-size: 1.5em;">(4,0)</span> <b>điểm)</b>	<p>a) <math>x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 = (x^2 + 3x) + (4x + 12)</math>  <math>= x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)</math></p> <p>b) <math>x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023 = x^4 - x + 2023x^2 + 2023x + 2023</math>  <math>= x(x^3 - 1) + 2023(x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2023(x^2 + x + 1)</math>  <math>= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2023)</math></p>	1,0 1,0 0,5 1,0 0,5
<b>Câu 2</b> <span style="font-size: 1.5em;">(4,0)</span> <b>điểm)</b>	<p>a) Ta có: <math>x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx</math>  <math>\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx</math>  <math>\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 = 0</math></p>	1,0

	$\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \quad (1)$  <p>Ta có: <math>(x-y)^2 \geq 0, (y-z)^2 \geq 0, (z-x)^2 \geq 0</math></p> <p>Do đó: (1) <math>\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}</math></p>	1,0
	<p>b) <math>P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2022 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2022</math></p> <p>Đặt <math>t = x^2 + 10x + 21</math> (<math>t \neq -3; t \neq -7</math>), biểu thức P(x) được viết lại:</p> $P(x) = (t-5)(t+3) + 2022 = t^2 - 2t + 2007$	1,0
	<p>Do đó khi chia <math>t^2 - 2t + 2007</math> cho t ta có số dư là 2007</p>	1,0
<b>Câu 3 (4,0 điểm)</b>	<p>a) Ta có: <math>A = 2x^2 + 3x - 4 = 2\left(x^2 + 2x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} - 4</math></p> $= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{8} \geq -\frac{41}{8}$ <p>Dấu “=” xảy ra khi <math>x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}</math></p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của A là <math>-\frac{41}{8}</math> đạt được khi <math>x = -\frac{3}{4}</math></p>	1,0

	b) $2xy + 3x - 5y = 9$	1,0																				
	$\Rightarrow 4xy + 6x - 10y = 18 \Rightarrow 2x(2y + 3) - 5(2y + 3) = 3$	0,5																				
	$\Rightarrow (2y + 3)(2x - 5) = 3$ do x, y là các số nguyên nên ta có bảng sau:	0,5																				
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>2x - 5</td><td>-3</td><td>-1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr> <td>2y + 3</td><td>-1</td><td>-3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr> <td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr> <td>y</td><td>-2</td><td>-3</td><td>0</td><td>-1</td></tr> </table>	2x - 5	-3	-1	1	3	2y + 3	-1	-3	3	1	x	1	2	3	4	y	-2	-3	0	-1	
2x - 5	-3	-1	1	3																		
2y + 3	-1	-3	3	1																		
x	1	2	3	4																		
y	-2	-3	0	-1																		
	Vậy các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn là: (1;-2), (2;-3), (3;0), (4;-1)	1,0																				

<p><b>Câu 4</b> Vẽ đúng hình, cân đối đẹp.</p> <p><b>(7,0 điểm)</b></p> <p>a) <math>\Delta ADQ = \Delta ABR</math> (cgv-gn) vì <math>DAQ = BAR</math> (cùng phụ với <math>BAQ</math>) và <math>DA = BA</math> (cạnh hìn vuông). Suy ra <math>AQ = AR</math>, nên <math>\Delta AQR</math> là tam giác vuông cân tại A. Chứng minh tương tự ta có: <math>\Delta ABP = \Delta ADS</math> do đó <math>AP = AS</math> và <math>\Delta APS</math> là tam giác vuông cân tại A.</p> <p>b) AM và AN là đường trung tuyến của tam giác vuông cân AQR và APS nên <math>AN \perp SP</math> và <math>AM \perp RQ</math>. Mặt khác: <math>PAN = PAM = 45^\circ</math> nên góc MAN vuông. Vậy tứ giác AMHN có ba góc vuông, nên AMHN là hình chữ nhật.</p> <p>c) Theo giả thiết: <math>QA \perp RS</math>, <math>RC \perp SQ</math> nên QA và RC là hai đường cao của <math>\Delta SQR</math>. Vậy P là trực tâm của <math>\Delta SQR</math>.</p> <p>d) Trong tam giác vuông cân AQR thì MA là trung điểm nên <math>AM = \frac{1}{2}</math></p>	<p>0,5</p> <p>1,5</p> <p>1,5</p>
---	----------------------------------

	QR	
	<p><math>\Rightarrow MA = MC</math>, nghĩa là M cách đều A và C.</p> <p>Chứng minh tương tự cho tam giác vuông cân ASP và tam giác vuông SCP, ta có <math>NA = NC</math>, nghĩa là N cách đều A và C. Hay MN là trung trực của AC</p>	1,0
	<p>e) Vì ABCD là hình vuông nên B và D cũng cách đều A và C. Nói cách khác, bốn điểm M, N, B, D cùng cách đều A và C nên chúng nằm trên đường trung trực của AC, nghĩa là chúng thẳng hàng.</p>	1,0
		1,5

	$  \begin{aligned}  n^3 - 6n^2 + 11n - 6 &= n^3 - 3n^2 - 3n^2 + 9n + 2n - 6 \\  &= n^2(n-3) - 3n(n-3) + 2(n-3) \\  &= (n-3)(n^2 - 3n + 2) \\  &= (n-3)[(n^2 - n) - (2n - 2)] \\  &= (n-3)[n(n-1) - 2(n-1)] \\  &= (n-3)(n-2)(n-1)  \end{aligned}  $	
<b>Câu 5</b>	Do $n$ lẻ nên $n-3, n-2, n-1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp trong đó có hai số chẵn. Trong 2 số chẵn này có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4.	0,5
<b>(1,0 điểm)</b>	Nên $(n-3)(n-2)(n-1) : 2 \cdot 4 = 8$  Mặt khác $(n-3)(n-2)(n-1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(n-3)(n-2)(n-1) : 3$ mà $(8;3) = 1$  $\Rightarrow (n-3)(n-2)(n-1) : 8 \cdot 3 = 24$	
	Vậy, $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 : 24$ với mọi số tự nhiên $n$ lẻ.	0,5

\* Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn tính điểm tối đa.



## ĐỀ SỐ 2

**Bài 1 (3 điểm).** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15$

b)  $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

**Bài 2 (3 điểm).**

a) Tính  $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$

b) Chứng minh  $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1$  chia hết cho 24 với  $a$  là số tự nhiên.

**Bài 3 (3 điểm).** Cho  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

Tính giá trị biểu thức  $M = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

**Bài 4 (4 điểm).** Tìm giá trị nguyên của  $x$  để phân thức sau có giá trị nguyên.

$$A = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3}$$

**Bài 5 (4 điểm):** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm nằm giữa B và C. Từ M kẻ MD song song AB ( $D \in AC$ ), kẻ ME song song AC ( $E \in AB$ )

a) Xác định vị trí của M nằm trên BC để DE ngắn nhất.

b) Tính DE ngắn nhất với  $AB = 4\text{cm}$ ;  $\angle ABC = 60^\circ$

**Bài 6 (3 điểm).** Tìm x biết:  $x^5(3x - 1)^{m+3} : x^5(3x - 1)^{m-1} - 5^6 : 5^2 = 0$ ;

(với  $x \neq 0$ ;  $x \neq \frac{1}{3}$ ;  $m \in \mathbb{N}^*$ )

----- HẾT -----

Lưu ý: Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

## HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT TOÁN LỚP 8

**Bài 1 (3 điểm):**

$$a) a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15 = a^4 + 8a^3 + 15a^2 - a^2 - 8a - 15$$

$$= (a^4 + 8a^3 + 15a^2) - (a^2 + 8a + 15)$$

$$= a^2(a^2 + 8a + 15) - (a^2 + 8a + 15)$$

$$= (a^2 + 8a + 15)(a^2 - 1)$$

$$= (a+3)(a+5)(a+1)(a-1)$$

$$b) 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$

$$= (a + b - c)(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)$$

**Bài 2 (3 điểm):**

a) Ta có  $3x(x+1) = x(x+1)(x+2) - (x-1)x(x+1)$ .

Do đó:  $3A = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = n(n+1)(n+2)$

$$\Rightarrow A = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

b)  $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1 = (a^2 + 3a + 1 + 1)(a^2 + 3a + 1 - 1) = (a^2 + 3a + 2)(a^2 + 3a) = a(a+1)(a+2)(a+3)$  chia hết cho 24. (tích của bốn số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 24)

**Bài 3 (3 điểm):**

$$M = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

$$M = \left( \frac{b+c}{a} + 1 \right) + \left( \frac{c+a}{b} + 1 \right) + \left( \frac{a+b}{c} + 1 \right) - 3$$

$$M = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} - 3$$

$$M = (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3$$

$$M = -3$$

**Bài 4 (4 điểm).**

$$A = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3} = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x - 3} \quad (x \neq 3)$$

$\Rightarrow x - 3$  là ước của 5  $\Rightarrow u(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$

Nếu  $x - 3 = -5 \Rightarrow x = -2$

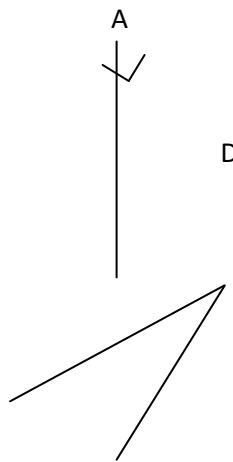
Nếu  $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

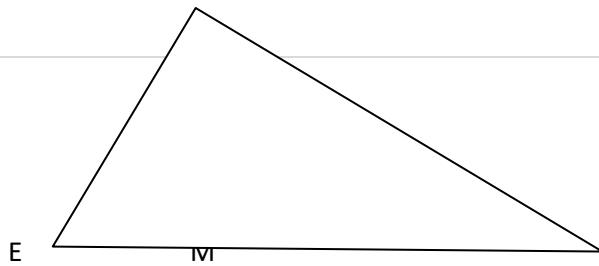
Nếu  $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$

Nếu  $x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$

Vậy  $x = -2; x = 2; x = 4; x = 8$

**Bài 5 (4 điểm).**





a) Tứ giác ADME có:



$AE \parallel DM$  ( $AB \parallel DM$ ) ;  $AD \parallel EM$  ( $AC \parallel EM$ ) và  $A = 90^\circ$  (gt)

$\Rightarrow$  tứ giác ADME là hình chữ nhật

$\Rightarrow DE = AM$  (t/c hình chữ nhật)

Mà  $AM$  ngắn nhất khi  $AM \perp BC$  tức là  $AM$  là đường cao  $\Delta ABC$

Vậy  $M$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  đến  $BC$  của  $\Delta ABC$



b) Xét  $\Delta ABM$  vuông tại  $M$  có  $ABM = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABM$  là nũa tam giác đều có cạnh  $AB$

$$\Rightarrow BM = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2(\text{cm})$$

$$\Rightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \text{ (pi-ta-go)}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{12} \text{ cm}$$

Vậy  $AM$  ngắn nhất bằng  $\sqrt{12}$  cm  $\Rightarrow DE$  ngắn nhất bằng  $\sqrt{12}$  cm

**Cõu 6 (3 đ i ē m):**

Ta có:  $x^5(3x - 1)^{m+3} : x^5(3x - 1)^{m-1} - 5^6 : 5^2 = 0$  (với  $x \neq 0 ; x \neq \frac{1}{3}$ )

$$(3x - 1)^{m+3-(m-1)} - 5^{6-2} = 0$$

$$(3x - 1)^4 = 5^4$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 5 \text{ hoặc } 3x - 1 = -5$$

$$x = 2 \quad x = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Vậy } x = 2; \quad x = \frac{-4}{3}$$

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

**ĐỀ SỐ 3****Câu 1 (4 điểm).**

Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến  $x$

$$4(6 - x) + x^2(2 + 3x) - x(5x - 4) + 3x^2(1 - x)$$

**Câu 2 (4 điểm).**

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử

a.  $x^2y + xy^2 - x - y$

b.  $x^2 + 5x - 50$

**Câu 3 (3 điểm).**

Cho phân thức  $A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

a. Tìm điều kiện của  $x$  để  $A$  xác định

b. Rút gọn  $A$

c. Tìm  $x$  để giá trị của  $A$  bằng 1

**Câu 4 (4 điểm).**

Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho  $BD = BA$ . Trên tia đối của tia CB lấy điểm G sao cho  $CG = CA$ . Kẽ BH vuông góc với AD, CK vuông góc với AG. Chứng minh rằng:

a.  $AH = HD$

b.  $HK \parallel BC$

**Câu 5 (3 điểm):**

Cho tam giác đều ABC. M là điểm thuộc cạnh BC. I và D lần lượt là trung điểm của AM và BC; E, F là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC.

a. Tính số đo các góc  $DIE$  và  $DIF$ .

b. Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.

**Câu 6 (2 điểm).**

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

----- HẾT -----

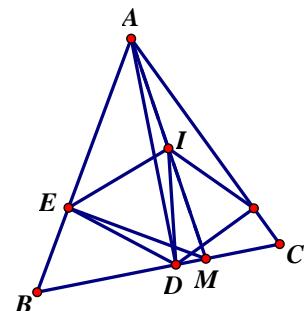
*Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.*

**HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG LỚP 8**

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4đ)	$\begin{aligned} & 4(6 - x) + x^2(2 + 3x) - x(5x - 4) + 3x^2(1 - x) \\ &= 24 - 4x + 2x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 4x + 3x^2 - 3x^3 \\ &= 24 \end{aligned}$	2đ 2đ
Câu 2 (4đ)	<p>a. <math>x^2y + xy^2 - x - y</math></p> $\begin{aligned} &= (x^2y + xy^2) - (x + y) = xy(x + y) - (x + y) \\ &= (xy - 1)(x + y) \end{aligned}$ <p>b. <math>x^2 + 5x - 50 = x^2 + 10x - 5x - 50</math></p> $\begin{aligned} &= (x^2 + 10x) - (5x + 50) = x(x + 10) - 5(x + 10) \\ &= (x - 5)(x + 10) \end{aligned}$	1đ 1đ 1đ 0.5đ

		0.5đ
	$A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$	
Câu 3 (3đ)	<p>a. Để A xác định khi <math>x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1</math> và <math>x \neq 2</math></p> <p>b. <math>A = \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2}</math></p> <p>c. để <math>A = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3</math></p>	1đ 1đ 1đ
Câu 4 (4đ)	<p>a. <math>\Delta ABD</math> cân B, BH là đường cao nên <math>AH = HD</math></p> <p>b. tương tự câu a ta có <math>AK = KG</math></p> <p>HK là đường trung bình của <math>\Delta ADG</math> nên <math>HK // DG</math>. Vậy <math>HK // BC</math></p>	2đ 1đ 1đ

	a. Tam giác AEM vuông tại E , EI là đường trung tuyến nên ta có $IE = IA = IM$ khi đó $E\hat{I}M = 2E\hat{A}I$ .(1)	0.5đ
Câu 5 (3đ)	Ta lại có tam giác ADM vuông tại D, DI là đường trung tuyến Nên $ID = IA = IM$ , $D\hat{I}M = 2D\hat{A}I$ (2) Từ (1) và (2) ta có: $E\hat{I}D = 2E\hat{A}D = 60^0$ Vậy góc $DIE$ bằng $60^0$ , tương tự góc $DIF$ bằng $60^0$	0.5đ 0.5đ 0.5đ
	b. $\Delta DIE$ cân tại I, mà $D\hat{I}E = 60^0$ nên $\Delta DIE$ đều tương tự $\Delta DIF$ đều từ đó DEIF là hình thoi	0.5đ



		F	
Câu 6 (2đ)	<p>Gọi các cạnh của tam giác vuông là <math>x, y, z</math>; trong đó cạnh huyền là <math>z</math> (<math>x, y, z</math> là các số nguyên dương )</p> <p>Ta có <math>xy = 2(x + y + z)</math> (1) và <math>x^2 + y^2 = z^2</math> (2)</p> <p>Từ (2) suy ra <math>z^2 = (x + y)^2 - 2xy</math>, thay (1) vào ta có :</p> $z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$ $z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$ $z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$ $(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$ , suy ra $z + 2 = x + y - 2$ $= x + y - 4$ ;	0,5đ	z

	<p>thay vào (1) ta được :</p> $xy = 2(x + y + x + y - 4)$ $xy - 4x - 4y = -8$ $(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4 \quad 0,25$ <p>Từ đó ta tìm được các giá trị của <math>x, y, z</math> là :</p> $(x=5, y=12, z=13); (x=12, y=5, z=13);$ $(x=6, y=8, z=10); (x=8, y=6, z=10)$	0,5đ
		0,5đ

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.



**ĐỀ SỐ 4**

**Bài 1 (3 điểm).** Chứng minh rằng:

a)  $8^5 + 2^{11}$  chia hết cho 17

b)  $19^{19} + 69^{19}$  chia hết cho 44

**Bài 2 (3 điểm).** Tìm x biết:

$$\frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}.$$

**Bài 3 (4 điểm).** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left( x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x để A xác định.

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm giá trị của x để  $A > 0$

**Bài 4 (4 điểm).** Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên:

$$A = \frac{4x^3 - 3x^2 + 2x - 83}{x-3}$$

**Bài 5 (3 điểm):** Cho tam giác ABC, đường cao AH, vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của góc

AHC . Kẻ AD vuông góc với Hx, AE vuông góc Hy.

Chứng minh rằng tứ giác ADHE là hình vuông.

**Bài 6 (3 điểm).** Cho góc vuông xOy và điểm I nằm trong góc đó. Kẻ IC vuông góc với Ox; ID vuông góc với Oy. Biết  $IC = ID = a$ . Đường thẳng kẻ qua I cắt Ox ở A cắt Oy ở B.

a) Chứng minh rằng tích AC.DB không đổi khi đường thẳng đi qua I thay đổi.

b) Biết diện tích tam giác AOB là  $S_{AOB} = \frac{8a^2}{3}$  . Tính CA và DB theo a.

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

## HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT TOÁN LỚP 8

**Câu 1 (3 điểm):**

a) (1,5đ) Ta có:  $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11}(2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$

Nên kết quả trên chia hết cho 17.

b) (1,5đ) Áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với mọi } n \geq 1$$

Ta có:  $19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$

$$= 88(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho } 44.$$

**Câu 2 (3 điểm):**

$$\frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}.$$

ĐKXĐ:  $x \neq 2009; x \neq 2010$ .

Đặt  $a = x - 2010$  ( $a \neq 0$ ), ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a^2 + 3a + 1} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19 \Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thoả ĐK)}$$

Suy ra  $x = \frac{4023}{2}$  hoặc  $x = \frac{4015}{2}$  (thoả ĐK)

Vậy  $x = \frac{4023}{2}$  và  $x = \frac{4015}{2}$  là giá trị cần tìm.

**Câu 3 (4 điểm):**

a)  $x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0$  (0,75đ)

b)  $A = \left( \frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \frac{6}{x+2}$  (2đ)

$$= \frac{x-2(x+2)+x-2}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2}$$

$$= \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{1}{2-x}$$

c) Để  $A > 0$  thì  $\frac{1}{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$  (1,25đ)

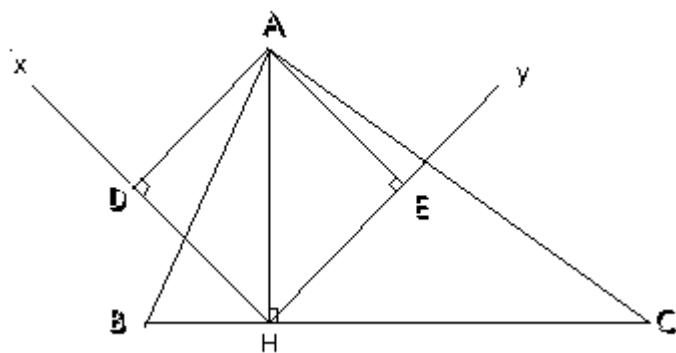
**Câu 4 (4 điểm).** Biến đổi  $A = 4x^2 + 9x + 29 + \frac{4}{x-3}$  (1đ)

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-3 \text{ là ước của } 4 \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow x-3 = \pm 1; \pm 2; \pm 4 \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow x = -1; 1; 2; 4; 5; 7 \quad (1đ)$$

**Câu 5 (3 điểm).**



Hx là phân giác của góc AHB ; Hy phân giác của góc AHC mà AHB và AHC là hai góc kề bù

nên Hx và Hy vuông góc (1đ)

Hay DHE = 90° mặt khác ADH = AEH = 90°

Nên tứ giác ADHE là hình chữ nhật (1) (1đ)

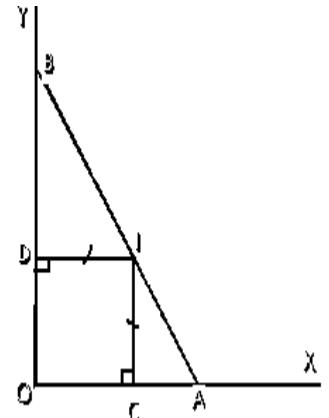
$$AHD = \frac{AHB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\text{Do } AHE = \frac{AHC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow AHD = AHE$$

Hay HA là phân giác DHE (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác ADHE là hình vuông (1đ)



### Có 6 (3 đ iết m):

a) (1,5đ) Ta có góc A chung và  $AIC = ABO$  (cặp góc đồng vị)

$$\Rightarrow \triangle IAC \sim \triangle BAO \quad (\text{g.g})$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AC}{AO} = \frac{IC}{BO} \Rightarrow \frac{AC}{IC} = \frac{AO}{BO} \quad (1)$$

Tương tự:  $\Delta BID \sim \Delta BAO (g.g)$

$$\text{Suy ra: } \frac{OA}{ID} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{ID}{BD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra: } \frac{AC}{IC} = \frac{ID}{BD}$$

$$\text{Hay } AC \cdot BD = IC \cdot ID = a^2$$

$$\text{Suy ra: } AC \cdot BD = a^2 \text{ không đổi.}$$

b) (1,5đ) Theo công thức tính diện tích tam giác vuông ta có:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \quad \text{mà } S_{AOB} = \frac{8a^2}{3} \text{ (giả thiết)}$$

$$\text{hay } \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow OA \cdot OB = \frac{16a^2}{3}$$

$$\text{Suy ra: } (a + CA)(a + DB) = \frac{16a^2}{3} \Rightarrow a^2 + a(CA + DB) + CA \cdot DB = \frac{16a^2}{3}$$

$$\text{Mà } CA \cdot DB = a^2 \text{ (theo câu a)} \Rightarrow a(CA + DB) = \frac{16a^2}{3} - 2a^2 = \frac{10a^2}{3}$$

$$\Rightarrow CA + DB = \frac{10a}{3}.$$

Vậy: 
$$\begin{cases} CA \cdot DB = a^2 \\ CA + DB = \frac{10a}{3} \end{cases}$$

Giải hệ pt  $\Rightarrow CA = \frac{a}{3}$  và  $DB = 3a$

Hoặc  $CA = 3a$  và  $DB = \frac{a}{3}$

----- HẾT -----

*Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,*

*lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.*

**ĐỀ SỐ 5**

**Câu 1 (3 điểm).** Cho  $a, b, c$  thoả mãn  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

Tính giá trị của biểu thức:  $M = (a^{19} + b^{19})(b^5 + c^5)(c^{2017} + a^{2017})$

**Câu 2 (3 điểm).** Cho phân thức  $A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

a) Tìm điều kiện của  $x$  để  $A$  xác định

b) Rút gọn  $A$

c) Tìm  $x$  để giá trị của  $A$  bằng 1 .

**Câu 3 (3 điểm).** Cho  $P = x^2 + x + 1$ . Tìm  $x$  để  $P$  có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

**Câu 4 (4 điểm).** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 99^2 + 100^2$$

$$B = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 - b^2}; \text{ Biết } a + b + c = 0$$

**Câu 5 (3 điểm):** Tổng tuổi của hai anh em hiện nay là 63. Tuổi của người anh hiện nay gấp đôi tuổi của người em lúc người anh bằng tuổi của em hiện nay. Hỏi tuổi hiện nay của mỗi người ?

**Câu 6 (4 điểm).** Cho hình vuông ABCD. Qua A kẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau lần lượt cắt BC tại P và R, cắt CD tại Q và S.

1) Chứng minh  $\Delta AQR$  và  $\Delta APS$  là các tam giác cân.

2) QR cắt PS tại H; M, N là trung điểm của QR và PS. Chứng minh tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

3) Chứng minh P là trực tâm  $\Delta SQR$ .

4) Chứng minh MN là trung trực của AC.

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

## HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG LỚP 8

**Câu 1 (3 điểm):**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)c(a+b+c) = -ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)[c(a+b+c) + ab] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)[c(a+c) + bc + ab] = 0 \Leftrightarrow (a+b)[c(a+c) + b(c+a)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a+c)(c+b) = 0 \Leftrightarrow a+b=0 \text{ hoặc } b+c=0 \text{ hoặc } c+a=0$$

$$\Leftrightarrow a = -b \text{ hoặc } b = -c \text{ hoặc } c = -a \Leftrightarrow M = 0$$

**Câu 2 (3 điểm).** Mỗi câu 1 điểm:

$$A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

a. A xác định khi  $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$  và  $x \neq 2$

b.  $A = \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

$$\text{c. } A = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

**Câu 3 (3 điểm):** Cho  $P = x^2 + x + 1$ . Tìm  $x$  để  $P$  có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

$$\text{Ta có } P = x^2 + 2x \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Do } (x + \frac{1}{2})^2 \text{ không âm nên nhỏ nhất khi } (x + \frac{1}{2})^2 = 0$$

Tức là  $x = -\frac{1}{2}$  thì biểu thức có giá trị nhỏ nhất là  $\frac{3}{4}$

**Câu 4 (4 điểm).** (Mỗi câu đúng 2 điểm):

$$A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 99^2 + 100^2$$

$$A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + (100^2 - 99^2)$$

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$$

$$A = 50 \cdot 101 = 5050$$

$$\text{Từ } a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$$

$$\text{Tương tự } b^2 + c^2 - a^2 = -2bc; c^2 + a^2 - b^2 = -2ac$$

$$\Rightarrow B = \frac{ab}{-2ab} + \frac{bc}{-2bc} + \frac{ca}{-2ca} = -\frac{3}{2}$$

**Câu 5 (3 điểm).** Gọi tuổi của anh hiện nay là  $x$ , thì tuổi em hiện nay là  $63 - x$ .

Khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay tức là trước đó  $x - (63 - x)$

năm

ta có tuổi em lìa là  $63 - x - [x - (63 - x)] = 126 - 3x$

Theo bài ra ta có phương trình:  $x = 2(126 - 3x) \Rightarrow x = 36$ .

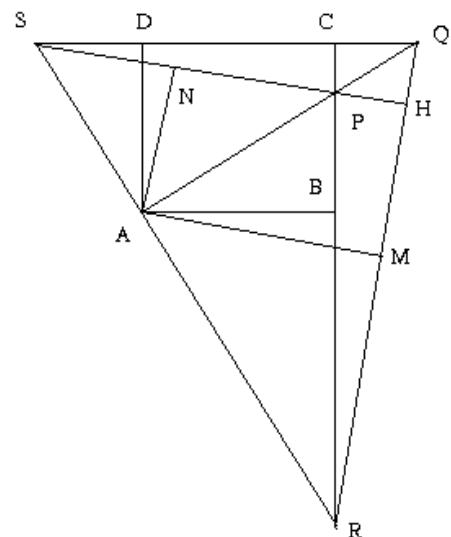
Tuổi anh hiện nay là 36, tuổi em hiện nay là 27.

**Câu 6 (4 điểm):**

1)  $\Delta ADQ = \Delta ABR$  vì chúng là

hai tam giác vuông (để ý góc có cạnh vuông góc)

và  $DA = BA$  (cạnh hìn vuông). Suy ra  $AQ = AR$ , nên



$\Delta AQR$  là tam giác vuông cân tại A. Chứng minh tương tự ta có:  $\Delta ABP = \Delta ADS$

do đó  $AP = AS$  và  $\Delta APS$  là tam giác cân tại A.

2) AM và AN là đường trung tuyến của tam giác vuông cân  $AQR$  và  $APS$  nên  $AN \perp SP$  và  $AM \perp RQ$ .

Mặt khác:  $\angle PAN = \angle PAM = 45^\circ$  nên góc  $MAN$  vuông. Vậy tứ giác  $AHMN$  có ba góc vuông, nên nó là hình chữ nhật.

3) Theo giả thiết:  $QA \perp RS$ ,  $RC \perp SQ$  nên QA và RC là hai đường cao của  $\Delta SQR$ . Vậy P là trực tâm của  $\Delta SQR$ .

4) Trong tam giác vuông cân  $AQR$  thì MA là trung tuyến nên  $AM = \frac{1}{2} QR$ .

Trong tam giác vuông  $RCQ$  thì CM là trung tuyến nên  $CM = \frac{1}{2} QR$ .

$\Rightarrow MA = MC$ , nghĩa là M cách đều A và C.

Chứng minh tương tự cho tam giác vuông cân  $ASP$  và tam giác vuông  $SCP$ , ta có  $NA = NC$ , nghĩa là N cách đều A và C. Hay MN là trung trực của AC

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

**ĐỀ SỐ 6**

**Câu 1 (2 điểm):** Cho  $P = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2014} + x^{2015}$

Chứng minh:  $(x - 1)P = x^{2016} - 1$

**Câu 2 (4 điểm):** Cho biểu thức:  $K = \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$

- a. Tìm điều kiện đối với  $x$  để biểu thức  $K$  xác định.
- b. Rút gọn biểu thức  $K$ .
- c. Với giá trị nguyên nào của  $x$  thì biểu thức  $K$  có giá trị nguyên.

**Câu 3 (3 điểm):** Các cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài là  $a, b$  và diện tích bằng  $S$ . Tìm các góc

của tam giác vuông biết  $(a + b)^2 = 8S$ .  $\wedge \quad \wedge$

**Câu 4 (4 điểm):** Cho hình thang vuông ABCD ( $A = D = 90^\circ$ ) có  $AB = 4\text{cm}$ ,  $CD = 9\text{cm}$ ,  $BC = 13\text{cm}$ .

Trên cạnh BC lấy M sao cho  $BM = AB$ . Đường thẳng vuông góc BC tại M cắt AD tại N. Tính diện tích tam giác BNC.

**Câu 5 (4 điểm):** Cho tam giác ABC với trung tuyến CM. Điểm D thuộc đoạn BM sao cho  $BD = 2MD$ . Biết

rằng  $MCD = BCD$ . Chứng minh rằng  $ACD = 90^\circ$ .

**Câu 6 (3 điểm):** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$  với  $x \neq 0$

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

## HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG LỚP 8

**Câu 1 (2 điểm):**

Ta có  $xP = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2015} + x^{2016}$

$$\Rightarrow xP - P = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2015} + x^{2016} - (1 + x + x^2 + \dots + x^{2014} + x^{2015})$$

$$= x^{2016} - 1$$

$\Rightarrow$  điều cần CM

**Câu 2 (4 điểm):**

a) K có nghĩa khi  $x \neq \pm 1$  và  $x \neq 0$

b)  $K = A \cdot B$

$$A = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{(x-1)(x+1)}$$

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$$

$$\text{Vậy } K = A \cdot B = 1 \cdot \frac{x + 2017}{x} = 1 + \frac{2017}{x}$$

c) Muốn K nguyên thì x ước của 2017.

Mà 2017 là số nguyên tố nên chỉ có ước dương là 1 và 2017.

Nên  $x = \pm 1$  và  $x = \pm 2017$

Với  $x = 1 \Rightarrow K = 2018$

Với  $x = -1 \Rightarrow K = -2016$

Với  $x = 2017 \Rightarrow K = 2$

Với  $x = -2017 \Rightarrow K = 0$

**Câu 3 (3 điểm):**

Ta có:  $S = \frac{1}{2} ab$

Theo bài ra  $(a + b)^2 = 8S$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} ab = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

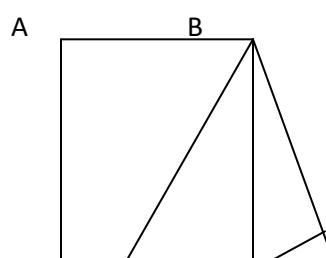
$$\Rightarrow a = b$$

$\Rightarrow$  tam giác vuông cân

$\Rightarrow$  các góc nhọn =  $45^\circ$ .

**Câu 4 (4 điểm):** BA  $\perp$  NA, BM  $\perp$   $\overbrace{NM}$ , AB = BM (gt)

$\Rightarrow$  NB là phân giác của ANM



$$MC = BC - BM = 13 - 4 = 9 = CD$$



Do đó NC là tia phân giác của MND



Hai góc ANM và MND kề bù



$$\text{Nên } BNC = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BNC$  vuông tại N và  $NM \perp BC$  (gt)

$$\Rightarrow NM^2 = BM \cdot MC = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\Rightarrow MN = 6(\text{cm})$$

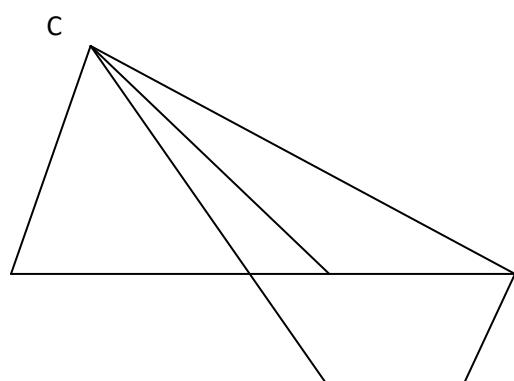
Do đó:

$$S_{NBC} = \frac{1}{2} NM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13 = 39(\text{cm}^2)$$



Câu 5 (4 điểm):  $\triangle BCM$  có  $MCD = BCD$  (gt)

$$\text{do đó: } \frac{CB}{CM} = \frac{DB}{DM} = 2 \text{ (vì } DB = 2DM \text{ gt)}$$



$\Rightarrow BC = 2CM$ .

Gọi P là điểm đối xứng của C qua M

Ta có:  $PC = 2CM = BC$  (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta BCP$  cân tại C có CD là phân giác

Nên  $CD \perp BP$

Mặt khác vì M trung điểm AB (gt)

Và M trung điểm của CP

$\Rightarrow BP // AC$  và  $\overbrace{BP \perp CD}$

$\Rightarrow AC \perp CD$  hay  $ACD = 90^\circ$

**Câu 6 (3 điểm):**

$$A = \frac{(4x^2 - 4x + 1) - 3x^2}{x^2} = \frac{(2x-1)^2}{x^2} - 3 \geq -3$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Giá trị nhỏ nhất  $A = -3$  khi  $x = \frac{1}{2}$

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

**ĐỀ SỐ 7**

**Câu 1 (4 điểm):** Cho  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

**Câu 2 (3 điểm):** Cho  $x, y$  là các số lớn hơn hoặc bằng 1.

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

**Câu 3 (3 điểm):** Tìm  $m$  để phương trình  $\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$  có nghiệm dương.

**Câu 4 (4 điểm):** Giải phương phương trình sau:

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$

**Câu 5 (3 điểm):** Trong một cái giỏ đựng một số táo. Đầu tiên người ta lấy ra một nửa số táo và bỏ lại 5

quả, sau đó lấy thêm ra  $\frac{1}{3}$  số táo còn lại và lấy thêm ra 4 quả. Cuối cùng trong giỏ còn lại 12 quả. Hỏi

trong giỏ lúc đầu có bao nhiêu quả?

**Câu 6 (3 điểm):** Cho tam giác vuông cân ABC ( $AB = AC$ ). Qua C vẽ đường thẳng cắt cạnh AB tại D. Từ B vẽ

đường vuông góc với CD tại I cắt AC tại E.

Chứng minh rằng  $AD = AE$ .

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

## HƯỚNG DẪN CHẤM THI KHẢO SÁT HSG

---

**Câu 1 (4 điểm):** Nhân cả 2 vế của:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$  với  $a+b+c$  rồi rút gọn  $\Rightarrow$

đpcm

**Câu 2 (3 điểm):** 
$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left( \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\forall x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$$

$\Rightarrow$  BĐT (2) đúng  $\Rightarrow$  BĐT (1) đúng (dấu “=” xảy ra khi  $x = y$ )

**Câu 3 (3 điểm):** Tìm  $m$  để phương trình  $\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$  có nghiệm dương.

Điều kiện:  $x \neq 2; x \neq -2$

$$\text{Ta có } \frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x(1-m) = 2m - 14$$

a) Nếu  $m = 1$  phương trình có dạng  $0 = -12$  vô nghiệm.

b) Nếu  $m \neq 1$  phương trình trở thành  $x = \frac{2m-14}{1-m}$

$$\text{Phương trình có nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-14}{1-m} \neq 2 \\ \frac{2m-14}{1-m} \neq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ 1 < m < 7 \end{cases} \\ \frac{2m-14}{1-m} > 0 \end{cases}$$

Vậy thoả mãn yêu cầu bài toán khi  $\begin{cases} m \neq 4 \\ 1 < m < 7 \end{cases}$ .

**Câu 4 (4 điểm):** Giải các phương phương trình (mỗi PT đúng 2 điểm):

a)  $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \quad (1)$

+ Nếu  $x \geq 1$ : (1)  $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$  (thỏa mãn điều kiện  $x \geq 1$ ).

+ Nếu  $x < 1$ : (1)  $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x=1; x=3$  (cả hai đều không bé hơn 1, nên bị loại)

Vậy: Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là  $x=1$ .

b)  $8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \quad (2)$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm:  $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$\Leftrightarrow x = 0$  hay  $x = -8$  và với điều kiện  $x \neq 0$ .

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm  $x = -8$

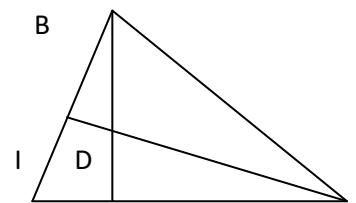
**Câu 5 (3 điểm):** Chọn ẩn, lập đúng phương trình qua các bước (2 điểm)

Giải phương trình và chọn kết quả là 38 và trả lời đúng (1 điểm)

**Câu 6 (3 điểm):**  $\Delta EBC$  có  $AB$  và  $CI$  là 2 đường cao cắt nhau tại  $D$



$\Rightarrow$  là trực tâm  $\Delta ABC \Rightarrow ED \perp BC$ .



$\underline{DEA} = \underline{ABC}$  (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mà góc  $ABC = 45^\circ$  (GT) do đó góc  $DEA = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta ADE$  vuông cân tại A.

$\Rightarrow AD = AE$

-----HẾT-----

Lưu ý: Học sinh giải theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

UBND HUYỆN LƯƠNG TÀI

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN**

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**NĂM HỌC 2023-2024**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**Môn: Toán- Lớp 8**

**Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)**

Ngày thi: 07 tháng 3 năm 2023

(Đề thi có 01 trang)

**Bài 1. (4,0 điểm)**

- 1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:  $x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023$ .

2) Rút gọn  $Q = \left[ \frac{(x-1)^2}{x^2+x} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left( \frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \right)$  (với  $x \neq 0, x \neq \pm 1$ ).

3) Cho  $a, b, c \neq 0$  và  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$T = \frac{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}.$$

### Bài 2. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương, p nguyên tố thỏa mãn:

$$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p.$$

2) Giải phương trình:  $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$ .

### Bài 3. (3,0 điểm)

1) Cho đa thức  $f(x) = ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Biết rằng

$f(0), f(1), f(2)$  có giá trị nguyên. Chứng minh rằng  $2a, 2b$  có giá trị nguyên.

2) Cho  $a, b$  là hai số nguyên phân biệt lớn hơn 1 thỏa mãn  $a + 2b^2 - 2$  là lũy thừa của một số nguyên tố khác 13 và  $b + 2a^2 - 2$  chia hết cho  $a + 2b^2 - 2$ . Chứng minh  $2a + 3$  là số chính phương.

**Bài 4. (7,0 điểm)**

1) Cho tam giác ABC có  $B = 2C$ ; trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho  $BD = BC$ . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt BC và CD lần lượt tại M và N.

Đường vuông góc với BC tại C cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

- a)  $\Delta ABM$  là tam giác cân và  $ABC = 2AKC$ ;
- b)  $MA \cdot KN = MN \cdot KA$ ;
- c) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

2) Cho tứ giác ABCD có  $BCD = BDC = 50^\circ; ACD = ADB = 30^\circ$ . Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng tam giác ABI cân.

**Bài 5. (2,0 điểm)**

1) Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn:  $x + y = 1$ . Chứng minh:  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$ .

2) Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là 3 đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng 1 màu.

----- **Hết** -----

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....

UBND HUYỆN LƯƠNG TÀI

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN**

---

Năm học 2022-2023

---

Môn thi: Toán - Lớp 8

Bài	Lời giải sơ lược	Điểm
<b>1.1 (1,0 điểm)</b>		
	Ta có: $\begin{aligned} & x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023 \\ &= (x^4 - x) + 2023(x^2 + x + 1) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2023(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2023) \end{aligned}$	0,25 0,25 0,5
<b>1.2 (1,5 điểm)</b>	2) Rút gọn $Q = \left[ \frac{(x-1)^2}{x^2+x} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left( \frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \right)$ (với $x \neq 0, x \neq \pm 1$ ).	

$Q = \left[ \frac{(x-1)^2}{x^2+x} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left( \frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \right)$ $Q = \left[ \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x+1}{x(x+1)} \right] : \left[ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} - \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} \right]$	0,5	
$Q = \frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 + x - x - 1}{x(x+1)} : \frac{x^2 + x + 1 - x^2 + x - 1}{x}$	0,25	
$Q = \frac{2x^2 - 2x}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{2x}$	0,25	
$Q = \frac{x-1}{x+1}$	0,25	
Vậy $Q = \frac{x-1}{x+1}$ với $x \neq 0, x \neq \pm 1$	0,25	
<b>1.3. (1,5 điểm)</b> Cho $a, b, c \neq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ . Tính giá trị của biểu thức:		
$T = \frac{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}.$		

	$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca &\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca) \\ \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca &= 0 \\ \Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 0 \end{aligned}$	0,5
	$\begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c \\ (c-a)^2 = 0 \end{cases}$	0,5
	<p>Thay <math>b = a, c = a</math> vào biểu thức <math>T = \frac{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}</math> ta được:</p> $T = \frac{a^{2022} + a^{2022} + a^{2022}}{(a+a+a)^{2022}} = \frac{3a^{2022}}{9a^{2022}} = \frac{1}{3}.$	0,5
<b>2.1. (2,0 điểm)</b> Tìm tất cả các số $x, y$ nguyên dương, $p$ nguyên tố thỏa mãn:		
	$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p.$	
	<p>Ta có <math>x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p \Rightarrow x^2 + p^2y^2 = 3xy + 12p : 3</math></p> <p>Ta có số chính phương chia 3 dư 0, 1</p> $\Rightarrow x : 3; py : 3$	0,5
	$\Rightarrow x^2 + (py)^2 : 9 \Rightarrow 3xy + 12p : 9$	0,25

	mà $x:3 \Rightarrow p:3 \Rightarrow p=3$ (do p nguyên tố)	
	Thay $p=3$ vào phương trình $x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p$ ta có  $\begin{aligned}x^2 - 3xy + 9y^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 12xy + 36y^2 &= 144 \\ \Leftrightarrow (2x - 3y)^2 + 27y^2 &= 144\end{aligned}$	0,25
	$\Rightarrow 27y^2 \leq 144 \Rightarrow y^2 \leq 5$ mà $y^2$ là chính phương và y nguyên dương $y^2 \in \{1; 4\}$	0,25
	Nếu $y^2 = 1 \Rightarrow (2x - 3y)^2 = 117$ (loại vì 117 không chính phương)	0,25
	Nếu $y^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (2x - 6)^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ vì x, y nguyên dương. Vậy $x = 6; y = 2; p = 3$	0,5
<b>2.2. (2,0 điểm) Giải phương trình: <math>(x^2 - 9)^2 = 12x + 1</math>.</b>		
	$\begin{aligned}(x^2 - 9)^2 &= 12x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 + 81 = 12x + 1 \\ \Leftrightarrow x^4 + 18x^2 + 81 &= 36x^2 + 12x + 1\end{aligned}$	0,25

	$\Leftrightarrow (x^2 + 9)^2 = (6x + 1)^2$ $\Leftrightarrow (x^2 + 9)^2 - (6x + 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + 9 + 6x + 1)(x^2 + 9 - 6x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 10)(x^2 - 6x + 8) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 10 = 0 & (1) \\ x^2 - 6x + 8 = 0 & (2) \end{cases}$	0,25
	Giải (1): $x^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + 1 = 0$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm	0,25
	Giải (2): $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 2) - 4(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$	0,5
	Tập nghiệm của phương trình đã cho $S = \{2; 4\}$	0,25
<b>3.1 (1,5 điểm)</b> Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c$ là các số hữu tỉ. Biết rằng		

$f(0), f(1), f(2)$  có giá trị nguyên. Chứng minh rằng  $2a, 2b$  có giá trị nguyên.

$f(0) = c \quad (1), f(1) = a + b + c \quad (2), f(2) = 4a + 2b + c \quad (3)$ là các số nguyên .	0,5
Từ (1) và (2) $\Rightarrow a + b \in Z \Rightarrow 2a + 2b \in Z$ (4)	0,25
Từ (1),(3)và (4) suy ra $2a$ là số nguyên. .	0,25
Từ (4) và $2a$ nguyên suy ra $2b$ nguyên	0,25
Vậy $2a, 2b$ có giá trị nguyên.	0,25

**3.2. (1,5 điểm)** Cho  $a, b$  là hai số nguyên phân biệt lớn hơn 1 thỏa mãn  $a + 2b^2 - 2$  là lũy thừa của một số nguyên tố khác 13 và  $b + 2a^2 - 2$  chia hết cho  $a + 2b^2 - 2$ . Chứng minh  $2a + 3$  là số chính phương.

Đặt:  $a + 2b^2 - 2 = p^k$ ;  $p$  nguyên tố khác 13;  $k \in \mathbb{N}^*$  do  $a, b$  lớn 1 và

$$\begin{aligned} & b + 2a^2 - 2 \mid a + 2b^2 - 2 \\ \Rightarrow & \begin{cases} b + 2a^2 - 2 - (a + 2b^2 - 2) \mid p^k \\ b + 2a^2 - 2 \geq a + 2b^2 - 2 \end{cases} \\ \text{Vì} \Rightarrow & \begin{cases} (a-b)(2a+2b-1) \mid p^k \\ (a-b)(2a+2b-1) > 0 \text{ (do } a \neq b, a, b > 1) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} a-b \mid p^m \\ 2a+2b-1 \mid p^n \quad (m, n \in \mathbb{N}; m+n=k) \\ a > b \end{cases} \end{aligned}$$

0,5

TH1: Nếu  $m \neq 0 \Rightarrow n \neq 0$  vì  $a-b < a+2b^2-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b \mid p \\ 2a+2b-1 \mid p \end{cases} \Rightarrow 4a-1 \mid p$$

Lại có:

0,5

$$\begin{aligned} & b + 2a^2 - 2 \mid a + 2b^2 - 2 = p^k \\ \Rightarrow & b + 2a^2 - 2 \mid p \Rightarrow 2b + 4a^2 - 4 \mid p \\ \Rightarrow & 4a^2 - 2a - 3 \mid p \\ \Rightarrow & 4a^2 - a - (a+3) \mid p \\ \Rightarrow & a+3 \mid p \end{aligned}$$

<p>Kết hợp với <math>4a - 1 \vdots p \Rightarrow 13 \vdots p \Rightarrow p = 13</math> vì <math>p</math> nguyên tố (loại)</p> <p>TH2: Nếu <math>m = 0</math></p> $\Rightarrow 2a + 2b - 1 \vdots p^k \Rightarrow 2a + 2b - 1 \vdots a + 2b^2 - 2$ $\Rightarrow 2a + 2b - 1 \geq a + 2b^2 - 2$ $\Rightarrow a \geq 2b^2 - 2b - 1 \quad (1)$ <p>Ta lại có:</p> $2(a + 2b^2 - 2) - (2a + 2b - 1) \vdots a + 2b^2 - 2$ $\Rightarrow 4b^2 - 2b - 3 \vdots a + 2b^2 - 2$ $\Rightarrow 4b^2 - 2b - 3 \geq a + 2b^2 - 2 \Rightarrow 2b^2 - 2b - 1 \geq a \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) <math>a = 2b^2 - 2b - 1 \Rightarrow 2a + 3 = (2b - 1)^2</math> là chính phương (đpcm)</p>	0,5
--	-----

**4.1. (5,5 điểm) 1)** Cho tam giác ABC có  $B = 2C$ ; trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho

$BD = BC$ . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt BC và CD lần lượt tại M và N. Đường

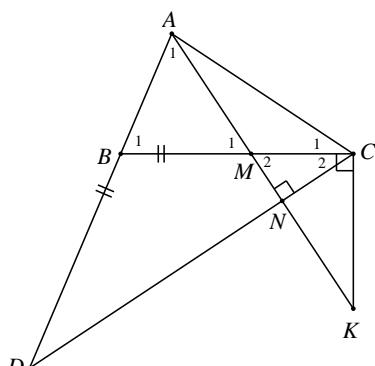
vuông góc với BC tại C cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

a)  $\Delta ABM$  là tam giác cân và  $ABC = 2AKC$ ;

b)  $MA \cdot KN = MN \cdot KA$ ;

c) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

Vẽ hình + Giả thiết, kết luận



0,25

a)  $A_1 + D = 90^\circ, M_2 + C_2 = 90^\circ$  (1)

$BD = BC \Rightarrow \Delta BCD$  cân tại B

0,5

$\Rightarrow D = C_2$  (2)

	Từ (1), (2) $\Rightarrow A_1 = M_2$  $M_1 = M_2$ (2 góc đối đỉnh)  $\Rightarrow A_1 = M_1 \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B	0,5
	Ta lại có $D + A_1 = 90^\circ; K + M_2 = 90^\circ$ mà $A_1 = M_2 \Rightarrow D = K$	0,5
	Mà $ABC = 2ADC \Rightarrow ABC = 2AKC$ (đpcm)	0,25
b)	• $C_1 = \frac{ABC}{2}, C_2 = \frac{ABC}{2} \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow CM$ là đường phân giác của $\Delta ACN$	0,5
	$\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{CA}{CN}$ (3)	0,25
	Chứng minh được CK là tia phân giác của góc ngoài tại C của $\Delta ACN$	0,5

	$\Rightarrow \frac{AK}{KN} = \frac{CA}{CN}$ (4)	
	Từ (3), (4) $\Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{KA}{KN} \Rightarrow MA \cdot KN = KA \cdot MN$ (đpcm)	0,25
c)	$D = C_2$ (Theo (2)), $B_1 = D + C_2 \Rightarrow B_1 = 2D$  $B_1 = 2C_1$ (GT)  $\Rightarrow C_1 = D$	0,25
	Xét $\Delta ABC$ và $\Delta ACD$ có:  $BAC$ là góc chung, $C_1 = D$  $\Delta ABC \sim \Delta ACD$  $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD$  $\Rightarrow AC^2 = AB(AB + BD) = AB(AB + BC)$	0,25

Đặt  $AB = c; AC = b; BC = a$

$$\text{Ta có: } b^2 = c(c+a) \Rightarrow (b-c)(b+c) = c.a \quad (*)$$

Vì  $a, b, c$  là 3 số tự nhiên liên tiếp, ta có các trường hợp:

TH1:

0,5

$$b - c = 1 \Rightarrow b = c + 1$$

$$\Rightarrow 2c + 1 = ca$$

$$\Leftrightarrow c(a-2) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 3 \quad (\text{loại}) \\ b = 2 \end{cases}$$

TH2:

$$b - c = 2 \Rightarrow b = c + 2$$

$$\Rightarrow a = c + 1$$

0,5

Thay vào (\*) ta được:

$$2(2c+2) = c(c+1)$$

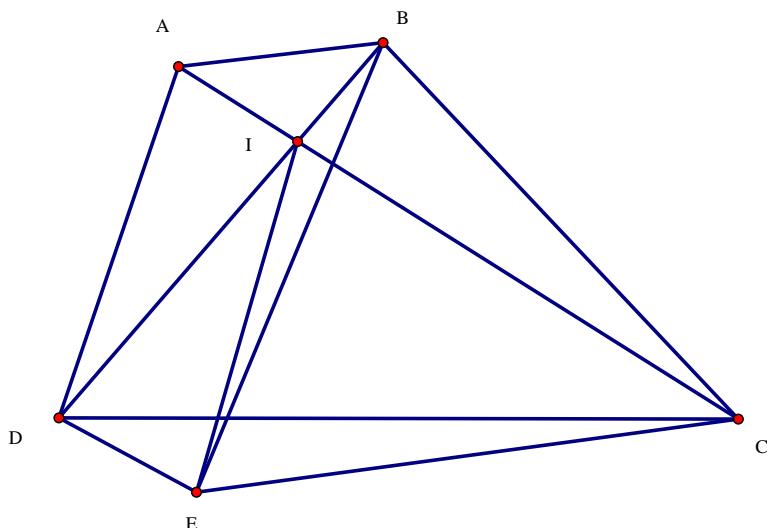
$$\Leftrightarrow c^2 - 3c - 4 = 0$$

$$\Rightarrow c = 4 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 6$$

Vậy 3 cạnh của tam giác là 4; 5; 6.

**4.2(1,5 điểm)** Cho tứ giác ABCD có  $BCD = BDC = 50^\circ$ ;  $ACD = ADB = 30^\circ$ . Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng tam giác ABI cân.

Giả thiết, Kết luận + hình vẽ



0,25

Từ giả thiết $\Rightarrow CBI = CIB = 80^\circ \Rightarrow CB = CI; BCI = 20^\circ$	0,25	
Vẽ tam giác đều BCE ( E thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).  $\Rightarrow \Delta BDE = \Delta CBI (cgc)$ $\Rightarrow \begin{cases} BDE = 80^\circ \\ DE = BI \end{cases}$ $\Rightarrow AID = BIC = IDE (= 80^\circ)$ $\Rightarrow AI // DE (1)$	0,5	

$$\begin{aligned}
 & Do: DIE = DIC - EIC \\
 & = 100^\circ - \frac{180^\circ - ECI}{2} (CI = CE = CB) \\
 & = 30^\circ
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow DIE = ADI (= 30^\circ) \Rightarrow AD // IE (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  Tứ giác AIED là hình bình hành nên  $DE = AI$ . Mà  $DE = BI$

0,5

Suy ra  $AI = BI$  do đó tam giác ABI cân tại I.

**5.1. (1,0 điểm)** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn:  $x + y = 1$ . Chứng minh:  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$ .

Ta có:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \text{ dấu } = \text{xảy ra khi } a = b$$

0,5

Áp dụng ta có:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 &\geq \frac{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x + y + \frac{x+y}{xy}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 4xy &\Leftrightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

0,5

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = y = 1/2$

**5.2 (1,0 điểm)** Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là 3 đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng 1 màu.

	Vì đa giác đều có số đỉnh là 2019 (số lẻ) nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau được tô cùng 1 màu, gọi 2 đỉnh đó là A và B. Một khía cạnh khác đa giác đều này tồn tại 1 đỉnh M nào đó nằm trên đường trung trực của AB.
	- Nếu M được tô cùng màu với A và B , ta có tam giác MAB thỏa mãn đề bài.
	- Nếu M khác màu với A và B ta gọi đỉnh E kề với đỉnh A; gọi đỉnh F kề với đỉnh B và xảy ra trường hợp:
	+ Nếu cả E và F khác màu với A , B thì ta có M,E,F cùng màu suy ra tam giác MEF thỏa mãn đề bài.
	+ Nếu có ít nhất 1 đỉnh E hoặc F cùng màu với A và B , giả sử đỉnh E thì ta có tam giác ABE thỏa mãn đề bài.
	Vậy bài toán được chứng minh.

UBND HUYỆN THANH SƠN

**ĐỀ THI HỌC SINH NĂNG KHIẾU CẤP HUYỆN**PHÒNG GD&ĐT**NĂM HỌC 2023-2024****Môn: Toán 8****ĐỀ CHÍNH THỨC**

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề)

(Đề thi có 02 trang)

**Ghi chú:**

- Thí sinh lựa chọn đáp án phần trắc nghiệm khách quan **chỉ có một** lựa chọn đúng.
- Thí sinh làm bài thi (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) trên tờ giấy thi (**không** làm bài trên đề thi).

**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)**

**Câu 1.** Cho  $x + y = 9$ ,  $xy = 14$ . Giá trị của biểu thức  $x^3 + y^3$  là

A. 513

B. 531

C. 315

D. 351

**Câu 2.** Cho  $a+b=1$ , biểu thức  $C = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$  có giá trị là

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

**Câu 3.** Phân tích đa thức  $3x^2 + 8x + 4$  thành nhân tử được kết quả là

A.  $(x-2)(3x+2)$ B.  $(x+2)(3x-2)$ C.  $(x+2)(3x+2)$ D.  $(x-2)(3x-2)$ 

**Câu 4.** Đa thức  $a^3 + 4a^2 - 29a + 24$  được viết dưới dạng nhân tử là

A.  $(a-1)(a-3)(a-8)$ B.  $(a-1)(a+3)(a+8)$ C.  $(a+1)(a-3)(a+8)$ D.  $(a-1)(a-3)(a+8)$ 

**Câu 5.** Cho  $9x^2 + 4y^2 = 20xy$  ( $2y < 3x < 0$ ), biểu thức  $A = \frac{3x-2y}{3x+2y}$  có giá trị là

A.  $-\frac{1}{2}$ B.  $-\frac{2}{9}$ C.  $\frac{2}{9}$ D.  $\frac{1}{2}$

**Câu 6.** Giá trị biểu thức  $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$  là

A. 5050

B. 5005

C. 4950

D. 4590

**Câu 7.** Bất phương trình  $\frac{x-2021}{x-2022} > 1$  có tập nghiệm là

A.  $S = \{x \mid x < 2022\}$ B.  $S = \{x \mid x > 2022\}$ C.  $S = \{x \mid x < 2021\}$ D.  $S = \{x \mid x > 2021\}$ 

**Câu 8.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30$  là

A. 0

B. 5

C. 10

D. 20

**Câu 9.** Cho  $abc = 2022$ , giá trị biểu thức  $A = \frac{2022a}{ab+2022a+2022} + \frac{b}{bc+b+2022} + \frac{c}{ac+c+1}$  là

A. 1

B. 3

C. 2022

D. 2

**Câu 10.** Cho  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  và  $a + b + c \neq 0$ , giá trị biểu thức  $N = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}$  là

A. 1

B.  $\frac{1}{3}$ 

C. 2

D.  $\frac{1}{2}$ 

**Câu 11.** Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC sao cho  $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$ , điểm E trên đoạn

AD sao cho  $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$ . Gọi K là giao điểm của BE và AC. Tỉ số  $\frac{AK}{KC}$  là

A.  $\frac{2}{3}$ B.  $\frac{5}{8}$ C.  $\frac{3}{5}$ D.  $\frac{3}{8}$ 

**Câu 12.** Cho hình bình hành ABCD có điểm G thuộc cạnh CD sao cho  $DG = \frac{1}{4}DC$ . Gọi E

là giao điểm của AG và BD. Tỉ số  $\frac{DE}{DB}$  là

A.  $\frac{3}{5}$ B.  $\frac{2}{5}$ C.  $\frac{1}{5}$ D.  $\frac{1}{4}$ 

**Câu 13.** Cho tam giác ABC có  $AB = 12cm, AC = 15cm, BC = 18cm$ . Trên cạnh AB, lấy điểm

M sao cho  $AM = 10cm$ , trên cạnh AC lấy điểm N sao cho  $AN = 8cm$ . Độ dài đoạn MN là

A. 10cm

B. 12cm

C. 14cm

D. 16cm

**Câu 14.** Cho hình vuông ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC và I là giao

điểm của DF và CE. Tỉ số  $\frac{S_{CIF}}{S_{CBE}}$  là

A.  $\frac{1}{2}$ B.  $\frac{1}{3}$ C.  $\frac{1}{4}$ D.  $\frac{1}{5}$ 

**Câu 15.** Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE. Lấy M, N trên BC sao cho

$BM = MN = NC$ . Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Biết  $BC =$

10cm thì độ dài IK là

A. 3,5cm

B. 3cm

C. 2,5cm

D. 2cm

**Câu 16.** Để lập đội tuyển năng khiếu bóng rổ nhà trường đưa ra quy định tuyển chọn

như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 10 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được

cộng 4 điểm; quả bóng ném ra ngoài thì bị trừ 2 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 22

điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì số quả bóng phải ném vào rổ ít nhất là

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

## II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

### Câu 1 (3,5 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên:  $x^2 - y^2 - x + 2y = 1$

b) Cho số nguyên dương  $n$  và các số  $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$  và  $B = \underbrace{888\dots8}_n$ . Chứng minh rằng:

$A + 2B + 4$  là số chính phương.

### Câu 2 (3,5 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ac}{c^2 + a^2 - b^2}$

biết  $a + b + c = 0$  và  $a, b, c \neq 0$ .

b) Giải phương trình:  $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$ .

**Câu 3 (4,0 điểm).**

Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AH tại M, AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh  $BD^2 = AD \cdot DM$ .

b) Kẻ AK vuông góc với EF tại K. Chứng minh  $\triangle AEK$  đồng dạng  $\triangle AHF$ .

c) Chứng minh:  $AB \cdot AC = BE \cdot CF + AE \cdot AF$ .

**Câu 4 (1,0 điểm).** Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn  $a+b+c \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức  $P = a+b+c+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ .

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: ..... SBD: .....

*Cần bộ coi thi không cần giải thích gì thêm./.*

(Chú ý: Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay)

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THANH SƠN

---

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH NĂNG KHIẾU LỚP 8 THCS**

**NĂM HỌC 2022 - 2023**

**MÔN: TOÁN**

Hướng dẫn chấm có: 03 trang

**A. Một số chú ý khi chấm bài.**

Đáp án dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách giải. Thí sinh giải cách khác mà đúng thì tổ chấm cho điểm từng phần ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.

**B. Đáp án và thang điểm.**

**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm)**

*Mỗi câu trả lời đúng cho 0,5 điểm*

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	D	B	C	D	A	A	B	B	A	B	D	C	B	D	C	C

## II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên:  $x^2 - y^2 - x + 2y = 1$

b) Cho số nguyên dương n và các số  $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$  và  $B = \underbrace{888\dots8}_n$ . Chứng minh rằng:

$A + 2B + 4$  là số chính phương.

Nội dung	Điểm

a)  $x^2 - y^2 - x + 2y = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 - 4x + 8y = 4$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) - (4y^2 - 8y + 4) = 1 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - (2y - 2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2x - 2y + 1)(2x + 2y - 3) = 1$$

1,0

Nghiệm  $(x, y) \in \{(0;1), (1;1)\}$

1,0

b) Đặt  $a = \underbrace{111\dots1}_n$

0,5

Ta có:  $A + 2B + 4 = A = \underbrace{444\dots4}_{2n} + 2 \cdot \underbrace{888\dots8}_n + 4 = 36a^2 + 24a + 4 = (6a + 2)^2$

1,0

## Câu 2 (3,5 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ac}{c^2 + a^2 - b^2}$

biết  $a + b + c = 0$  và  $a, b, c \neq 0$ .

b) Giải phương trình:  $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$

Nội dung	Điểm
$a) A = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ac}{c^2 + a^2 - b^2}$  Ta có: $a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + b^2 - (-a - b)^2 = -2ab$  $A = \frac{ab}{-2ab} + \frac{bc}{-2bc} + \frac{ac}{-2ca} = \frac{-3}{2}$	1,0
	1,0
$b) 2x(8x-1)^2(4x-1)=9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9$  Đặt $y = 8x^2 - 2x$  Phương trình: $(8y+1)y=9 \Leftrightarrow 8y^2 + y - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\frac{-9}{8} \end{cases}$	0,5

Vậy:  $S = \left\{ \frac{-1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$

1,0

**Câu 3 (4,0 điểm).**

Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AH tại M, AH cắt BC tại D.

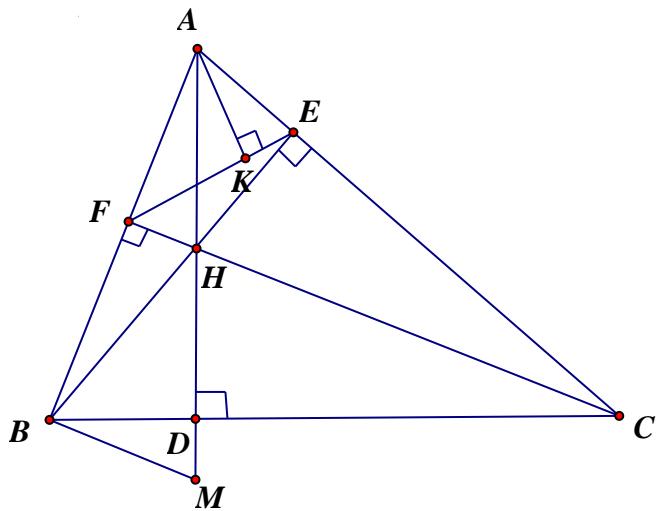
a) Chứng minh  $BD^2 = AD \cdot DM$

b) Kẻ AK vuông góc với EF tại K. Chứng minh  $\Delta AEK$  đồng dạng  $\Delta AHF$ .

c) Chứng minh:  $AB \cdot AC = BE \cdot CF + AE \cdot AF$ .

Nội dung	Điểm

## 1. Hình vẽ



a) Chứng minh được  $BD^2 = AD \cdot DM$

b) Chứng minh được  $\triangle AEK \sim \triangle AHF$

c) Ta có:  $AB \cdot AC = BE \cdot CF + AE \cdot AF \Leftrightarrow \frac{BE}{AB} \cdot \frac{CF}{AC} + \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} = 1$

$$\frac{BE}{AB} \cdot \frac{BE}{AB} + \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AE}{AB} = 1 \Leftrightarrow \frac{BE^2 + AE^2}{AB^2} = 1$$

		1,5
		1,5
		1,0

**Câu 4 (1,0 điểm).** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương thỏa mãn  $a+b+c \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = a+b+c + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Nội dung	Điểm
$P = a+b+c + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq a+b+c + \frac{18}{a+b+c}$ $= \left(a+b+c + \frac{1}{a+b+c}\right) + \frac{17}{a+b+c} \geq 2+17=19$	0,5
Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ .	0,5

**Chú ý: Học sinh có cách giải khác vẫn cho điểm tối đa**

-----HẾT-----

UBND QUẬN HÀ ĐÔNG

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC: 2023-2024

Môn kiểm tra: TOÁN 8

Thời gian làm bài: 90 phút

*(Đề thi gồm 01 trang. Học sinh làm bài ra giấy thi)***Bài 1. (5,0 điểm)**

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1}$  với  $x \neq 1; x \neq 2; x \neq 3$

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm giá trị lớn nhất của A

**Bài 2. (4,0 điểm)**

1) Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 13)^2 + 4(x^2 - 5x - 12)^2 = 4(2x^2 + x - 13)(x^2 - 5x - 12)$$

2) Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0$

**Bài 3. (3,0 điểm)**

1) Cho  $a, b$  là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp

Chứng minh rằng :  $ab - a - b + 1$  chia hết cho 48

2) Với ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :  $T = 507xz - xy - yz$

**Bài 4. (7,0 điểm)** Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. Gọi M là điểm bất kỳ

thuộc cạnh BC ( $M \neq B$  và  $C$ ). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho  $BE = CM$ .

1) Chứng minh  $\Delta OEM$  vuông cân;

2) Chứng minh:  $EM // BN$ ;

- 3) Từ C kẻ  $CH \perp BN$  ( $H \in BN$ ). Chứng minh ba điểm  $O, M, H$  thẳng hàng;
- 4) Cho độ dài đoạn thẳng  $AB = a$  và  $P, Q$  lần lượt thuộc cạnh  $AB, AD$  sao cho  $\angle PCQ = 45^\circ$ . Chứng minh tam giác  $APQ$  có chu vi bằng  $2a$ .

**Bài 5. (1,0 điểm)** Tìm số tự nhiên  $n$  để  $5^{2n^2-6n+2} - 12$  là số nguyên tố

-----Hết-----

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

UBND QUẬN HÀ ĐÔNG

HƯỚNG DẪN CHẤM BÀI KIỂM TRA

TRƯỜNG TH – THCS HÀ NỘI

HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8

THĂNG LONG

NĂM HỌC 2022 - 2023

Câu	Đáp án	Điểm
Bài 1 (5,0đ)	<p><b>1) Rút gọn A (3,0 điểm)</b></p> $\begin{aligned} A &= \left( \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1} \left( \begin{array}{l} x \neq 1; x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{array} \right) \\ &= \left[ \frac{x^2(x-1) + x^2(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right] \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2x^3 - 4x^2}{(x-2)(x^4 + x^2 + 1)} \\ &= \frac{2x^2(x-2)}{(x-2)(x^4 + x^2 + 1)} = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1} \end{aligned}$ <p><b>2) Tìm giá trị lớn nhất của A (2,0 điểm)</b></p> <p>Với <math>x \neq 1; x \neq 2; x \neq 3 \Rightarrow A = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1}</math></p> <p>Với: <math>x = 0 \Rightarrow A = 0</math></p>	<p>2,5</p> <p>1,0</p>

	$\text{Với } ;x \neq 0 \Rightarrow A = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}$	
--	--	--

Áp dụng bđt Co si cho các số dương  $x^2; \frac{1}{x^2}$  ta có  $x^2 = \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$

0,25

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} \leq \frac{2}{3} \text{ hay } A \leq \frac{2}{3} \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ kết hợp với đk tìm dc } x = -1$$

0,5

$$\text{Vậy Max } A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -1$$

0,25

0,25

0,25

	<b>1) Giải phương trình sau (2,0 điểm)</b>	
	$(2x^2 + x - 13)^2 + 4(x^2 - 5x - 12)^2 = 4(2x^2 + x - 13)(x^2 - 5x - 12)$ $\Leftrightarrow (2x^2 + x - 13)^2 - 4(2x^2 + x - 13)(x^2 - 5x - 12) + 4(x^2 - 5x - 12)^2 = 0$ $\Leftrightarrow [(2x^2 + x - 13) - 2(x^2 - 5x - 12)]^2 = 0$ $\Leftrightarrow (2x^2 + x - 13 - 2x^2 + 10x + 24)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (11x + 11)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	0,5
<b>Bài 2</b>	<b>2) Tìm các cặp số nguyên (x; y) (2,0 điểm)</b>	
<b>(24,0d)</b>	$x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2021x - 2021y - 2021 = 1$ $\Leftrightarrow (x - 2021)(x + y + 1) = 1$	1,0
	Th1: $\begin{cases} x - 2021 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2020 \\ y = -2022 \end{cases}$ Th2: $\begin{cases} x - 2021 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ y = -2022 \end{cases}$	0,5
	Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2020; -2022); (2022; -2022)$	

		1,0
		0,5
		0,5
Bài 3 (3,0đ)	<b>1) Cho <math>a, b</math> là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp (1,5 điểm)</b>  Chứng minh rằng : $ab - a - b + 1$ chia hết cho 48	
Bài 4		

(0,5đ)	<p>Đặt <math>A = ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)</math></p> <p>Vì <math>a, b</math> là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp nên</p> $\Rightarrow a = (2k-1)^2; b = (2k+1)^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$ $\rightarrow A = [(2k-1)^2 - 1][(2k+1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k) = 4k(k-1)4k(k+1)$ $= 16k(k-1)(k+1):16$ <p>Mà <math>A:3</math> (do <math>k-1, k, k+1</math> là 3 số tự nhiên liên tiếp )</p> <p>Mà <math>3,16</math> có UCLN là <math>1</math> nên <math>A</math> chia hết cho <math>48</math></p> <p style="text-align: right;">1,0</p> <p><b>2) Với ba số thực <math>x, y, z</math> thỏa mãn <math>x^2 + y^2 + z^2 \leq 8</math>.</b></p> <p>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : <math>T = 507xz - xy - yz</math> (1,5 điểm)</p> $T = 507xz - xy - yz \Leftrightarrow 2T = 507.2xz - 2y(x+z) + 8 - 8$ <p style="text-align: right;">0,5</p>
--------	--

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2T \geq 507.2xz - 2y(x+z) + x^2 + y^2 + z^2 - 8 \\
&\Leftrightarrow 2T \geq 506.2xz - 2y(x+z) + (x+z)^2 + y^2 - 8 \\
&\Leftrightarrow 2T \geq 506.2xz + (x+z)^2 - 2y(x+z) + y^2 - 8 \\
&\Leftrightarrow 2T \geq 506.2xz + (x+z-y)^2 - 8(1) \\
&+ - y^2 \leq 0 \forall y; (x+z)^2 \geq 0 \forall x, z \Rightarrow 2xz \geq -(x^2 + z^2) \geq -(x^2 + y^2 + z^2)(2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $2T \geq -506(x^2 + z^2) + (x+z-y)^2 - 8$

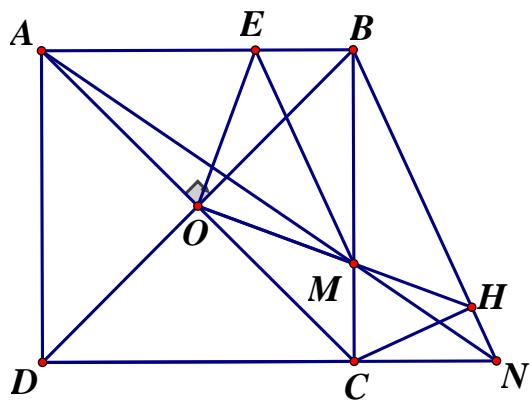
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2T \geq -506(x^2 + z^2 + y^2) + (x+z-y)^2 - 8 \Leftrightarrow 2T \geq -506.8 + 0 - 8 \Leftrightarrow 2T \geq -507.8 = -4056 \\
&\Leftrightarrow T \geq -2028
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)^2 = 0 \\ (x+z-y)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 0; z = -2 \\ x = -2; y = 0; z = 2 \end{cases}$

Vậy  $\text{Min } T = -2028 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 0; z = -2 \\ x = -2; y = 0; z = 2 \end{cases}$

1,0

		0,5
<b>Bài 5</b> <b>(3,5đ)</b>		



0,5

**1) Chứng minh  $\triangle OEM$  vuông cân (2,0 điểm)**

Ta có ABCD là hình vuông tâm O (GT) nên  $AC \perp BD$  tại O ;

$OA = OB = OC = OD$  và  $\angle ABO = \angle OCB = 45^\circ$  (tính chất hình vuông)

Xét  $\triangle EBO$  và  $\triangle MCO$  có :

$OB = OC$ (cmt),  $\angle EBO = \angle OCM = 45^\circ$ ,  $BE = CM$ (gt)  $\Rightarrow \triangle EBO = \triangle MCO$ (c.g.c)

0,5

$\Rightarrow EO = OM$  (hai cạnh tương ứng) và  $\angle EOB = \angle MOC$  (hai góc tương ứng)

0,5

$\Rightarrow \angle EOM = \angle EOB + \angle BOM = \angle COM + \angle MOB = \angle COB = 90^\circ$

0,5

Xét  $\triangle EOM$  có  $EO = OM$ (cmt)  $\Rightarrow \triangle EOM$  cân tại O, mà  $\angle EOM = 90^\circ$ (cmt)

	$\Rightarrow \Delta OEM$ vuông cân tại O (đpcm)	0,5
	<p><b>2) Chứng minh <math>EM // BN</math> (2,0 điểm)</b></p> <p>Ta có : <math>AB // CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}</math> (hệ quả định lý Talet)</p> <p>Mà <math>AB = BC</math> (do ABCD là hình vuông) và <math>BE = CM</math>(gt) <math>\rightarrow AE = BM</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow EM // BN</math> (Định lý Talet đảo)</p>	1,0
		1,0
	<p><b>3) Từ C kẻ <math>CH \perp BN</math> (<math>H \in BN</math>). Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng</b></p> <p>Kẻ OM cắt BN tại H'</p> <p>Vì <math>EM // BN</math>(cmt) <math>\Rightarrow \angle OME = \angle OH'B</math> (hai góc đồng vị)</p> <p>Mà <math>\angle OME = 45^\circ \Rightarrow \angle OH'B = 45^\circ</math></p> <p>Xét <math>\triangle OMC</math> và <math>\triangle BMH'</math> có : <math>\angle OMC = \angle BMH'</math> (hai góc đối đỉnh)</p>	0,5

$\angle OCM = \angle MH'B = 45^\circ \Rightarrow \Delta OMC \sim \Delta BMH' (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{OM}{MB} = \frac{MH'}{MC} \Rightarrow \frac{OM}{MH'} = \frac{MB}{MC}$  Xét $\Delta OMB$ & $\Delta CMH'$ : $\frac{OM}{MH'} = \frac{MB}{MC}$ (cmt); $\angle OMB = \angle CMH'$ (hai góc đối đỉnh)  $\Rightarrow \Delta OMB \sim \Delta CMH' (\text{c.g.c}) \Rightarrow \angle OBM = \angle MH'C$ (hai góc tương ứng)  Mà $\angle OBM = 45^\circ \Rightarrow \angle MH'C = 45^\circ$  Ta có $\angle BH'C = \angle CH'M + \angle MH'B = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$  Hay $CH' \perp BN$ tại $H'$ mà $CH \perp BN$ tại $H$ nên $H \equiv H' \Rightarrow O, M, H$ thẳng hàng (đpcm)	0,5
<b>4) Cho độ dài đoạn thẳng <math>AB = a</math> và <math>P, Q</math> lần lượt thuộc cạnh <math>AB, AD</math> sao cho góc <math>PCQ</math> bằng <math>45^\circ</math> (0,5 điểm)</b>  Vẽ hình vuông $BCE'F$ , Trên tia $BF$ lấy $M'$ sao cho $BM' = DQ$  Để dàng chứng minh được $\Delta CQD \sim \Delta CM'B$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle DCQ = \angle BCM'$ (hai góc tương ứng) và $CM' = CQ$ (hai cạnh tương ứng)	0,5

Ta có :  $\begin{cases} \angle DCQ + \angle QCA = 45^\circ \\ \angle ACP + \angle QCA = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle DCQ = \angle ACP \Rightarrow \angle BCM' = \angle ACP$

Ta có :  $\begin{aligned} \angle M'CP &= \angle PCB + \angle BCM' \\ &= (\angle ACB - \angle ACP) + \angle BCM' = 45^\circ - \angle ACP + \angle BCM' = 45^\circ \end{aligned}$

$\Rightarrow \Delta QCP = \Delta M'CP$  (c.g.c)  $\Rightarrow PQ = PM'$  (hai cạnh tương ứng)

0,5

$$\begin{aligned} P_{AQP} &= AP + AQ + PQ = AP + AQ + PM' = AP + AQ + PB + BM' \\ &= AP + AQ + PB + QD = (AP + PB) + (AQ + QD) = 2a(\text{dfcm}) \end{aligned}$$

		0,5
	<p><b>Tìm số tự nhiên n để <math>5^{2n^2-6n+2} - 12</math> là số nguyên tố</b></p> <p>Đặt <math>A = 5^{2n^2-6n+2} - 12</math>. Ta có : <math>5^{2n^2-6n+2} - 12 = 5^2 \cdot 5^{2n(n-3)} - 12</math></p> <p>Th1: <math>\begin{cases} n=0 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow A = 5^2 - 12 = 13</math> là số nguyên tố nên <math>n = 0; 3</math> là giá trị cần tìm</p> <p>Th2: <math>n(n-3) &gt; 0; n \in \mathbb{N}, n &gt; 3, n \in \mathbb{N}</math></p> <p><b>Bài 5 (1,0đ)</b></p> <p>Ta có <math>A = 5^{2n^2-6n+2} - 12 = 25^{n^2-3n+1} - 12 = (26-1)^{n^2-3n+1} - 12 = 26.B + (-1)^{n^2-3n+1} - 12</math></p> <p>Nếu n lẻ thì <math>n^2 - 3n + 1</math> lẻ nên <math>(-1)^{n^2-3n+1} = -1</math></p> <p>Nếu n chẵn thì <math>n^2 - 3n + 1</math> lẻ nên <math>(-1)^{n^2-3n+1} = -1</math></p> <p><math>\Rightarrow A = 26.B - 1 - 12 = 2.13B - 13 = 13(2B-1)</math>:13 mà <math>2B-1 &gt; 0 \forall n &gt; 3, n \in \mathbb{N}</math> nên A là hợp số</p>	0,5

	Vậy $\begin{cases} n = 0 \\ n = 3 \end{cases}$ thì $5^{2n^2-6n+2} - 12$ là số nguyên tố	
		0,5

**Ghi chú:** Học sinh làm theo cách khác mà đúng vẫn được điểm tối đa

UBND HUYỆN YÊN ĐỊNH

## KÌ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8,

**PHÒNG GIÁO DỤC&ĐÀO TẠO**

### CHỌN ĐỘI TUYỂN VÒNG 1

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**DỰ THI**

**HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP**

**TỈNH**

**NĂM HỌC: 2023 - 2024**

Môn thi: Toán

Thời gian: 150 phút (*không kể thời gian giao đề*)

(*Đề thi có 01 trang; gồm 05 câu*)

**Bài 1.(4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức:

$$A = \left( \frac{2x^3+x^2-x}{x^3-1} - \frac{x^2+x}{x^2-1} \right) \cdot \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} + \frac{x}{2x-1}. \text{ với } x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$$

2. Cho ba số  $x, y, z$  khác 0 và thoả mãn:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị biểu thức  $P = (x^{2023} + y^{2023})(y^{2023} + z^{2023})(z^{2023} + x^{2023})$

**Bài 2.** (4,0 điểm)

1. Giải phương trình  $x^2 + \frac{9x^2}{x-3} = 40$

2. Tìm  $x$  và  $y$  thoả mãn đồng thời cả hai hệ thức sau:

$$x^3 + y^3 = 9 \quad (1) \text{ và } x^2 + 2y^2 = x + 4y \quad (2)$$

**Bài 3.** (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương:  $x^2 + y^2 = 3 - xy$ .

2. Cho  $x, y$  là các số nguyên thoả mãn đẳng thức  $3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1)$

Chứng minh rằng  $x^2 - y^2$  chia hết cho 40

**Bài 4.** (6,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Bx vuông góc với AB tại B. Trên tia

Bx lấy điểm C (C khác B).

Kẻ BH vuông góc với AC (điểm H thuộc AC). Gọi M là trung điểm của AB.

1. Chứng minh rằng:  $HA \cdot HC = HB^2$

2. Kẻ HD vuông góc với BC (D thuộc BC). Gọi I là giao điểm của AD và BH. Chứng minh rằng ba điểm C, I, M thẳng hàng.

3. Giả sử AB cố định, điểm C thay đổi trên tia Bx. Biết  $\frac{MI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AB}{BM} = 1$

Tìm vị trí của điểm C trên tia Bx sao cho diện tích tam giác ABI lớn nhất.

**Bài 5.** (2,0 điểm) Cho các số  $a, b, c$  không âm thỏa mãn  $a + b + c = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3$

.....Hết.....

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
1	<p>1. - Với <math>x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}</math>, biểu thức A xác định nên ta có :</p> $A = \left( \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) : \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \left( \frac{x(2x^2 + x - 1)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x(x+1)}{(x^2 + x + 1)} - \frac{x}{(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ <p>Vậy : <math>A = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}</math> ( với <math>x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}</math>)</p>	0,5 0,5

		0,5
		0,5
	<p>2. Ta có: <math>\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow (yz + xz + xy)(x + y + z) = xyz</math></p> $\Leftrightarrow xyz + x^2z + x^2y + y^2z + xyz + y^2x + z^2y + z^2x + xyz = xyz$ $\Leftrightarrow x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + 2xyz = 0$ $\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2023} = -y^{2023} \\ y^{2023} = -z^{2023} \\ z^{2023} = -x^{2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2023} + y^{2023} = 0 \\ y^{2023} + z^{2023} = 0 \\ z^{2023} + x^{2023} = 0 \end{cases}$	0,5

	$\Rightarrow P = (x^{2023} + y^{2023})(y^{2023} + z^{2023})(z^{2023} + x^{2023}) = 0.$	0,5
		0,5
2	<p>1. ĐKXĐ: <math>x \neq 3</math>.</p> $x^2 + \frac{9x^2}{x-3^2} = 40 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 - \frac{6x^2}{x-3} - 40 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 40 = 0$ <p>Đặt <math>t = \frac{x^2}{x-3}</math> ta có phương trình <math>t^2 - 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -4 \end{cases}</math></p> $t = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 = 0 \text{ vô nghiệm;}$ $t = -4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$ <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là <math>S = \{-6; 2\}</math></p>	0,25 0,5 0,25 0,25

		0,5
		0,25
	<p>2. Nhân hai vế phương trình (2) với 3, ta được <math>3x^2 + 6y^2 = 3x + 12y</math> (3).</p> <p>Trừ hai phương trình (1) và (3) vế theo vế, ta được:</p> $(x - 1)^3 = (2 - y)^3 \Leftrightarrow y = 3 - x .$ <p>Thay <math>y = 3 - x</math> vào (3), ta được <math>x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1</math> hoặc <math>x = 2</math>.</p> <p>Với <math>x = 1</math> thì <math>y = 2</math>. Với <math>x = 2</math> thì <math>y = 1</math>.</p> <p>Vậy <math>(x; y) = (2; 1), (1; 2)</math>.</p>	0,5
3	<p>1. Ta có: <math>(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3 - xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1</math></p> <p>Mà <math>x, y \in Z^+ \Rightarrow 0 &lt; xy \leq 1 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = y = 1</math></p> <p>Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là <math>(x, y) = (1; 1)</math></p>	0,75 0,75 0,5

<p>2. Ta có <math>3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1 (*)</math></p> <p>Th1: Trước hết ta chứng minh <math>x^2 - y^2 \vdots 8</math></p> <p>Ta có :</p> $\begin{cases} x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8} \\ y^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0; 3; 4 \pmod{8} \\ 2y^2 \equiv 0; 2 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \equiv 0; 6; 3; 1; 4; 2 \pmod{8}$ <p>Do đó từ (*) ta có : <math>3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod{8} \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}</math></p> $\Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow (x^2 - y^2) \vdots 8 (1)$ <p>Th2: Chứng minh <math>x^2 - y^2 \vdots 5</math></p> <p>Ta có <math>\begin{cases} x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{5} \\ y^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0; 3; 2 \pmod{5} \\ 2y^2 \equiv 0; 2; 3 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \equiv 0; 3; 2; 1; 4 \pmod{5}</math></p> <p>Do đó từ (*) ta có : <math>3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 1 \pmod{5}</math></p> $\Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x^2 - y^2 \vdots 5 (2)$ <p>Từ (1) và (2) kết hợp với <math>(5; 8) = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 \vdots 40 \Rightarrow dfcm</math></p>	0,5
---	-----

		0,5
		0,5
4		
	<p>1. Xét <math>\triangle AHB</math> và <math>\triangle BHC</math> có:</p> <p>+ ) <math>\widehat{AHB} = \widehat{BHC}</math> (do <math>BH \perp AC</math>)</p> <p>+ ) <math>\widehat{HAB} = \widehat{HBC}</math> (cùng phụ với <math>\widehat{HBA}</math>)</p> <p><math>\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle BHC</math> (g.g)</p> $\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HA \cdot HC = HB^2$	2,0

	<p>2. Giả sử đường thẳng CI cắt HD và AB lần lượt tại các điểm K và M'</p> <p>*Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: CAM', CM'B với HD // AB, ta có:</p> $\frac{HK}{AM'} = \frac{CK}{CM'}, \quad \frac{KD}{BM'} = \frac{CK}{CM'} \Rightarrow \frac{HK}{AM'} = \frac{KD}{BM'} \quad (1)$	
	<p>*Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: IAM', IM'B với HD // AB, ta có:</p> $\frac{HK}{M'B} = \frac{KI}{IM'}, \quad \frac{KD}{AM'} = \frac{KI}{IM'} \Rightarrow \frac{HK}{M'B} = \frac{KD}{AM'} \quad (2)$	0,5
	<p>Từ (1) và (2) suy ra:</p> $\frac{HK}{AM'} : \frac{HK}{M'B} = \frac{KD}{M'B} : \frac{KD}{AM'} \Rightarrow \frac{M'B}{AM'} = \frac{AM'}{M'B} \Rightarrow AM'^2 = M'B^2 \Rightarrow AM' = BM'$ <p><math>\Rightarrow M'</math> là trung điểm của AB. Mà M cũng là trung điểm của AB (gt)</p> <p><math>\Rightarrow M'</math> trùng với M. Vậy 3 điểm C, I, M thẳng hàng</p>	0,5
		0,5

		0,5
	<p>3. Ta có: <math>\frac{MI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AB}{BM} = 1 \Rightarrow \frac{MI}{IC} = \frac{HA \cdot BM}{CH \cdot AB} = \frac{HA \cdot AB}{2CH \cdot AB} = \frac{HA}{2CH}</math></p> $= \frac{HA \cdot CH}{2CH^2} = \frac{HB^2}{2CH^2} \quad (1) \quad (\text{Vì } BM = \frac{AB}{2}; \text{ Theo câu a: } HA \cdot CH = HB^2)$ <p>Mà <math>\triangle AHB \sim \triangle BHC</math> nên <math>\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{BC}</math> (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>\frac{MI}{IC} = \frac{AB^2}{2BC^2} = \frac{a^2}{2x^2} \Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{a^2}{a^2 + 2x^2}</math></p> <p>Suy ra <math>\frac{S_{IAB}}{S_{CAB}} = \frac{IM}{MC} = \frac{a^2}{a^2 + 2x^2}</math>. Mà <math>S_{CAB} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{ax}{2}</math></p> $\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 x}{a^2 + 2x^2} = \frac{a^3}{2 \left( \frac{a^2}{x} + 2x \right)} \leq \frac{a^3}{4 \sqrt{\frac{a^2}{x} \cdot 2x}} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}a} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$ <p>Dấu „=” xảy ra khi: <math>\frac{a^2}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}</math></p>	0,5

	Vậy Khi C trên tia Bx sao cho $BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ thì giá trị lớn nhất của $S_{IAB} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$	0,5
		0,5
5	<p>Với các số <math>a, b, c</math> không âm thỏa mãn <math>a+b+c=3</math>. Ta có :</p> $*) (a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4}\right) + \frac{3a}{4} - 1 = a\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3a}{4} - 1 \geq \frac{3a}{4} - 1 \quad (1)$ $*) (b-1)^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = b\left(b^2 - 3b + \frac{9}{4}\right) + \frac{3b}{4} - 1 = b\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3b}{4} - 1 \geq \frac{3b}{4} - 1 \quad (2)$ $*) (c-1)^3 = c^3 - 3c^2 + 3c - 1 = c\left(c^2 - 3c + \frac{9}{4}\right) + \frac{3c}{4} - 1 = c\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3c}{4} - 1 \geq \frac{3c}{4} - 1 \quad (3)$ <p>Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được :</p> $(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3 \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - 3 = \frac{3}{4}.3 - 4 = -\frac{3}{4} \Rightarrow P \geq -\frac{3}{4}$ <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi :</p>	0,5

$\begin{cases} a\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ b\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ c\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a; b; c) = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ (a; b; c) = \left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right) \\ (a; b; c) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right) \end{cases}$	0,5
<p>Vậy <math>\min P = -\frac{3}{4}</math> khi <math>(a; b; c) = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)</math> và các hoán vị của nó</p>	0,5

		0,25
--	--	------

UBND HUYỆN TIỀN DU

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN**

NĂM HỌC 2023-2024

**ĐỀ CHÍNH THỨC**Môn thi: **TOÁN 8****PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO***Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)***Ngày thi: 22/2/2024****I. PHẦN CHUNG****Câu 1(3,5 điểm)**

- 1) Rút gọn biểu thức  $A = \left( \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1}$ , với  $x \neq \pm 1; x \neq -\frac{1}{4}$ .

2) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  thỏa mãn  $2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 = 1$ .

**Câu 2(3,0 điểm)**

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1)  $x^4 - 5x^2 + 4$ ;

2)  $(x+y+2z)^2 + (x+y-z)^2 - 9z^2$ .

**Câu 3(3,0 điểm)**

1) Xác định các số thực  $a, b$  để đa thức  $P(x) = x^3 + ax + b$  chia hết cho đa thức

$$x^2 - 1.$$

2) Cho  $a, b, c$  là ba số khác 0. Chứng minh rằng nếu  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$  thì

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = 1.$$

**Câu 4(6,5 điểm)** Cho hình chữ nhật ABCD ( $AB > 2BC$ ), trên cạnh AB lấy điểm M sao cho  $BC = AM$ , trên tia

CB lấy điểm N sao cho  $CN = BM$ , CM cắt AN tại P, trên cạnh CD lấy điểm E sao cho  $CE = CB$ .

1) Chứng minh tứ giác AMCE là hình bình hành.

- 2) Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.
- 3) Đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt đường thẳng qua N vuông góc với NE tại điểm F. Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông.
- 4) Gọi K là giao điểm của EN với PC, L là giao điểm của EF với AN. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP.

## II. PHẦN RIÊNG

*Thí sinh lựa chọn làm một (chỉ một) câu trong hai câu sau:*

### Câu 5a (4,0 điểm)

- 1) Chứng minh rằng nếu  $2n$  (với  $n \in N^*$ ) là tổng của hai số chính phương thì  $n$  cũng là tổng của hai số chính phương.
- 2) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$ .

### Câu 5b (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức  $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2022^3 + 2023^3$ . Tìm số dư khi chia số A cho

3.

2) Cho  $x, y$  là hai số dương thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức  $A = x^3y^5 + x^5y^3$ .

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh : ..... Số báo danh .....

UBND HUYỆN TIỀN DU

**HƯỚNG DẪN CHẤM****PHÒNG GD & ĐT****ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN****NĂM HỌC 2022 – 2023****Môn: Toán - Lớp 8**

Câu	Đáp án	Điểm
<b>1.1. (2,0 điểm)</b>		
	<p>Cho biểu thức <math>A = \left( \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1}</math>, với <math>x \neq \pm 1; x \neq -\frac{1}{4}</math>.</p> <p>Rút gọn biểu thức A.</p>	

$$\begin{aligned}
A &= \left( \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1} \\
&= \left[ \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right] \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{3x+1 - 2x(x+1) + 3x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{3x+1 - 2x^2 - 2x + 3x^2 - 3x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{4x+1}{x+1}
\end{aligned}$$

0,5

0,25

$$\text{Vậy } A = \frac{4x+1}{x+1}$$

0,25

0,25

		0,25
		0,25
		0,25
<b>1.2. (1,5 điểm)</b>		

$$\begin{aligned}2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3x^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} &\end{aligned}$$

0,25

Vậy  $x = 0$  hoặc  $x = -1$  thỏa mãn.

0,25

0,25

0,25

0,25

		0,25
<b>2.1 (1,5 điểm)</b>		
	$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 \\= x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 \\= (x^4 - 4x^2) - (x^2 - 4) \\= x^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4) \\= (x^2 - 4)(x^2 - 1) \\= (x+2)(x-2)(x+1)(x-1)\end{aligned}$	0.5
		0.25
		0,25
		0,25

		0,25
<b>2.2 (1,5 điểm)</b>		
	$\begin{aligned} & (x+y+2z)^2 + (x+y-z)^2 - 9z^2 \\ &= [(x+y+2z)^2 - 9z^2] + (x+y-z)^2 \\ &= (x+y+2z-3z)(x+y+2z+3z) + (x+y-z)^2 \\ &= (x+y-z)(x+y+5z) + (x+y-z)^2 \\ &= (x+y-z)[(x+y+5z) + (x+y-z)] \\ &= (x+y-z)(2x+2y+4z) \\ &= 2(x+y-z)(x+y+2z) \end{aligned}$	0,25
		0,25
		0,25

		0,25
		0,25
		0,25
<b>3.1 (1,5 điểm)</b>		
	3) Xác định các số thực $a, b$ để đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$ .	
	Vì $P(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$	
	Suy ra $P(x) = (x^2 - 1) \cdot Q(x)$ (1)	0,5
	Thay $x = 1$ vào (1) ta có $P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$ (*)	
	Thay $x = -1$ vào (1) ta có $P(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + b = 0 \Rightarrow b - a = 1$ (**)	0,25
	Từ (*) và (**) ta có: $(a + b) + (b - a) = -1 + 1 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -1$ .	
		0,25

	Vậy $a = -1$ ; $b = 0$ .	0,25
		0,25
<b>3.2 (1,5 điểm)</b>		
	Cho $a, b, c$ là ba số khác 0. Chứng minh rằng nếu $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ thì	
	$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab} = 1.$	
	Ta có $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + bc + ca = 0$	0,25
	Khi đó:	
	$  \begin{aligned}  a^2 + 2bc &= a^2 + 2bc - (ab + bc + ca) \\  &= a^2 + bc - ab - ac \\  &= (a^2 - ab) - (ac - bc) \\  &= a(a-b) - c(a-b) \\  &= (a-b)(a-c)  \end{aligned}  $	

Tương tự:

$$b^2 + 2ac = (b-a)(b-c)$$

$$c^2 + 2ab = (c-a)(c-b)$$

0,25

0,25

Do đó:

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\
 &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{a^2(b-c) - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{(b-c)(a^2 - ab - ac + bc)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

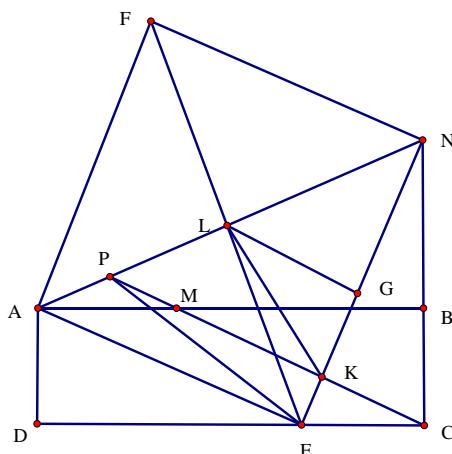
0,25

Vậy đẳng thức được chứng minh.

			0,25
			0,25
<b>4.1 (2,0 điểm)</b>			

Cho hình chữ nhật ABCD ( $AB > 2BC$ ), trên cạnh AB lấy điểm M sao cho  $BC = AM$ , trên tia CB lấy điểm N sao cho  $CN = BM$ , CM cắt AN tại P, trên cạnh CD lấy điểm E sao cho  $CE = CB$ .

- 5) Chứng minh tứ giác AMCE là hình bình hành.
- 6) Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.
- 7) Đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt đường thẳng qua N vuông góc với NE tại điểm F. Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông.
- 8) Gọi K là giao điểm của EN với PC, L là giao điểm của EF với AN. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP.



	Vẽ hình đúng, ghi GT – KL đầy đủ.	
--	-----------------------------------	--

		0,5
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Chứng minh tứ giác AMCE là hình bình hành</li> </ul> <p>+ Ta có ABCD là hình chữ nhật (1) nên <math>AB \parallel CD</math>. Mà <math>M \in AB; E \in CD \Rightarrow AM \parallel CE</math></p> <p>+ Lại có: <math>AM = BC; CE = BC \Rightarrow AM = CE</math></p> <p>Xét tứ giác AMCE có: <math>AM \parallel CE; AM = CE</math></p> <p>Do đó tứ giác AMCE là hình bình hành.</p>	0,5
	<b>4.2 (1,5 điểm)</b>	0,5
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.</li> </ul> <p>+ Từ (1) <math>\Rightarrow AB = CD</math> ;</p> <p>Mà <math>AB = AM + BM; CD = CE + DE; AM = CE</math> (cmt) <math>\Rightarrow BM = DE</math></p> <p>Mặt khác <math>CN = BM</math> (gt) <math>\Rightarrow DE = CN (= BM)</math></p>	0,25

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.</li> </ul> <p>+ Từ (1) <math>\Rightarrow AB = CD</math> ;</p> <p>Mà <math>AB = AM + BM; CD = CE + DE; AM = CE</math> (cmt) <math>\Rightarrow BM = DE</math></p> <p>Mặt khác <math>CN = BM</math> (gt) <math>\Rightarrow DE = CN (= BM)</math></p>	0,25
--	--	------

	<p>+ Từ (1) <math>\Rightarrow AD = BC</math>, mà <math>CE = BC \Rightarrow AD = CE (= BC)</math></p> <p>+ Xét <math>\Delta ADE</math> và <math>\Delta ECN</math> có:</p> $AD = CE \text{ (cmt)}$ $\angle ADE = \angle ECN \left(= 90^\circ\right)$ $DE = CN \text{ (cmt)}$ $\Rightarrow \Delta ADE \cong \Delta ECN \text{ (c.g.c)}$	0,25
		0,5
	<b>4.3 (1,5 điểm)</b>	
	Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông	
	<p>+ Có <math>\Delta ADE \cong \Delta ECN \text{ (cmt)} \Rightarrow \begin{cases} AE = NE \\ \angle AED = \angle CNE \end{cases}</math></p> <p>Mà <math>\Delta CNE</math> vuông tại C <math>\Rightarrow \angle ENC + \angle NEC = 90^\circ \Rightarrow \angle AED + \angle NEC = 90^\circ \Rightarrow \angle AEN = 90^\circ</math></p>	0,25

	+ Xét tứ giác AENF có:  $AEN = 90^\circ$ (cmt) $FAE = 90^\circ$ ( $AF \perp AE$ ) $FNE = 90^\circ$ ( $FN \perp NE$ )  Suy ra AENF là hình chữ nhật	0,25    0,5
	Lại có $AE = NE$ (cmt)	0,25
	Nên AENF là hình vuông.	0,25
<b>4.4 (1,5 điểm)</b>		
	Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP	

	+ Có AENF là hình vuông và AN cắt EF tại L $\Rightarrow \Delta NLE$ vuông cân tại L.	
	Hạ $LG \perp NE$ ( $G \in NE$ ) $\Rightarrow G$ là trung điểm của NE và $LG = \frac{1}{2}NE$ (*)	0,5
	+ AMCE là hình bình hành (cmt) $\Rightarrow AE // CM$ , mà $AE \perp EN \Rightarrow CM \perp EN$	
	hay $PK \perp KN \Rightarrow \Delta PKN$ vuông cân tại K (do $PNE = 45^\circ$ ) $\Rightarrow PK = NK$ (**)	0,5
	+ $\Delta NKL$ có $LG \perp NK \Rightarrow S_{NKL} = \frac{1}{2}LG.NK$	
	$\Delta NPE$ có $PK \perp NE \Rightarrow S_{NPE} = \frac{1}{2}PK.NE$	0,25
	Do đó kết hợp với (*) và (**) $\Rightarrow S_{NKL} = \frac{1}{2}S_{NPE} \Rightarrow \frac{S_{NKL}}{S_{NPE}} = \frac{1}{2}$ .	

		0,25
<b>5.1 bảng A (2,0 điểm)</b>		
	Theo bài ra : $2n = a^2 + b^2$ với $a, b \in N$ .	0,25
	Từ đây suy ra $a, b$ cùng tính chẵn lẻ.	0,25
	Do đó $a+b$ và $a-b$ là các số chẵn.	0,25
	Đặt $\begin{cases} a+b = 2m \\ a-b = 2k \end{cases}$ trong đó $m, k \in Z$ .	0,25
	Suy ra: $a = m+k, b = m-k$	0,5
	Khi đó $2n = (m+k)^2 + (m-k)^2 \Rightarrow n = m^2 + k^2$ .	0,5
	Vậy có đpcm.	0,5

**5.2 bảng A (2,0 điểm)**

3) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của  $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$ .

$$\begin{aligned} *) A &= \frac{6x-2}{3x^2+1} \\ &= \frac{6x-2}{3x^2+1} - 1 + 1 \\ &= \frac{6x-2-3x^2-1}{3x^2+1} + 1 \\ &= 1 - \frac{3(x-1)^2}{3x^2+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \leq 1 \text{ với } \forall x$$

0,25

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 1$ .

Vậy giá trị lớn nhất của A là 1 khi  $x = 1$ .

0,25

0,25

0,25

$$\begin{aligned} *) A &= \frac{6x-2}{3x^2+1} \\ &= \frac{6x-2}{3x^2+1} + 3 - 3 \\ &= \frac{6x-2+9x^2+3}{3x^2+1} - 3 \\ &= \frac{(3x+1)^2}{3x^2+1} - 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \geq -3 \text{ với } \forall x$$

0,25

Dấu “=” xảy ra khi  $x = -\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là  $-3$  khi  $x = -\frac{1}{3}$ .

		0,25
		0,25
		0,25

**5.1 bảng B (2,0 điểm)**

$A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2022^3 + 2023^3$ . Tổng A có 2023 số hạng. Ta chia thành

$2023 : 3 = 674$  (nhóm), dư 1 số như sau:

$$A = (1^3 + 2^3 + 3^3) + (4^3 + 5^3 + 6^3) + \dots + (2020^3 + 2021^3 + 2022^3) + 2023^3$$

		0,25
+ Chứng minh đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ (1)		0,5
+ Nếu $a, b, c$ là 3 số tự nhiên liên tiếp. Giả sử $a = n; b = n+1, c = n+2$ ( $n \in N$ ) khi đó ta có $a + b + c = n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$ chia hết cho 3. Mà $3abc$ cũng chia hết cho 3 nên từ (1) $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \vdots 3$		0,5
+ Áp dụng kết quả trên ta có: $1^3 + 2^3 + 3^3 \vdots 3$ $4^3 + 5^3 + 6^3 \vdots 3$ $\dots$ $2020^3 + 2021^3 + 2022^3 \vdots 3$  $2023 \text{ chia cho } 3 \text{ dư } 1 \text{ nên } 2023^3 \text{ chia cho } 3 \text{ cũng dư } 1$		

	Do đó A chia cho 3 dư 1.	0,5
		0,25
<b>5.2 bảng B (2,0 điểm)</b>		
	Cho $x, y$ là hai số dương thỏa mãn $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^3 y^5 + x^5 y^3$ .	
	+ Trước hết ta CM BĐT: $(a+b)^2 \geq 4ab$ . Dấu “=” xảy ra khi $a = b$ .	0,5
	+ Áp dụng BĐT trên ta có:	

$$\begin{aligned}A &= x^3y^5 + x^5y^3 \\&= x^3y^3(x^2 + y^2) \\&= \frac{1}{2}(xy)^2 \cdot [2xy(x^2 + y^2)] \\&\leq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{(x+y)^2}{4} \right)^2 \cdot \frac{(2xy+x^2+y^2)}{4} \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1^4}{16} \cdot \frac{(x+y)^2}{4} \\&= \frac{1}{128}.\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = \frac{1}{2}$ .

Vậy giá trị lớn nhất của A là  $\frac{1}{128}$  khi  $x = y = \frac{1}{2}$ .

		1,0
		0,25
		0,25

**Chú ý:**

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thi giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----Hết-----

**TRƯỜNG THCS DIỄN HẠNH**

**ĐỀ THI VÒNG I -TOÁN 8 NĂM HỌC 2023-2024**

***Môn Toán 8 Vòng 1 (Thời gian 120 phút)***

**Câu 1 :**(4,0đ)

a) Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số  $\overline{abcd}$  biết rằng nó là một số chính phương; chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

b) Cho 3 số tự nhiên  $a, b, c$ . **Chứng minh rằng nếu**  $a + b + c$  **chia hết cho 6 thì**

$a^3 + b^3 + c^3$  **chia hết cho 6.**

**Câu 2:(6,0đ)** 1. Cho biểu thức:  $A = \frac{2(x^4 + 4x^2 - 12) + x^4 + 11x^2 + 30}{x^2 + 6} - 2x$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để  $A = 6$ .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

2. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức :  $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$ .

**Câu 3(1,0đ)** Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn:  $x^3 + y^3 = 3xy + 1$ .

**Câu 4 (7,0đ)** Cho tam giác ABC nhọn có góc B bằng  $45^\circ$  và vẽ đường cao AH. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, E là điểm đối xứng với H qua M.

a) Chứng minh AHBP là hình vuông.

b) Vẽ đường cao BK của tam giác ABC. Chứng minh HP = 2MK.

c) Gọi D là giao điểm của AH và BK. Qua D và C vẽ các đường thẳng lần lượt song song với BC và AH. Sao cho chúng cắt nhau tại Q. Chứng minh P, K, Q thẳng hàng.

d) Chứng minh các đường thẳng CD, AB và PQ đồng quy.

**Câu 5(2,0đ)** Cần ít nhất bao nhiêu quả cân và một cái cân đĩa để có thể cân được những khối lượng có giá trị là số nguyên từ 1 đến số 13.

..... Hết .....

**ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI THỬ VÒNG I****NĂM HỌC 2022-2023***Môn Toán 8 (Thời gian 120 phút)*

Câu	Đáp án	Điểm
<b>Câu 1 :</b> (4,0đ) a) Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số $\overline{abcd}$ biết rằng nó là một số chẵn phương; chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.  b) Cho 3 số tự nhiên a, b, c. <u>Chứng minh rằng nếu</u> $a + b + c$ <u>chia hết cho 6 thì</u>		

$a^3 + b^3 + c^3$  chia hết cho 6.

1	a)	<p>Lập luận được <math>d = 5</math>,</p> <p>vì <math>\overline{abcd} &lt; 100^2</math> suy ra <math>\overline{abcd} = \overline{x5}^2</math></p> <p>Vì <math>\overline{abcd}</math> chia hết cho 9 <math>\Rightarrow \overline{x5}^2</math> chia hết cho 9 <math>\Rightarrow \overline{x5}</math> chia hết cho 3</p> <p>Suy ra <math>x + 5 \in \{6; 9; 12\} \Rightarrow x \in \{1; 4; 7\}</math>.</p> <p>+ Nếu <math>x = 1</math> thì <math>\overline{abcd} = \overline{15}^2 = 225</math> vô lý</p> <p>+ Nếu <math>x = 4</math> thì <math>\overline{abcd} = \overline{45}^2 = 2025</math> thoả mãn</p> <p>Vậy số tự nhiên có bốn chữ số cần tìm là 2025 và 5625.</p>	0,5đ
---	----	---	------

	b)	$a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c) = (a - 1)a(a + 1) + (b - 1)b(b + 1) + (c - 1)c(c + 1)$  Mà $(a - 1)a(a + 1)$ ; $(b - 1)b(b + 1)$ ; $(c - 1)c(c + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6  $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c) \vdots 6$ mà $a + b + c \vdots 6$ nên $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 6$	1,0đ 0,5đ 0,5đ
--	----	---	----------------------

**Câu 2:** (6,0đ) 1. Cho biểu thức:  $A = \frac{2(x^4 + 4x^2 - 12) + x^4 + 11x^2 + 30}{x^2 + 6} - 2x$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để  $A = 6$ .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

2. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức:  $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$ .

2.1	a)	ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$	0,25đ
-----	----	--------------------------	-------

	$A = \frac{2(x^4 + 4x^2 - 12) + x^4 + 11x^2 + 30}{x^2 + 6} - 2x$ $A = \frac{3x^4 + 19x^2 + 6 - 2x^3 - 12x}{x^2 + 6}$ $A = \frac{(x^2 + 6)(3x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 6}$ $A = 3x^2 - 2x + 1$	0,25đ
		0,25đ
		0,5đ
		0,25đ
b)	$A = 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 6$ $\Leftrightarrow (x+1)(3x-5) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$ <p>Đối chiếu điều kiện ta có <math>x \in \left\{-1; \frac{5}{3}\right\}</math> thì <math>A = 6</math>.</p>	0,25đ
		0,5đ
		0,5đ

		0,25đ
c)	$A = 3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$ <p>Vậy GTNN của A bằng <math>\frac{2}{3}</math> khi và chỉ khi <math>x = 1/3</math></p>	1,0đ
2.2	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$ $\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - ab - ac - bc = a^2 - ab - ac + bc = (a - b)(a - c)$ <p>Tương tự: <math>b^2 + 2ac = (b - a)(b - c)</math>, <math>c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)</math></p> $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$ $P = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ

$P = \frac{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}{(a - b)(b - c)(a - c)}$		
$P = \frac{a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + c^2(a - b)}{(a - b)(b - c)(a - c)}$	0,25d	
$P = \frac{ab(a - b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a - b)}{(a - b)(b - c)(a - c)}$		
$P = \frac{ab(a - b) - c(a - b)(a + b) + c^2(a - b)}{(a - b)(b - c)(a - c)}$		
$P = \frac{(a - b)(ab - ca - cb + c^2)}{(a - b)(b - c)(a - c)}$	0,25d	
$P = \frac{(a - b)(b - c)(a - c)}{(a - b)(b - c)(a - c)} = 1$		0,25d

		0,25đ
		0,25đ
Bài 3(1đ) Tìm cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x^3 + y^3 = 3xy + 1$		
3	$x^3 + y^3 = 3xy + 1 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xy = 1$ $\Leftrightarrow (x+y)^3 + 1 - 3xy(x+y+1) = 2$ $\Leftrightarrow (x+y+1)[(x+y)^2 - (x+y) + 1] - 3xy(x+y+1) = 2$ $\Leftrightarrow (x+y+1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y) = 2$ <p>Vì <math>2(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y) = (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in R</math></p>	0,25đ

	$\Rightarrow x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y \geq 0$ . Do đó ta xét hai trường hợp sau :	0,25đ
	<b>TH1 :</b> $\begin{cases} x+y+1=1 \\ x^2+y^2+1-xy-x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 3x^2=1 \end{cases} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$	
	<b>TH2 :</b> $\begin{cases} x+y+1=2 \\ x^2+y^2+1-xy-x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 3x^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x=0 \text{ hoặc } x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$	0,25đ
	hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$	
Vậy: $(x; y) \in \{(1; 0); (0; 1)\}$		0,25đ
Bài 4(7 đ) Cho tam giác ABC nhọn có góc B bằng $45^\circ$ và vẽ đường cao AH Gọi M là		

trung điểm của cạnh AB, E là điểm đối xứng với H qua M.

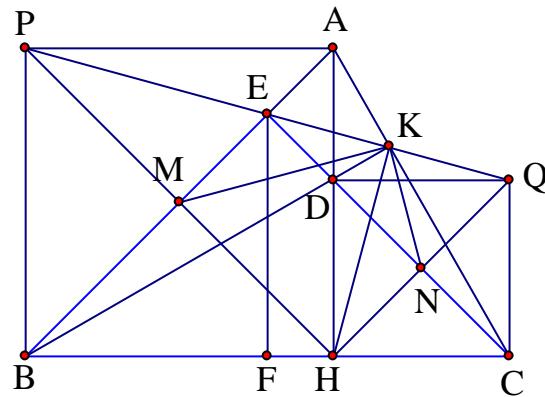
a) Chứng minh AHBP là hình vuông

b) Vẽ đường cao BK của tam giác ABC. Chứng minh  $HP = 2MK$ .

c) Gọi D là giao điểm của AH và BK. Qua D và C vẽ các đường thẳng lần lượt song song với BC và AH Sao cho chúng cắt nhau tại Q. Chứng minh P, K, Q thẳng hàng

d) Chứng minh các đường thẳng CD AB và PQ đồng quy.

4 Hình vẽ : 0,5 đ



a)	<p>Vì M là trung điểm của AB và PH nên tứ giác ABCD là hình bình hành  mà <math>AHB = 90^\circ</math> nên AHBP là hình chữ nhật,  vì <math>ABH = 45^\circ</math> nên tam giác ABH vuông cân tại H <math>\Rightarrow HA = HB</math>.  Hình chữ nhật APBH có <math>HA = HB</math> nên là hình vuông.</p>	0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ
b)	<p>Sử dụng tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông ABK suy ra  <math>AB = 2MK</math>.  dùng kết quả câu a) suy ra <math>HP = AB</math> do đó <math>HP = 2MK</math>.</p>	0,5đ

		0,5đ
c)	<p>Từ <math>HP = 2MK</math> suy ra tam giác HKP vuông tại K. Suy ra <math>HKP = 90^\circ</math></p> <p>Chứng minh tương tự ta có <math>HKQ = 90^\circ \Rightarrow PKQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ</math></p> <p>Suy ra P, K, Q thẳng hàng.</p>	0,5đ 0,5đ 0,5đ
d)	<p>Gọi E là giao điểm của PQ và AB, F là trung điểm của BC.</p> <p>Ta có <math>ME//HQ</math> (vì cùng vuông góc với PH) mà M là trung điểm của PH nên ME là đường trung bình của tam giác HPQ. Suy ra E là trung điểm của PQ suy ra EF là đường trung bình của hình thang BPCQ:</p> $EF = \frac{1}{2}(PB + CQ) = \frac{1}{2}(BH + HC) = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta EBC \text{ vuông tại } E$ $\Rightarrow BEC = 90^\circ.$	0,5đ

	<p>Mặt khác ta có: <math>CD \perp AB</math> do D là trực tâm của tam giác ABC.</p> <p>Như vậy <math>CD \perp AB, CE \perp AB \Rightarrow E, D, C</math> thẳng hàng do đó <math>CD, AB</math> và <math>PQ</math> đồng quy.</p>	0,5đ
		0,5đ
5	<p>Câu 5(2đ) Cần ít nhất bao nhiêu quả cân và một cái cân đĩa để có thể cân được những khối lượng có giá trị là số nguyên từ 1 đến số 13.</p> <p>Với 4 quả cân gồm: 1 quả cân 6kg, 1 quả cân 4kg, 1 quả cân 2kg và 1 quả cân 1kg, ta có thể cân được những khối lượng có giá trị là số nguyên từ 1 đến số 13. Cụ thể như sau:</p>	0,25đ

$$1 = 1$$

$$2 = 2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 4$$

$$5 = 4 + 1$$

$$6 = 6$$

$$7 = 6 + 1$$

$$8 = 6 + 2$$

$$9 = 6 + 2 + 1$$

$$10 = 6 + 4$$

$$11 = 6 + 4 + 1$$

$$12 = 6 + 4 + 2$$

$$13 = 6 + 4 + 2 + 1$$

0,25d

0,25d

		0,5đ
		0,5đ
	<p>Giả sử chỉ dùng tối đa 3 quả cân mà cũng làm được những điều đề bài yêu cầu. Phải có ít nhất 1 quả cân <math>a_1</math> nặng 1kg để cân được khối lượng 1kg.</p> <p>TH1: Quả cân có khối lượng lớn nhất là <math>a_2</math> nặng hơn 4kg. Lúc này không thể cân được khối lượng 2kg, do đó cần có thêm quả cân <math>a_3</math>.</p> <p>+ Nếu quả cân <math>a_3</math> nặng hơn 2kg thì không thể cân được khối lượng 2kg.</p> <p>+ Nếu quả cân <math>a_3</math> nặng 1kg hoặc 2kg thì không thể cân được khối lượng 4kg.</p> <p>Vậy TH1 sai.</p>	0,25

	<p>TH2: Quả cân có khối lượng lớn nhất là <math>a_2</math> nhẹ hơn 5kg. Lúc này kê cả khi có thêm quả là cân <math>a_3</math> đi nữa cũng không thể cân được 13kg</p> <p>Vậy TH2 sai.</p> <p>Vậy số quả cân ít nhất để thực hiện được yêu cầu bài toán</p>	
--	--	--

**PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO**    **ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN**

**HUYỆN VŨ THỦ**

**Môn: TOÁN 8**

**Năm học: 2023-2024**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

**Bài 1** (4,0 điểm).

Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$  với  $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$ .

Rút gọn biểu thức  $A$  và tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x; y$  thỏa mãn đẳng thức

$$x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y).$$

**Bài 2** (4,0 điểm).

a) Giải phương trình:  $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3) = 6$ .

b) Tìm  $m$  để phương trình (ẩn  $x$ ):  $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+m}{x-2} = 2$  có nghiệm duy nhất.

**Bài 3** (4,0 điểm).

a) Biết rằng đa thức  $f(x)$  chia cho đa thức  $g(x) = x - 2$  được dư là 21, chia cho đa thức  $h(x) = x^2 + 2$  được đa thức dư là  $2x - 1$ . Tìm đa thức dư khi chia đa thức  $f(x)$  cho đa thức  $h(x) \cdot g(x)$ .

b) Tìm các số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $y^2 + 2xy = 3x^2 + 5$ .

**Bài 4** (4,0 điểm).

Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $K$  là điểm nằm giữa  $A$  và  $B$ ,  $I$  là điểm nằm giữa  $B$  và  $C$  sao cho  $CI = BK$ . Đường thẳng  $AI$  cắt đường thẳng  $DC$  tại  $M$ .

a) Chứng minh:  $IK // BM$ .

b) Gọi  $N$  là điểm thuộc tia đối của tia  $CB$  sao cho  $CN = CM$ ,  $O$  là giao điểm hai đường chéo của hình vuông  $ABCD$ . Chứng minh  $\Delta BOI$  đồng dạng  $\Delta BND$ .

**Bài 5** (2,0 điểm).

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Lấy điểm  $D$  thuộc cạnh  $BC$  ( $D$  không trùng với  $B$  và  $C$ ).

Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  trên các cạnh  $AB$  và  $AC$ .

a) Chứng minh rằng: Nếu  $AD$  vuông góc  $BC$  thì  $\Delta AFE$  đồng dạng  $\Delta ABC$ .

b) Cho biết  $\frac{2}{AD^2} = \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2}$ . Chứng minh  $AD$  là trung tuyến hoặc  $AD$  là đường phân giác trong của  $\Delta ABC$ .

**Bài 6** (2,0 điểm).

- a) Các số tự nhiên từ 1 đến 10 được xếp xung quanh một đường tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng với cách xếp đó, luôn tồn tại ba số theo thứ tự liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.
- b) Tìm tất cả các số nguyên tố  $a$  và  $b$  sao cho  $a+b; 4ab-4; 4ab-3$  là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

PHÒNG GD VŨ THỦ

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG HUYỆN

...\*\*\*...

Môn: Toán 8 – Năm học 2022-2023

BÀI	NỘI DUNG	ĐIỂM
Bài 1	<p>Cho biểu thức <math>A = \left( \frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}</math> với <math>x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y</math>.</p> <p>Rút gọn biểu thức <math>A</math> và tính giá trị của biểu thức <math>A</math> khi <math>x; y</math> thỏa mãn <math>\frac{x^2 + y^2 + 5}{x^2 + y^2} = 2(x - 2y)</math>.</p>	
	<p>*) Rút gọn biểu thức <math>A</math>:</p> $\begin{aligned} A &= \left( \frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} \\ &= \left[ \frac{x^2}{x(x+y)} - \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y(x+y)} \right] : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} \end{aligned}$	0,25
	$= \frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x+y) - xy^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$	0,25
	$= \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,5
	$= \frac{(x-y)[xy - (x+y)^2]}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,25

	$= \frac{-(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy} \cdot \frac{1}{x^2+xy+y^2}$	0,25
	$= \frac{y-x}{xy}$	0,25
	Vậy với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$ . thì ta có $A = \frac{y-x}{xy}$	0,25
	* ) Tính giá trị của biểu thức $A$ khi $x; y$ thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 + 5 = 2(x-2y)$ $x^2 + y^2 + 5 = 2(x-2y) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (y+2)^2 = 0$ (Do $((x-1)^2 \geq 0; (y+2)^2 \geq 0)$ )	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} (t/m)$	0,25
	Khi đó: $A = \frac{y-x}{xy} = \frac{-2-1}{1(-2)} = \frac{3}{2}$ .	0,25
	Kết luận: Khi $x; y$ thỏa mãn đẳng thức: $x^2 + y^2 + 5 = 2(x-2y)$ thì $A = \frac{3}{2}$	0,25
Bài 2	a) Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3) = 6$ .	

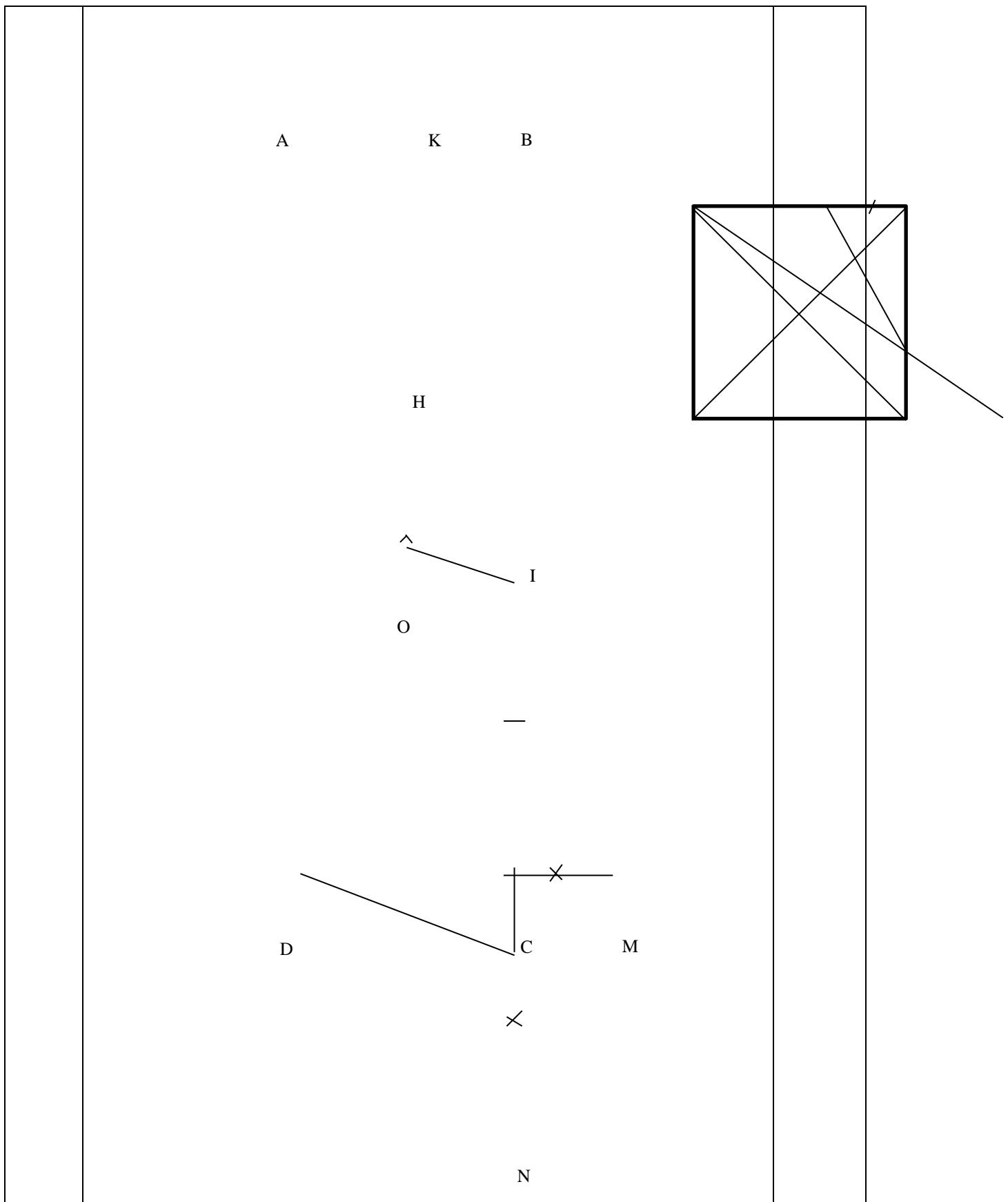
	b) Tìm $m$ để phương trình ( $\hat{a}$ n $x$ ): $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+m}{x-2} = 2$ có nghiệm duy nhất.	
a) 2 điểm	<p>Giải phương trình:</p> $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3) = 6$ $\Leftrightarrow (2x+2)(2x+4)(2x+1)(2x+3) = 24$	0,25
	<p>Đặt <math>2x = y</math>. Phương trình trở thành:</p> $(y+1)(y+2)(y+3)(y+4) = 24$ $\Leftrightarrow (y^2 + 5y + 4)(y^2 + 5y + 6) = 24$ $\Leftrightarrow (y^2 + 5y + 4)^2 + 2(y^2 + 5y + 4) + 1 = 25$ $\Leftrightarrow (y^2 + 5y + 5)^2 = 25$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y + 5 = 5(I) \\ y^2 + 5y + 5 = -5(II) \end{cases}$	0,5
	<p>Giải phương trình (I):</p> $y^2 + 5y + 5 = 5 \Leftrightarrow y(y+5) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases}$	0,5
	Giải phương trình (II)	0,5

	$y^2 + 5y + 5 = -5 \Leftrightarrow y^2 + 5y + 10 = 0$ $\Leftrightarrow \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = 0$  Phương trình vô nghiệm vì $\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ với mọi $y$	
	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$	0,25
b)	ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq 2$	0,25
	$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+m}{x-2} = 2$ $\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2) + (x+1)(x+m)}{(x+1)(x-2)} = 2$	0,25
	$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + x^2 + mx + x + m = 2(x^2 - x - 2)$	0,25
	$\Leftrightarrow mx = -m - 6$	0,25
	* ) Xét $m = 0$ . Phương trình trở thành: $0x = -6$ (vô nghiệm)	0,25
	* ) Xét $m \neq 0$ . Khi đó: $x = \frac{-m-6}{m}$ .	0,5

	<p>Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:</p> $\begin{cases} \frac{-m-6}{m} \neq -1 \\ \frac{-m-6}{m} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-6 \neq 0 \\ -m-6 \neq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2$	
	<p>KL: Vậy với <math>\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases}</math> thì phương trình có nghiệm duy nhất</p>	0,25
Bài 3	<p>a) Biết rằng đa thức <math>f(x)</math> chia cho đa thức <math>g(x) = x - 2</math> được dư là 21, chia cho đa thức <math>h(x) = x^2 + 2</math> được đa thức dư là <math>2x - 1</math>. Tìm đa thức dư khi chia đa thức <math>f(x)</math> cho đa thức <math>h(x) \cdot g(x)</math>.</p> <p>b) Tìm các số nguyên <math>(x; y)</math> thỏa mãn: <math>y^2 + 2xy = 3x^2 + 5</math>.</p>	
a)	<p>Xét phép chia <math>f(x)</math> cho <math>h(x) \cdot g(x)</math> ta có:</p> $\begin{aligned} f(x) &= h(x) \cdot g(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x-2)(x^2+2)q(x) + ax^2 + bx + c \end{aligned}$	0,25
	<p>Trong đó <math>q(x)</math> là đa thức ẩn <math>x</math>; <math>a, b, c</math> là các số xác định. Ta có:</p>	0,25

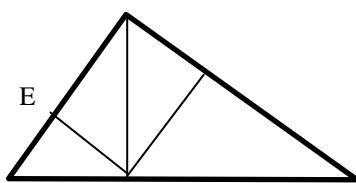
	+) $f(x)$ chia cho $(x - 2)$ dư 21 nên $f(2) = 21$ . Suy ra $4a + 2b + c = 21$	
	+) $\begin{aligned}f(x) &= h(x).g(x).q(x) + ax^2 + bx + c \\f(x) &= (x-2)(x^2+2)q(x) + a(x^2+2) + bx + c - 2a\end{aligned}$	0,25
	$f(x)$ chia cho $x^2 + 2$ dư $2x - 1$ nên $\begin{cases} b = 2 \\ c - 2a = -1 \end{cases}$	0,5
	Khi đó ta có: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 21 \\ b = 2 \\ c - 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + c = 17 \\ b = 2 \\ c - 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$	0,5
	KL: Đa thức dư cần tìm là $3x^2 + 2x + 5$	0,25
b)	$\begin{aligned}y^2 + 2xy &= 3x^2 + 5 \\y^2 + 2xy - 3x^2 &= 5 \\(y-x)(y+3x) &= 5\end{aligned}$	0,5
	Vì $x, y \in Z$ nên $y-x$ và $y+3x$ là các số nguyên và là ước của 5	0,25
	Ta xét các trường hợp:  +) $\begin{cases} y - x = -5 \\ y + 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$	0,25

	$+ \begin{cases} y - x = -1 \\ y + 3x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$	0,25
	$+ \begin{cases} y - x = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
	$+ \begin{cases} y - x = 5 \\ y + 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$	0,25
	Vậy $(x; y) \in \{(1; -4); (-1; -2); (1; 2); (-1; 4)\}$ .	0,25
Bài 4	<p>Cho hình vuông <math>ABCD</math>. Gọi <math>K</math> là điểm nằm giữa <math>A</math> và <math>B</math>, <math>I</math> là điểm nằm giữa <math>B</math> và <math>C</math> sao cho <math>CI = BK</math>. Đường thẳng <math>AI</math> cắt đường thẳng <math>DC</math> tại <math>M</math>.</p> <p>a) Chứng minh: <math>IK // BM</math>.</p> <p>b) Gọi <math>N</math> là điểm thuộc tia đối của tia <math>CB</math> sao cho <math>CN = CM</math>, <math>O</math> là giao điểm hai đường chéo của hình vuông <math>ABCD</math>. Chứng minh <math>\Delta BOI</math> đồng dạng <math>\Delta BND</math>.</p>	



a)	<p>Chứng minh <math>IK // BM</math></p> <p>Vì tứ giác <math>ABC</math> là hình vuông nên</p> <p>Góc <math>A =</math> Góc <math>B =</math> Góc <math>C =</math> Góc <math>D = 90^0</math>; <math>AB = BC = CD = DA</math>.</p>	0,25
	<p>Ta có: <math>IC // AD</math>. Theo định lý Talet ta có: <math>\frac{IC}{AD} = \frac{MI}{MA}</math></p>	0,5
	<p>Mà <math>AD = AB</math>; <math>IC = BK \Rightarrow \frac{KB}{BA} = \frac{IM}{MA}</math>.</p>	1,0
	<p>Theo định lý Talet đảo suy ra <math>IK // BM</math></p>	0,25
b)	<p>Gọi <math>H</math> là giao điểm của <math>AM</math> và <math>BD</math>.</p>	0,25

	+ C/m $OB \cdot BD = AB^2$ (1)	
	+ C/m $\frac{AB}{BI} = \frac{AD}{BI} = \frac{HD}{HB}$ .	0,25
	+ C/m $\frac{DM}{AB} = \frac{DH}{HB} \Rightarrow \frac{AB}{BI} = \frac{DM}{AB} \Rightarrow AB^2 = BI \cdot DM \Rightarrow AB^2 = BI \cdot BN$ (2)	0,75
	Từ (1) và (2) suy ra: $OB \cdot BD = BI \cdot BN$ .	0,25
Bài 5	<p>Cho tam giác <math>ABC</math> vuông tại <math>A</math>. Lấy điểm <math>D</math> thuộc cạnh <math>BC</math> (<math>D</math> không trùng với <math>B</math> và <math>C</math>). Gọi <math>E</math> và <math>F</math> lần lượt là hình chiếu của <math>D</math> trên các cạnh <math>AB</math> và <math>AC</math>.</p> <p>a) Chứng minh rằng: Nếu <math>AD</math> vuông góc <math>BC</math> thì <math>\Delta AFE</math> đồng dạng <math>\Delta ABC</math>.</p> <p>b) Cho biết <math>\frac{2}{AD^2} = \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2}</math>. Chứng minh <math>AD</math> là trung tuyến hoặc <math>AD</math> là đường phân giác trong của <math>\Delta ABC</math>.</p>	
	A ↙ F	



B

D

C

a)	Khi $AD$ vuông góc $BC$ , C/m được $\Delta AED$ đồng dạng $\Delta ADB$ $\Rightarrow AE \cdot AB = AD^2$	0,25
	C/m tương tự ta có: $AF \cdot AC = AD^2$	0,25
	Suy ra: $AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \Delta AFE$ đồng dạng $\Delta ABC$ (c-g-c)	0,25

<p>b) Đặt <math>DE = x; DF = y; AB = c; BC = a; CA = b</math> (<math>x,y,a,b,c &gt; 0</math>).</p> <p>Suy ra <math>AD^2 = x^2 + y^2</math> (1).</p> <p>Với <math>DE // AC, DF // AB</math>, áp dụng định lý Talet ta có:</p> $\frac{x}{b} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow x = \frac{b \cdot BD}{a} \quad (2).$ <p>Tương tự: Ta c/m được: <math>y = \frac{c \cdot CD}{a}</math> (3)</p>	<p>0,25</p>

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG VÒNG 2 CẤP TỈNH**

**HUYỆN YÊN ĐỊNH**

**NĂM HỌC 2023-2024**

**Số báo danh**

.....

**Ngày thi: 21/08/2023**

**Môn thi: Toán. Thời gian: 150 phút**

(Đề thi này gồm 5 câu, 1 trang)

ĐỀ BÀI.**Bài 1. (4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức  $M = \left( \frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Tìm x để  $M > 1$ 2. Cho ba số a, b, c thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{b^2 + bc}{\sqrt{a^4 + a^2}} \cdot \frac{c^2 + ca}{\sqrt{b^4 + b^2}} \cdot \frac{a^2 + ab}{\sqrt{c^4 + c^2}}$$

**Bài 2. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình  $x^4 + 2x^2 + x\sqrt{2x^2 + 4} = 4$ .

2. Giải hệ phương trình  $\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \\ x^2 + y - \sqrt{7x^2 - 3} = 0. \end{cases}$

**Bài 3. (4,0 điểm)**

1. Giải phương trình nghiệm nguyên:  $x^2y - 5x^2 - xy = x - y + 1$ .
2. Cho ba số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 2z^2$ . Chứng minh rằng  $x^2 - y^2$  chia hết cho 48.

**Bài 4. (6,0 điểm)**

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là các tiếp điểm). Kẻ các đường kính AC và BD, đường thẳng MO cắt AB và CD lần lượt tại I và K. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm B đến đường kính AC.

a) Chứng minh rằng  $BH \cdot AC = 2MB \cdot CH$

b) Gọi giao điểm của MC và BH là E. Tính BE theo R và MO = d.

c) Trên tia đối của tia DA lấy điểm F bất kì. Gọi giao điểm của AC và FK là N.

Chứng minh  $\widehat{NIK} = \widehat{AFI}$

**Bài 5. (2,0 điểm)**

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z = xyz$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$

-----HẾT-----

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**Bài 1.1**

(2 điểm)

Cho biểu thức  $M = \left( \frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

$$* M = \left( \frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

0,5

$$= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$$

$$* M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

0,5

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \\ 2 - \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Vậy  $M > 1$  khi  $1 < x < 4$  và  $x \neq 3$

0,5

		0,5
Bài 1.2 (2 điểm)	<p>Ta có :</p> $A = \frac{b^2 + bc}{\sqrt{a^4 + a^2}} \cdot \frac{c^2 + ca}{\sqrt{b^4 + b^2}} \cdot \frac{a^2 + ab}{\sqrt{c^4 + c^2}} = \frac{b(b+c)}{\sqrt{a^2(a^2+1)}} \cdot \frac{c(c+a)}{\sqrt{b^2(b^2+1)}} \cdot \frac{a(a+b)}{\sqrt{c^2(c^2+1)}} = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt{a^2b^2c^2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}$ <p>Mặt khác vì : <math>ab + bc + ca = 1</math> nên <math>a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(a+c)</math></p> <p>Tương tự : <math>b^2 + 1 = (b+a)(b+c)</math> ; <math>c^2 + 1 = (c+a)(c+b)</math></p> <p>Suy ra:</p> $A = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt{a^2b^2c^2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}} = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt{a^2b^2c^2[(a+b)(b+c)(c+a)]^2}} = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{ abc(a+b)(b+c)(c+a) }$	0,5

- Nếu  $abc(a+b)(b+c)(c+a) > 0$  thì  $A = 1$ .

- Nếu  $abc(a+b)(b+c)(c+a) < 0$  thì  $A = -1$ .

0,5

0,5

Bài 2.1

$$x^4 + 2x^2 + x\sqrt{2x^2 + 4} = 4 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) + \sqrt{2} \cdot x\sqrt{x^2 + 2} = 4 \quad (1)$$

(2 điểm)

**Đặt**  $x\sqrt{x^2 + 2} = y$ . **Phương trình (1) trở thành:**

$$y^2 + \sqrt{2} \cdot y = 4 \Leftrightarrow y^2 + \sqrt{2} \cdot y - 4 = 0 \quad (2)$$

0,25

**Giải phương trình (2) được**  $y_1 = \sqrt{2}$ ;  $y_2 = -2\sqrt{2}$

**Với**  $y = \sqrt{2}$  **thì**  $x\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x^2 + 1)^2 = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

**Với**  $y = -2\sqrt{2}$  **thì**  $x\sqrt{x^2 + 2} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2(x^2 + 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x^2 + 1)^2 = 9 \end{cases}$

0,75

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

**Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là**  $S = \left\{ \sqrt{\sqrt{3} - 1}; -\sqrt{2} \right\}$

0,75

		0,25
Bài 2.2  <b>(2 điểm)</b>	<p>Điều kiện <math>x \geq 1, y \in \mathbb{R}</math></p> $y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - \sqrt{x-1}(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y - \sqrt{x-1}) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \sqrt{x-1} \end{cases}.$ <p>Với <math>y = 1</math>, thay vào (2) ta được</p> $x^2 + 1 - \sqrt{7x^2 - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{7x^2 - 3} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 7x^2 - 3$ $\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (do điều kiện của } x\text{)}$ <p>Với <math>y = \sqrt{x-1}</math>, thay vào (2) ta được <math>x^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{7x^2 - 3} = 0</math></p>	0,25

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4) + (\sqrt{x-1} - 1) - (\sqrt{7x^2 - 3} - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0$$

0,5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0 \end{cases}$$

Với  $x=2$  suy ra  $y=1$ .

Ta có  $x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = (x+2)\left(1 - \frac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\right) + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$

$$= (x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

Với  $x \geq 1$  thì  $\sqrt{7x^2-3}-2 \geq 0 \Rightarrow (x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} \geq 0$

Suy ra  $(x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 0$

0,5

Vậy hệ phương trình có các nghiệm  $(1;1), (2;1)$ .

0,25

		0,25
		0,25
Bài 3.1  (2 điểm)	<p>Ta có: <math>x^2y - 5x^2 - xy = x - y + 1 \Leftrightarrow x^2y - xy + y = 5x^2 + x + 1</math>.</p> <p><math>\Leftrightarrow y(x^2 - x + 1) = 5x^2 + x + 1</math> (*)</p> <p>Vì: <math>x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} &gt; 0</math> với mọi <math>x</math> nên từ (*) suy ra.</p> <p><math>y = \frac{5x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5x^2 - 5x + 5 + 6x - 4}{x^2 - x + 1} = 5 + \frac{6x - 4}{x^2 - x + 1}</math>, mà <math>x, y</math> nguyên nên</p>	

$(6x-4):(x^2-x+1)$ , mà  $x^2-x+1 = x(x-1)+1$  là số lẻ nên.

0,5

$$\begin{aligned} (3x-2):(x^2-x+1) &\Rightarrow (3x^2-2x):(x^2-x+1) \\ \Rightarrow (3x^2-2x) - 3(x^2-x+1):(x^2-x+1) &\Rightarrow 7:(x^2-x+1) \Rightarrow x^2-x+1 \in U \quad (7) \end{aligned}$$

Mà  $x^2-x+1 > 0$  nên  $x^2-x+1 \in \{1; 7\} \Rightarrow x \in \{-2; 0; 1; 3\}$ . Tính được  $y$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên  $(x; y)$  là.

0,5

$$(x; y) = (0; 1), (1; 7), (3; 7).$$

0,75

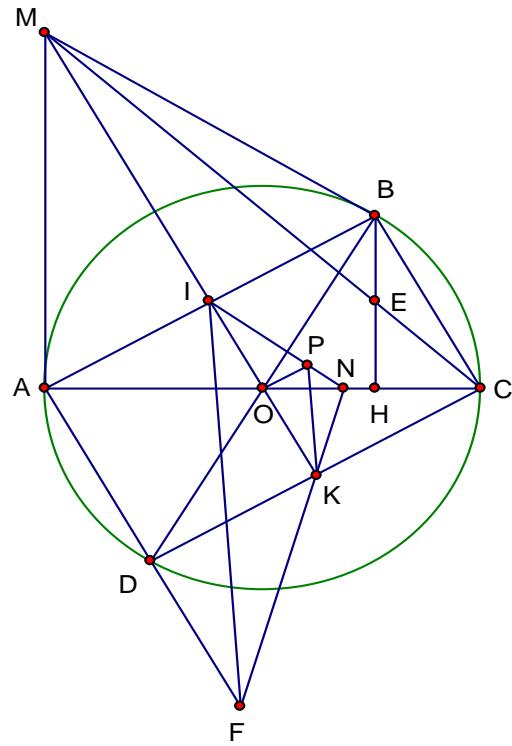
0,25

Bài 3.2	Vì $x^2 + y^2 = 2z^2$ nên $x, y$ cùng tính chẵn lẻ. Suy ra : $x-y, x+y$ cùng chẵn.	
(2 điểm)	<p>Đặt <math>x+y = 2m, x-y = 2n \quad (m, n \in N^*, m &gt; n)</math></p> $2z^2 = (m+n)^2 + (m-n)^2 = 2(m^2 + n^2) \Leftrightarrow z^2 = m^2 + n^2$	
	Nếu $m$ và $n$ cùng không chia hết cho 4 thì $m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2 $\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2. Vô lí.	0,5
	Suy ra $m$ hoặc $n$ chia hết cho 4 $\Rightarrow mn:4$ (1)	
	Nếu $m$ và $n$ cùng không chia hết cho 3 thì $m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2. Vô lí.	0,5
	Suy ra $m$ hoặc $n$ chia hết cho 3 $\Rightarrow mn:3$ (2)	
	Vì $(3, 4)=1$ nên từ (1), (2) $\Rightarrow mn:12$	0,5

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 4mn : 48$$

Vậy  $x^2 - y^2 : 48$

0,5



Bài 4.1

Chứng minh được  $\Delta MAO \cong \Delta MBO$  (cạnh huyền-cạnh góc vuông)  $\Rightarrow MA=MB$  kết hợp

(2 điểm)	<p>OA=OB<math>\Rightarrow</math> MO là trung trực của AB<math>\Rightarrow</math>I là trung điểm AB. Từ đó suy ra OI là đường trung bình của tam giác ABC<math>\Rightarrow</math>IO//BC<math>\Rightarrow</math> MOA = BCH (đồng vị).</p>	0,75
	<p>Từ đó chứng minh được hai tam giác vuông MAO và BHC đồng dạng (g.g)</p> $\Rightarrow \frac{BH}{MA} = \frac{CH}{OA} \quad (1) \Rightarrow BH \cdot OA = MA \cdot CH$	0,75
	<p>Mà <math>OA = \frac{AC}{2}</math>, <math>MA = MB \Rightarrow BH \cdot AC = 2MB \cdot CH</math></p>	0,5
Bài 4.2 (2 điểm)	<p>Vì BH//MA nên áp dụng định lý Talet vào tam giác CMA ta có:</p> $\frac{EH}{MA} = \frac{CH}{CA} \Leftrightarrow \frac{EH}{MA} = \frac{CH}{2OA} \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) <math>\Rightarrow BH = 2EH \Leftrightarrow BE = EH = \frac{BH}{2}</math></p>	0,5

Tam giác ABC có cạnh AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp nên là tam giác vuông, theo hệ thức lượng ta có:

$$BH^2 = AH \cdot CH = (2R - CH) \cdot CH \quad (3)$$

Thay (1) vào (3) và kết hợp  $BH=2EH$  ta được:

$$BH^2 = \left( 2R - \frac{BH \cdot R}{MA} \right) \cdot \frac{BH \cdot R}{MA} \Rightarrow BH = \frac{2R^2 MA}{MA^2 + R^2} = \frac{2R^2 \sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}$$

$$\Rightarrow BE = \frac{R^2 \sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}$$

Bài 4.3  
(2 điểm)

Qua O kẻ đường vuông góc với IK cắt IN tại P.

$$\frac{NP}{PI} = \frac{NO}{OA}$$

Khi đó ta có  $OP//AI$  (cùng vuông góc  $OI$ ) nên

0,5

0,5

		0,5
	<p>Mặt khác <math>OK//AF</math> (cùng vuông góc <math>AB</math>) nên <math>\frac{NK}{KF} = \frac{NO}{OA}</math></p> <p>Do đó suy ra <math>\frac{NP}{PI} = \frac{NK}{KF} \Rightarrow PK // IF \Rightarrow FIK = PKI</math> (*)</p>	0,5
	<p>Mặt khác tam giác <math>PIK</math> cân đỉnh <math>H</math> (<math>OP</math> là trung trực của <math>IK</math>), nên <math>PIK = PKI</math> (**)</p>	0,5
	<p>Từ (*) và (**) <math>\Rightarrow FIK = NIK</math>, mà <math>FIK = AFI</math> (so le trong)</p> <p><math>\Rightarrow NIK = AFI</math> (đpcm).</p>	0,5
Bài 5	b/ Cho $x, y, z$ là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$ .	

(2 điểm)

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$$

Chứng minh rằng:

$$\text{Từ GT suy ra: } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1.$$

$$\text{Nên ta có: } \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right); " = " \Leftrightarrow y = z$$

$$\text{Vậy } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} \right)$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq 3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right); " = " \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{Ta có } (x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \dots = \frac{1}{2} \left[ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \right] \geq 0$$

Nên  $(x+y+x)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$

$$\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow 3 \frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq xyz$$

Vậy  $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$  ; " $=$ "  $\Leftrightarrow x = y = z$

0,75

0,5

0,5

0,25

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8

VIỆT TRÌ

CẤP THÀNH PHỐ, NĂM HỌC 2023-2024

Môn: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề có: 03 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: (16 câu; 8,0 điểm)

*Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và tự luận) trên tờ giấy thi*

**Câu 1.** Giá trị của  $a$  để đa thức  $x^{2023} - 3x - a$  chia hết cho đa thức  $x - 1$  là

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

**Câu 2.** Cho đa thức  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$  và  $g(x) = x^2 + x - 2$  biết rằng  $f(x)$  chia

hết cho  $g(x)$  khi đó  $(a; b)$  bằng

A. (-4; -2).

B. (2; -8).

C. (-2; -8).

D. (-2; 8).

**Câu 3.** Rút gọn biểu thức  $P = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$  ta được

A.  $-\frac{4a}{a^2+4}$  với  $a \neq 0; a \neq 1$ .

B.  $\frac{4a}{a^2+4}$  với  $a \neq 0; a \neq -1$ .

C.  $\frac{4a}{a^2+4}$  với  $a \neq 0; a \neq 1$ .

D.  $\frac{4a}{a^2-4}$  với  $a \neq 0; a \neq 1$ .

**Câu 4.** Gọi  $A$  là tập hợp các giá trị nguyên của  $n$  để biểu thức  $\frac{25n^2 - 97n + 7}{n-4}$  nhận giá

trị nguyên. Số các phần tử dương của  $A$  bằng

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 4.

**Câu 5.** Biết  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{ax - b}{cx + 1}$ . Giá trị của  $a^2 + b^2 - c$  bằng

**A.** 11.

**B.** 3.

**C.** 15.

**D.** 9.

**Câu 6.** Tổng các nghiệm của phương trình  $(x+2)(3-4x) + (x^2 + 4x + 4) = 0$  bằng

**A.**  $-\frac{1}{3}$ .

**B.**  $\frac{1}{3}$ .

**C.**  $-\frac{11}{3}$ .

**D.**  $\frac{11}{3}$ .

**Câu 7.** Giá trị của  $a$  nguyên dương để phương trình  $\frac{x+a}{x-5} + \frac{x+5}{x-a} = 2$  có nghiệm  $x=10$

bằng

**A.** 5.

**B.** 10.

**C.** 15.

**D.** 20.

**Câu 8.** Giá trị của  $m$  để phương trình  $\frac{6x+3}{4} - \frac{5x+3}{6} = \frac{2x-1}{3} + \frac{m}{12}$  có nghiệm là

- A.  $-7$ .      B.  $12$ .      C.  $-12$ .      D.  $7$ .

**Câu 9.** Hình thang  $ABCD$  có  $AB // CD$ ;  $A = 3D$ ;  $B - C = 30^\circ$ . Khi đó tổng  $A + B$  bằng

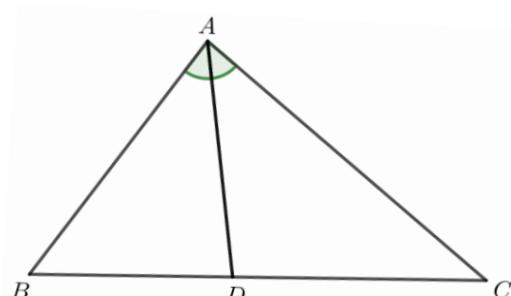
- A.  $180^\circ$ .      B.  $210^\circ$ .      C.  $240^\circ$ .      D.  $270^\circ$ .

**Câu 10.** Cho tứ giác  $ABCD$ , gọi  $E, F, G, H$  theo thứ tự là trung điểm của

$AB, BC, CD, DA$ . Tứ giác  $EFGH$  là hình vuông khi tứ giác  $ABCD$  có điều kiện là

- A.  $BD \perp AC, BD = AC$ .      B.  $BD \perp AC$ .  
 C.  $BD = AC$ .      D.  $AC = BD, AB // CD$ .

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB : AC = 4 : 5$  và  $D$



là chân đường phân giác trong của góc  $A$

(tham khảo hình vẽ bên). Nếu  $BC = 27$

thì  $BD^2 + 2 \cdot CD^2$  bằng

**A.** 389.

**B.** 369.

**C.** 513.

**D.** 594.

**Câu 12.** Cho  $\Delta ABC$ , một đường thẳng song song với  $BC$  cắt các cạnh  $AB$  và  $AC$  theo

thứ tự tại  $D$  và  $E$ . Hệ thức nào sau đây là đúng?

$$\mathbf{A.} \frac{AB}{AD} + \frac{CE}{CA} = 1.$$

$$\mathbf{B.} \frac{AD}{AB} + \frac{CE}{CA} = 1.$$

$$\mathbf{C.} \frac{CA}{AB} + \frac{CE}{CA} = 1. \quad \mathbf{D.}$$

$$\frac{AD}{AB} + \frac{CA}{CE} = 1.$$

**Câu 13.** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy  $AB, CD$ , gọi  $M$  là trung điểm của cạnh bên  $AD$ .

Khi đó  $\frac{S_{MBC}}{S_{ABCD}}$  bằng

A.  $\frac{1}{3}$ .

B.  $\frac{1}{2}$ .

C.  $\frac{2}{3}$ .

D.  $\frac{1}{4}$ .

**Câu 14.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $A = D = 90^\circ, C = 45^\circ, AB = 2cm, CD = 4cm$ .

Diện tích của hình thang vuông  $ABCD$  là

A.  $3cm^2$ .

B.  $8cm^2$ .

C.  $4cm^2$ .

D.  $6cm^2$ .

**Câu 15.** Một ca nô xuôi từ bến  $A$  đến bến  $B$ , hai bến cách nhau  $18km$  hết  $1$  giờ  $30$

phút. Biết vận tốc dòng nước chảy là  $2km/h$  thì vận tốc thực của ca nô (vận tốc khi dòng

nước yên lặng) là

A.  $12km/h$ .

B.  $10km/h$ .

C.  $8km/h$ .

D.

$18km/h$ .

**Câu 16.** Lớp 8D có 34 em đi học phụ đạo ba môn: Toán, Ngữ văn, tiếng Anh. Có 12 em đi học Toán, số em đi học tiếng Anh nhiều gấp 3 lần số em đi học Ngữ văn. Trong đó có 5 em vừa đi học tiếng Anh vừa đi học Toán, 4 em vừa đi học tiếng Anh vừa đi học Ngữ văn, 3 em vừa đi học Toán vừa đi học Ngữ văn, 2 em đi học cả ba môn nói trên. Số em đi học tiếng Anh bằng

- A. 24 .      B. 8 .      C. 16 .      D. 27 .

## II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

### Câu 1: (3,0 điểm)

- a) Chứng minh với mọi số nguyên  $n$  thì  $A = n(n+1)(2n+1) : 6$ .
- b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$ .

c) Chứng minh tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

**Câu 2: (4,0 điểm)**

a) Đa thức  $f(x)$  khi chia cho  $x+1$  dư 4, khi chia cho  $x^2 + 1$  dư  $2x+3$ . Tìm phần dư khi chia  $f(x)$  cho  $(x+1)(x^2 + 1)$ .

b) Cho  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$  và  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}.$$

c) Giải phương trình:  $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2$ .

**Câu 3: (4,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  nhọn, các đường cao  $AA', BB', CC'$ ;  $H$  là trực tâm.

a) Tính tổng  $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$ .

b) Gọi  $AI$  là phân giác của  $\Delta ABC$ ;  $IM, IN$  thứ tự là phân giác của  $AIC$  và  $AIB$ .

Chứng minh rằng:  $AN.BI.CM = BN.IC.AM$ .

c) Tìm điều kiện của  $\Delta ABC$  để biểu thức  $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Câu 4: (1,0 điểm)**

Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $4yx + 4yz + 3xz = 3xyz$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x} \geq 24$ .

.....Hết.....

Họ và tên thí sinh: .....SBD: .....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

VIỆT TRÌ

LỚP 8 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: Toán

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC***( Hướng dẫn chấm có 06 trang )***A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: ( 16 câu; 8,0 điểm; mỗi câu đúng 0,5 điểm)**

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	D	9	C
2	A	10	A
3	C	11	D

4	C	12	B
5	A	13	B
6	A	14	D
7	C	15	B
8	D	16	A

## II. PHẦN TỰ LUẬN

**Câu 1: (3,0 điểm)**

- a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì  $A = n(n+1)(2n+1):6$ .
- b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$ .
- c) Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Ý	Đáp án	Điểm
a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) : 6$ .		
a) (1,0 đ)	$A = n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(2n-2+3)$ $A = 2(n-1)n(n+1) + 3n(n+1)$ $\left. \begin{array}{l} 2(n-1)n(n+1) : 6 \\ 3n(n+1) : 6 \end{array} \right\} \Rightarrow A : 6$	0,25 0,25 0,25
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$ .	$6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$ $\Leftrightarrow 6x^2 + 8x - 3xy - 4y + 9x + 12 = 7$ $\Leftrightarrow 2x(3x+4) - y(3x+4) + 3(3x+4) = 7$ $\Leftrightarrow (3x+4)(2x-y+3) = 7$	0,25

Ý	Đáp án	Điểm																				
		0,25																				
	Lập bảng:																					
b)	<table border="1"> <tr> <td><math>3x + 4</math></td><td>7</td><td>1</td><td>-1</td><td>-7</td></tr> <tr> <td><math>2x - y + 3</math></td><td>1</td><td>7</td><td>-7</td><td>-1</td></tr> <tr> <td><math>x</math></td><td>1</td><td>-1</td><td><math>-\frac{5}{3}</math></td><td><math>\frac{-11}{3}</math></td></tr> <tr> <td><math>y</math></td><td>4</td><td>-6</td><td><math>\frac{20}{3}</math></td><td><math>\frac{-10}{3}</math></td></tr> </table>	$3x + 4$	7	1	-1	-7	$2x - y + 3$	1	7	-7	-1	$x$	1	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{-11}{3}$	$y$	4	-6	$\frac{20}{3}$	$\frac{-10}{3}$	0,25
$3x + 4$	7	1	-1	-7																		
$2x - y + 3$	1	7	-7	-1																		
$x$	1	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{-11}{3}$																		
$y$	4	-6	$\frac{20}{3}$	$\frac{-10}{3}$																		
(1,0 đ)	Vì $x, y \in Z$ nên phương trình có nghiệm $(x, y) \in \{(-1; -6), (1; 4)\}$ .	0,25																				
	Vậy phương trình có nghiệm $(x, y) \in \{(-1; -6), (1; 4)\}$ .	0,25																				
c)	Tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.																					

Ý	Đáp án	Điểm
	Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là: $n, n+1, n+2, n+3$ ( $n \in N$ ).	0,25
	Ta có	
	$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= n.(n+3)(n+1)(n+2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 (*) \end{aligned}$	0,25
c) (1,0 đ)	Đặt $n^2 + 3n = t$ ( $t \in N$ ) thì $(*) = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$ . $\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$ .	0,25
	Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 \in N$ . Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.	0,25

**Câu 2: (4,0 điểm)**

- a) Đa thức  $f(x)$  khi chia cho  $x+1$  dư 4, khi chia cho  $x^2 + 1$  dư  $2x+3$ . Tìm phần dư khi chia  $f(x)$  cho  $(x+1)(x^2 + 1)$ .

b) Cho  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$  và  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$$

c) Giải phương trình:  $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2$ .

Ý	Đáp án	Điểm
a) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho $x^2+1$ dư $2x+3$ . Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$ .		
Ta có: $f(x)$ chia $x+1$ dư 4 $\Rightarrow f(-1) = 4$ .	0,25	
Do bậc của đa thức chia là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$ .	0,25	
Theo định nghĩa phép chia còn dư, ta có :	0,25	

Ý	Đáp án	Điểm
	$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + a - a + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).q(x) + a(x^2 + 1) + bx + c - a \\ &= [(x+1).q(x) + a].(x^2+1) + bx + c - a \end{aligned}$	
	Mà $f(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $2x + 3$ . Do đó, ta có:	
a) (1,5 đ)	$\begin{cases} b = 2 \\ c - a = 3 \\ a - b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c - a = 3 \\ a + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = \frac{9}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$	0,5
	Vậy đa thức dư cần tìm có dạng: $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$	0,25
b)	Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ . Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$	
	b) Ta có: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \Leftrightarrow bcx + acy + abz = 0$	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
	$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2 \Leftrightarrow \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right)^2 = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot \left( \frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz} \right) = 4$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot \frac{abz + acy + bcx}{xyz} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot 0 = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 4$	0,5
	Vậy $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 4$	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
b) (1,5 đ)		
c) Giải phương trình: $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9)=140x^2$ .		
$(x-2)(x-3)(x+6)(x+9)=140x^2 \Leftrightarrow (x^2 + x - 18)(x^2 + 3x - 18) = 140x^2$ (1)		
$x=0$ không là nghiệm PT(1) chia 2 vế PT(1) cho $x^2 \neq 0$	0,25	
$(x^2 + 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) = 140x^2 \Rightarrow \left(x + 7 - \frac{18}{x}\right)\left(x + 3 - \frac{18}{x}\right) = 140$		
Đặt $x - \frac{18}{x} + 5 = y, (y \in R)$ ta có phương trình :	0,25	

Ý	Đáp án	Điểm
	$(y-2)(y+2) = 140 \Leftrightarrow y^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -12 \end{cases}$	
	*Với $y = 12$ ta có phương trình  $x - \frac{18}{x} + 5 = 12 \Rightarrow x^2 - 7x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 2x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)(x-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 9 \end{cases}$	0,25
	*Với $y = -12$ ta có phương trình  $x - \frac{18}{x} + 5 = -12 \Rightarrow x^2 + 17x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 18x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+18) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -18 \end{cases}$	
c) (1,0 đ)	Vậy $S = \{-18; -2; 1; 9\}$	0,25

Câu 3:(4,0điểm)

Cho tam giác  $ABC$  nhọn, các đường cao  $AA', BB', CC'$ ;  $H$  là trực tâm.

a) Tính tổng  $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$ .

b) Gọi  $AI$  là phân giác của  $\Delta ABC$ ;  $IM, IN$  thứ tự là phân giác của  $AIC$  và  $AIB$ .

Chứng minh rằng:  $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$ .

c) Tìm điều kiện của  $\Delta ABC$  để biểu thức  $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Ý	Đáp án	Điểm
		0,5

Ý	Đáp án	Điểm
a) (1,5 đ)	$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'};$ <p>Tương tự: <math>\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}</math></p>	0,5

Y	Đáp án	Điểm
	$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$	0,5
	Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:	
	$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$	0,5
	$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$ $\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$	0,5
b)	$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$	0,5

Y	Đáp án	Điểm
(1,5đ)		
c	<p>Vẽ <math>Cx \perp CC'</math>. Gọi <math>D</math> là điểm đối xứng của <math>A</math> qua <math>Cx</math></p> <p>- Chứng minh được <math>BAD</math> vuông, <math>CD = AC</math>, <math>AD = 2CC'</math></p>	0,25
(1,0đ)	<p>- Xét 3 điểm <math>B</math>, <math>C</math>, <math>D</math> ta có: <math>BD \leq BC + CD</math></p> <p>- <math>\Delta BAD</math> vuông tại <math>A</math> nên: <math>AB^2 + AD^2 = BD^2</math></p>	0,25

Y	Đáp án	Điểm
	$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$	
	$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$	
	$4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$	
	Tương tự: $4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$	
	$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$	0,25
	- Chứng minh được: $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$	

Y	Đáp án	Điểm
	$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$ <p>Đẳng thức xảy ra <math>\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC</math></p>	
	$\Leftrightarrow AB = AC = BC$ <p><math>\Leftrightarrow \Delta ABC</math> đều</p>	0,25

Câu 4: (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $4yx + 4yz + 3xz = 3xyz$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x} \geq 24$ .

Ý	Đáp án	Điểm
	<p>Trước hết áp dụng BĐT <math>(A+B)^2 \geq 4AB</math></p> <p>Đặt <math>P = \frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x}</math>.</p>	0,25
	<p><math>P \geq \frac{8xy}{2x+3y} + \frac{8yz}{2y+z} + \frac{8xz}{z+2x} = \frac{8xyz}{2xz+3yz} + \frac{8xyz}{2xy+xz} + \frac{8xyz}{yz+2xy} = Q</math></p>	0,25
	<p>Áp dụng BĐT với <math>A, B, C</math> dương <math>\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}</math></p> <p><math>Q \geq 8xyz \cdot \frac{9}{2xz+3yz+2xy+xz+yz+2xy} = \frac{72xyz}{4xy+4yz+3xz} = \frac{72xyz}{3xyz} = 24</math></p> <p><math>P \geq Q \geq 24</math></p>	0,25

<b>4.</b> <b>(1,0 đ)</b>	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2z \\ 4xy + 4yz + 3xz = 3xyz \\ 2xz + 3yz = 2xy + xz = yz + 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 5 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$	0,25
-----------------------------	---	------

**HẾT**

**Lưu ý khi chấm bài**

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC.
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.

## TRƯỜNG THCS DIỄN THỊNH

## ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG LỚP 8 NĂM HỌC 2023-2024

**Môn Toán 8 – Thời gian 120 phút**

**Câu 1:** (6 điểm) a) Tìm  $x, y \in Z$  thỏa mãn  $x^2 - xy + x - 3y = 1$ .

b) Tìm x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho  $4x+1:y$  và  $4y+1:x$ .

c) Xác định đa thức  $f(x)$  biết  $f(x)$  chia hết cho  $2x - 1$ , chia cho  $x - 2$  thì dư 6, chia

cho  $2x^2 - 5x + 2$  được thương là  $x + 2$  và còn dư .

**Câu 2** (4 điểm) 1. Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left( \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để  $P = \frac{-1}{2}$ .

**Câu 3** (4 điểm) a) Giải phương trình sau:  $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24$ .

b) Cho  $x > 0, y > 0$  và  $x + y \geq 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2022.$$

**Câu 4 (6 điểm)** 1. Cho hình vuông ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho  $AM = BN = CP = DQ$ .

a) Chứng minh MNPQ hình vuông.

b) Tìm vị trí của M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC ( $AB < AC$ ), M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua

M và song song với phân giác của góc BAC cắt AC, AB lần lượt tại E, F.

Chứng minh  $CE = BF$ .

..... *Hết* .....

**Hướng dẫn chấm**

Câu	Nội dung	Điểm
1	<p>Tìm <math>x, y \in Z</math> thỏa mãn <math>a) x^2 - xy + x - 3y = 1</math></p> <p>Ta có <math>y(x+3) = x^2 + x - 1</math></p> <p>Nếu <math>x = -3</math> thì <math>VT = 0</math> còn <math>VP</math> khác 0.</p> <p>Nên <math>x \neq -3</math> suy ra <math>y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 3} = x - 2 + \frac{5}{x + 3}</math></p> <p><math>x, y</math> là số nguyên nên <math>5 \mid x + 3</math></p> <p><math>x + 3 \in \{1; -1; 5; -5\}</math></p> <p>Vậy các cặp <math>(x; y)</math> thỏa mãn là: <math>(-2; 1), (-4; -11), (2; 1); (-8; -11)</math></p>	0,5 0,5 0,5 0,5
	<p>b) Tìm <math>x, y</math> là các số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho <math>4x + 1 \mid y</math> và <math>4y + 1 \mid x</math></p> <p>Đặt <math>4x + 1 = ky</math> (<math>k</math> là số tự nhiên)</p> <p>Giả sử <math>2 \leq x \leq y</math></p>	0,5

	<p>Ta có <math>ky = 4x + 1 &lt; 4y + y = 5y</math> suy ra <math>k &lt; 5</math> mà <math>k</math> là số lẻ nên <math>k = 1</math>,</p> <p><math>k = 3.</math></p> <p>Với <math>k = 1</math> suy ra <math>y = 4x + 1</math> suy ra</p> $4y + 1 : x \Rightarrow 4(4x + 1) + 1 : x \Rightarrow 5 : x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 21$ <p>Với <math>k = 3</math> suy ra <math>3y = 4x + 1</math></p> <p>Từ <math>4y + 1 : x \Rightarrow 12y + 3 : x \Rightarrow 4(4x + 1) + 3 : x \Rightarrow 7 : x \Rightarrow x = 7, y = \frac{29}{3}</math></p> <p>(Loại)</p> <p>Vậy <math>(x; y)</math> là <math>(5; 21), (21; 5)</math></p>	0,5
	<p>Gọi đa thức dư của phép chia <math>f(x)</math> cho <math>2x^2 - 5x + 2</math> là <math>ax + b</math></p> <p>Thương của phép chia <math>f(x)</math> cho <math>2x - 1</math> là <math>A(x)</math> và thương của phép chia <math>f(x)</math> cho <math>x - 2</math> là <math>B(x)</math>.</p>	0,5

	<p>Ta có <math>f(x) = (2x - 1).A(x)</math> (1)</p> $f(x) = (x - 2).B(x) + 6 \quad (2)$ $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)(x + 2) + ax + b \quad (3)$ <p>xét <math>x = \frac{1}{2}</math> từ (1) và (3) suy ra <math>f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.a + b = 0</math></p> <p>xét <math>x = 2</math> từ (2) và (3) suy ra <math>f(2) = 6 = 2a + b</math></p> <p>Từ đó suy ra <math>a = 4, b = -2</math></p> <p>Vậy <math>f(x) = (2x^2 - 5x + 2)(x + 2) + 4x - 2.</math></p>	0,5 0,5 0,5
Câu 2	<p>Cho biểu thức <math>P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left( \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)</math></p> <p>a) Rút gọn biểu thức P.</p> <p>b) Tìm x để <math>P = \frac{-1}{2}</math>.</p> <p>ĐK: <math>\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}</math></p>	

$\text{a) } P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left( \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$	0,5
$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}$	
$\text{b) } p = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$	
$x = -1$ (KTM), $x = 1/2$ (TM)	1,0
	1,5
	0,5

		0,5
Câu 3	<p>a) Giải phương trình sau: <math>x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24</math>.</p> <p>Ta có <math>(x^2 + x)(x^2 + x - 2) = 24</math></p> <p>Đặt <math>x^2 + x = a</math> ta có <math>a(a - 2) = 24</math> suy ra <math>a^2 - 2a = 24</math> suy ra</p> <p><math>a = 6, a = -4</math>.</p> <p>Với <math>a = 6</math> suy ra <math>x^2 + x - 6 = 0</math> suy ra <math>x = 2, x = -3</math></p> <p>Với <math>x = -4</math> suy ra <math>x^2 + x + 4 = 0</math> vô nghiệm.</p>	1,0
	<p>b) Cho <math>x &gt; 0, y &gt; 0</math> và <math>x + y \geq 3</math>. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</p> $P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2022.$ $P = \left( \frac{28}{x} + 7x \right) + \left( y + \frac{1}{y} \right) + 2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (x + y) + 2013$ <p>Suy ra <math>P \geq 2\sqrt{\frac{28}{x} \cdot 7x} + 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot y} + 0 + 0 + 3 + 2013 \geq 2046</math></p>	1,0

	Suy ra GTNN của $P = 2046$ khi $x = 2, y = 1$ .	1,0
Câu 4		
	<p>a) Chứng minh MNPQ là hình vuông</p> <p>b) <math>S_{MNPQ}</math> nhỏ nhất khi và chỉ khi <math>S_{AMQ}</math> lớn nhất mà <math>S_{AMQ} = \frac{AM \cdot AQ}{2}</math></p> $AM \cdot AQ = AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4}$ <p><math>S_{AMQ}</math> lớn nhất là <math>\frac{AB^2}{8} \Leftrightarrow AM = MB</math></p>	2 0,5 1,0

	<p>Vậy <math>S_{MNPQ}</math> nhỏ nhất khi và chỉ khi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.</p>	0,5
	<p>Gọi AD là phân giác của góc BAC</p> <p>Ta có: <math>AD // FM \Rightarrow \frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow \frac{BF}{BM} = \frac{BA}{BD}</math> (1)</p> <p><math>ME // AD \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD}</math> (2)</p> <p>Theo tính chất đường phân giác <math>\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{DC}</math> (3)</p>	0,5 0,5 0,5 0,5

	Từ (1),(2),(3) suy ra $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM} \Rightarrow BF = CE$ (vì BM = CM)	0,5
--	--	-----

*Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.*

PHÒNG GD&ĐT KIM THÀNH

### ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 8

TRƯỜNG THCS PHÚ THÁI

Năm học 2023-2024

Môn: Toán

*Thời gian làm bài: 120 phút*

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) + 15$ .

2) Cho  $xyz = 1$ . Tính giá trị biểu thức:  $P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$

### Câu 2 (2,0 điểm)

1) Phân tích thành nhân tử:  $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3$

Áp dụng tìm x biết:  $(x^2 + x + 2)^3 - (x + 1)^3 = x^6 + 1$

2) Tìm số dư trong phép chia của đa thức:  $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6) + 2023$  cho

đa thức  $x^2 + 5x + 7$

### Câu 3 (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số tự nhiên.

Chứng minh rằng  $A = 4a(a + b)(a + b + c)(a + c) + b^2c^2$  là một số chính phương.

(Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên)

2) Tìm các số nguyên  $x$  và  $y$  thỏa mãn  $3xy + 2y - 2x + 1 = 0$ .

#### Câu 4 (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho  $AE = AF$ . Vẽ AH vuông góc với BF ( $H$  thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

1)  $AM = BF$ ;

2) Tứ giác AEMD là hình chữ nhật;

$$3) \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} .$$

#### Câu 5 (1,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$  với  $x \neq -1$

---

### HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Đáp án	Điểm	Tổng điểm
1	a) $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) + 15$ $= (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) + 15$ $= [(x^2 + 4x - 1) - 4][(x^2 + 4x - 1) + 4] + 15$ $= (x^2 + 4x - 1)^2 - 16 + 15$	0,25	1,00
		0,25	
		0,25	

	$= (x^2 + 4x - 1)^2 - 1$		
	$= (x^2 + 4x - 2)(x^2 + 4x)$	0,25	
	$= x(x + 4)(x^2 + 4x - 2)$		
	$P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$ $P = \frac{z}{z+xz+xyz} + \frac{zx}{zx+yzx+yzzx} + \frac{1}{1+z+zx}$	0,25	
	Thay $xyz = 1$ và biểu thức P ta có:	0,25	1,00
	$P = \frac{z}{z+xz+1} + \frac{zx}{zx+1+z} + \frac{1}{1+z+zx}$		
	$P = \frac{z+zx+1}{z+zx+1}$	0,25	
	$P = 1$ . Vậy $P = 1$	0,25	

	Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3$	0,25
	Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3 = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - (a+b+c)^3$	
	$= (a+b+c)^3 - 3c(a+b)(a+b+c) - 3ab(a+b) - (a+b+c)^3$	
	$= -3(a+b)[c(a+b+c) + ab]$	0,25
2	$= -3(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] = -3(a+b)(b+c)(a+c)$ (*)	1,00
	Tìm x biết: $(x^2 + x + 2)^3 - (x+1)^3 = x^6 + 1$	
	Ta có: $(x^2)^3 + (x+1)^3 + 1^3 - (x^2 + x + 2)^3 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow -3(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x + 2) = 0$ (Theo (*)).	
	Vì $x^2 + x + 1 = 0$ ; $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.	0,25

	KL: $x = -2$		
	$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) + 2023$ $P = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) + 2023$	0,25	
	Đặt $x^2 + 5x + 7 = t$	0,25	
	Ta có $P = (t - 13)(t - 1) + 2023$		1,00
	$P = t^2 - 14t + 13 + 2023$  $P = t^2 - 14t + 2036$	0,25	
	Do đó khi chia $P = t^2 - 14t + 2036$ cho $t$ ta có số dư là 2036	0,25	
3	1) $A = 4a(a + b)(a + b + c)(a + c) + b^2c^2$  $A = 4(a^2 + ab + ac)(a^2 + ac + ab + bc) + b^2c^2$	0,25	
	Đặt $a^2 + ab + ac = t$	0,25	

	Ta có $A = 4t(t + bc) + b^2c^2$  $A = 4t^2 + 4t.bc + b^2c^2$		1,00
	$A = (2t + bc)^2 = [2(a^2 + ab + ac) + bc]^2 = (2a^2 + 2ab + 2ac + bc)^2$	0,25	
	Vì $a, b, c$ là các số tự nhiên nên $A$ là một số chính phương.	0,25	
	1) $3xy + 2y - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x + 2)y = 2x - 1$  $y = \frac{2x - 1}{3x + 2}, x \neq -\frac{2}{3}$	0,25	
	$y = \frac{2x - 1}{3x + 2} \Rightarrow 3y = \frac{6x - 3}{3x + 2} = \frac{2(3x + 2) - 7}{3x + 2} = 2 - \frac{7}{3x + 2}$	0,25	1,00
	$y$ là số nguyên thì $3y$ cũng là số nguyên. Để $3y$ nhận giá trị là số nguyên khi 7 chia hết cho $3x + 2$	0,25	
	Hay $3x + 2 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$		

	<p><math>x \in \{-1; -3\}</math></p> <p>Với <math>x = -1</math> thì <math>y = 3</math>; với <math>x = -3</math> thì <math>y = 1</math>.</p> <p>Vậy <math>(x; y) \in \{(-1; 3), (-3; 1)\}</math></p>	0,25	
4.1	<p>Xét <math>\triangle ADM</math> và <math>\triangle BAF</math> có:</p> <p><math>ADM = BAF = 90^\circ</math></p> <p><math>AD = AB</math> (cạnh hìn vuông)</p>	0,25	<b>1,00</b>

	$DAM = ABF$ (cùng phụ với góc HAB)		
	Do đó $\Delta ADM = \Delta BAF$ (g.c.g)	0,25	
	Suy ra $AM = BF$ (2 cạnh tương ứng)	0,25	
4.2	Do $\Delta ADM = \Delta BAF$ (g.c.g) chứng minh câu a	0,25	1,00
	Suy ra $DM = AF$ (2 cạnh tương ứng)	0,25	
	Mà $DM // AF$ (Do $AB//CD$ , E thuộc AB, M thuộc CD)	0,25	
	Suy ra $AEMD$ là hình bình hành.	0,25	
	Mặt khác $DAE = 90^\circ$ (Do $DAB = 90^\circ$ và E thuộc AB).	0,25	
4.3	Do đó tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật.		
	Vì $AD//CN \Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN}$ (Hệ quả định lý Ta lét) $\Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$	0,25	1,00

	Vì $MC \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{CM}{AB}$ (Hệ quả định lý Ta lét) $\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{CM}{MN}$	0,25	
	Suy ra $\frac{AD^2}{AM^2} + \frac{AB^2}{AN^2} = \frac{CM^2 + CN^2}{MN^2} = 1$ (Vì $CM^2 + CN^2 = MN^2$ theo Định lý Pytago áp dụng trong tam giác vuông CMN)	0,25	
	Suy ra $\frac{AB^2}{AM^2} + \frac{AB^2}{AN^2} = 1$ (vì $AD = AB$ ) $\Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$	0,25	
	$P = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)^2 - x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}$	0,25	
5	$P = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] + \frac{3}{4}$	0,25	1,00
	$P = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x \neq -1$		

		0,25	
	Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$ khi $\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)	0,25	

Môn: Toán - Lớp: 8

Thời gian làm bài: 120 phút

**Câu 1. (2,0 điểm)**

- a) Phân tích đa thức thành nhân tử:  $x^3 - 19x + 30$
- b) Cho  $x = by + cz$ ;  $y = ax + cz$ ;  $z = ax + by$  và  $x + y + z \neq 0$ ;  $xyz \neq 0$ .

$$\text{Chứng minh: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

**Câu 2. (1,5 điểm)**

- a) Giải phương trình:  $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) - 12 = 0$
- b) Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$ .

**Câu 3. (3,0 điểm)**

- a) Tìm  $a, b$  sao cho  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$  chia hết cho đa thức  $g(x) = x^2 + x - 2$
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2019$
- c) Chứng minh rằng:  $n^3 - 3n^2 - n + 3$  chia hết cho 48 với mọi số nguyên lẻ  $n$ .

**Câu 4. (3,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) , đường cao  $AH$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $H$ . Đường thẳng qua  $D$  song song với  $AB$  cắt  $BC$  và  $AC$  lần lượt ở  $M$  và  $N$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $ABDM$  là hình thoi.
- b) Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $CD$
- c) Gọi  $I$  là trung điểm của  $MC$  , chứng minh rằng  $IN$  vuông góc  $HN$

**Câu 5. (0,5,0 điểm)**

Cho  $a, b$  là các số thực dương khác nhau. Chứng minh  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$

Từ đó chứng minh  $A > 1$  với  $A = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{6054} + \frac{1}{6055}$

----- Hết -----

PHÒNG GD&amp;ĐT TP BẮC GIANG

HƯỚNG DẪN CHẤM

TRƯỜNG THCS SONG MAI

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán - Lớp: 8

Dưới đây chỉ là sơ lược các bước giải và thang điểm. Bài giải của học sinh cần  
 chặt chẽ, hợp logic toán học. Nếu học sinh làm bài theo cách khác hướng dẫn chấm  
 mà đúng thì chấm và cho điểm tối đa của bài đó. Đối với bài hình học nếu học sinh vẽ  
 sai hình hoặc không vẽ hình thì không được tính điểm.

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
1	$\begin{aligned} a) x^3 - 19x + 30 &= x^3 - 4x - 15x - 30 \\ &= x(x^2 - 4) - (15x - 30) \\ &= x(x - 2)(x + 2) - 15(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 - 2x - 15) \end{aligned}$	0,25 0,25

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	$= (x - 2)(x^2 + 3x - 5x - 15)$	0,25
	$= (x - 2)(x + 3)(x - 5)$	0,25
b)	Ta có $x = by + cz$ (1); $y = ax + cz$ (2); $z = ax + by$ (3)  Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có: $x + y = ax + by + 2cx = z + 2cz$  Suy ra: $2cz = x + y - z \Rightarrow c = \frac{x + y - z}{2z} \Rightarrow 1 + c = \frac{x + y + z}{2z}$  $\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{2z}{x+y+z}$	0,25
	Tương tự: $1 + a = \frac{x + y + z}{2x} \Rightarrow \frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$  $1 + b = \frac{x + y + z}{2y} \Rightarrow \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$  Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$	0,25

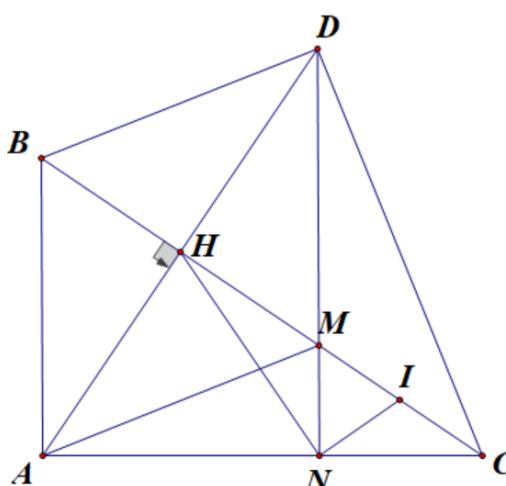
Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
		0,25
2	<p>a) Ta có: <math>2(6x + 7)^2 (3x + 4)(x + 1) - 12 = 0</math></p> $\Leftrightarrow 2(6x + 7)^2 (3x + 4)(x + 1) = 12$ $\Leftrightarrow (6x + 7)^2 (6x + 8)(6x + 6) = 72$ <p>Đặt <math>6x + 7 = t</math>, đổi thức trên trở thành <math>t^2(t + 1)(t - 1) = 72</math></p> $\Leftrightarrow t^2(t^2 - 1) = 72$ <p><b>2</b></p> $\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$ $\Leftrightarrow (t^2 + 8)(t^2 - 9) = 0$ $\Leftrightarrow t^2 = 9 \text{ (Vì } t^2 + 8 \text{ dương)}$ $\Leftrightarrow t = 3 \text{ hoặc } t = -3$ <p>Nếu <math>t = 3</math> suy ra <math>x = -\frac{2}{3}</math></p>	0.25

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm																				
	<p>Nếu <math>t = -3</math>, suy ra <math>x = -\frac{5}{3}</math></p> <p>Vậy <math>x = -\frac{2}{3}</math> hoặc <math>x = -\frac{5}{3}</math></p> <p style="text-align: right;">0.25</p> <p><b>b)</b> Ta có: <math>x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0</math>.</p> <p style="text-align: right;">0.25</p> <p><math>\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1) = -3</math></p> <p>Vì <math>x, y</math> nguyên nên <math>x+y</math> và <math>x+2y-1</math> là các ước của <math>-3</math>.</p> <p>Ta có bảng sau:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x+y</math></td> <td>1</td> <td>-3</td> <td>-1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td><math>x+2y-1</math></td> <td>-3</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>-1</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>4</td> <td>-8</td> <td>-6</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>-3</td> <td>5</td> <td>5</td> <td>-3</td> </tr> </table>	$x+y$	1	-3	-1	3	$x+2y-1$	-3	1	3	-1	x	4	-8	-6	6	y	-3	5	5	-3	
$x+y$	1	-3	-1	3																		
$x+2y-1$	-3	1	3	-1																		
x	4	-8	-6	6																		
y	-3	5	5	-3																		

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(4; 3), (-8; 5), (-6; 5), (4; -3)$ .	0,25
3	<p>a) <math>f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4</math>; <math>g(x) = x^2 + x - 2</math></p> <p>Ta có <math>g(x) = (x - 1)(x + 2)</math></p> <p>Do <math>f(x)</math> chia hết cho đa thức <math>g(x)</math> nên <math>f(x) = q(x).g(x)</math> với <math>q(x)</math> là đa thức</p> $f(x) = (x - 1)(x + 2).q(x)$ <p>Với <math>x = 1</math> ta được <math>f(1) = 0</math> hay <math>a + b + 6 = 0</math></p> <p>Với <math>x = -2</math> ta được <math>f(-2) = 0</math> hay <math>-8a + 4b - 24 = 0 \Leftrightarrow -2a + b - 6 = 0</math></p> <p>Khi đó ta có <math>\begin{cases} a + b = -6 \\ -2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}</math></p> <p>Vậy <math>a = -4, b = -2</math>.</p>	0,5 0,25 0,25
	b)	

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	$A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2019$ $= (2x + y - 1)^2 + (3x - 2)^2 + 2014 \geq 2014$  $\text{Min } A = 2014 \text{ khi } x = \frac{2}{3}, y = \frac{-1}{3}$	0,5
	$0,5$	
	<p>c) Ta có: <math>n^3 - 3n^2 - n + 3 = (n^3 - n) - (3n^2 - 3)</math></p> $= n(n^2 - 1) - 3(n^2 - 1)$ $= n(n-1)(n+1) - 3(n-1)(n+1)$ $= (n-1)(n+1)(n-3)$  <p>Vì <math>n</math> lẻ nên <math>n = 2k + 1</math> (<math>k \in \mathbb{Z}</math>)</p> <p>Do đó <math>(n-1)(n+1)(n-3) = (2k+1-1)(2k+1+1)(2k+1-3)</math></p> $= 2k(2k+2)(2k-2)$ $= 8k(k+1)(k-1)$	0,5

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	<p>Vì <math>k(k+1)(k-1)</math> là tích của ba số nguyên liên tiếp nên  <math>k(k+1)(k-1)</math> chia hết cho 2 và 3.</p> <p>Mà <math>\text{UCLN}(2,3)=1</math> nên <math>k(k+1)(k-1)</math> chia hết cho 6, suy ra  <math>8k(k+1)(k-1)</math> chia hết cho 48.</p> <p>Vậy <math>n^3 - 3n^2 - n + 3</math> chia hết cho 48 với mọi số nguyên lẻ <math>n</math>.</p>	0,25
		0,25

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
		
4	<p>a) Chứng minh được <math>\Delta ABH = \Delta DMH</math></p> <p><math>\Rightarrow AB = MD</math> mà <math>AB // MD</math></p> <p>Nên <math>ABDM</math> là hình bình hành lại có 2 đường chéo vuông góc</p> <p>Suy ra <math>ABDM</math> là hình thoi.</p>	0,5 0,5 0,5
	b) Sử dụng quan hệ từ vuông góc đến song song chứng minh được $DN \perp AC$	0,25
	Chứng minh được $M$ là trực tâm của $\triangle ADC$	0,25

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	<p>Suy ra <math>AM</math> vuông góc với <math>CD</math></p> <p>c) Sử dụng kiến thức trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.</p> <p>Suy ra được <math>INC = ICN = MDH = HNM</math></p> <p>Mà <math>MNI + INC = 90^\circ</math></p> <p><math>\Rightarrow HNM + MNI = 90^\circ \Rightarrow IN \perp HN</math></p>	0,25 0,25 0,25
5	<p>*) Cho <math>a, b</math> là các số thực dương khác nhau. Chứng minh <math>\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &gt; \frac{4}{a+b}</math></p> <p><math>a, b &gt; 0, a \neq b \Rightarrow (a-b)^2 &gt; 0 \Rightarrow (a+b)^2 &gt; 4ab</math></p> $\Rightarrow \frac{a+b}{ab} > \frac{4}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{ab}$ <p>*) Cho <math>A = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{6054} + \frac{1}{6055}</math> Chứng minh rằng <math>A &gt; 1</math></p>	0,25

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	<p>Áp dụng câu a ta có</p> $A = \frac{1}{2019} + \left( \frac{1}{2020} + \frac{1}{6055} \right) + \left( \frac{1}{2021} + \frac{1}{6054} \right) + \dots + \left( \frac{1}{4037} + \frac{1}{4038} \right)$ $A > \frac{1}{2019} + \left( \frac{4}{2020+6055} + \frac{4}{2021+6054} + \dots + \frac{4}{4037+4038} \right)$ $A > \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \dots + \frac{1}{2019} \text{ ( có } 2019 \text{ phân số)}$ $\Rightarrow A > 1$	0,25