

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA**

**Cao Văn Vui**

# **PHƯƠNG PHÁP PHÂN TỬ HỮU HẠN**

**(TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP)**

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA  
TP HỒ CHÍ MINH - 2019**

# MỤC LỤC

<i>LỜI NÓI ĐẦU</i>	5
<b>Chương 1</b> Phần tử thanh chịu biến dạng dọc trực	7
Tóm tắt lý thuyết	7
Bài tập	9
<b>Chương 2</b> Phần tử thanh trong dàn phẳng	71
Tóm tắt lý thuyết	71
Bài tập	76
<b>Chương 3</b> Phần tử dầm chịu uốn	130
Tóm tắt lý thuyết	130
Bài tập	135
<b>Chương 4</b> Phần tử khung	251
Tóm tắt lý thuyết	251
Bài tập	258
<i>TÀI LIỆU THAM KHẢO</i>	350

## LỜI NÓI ĐẦU

**Phương pháp phần tử hữu hạn** là một môn học trong chương trình đào tạo bậc đại học. Đây là môn học trước của môn Phân tử hữu hạn nâng cao trong chương trình cao học. Do đó, cuốn sách này được biên soạn nhằm mục đích giúp học sinh viên đạt được kết quả cao hơn trong học tập. Đồng thời, cuốn sách này là tài liệu giúp học viên cao học ôn lại những kiến thức của môn Phương pháp phần tử hữu hạn trước khi học môn Phương pháp phần tử hữu hạn nâng cao. Ngoài ra, cuốn sách còn nhằm mục đích giúp người đọc nắm kỹ về phương pháp phần tử hữu hạn để có thể sử dụng trong tính toán sản xuất thực tế và nghiên cứu về kết cấu.

Cuốn sách này gồm 4 chương. Chương 1 trình bày phần tử thanh chịu biến dạng dọc trực. Chương 2 trình bày phần tử thanh trong dàn phẳng. Chương 3 là phần tử đàm chịu uốn. Chương 4 là phần tử khung. Các chương này được trình bày theo trình tự chung như sau. Trước hết là phần lý thuyết được trình bày tóm tắt một cách rất ngắn gọn, nhằm mục đích sử dụng trực tiếp vào việc giải bài tập. Tiếp theo là các bài tập được trình bày một cách chi tiết nhằm giúp người học nắm vững kiến thức của môn học.

Đặc biệt, riêng chương 3 (phần tử đàm chịu uốn) và chương 4 (phần tử khung) có kèm theo phần giải trong SAP2000 với số liệu cụ thể. Phần kết quả SAP2000 trình bày trong cuốn sách này sẽ giúp sinh viên bước đầu áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn cho những bài toán đơn giản. Kết quả từ SAP2000 được so sánh với kết quả tay là một cách giúp người học có thể tự kiểm tra kết quả một cách độc lập nhau để hạn chế những sai sót có thể có. Sử dụng SAP2000 cho những bài toán đơn giản cũng là một cách học phần mềm tính toán SAP2000 có hiệu quả, giúp người học có thể thực hiện được những tính toán phức tạp hơn bằng các phần mềm ứng dụng phương pháp phần tử hữu hạn.

Đây là lần xuất bản đầu tiên nên tài liệu không thể tránh khỏi các sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của độc giả để tài liệu được hoàn thiện hơn.

Địa chỉ liên hệ: TS Cao Văn Vui, Bộ môn Sức bền & Kết cấu, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách khoa – Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh, 268 Lý Thường Kiệt, Phường 14, Quận 10, TP Hồ Chí Minh.

Điện thoại: +(84) 968 563 014, Email: cvvui@hcmut.edu.vn.

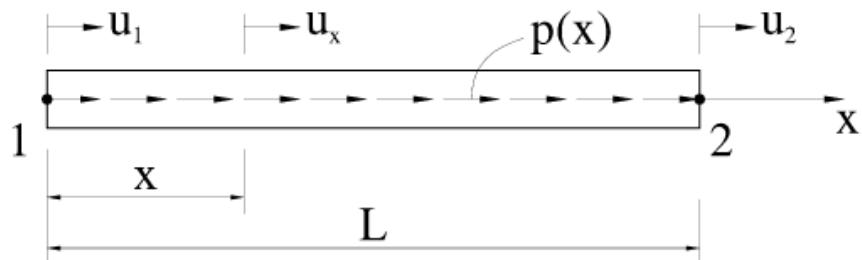
Tác giả

# Chương 1

## PHẦN TỬ THANH CHỊU BIẾN DẠNG DỌC TRỰC

### TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xét phần tử thanh chịu tải phân bố dọc trục  $p(x)$  như Hình 1.1. Thanh có chiều dài  $L$ , diện tích mặt cắt ngang  $A$ , mô đun đàn hồi  $E$ . Thanh bị biến dạng dọc trục dưới tác dụng tải trọng. Thanh có 2 bậc tự do là 2 chuyển vị dọc trục  $u_1$  và  $u_2$  của nút 1 và nút 2. Tại vị trí có tọa độ  $x$ , thanh có chuyển vị dọc trục tương ứng là  $u_x$ .



**Hình 1.1** Phần tử thanh biến dạng dọc trục

Chuyển vị tại tọa độ  $x$  là:

$$u_x = u(x) = a_1 + a_2 x$$

$$\text{Hay: } u_e(x) = [N] \{q\}_e$$

Trong đó:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e \equiv \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\}; \{\sigma\} = \{\sigma_x\}; [\partial] = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right]; [D] = E$$

### Ma trận tính biến dạng:

$$[B] = [\partial][N] = \left[ \frac{d}{dx} \right] [N] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

### Ma trận cứng phần tử:

$$\begin{aligned} [K]_e &= \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \\ &= \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

trong đó,  $A$  là diện tích mặt cắt ngang phần tử.

### Vectơ tải phần tử:

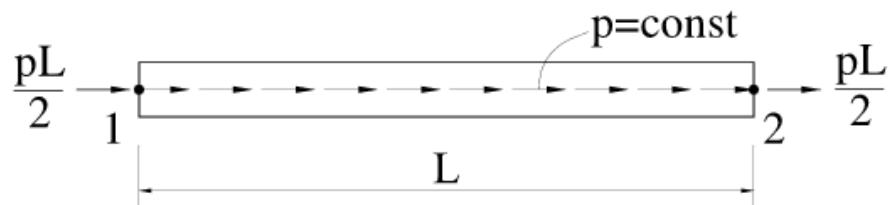
- Do lực phân bố dọc trục  $p(x)$ :

$$\{P\}_e = \int_0^L [N]^T \{p(x)\} dx = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} p(x) dx$$

Trường hợp:

$$p(x) = p = \text{const}$$

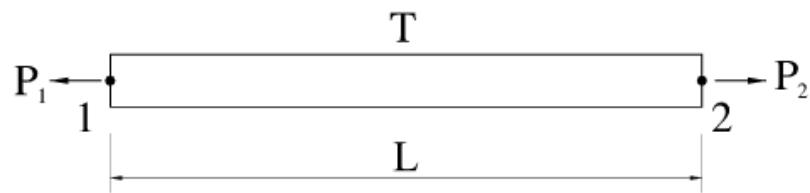
$$\{P\}_e = \frac{p}{L} \int_0^L \begin{bmatrix} L-x \\ x \end{bmatrix} dx = \frac{pL}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



**Hình 1.2** Phần tử có lực phân bố dọc trục

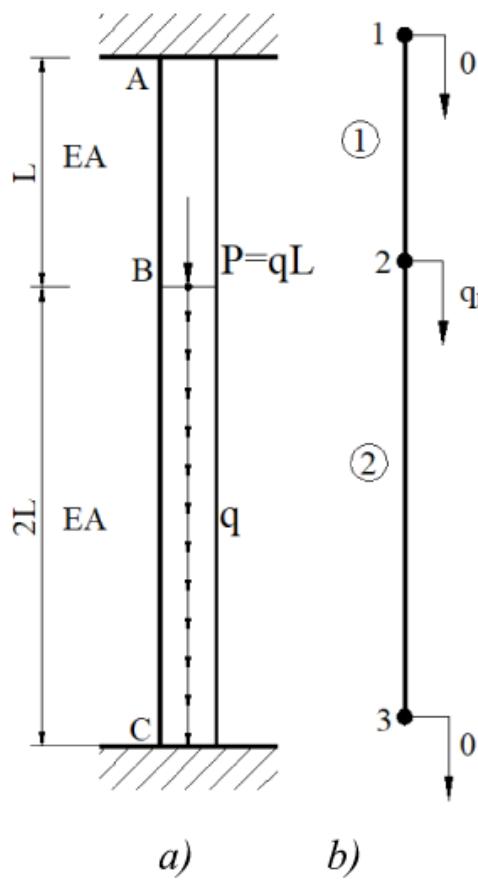
- Do nhiệt độ

$$\{P\}_e = \int_0^L [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV = \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \{\alpha T\} A dx = EA\alpha T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Hình 1.3** Phần tử chịu sự thay đổi nhiệt độ**BÀI TẬP**

**Bài tập 1.1** Cho thanh ABC có liên kết ngầm tại hai điểm A và C, thanh chịu lực tác dụng tại điểm B với độ lớn là  $P = qL$  và chịu lực phân bố đều  $q$  như Hình 1.4a. Thanh có độ cứng không đổi là  $EA$ . Tìm:

- Chuyển vị tại B.
- Phản lực tại A và C.
- Vẽ biểu đồ lực dọc của thanh.

**Hình 1.4.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa**Giải:**

- Chuyển vị tại B

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 4b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  cho các thanh

- Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

- Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

- Tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  để xây dựng ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 + \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \overline{[K]} = \frac{3EA}{2L}$$

- Thiết lập các vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  cho các thanh:

- Phần tử 1:

$$\{P\}_e = \begin{cases} R_a & 0 \\ P = qL & 1 \end{cases}$$

- Phần tử 2:

$$\{P\}_e = \begin{cases} \frac{2qL}{2} & 1 \\ \frac{2qL}{2} + R_C & 0 \end{cases}$$

- Tiến hành ghép nối vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  để xây dựng vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :

$$\{\overline{P}\} = \begin{cases} R_A \\ 2qL \\ qL + R_C \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \{\overline{P}\} = 2qL$$

- Ta có hệ phương trình:

$$[\bar{K}]\{\bar{q}\} = \{\overline{P}\} \Leftrightarrow \frac{3EA}{2L}\{q_1\} = \{2qL\}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được nghiệm  $q_1$  là chuyên vị tại nút B:

$$q_1 = \frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA} \end{cases} = \frac{4}{3} qL$$

- Phần tử 2:

$$N_2 = EA[B].\{q\}_2 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{cases} = -\frac{2}{3} qL$$

- Phản lực tại các điểm A và C. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

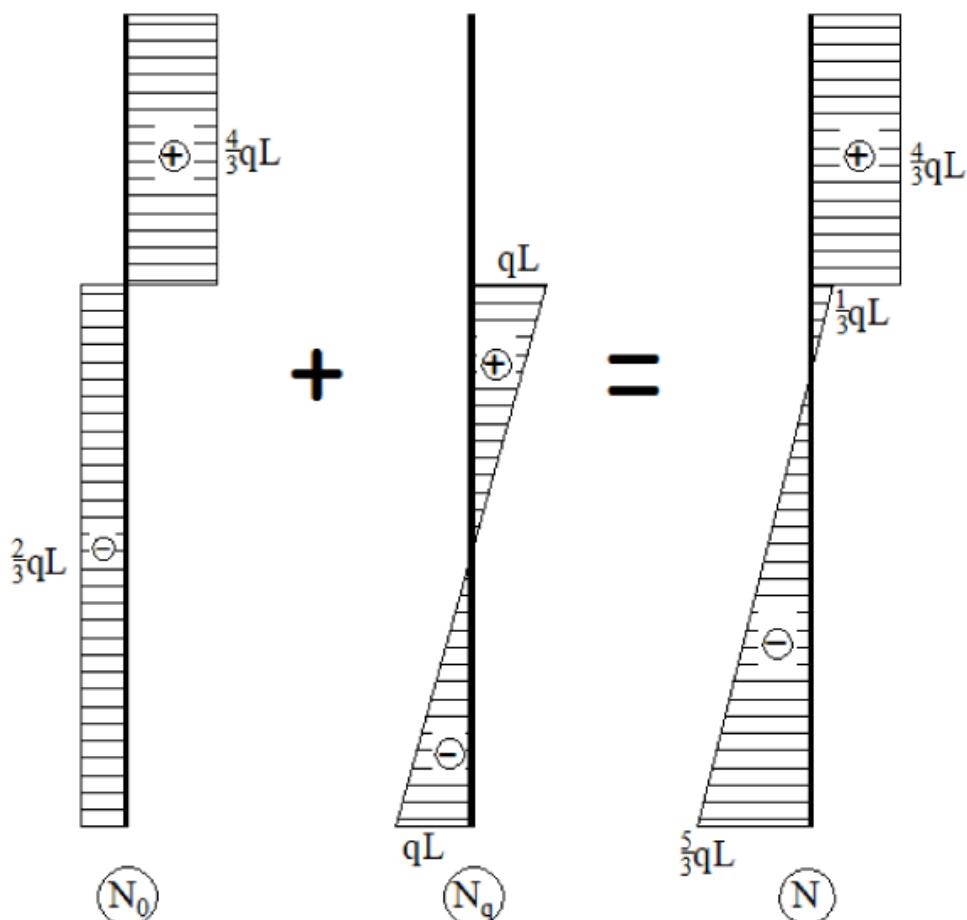
- Phản lực tại điểm A

$$R_A = -N_1 = -\frac{4}{3} qL$$

- Phản lực tại điểm D

$$R_D = -3qL + R_A = -\frac{5}{3}qL$$

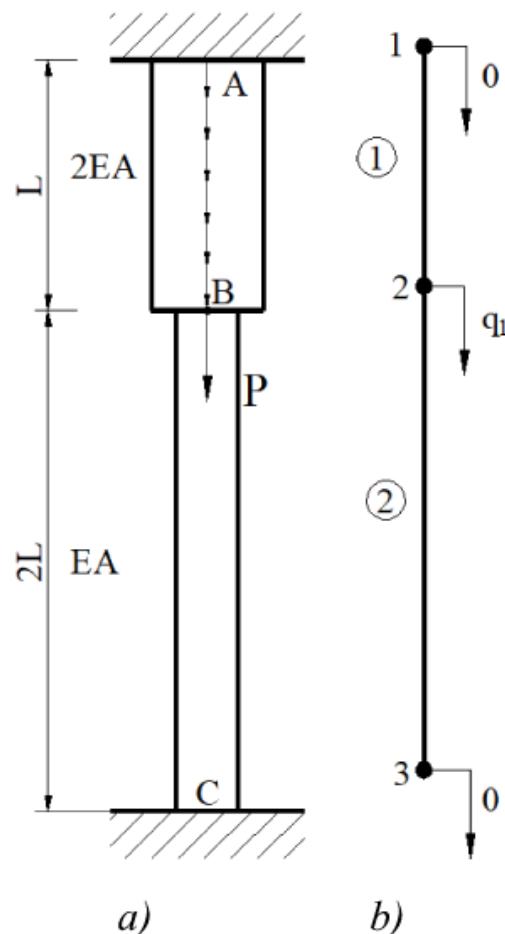
c) *Biểu đồ lực dọc N của thanh*



**Hình 1.5.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.2** Cho thanh ABC có liên kết ngầm tại hai điểm A và C, thanh chịu lực tác dụng tại điểm B với độ lớn là  $P = qL$  và chịu lực phân bố đều  $q$  như Hình 1.6a. Thanh có độ cứng trong đoạn AB là  $2EA$ , đoạn BC là  $EA$ . Tìm:

- Chuyển vị tại B.
- Phản lực tại A và C.
- Vẽ biểu đồ lực dọc của thanh.



**Hình 1.6.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa

**Giải**

**a) Chuyển vị tại điểm B**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.6b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  cho các thanh.

- Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

- Tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  để xây dựng ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 + \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \overline{[K]} = \frac{5EA}{2L}$$

- Thiết lập các vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  cho các thanh:

• Phần tử 1:

$$\{P\}_e = \begin{cases} R_a + \frac{qL}{2} \\ P + \frac{qL}{2} \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{cases} R_a + \frac{qL}{2} \\ \frac{3qL}{2} \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

• Phần tử 2:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ R_c \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

- Tiến hành ghép nối vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  để xây dựng vectơ tải tổng thể  $\overline{\{P\}}$ :

$$\overline{\{P\}} = \begin{cases} R_a + \frac{qL}{2} \\ \frac{3qL}{2} \\ R_c \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \overline{\{P\}} = \frac{3}{2}qL$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\overline{[K]\{q\}} = \overline{\{P\}} \Leftrightarrow \frac{5EA}{2L}\{q_1\} = \left\{ \frac{3}{2}qL \right\}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1$  là chuyển vị tại nút B:

$$q_1 = \frac{3}{5} \frac{qL^2}{EA}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6}{5} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{6}{5} qL$$

- Phần tử 2:

$$N_2 = EA[B].\{q\}_2 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{2L} & \frac{1}{2L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3}{5} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{3}{10} qL$$

- Phản lực tại các điểm A và C. (Đầu - thể hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

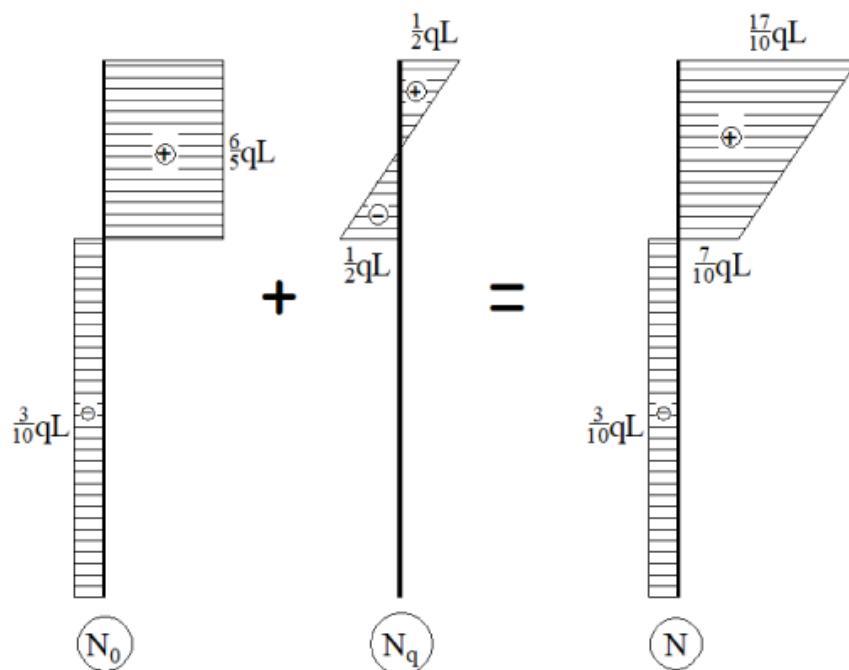
- Phản lực tại điểm A

$$R_A = -N_1 - \frac{qL}{2} = -\frac{6}{5} qL - \frac{1}{2} qL = -\frac{17}{10} qL$$

- Phản lực tại điểm D

$$R_D = -2qL + \frac{17}{10} qL = -\frac{3}{10} qL$$

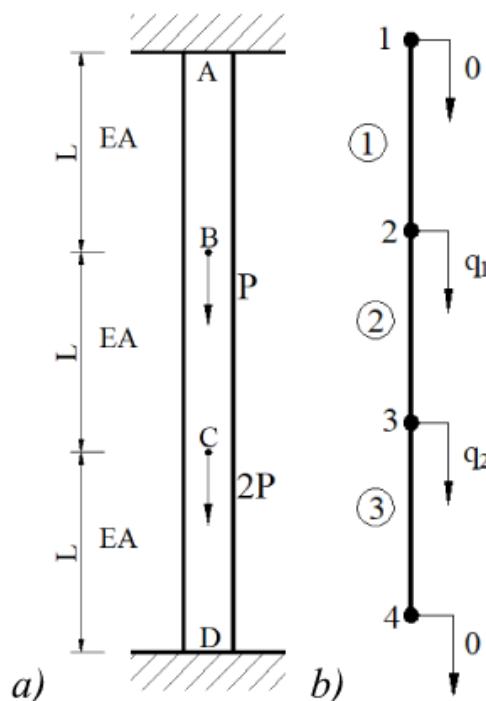
c) Biểu đồ lực dọc  $N$  của thanh



**Hình 1.7.** Biểu đồ lực dọc  $N$  của thanh

**Bài tập 1.3** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại hai điểm A và D như Hình 1.8a, thanh chịu lực tác dụng tại hai điểm B và C với độ lớn lần lượt là  $P$  và  $2P$ . Thanh có độ cứng không đổi là  $EA$ . Tìm:

- a) Chuyển vị tại B và C.
- b) Phản lực tại A và D.
- c) Vẽ biểu đồ lực dọc của thanh.



**Hình 1.8.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được racc hóá

**Giải****a) Chuyển vị tại B và C**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.8b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  cho các thanh

- Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

- Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$$

- Tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  để xây dựng ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

- Thiết lập các vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  cho các thanh:

- Phần tử 1:

$$\{P\}_e = \begin{cases} R_a \\ P \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

- Phần tử 2:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ 2P \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

- Phần tử 3:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ R_d \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$$

- Tiến hành ghép nối vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  để xây dựng vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :

$$\{\overline{P}\} = \begin{cases} R_a \\ P+0 \\ 2P+0 \\ R_d \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \{\overline{P}\} = \begin{cases} P \\ 2P \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \overline{[K]\{q\}} &= \{\overline{P}\} \\ \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases} &= \begin{cases} P \\ 2P \end{cases} \end{aligned}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{4}{3} \frac{PL}{EA} \\ q_2 = \frac{5}{3} \frac{PL}{EA} \end{cases}$$

**b) Phản lực tại A và D**

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$\begin{aligned} N_1 &= EA[B].\{q\}_1 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{4}{3} P \end{aligned}$$

- Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{4}{3} \frac{PL}{EA} \\ \frac{5}{3} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{3} P + \frac{5}{3} P = \frac{1}{3} P \end{aligned}$$

- Phần tử 3:

$$\begin{aligned} N_3 &= EA[B].\{q\}_3 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{5}{3} \frac{PL}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{5}{3} P \end{aligned}$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

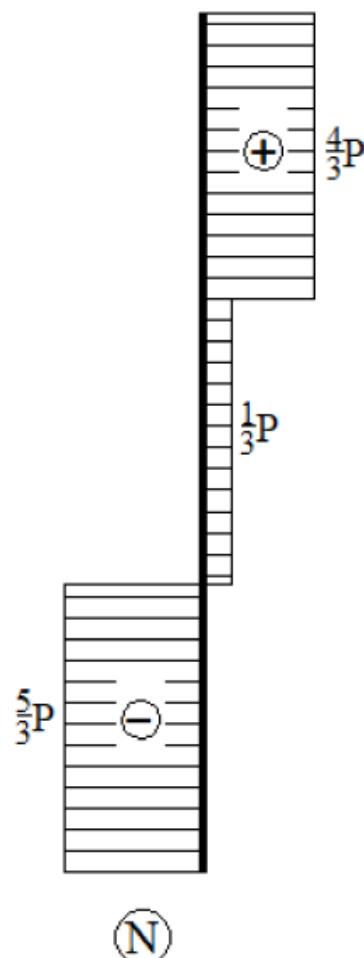
- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -N_1 = -\frac{4}{3} P$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -3P + R_A = \frac{5}{3} P$$

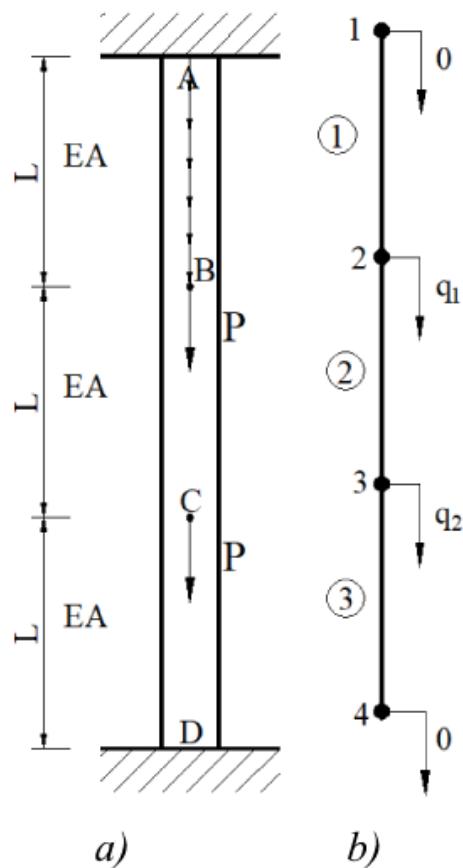
c) Biểu đồ lực dọc  $N$  của thanh



**Hình 1.9.** Biểu đồ lực dọc  $N$  của thanh

**Bài tập 1.4** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại hai điểm A và D, thanh chịu lực dọc  $P = qL$  tác dụng tại B, C và chịu lực phân bố đều  $q$  như Hình 1.10a. Thanh có độ cứng không đổi là EA. Tìm:

- a) Chuyển vị tại B và C.
- b) Phản lực tại A và D.
- c) Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- d) Tính ứng suất trong từng đoạn.
- e) Vẽ biểu đồ lực dọc.

**Hình 1.10.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa**Giải****a) Chuyển vị tại B và C**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.10b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  cho các thanh

- Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_2^1$$

- Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_0^2$$

- Tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  để xây dựng ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{0120}$$

$$\Rightarrow \overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{12}^1$$

- Thiết lập các vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  cho các thanh:

- Phần tử 1:

$$\{P\}_e = \begin{cases} R_a + \frac{qL}{2} \\ P + \frac{qL}{2} \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} R_a + \frac{qL}{2} \\ \frac{3qL}{2} \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

- Phần tử 2:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ P \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

- Phần tử 3:

$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_D \end{Bmatrix} 2$$

- Tiến hành ghép nối vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  để xây dựng vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :

$$\{\overline{P}\} = \begin{Bmatrix} R_a + \frac{qL}{2} \\ \frac{3}{2}qL + 0 \\ qL + 0 \\ R_d \end{Bmatrix} 1 \Rightarrow \{\overline{P}\} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}qL \\ qL \\ 0 \end{Bmatrix} 2$$

- Ta có hệ phương trình:

$$[\overline{K}]\{\overline{q}\} = \{\overline{P}\} \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}qL \\ qL \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{7}{6} \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA \cdot [B] \cdot \{q\}_1 = EA \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{4}{3} qL$$

- Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{7}{6} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{3} qL + \frac{7}{6} qL = -\frac{1}{6} qL \end{aligned}$$

- Phần tử 3:

$$N_3 = EA[B].\{q\}_3 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{7}{6} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{7}{6} qL^2$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -N_1 - \frac{qL}{2} = -\frac{11}{6} qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -3qL + R_A = -\frac{7}{3} qL$$

### c) Tính biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA} - 0}{L} = \frac{4}{3} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{7}{6} \frac{qL^2}{EA} - \frac{4}{3} \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{1}{6} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{0 - \frac{7}{6} \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{7}{6} qL^2$$

**d) Tính ứng suất trong từng đoạn**

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{4}{3} \frac{qL}{A}$$

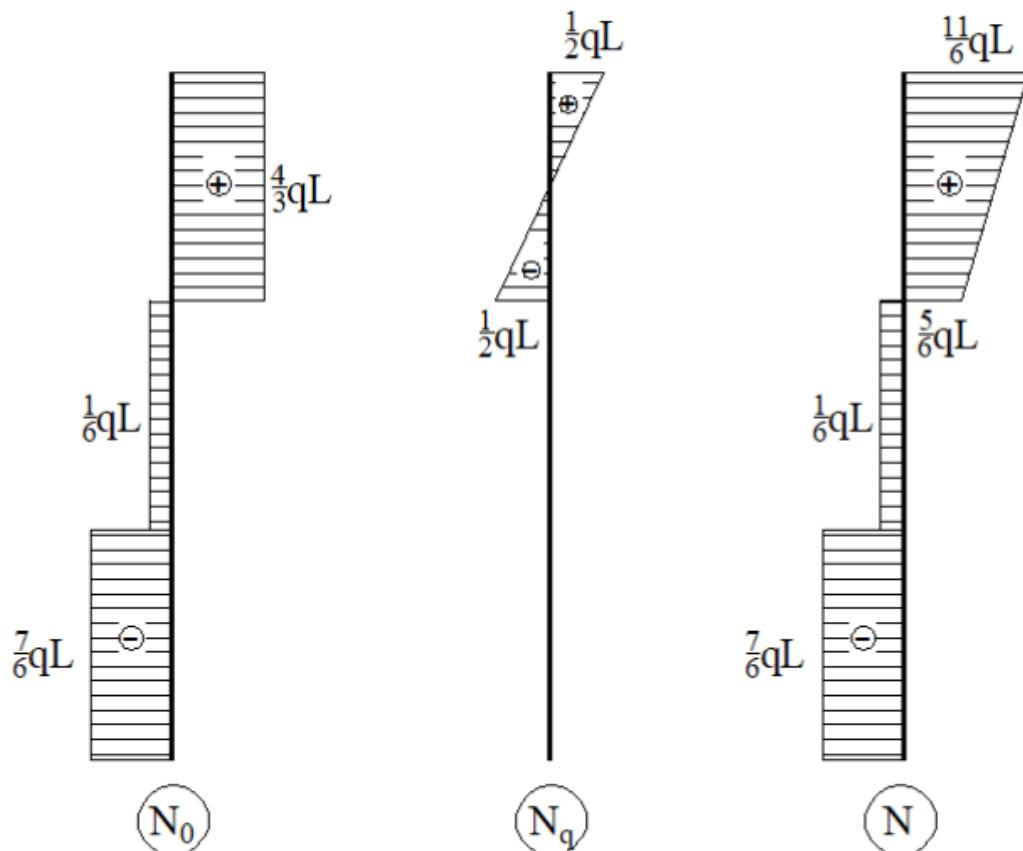
- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = -\frac{1}{6} \frac{qL}{A}$$

- Phần tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{7}{6} \frac{qL}{A}$$

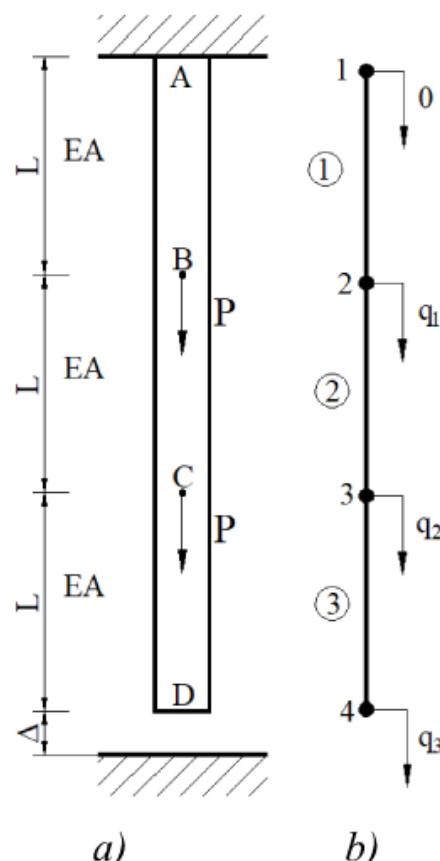
**e) Biểu đồ lực dọc N của thanh**



**Hình 1.11.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.5** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại điểm A và điểm D cách mặt ngầm một đoạn là  $\Delta$ , thanh chịu lực dọc P tác dụng tại điểm B, C như Hình 1.12a. Thanh có độ cứng không đổi là EA. Tìm chuyển vị tại điểm B và C của thanh, phản lực tại điểm A và vẽ biểu đồ lực dọc của thanh.

- a) Điểm D chưa chạm đến mặt ngầm.
- b) Điểm D chạm đến mặt ngầm ( $q_4 = \Delta$ ).



**Hình 1.12.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa

### Giải

Ta xét hai trường hợp:

**a) Trường hợp điểm D chưa chạm đến mặt ngầm ( $q_3 < \Delta$ )**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.12b.

- Thiết lập ma trận chi số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  cho các thanh

- Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{01}$$

- Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{12}$$

- Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{23}$$

- Tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  để xây dựng ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{0123}$$

$$\Rightarrow \overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{123}$$

- Thiết lập các vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  cho các thanh:

- Phần tử 1:

$$\{P\}_e = \begin{cases} R_a \\ P \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} R_a \\ P \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

- Phần tử 2:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ P \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Tiến hành ghép nối vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  để xây dựng vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :

$$\{\overline{P}\} = \begin{cases} R_a \\ P+0 \\ P+0 \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \{\overline{P}\} = \begin{cases} P \\ P \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$[\overline{K}]\{\overline{q}\} = \{\overline{P}\} \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} = \begin{cases} P \\ P \\ 0 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{2P}{EA} \\ q_2 = \frac{3P}{EA} \\ q_3 = \frac{3P}{EA} \end{cases}$$

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = EA \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{cases} 0 \\ \frac{2P}{EA} \end{cases} = 2P$$

- Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2P}{EA} \\ \frac{3P}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{2P}{EA} + \frac{3P}{EA} = P \end{aligned}$$

- Phần tử 3:

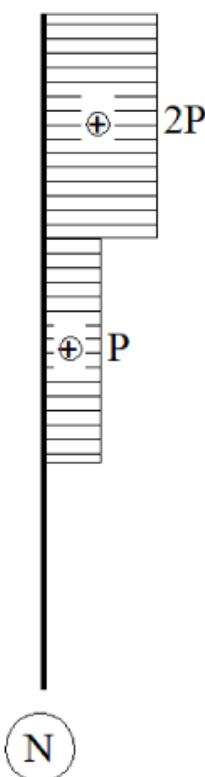
$$\begin{aligned} N_3 &= EA[B].\{q\}_3 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3P}{EA} \\ \frac{3P}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{3P}{EA} + \frac{3P}{EA} = 0 \end{aligned}$$

- Phản lực tại điểm A. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -N_1 = -2P$$

- Biểu đồ lực dọc N của thanh:



**Hình 1.13.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

### Trường hợp điểm D chạm đến mặt ngầm ( $q_4 \geq \Delta$ )

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử.
- Thiết lập ma trận chi số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  cho các thanh

- Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_0$$

- Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_1$$

- Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_2$$

- Tiến hành ghép nối các ma trận độ cứng phần tử  $[K]_e$  để xây dựng ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{0123}$$

$$\Rightarrow \overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Thiết lập các vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  cho các thanh:

- Phần tử 1:

$$\{P\}_e = \begin{cases} R_a \\ P \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{cases} R_a \\ P \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

- Phần tử 2:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ P \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{P\}_e = \begin{cases} 0 \\ R_D \end{cases} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Tiến hành ghép nối vectơ tải phần tử  $\{P\}_e$  để xây dựng vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :

$$\{\overline{P}\} = \begin{cases} R_a \\ P+0 \\ P+0 \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \{\overline{P}\} = \begin{cases} P \\ P \\ R_D \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$[\overline{K}] \{\overline{q}\} = \{\overline{P}\} \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ \Delta \end{cases} = \begin{cases} P \\ P \\ R_a \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{PL}{EA} + \frac{1}{3}\Delta \\ q_2 = \frac{PL}{EA} + \frac{2}{3}\Delta \\ q_3 = \Delta \\ R_4 = -P + \frac{1}{3}\frac{\Delta EA}{L} \end{cases}$$

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$\begin{aligned} N_1 &= EA[B].\{q\}_1 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{PL}{EA} + \frac{1}{3}\Delta \end{Bmatrix} = P + \frac{1}{3}\frac{\Delta EA}{L} \end{aligned}$$

- Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{PL}{EA} + \frac{1}{3}\Delta \\ \frac{PL}{EA} + \frac{2}{3}\Delta \end{Bmatrix} \\ &= -P - \frac{1}{3}\frac{\Delta EA}{L} + P + \frac{2}{3}\frac{\Delta EA}{L} = \frac{1}{3}\frac{\Delta EA}{L} \end{aligned}$$

- Phần tử 3:

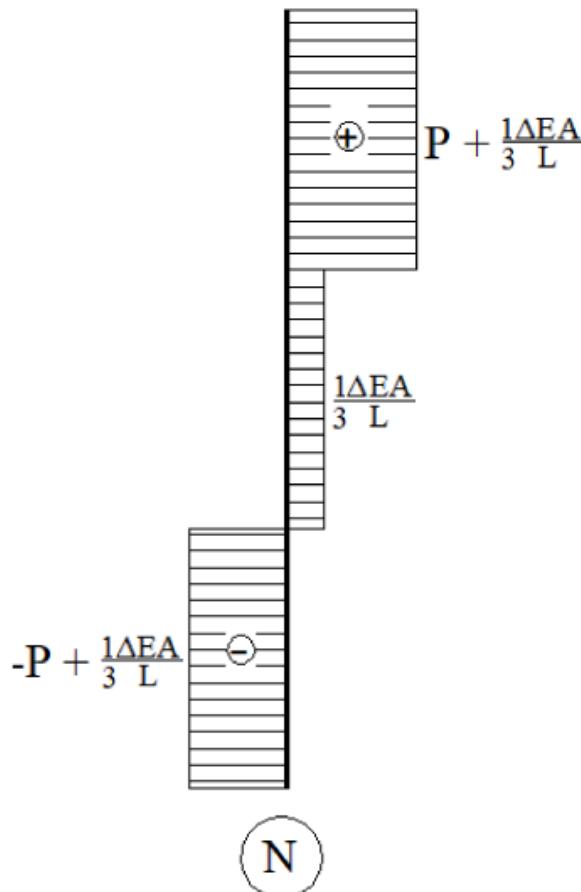
$$\begin{aligned} N_3 &= EA[B].\{q\}_3 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{PL}{EA} + \frac{2}{3}\Delta \\ \Delta \end{Bmatrix} \\ &= -P - \frac{2}{3}\frac{\Delta EA}{L} + \frac{\Delta EA}{L} = -P + \frac{1}{3}\frac{\Delta EA}{L} \end{aligned}$$

- Phản lực tại điểm A. (Đáu – thể hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -N_1 = -\left( P + \frac{1}{3} \frac{\Delta EA}{L} \right)$$

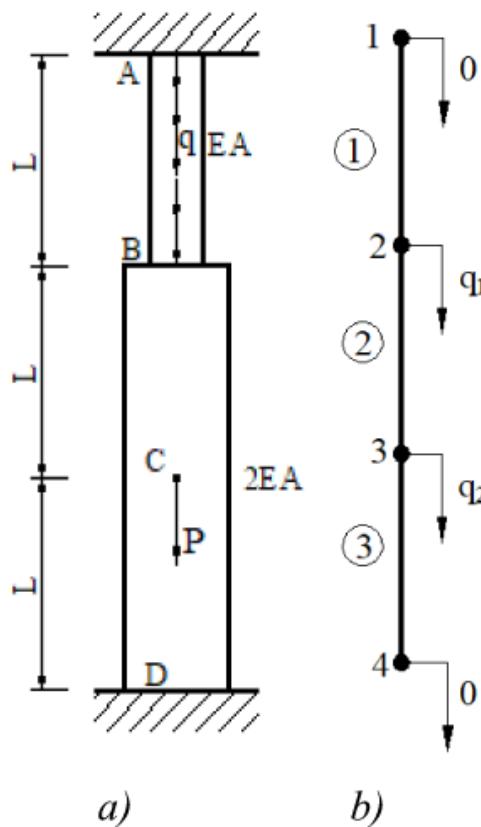
- Biểu đồ lực dọc N của thanh:



**Hình 1.14.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.6** Cho thanh ABCD có liên kết ngàm tại A và D, thanh chịu lực dọc  $P = qL$  tác dụng tại điểm C, lực phân bố đều  $q$  và có độ cứng thay đổi như Hình 1.15a. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn hãy xác định:

- Chuyển vị tại B và C.
- Phản lực tại A và D.
- Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- Tính ứng suất trong từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ lực dọc.



**Hình 1.15.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa

**Giải**

**a) Chuyển vị tại B và C**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.15b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\overline{\{P\}}$ :

$$\overline{\{P\}} = \begin{cases} qL/2 \\ qL \end{cases}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \overline{[K]\{q\}} &= \overline{\{P\}} \\ \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} qL$$

- Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{2}{2} qL + \frac{2}{2} qL = 0 \end{aligned}$$

- Phần tử 3:

$$\begin{aligned} N_3 &= EA[B].\{q\}_3 \\ &= 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{2}{2} qL = -qL \end{aligned}$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -\frac{qL}{2} - \frac{qL}{2} = -qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -2qL + R_A = -qL$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} - 0}{L} = \frac{1}{2} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA}}{L} = 0$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{0 - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{1}{2} \frac{qL}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{qL}{A}$$

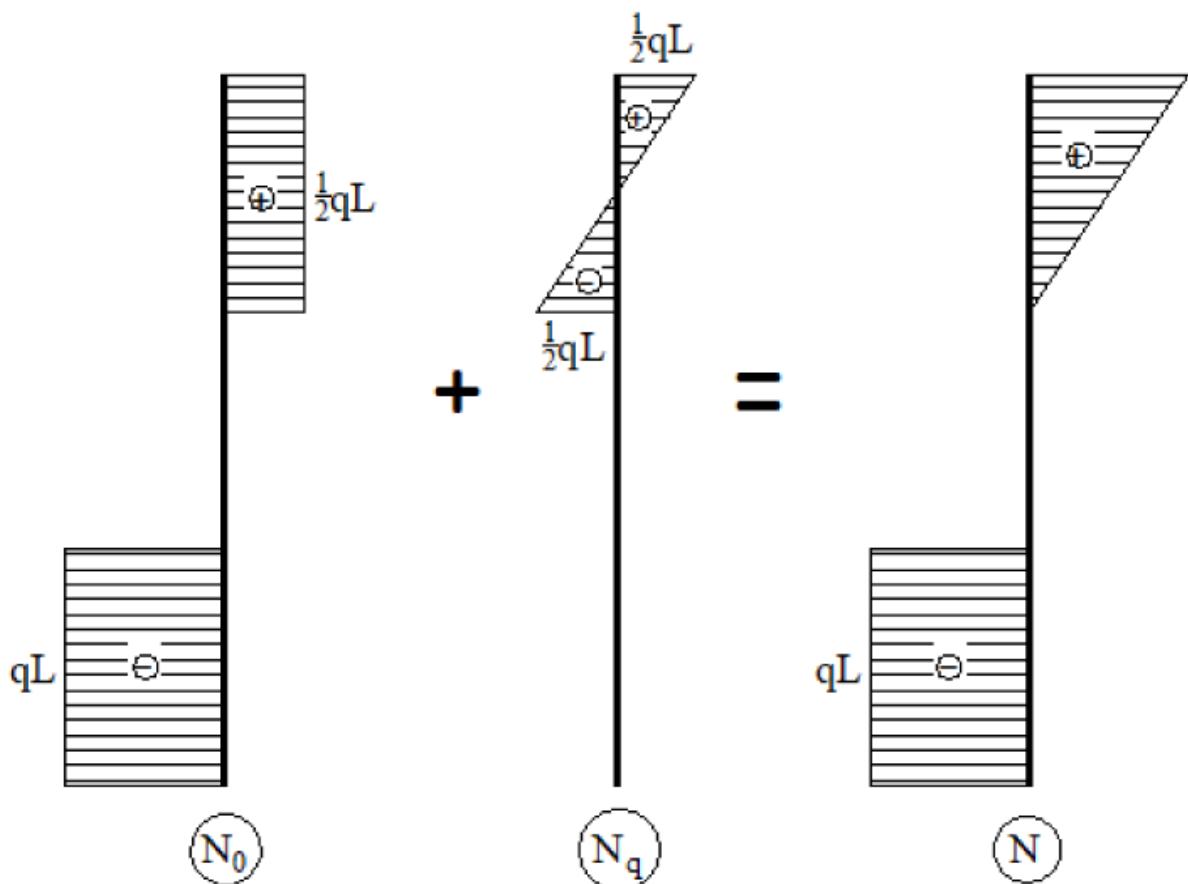
- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = 0$$

- Phần tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \frac{qL}{A}$$

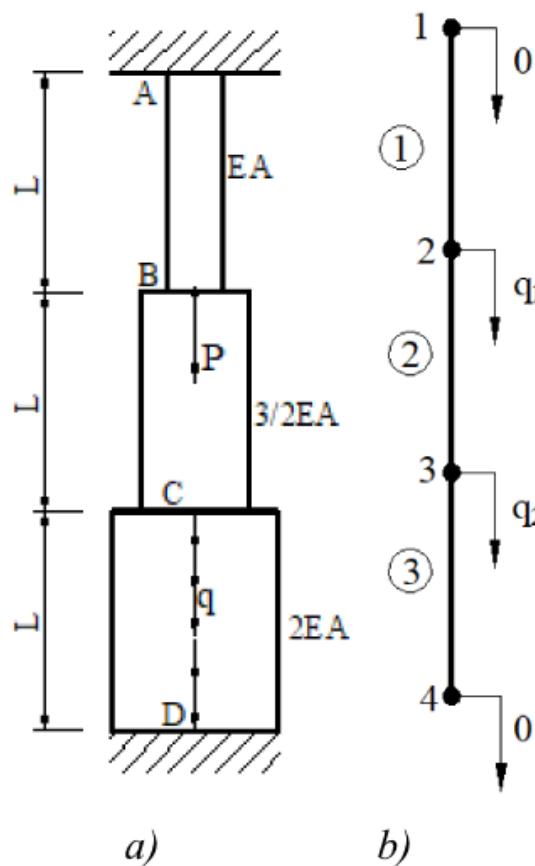
**e) Biểu đồ lực dọc N của thanh**



**Hình 1.16.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.7** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại hai điểm A và D, thanh chịu lực dọc  $P = qL$  tác dụng tại điểm B, lực phân bố đều  $q$  và có độ cứng thay đổi như Hình 1.17a. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn hãy xác định:

- Chuyển vị tại B và C.
- Phản lực tại A và D.
- Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- Tính ứng suất trong từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ lực dọc.



**Hình 1.17.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa

**Giải**

**a) Chuyển vị tại B và C**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.17b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\overline{\{P\}}$ :  $\overline{\{P\}} = \begin{cases} qL \\ qL/2 \end{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \overline{[K]\{q\}} &= \overline{\{P\}} \\ \Leftrightarrow \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} qL \\ qL/2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{17}{26} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{11}{26} \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

• Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{17}{26} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{17}{26} qL$$

• Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= \frac{3}{2} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{17}{26} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{11}{26} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{51}{52} qL + \frac{33}{52} qL = -\frac{9}{26} qL \end{aligned}$$

• Phần tử 3:

$$\begin{aligned} N_3 &= EA[B].\{q\}_3 \\ &= 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{11}{26} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{22}{26} qL \end{aligned}$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -\frac{17}{26}qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -2qL + R_A = -\frac{35}{26}qL$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{17}{26} \frac{qL^2}{EA} - 0}{L} = \frac{17}{26} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{11}{26} \frac{qL^2}{EA} - \frac{17}{26} \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{6}{26} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{0 - \frac{11}{26} \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{11}{26} \frac{qL}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{17}{26} \frac{qL}{A}$$

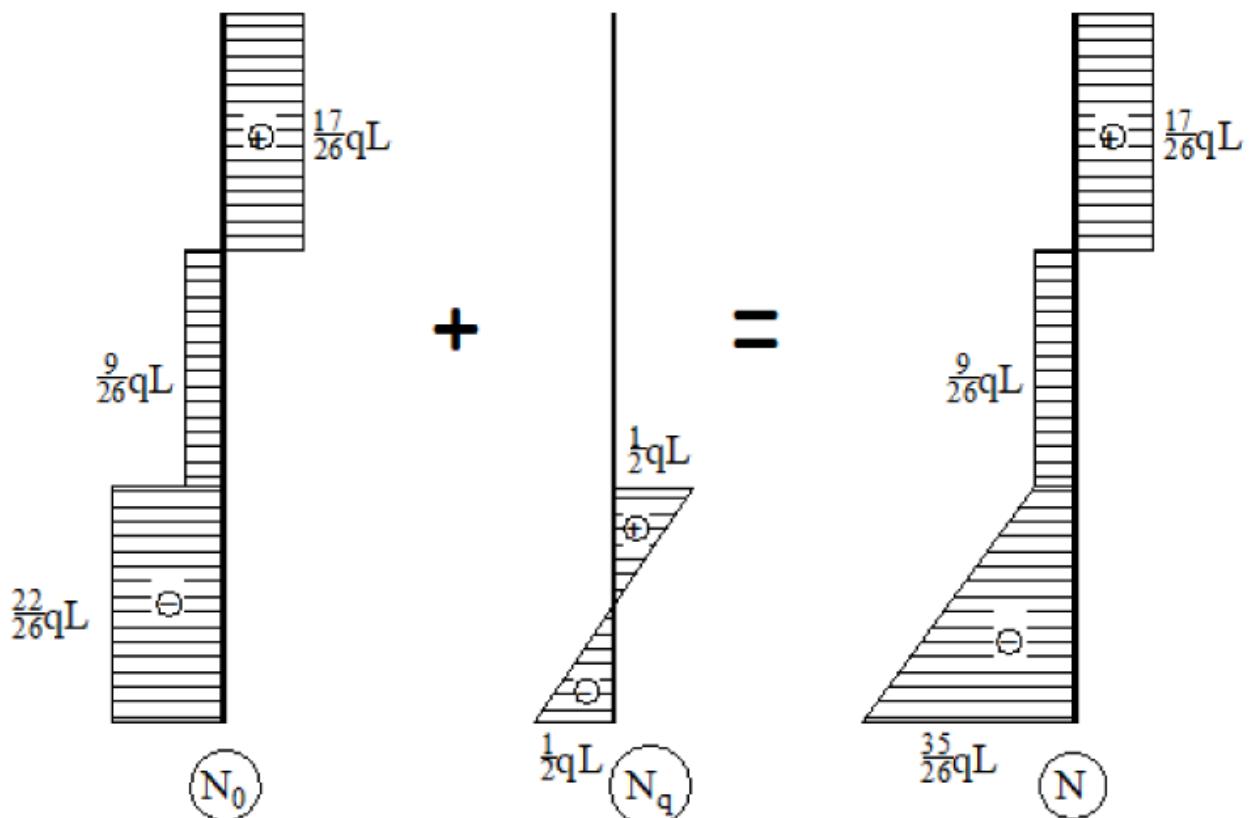
- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = -\frac{6}{26} \frac{qL}{A}$$

- Phần tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{11}{26} \frac{qL}{A}$$

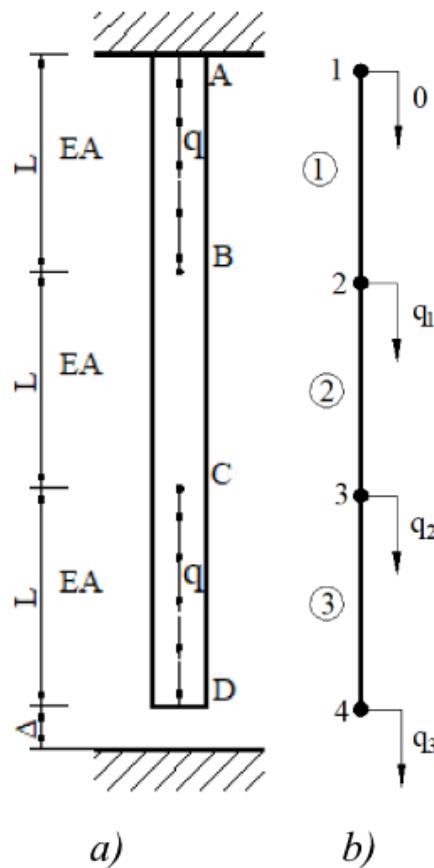
**e) Biểu đồ lực dọc N của thanh**



**Hình 1.18.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.8** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại A, và điểm D cách mặt ngầm một đoạn là  $\Delta$ . Thanh chịu tác dụng của lực phân bố đều  $q$  và có độ cứng không đổi như Hình 1.19a. Với  $\Delta = \frac{qL^2}{2EA}$ , hãy xác định:

- Chuyển vị tại B và C.
- Phản lực tại A và D (nếu có).
- Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- Tính ứng suất trong từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ lực dọc.



**Hình 1.19.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa

**Giải:**

**a) Chuyển vị tại B và C**

- Giả sử điểm D chưa chạm tới mặt ngầm  $q_3 < \Delta$ .
- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.19b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :

$$\{\overline{P}\} = \begin{cases} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \overline{[K]\{q\}} &= \overline{\{P\}} \\ \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} &= \begin{cases} qL/2 \\ qL/2 \\ qL/2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{3}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{5}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ q_3 = 3 \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

- Vì  $q_3 = \frac{3qL^2}{EA} > \Delta = \frac{qL^2}{2EA} \rightarrow$  Điểm D chạm đến mặt ngầm, vậy  $q_3 = \Delta = \frac{qL^2}{2EA}$ . Thay vào hệ phương trình (1), ta có:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ qL^2/2EA \end{cases} = \begin{cases} qL/2 \\ qL/2 \\ qL/2 + R_D \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình, ta có:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{2}{3} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{5}{6} \frac{qL^2}{EA} \\ q_3 = \frac{qL^2}{2EA} \\ R_D = -\frac{5}{6} qL \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$\begin{aligned} N_1 &= EA[B].\{q\}_1 \\ &= EA \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} qL \end{aligned}$$

- Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= EA \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{5}{6} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} qL \end{aligned}$$

- Phần tử 3:

$$\begin{aligned} N_3 &= EA[B].\{q\}_3 \\ &= EA \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{5}{6} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{2}{6} qL \end{aligned}$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -\frac{2}{3}qL - \frac{1}{2}qL = -\frac{7}{6}qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -\frac{5}{6}qL$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{2}{3}\frac{qL^2}{EA} - 0}{L} = \frac{2}{3}\frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{5}{6}\frac{qL^2}{EA} - \frac{2}{3}\frac{qL^2}{EA}}{L} = \frac{1}{6}\frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{\frac{1}{2}\frac{qL^2}{EA} - \frac{5}{6}\frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{2}{6}\frac{qL}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{2}{3}\frac{qL}{A}$$

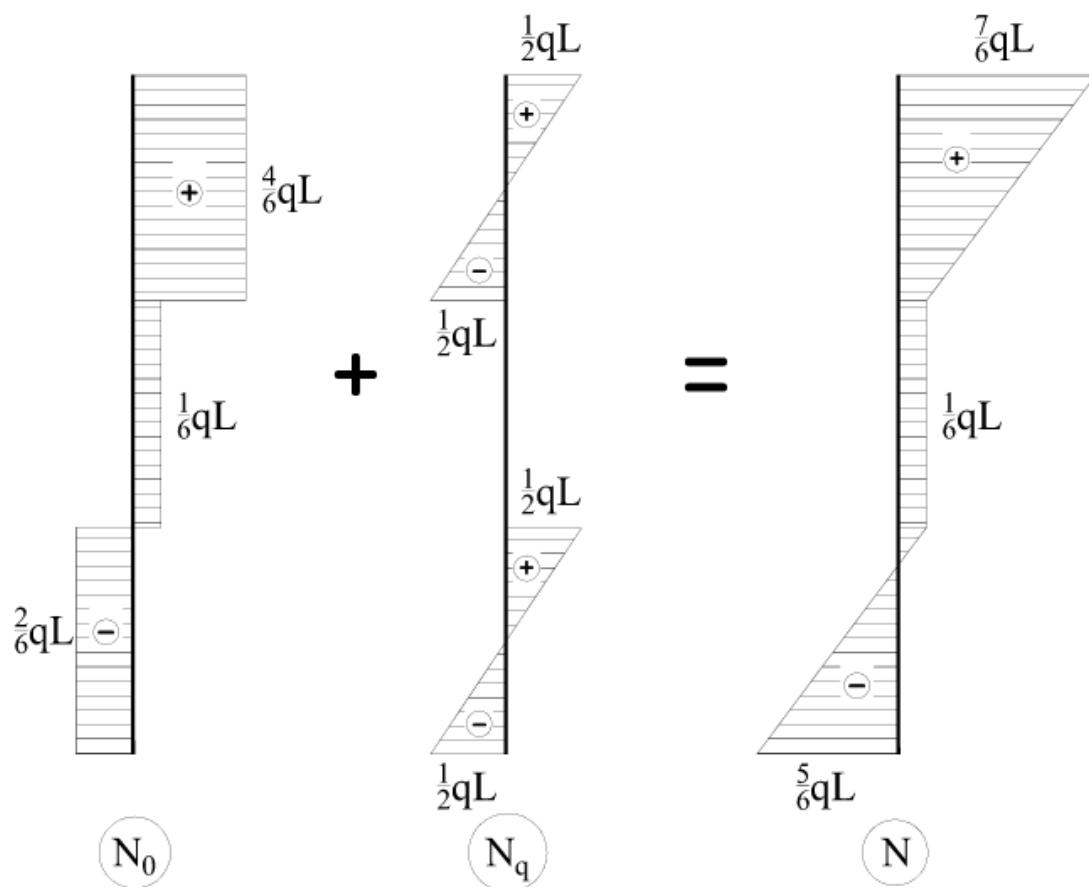
- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = \frac{1}{6}\frac{qL}{A}$$

- Phần tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{2}{6}\frac{qL}{A}$$

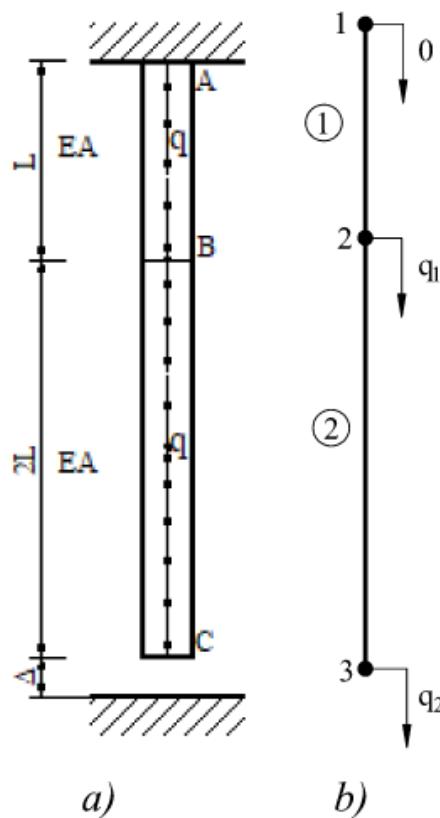
e) Biểu đồ lực dọc N của thanh



**Hình 1.20.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.9** Cho thanh ABC có liên kết ngàm tại A, và điểm C cách mặt ngàm một đoạn là  $\Delta$ . Thanh chịu tác dụng của lực phân bố đều  $q$  và có độ cứng không đổi như Hình 1.22a. Với  $\Delta = \frac{3qL^2}{2EA}$ , hãy xác định:

- Chuyển vị tại B của thanh.
- Phản lực tại điểm A và C (nếu có).
- Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- Tính ứng suất trong từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ lực dọc.



**Hình 1.21.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa

**Giải:**

**a) Chuyển vị tại B và C**

- Giả sử điểm D chưa chạm tới mặt ngầm  $q_2 < \Delta$ .
- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.22b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\overline{\{P\}}$ :

$$\overline{\{P\}} = \begin{cases} 3qL/2 \\ qL \end{cases}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\overline{[K]\{q\}} = \overline{\{P\}} \Leftrightarrow \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3qL/2 \\ qL \end{Bmatrix} \quad (1)$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{5}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{9}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

- Vì  $q_3 = \frac{9qL^2}{2EA} > \Delta = \frac{3qL^2}{2EA} \rightarrow$  Điểm D chạm đến mặt ngầm, vậy  $q_3 = \Delta = \frac{3qL^2}{2EA}$ . Thay vào hệ phương trình (1), ta có:

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ 3qL^2/2EA \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3qL/2 \\ qL + R_C \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình, ta có:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{13}{6} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{3}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ R_D = -\frac{4}{3} qL \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = EA \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{13}{6} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{13}{6} qL$$

- Phần tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= EA \left[ -\frac{1}{2L} \quad \frac{1}{2L} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{13}{6} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{3}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{array} \right\} = -\frac{2}{6} qL \end{aligned}$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thể hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -\frac{13}{6} qL - \frac{1}{2} qL = -\frac{8}{3} qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -\frac{4}{3} qL$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{13}{6} \frac{qL^2}{EA} - 0}{L} = \frac{13}{6} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{3}{2} \frac{qL^2}{EA} - \frac{13}{6} \frac{qL^2}{EA}}{2L} = -\frac{1}{3} \frac{qL}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

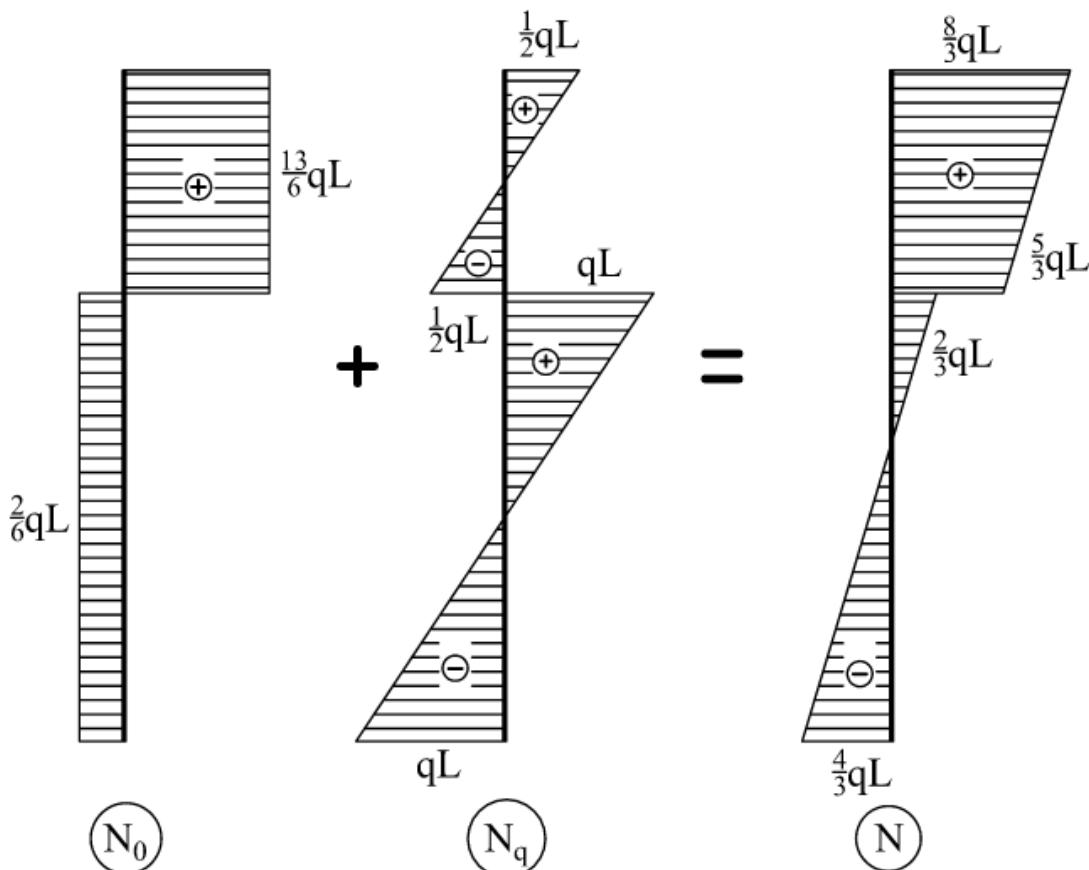
- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{13}{6} \frac{qL}{A}$$

- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = -\frac{1}{3} \frac{qL}{A}$$

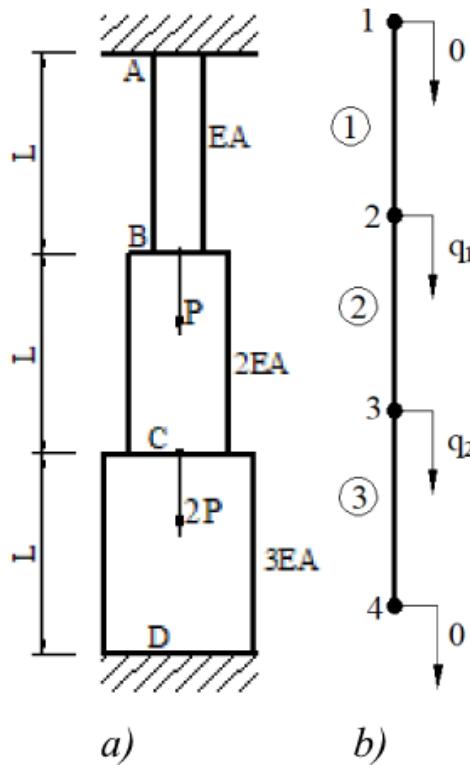
**e) Biểu đồ lực dọc N của thanh**



**Hình 1.22.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.10** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại hai điểm A và D, thanh chịu lực dọc tác dụng tại điểm B và C với độ lớn lần lượt là P, 2P và có độ cứng thay đổi như Hình 1.23a. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn hãy xác định:

- Chuyển vị tại B và C của thanh.
- Phản lực tại A và D.
- Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- Tính ứng suất trong từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ lực dọc.



a)

b)

**Hình 1.23.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa**Giải:****a) Chuyển vị tại B và C**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.23b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\overline{\{P\}}$ :

$$\overline{\{P\}} = \begin{cases} P \\ 2P \end{cases}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\overline{[K]\{q\}} = \overline{\{P\}} \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 2P \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{9}{11} \frac{PL}{EA} \\ q_2 = \frac{8}{11} \frac{PL}{EA} \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phân tử 1:

$$\begin{aligned} N_1 &= EA[B].\{q\}_1 \\ &= EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{9}{11} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{9}{11} P \end{aligned}$$

- Phân tử 2:

$$\begin{aligned} N_2 &= EA[B].\{q\}_2 \\ &= 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{9}{11} \frac{PL}{EA} \\ \frac{8}{11} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{2}{11} P \end{aligned}$$

- Phân tử 3:

$$\begin{aligned} N_3 &= EA[B].\{q\}_3 \\ &= 3EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{8}{11} \frac{PL}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{24}{11} P \end{aligned}$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -\frac{9}{11}P$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -3P + R_A = -\frac{24}{11}P$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{9}{11} \frac{PL}{EA} - 0}{L} = \frac{9}{11} \frac{P}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{8}{11} \frac{PL}{EA} - \frac{9}{11} \frac{PL}{EA}}{L} = -\frac{1}{11} \frac{P}{EA}$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{0 - \frac{8}{11} \frac{PL}{EA}}{L} = -\frac{8}{11} \frac{P}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{9}{11} \frac{P}{A}$$

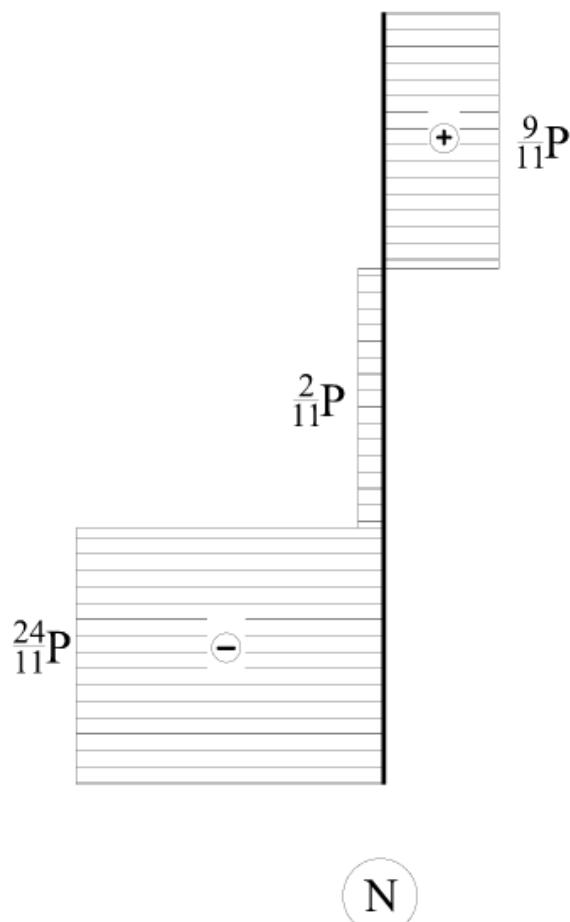
- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = -\frac{1}{11} \frac{P}{A}$$

- Phần tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{8}{11} \frac{P}{A}$$

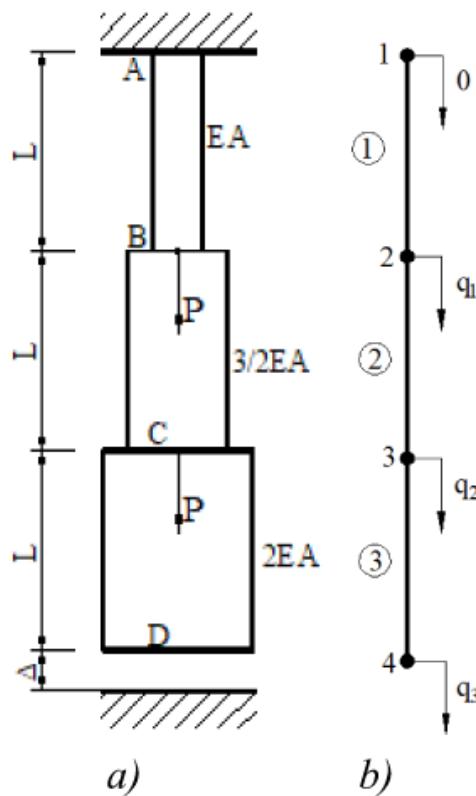
e) Biểu đồ lực dọc N của thanh



**Hình 1.24.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.11** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại hai điểm A và D, thanh chịu tác dụng của lực tập trung P tại điểm B và C và có độ cứng không đổi như Hình 1.25a. Với  $\Delta = \frac{qL^2}{2EA}$ , hãy xác định:

- a) Chuyển vị tại B và C.
- b) Phản lực tại điểm A và D (nếu có).
- c) Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- d) Tính ứng suất trong từng đoạn.
- e) Vẽ biểu đồ lực dọc.

**Hình 1.25.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa**Giải****a) Chuyển vị tại B và C**

- Vì chưa biết điểm D có chạm tới mặt ngầm hay không, nên trước hết, ta giả sử điểm D chưa chạm tới mặt ngầm  $q_3 < \Delta$  và giải ra kết quả. Dựa vào kết quả  $q_3$  vừa nhận được, ta sẽ biết được D có chạm vào mặt ngầm hay không.

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.25b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}_{1,2,3}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :  $\{\overline{P}\} = \begin{cases} P \\ P \\ 0 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$

- Ta có hệ phương trình:

$$[\overline{K}] \{\overline{q}\} = \{\overline{P}\} \Leftrightarrow \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} = \begin{cases} P \\ P \\ 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = 2 \frac{PL}{EA} \\ q_2 = \frac{8}{3} \frac{PL}{EA} \\ q_3 = \frac{8}{3} \frac{PL}{EA} \end{cases}$$

- Vì  $q_3 = \frac{8}{3} \frac{PL}{EA} > \Delta = \frac{PL}{2EA} \rightarrow$  Điểm D chạm đến mặt ngầm, vậy  $q_3 = \Delta = \frac{PL}{2EA}$ . Thay vào hệ phương trình (1), ta có:

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ PL/2EA \end{cases} = \begin{cases} P \\ P \\ R_D \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình, ta có:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{PL}{EA} \\ q_2 = \frac{PL}{EA} \\ q_3 = \frac{PL}{2EA} \\ R_D = -P \end{cases}$$

**b) Phản lực tại điểm A và D.**

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phản tử 1:

$$N_1 = EA \cdot [B] \cdot \{q\}_1 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = P$$

- Phản tử 2:

$$N_2 = EA \cdot [B] \cdot \{q\}_2 = \frac{3}{2} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{PL}{EA} \\ \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = 0$$

- Phản tử 3:

$$N_3 = EA \cdot [B] \cdot \{q\}_3 = 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{PL}{EA} \\ \frac{PL}{2EA} \end{Bmatrix} = -P$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thể hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:  $R_A = -P$
- Phản lực tại điểm D:  $R_D = -P$

**c) Biến dạng tương đối từng đoạn**

- Phản tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{PL}{EA} - 0}{L} = \frac{P}{EA}$$

- Phản tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{PL}{EA} - \frac{PL}{EA}}{L} = 0$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{\frac{PL}{2EA} - \frac{PL}{EA}}{L} = -\frac{1}{2} \frac{P}{EA}$$

#### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{P}{A}$$

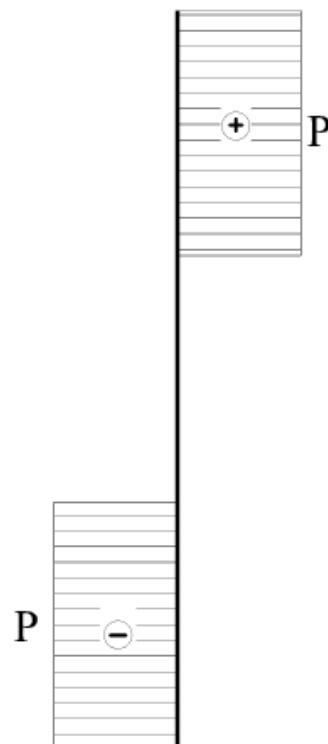
- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = 0$$

- Phần tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \frac{P}{A}$$

#### e) Biểu đồ lực dọc N của thanh

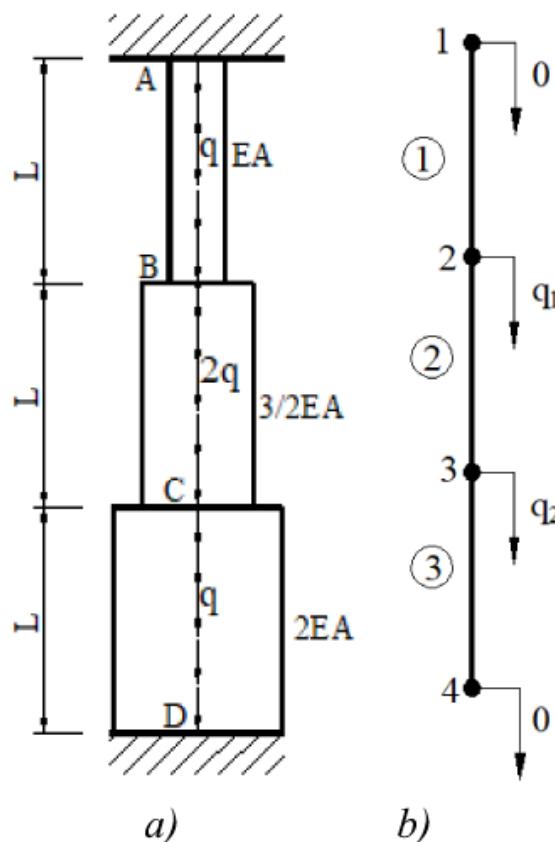


N

**Hình 1.26.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.12** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại hai điểm A và D, thanh chịu tác dụng của lực phân bố đều và có độ cứng thay đổi như Hình 1.27a. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn hãy xác định:

- a) Chuyển vị tại B và C.
- b) Phản lực tại A và D.
- c) Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- d) Tính ứng suất trong từng đoạn.
- e) Vẽ biểu đồ lực dọc.



**Hình 1.27.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rác hóa

**Giải**

**a) Chuyển vị tại B và C**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.27b.

- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\overline{\{P\}}$

$$\overline{\{P\}} = \begin{cases} 3qL/2 \\ 3qL/2 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\overline{[K]\{q\}} = \overline{\{P\}} \Leftrightarrow \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases} = \begin{cases} 3qL/2 \\ 3qL/2 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyên vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{15}{13} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{12}{13} \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phản tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = EA \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{cases} 0 \\ \frac{15}{13} \frac{qL^2}{EA} \end{cases} = \frac{15}{13} qL$$

- Phản tử 2:

$$N_2 = EA[B].\{q\}_2 = \frac{3}{2} EA \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{cases} \frac{15}{13} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{12}{13} \frac{qL^2}{EA} \end{cases} = -\frac{9}{26} qL$$

- Phần tử 3:

$$N_3 = EA[B].\{q\}_3 = 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{12}{13} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{24}{13} qL$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -\frac{15}{13}qL - \frac{1}{2}qL = -\frac{43}{26}qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -2qL + R_A = -\frac{61}{26}qL$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{15}{13} \frac{qL^2}{EA}}{L} - 0 = \frac{15}{13} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{12}{13} \frac{qL^2}{EA}}{L} - \frac{\frac{15}{13} \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{3}{13} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{0 - \frac{12}{13} \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{12}{13} \frac{qL}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{15}{13} \frac{qL}{A}$$

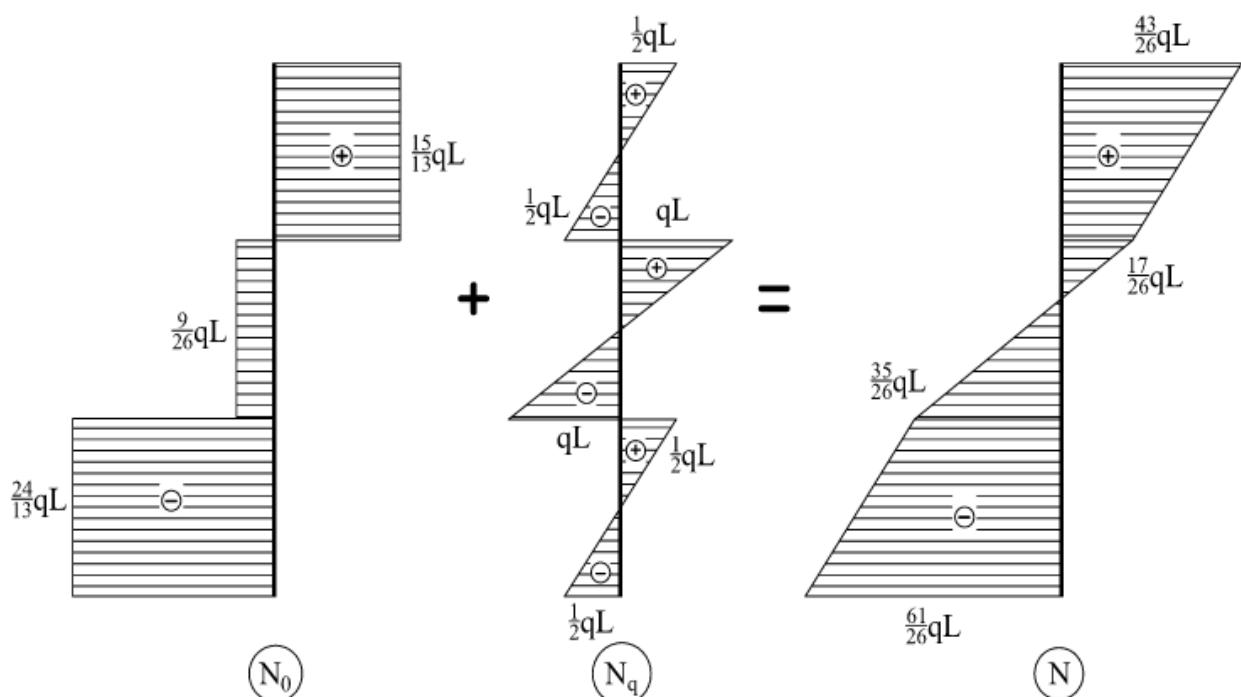
- Phân tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = -\frac{3}{13} \frac{qL}{A}$$

- Phân tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{12}{13} \frac{qL}{A}$$

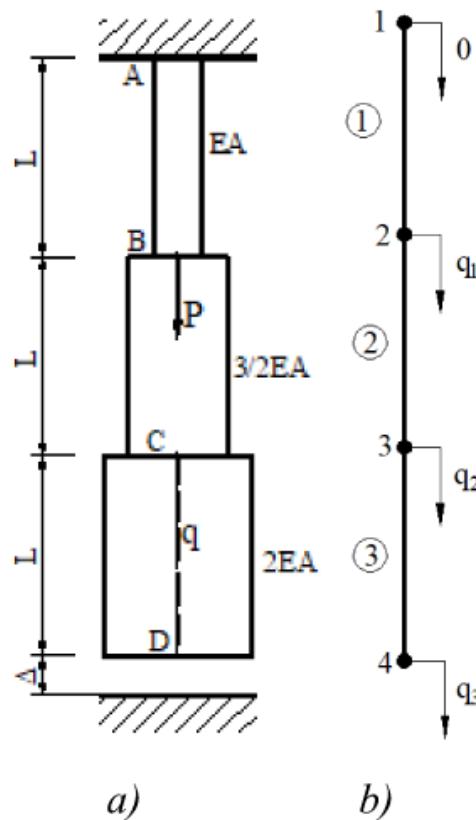
**e) Biểu đồ lực dọc N của thanh**



**Hình 1.28.** Biểu đồ lực dọc N của thanh

**Bài tập 1.13** Cho thanh ABCD có liên kết ngầm tại hai điểm A và D, thanh chịu tác dụng của lực tập trung  $P = qL$  tại điểm B, lực phân bố đều  $q$  và có độ cứng không đổi như Hình 1.29a. Với  $\Delta = \frac{3qL^2}{EA}$ , hãy xác định:

- Chuyển vị tại B và C.
- Phản lực tại A và D (nếu có).
- Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- Tính ứng suất trong từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ lực dọc.



**Hình 1.29.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa

**Giải**

**a) Chuyển vị tại B và C**

- Giả sử điểm D chưa chạm tới mặt ngầm  $q_3 < \Delta$ .
- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.29b.
- Thiết lập ma trận chỉ số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]} : b$

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\{\overline{P}\}$ :

$$\{\overline{P}\} = \begin{cases} qL \\ qL/2 \\ qL/2 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$[\overline{K}]\{\overline{q}\} = \{\overline{P}\} \Leftrightarrow b$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{2qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{8}{3} \frac{qL^2}{EA} \\ q_3 = \frac{35}{12} \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

- Vì  $q_3 = \frac{35}{12} \frac{qL^2}{EA} < \Delta = \frac{qL^2}{EA}$  → Điểm D chưa chạm đến mặt ngầm, vậy giả sử là đúng.

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = EA \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{cases} 0 \\ \frac{2qL^2}{EA} \end{cases} = 2qL$$

- Phần tử 2:

$$N_2 = EA[B].\{q\}_2 = \frac{3}{2} EA \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{cases} \frac{2qL^2}{EA} \\ \frac{8}{3} \frac{qL^2}{E} \end{cases} = qL$$

- Phần tử 3:

$$N_3 = EA[B].\{q\}_3 = 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{8}{3} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{35}{12} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{qL}{2}$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -2qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = 0$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{2qL^2}{EA} - 0}{L} = \frac{2qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{8}{3} \frac{qL^2}{EA} - \frac{2qL^2}{EA}}{L} = \frac{2}{3} \frac{qL^2}{EA}$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{\frac{35}{12} \frac{qL^2}{EA} - \frac{8}{3} \frac{qL^2}{EA}}{L} = \frac{1}{4} \frac{qL}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{2qL}{A}$$

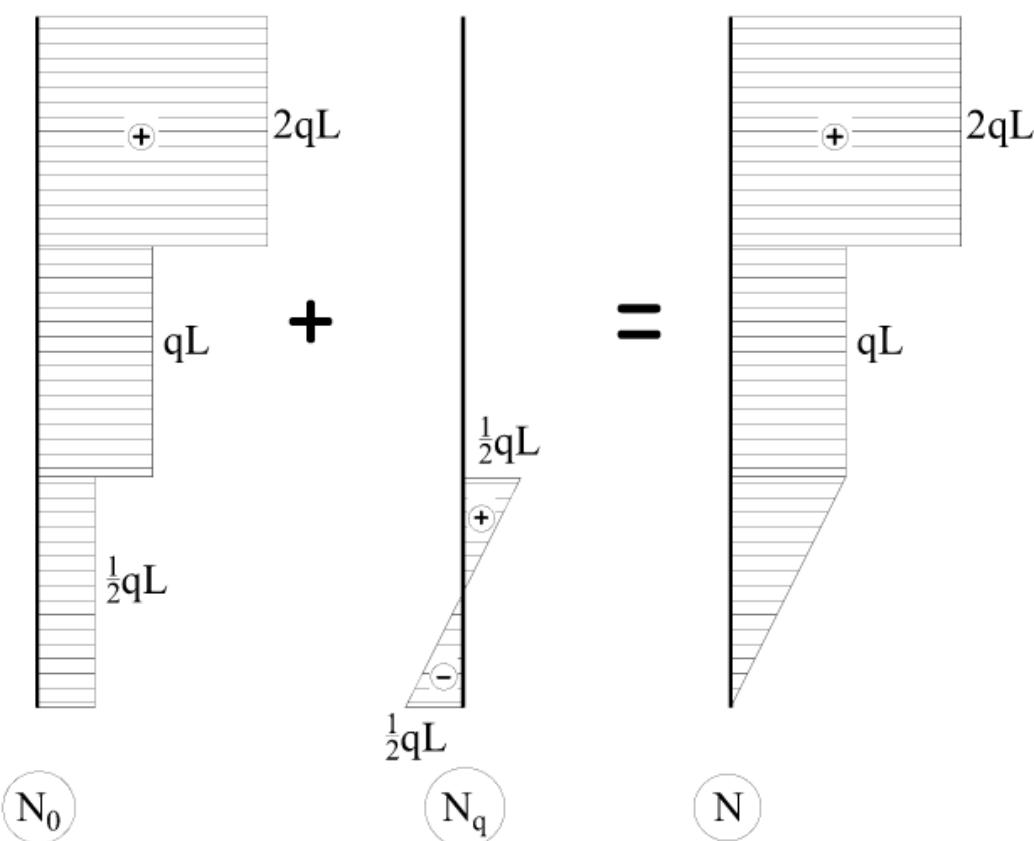
- Phân tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = \frac{2}{3} \frac{qL}{A}$$

- Phân tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = \frac{1}{4} \frac{qL}{A}$$

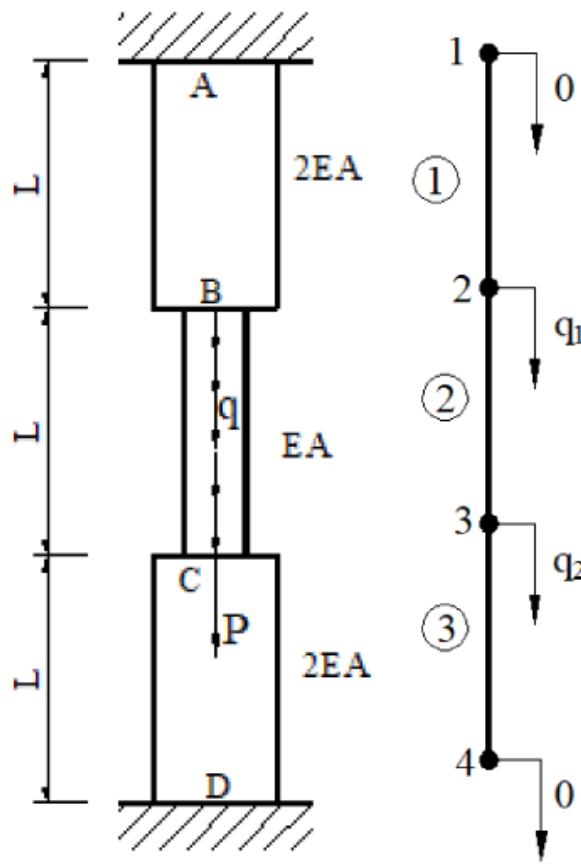
**e) Biểu đồ lực dọc N của thanh**



**Hình 1.30.** Biểu đồ lực dọc  $N$  của thanh

**Bài tập 1.14** Cho thanh ABCD có liên kết ngàm tại hai điểm A và D, thanh chịu tác dụng của lực tập trung  $P = 2qL$ , lực phân bố đều  $q$  và có độ cứng thay đổi như Hình 1.31a. Dùng phương pháp phân tử hữu hạn hãy xác định:

- Chuyển vị tại B và C.
- Phản lực tại A và D.
- Tính biến dạng tương đối trong từng đoạn.
- Tính ứng suất trong từng đoạn.
- Vẽ biểu đồ lực dọc.



a)

b)

**Hình 1.31.** Sơ đồ kết cấu của thanh và sơ đồ kết cấu được rời rạc hóa**Giải****a) Chuyển vị tại B và C**

- Tiến hành rời rạc hóa phần tử, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 1.31b.

- Thiết lập ma trận chi số phần tử sau khi đã áp đặt điều kiện biên:

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể  $\overline{[K]}$ :

$$\overline{[K]} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể  $\overline{\{P\}}$ :

$$\overline{\{P\}} = \begin{cases} qL/2 \\ 5qL/2 \end{cases}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$[\overline{K}] \overline{\{q\}} = \overline{\{P\}} \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases} = \begin{cases} qL/2 \\ 5qL/2 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là chuyển vị tại các nút B và C:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ q_2 = \frac{qL^2}{EA} \end{cases}$$

### b) Phản lực tại A và D

- Xác định lực dọc trong từng thanh:

- Phần tử 1:

$$N_1 = EA[B].\{q\}_1 = 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{cases} = qL$$

- Phần tử 2:

$$N_2 = EA[B].\{q\}_2 = EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{qL^2}{EA} \end{cases} = -\frac{1}{2} qL$$

- Phần tử 3:

$$N_3 = EA[B].\{q\}_3 = 2EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{cases} = -2qL$$

- Phản lực tại các điểm A và D. (Đầu – thê hiện cho chiều của phản lực ngược với chiều đã chọn).

- Phản lực tại điểm A:

$$R_A = -qL$$

- Phản lực tại điểm D:

$$R_D = -3qL + R_A = -2qL$$

### c) Biến dạng tương đối từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2 - q_1}{L_1} = \frac{\frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} - 0}{L} = \frac{1}{2} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 2:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_3 - q_2}{L_2} = \frac{\frac{qL^2}{EA} - \frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA}}{L} = \frac{1}{2} \frac{qL}{EA}$$

- Phần tử 3:

$$\varepsilon_1 = \frac{q_4 - q_3}{L_3} = \frac{0 - \frac{qL^2}{EA}}{L} = -\frac{qL}{EA}$$

### d) Tính ứng suất trong từng đoạn

- Phần tử 1:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{qL}{A}$$

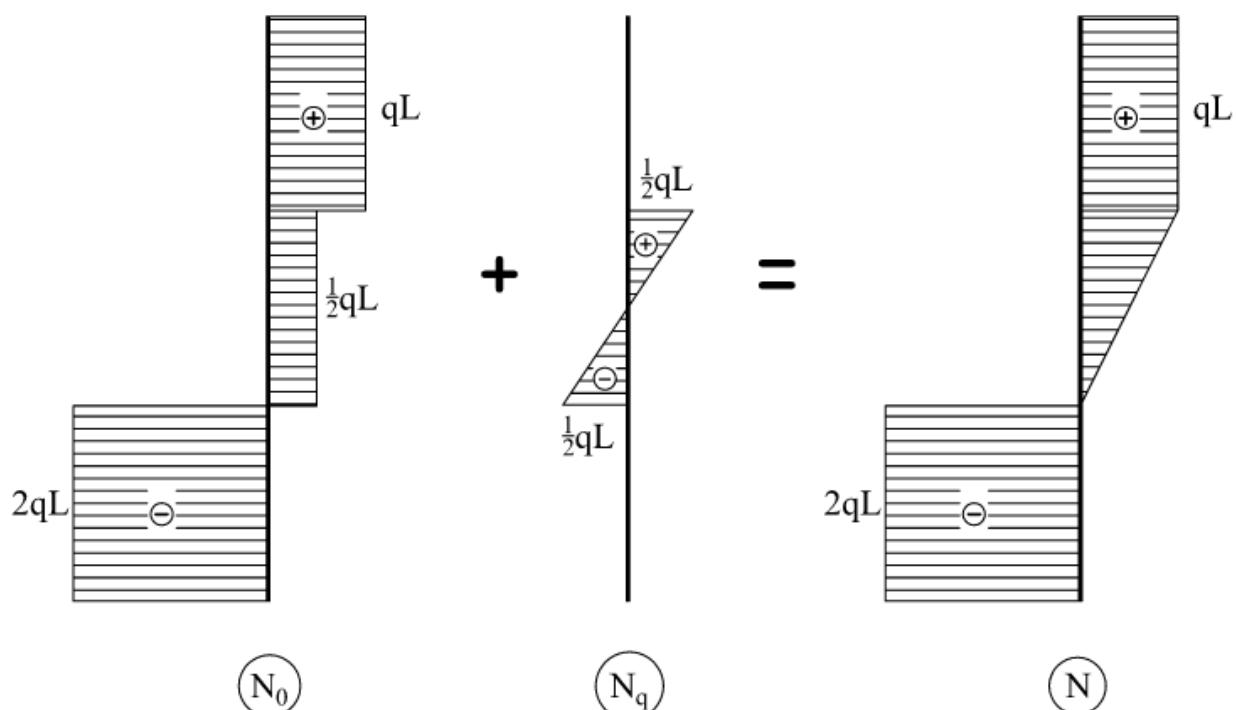
- Phần tử 2:

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{qL}{A}$$

- Phần tử 3:

$$\sigma_3 = E\varepsilon_3 = -\frac{qL}{A}$$

**e) Biểu đồ lực dọc N của thanh**



**Hình 1.32.** Biểu đồ lực dọc  $N$  của thanh

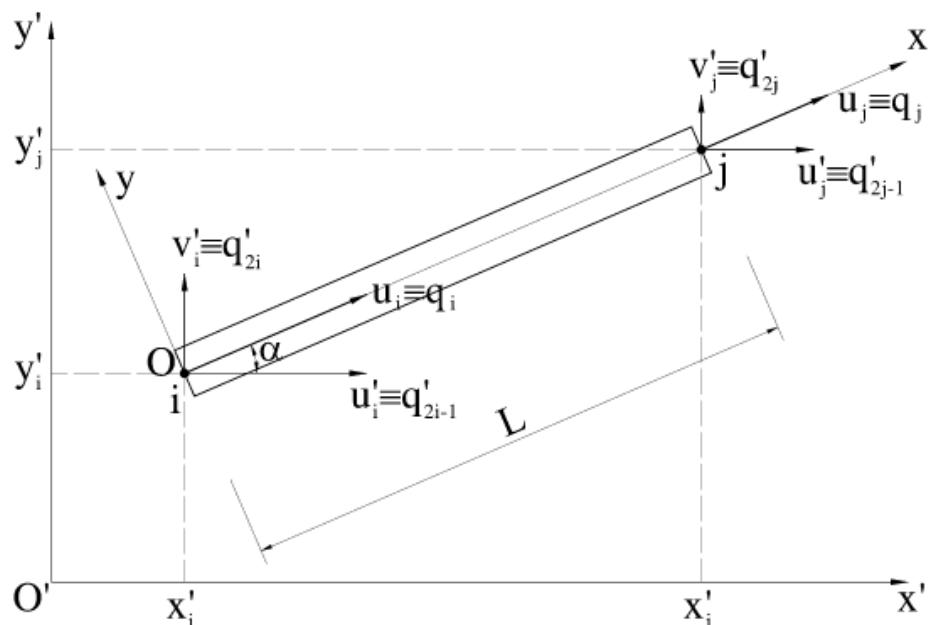
## Chương 2

# PHẦN TỬ THANH TRONG DÀN PHẲNG

## TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### Phần tử thanh trong dàn phẳng

Xét phần tử thanh trong dàn phẳng có nút đầu là nút i và nút sau là nút j như Hình 2.1. Trục thanh hợp với phương nằm ngang một góc  $\alpha$ . Hệ trục Oxy là hệ trục địa phương của phần tử đang xét. Hệ trục O'x'y' là hệ trục tổng thể (hệ trục chung cho toàn bộ tất cả các phần tử trong dàn). Tọa độ của các nút i và j trong hệ tổng thể là  $(x'_i, y'_i)$  và  $(x'_j, y'_j)$ . Chiều dài của phần tử là L.



**Hình 2.1. Phần tử thanh trong dàn phẳng**

Vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\{q'\}_e = \{u'_i, v'_i, u'_j, v'_j\}^T \equiv \{q'_{2i-1}, q'_{2i}, q'_{2j-1}, q'_{2j}\}^T$$

Các chuyển vị nút này sẽ gây ra chuyển vị 2 nút dọc theo trục thanh là  $u_1$  và  $u_2$  (hay  $q_1$  và  $q_2$ ).

$$\begin{cases} u_1 \equiv q_1 = q'_{2i-1}l_{ij} + q'_{2i}m_{ij} \\ u_2 \equiv q_2 = q'_{2j-1}l_{ij} + q'_{2j}m_{ij} \end{cases}$$

với  $l_{ij}$ ,  $m_{ij}$  là cosin chỉ phương của trục phần tử đối với hệ trục tọa độ tổng thể Ox'y':

$$l_{ij} = \cos(x, x') = \frac{x'_j - x'_i}{L} = \cos \alpha = c$$

$$m_{ij} = \cos(x, y') = \frac{y'_j - y'_i}{L} = \sin \alpha = s$$

$$L = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2}$$

Nói cách khác, vectơ chuyển vị nút phần tử trong hệ trục tọa độ địa phương.  $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}_e \equiv \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix}_e$  và vectơ chuyển vị nút trong hệ tổng thể  $\{q'\}_e$  có mối quan hệ như sau:

$$\begin{Bmatrix} q \end{Bmatrix}_e = [T]_e \begin{Bmatrix} q' \end{Bmatrix}_e$$

$(2 \times 1) \quad (2 \times 4) \quad (4 \times 1)$

trong đó,  $[T]_e$  là ma trận chuyển trực:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}_{(2 \times 4)}$$

Vậy, ma trận cứng phần tử trong hệ trục tọa độ tổng thể là:

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 & \\ l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & m_{ij}^2 & \\ \text{đx} & & & \end{bmatrix}$$

$c^2$	$cs$	$-c^2$	$-cs$
	$s^2$	$-cs$	$-s^2$
		$c^2$	$cs$
$\text{đx}$			$s^2$

Hay:  $[K']_e = \frac{EA}{L}$

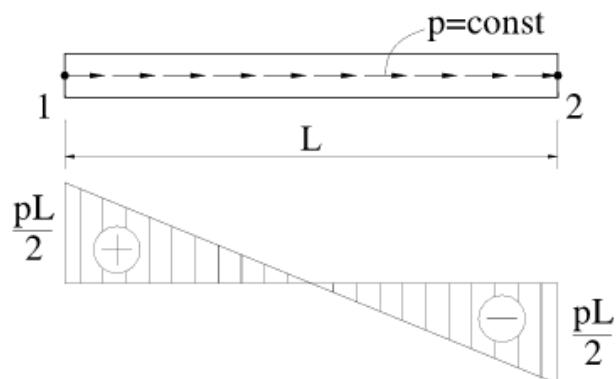
Nội lực:

$$\begin{aligned} N_e &= EA\varepsilon_x \\ &= EA[B]\{q\}_e \\ &= EA[B][T]_e \{q'\}_e \\ &= [S']_e \{q'\}_e \end{aligned}$$

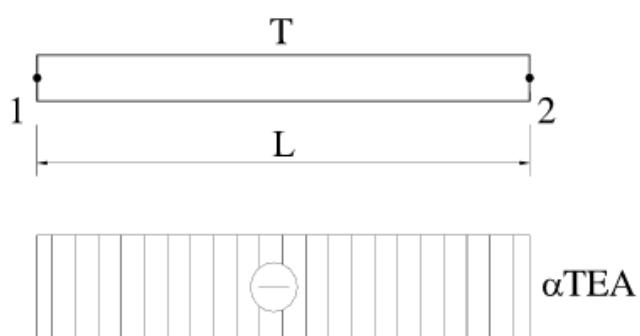
trong đó:

$$\begin{aligned} [S']_e &= EA[B][T]_e \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -l_{ij} & -m_{ij} & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nội lực tính theo biểu thức trên là do chuyển vị nút phần tử gây ra. Ngoài ra, còn có nội lực do tải trọng trên phần tử gây ra như Hình 2.2 và do nhiệt độ gây ra như Hình 2.3.



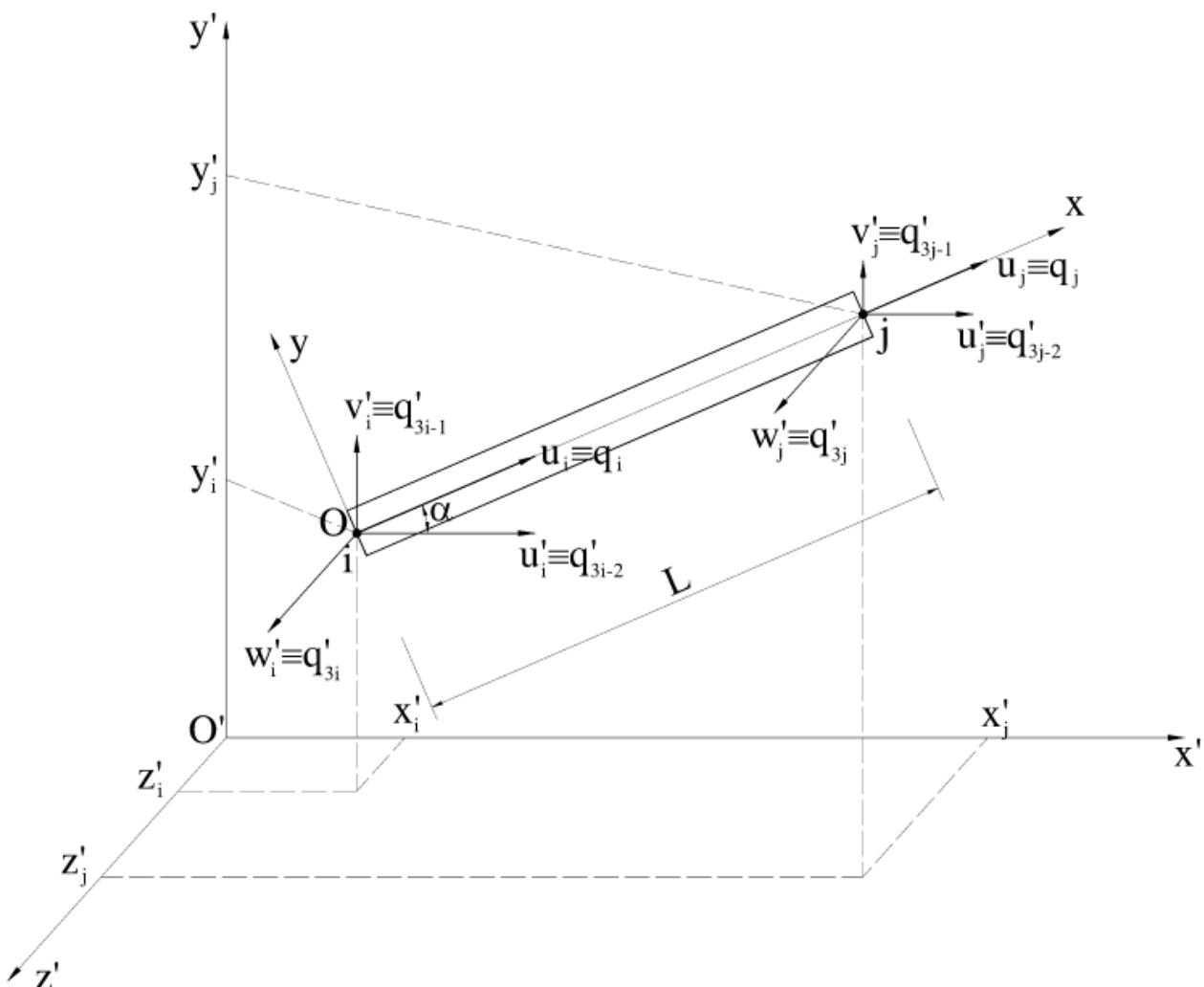
**Hình 2.2.** Nội lực do tải dọc trực trên phần tử gây ra



**Hình 2.3.** Nội lực do sự thay đổi nhiệt độ trên phần tử gây ra

### Phần tử thanh trong dàn không gian

Xét phần tử dàn không gian có nút đầu và nút cuối là các măt dàn  $i$  và  $j$ :



**Hình 2.4.** Phần tử thanh trong không gian

$$\begin{aligned}\{q'\}_e &= \{u'_i, v'_i, w'_i, u'_j, v'_j, w'_j\}^T \\ &\equiv \{q'_{3i-2}, q'_{3i-1}, q'_{3i}, q'_{3j-2}, q'_{3j-1}, q'_{3j}\}^T\end{aligned}$$

Các chuyển vị nút  $i$  và nút  $j$  gây ra chuyển vị dọc trực phần tử:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Và:  $\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$

$$\begin{pmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \times 1 \end{pmatrix}$$

trong đó:  $[T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix}_{(2 \times 6)}$

với  $l_{ij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $n_{ij}$  là các cosin chỉ phương của đường nối  $ij$  trong hệ trục tọa độ  $x'y'z'$ :

$$l_{ij} = \frac{x'_j - x'_i}{L}, m_{ij} = \frac{y'_j - y'_i}{L}, n_{ij} = \frac{z'_j - z'_i}{L}$$

và  $L = \sqrt{(x'_j - x')^2 + (y'_j - y')^2 + (z'_j - z')^2}$

Ma trận cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể là:

$$[K']_e = [T]_e [K]_e [T]_e \quad (6 \times 6) \quad (6 \times 2) \quad (2 \times 2) \quad (2 \times 6)$$

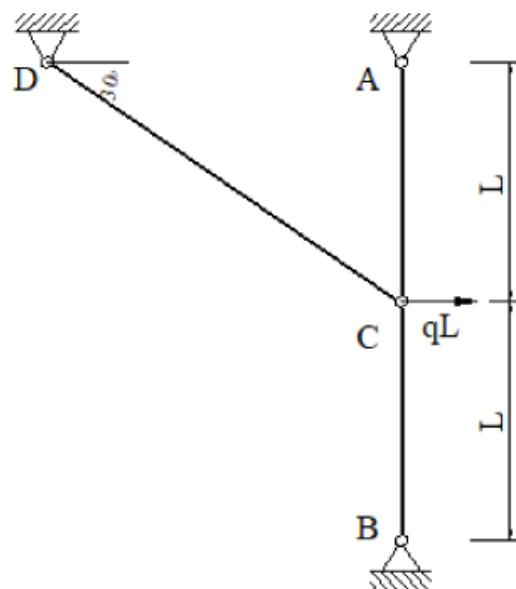
$l_{ij}^2$	$l_{ij}m_{ij}$	$l_{ij}n_{ij}$	$-l_{ij}^2$	$-l_{ij}m_{ij}$	$-l_{ij}n_{ij}$
	$m_{ij}^2$	$m_{ij}n_{ij}$	$-l_{ij}m_{ij}$	$-m_{ij}^2$	$-m_{ij}n_{ij}$
		$n_{ij}^2$	$-l_{ij}n_{ij}$	$-n_{ij}m_{ij}$	$-n_{ij}^2$
			$l_{ij}^2$	$l_{ij}m_{ij}$	$l_{ij}n_{ij}$
				$m_{ij}^2$	$m_{ij}n_{ij}$
$\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{x}$					$n_{ij}^2$

## BÀI TẬP

**Bài tập 2.1** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương ngang tại nút C như Hình 2.5. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là EA.

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

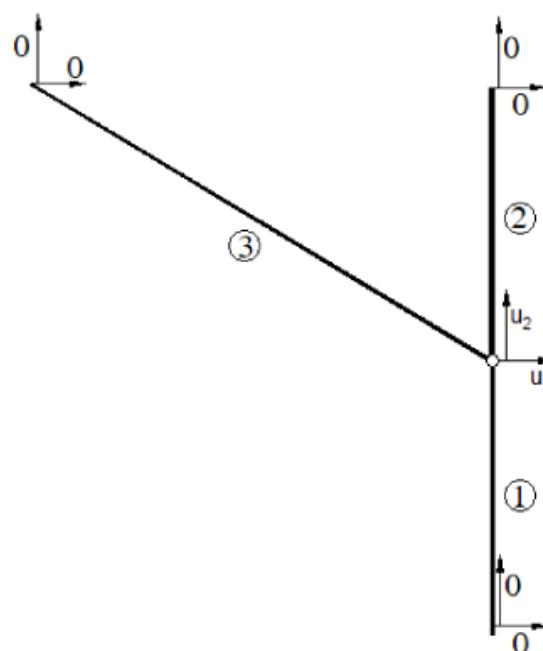
- Chuyển vị tại điểm đặt lực C.
- Xác định lực dọc trong các thanh AC, CB, CD.



**Hình 2.5.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.6.



**Hình 2.6.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

Ma trận chỉ số *phần tử b*:

$$(3 \times 4) \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
(1)	C	B	-90	0	1	0	L	A	EA/L
(2)	D	C	-90	0	1	0	L	A	EA/L
(3)	F	C	-30	0.75	0.25	-0.433	2L	A	EA/2L

Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$$[K']_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ & & c^2 & cs \\ dx & & & s^2 \end{bmatrix}$$

• Phần tử 1:  $c = 0$ ;  $s = -1$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Phần tử 2:  $c = 0$ ;  $s = -1$

$$[K']_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ dx & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 3:  $c = \sqrt{3}/2$ ;  $s = 1/2$

$$[K']_3 = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0.75 & -0.433 \\ dx & & -0.433 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.433 \\ -0.433 & 4.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{17}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ V_B \\ H_B \\ V_D \\ H_D \\ V_F \\ H_F \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \{\bar{P}^*\} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Xác định chuyền vị nút tại C:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{17}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad & \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} \frac{17}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy chuyển vị tại nút C là:

$$+ \text{Phương đứng: } u_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{PL}{EA}$$

$$+ \text{Phương ngang: } u_1 = \frac{17}{6} \frac{PL}{EA}$$

- Lực dọc trong các thanh CB, CD và CF

Véc tơ chuyển vị nút

- Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{17}{6} \frac{PL}{EA} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{PL}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{17}{6} \frac{PL}{EA} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{17}{6} \frac{PL}{EA} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix}$$

- Lực dọc thanh CB:

$$[N_1] = [S']_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{17}{6} \frac{PL}{EA} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{PL}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6} P$$

- Lực dọc thanh CD:

$$[N_2] = [S']_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{17}{6} \frac{PL}{EA} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$$

- Lực dọc thanh CF:

$$[N_3] = [S']_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{17}{6} \frac{PL}{EA} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{PL}{EA} \end{Bmatrix}$$

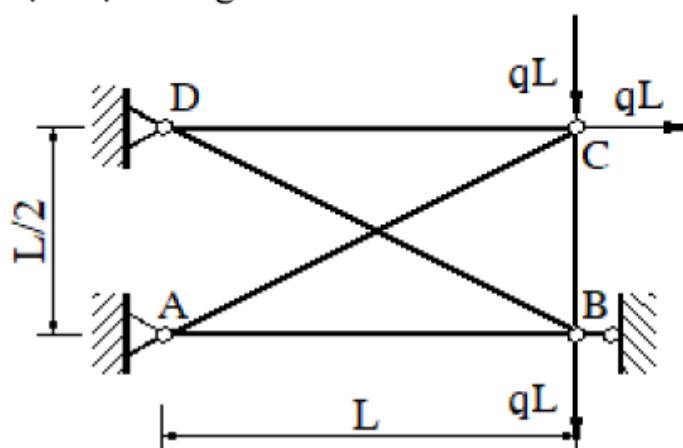
$$= \frac{1}{2} \left( \frac{17}{6} \frac{\sqrt{3}}{2} P - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{6} P \right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{6} P$$

**Bài tập 1.2** Cho hệ dàn phẳng gồm 5 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương ngang tại nút C và B như Hình 2.7. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là EA.

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

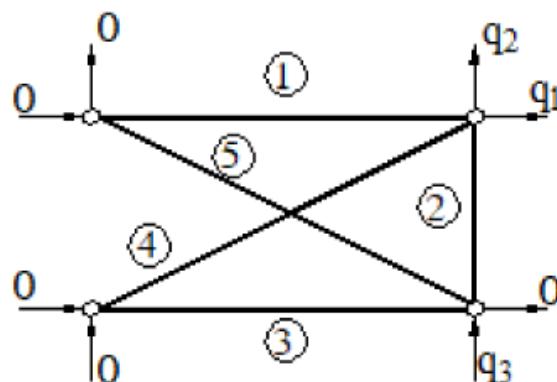
- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.



**Hình 2.7.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.8:



**Hình 2.8.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử } b: \underset{(3 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
1	D	C	0	1	0	0	L	A	EA/L
2	B	C	90	0	1	0	L/2	A	2EA/L
3	A	B	0	1	0	0	L	A	EA/L
4	A	C	26°33'	0.8	0.2	0.4	$\sqrt{5} L/2$	A	2EA/ $\sqrt{5} L$
5	D	B	-26°33'	0.8	0.2	-0.4	$\sqrt{5} L/2$	A	2EA/ $\sqrt{5} L$

Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$$[K']_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ & & c^2 & cs \\ dx & & & s^2 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 1:  $c = 1$ ;  $s = 0$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 0$ ;  $s = 1$

$$[K']_2 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & & 0 \\ dx & & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 1$ ;  $s = 0$

$$[K']_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 4:  $c = 0.89$ ;  $s = 0.45$

$$[K']_4 = \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0.8 & 0.4 \\ dx & & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 5:  $c = 0.89$ ;  $s = -0.45$

$$[K']_5 = \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0.8 & -0.4 \\ dx & & -0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (3 \times 3) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 + 0.8 \frac{2}{\sqrt{5}} & 0.4 \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0.4 \frac{2}{\sqrt{5}} & 2 + 0.2 \frac{2}{\sqrt{5}} & -2 \\ 0 & -2 & 2 + 0.2 \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1.716 & 0.358 & 0 \\ 0.358 & 2.179 & -2 \\ 0 & -2 & 2.179 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Vector tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{Bmatrix} V_A \\ H_A \\ V_B \\ -qL \\ qL \\ -qL \\ V_D \\ H_D \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{P^*\} = \begin{Bmatrix} qL \\ -qL \\ -qL \end{Bmatrix} \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

Xác định chuyển vị nút tại B và C:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ & \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1.716 & 0.358 & 0 \\ 0.358 & 2.179 & -2 \\ 0 & -2 & 2.179 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL \\ -qL \\ -qL \end{Bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} 2.234 \\ -7.917 \\ -7.725 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy chuyển vị tại nút C là:

$$+ \text{Phương đứng: } q_2 = -7.917 \frac{qL^2}{EA}$$

$$+ \text{Phương ngang: } q_1 = 2.234 \frac{qL^2}{EA}$$

Vậy chuyển vị tại nút B là:

$$+ \text{Phương đứng: } q_3 = -7.725 \frac{qL^2}{EA}$$

Lực dọc trong các thanh AB, BC, CD, AC và DB

Véc tơ chuyển vị nút

$$\text{Phần tử 1: } \{q\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.234 \frac{qL^2}{EA} \\ -7.917 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 2: } \{q\}_2 = \begin{Bmatrix} 2.234 \frac{qL^2}{EA} \\ -7.917 \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ -7.725 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 3: } \{q\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.725 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 4: } \{q\}_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.234 \frac{qL^2}{EA} \\ -7.917 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 5: } \{q\}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.725 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

Lực dọc thanh DC:

$$\begin{aligned} [N_1] &= [S']_1 \{q\}_1 \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.234 \frac{qL^2}{EA} \\ -7.917 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} \\ &= 2.234qL \end{aligned}$$

Lực dọc thanh BC:

$$\begin{aligned} [N_2] &= [S']_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.234 \frac{qL^2}{EA} \\ -7.917 \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ -7.725 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} \\ &= 7.917qL - 7.725qL \\ &= 0.192qL \end{aligned}$$

Lực dọc thanh AB:

$$\begin{aligned} [N_3] &= [S']_3 \{q\}_3 \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.725 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Lực dọc thanh AC:

$$\begin{aligned}[N_4] &= [S']_4 \{q\}_4 \\ &= \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} -0.89 & -0.45 & 0.89 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.234 \frac{qL^2}{EA} \\ -7.917 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{10.9575}{\sqrt{5}} qL \end{aligned}$$

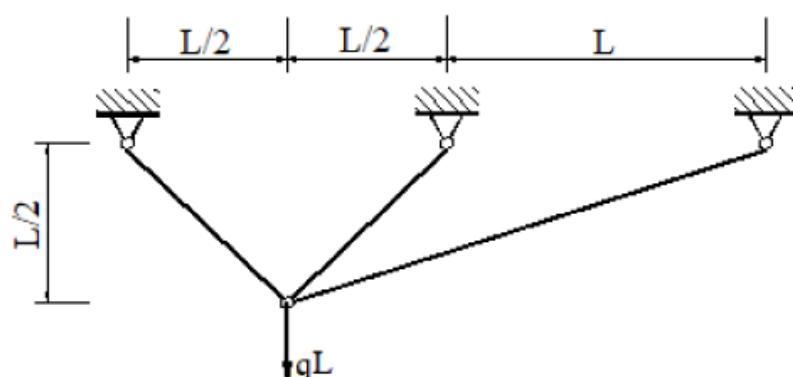
Lực dọc thanh DB:

$$\begin{aligned}[N_5] &= [S']_5 \{q\}_5 \\ &= \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} -0.89 & 0.45 & 0.89 & -0.45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.725 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{6.9525}{\sqrt{5}} qL \end{aligned}$$

**Bài tập 2.3** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc tại nút như Hình 2.9. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là EA.

Sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn, hãy xác định:

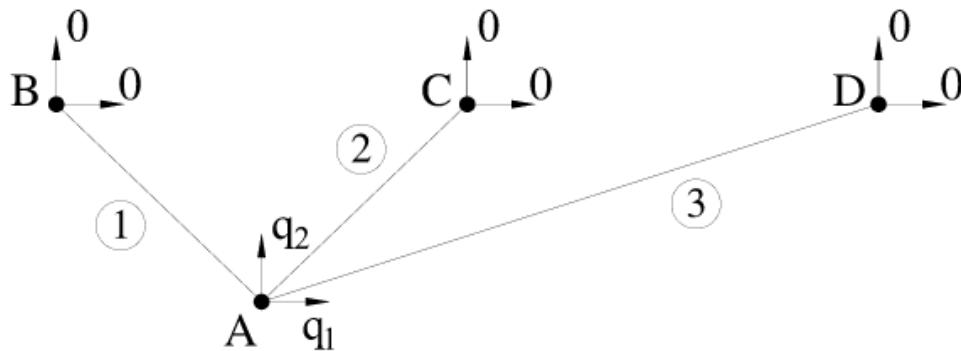
- a) Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- b) Xác định lực dọc trong các thanh.



**Hình 2.9.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.10:



**Hình 2.10.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử } b: \begin{matrix} b \\ (3 \times 4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
(1)	B	A	-45	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{2}L/2$	A	$\sqrt{2}EA/L$
(2)	A	C	45	1/2	1/2	1/2	$\sqrt{2}L/2$	A	$\sqrt{2}EA/L$
(3)	A	D	-18.43	9/10	1/10	3/10	$\sqrt{10}L/2$	A	$2EA/\sqrt{10}L$

Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = \sqrt{2}/2; s = -\sqrt{2}/2$

$$[K']_1 = \frac{\sqrt{2}EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = \sqrt{2} / 2; s = \sqrt{2} / 2$

$$[K']_2 = \frac{\sqrt{2}EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & \dots & \dots \\ 1/2 & 1/2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 \\ dx & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 3 / \sqrt{10}; s = 1 / \sqrt{10}$

$$[K']_3 = \frac{2EA}{\sqrt{10}L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 9/10 & 3/10 & \dots & \dots \\ 3/10 & 1/10 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 \\ dx & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

→ Ma trận độ cứng tông thê:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 + 9/5\sqrt{10} & 3/10 \\ 3/10 & \sqrt{2}/2 + 1/5\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{9\sqrt{10} + 25\sqrt{2}}{50} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{\sqrt{10} + 25\sqrt{2}}{50} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tông thê

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ -qL \\ H_B \\ V_B \\ H_C \\ V_C \\ H_D \\ V_D \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \{\overline{P}^*\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -qL \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Xác định chuyển vị nút tại A:

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{9\sqrt{10} + 25\sqrt{2}}{50} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{\sqrt{10} + 25\sqrt{2}}{50} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qL \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} 0.3358 \\ -1.4289 \end{bmatrix}$$

Vậy chuyển vị tại nút A là:

+ Phương đứng:

$$q_2 = -1.4289 \frac{qL^2}{EA}$$

+ Phương ngang:

$$q_1 = 0.3358 \frac{qL^2}{EA}$$

- Lực dọc trong các thanh AB, AC và AD

• Lực dọc thanh AB:

$$\begin{aligned} [N_1] &= [S']_1 \{ q \}_1 \\ &= \frac{\sqrt{2}EA}{L} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3358 \frac{qL^2}{EA} \\ -1.4289 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} \\ &= 1.7647qL \end{aligned}$$

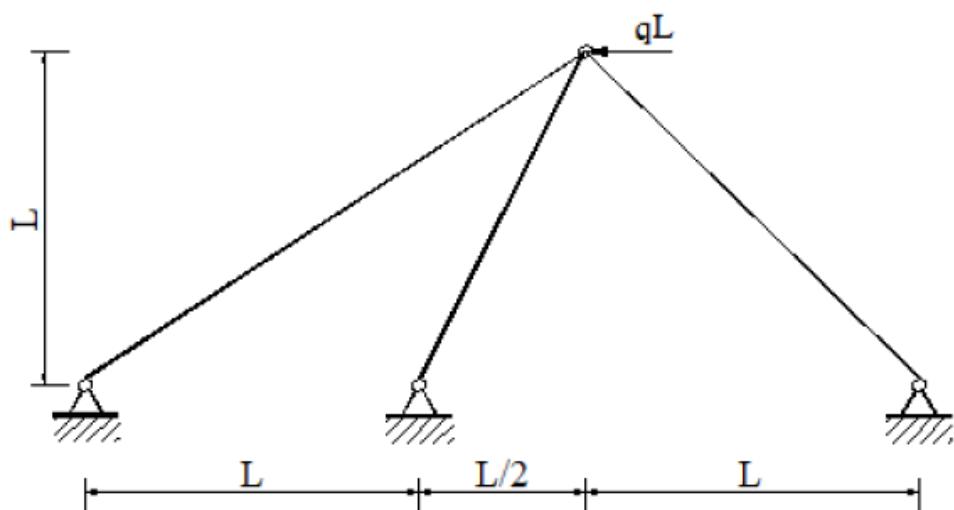
- Lực dọc thanh AC:

$$\begin{aligned} [N_2] &= [S']_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{\sqrt{2}EA}{L} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3358 \frac{qL^2}{EA} \\ -1.4289 \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= 1.0931qL \end{aligned}$$

- Lực dọc thanh AD:

$$\begin{aligned} [N_3] &= [S']_3 \{q\}_3 \\ &= \frac{2EA}{\sqrt{10}L} \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3358 \frac{qL^2}{EA} \\ -1.4289 \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= 0.0843qL \end{aligned}$$

**Bài tập 2.4** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương ngang tại nút như Hình 2.11. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là EA.



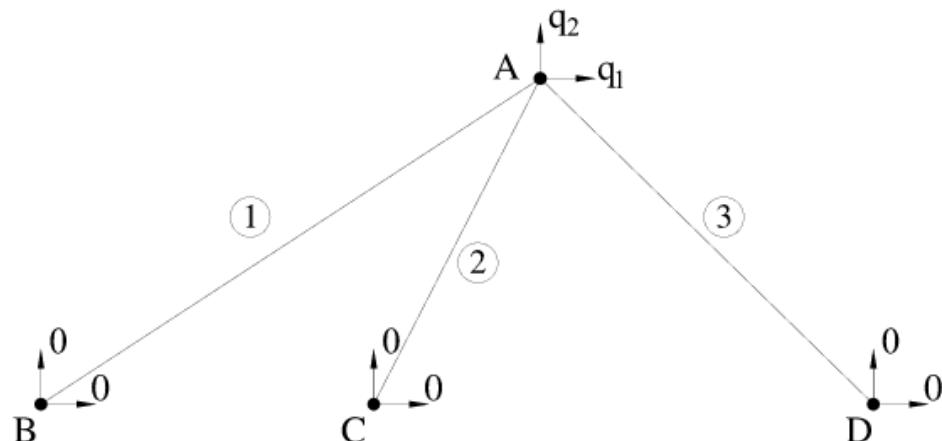
**Hình 2.11.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- a) Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- b) Xác định lực dọc trong các thanh.

**Giải:**

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.12:



**Hình 2.12.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử } b: \begin{matrix} b \\ (3 \times 4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
(1)	B	A	33.69	9/13	4/13	6/13	$\sqrt{13}L/2$	A	$2EA/\sqrt{13}L$
(2)	C	A	63.43	1/5	4/5	2/5	$\sqrt{5}L/2$	A	$2EA/\sqrt{5}L$
(3)	A	D	-45	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{2}L$	A	$EA/\sqrt{2}L$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 3 / \sqrt{13}; s = 2 / \sqrt{13}$

$$[K']_1 = \frac{2EA}{\sqrt{13}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx & 6/13 & 9/13 & 6/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 1/\sqrt{5}; s = 2/\sqrt{5}$

$$[K']_2 = \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d\mathbf{x} & & 1/5 & 2/5 \\ & & 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:  $c = \sqrt{2}/2; s = -\sqrt{2}/2$

$$[K']_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & \dots & \dots \\ -1/2 & 1/2 & \dots & \dots \\ d\mathbf{x} & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.9165 & 0.2602 \\ 0.2602 & 1.2398 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} -qL \\ 0 \\ H_B \\ V_B \\ H_C \\ 0 \\ V_C \\ H_D \\ 0 \\ V_D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \{\overline{P}^*\} = \begin{bmatrix} -qL \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Xác định chuyển vị nút tại A:

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}^* \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{P}^* \\ \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.9165 & 0.2602 \\ 0.2602 & 1.2398 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} -1.1603 \\ 0.2436 \end{bmatrix}$$

Vậy chuyển vị tại nút A là:

+ Phương đứng:  $q_2 = 0.2436 \frac{qL^2}{EA}$

+ Phương ngang:  $q_1 = -1.1603 \frac{qL^2}{EA}$

- Lực dọc trong các thanh AB, AC và AD

• Lực dọc thanh AB:

$$[N_1] = [S']_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{2EA}{\sqrt{13}L} \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.1603 \frac{qL^2}{EA} \\ 0.2436 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$= -0.4606qL$$

• Lực dọc thanh AC:

$$[N_2] = [S']_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.1603 \frac{qL^2}{EA} \\ 0.2436 \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$= -0.2692qL$$

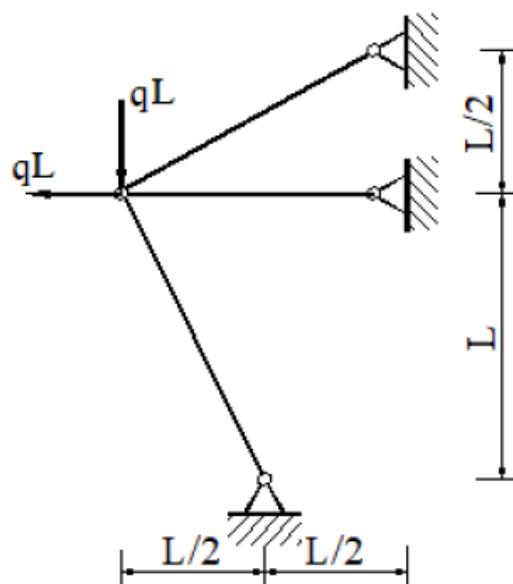
- Lực dọc thanh AD:

$$[N_3] = [S']_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.1603 \frac{qL^2}{EA} \\ 0.2436 \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 0.7020qL$$

**Bài tập 2.5** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc và ngang tại nút như Hình 2.13. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là  $EA$ .



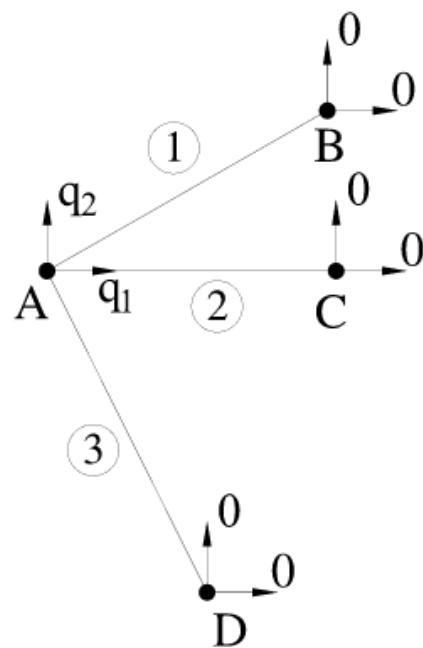
**Hình 2.13.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.

**Giải:**

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.14:



**Hình 2.14.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử b: } \underset{(3 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	l	F	EA/L
(1)	A	B	26.56	4/5	1/5	2/5	$\sqrt{5}L/2$	A	$2EA/\sqrt{5}L$
(2)	A	C	0	1	0	0	L	A	$EA/L$
(3)	A	D	-63.43	1/5	4/5	-2/5	$\sqrt{5}L/2$	A	$2EA/\sqrt{5}L$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 2/\sqrt{5}; s = 1/\sqrt{5}$

$$[K']_1 = \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4/5 & 2/5 & \dots & \dots \\ 2/5 & 1/5 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ dx & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ d\mathbf{x} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}^0$$

- Phần tử 3:  $c = 1/\sqrt{5}; s = -2/\sqrt{5}$

$$[K']_3 = \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & \dots & \dots \\ -2/5 & 4/5 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ d\mathbf{x} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}^0$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{5+2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix}^1$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} -qL \\ -qL \\ H_B \\ V_B \\ H_C \\ V_C \\ H_D \\ V_D \end{bmatrix}^0$$

$$\Rightarrow \{\overline{P^*}\} = \begin{bmatrix} -qL \\ -qL \end{bmatrix}^1$$

- Xác định chuyển vị nút tại A:

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{5+2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ -qL \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} -5+2\sqrt{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Vậy chuyển vị tại nút A là:

+ Phương đứng:

$$q_2 = \frac{-\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA}$$

+ Phương ngang:

$$q_1 = (-5+2\sqrt{5}) \frac{qL^2}{EA}$$

- Lực dọc trong các thanh AB, AC và AD

• Lực dọc thanh AB:

$$[N_1] = [S']_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (-5+2\sqrt{5}) \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{20-7\sqrt{5}}{5} qL$$

- Lực dọc thanh AC:

$$[N_2] = [S']_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EA}{L} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} (-5 + 2\sqrt{5}) \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = (5 - 2\sqrt{5}) qL$$

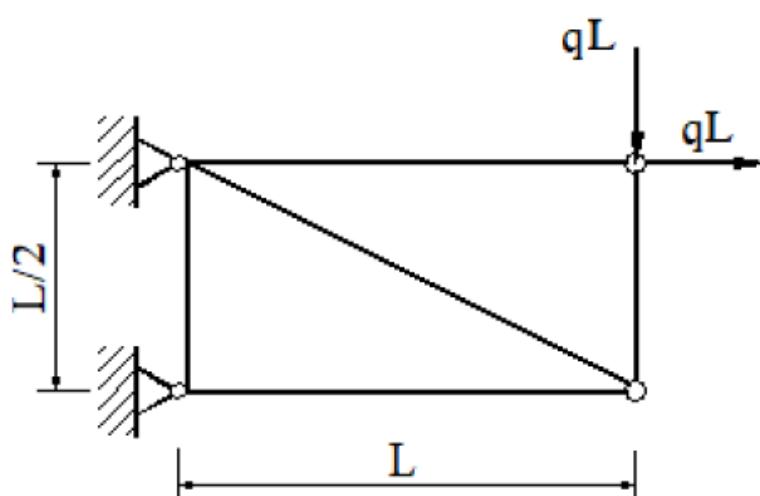
- Lực dọc thanh AD:

$$[N_3] = [S']_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \left[ -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad -\frac{2}{\sqrt{5}} \right] \begin{Bmatrix} (-5 + 2\sqrt{5}) \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{10 - 6\sqrt{5}}{5} qL$$

**Bài tập 2.6** Cho hệ dàn phẳng gồm 5 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc và ngang tại nút như Hình 2.15. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là EA.



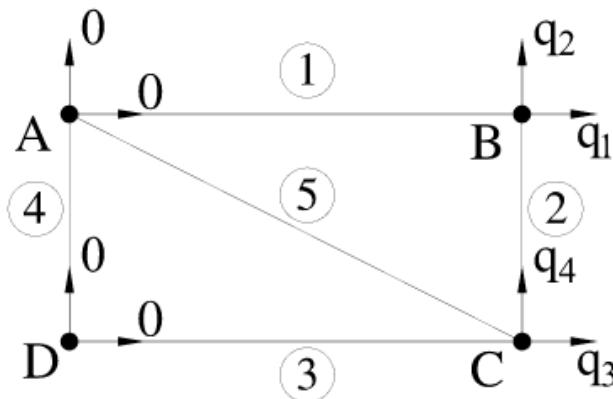
Hình 2.15. Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.

### Giải

Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.16:



**Hình 2.16.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử } b: \quad b_{(5 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
1	A	B	0	1	0	0	L	A	EA/L
2	C	B	90	0	1	0	L/2	A	2EA/L
3	D	C	0	1	0	0	L	A	EA/L
4	D	A	90	0	1	0	L/2	A	2EA/L
5	A	C	$26^{\circ}33'$	$4/5$	$1/5$	$-2/5$	$\sqrt{5} L/2$	A	$2EA/\sqrt{5} L$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_2 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

- Phần tử 4:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_4 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ dx & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Phần tử 5:  $c = 2 / \sqrt{5}; s = -1 / \sqrt{5}$

$$[K']_5 = \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 4/5 & -2/5 \\ dx & & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}^* \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{8}{5\sqrt{5}} & -\frac{4}{5\sqrt{5}} \\ 0 & -2 & -\frac{4}{5\sqrt{5}} & 2 + \frac{2}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ qL \\ -qL \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_D \\ V_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{\bar{P}^*\} = \begin{bmatrix} qL \\ -qL \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Xác định chuyển vị nút tại B và C:

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}^* \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{8}{5\sqrt{5}} & -\frac{4}{5\sqrt{5}} \\ 0 & -2 & -\frac{4}{5\sqrt{5}} & 2 + \frac{2}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL \\ -qL \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{9+5\sqrt{5}}{2} \\ 2 \\ -2 \\ -\frac{8+5\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Vậy chuyển vị tại nút B là:

+ Phương đứng:

$$q_2 = -\frac{9+5\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA}$$

+ Phương ngang:

$$q_1 = \frac{qL^2}{EA}$$

Vậy chuyển vị tại nút C là:

+ Phương đứng:

$$q_4 = -\frac{8+5\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA}$$

+ Phương ngang:

$$q_3 = -2 \frac{qL^2}{EA}$$

- Lực dọc trong các thanh AB, BC, CD, AC và DA

• Lực dọc thanh AB:

$$[N_1] = [S']_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EA}{L} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{9+5\sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix} = qL$$

- Lực dọc thanh BC:

$$[N_2] = [S']_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{2EA}{L} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{Bmatrix} -2 \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{8+5\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA} \\ \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{9+5\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -qL$$

- Lực dọc thanh AB:

$$[N_3] = [S']_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EA}{L} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{8+5\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -2qL$$

- Lực dọc thanh AC:

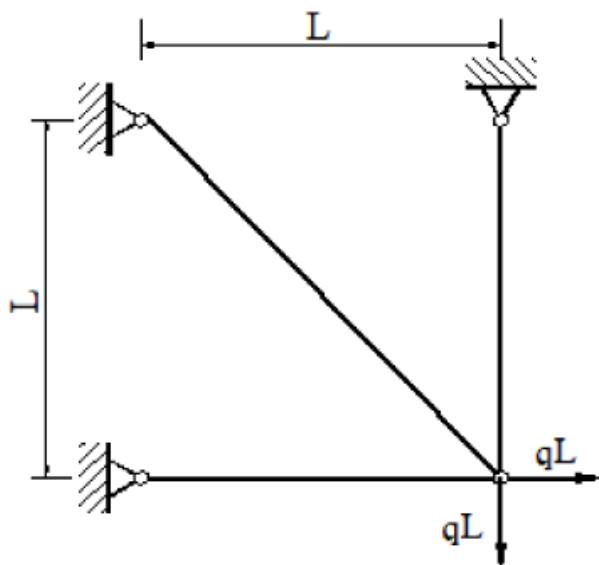
$$[N_4] = [S']_4 \{q\}_4 = \frac{2EA}{L} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

- Lực dọc thanh DA:

$$[N_5] = [S']_5 \{q\}_5$$

$$= \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \left[ -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \quad -\frac{1}{\sqrt{5}} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{8+5\sqrt{5}}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = qL$$

**Bài tập 2.7** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc và ngang tại nút Hình 2.17. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là  $EA$ .



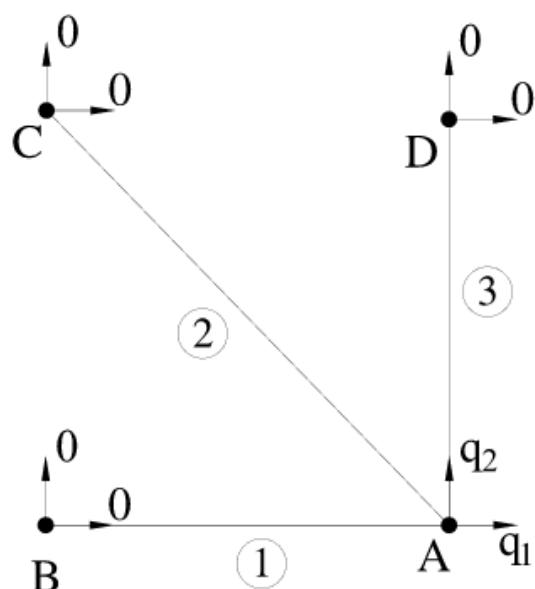
**Hình 2.17.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.18:



**Hình 2.18.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử b: } \underset{(3 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	cs	1	F	EA/L
(1)	B	A	0	1	0	0	$L$	A	$EA/L$
(2)	C	A	-45	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$\sqrt{2}L$	A	$EA/\sqrt{2}L$
(3)	A	D	90	0	1	0	$L$	A	$EA/L$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = \sqrt{2}/2; s = -\sqrt{2}/2$

$$[K']_2 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1/2 & -1/2 \\ dx & & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ dx & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{4+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} qL \\ -qL \\ H_B \\ V_B \\ H_C \\ V_C \\ H_D \\ V_D \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{P^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL \\ -qL \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Xác định chuyển vị nút tại A:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \begin{bmatrix} \bar{K}^* \end{bmatrix} \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{4+\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{4+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL \\ -qL \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad & \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy chuyển vị tại nút A là:

$$+ Phương đúng: q_2 = (-2 + \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA}$$

$$+ Phương ngang: q_1 = (2 - \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA}$$

- Lực dọc trong các thanh AB, AC và AD

- Lực dọc thanh AB:

$$[N_1] = [S']_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2 - \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \\ (-2 + \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = (2 - \sqrt{2}) qL$$

- Lực dọc thanh AC:

$$[N_2] = [S']_2 \{q\}_2$$

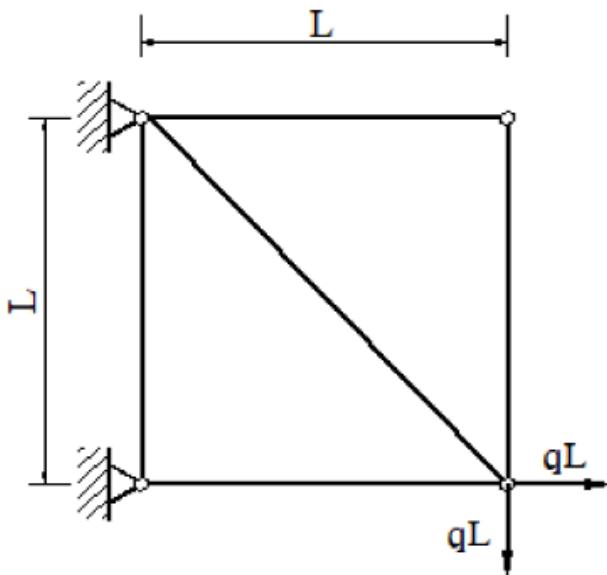
$$= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2 - \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \\ (-2 + \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = (2 - \sqrt{2}) qL$$

- Lực dọc thanh AD:

$$[N_3] = [S']_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (2 - \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \\ (-2 + \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = (2 - \sqrt{2}) qL$$

**Bài tập 2.8** Cho hệ dàn phẳng gồm 5 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc và ngang tại nút như Hình 2.19. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là  $EA$ .



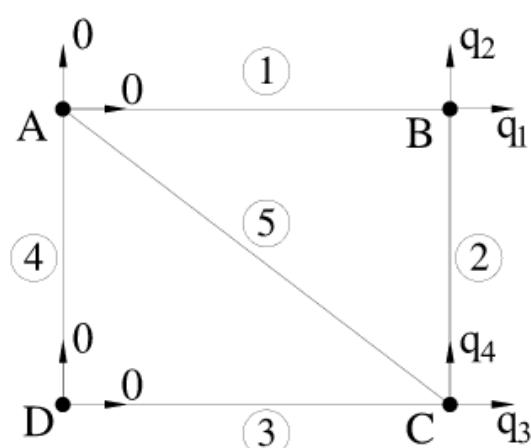
**Hình 2.19.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.20:



**Hình 2.20.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử } b: \begin{matrix} b \\ (5 \times 4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	cs	1	F	EA/L
1	A	B	0	1	0	0	L	A	EA/L
2	C	B	90	0	1	0	L	A	EA/L
3	D	C	0	1	0	0	L	A	EA/L
4	D	A	90	0	1	0	L	A	EA/L
5	A	C	-45	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{2}$ L	A	EA/ $\sqrt{2}$ L

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

- Phần tử 4:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_4 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d\mathbf{x} & & \dots & \dots \end{bmatrix}^0_0$$

- Phần tử 5:  $c = 2/\sqrt{5}; s = -1/\sqrt{5}$

$$[K']_5 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d\mathbf{x} & & 1/2 & -1/2 \\ & & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^0_0_3_4$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}^1_2_3_4$$

Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ 0 \\ 0 \\ qL \\ -qL \\ H_D \\ V_D \end{bmatrix}^0_0_1_2_3_4_0_0$$

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P}^* \right\} = \begin{cases} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ qL & 3 \\ -qL & 4 \end{cases}$$

- Xác định chuyển vị nút tại B và C:

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ qL \\ -qL \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vậy chuyển vị tại nút B là:

+ Phương đứng:

$$q_2 = -2\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA}$$

+ Phương ngang:  $q_1 = 0$

Vậy chuyển vị tại nút C là:

+ Phương đứng:

$$q_4 = -2\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA}$$

+ Phương ngang:  $q_3 = 0$

Lực dọc trong các thanh AB, BC, CD, AC và DA

- Lực dọc thanh AB:

$$\begin{aligned}[N_1] &= [S']_1 \{q\}_1 \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = 0\end{aligned}$$

- Lực dọc thanh BC:

$$\begin{aligned}[N_2] &= [S']_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = 0\end{aligned}$$

- Lực dọc thanh DC:

$$\begin{aligned}[N_3] &= [S']_3 \{q\}_3 \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = 0\end{aligned}$$

- Lực dọc thanh AC:

$$[N_4] = [S']_4 \{q\}_4 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

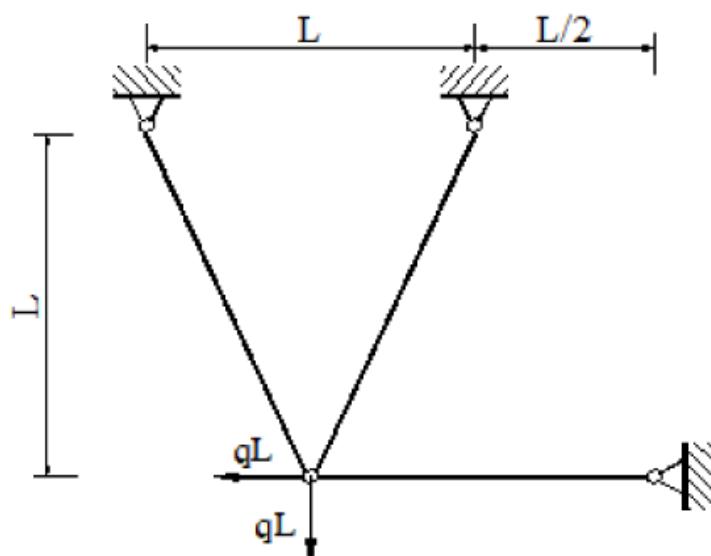
- Lực dọc thanh DA:

$$[N_5] = [S']_5 \{q\}_5$$

$$= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$= \sqrt{2}qL$$

**Bài tập 2.9** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc và ngang tại nút như Hình 2.21. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là EA.



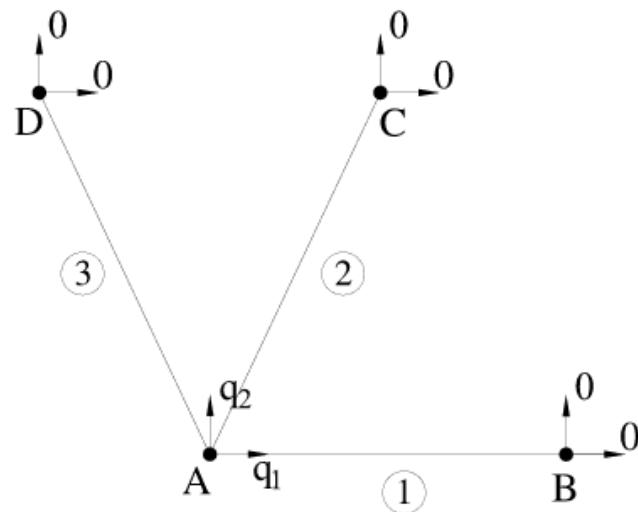
**Hình 2.21.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.22:



**Hình 2.22.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

Ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(3 \times 4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
(1)	A	B	0	1	0	0	L	A	$EA/L$
(2)	A	C	45	1/2	1/2	1/2	$\sqrt{2}L$	A	$EA/\sqrt{2}L$
(3)	D	A	-45	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{2}L$	A	$EA/\sqrt{2}L$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ dx & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}^1_2_0_0$$

- Phần tử 2:  $c = \sqrt{2} / 2; s = -\sqrt{2} / 2$

$$[K']_2 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & \dots & \dots \\ 1/2 & 1/2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 \\ d\mathbf{x} & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_2 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d\mathbf{x} & & 1/2 & -1/2 \\ & & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{2 + \sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} -qL \\ -qL \\ H_B \\ V_B \\ H_C \\ V_C \\ H_D \\ V_D \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \{\overline{P^*}\} = \begin{bmatrix} -qL \\ -qL \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Xác định chuyển vị nút tại A:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \quad [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ -qL \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow & \quad \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} -2+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy chuyển vị tại nút A là:

+ Phương đứng:

$$q_2 = -\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA}$$

+ Phương ngang:

$$q_1 = (-2 + \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA}$$

Lực dọc trong các thanh AB, AC và AD

• Lực dọc thanh AB:

$$\begin{aligned} [N_1] &= [S']_1 \{ q \}_1 \\ &= \frac{EA}{L} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} (-2 + \sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \\ -\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= (2 - \sqrt{2}) qL \end{aligned}$$

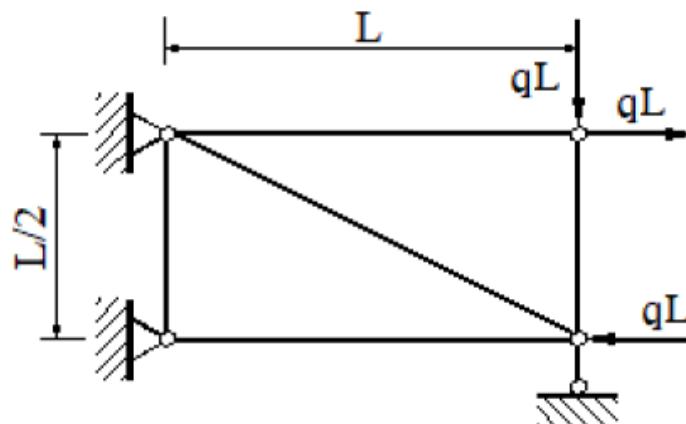
- Lực dọc thanh AC:

$$\begin{aligned}[N_2] &= [S']_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \begin{Bmatrix} \left( -2 + \sqrt{2} \right) \frac{qL^2}{EA} \\ -\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= qL \end{aligned}$$

- Lực dọc thanh AD:

$$\begin{aligned}[N_3] &= [S']_3 \{q\}_3 \\ &= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left( -2 + \sqrt{2} \right) \frac{qL^2}{EA} \\ -\sqrt{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} \\ &= \left( -1 + \sqrt{2} \right) qL \end{aligned}$$

**Bài tập 2.10** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc và ngang tại nút như Hình 2.23. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là  $EA$ .



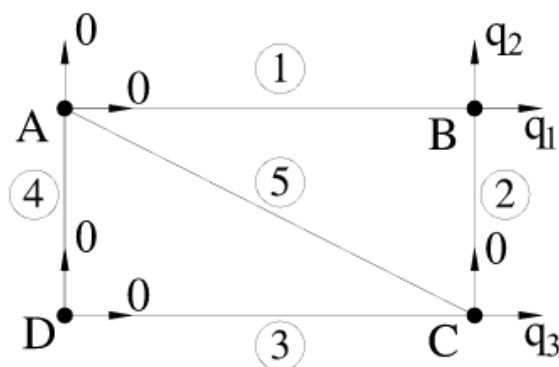
**Hình 2.23.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.24:



**Hình 2.24.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(5 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
1	A	B	0	1	0	0	L	A	EA/L
2	C	B	90	0	1	0	L/2	A	2EA/L
3	D	C	0	1	0	0	L	A	EA/L
4	D	A	90	0	1	0	L/2	A	2EA/L
5	A	C	-26°33'	4/5	1/5	-2/5	$\sqrt{5} L/2$	A	$2EA/\sqrt{5} L$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_2 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ dx & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}$$

- Phần tử 4:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_4 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ dx & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Phần tử 5:  $c = 2/\sqrt{5}; s = -1/\sqrt{5}$

$$[K']_5 = \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx & & 4/5 & -2/5 \\ & & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{8}{5\sqrt{5}} & 3 \end{bmatrix}$$

Vectơ tải tổng thể

$$\{P'\} = \{0\} + \{P'\}_n = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ qL \\ -qL \\ 0 \\ 0 \\ H_D \\ V_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\overline{P^*}\} = \begin{bmatrix} qL \\ -qL \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Xác định chuyển vị nút tại B và C:

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{8}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL \\ -qL \\ -qL \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{25}{25+8\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Vậy chuyển vị tại nút B là:

$$+ Phương đúng: q_2 = -\frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA}$$

$$+ Phương ngang: q_1 = \frac{qL^2}{EA}$$

Vậy chuyển vị tại nút C là:

+ Phương ngang:

$$q_3 = -\frac{25}{25+8\sqrt{5}} \frac{qL^2}{EA}$$

- Lực dọc trong các thanh AB, BC, CD, AC và DA

- Lực dọc thanh AB:

$$[N_1] = [S']_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EA}{L} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = qL$$

- Lực dọc thanh BC:

$$[N_2] = [S']_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{2EA}{L} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{Bmatrix} -\frac{25}{25+8\sqrt{5}} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{EA} \\ -\frac{1}{2} \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$= -qL$$

- Lực dọc thanh AB:

$$[N_3] = [S']_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EA}{L} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{25}{25+8\sqrt{5}} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= -\frac{25}{25+8\sqrt{5}} qL$$

- Lực dọc thanh AC:

$$[N_4] = [S']_4 \{q\}_4$$

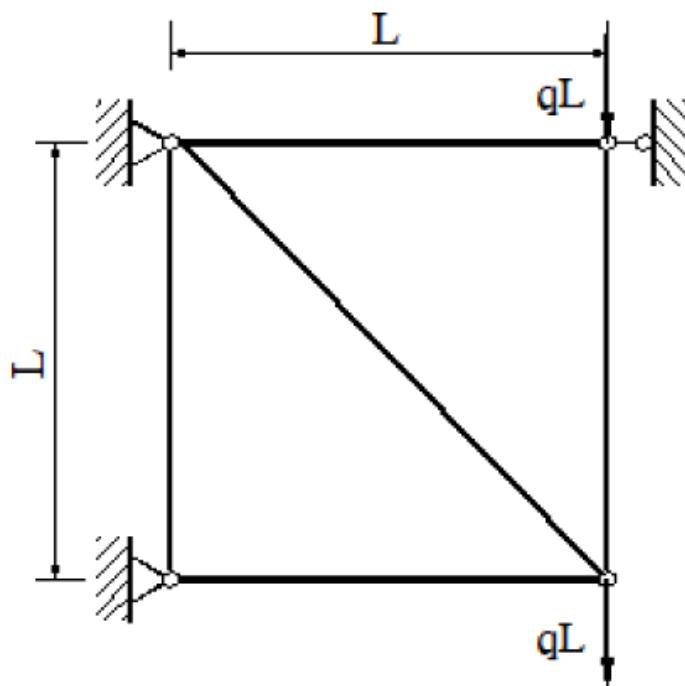
$$= \frac{2EA}{L} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

- Lực dọc thanh DA:

$$[N_5] = [S']_5 \{q\}_5$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2EA}{\sqrt{5}L} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{25}{25+8\sqrt{5}} \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{20}{25+8\sqrt{5}} qL \end{aligned}$$

**Bài tập 2.11** Cho hệ dàn phẳng gồm 3 thanh dàn liên kết và chịu lực  $P = qL$  theo phương dọc và ngang tại nút như Hình 2.25. Các thanh có cùng giá trị độ cứng là  $EA$ .



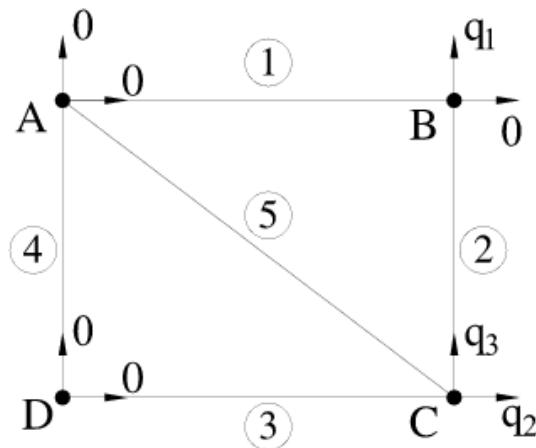
**Hình 2.25.** Sơ đồ kết cấu hệ giàn

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại điểm đặt lực.
- Xác định lực dọc trong các thanh.

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, đánh số phần tử, nút phần tử như Hình 2.26:



**Hình 2.26.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

$$\text{Ma trận chỉ số phần tử } b: \underset{(5 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j	$\alpha$	$c^2$	$s^2$	$cs$	1	F	EA/L
1	A	B	0	1	0	0	L	A	EA/L
2	C	B	90	0	1	0	L	A	EA/L
3	D	C	0	1	0	0	L	A	EA/L
4	D	A	90	0	1	0	L	A	EA/L
5	A	C	-45	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{2} L$	A	$EA/\sqrt{2} L$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dx & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Phân tử 2:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

- Phân tử 3:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 \\ d\mathbf{x} & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Phân tử 4:  $c = 0; s = 1$

$$[K']_4 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ d\mathbf{x} & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Phân tử 5:  $c = 2 / \sqrt{5}; s = -1 / \sqrt{5}$

$$[K']_5 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1/2 & -1/2 \\ d\mathbf{x} & & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

→ Ma trận độ cứng tông thê:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Vectơ tải tông thê

$$\begin{aligned} \{P'\} &= \{0\} + \{P'\}_n = \begin{cases} H_A \\ V_A \\ 0 \\ -qL \\ 0 \\ -qL \\ H_D \\ V_D \end{cases} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad \{\overline{P}^*\} &= \begin{cases} -qL \\ 0 \\ -qL \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- Xác định chuyển vị nút tại B và C:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} &= \{ \bar{P}^* \} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} &= \begin{cases} -qL \\ 0 \\ -qL \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{qL^2}{EA} \begin{Bmatrix} -3-4\sqrt{2} \\ -2 \\ -2-4\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

Vậy chuyển vị tại nút B là:

+ Phương đứng:  $q_1 = (-3-4\sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA}$

Vậy chuyển vị tại nút C là:

+ Phương đứng:  $q_3 = (-2-4\sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA}$

+ Phương ngang:  $q_2 = -2 \frac{qL^2}{EA}$

- Lực dọc trong các thanh AB, BC, CD, AC và DA

• Lực dọc thanh AB:

$$[N_1] = [S']_1 \{q\}_1 = \frac{EA}{L} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (-3-4\sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = 0$$

• Lực dọc thanh BC:

$$[N_2] = [S']_2 \{q\}_2 = \frac{EA}{L} [0 \ -1 \ 0 \ 1] \begin{Bmatrix} -2 \frac{qL^2}{EA} \\ (-2-4\sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \\ 0 \\ (-3-4\sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -qL$$

- Lực dọc thanh DC:

$$[N_3] = [S']_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EA}{L} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \frac{qL^2}{EA} \\ (-2 - 4\sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix} = -2qL$$

- Lực dọc thanh AC:

$$[N_4] = [S']_4 \{q\}_4 = \frac{EA}{L} [0 \ -1 \ 0 \ 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

- Lực dọc thanh DA:

$$[N_5] = [S']_5 \{q\}_5$$

$$= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \frac{qL^2}{EA} \\ (-2 - 4\sqrt{2}) \frac{qL^2}{EA} \end{Bmatrix}$$

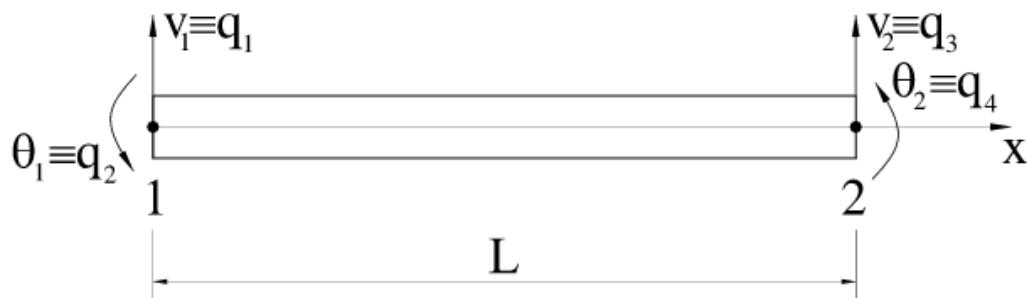
$$= 2\sqrt{2}qL$$

# Chương 3

## PHẦN TỬ DÀM CHỊU UỐN

### TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### Phần tử dầm chịu uốn



**Hình 3.1.** Phần tử dầm chịu uốn

Xét phần tử dầm chịu uốn có chiều dài  $L$  như Hình 3.1. Chuyển vị theo phương vuông góc trực thanh (độ võng):

$$\begin{aligned}
 v(x) &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\
 &= [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \{a\} \\
 &= [P(x)] \{a\} \\
 &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \{q\}_e \\
 &= [N] \{q\}_e
 \end{aligned}$$

với:

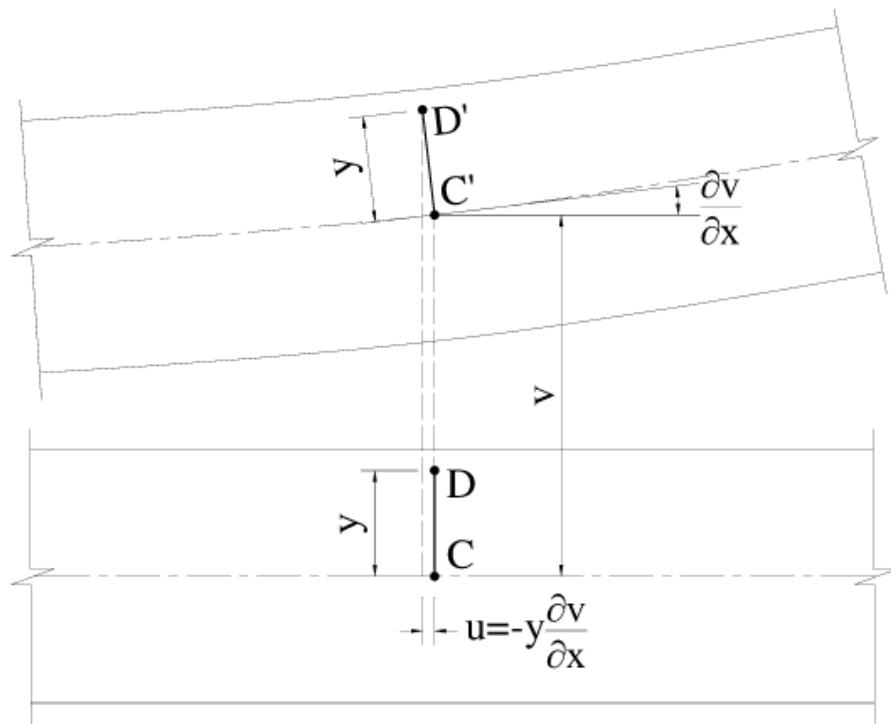
$$\left\{
 \begin{array}{l}
 N_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \quad N_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \\
 N_2 = x \left( 1 - 2 \frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right) \quad N_4 = x \left( -\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right)
 \end{array}
 \right.$$

Chuyển vị dọc trục thanh và độ vồng  $v$  có quan hệ như Hình 3.2. Ta có:

$$u = -y \frac{dv}{dx}$$

$$\text{Vậy: } \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2} = \underbrace{-y \frac{d^2}{dx^2} [N]}_{[B]} \{q\}_e$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = [B] \{q\}_e$$



**Hình 3.2.** Dâm chịu uốn

Cụ thể,

$$\begin{aligned} \underbrace{[B]}_{(1 \times 4)} &= -y \frac{d^2}{dx^2} [N] \\ &= -y \left[ \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \left( -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Với dâm chịu uốn:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x\}, \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\}, \{D\} = \{E\}$$

- Ma trận độ cứng phần tử:

$$\begin{aligned} [K]_e &= \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = E \int_0^L \int_F [B]^T [B] dA dx \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 12 & 6L & -12 & 6L \\ \hline & 4L^2 & -6L & 2L^2 & \\ \hline & & 12 & -6L & \\ \hline dx & & & 4L^2 & \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

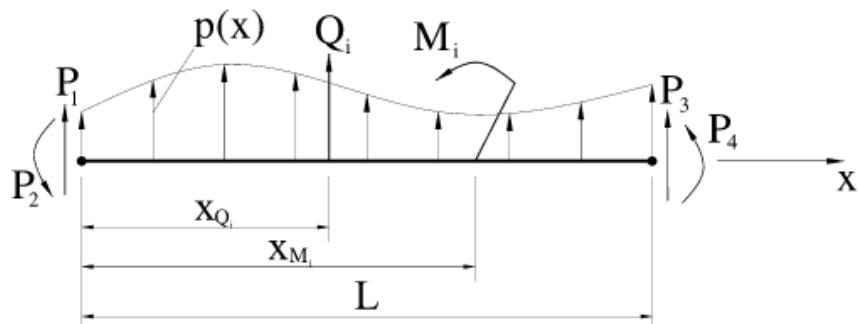
- Vectơ tải phần tử:

$$\underbrace{\{P\}_e}_{(4 \times 1)} = \int_0^L [N]^T p(x) dx + \sum_{i=1}^{n_Q} [N(x_{Q_i})]^T Q_i + \sum_{i=1}^{n_M} \left[ \frac{dN}{dx}(x_{M_i}) \right]^T M_i$$

$Q_i, x_{Q_i}$  - lực tập trung và hoành độ điểm đặt lực;

$M_i, x_{M_i}$  - momen tập trung và hoành độ điểm đặt lực;

$n_Q, n_M$  - số lực tập trung và momen tập trung trên phần tử.

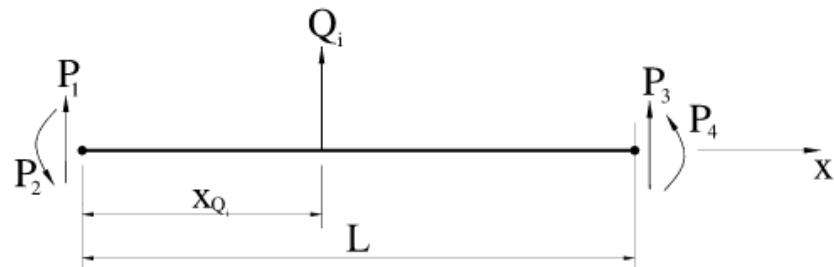


**Hình 3.3. Phần tử chịu tải tổng quát**

- Trường hợp đặc biệt:  $p(x) = const = p_0$

$$\{P\}_e = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} p_0 dx = \begin{Bmatrix} \frac{p_0 L}{2} \\ \frac{p_0 L^2}{12} \\ \frac{p_0 L}{2} \\ -\frac{p_0 L^2}{12} \end{Bmatrix}$$

- Trường hợp có lực tập trung  $Q$  đặt cách nút đầu phần tử một khoảng  $a$  ( $x_Q = a$ )

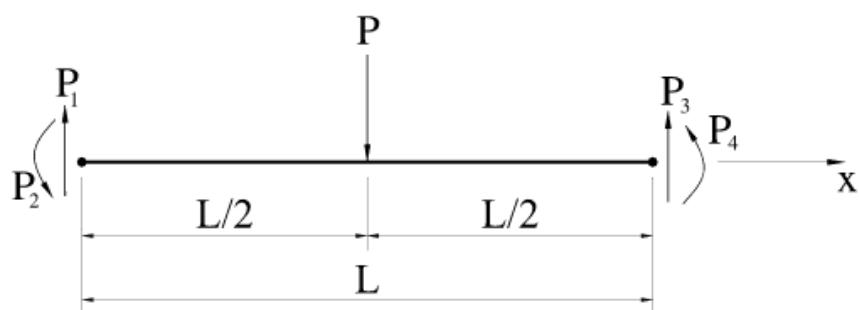


**Hình 3.4.** Phần tử chịu tải tập trung

$$\{P\}_e = [N(a)]^T Q = Q \begin{Bmatrix} 1 - 3\frac{a^2}{L^2} + 2\frac{a^3}{L^3} \\ a - 2\frac{a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \\ 3\frac{a^2}{L^2} - 2\frac{a^3}{L^3} \\ -\frac{a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

- Trường hợp lực tập trung  $P$  hướng xuống và đặt ở giữa dầm như Hình 3.5:

$$\{P\}_e = \left\{ -\frac{P}{2} \quad -\frac{PL}{8} \quad -\frac{P}{2} \quad \frac{PL}{8} \right\}^T$$



**Hình 3.5.** Phần tử chịu tải tập trung ở giữa phần tử

Xác định momen uốn nội lực:

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2} = EI \frac{d^2}{dx^2} [N] \{q\}_e = EI [N''] \{q\}_e \Rightarrow \text{Bậc 1}$$

Gọi:  $\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M(\text{tại } n_1) \\ M(\text{tại } n_2) \end{Bmatrix}$  là vectơ momen uốn (tại 2 đầu) phần tử thì:

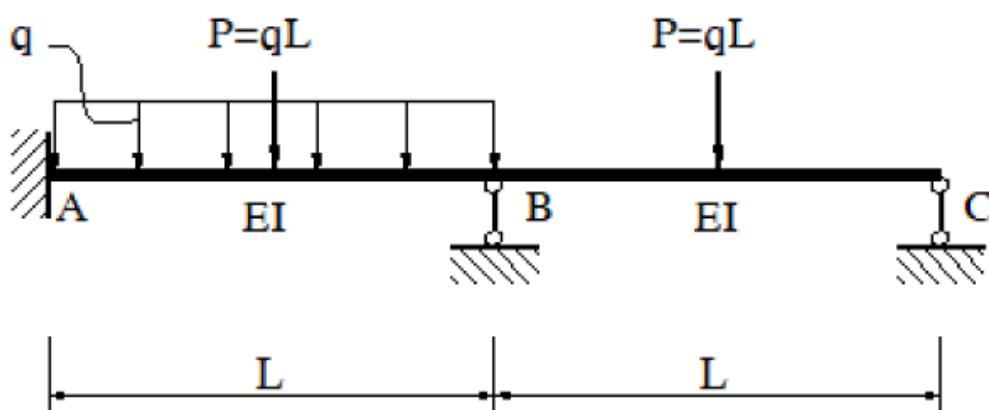
$$\underset{(2 \times 1)}{\{M\}_e} = EI \begin{bmatrix} [N''(x=0)] \\ [N''(x=L)] \end{bmatrix} \underset{(2 \times 4)(4 \times 1)}{\{q\}_e} = [S]_e \{q\}_e$$

trong đó:  $[S]_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$  là ma trận tính momen.

**Nhận xét:**  $M = EI[N'']\{q\}_e$  là momen do chuyển vị nút gây ra. Để đầy đủ hơn cần cộng thêm momen uốn nội lực do tải trọng tác dụng trên phạm vi phần tử ( $M_0$ ) khi xem tất cả các nút được gắn cứng.

## BÀI TẬP

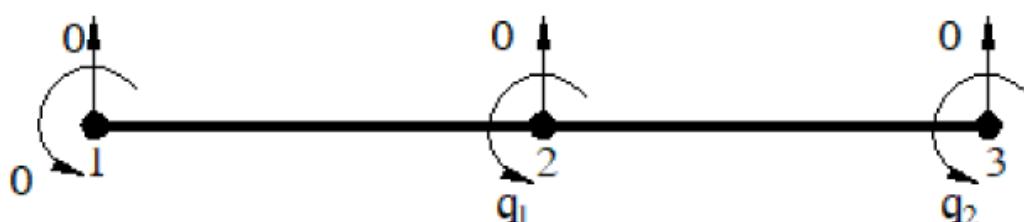
**Bài 3.1** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.6. Dầm có độ cứng không đổi là  $EI$ . Vẽ biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.



Hình 3.6. Sơ đồ kết cấu dầm

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.7:



Hình 3.7. Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:  $b_{(2 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\left[ K \right]_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ (4 \times 4) & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \left[ \overline{K}^* \right] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} + \frac{qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5qL^2}{24} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\overline{P}^*\} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ & \Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} \end{Bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{336} \\ \frac{10}{336} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } \{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{336} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 2: } \{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{336} \\ 0 \\ \frac{10}{336} \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{336} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{168} qL^2 \\ \frac{2}{168} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phản tử 2:

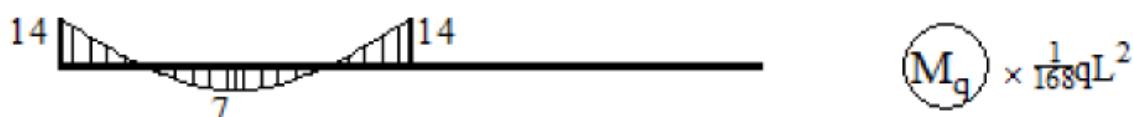
$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{336} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{10}{336} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{12}{168} qL^2 \\ \frac{21}{168} qL^2 \end{Bmatrix}$$

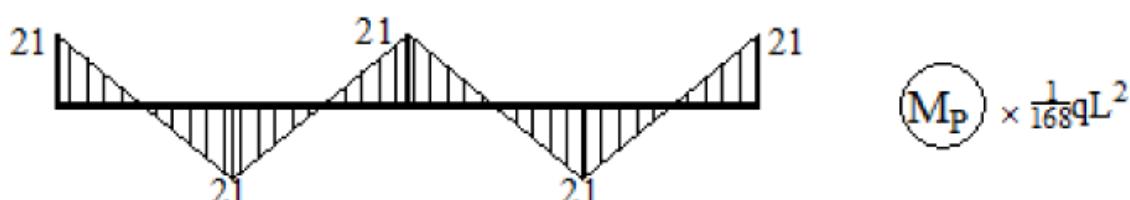
- Biểu đồ mô men M của đầm
- Biểu đồ mô men  $M_0$  của đầm



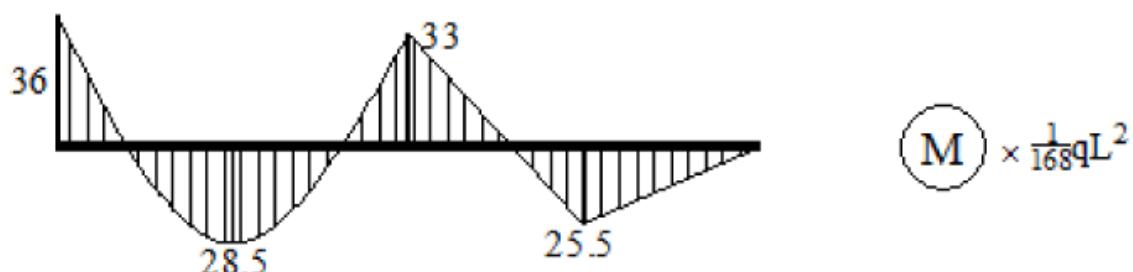
- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều q:



- Biểu đồ mô men  $M_p$  của lực tập trung P:



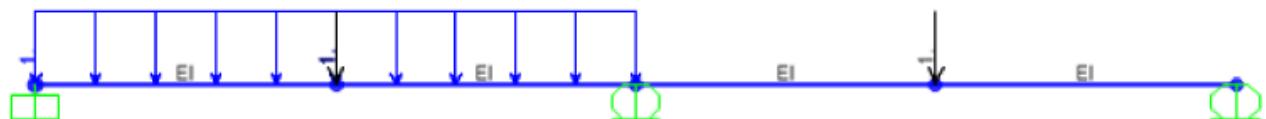
- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



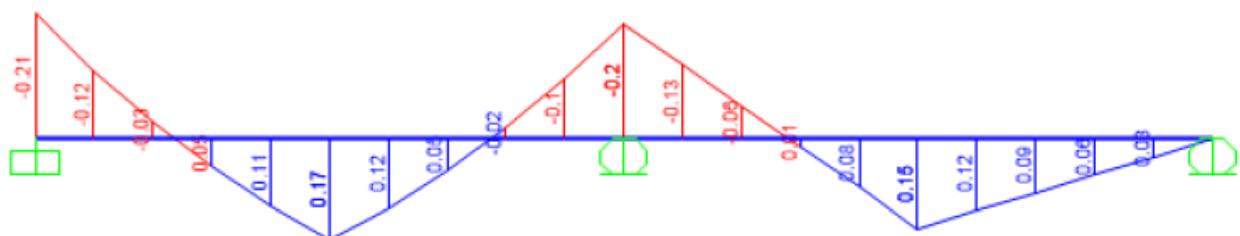
**Hình 3.8.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1 \text{ m}$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}$  và  $P = 1 \text{ kN}$ .

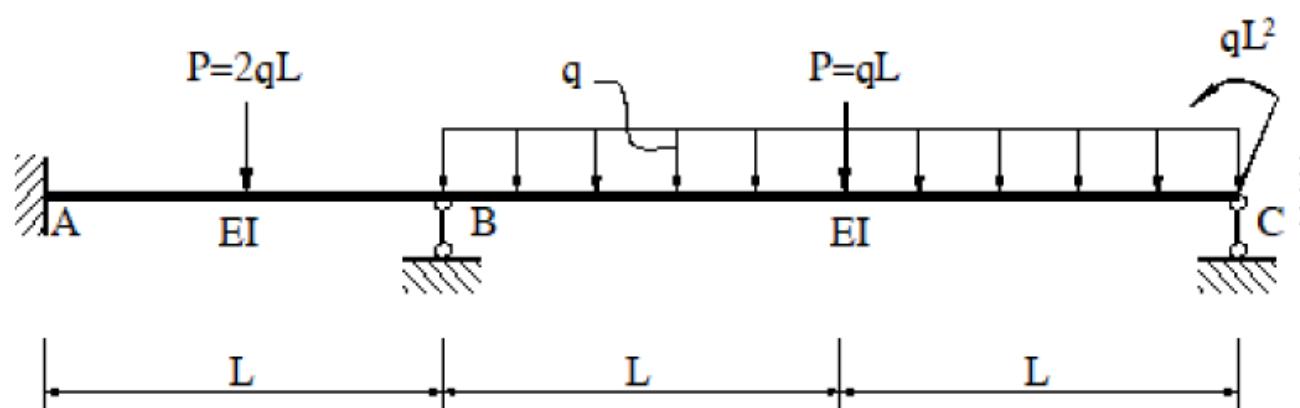


**Hình 3.9.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.10.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

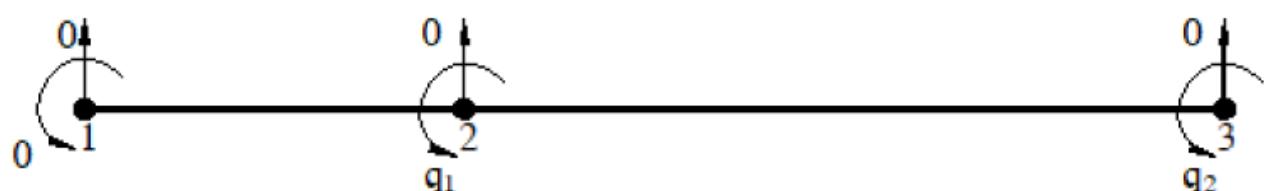
**Bài 3.2** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.11. Dầm có độ cứng không đổi là  $EI$ . Vẽ biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.



**Hình 3.11.** Sơ đồ kết cấu dầm

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.12:



**Hình 3.12.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(2 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_2} = \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ & & 12 & -12L \\ dx & & & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \underset{(2 \times 2)}{\left[ \overline{K}^* \right]} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{4} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{4qL^2}{12} - \frac{2qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{4qL^2}{12} + \frac{2qL^2}{8} + qL^2 \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{cases} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{19qL^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{cases}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{19}{12} \end{Bmatrix} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{19}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{9}{44} \\ \frac{59}{66} \end{bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } \{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{44} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 2: } \{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{9}{44} \\ 0 \\ \frac{59}{66} \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

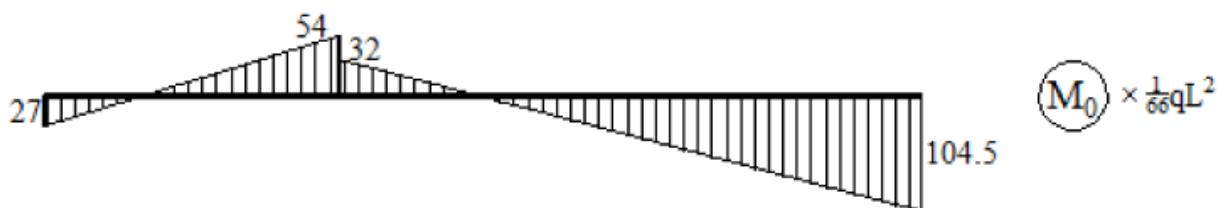
Phần tử 1:

$$\begin{aligned} \{M\}_1 &= [S]_1 \{q\}_1 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{44} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{9}{22} qL^2 \\ -\frac{9}{11} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{27}{66} qL^2 \\ -\frac{54}{66} qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

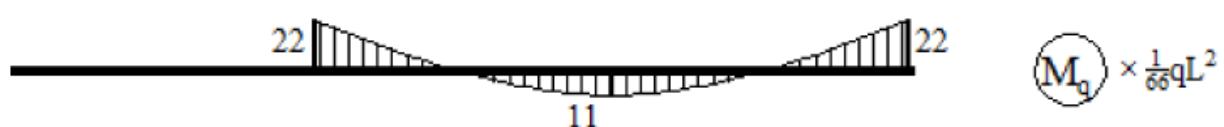
Phần tử 2:

$$\begin{aligned} \{M\}_2 &= [S]_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{9}{44} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{59}{66} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{16}{33} qL^2 \\ \frac{19}{12} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{32}{66} qL^2 \\ \frac{104.5}{66} qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

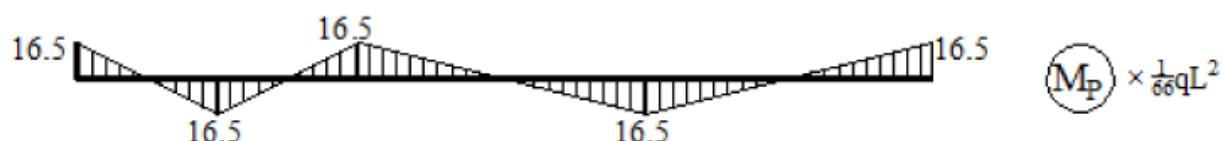
- Biểu đồ mô men  $M$  của dầm
- Biểu đồ mô men  $M_0$  của dầm:



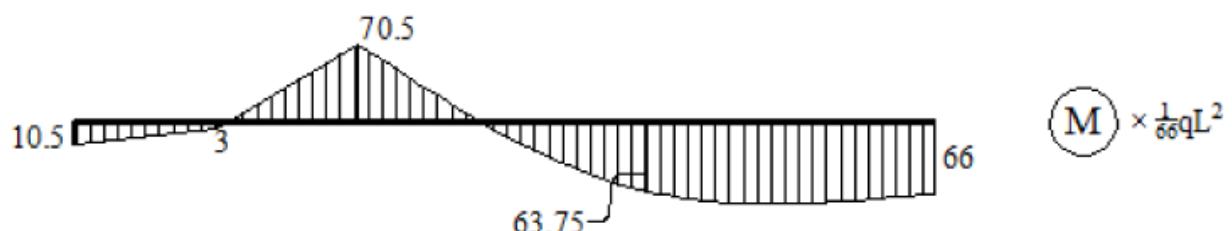
- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :



- Biểu đồ mô men  $M_p$  của lực tập trung  $P$ :



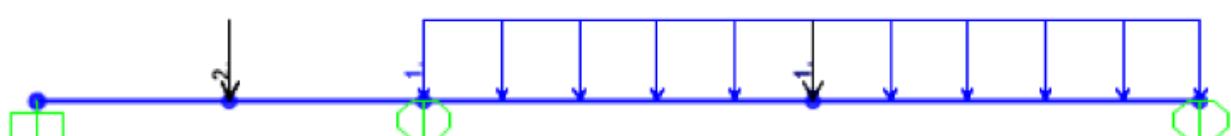
- Biểu đồ mô men  $M$  của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



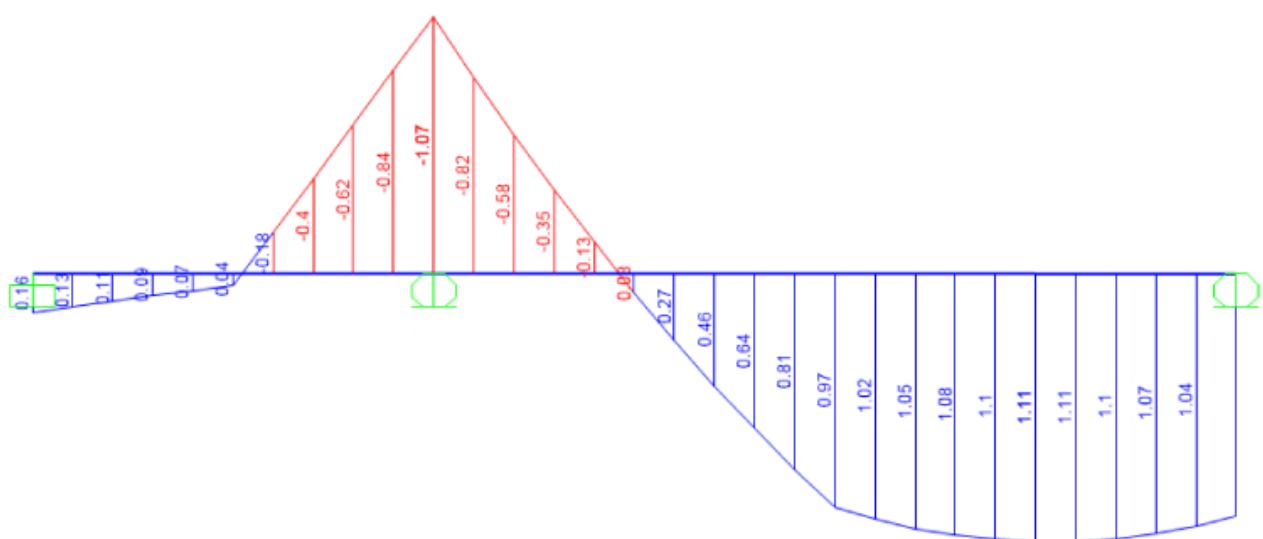
**Hình 3.13.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm

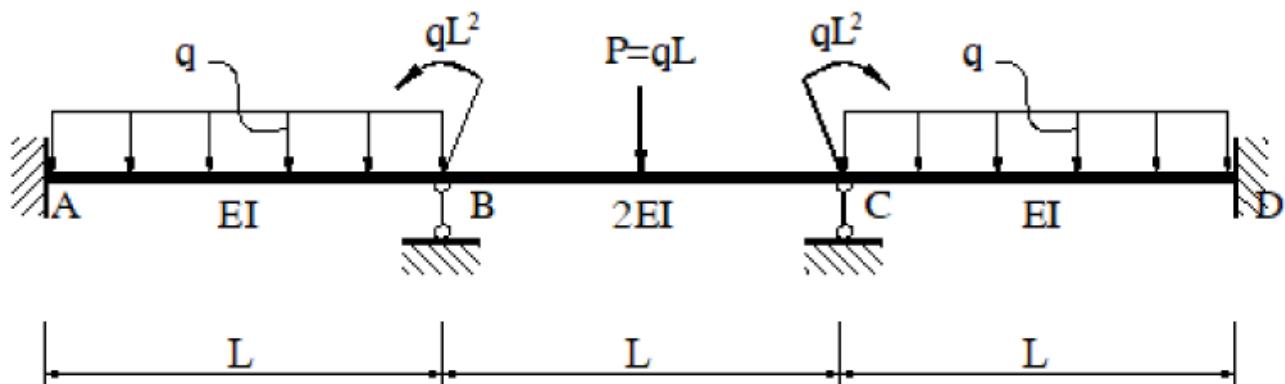


**Hình 3.14.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.15.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

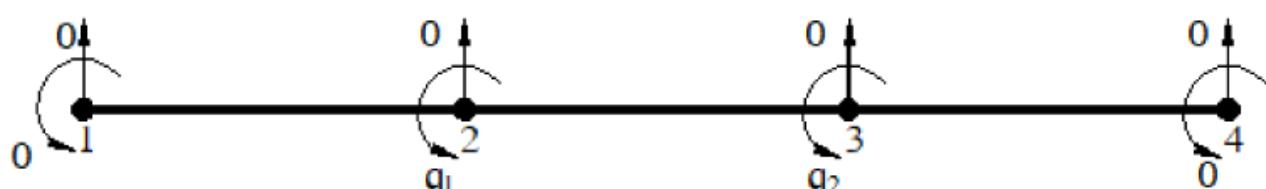
**Bài 3.3** Cho đầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.16. Đầm có độ cứng không đổi là  $EI$ . Vẽ biểu đồ mô men của đầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.



**Hình 3.16.** Sơ đồ kết cấu đầm

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.17:



**Hình 3.17.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

$$\text{- Ma trận chỉ số phần tử } b: \quad b_{(3 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} + qL^2 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{13qL^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} - qL^2 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ -\frac{7qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

Phần tử 3:

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{23}{24} \\ \frac{24}{24} \\ -\frac{23}{24} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{23}{24} \\ -\frac{23}{24} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{23}{192} \\ -\frac{23}{192} \end{bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{23}{192} \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{23}{192} \\ 0 \\ -\frac{23}{192} \end{Bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{23}{192} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{23}{192} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{46}{192} qL^2 \\ \frac{92}{192} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{23}{192} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{23}{192} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{92}{192} qL^2 \\ -\frac{92}{192} qL^2 \end{Bmatrix}$$

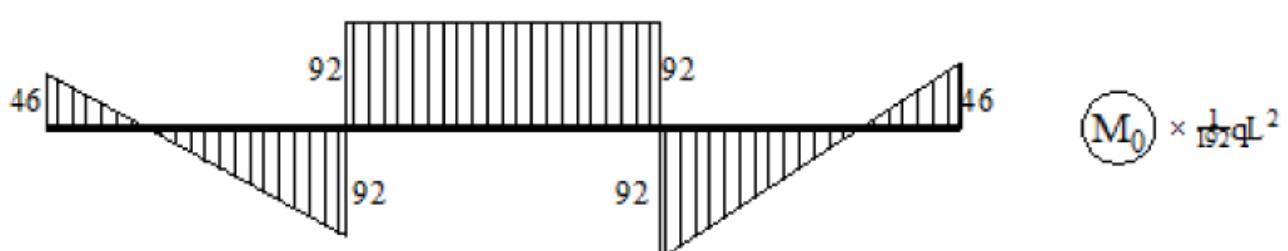
Phần tử 3:

$$\{M\}_3 = [S]_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{23}{192} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{46}{192} qL^2 \\ -\frac{92}{192} qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men M của đầm

- Biểu đồ mô men  $M_0$  của đầm:



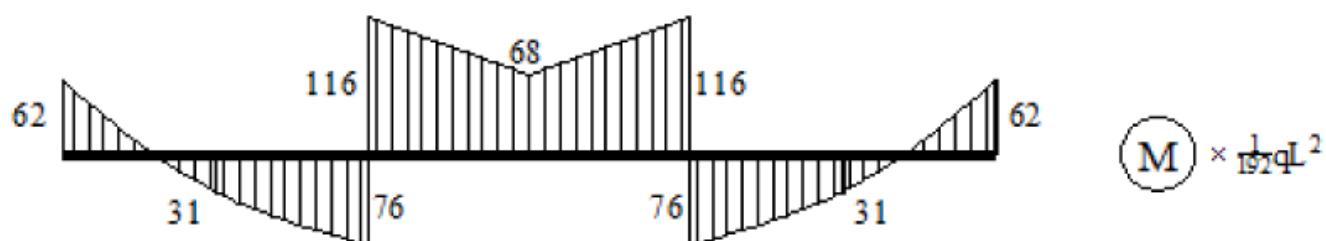
- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :



- Biểu đồ mô men  $M_P$  của lực tập trung  $P$ :



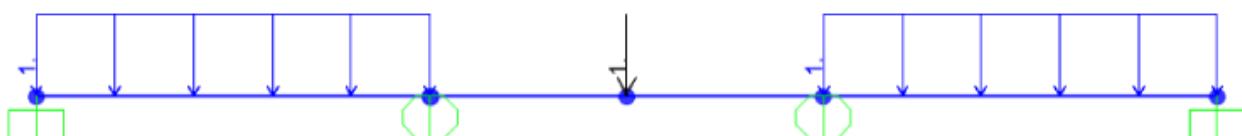
- Biểu đồ mô men  $M$  của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_P$



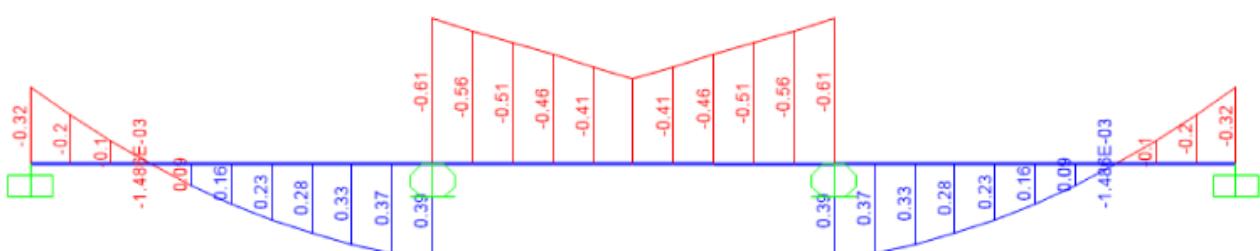
**Hình 3.18.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm

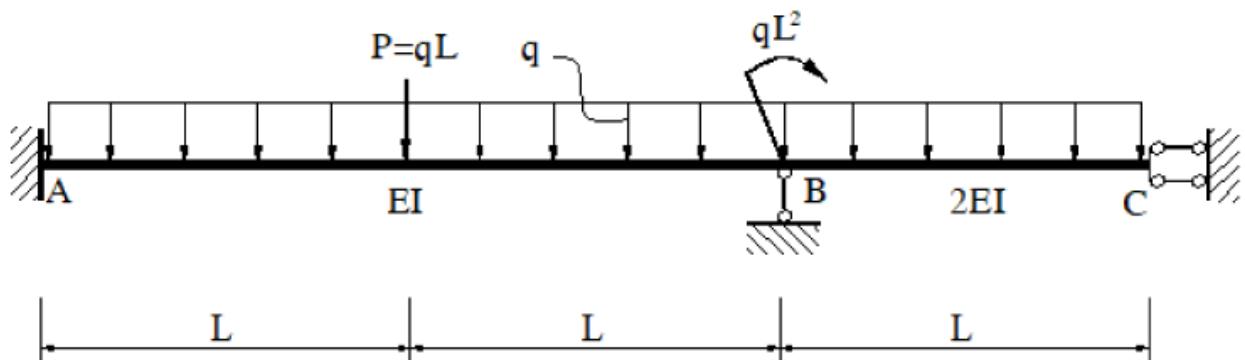


**Hình 3.19.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.20.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

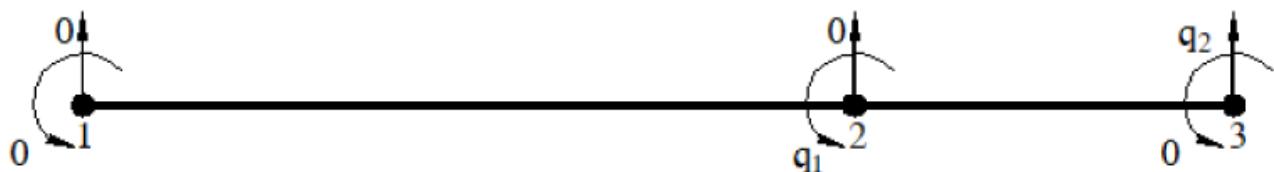
**Bài 3.4** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng và có độ cứng thay đổi như Hình 3.21. Vẽ biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.



Hình 3.21. Sơ đồ kết cấu dầm

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.22:



Hình 3.22. Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:  $b_{(2 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } [K]_1 = \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L \\ & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ & & 12 & -12L \\ dx & & & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ 16L^2 & -12L & 8L^2 & 0 \\ 12 & -12L & 0 & 0 \\ 16L^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 2: } [K]_1 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ & 12 & -6L & 0 \\ dx & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 12 & -6L & 0 & 1 \\ 4L^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} \bar{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 10L^2 & -12L \\ -12L & 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4qL^2}{12} + \frac{PL}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7qL^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} - qL^2 \\ -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{13qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL^2}{2} \\ -\frac{qL}{2} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 10L^2 & -12L \\ -12L & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL^2}{2} \\ -\frac{qL}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{16} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{11}{96} \frac{qL^4}{EI} \end{Bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{16} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{16} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{11}{96} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

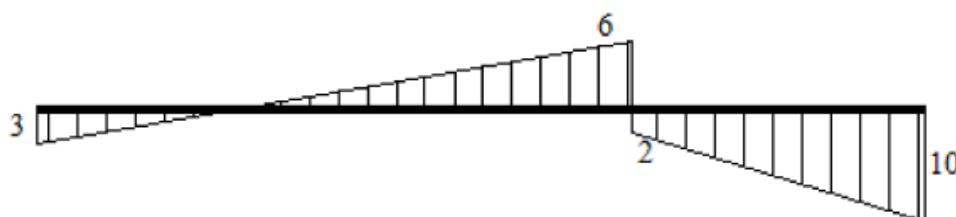
$$= \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{16} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{16} qL^2 \\ -\frac{6}{16} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phản tử 2:

$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= [S]_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{16} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{11}{96} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{1}{8} qL^2 \\ \frac{5}{8} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{16} qL^2 \\ \frac{10}{16} qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

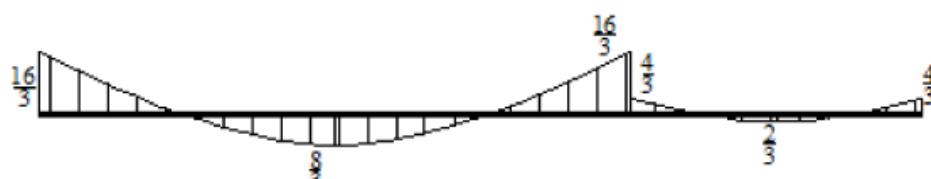
- Biểu đồ mô men M của đầm

- Biểu đồ mô men  $M_0$  của đầm:



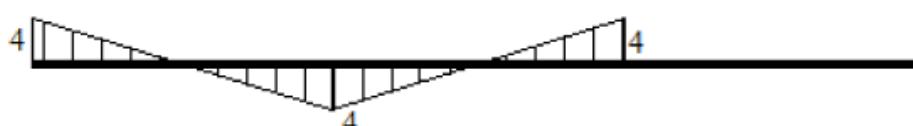
$$(M_0) \times \frac{1}{16} q L^2$$

- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :



$$(M_q) \times \frac{1}{16} q L^2$$

- Biểu đồ mô men  $M_p$  của lực tập trung  $P$ :



$$(M_p) \times \frac{1}{16} q L^2$$

- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$

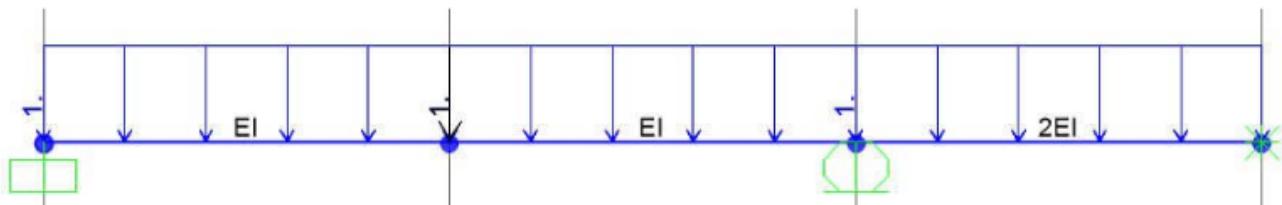


$$(M) \times \frac{1}{16} q L^2$$

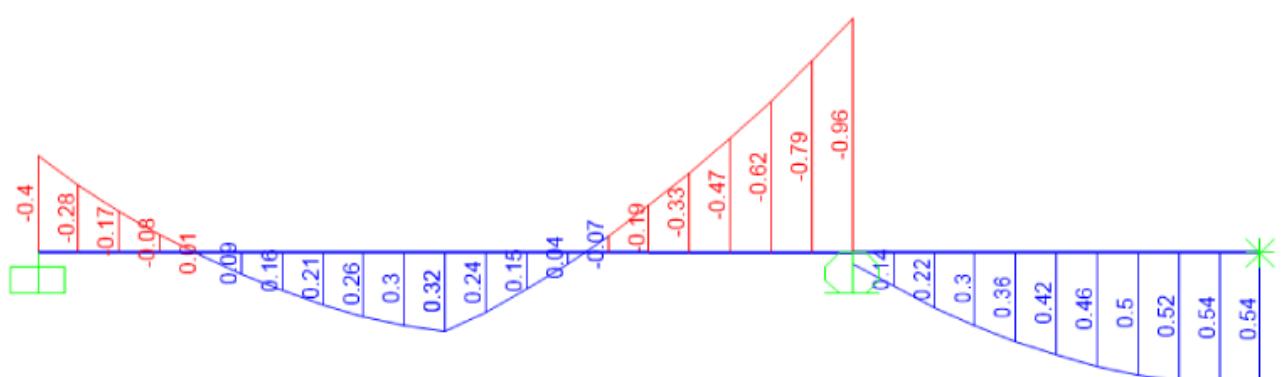
**Hình 3.23.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1 \text{ m}$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}$  và  $P = 1 \text{ kN}$ ,  $M = 1 \text{ kNm}$

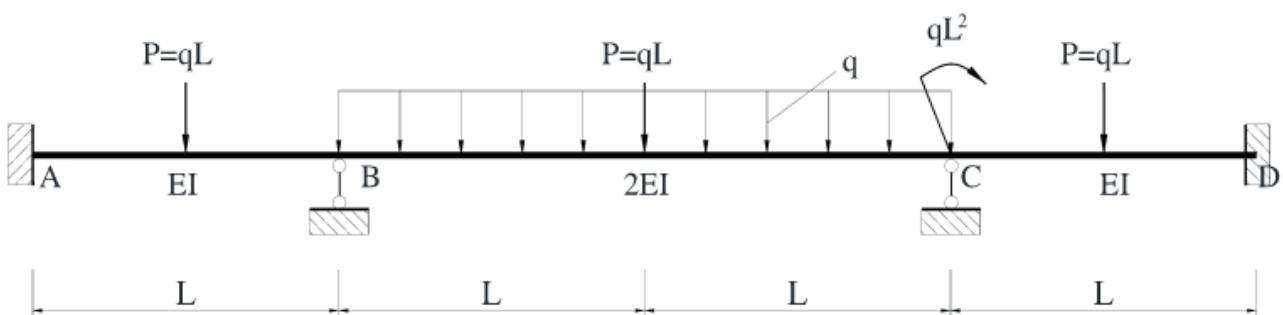


**Hình 3.24.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.25.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

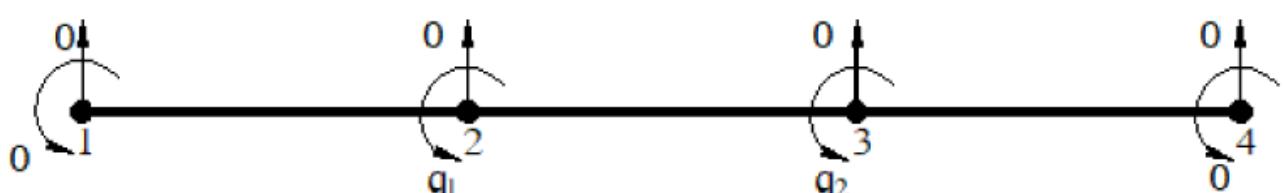
**Bài 3.5** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng và có độ cứng thay đổi như Hình 3.26. Vẽ biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.



**Hình 3.26.** Sơ đồ kết cấu dầm

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.27:



**Hình 3.27.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(3 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_2} = \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ 16L^2 & -12L & 8L^2 & 0 \\ dx & 12 & -12L & 0 \\ & & 16L^2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_3} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \underset{(2 \times 2)}{\left[ \overline{K}^* \right]} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{4qL^2}{12} - \frac{P(2L)}{8} \\ 0 \\ \frac{4qL^2}{12} + \frac{P(2L)}{8} \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{cases} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{7qL^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{cases}$$

Phần tử 3:

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{8} - qL^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{9qL^2}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{11}{24} \\ -\frac{13}{24} \end{Bmatrix} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{11}{24} \\ -\frac{13}{24} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} -\frac{31}{720} \\ -\frac{41}{720} \end{Bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{31}{720} \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{31}{720} \\ 0 \\ -\frac{41}{720} \end{Bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{41}{720} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{31}{720} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{31}{360} qL^2 \\ -\frac{62}{360} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{31}{720} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{41}{720} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{103}{360} qL^2 \\ -\frac{113}{360} qL^2 \end{Bmatrix}$$

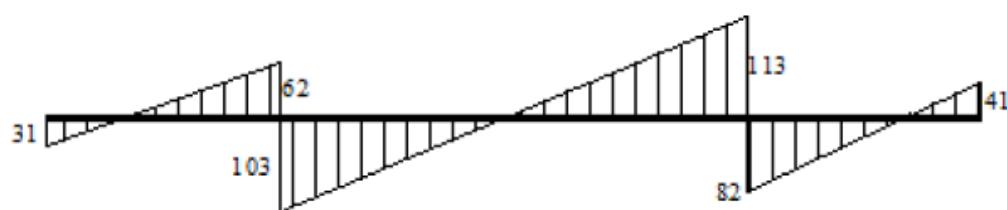
Phần tử 3:

$$\{M\}_3 = [S]_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{41}{720} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{82}{360} qL^2 \\ -\frac{41}{360} qL^2 \end{Bmatrix}$$

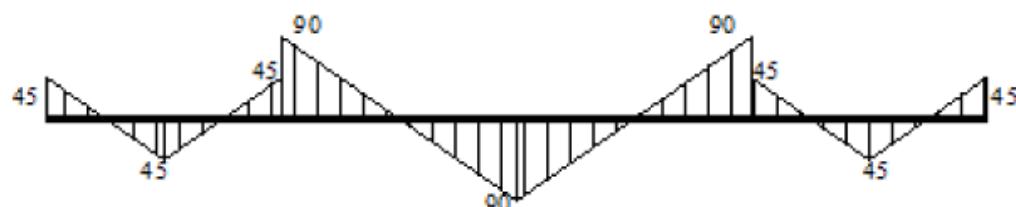
- Biểu đồ mô men  $M$  của dầm:

- Biểu đồ mô men  $M_0$  của dầm



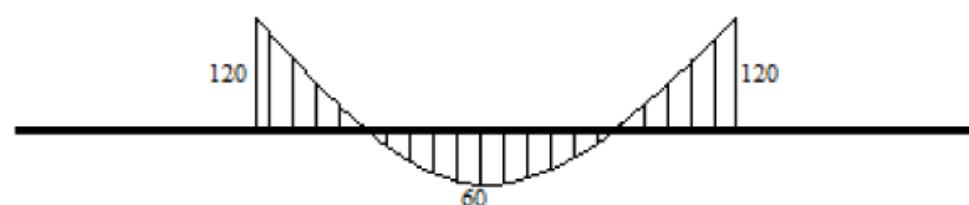
$$(M_0) \times \frac{1}{360} qL^2$$

- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :



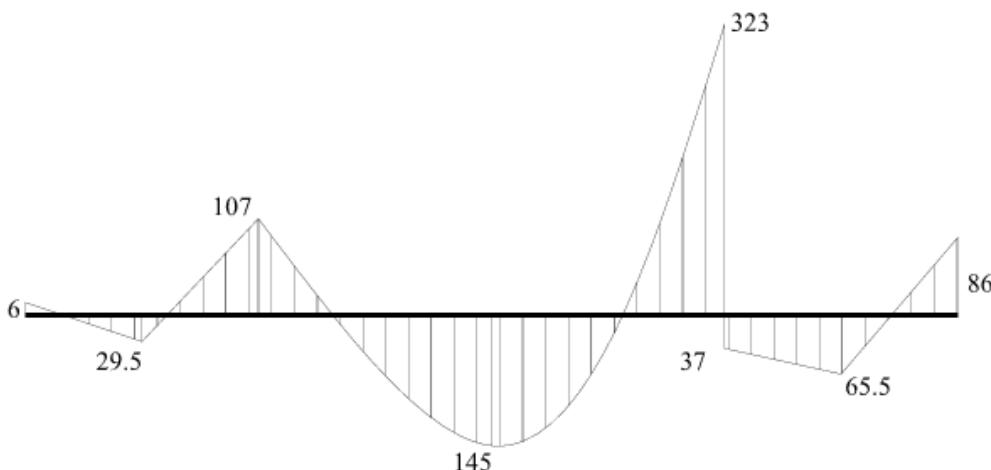
$$(M_q) \times \frac{1}{360} qL^2$$

- Biểu đồ mô men  $M_p$  của lực tập trung  $P$ :



$$(M_p) \times \frac{1}{360} qL^2$$

- Biểu đồ mô men  $M$  của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$

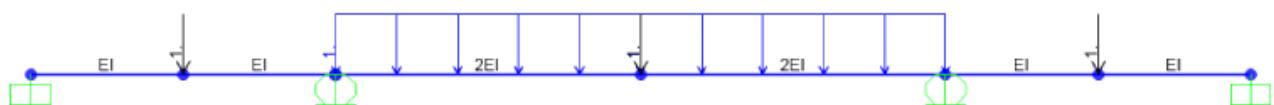


$$(M) \times \frac{1}{360} qL^2$$

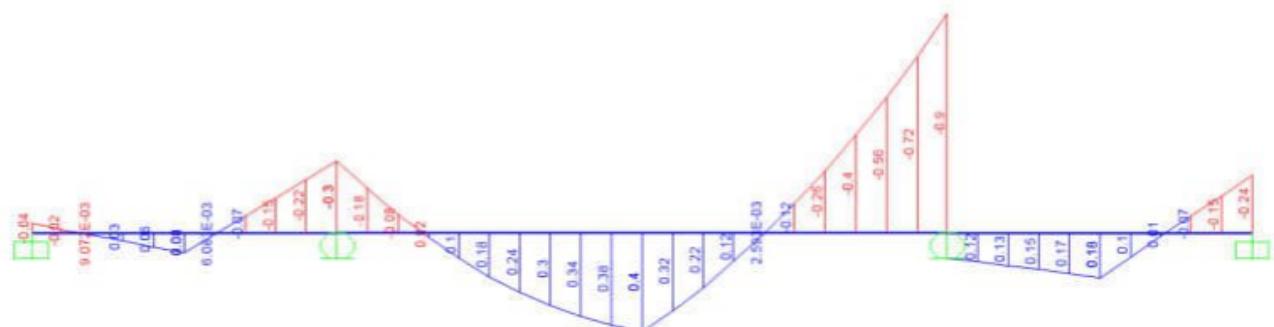
**Hình 3.28.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm

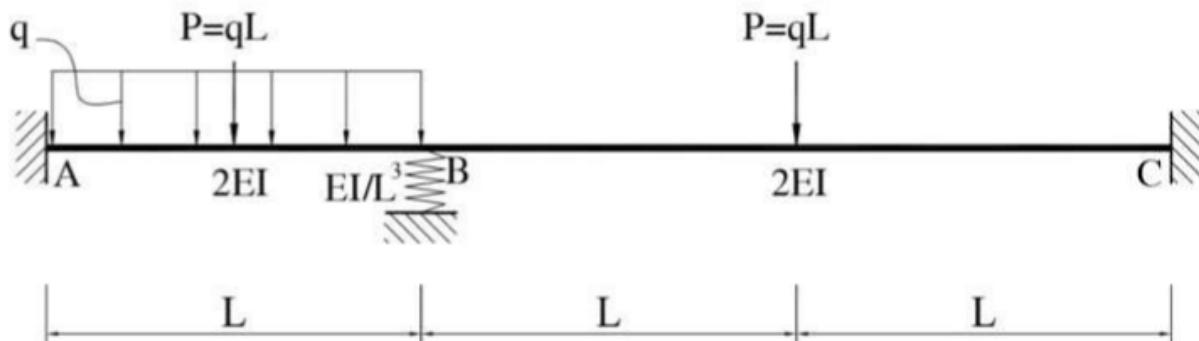


**Hình 3.29.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.30.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

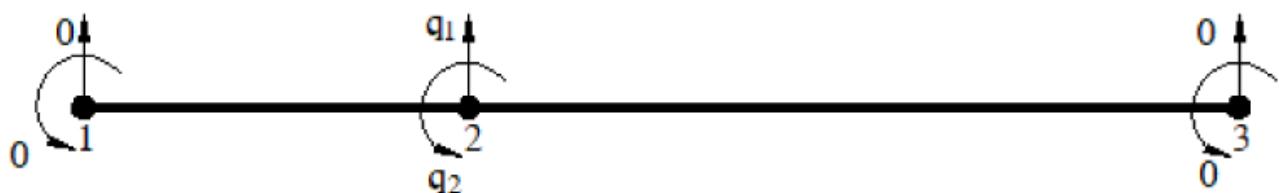
**Bài 3.6** Cho đầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.31. Đầm có độ cứng không đổi là  $2EI$ , lò xo tại B có độ cứng là  $EI/L^3$ . Vẽ biểu đồ mô men của đầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.



**Hình 3.31.** Sơ đồ kết cấu đầm

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.32:



**Hình 3.32.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$(2 \times 4) \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ & & 12 & -12L \\ dx & & & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 27 & -9L \\ -9L & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} - \frac{P}{2} \\ \frac{qL^2}{12} + \frac{PL}{8} \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -qL \\ \frac{5qL^2}{24} \end{cases} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phản tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{P(2L)}{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = \begin{pmatrix} -\frac{3qL}{2} \\ 2 \\ -\frac{qL^2}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 27 & -9L \\ -9L & 12L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{24} \end{pmatrix} - \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 28 & -9L \\ -9L & 12L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{24} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{49}{680} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{44}{765} \frac{qL^3}{EI} \end{pmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{49}{680} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{44}{765} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{49}{680} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{44}{765} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{49}{680} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{44}{765} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

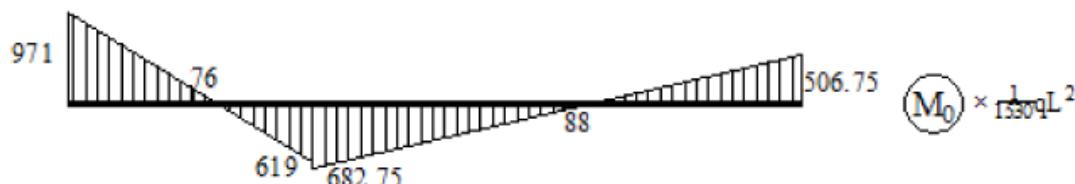
$$= \begin{Bmatrix} -\frac{971}{1530} qL^2 \\ \frac{619}{1530} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phản tử 2:

$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= [S]_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{49}{680} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{44}{765} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{2731}{6120} qL^2 \\ -\frac{2027}{6120} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{682.75}{1530} qL^2 \\ -\frac{506.75}{1530} qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Biểu đồ mô men M của đầm

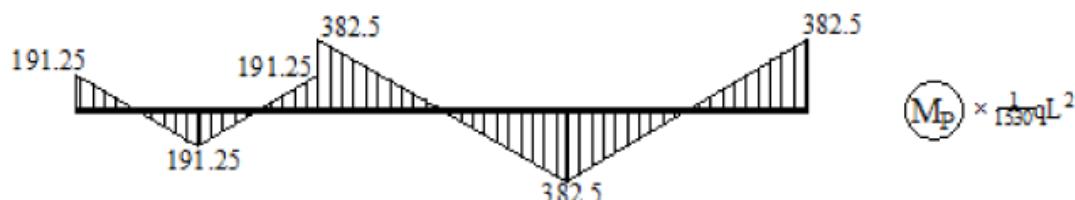
• Biểu đồ mô men  $M_0$  của đầm:



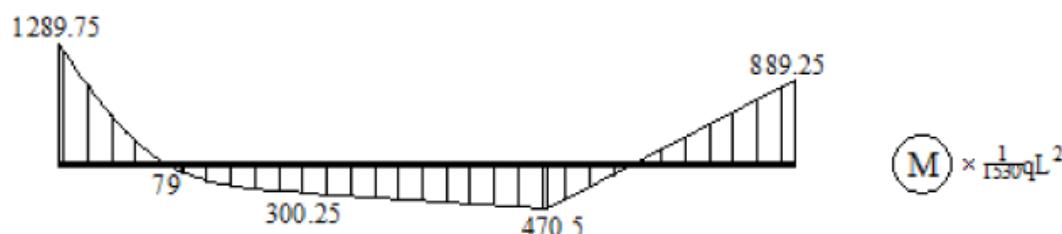
• Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :



• Biểu đồ mô men  $M_p$  của lực tập trung  $P$ :



• Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



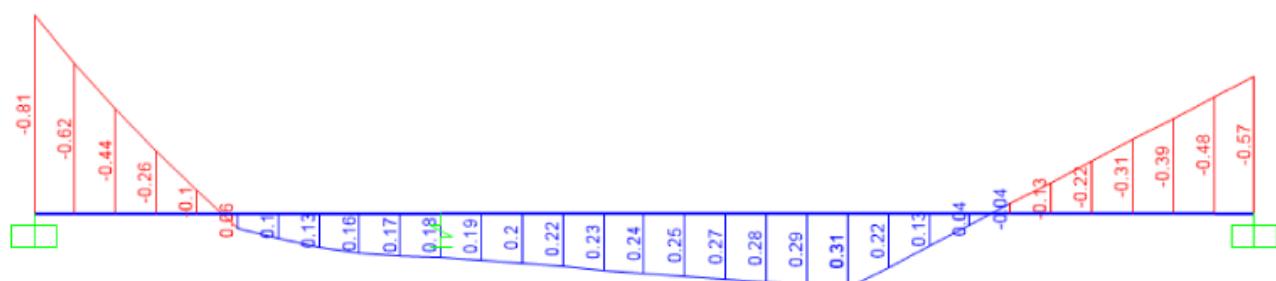
**Hình 3.33.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1 \text{ m}$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}$  và  $P = 1 \text{ kN}$ .

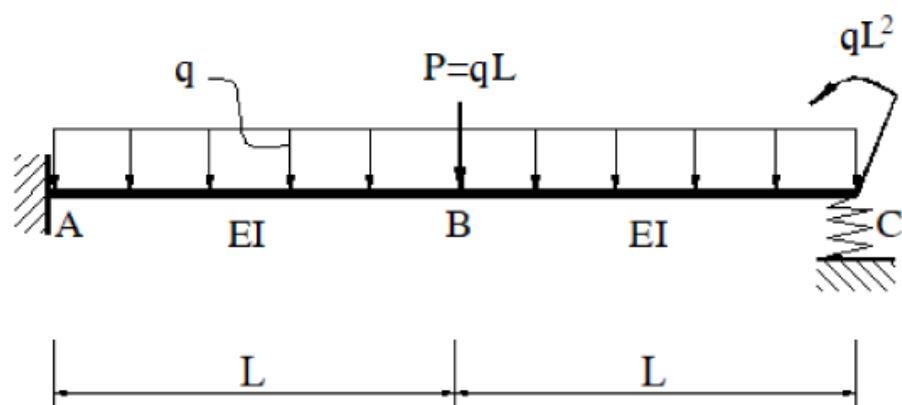


**Hình 3.34.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.35.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

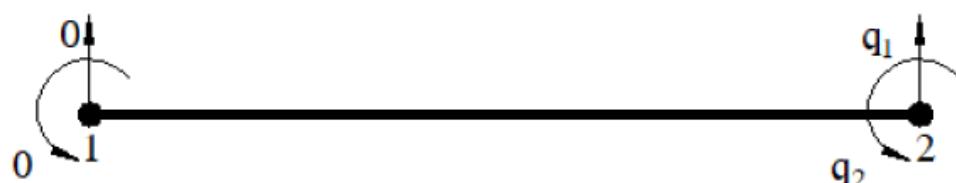
**Bài 3.7** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.36. Dầm có độ cứng không đổi là  $EI$ , lò xo tại B có độ cứng là  $EI/L^3$ . Vẽ biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.



**Hình 3.36.** Sơ đồ kết cấu dầm

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.37



**Hình 3.37.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:  $b_{(1 \times 4)} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$$[K]_{(4 \times 4)} = \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L \\ & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ & & 12 & -12L \\ dx & & & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*]_{(2 \times 2)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}L & 2L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{q(2L)}{2} - \frac{P}{2} \\ \frac{4qL^2}{12} + \frac{P(2L)}{8} + qL^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-3qL}{2} \\ \frac{19qL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = \begin{bmatrix} -\frac{3qL}{2} \\ \frac{19qL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}L & 2L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3qL}{2} \\ \frac{19qL^2}{12} \end{Bmatrix} - \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}L & 2L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3qL}{2} \\ \frac{19qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{22} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{41}{66} \frac{qL^4}{EI} \end{bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{22} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{41}{66} \frac{qL^4}{EI} \end{bmatrix}$$

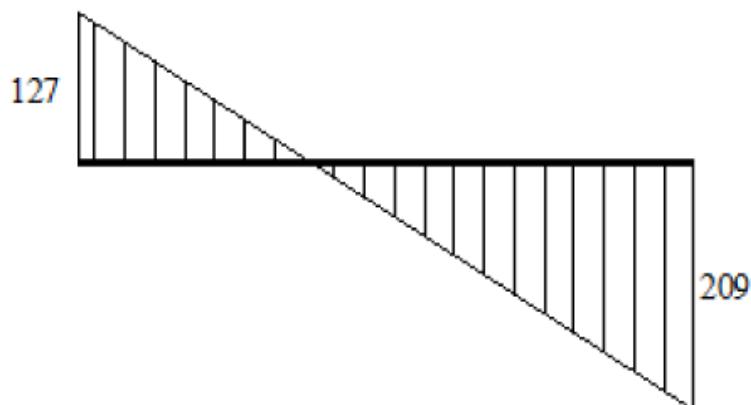
- Momen uốn của các phần tử:

$$\{M\} = [S]\{q\}$$

$$= \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{22} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{41}{66} \frac{qL^4}{EI} \end{bmatrix}$$

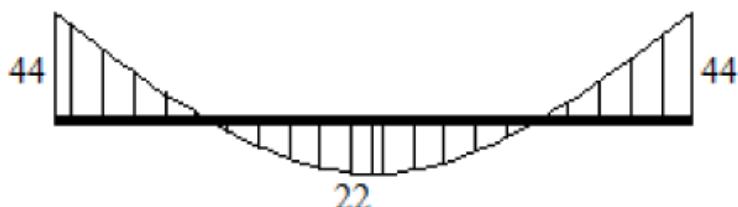
$$= \begin{bmatrix} -\frac{127}{132} qL^2 \\ \frac{19}{12} qL^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{127}{132} qL^2 \\ \frac{209}{132} qL^2 \end{bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men  $M$  của đầm
- Biểu đồ mô men  $M_0$  của đầm:



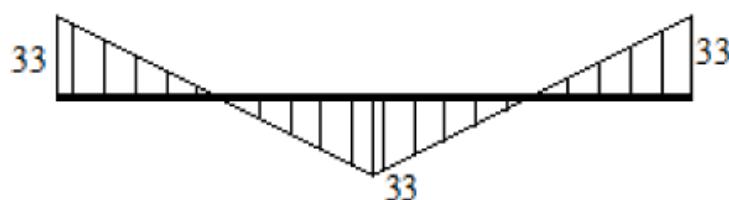
$$(M_0) \times \frac{1}{132} qL^2$$

- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :



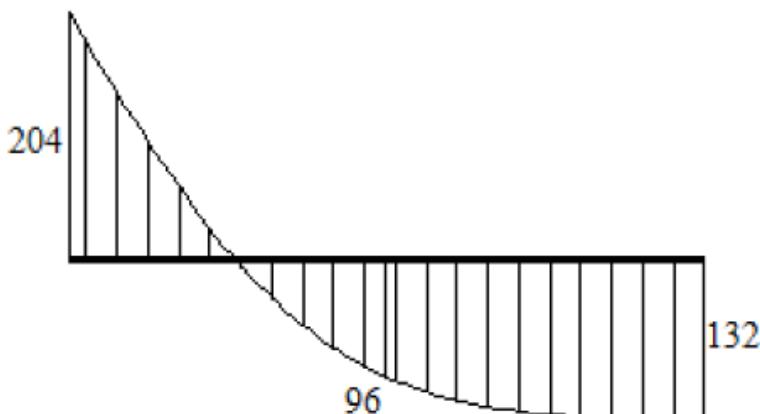
$$(M_q) \times \frac{1}{132} qL^2$$

- Biểu đồ mô men  $M_p$  của lực tập trung  $P$ :



$$(M_p) \times \frac{1}{132} qL^2$$

- Biểu đồ mô men  $M$  của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$

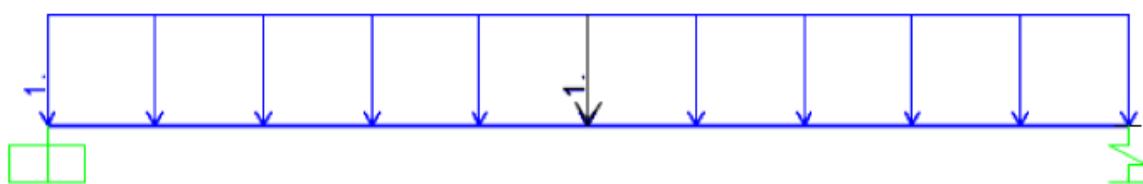


$$(M) \times \frac{1}{132} qL^2$$

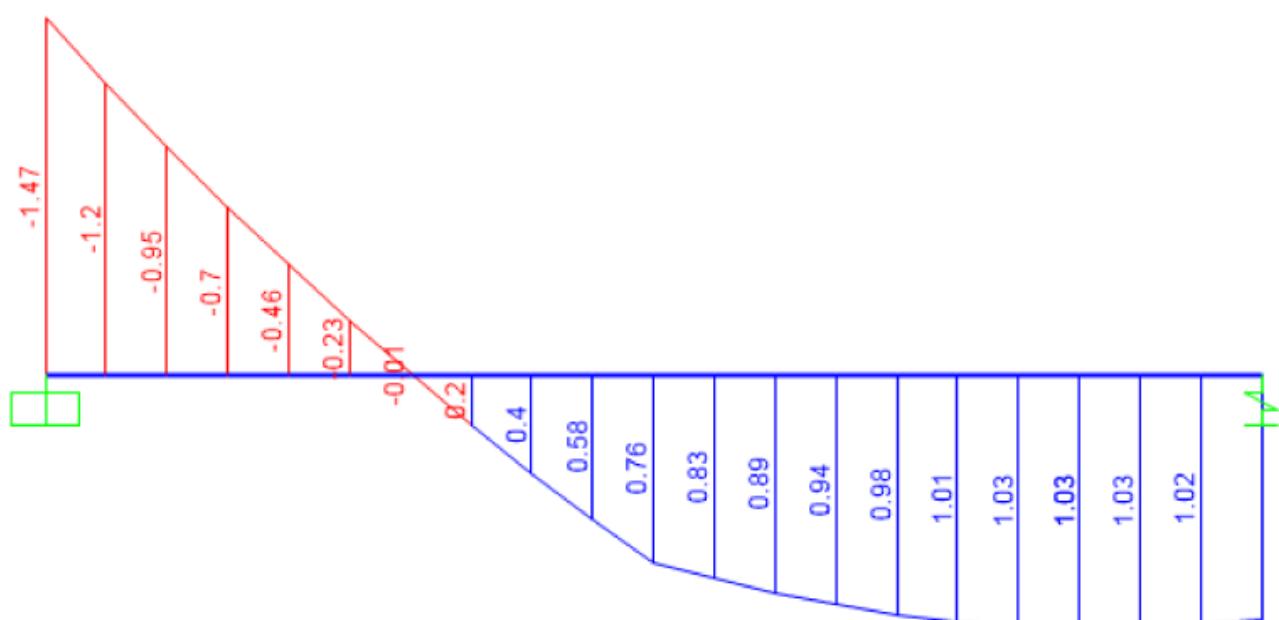
**Hình 3.38.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1 \text{ m}$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}$  và  $P = 1 \text{ kN}$ ,  $M = 1 \text{ kNm}$

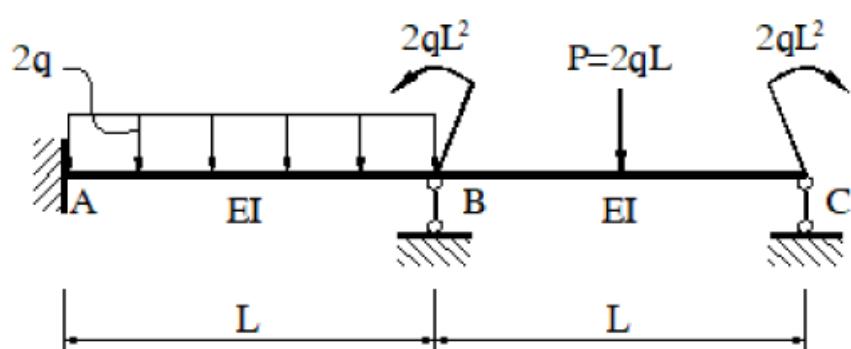


**Hình 3.39.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.40.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

**Bài 3.8** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.41.



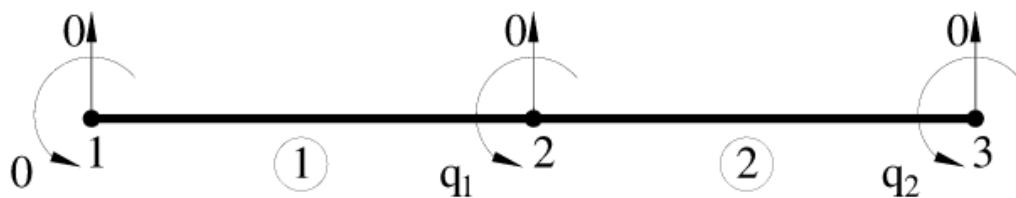
**Hình 3.41.** Sơ đồ kết cấu dầm

Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung trong dầm.
- Xác định góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung trong dầm.

**Giải****a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.42:



**Hình 3.42.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(2 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_2} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 1 \\ & & 4L^2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \underset{(2 \times 2)}{\left[ \overline{K}^* \right]} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2qL^2}{12} + 2qL^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{13qL^2}{6} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{2qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{2qL^2}{8} - 2qL^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{4} \\ 0 \\ -\frac{7qL^2}{4} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể:

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{23}{12} \\ 1 \\ -\frac{7}{4} \\ 2 \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{23}{12} \\ -\frac{7}{4} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} \frac{67}{168} \\ -\frac{107}{168} \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{67}{168} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{67}{84} qL^2 \\ \frac{134}{84} qL^2 \end{Bmatrix}$$

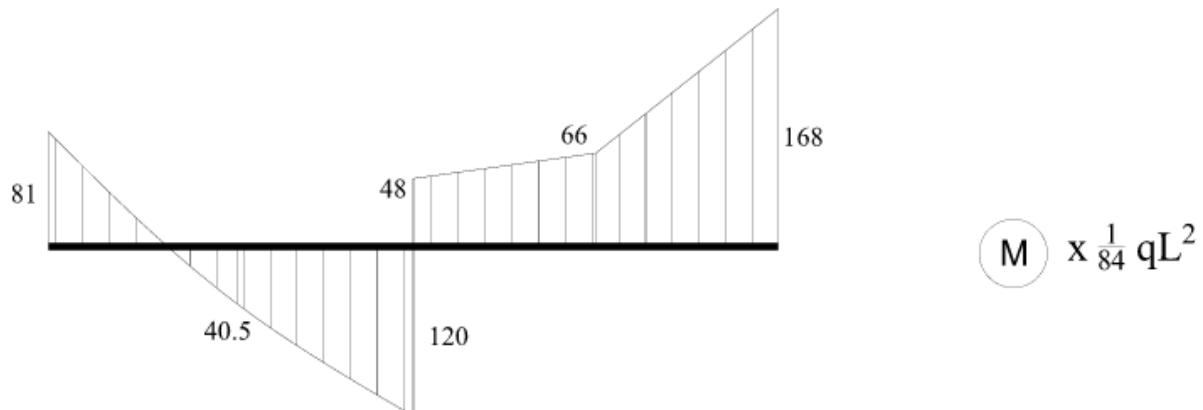
Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{67}{168} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{107}{168} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{9}{28} qL^2 \\ -\frac{7}{4} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{27}{84} qL^2 \\ -\frac{147}{84} qL^2 \end{Bmatrix}$$

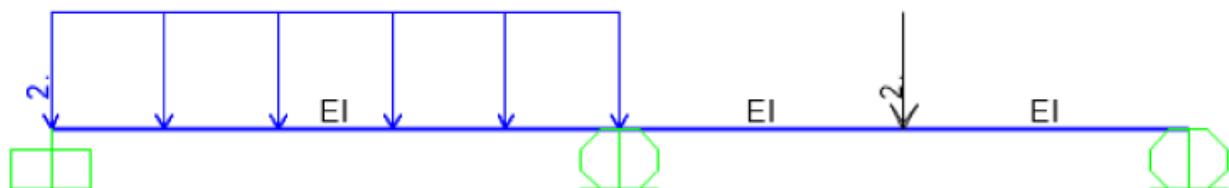
- Biểu đồ mô men  $M$  của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



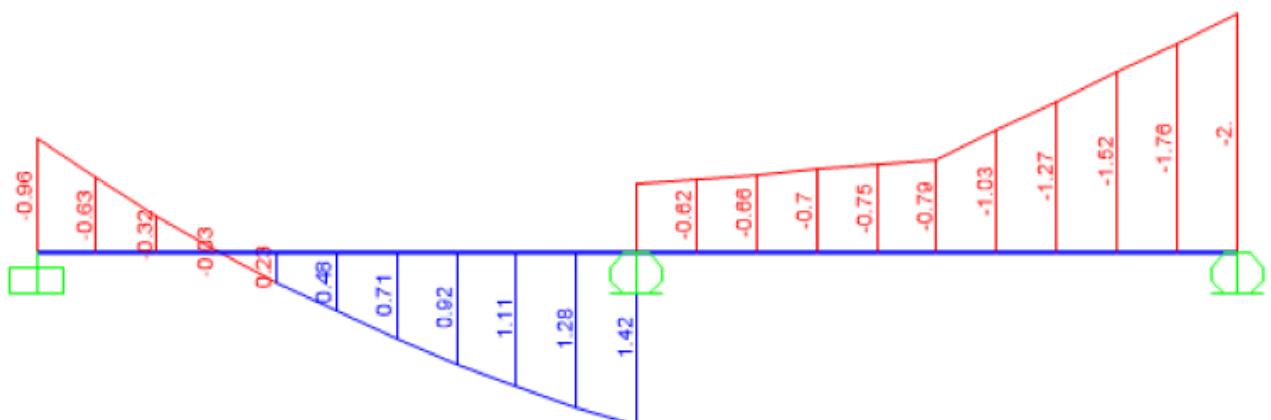
**Hình 3.43.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.44.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.45.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N] \{q\}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{67}{168} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{107}{168} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{29}{224} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

### c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

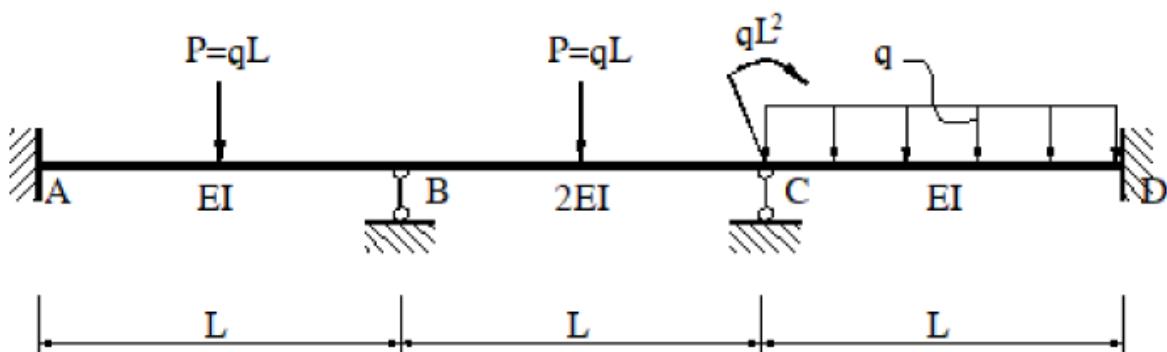
$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_2 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{67}{168} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{107}{168} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \boxed{\frac{5}{84} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 3.9** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.46.



**Hình 3.46.** Sơ đồ kết cấu dầm

Hãy xác định:

- a) Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- b) Xác định chuyển vị tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.
- c) Xác định góc xoay tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.

### a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.47



**Hình 3.47.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$(3 \times 4) \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$(4 \times 4) \quad [K]_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$(4 \times 4) \quad [K]_2 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$(4 \times 4) \quad [K]_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} - qL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ -\frac{7qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\overline{P^*}\} = qL^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{23}{24} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{23}{24} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} \frac{23}{768} \\ -\frac{23}{256} \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{23}{768} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{23}{384} qL^2 \\ \frac{46}{384} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{23}{768} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{23}{256} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{46}{384} qL^2 \\ -\frac{230}{384} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 3:

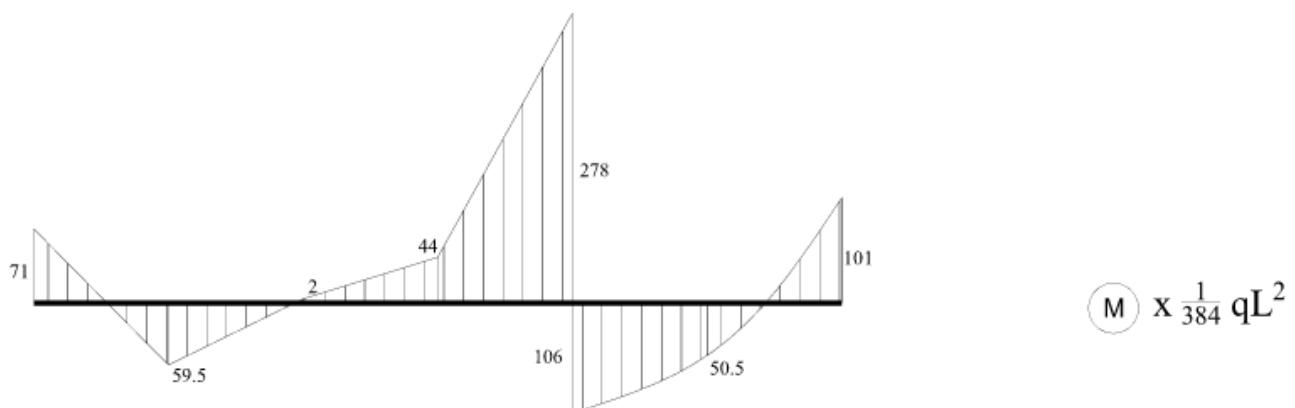
$$\{M\}_3 = [S]_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{23}{256} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{23}{64} qL^2 \\ -\frac{23}{128} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{138}{384} qL^2 \\ -\frac{69}{384} qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men M của dầm:

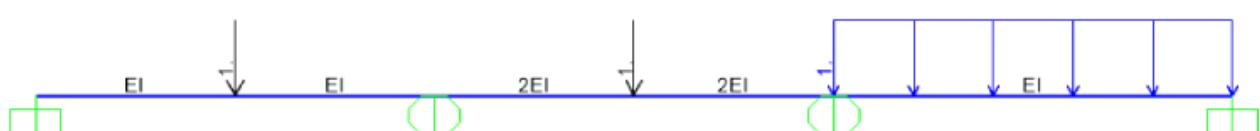
$$M = M_0 + M_q + M_p$$



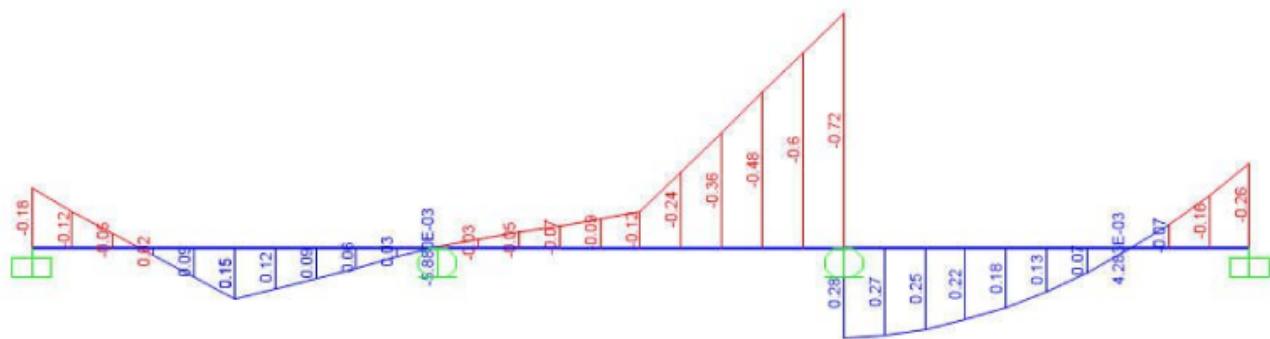
**Hình 3.48.** Biểu đồ mô men M của dầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.49.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.50.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

**b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung**

- Phần tử 1:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2};$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2};$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{23}{768} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{23}{6144} \frac{qL^4}{EI}}$$

- Phần tử 2:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{23}{768} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{23}{256} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} = \boxed{\frac{23}{1536} \frac{qL^4}{EI}}$$

### c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung

- Phần tử 1:

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{23}{768} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \boxed{-\frac{23}{3072} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

• Phản tử 2:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

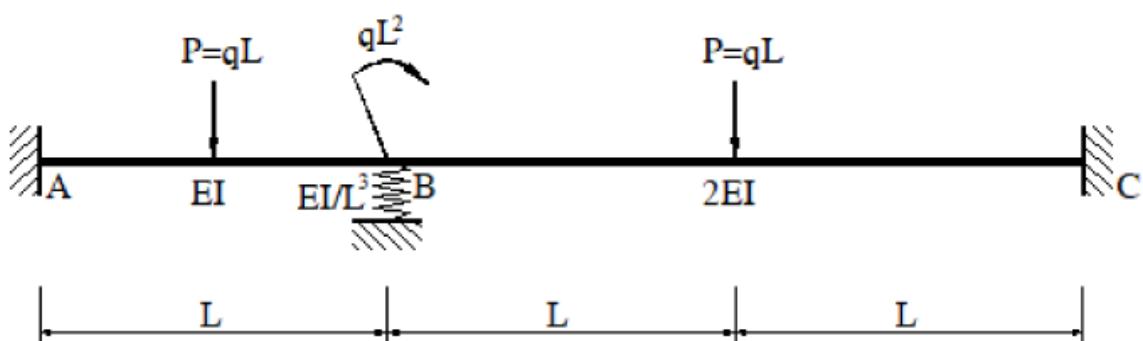
Suy ra

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{67}{168} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{107}{168} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{23}{1536} \frac{qL^3}{EI}}$$

**Bài 3.10** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.51.



Hình 3.51. Sơ đồ kết cấu dầm

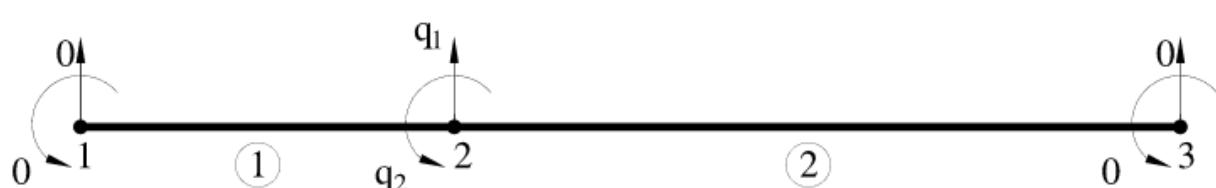
Hãy xác định:

- a) Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- b) Xác định chuyển vị tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.
- c) Xác định góc xoay tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.

**Giải**

**a) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.52:



Hình 3.52. Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(2 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 12 & -6L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_2} = \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ 16L^2 & -12L & 8L^2 & 1 \\ 12 & -12L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \underset{(2 \times 2)}{\left[ \overline{K}^* \right]} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 15 & -3L \\ -3L & 8L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} - qL^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{7qL^2}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{P(2L)}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{4} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \bar{P}^* \right\} = \begin{Bmatrix} -qL \\ -\frac{9qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 15 & -3L \\ -3L & 8L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ -\frac{9qL^2}{8} \end{Bmatrix} - \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 16 & -3L \\ -3L & 8L^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ -\frac{9qL^2}{8} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{3}{17} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{3}{17} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{30}{136} qL^2 \\ -\frac{18}{136} qL^2 \end{Bmatrix}$$

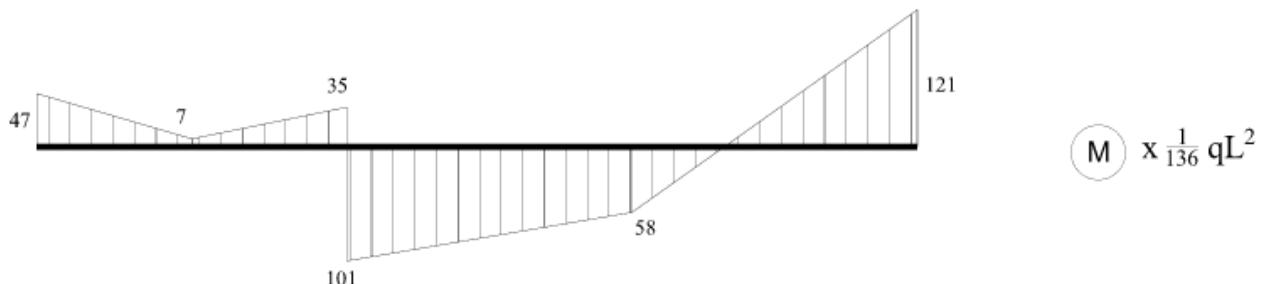
Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{13}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{3}{17} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{135}{136} qL^2 \\ -\frac{87}{136} qL^2 \end{Bmatrix}$$

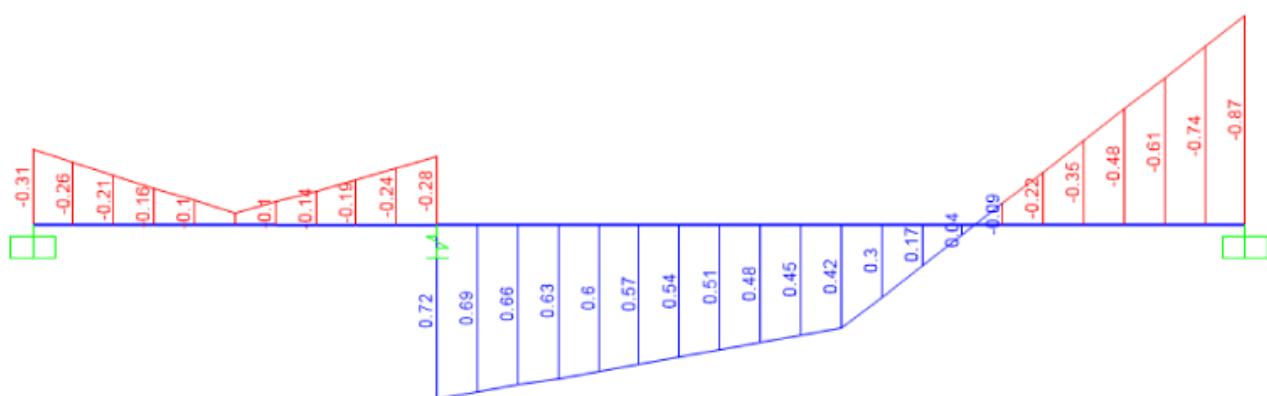
- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



**Hình 3.53.** Biểu đồ mô men  $M$  của đàm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm

**Hình 3.54.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000**Hình 3.55.** Biểu đồ mô men  $M$  của đàm nhận được từ phần mềm SAP2000**b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung**

- Phần tử 1:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{3}{17} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} = \boxed{-\frac{7}{272} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

• Phân tử 2:

$$v(x = L) = [N] \{q\}_e$$

$$\text{trong đó } [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

$$N_1(x = L) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2(x = L) = L \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} L$$

$$N_3(x = L) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4(x = L) = L \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} L$$

Suy ra:

$$v(x=L) = [N] \{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{13}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{3}{17} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{-\frac{25}{272} \frac{qL^4}{EI}}$$

**c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung**

- Phần tử 1:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}\left(x=\frac{L}{2}\right) &= [N']\{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{3}{17} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \boxed{-\frac{27}{272} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

• Phản ứng 2:

$$\frac{dv}{dx}(x=L) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1(x=L) = 0 - 3 \times \frac{2L}{4L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = -\frac{3}{2L} + \frac{3}{4L} = \frac{-3}{4L}$$

$$N'_2(x=L) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3(x=L) = 3 \times \frac{2L}{4L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = \frac{3}{2L} - \frac{3}{4L} = \frac{3}{4L}$$

$$N'_4(x=L) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

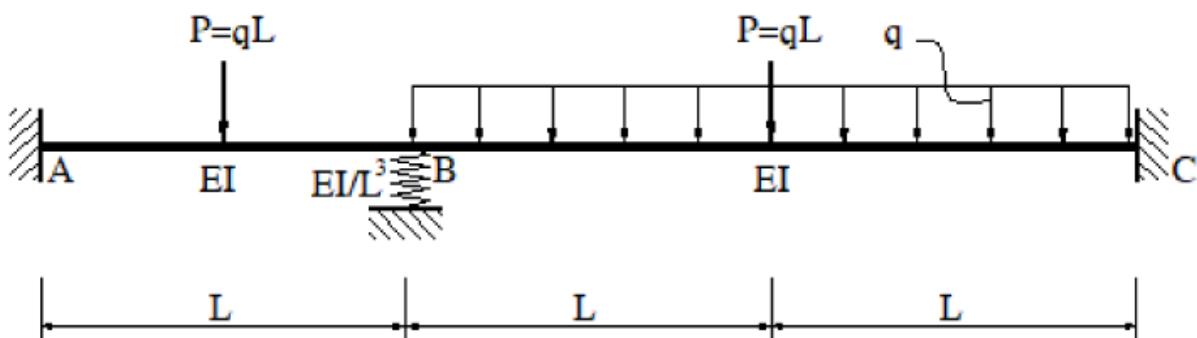
Suy ra

$$\frac{dv}{dx}(x=L) = [N']\{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{4L} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4L} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4L} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{13}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{3}{17} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{63}{544} \frac{qL^3}{EI}}$$

**Bài 3.11** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.56.



Hình 3.56. Sơ đồ kết cấu dầm

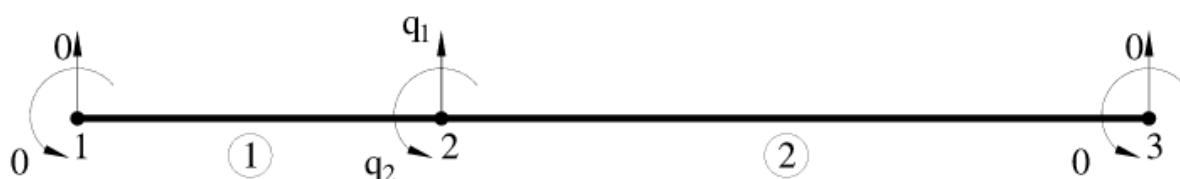
Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.
- Xác định góc xoay tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.

**Giải:**

**a) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.57.



**Hình 3.57.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(2 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 1 \\ & & 4L^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_2} = \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ 16L^2 & -12L & 8L^2 & 1 \\ dx & 12 & -12L & 0 \\ & & 16L^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \underset{(2 \times 2)}{\left[ \overline{K}^* \right]} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 27/2 & -9L/2 \\ -9L/2 & 6L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{8} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phản tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{P}{2} - qL \\ -\frac{P(2L)}{8} - \frac{q(2L)^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3qL}{2} \\ -\frac{7qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P}^* \right\} = \begin{pmatrix} -2qL \\ -\frac{11qL^2}{24} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ & \Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 27/2 & -9L/2 \\ -9L/2 & 6L^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2qL \\ -\frac{11qL^2}{24} \end{pmatrix} - \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 29/2 & -9L/2 \\ -9L/2 & 6L^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2qL \\ -\frac{11qL^2}{24} \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{75}{356} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{751}{3204} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{75}{356} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{751}{3204} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{5096}{6408} qL^2 \\ \frac{2092}{6408} qL^2 \end{Bmatrix}$$

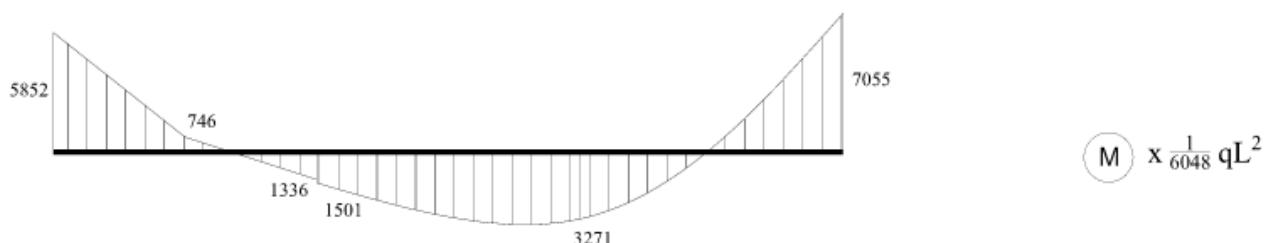
Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{75}{356} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{751}{3204} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{5029}{6408} qL^2 \\ -\frac{3527}{6408} qL^2 \end{Bmatrix}$$

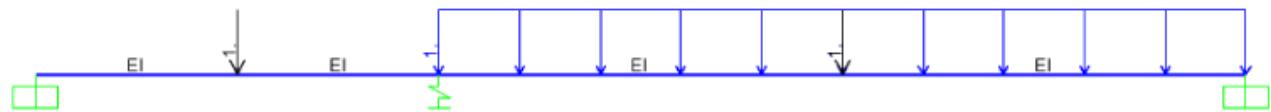
- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



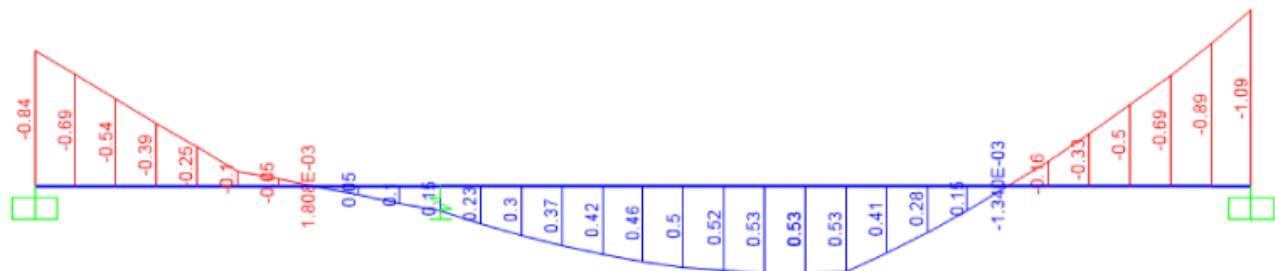
**Hình 3.58.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1 \text{ m}$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}$  và  $P = 1 \text{ kN}$ ,  $M = 1 \text{ kNm}$



**Hình 3.59.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.60.** Biểu đồ mô men  $M$  của đàm nhận được từ phần mềm SAP2000

### b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung

- Phần tử 1:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
 v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= [N]\{q\}_1 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{75}{356} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{751}{3204} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\
 &= \boxed{-\frac{1949}{25632} \frac{qL^4}{EI}}
 \end{aligned}$$

• Phần tử 2:

$$v(x = L) = [N]\{q\}_e$$

$$\text{trong đó } [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

$$N_1(x = L) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2(x = L) = L \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}L$$

$$N_3(x = L) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4(x = L) = L \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}L$$

$$v(x=L) = [N] \{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{75}{356} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{751}{3204} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{-\frac{2101}{12816} \frac{qL^4}{EI}}$$

**c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung**

- Phần tử 1:

$$\frac{dv}{dx}\left(x=\frac{L}{2}\right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x=\frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x=\frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3\left(x=\frac{L}{2}\right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4\left(x=\frac{L}{2}\right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{75}{356} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{751}{3204} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{3299}{12816} \frac{qL^3}{EI}}$$

• Phần tử 2:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = L \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1(x=L) = 0 - 3 \times \frac{2L}{4L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = -\frac{3}{2L} + \frac{3}{4L} = \frac{-3}{4L}$$

$$N'_2(x=L) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3(x=L) = 3 \times \frac{2L}{4L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = \frac{3}{2L} - \frac{3}{4L} = \frac{3}{4L}$$

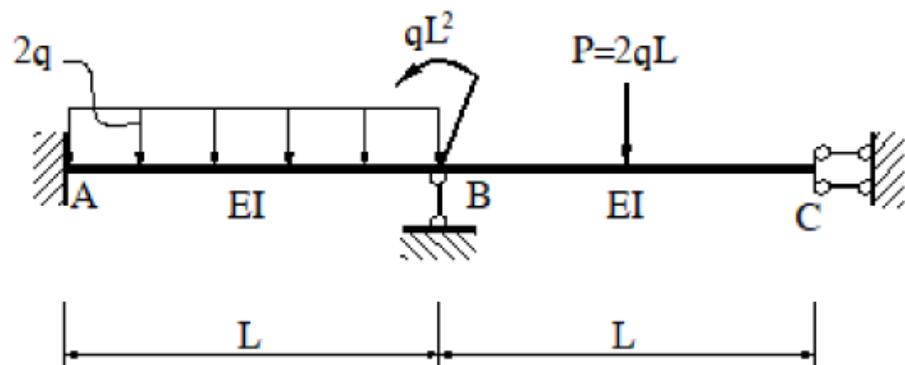
$$N'_4(x=L) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = L \right) = [N'] \{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{4L} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{75}{356} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{751}{3204} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{347}{1602} \frac{qL^3}{EI}}$$

**Bài 3.12** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.61.



Hình 3.61. Sơ đồ kết cấu dầm

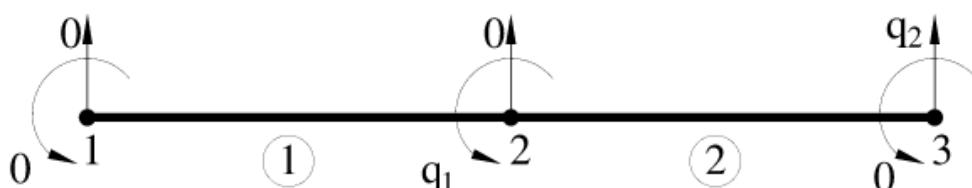
Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung.
- Xác định góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung.

**Giải**

**a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.62:



Hình 3.62. Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(2 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ (4 \times 4) & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ (4 \times 4) & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \left[ \overline{K}^* \right] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L \\ -6L & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2qL^2}{12} + qL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7qL^2}{6} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{2qL^2}{8} \\ \frac{-P}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{4} \\ -qL \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P}^* \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{11}{12} qL^2 \\ -qL \end{Bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ & \Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L \\ -6L & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \textcolor{red}{q_1} \\ \textcolor{red}{q_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{11}{12} qL^2 \\ -qL \end{Bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{Bmatrix} \textcolor{red}{q_1} \\ \textcolor{red}{q_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Momen uốn của các phần tử:

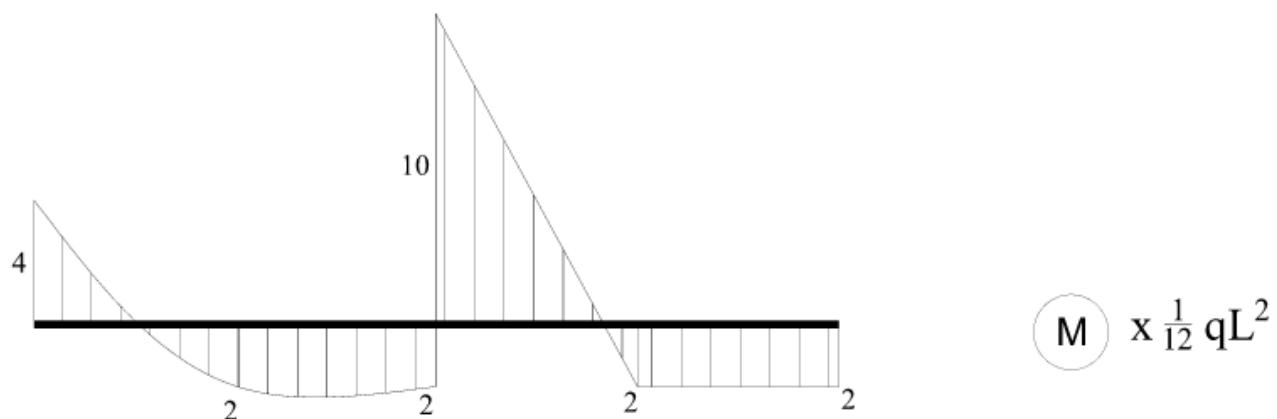
Phần tử 1:

$$\begin{aligned} \{M\}_1 &= [S]_1 \{q\}_1 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{12} qL^2 \\ \frac{4}{12} qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Phần tử 2:

$$\begin{aligned} \{M\}_2 &= [S]_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{7}{12} qL^2 \\ \frac{5}{12} qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

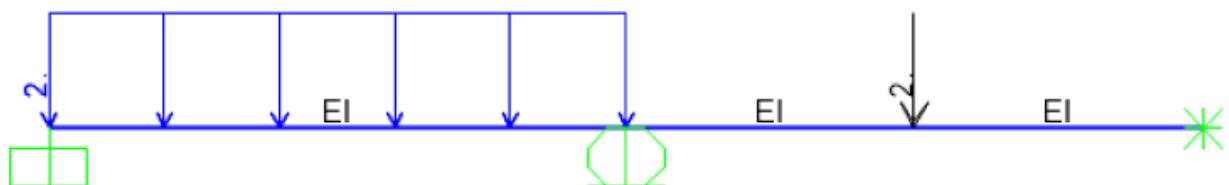
- Biểu đồ mô men M của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



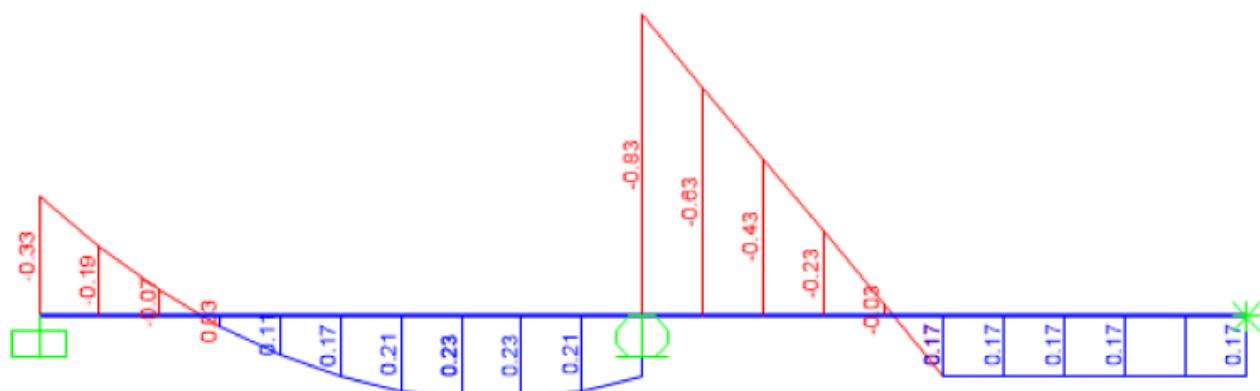
**Hình 3.63.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.64.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.65.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

### b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= [N]\{q\}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{1}{96} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

### c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

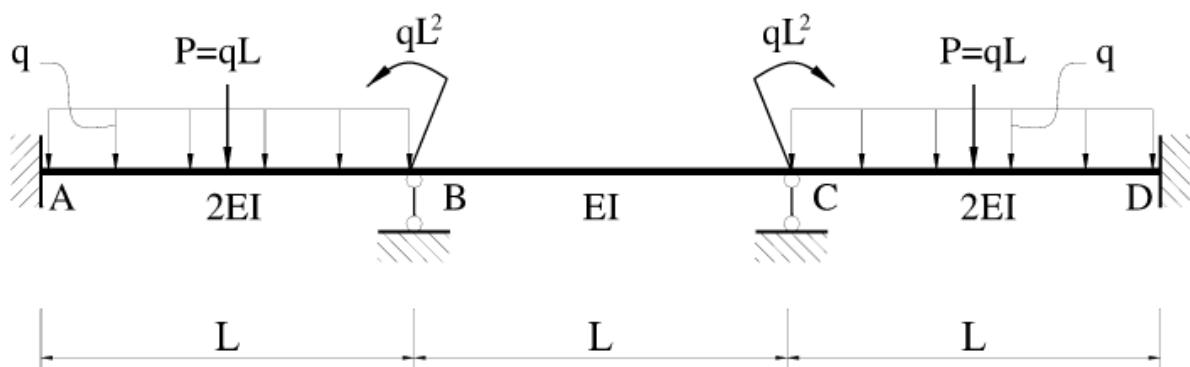
$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_2 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI} \\ \frac{-1}{24} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{1}{12} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

**Bài 3.13** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.66.



**Hình 3.66.** Sơ đồ kết cấu dầm

Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại vị trí điểm giữa thanh BC.
- Xác định góc xoay tại vị trí điểm giữa thanh BC.

**Giải**

**a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.67.

**Hình 3.67.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:  $b_{(3 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } [K]_1 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 1 \\ & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 2 \\ & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} + \frac{qL^2}{12} + qL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{29}{24}qL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} - \frac{qL^2}{8} - qL^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{29}{24}qL^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \overline{P^*} \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{29}{24} \\ -\frac{29}{24} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u^*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{P^*} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{29}{24} \\ -\frac{29}{24} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{29}{240} \\ -\frac{29}{240} \end{bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{29}{60} qL^2 \\ \frac{58}{60} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{29}{120} qL^2 \\ -\frac{29}{120} qL^2 \end{Bmatrix}$$

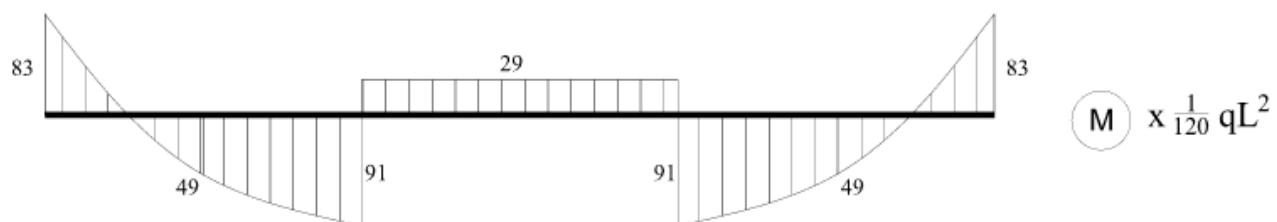
Phần tử 3:

$$\{M\}_3 = [S]_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{29}{60} qL^2 \\ -\frac{58}{60} qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



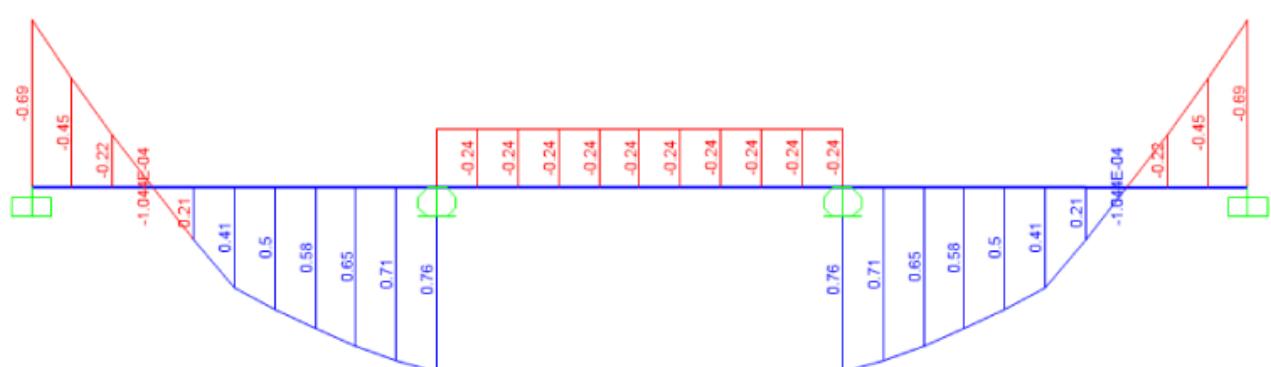
**Hình 3.68.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.69.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.70.** Biểu đồ mô men  $M$  của đàm nhận được từ phần mềm SAP2000

**b) Chuyển vị tại vị trí giữa thanh BC**

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{29}{960} \frac{qL^4}{EI}}$$

**c) Góc xoay tại vị trí giữa thanh BC**

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

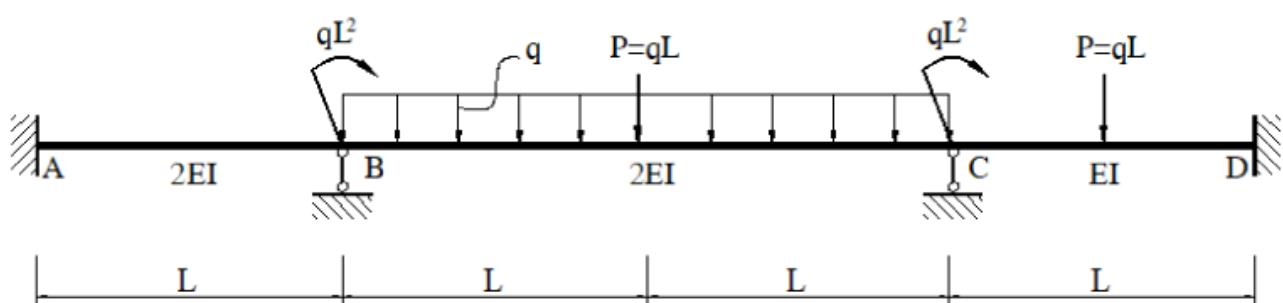
$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-3}{2L} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{29}{240} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

**Bài 3.14** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.71.



Hình 3.71. Sơ đồ kết cấu dầm

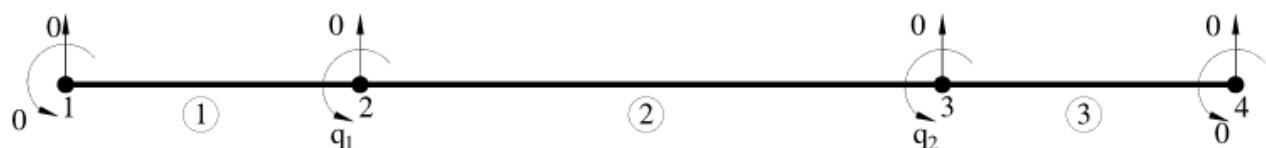
Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.
- Xác định góc xoay tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.

**Giải**

### a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.72:



**Hình 3.72.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:  $b_{(3 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } [K]_1 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ 16L^2 & -12L & 8L^2 & 0 \\ dx & 12 & -12L & 0 \\ & & 16L^2 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K^*} \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } \{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -qL^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 2: } \{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{q(2L)^2}{12} - \frac{qL(2L)}{8} \\ 0 \\ \frac{q(2L)^2}{12} + \frac{qL(2L)}{8} - qL^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{5qL^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Phần tử 3: } \{P\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\overline{P^*}\} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{19}{12} \\ -\frac{13}{24} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\overline{K^*}] \{\overline{u^*}\} = \{\overline{P^*}\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{19}{12} \\ -\frac{13}{24} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{139}{1104} \\ -\frac{5}{138} \end{bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{139}{1104} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{139}{276} qL^2 \\ -\frac{139}{138} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{139}{276} qL^2 \\ -\frac{278}{276} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

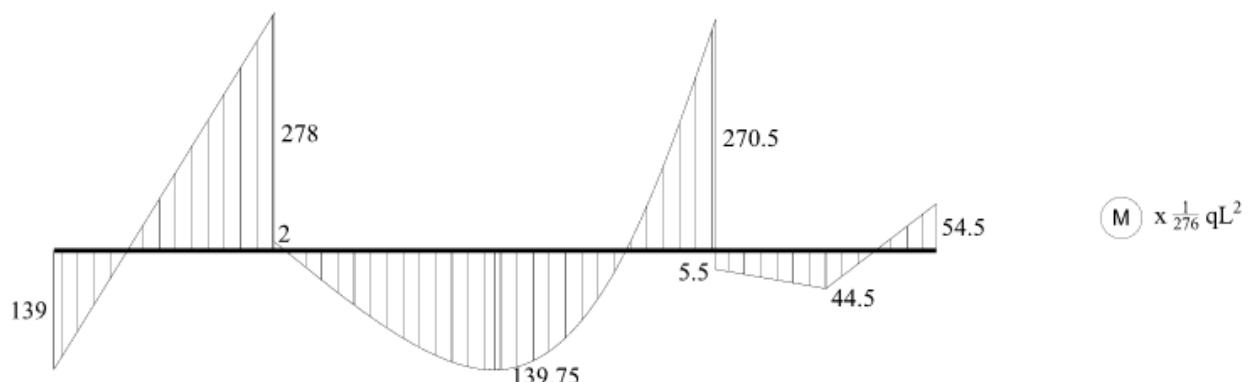
$$= \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{139}{1104} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{138} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{53}{92} qL^2 \\ -\frac{73}{184} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{159}{276} qL^2 \\ -\frac{109.5}{276} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\begin{aligned}\{M\}_3 &= [S]_3 \{q\}_3 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{138} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{10}{69} qL^2 \\ -\frac{5}{69} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{40}{276} qL^2 \\ -\frac{20}{276} qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

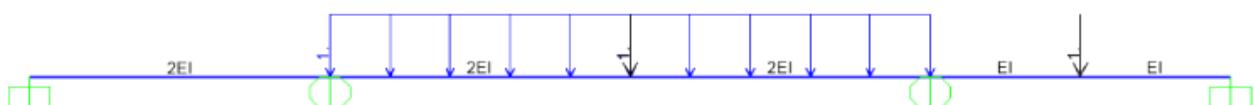
- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



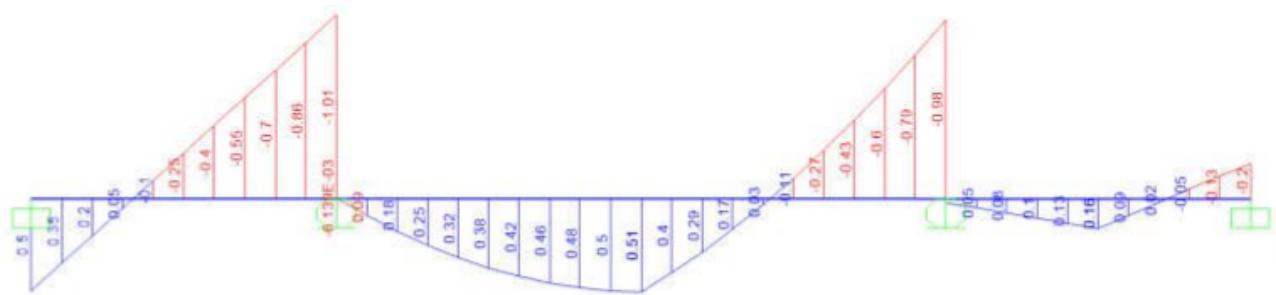
**Hình 3.73.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.74.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.75.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

### b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung

- Phần tử 3:

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} v \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N] \{q\}_3 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \quad \frac{L}{8} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{L}{8} \right] \left\{ -\frac{5}{138} \frac{qL^3}{EI} \right\} = \boxed{-\frac{5}{1104} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

- Phần tử 2:

$$v(x=L) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1(x=L) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2(x=L) = L \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}L$$

$$N_3(x=L) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4(x=L) = L \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v(x=L) &= [N] \{q\}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{139}{1104} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{138} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \boxed{-\frac{33}{1472} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

### c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung

- Phần tử 3:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_3 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{5}{138} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \\ &= \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{5}{138} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{array}} \end{aligned}$$

• Phần tử 2:

$$\frac{dv}{dx} (x = L) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 (x = L) = 0 - 3 \times \frac{2L}{4L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = -\frac{3}{2L} + \frac{3}{4L} = \frac{-3}{4L}$$

$$N'_2 (x = L) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

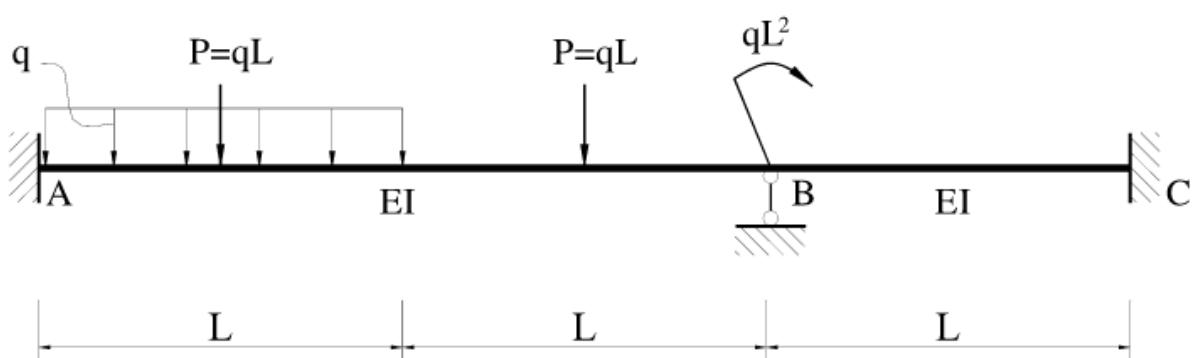
$$N'_3(x=L) = 3 \times \frac{2L}{4L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = \frac{3}{2L} - \frac{3}{4L} = \frac{3}{4L}$$

$$N'_4(x=L) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(x=L) &= [N']\{q\}_2 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 \\ -\frac{139}{1104} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{138} \frac{qL^3}{EI} \end{array} \right] \\ &= \boxed{\frac{179}{4416} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 3.15** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.76.



**Hình 3.76.** Sơ đồ kết cấu dầm

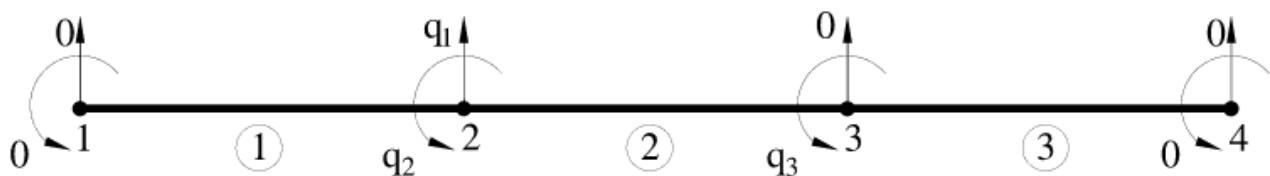
Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.
- Xác định góc xoay tại các vị trí đặt lực tập trung trong dầm.

**Giải**

**a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.77:



**Hình 3.77.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(3 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 1 \\ dx & 12 & -6L & 2 \\ & & 4L^2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} - \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{8} + \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -qL \\ \frac{5}{24}qL^2 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} - qL^2 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 3:

$$\{P\}_3 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P^*} \right\} = \begin{cases} -\frac{3}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ -\frac{7}{8}qL^2 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{3}{2}qL \\ \frac{1}{12}qL^2 \\ -\frac{7}{8}qL^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{-47}{1152} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{37}{1152} \frac{qL^3}{EI} \\ \frac{-25}{288} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phản tử 1:

$$\begin{aligned}\{M\}_1 &= [S]_1 \{q\}_1 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-47}{1152} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{37}{1152} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{89}{288} qL^2 \\ \frac{215}{576} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{178}{576} qL^2 \\ \frac{215}{576} qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Phản tử 2:

$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= [S]_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-47}{1152} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{37}{1152} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{-25}{288} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{167}{576} qL^2 \\ -\frac{304}{576} qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

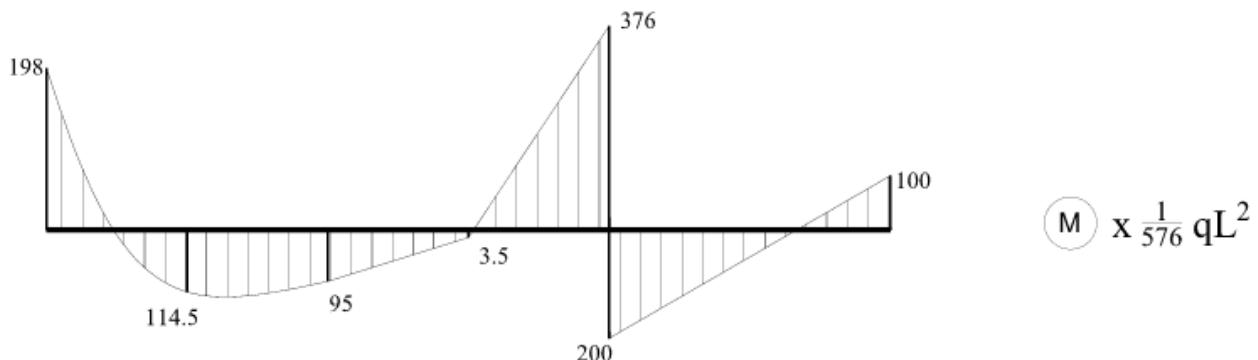
Phần tử 3:

$$\{M\}_3 = [S]_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{-25}{288} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{25}{72} qL^2 \\ -\frac{25}{144} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{200}{576} qL^2 \\ -\frac{100}{576} qL^2 \end{Bmatrix}$$

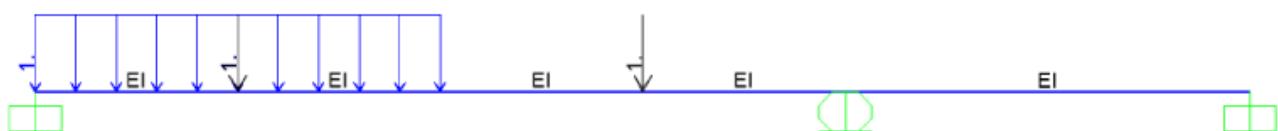
- Biểu đồ mô men M của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



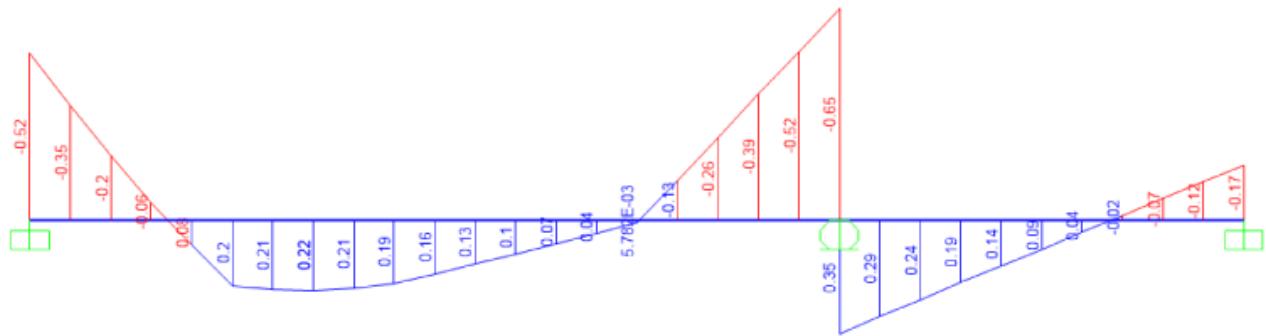
**Hình 3.78.** Biểu đồ mô men M của dầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.79.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.80.** Biểu đồ mô men  $M$  của đàm nhận được từ phần mềm SAP2000

### b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung

- Phần tử 1:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= [N]\{q\}_1 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \quad \frac{L}{8} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{L}{8} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -47 \frac{qL^4}{1152EI} \\ \frac{37}{1152} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{25}{1024} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

- Phản tử 2:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= [N]\{q\}_2 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{-47}{1152} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{37}{1152} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{-25}{288} \frac{qL^3}{EI} \end{array} \right\} \\ &= \boxed{\left[ -\frac{17}{3072} \frac{qL^4}{EI} \right]} \end{aligned}$$

### c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung

- Phản tử 1:

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-47}{1152} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{37}{1152} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} \\ &= \boxed{-\frac{319}{4608} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

• Phản tử 2:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

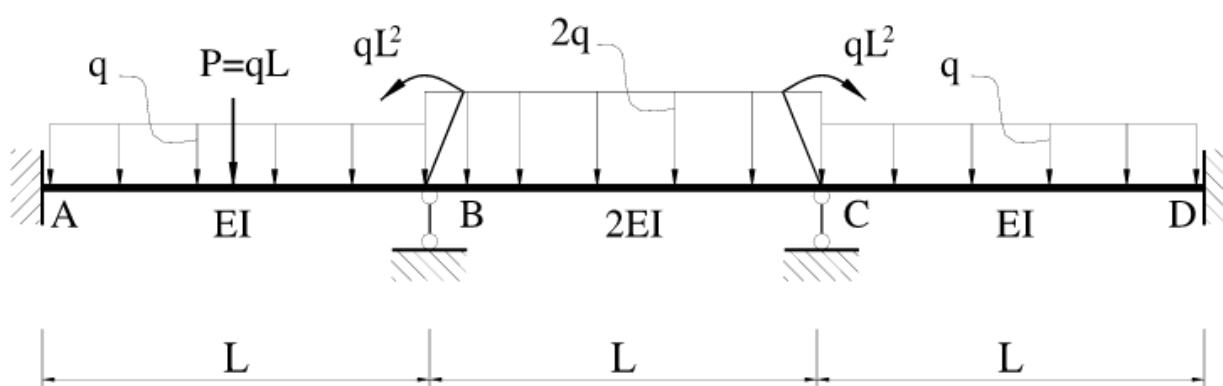
Suy ra

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-47}{1152} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{37}{1152} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{-25}{288} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \boxed{-\frac{115}{1536} \frac{qL^4}{EI}}$$

**Bài 3.16** Cho dầm liên tục có độ cứng và chịu lực tác dụng như Hình 3.81.



**Hình 3.81.** Sơ đồ kết cấu dầm

Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung trong dầm.
- Xác định góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung trong dầm.

**Giải**

**a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.82:



**Hình 3.82.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(3 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$[K]_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$[K]_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ (4 \times 4) & & 12 & -6L \\ dx & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } \{P\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{8} + \frac{qL^2}{12} + qL^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{29}{24}qL^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\text{Phần tử 2: } \{P\}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{2qL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{6} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{6} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\text{Phần tử 3: } \{P\}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} - qL^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{13}{12}qL^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P}^* \right\} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{25}{24} \\ -\frac{11}{12} \end{Bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left[ \bar{K}^* \right] \left\{ \bar{u}^* \right\} = \left\{ \overline{P}^* \right\} \\ & \Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \textcolor{red}{q_1} \\ \textcolor{red}{q_2} \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{25}{24} \\ -\frac{11}{12} \end{Bmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{Bmatrix} \textcolor{red}{q_1} \\ \textcolor{red}{q_2} \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{97}{768} \\ -\frac{91}{768} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\begin{aligned} \{M\}_1 &= [S]_1 \{q\}_1 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{97}{768} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{97}{384} qL^2 \\ \frac{194}{384} qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Phần tử 2:

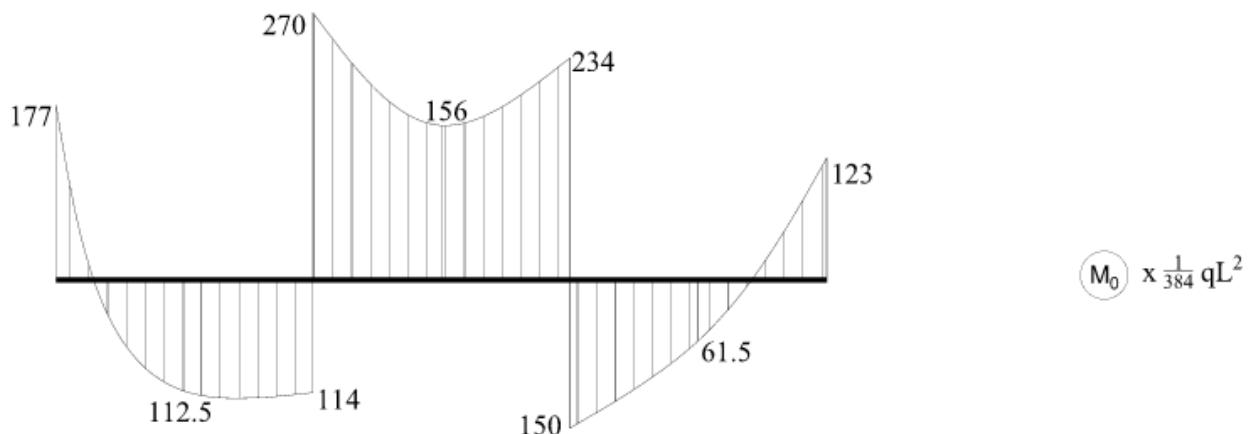
$$\begin{aligned} \{M\}_2 &= [S]_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{97}{768} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{91}{768} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{206}{384} qL^2 \\ -\frac{170}{384} qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Phần tử 3:

$$\{M\}_3 = [S]_3 \{q\}_3$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{91}{768} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{182}{384} qL^2 \\ -\frac{91}{384} qL^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

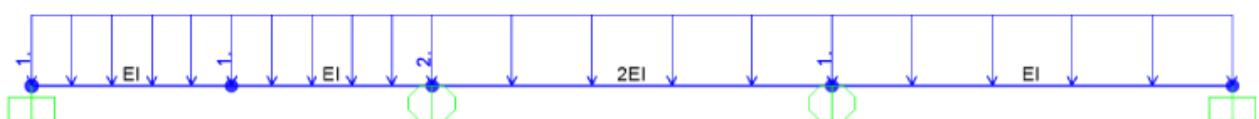
- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



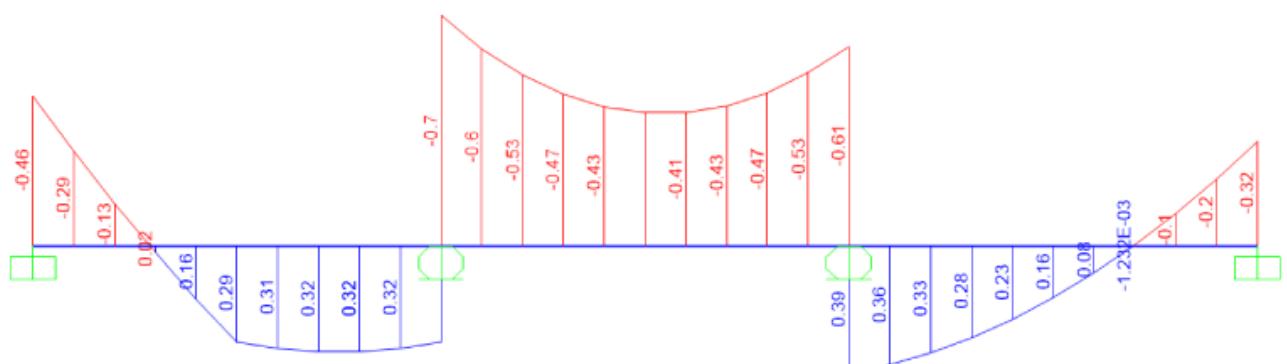
**Hình 3.83.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.84.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.85.** Biểu đồ mô men M của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

**b) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung**

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= [N]\{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{97}{768} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{97}{6144} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

**c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung**

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

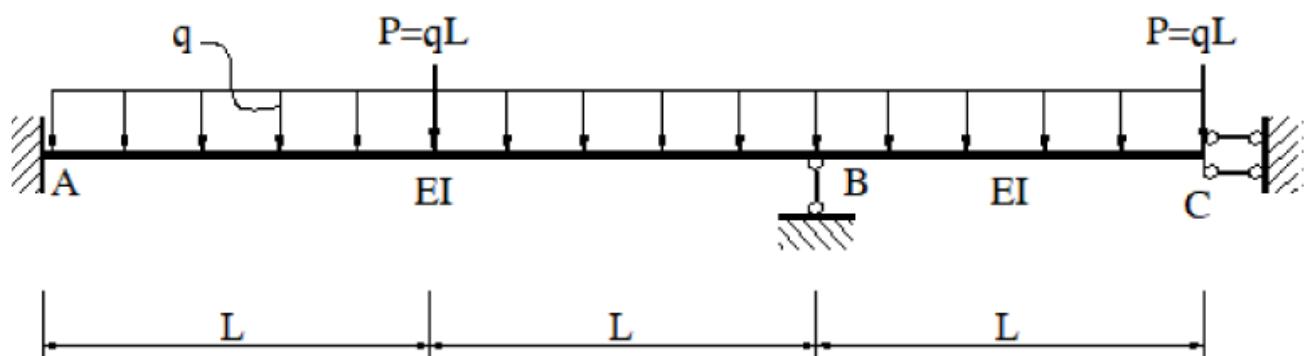
$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{97}{768} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{97}{3072} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 3.17** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.86. Dầm có độ cứng không đổi là EI.



Hình 3.86. Sơ đồ kết cấu dầm

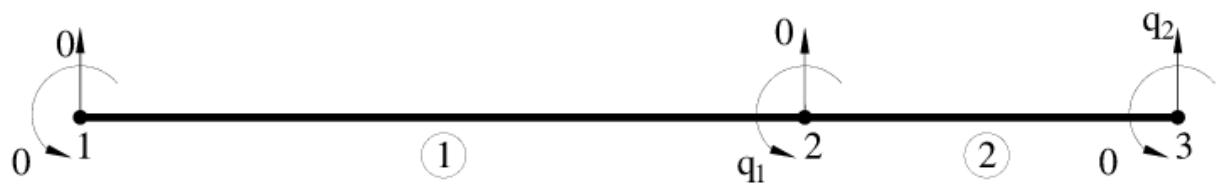
Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại các vị trí đặt lực tập trung.
- Xác định góc xoay tại các vị trí đặt lực tập trung.

**Giải**

**a) Vẽ biểu đồ mô men của hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.87.

**Hình 3.87.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(2 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_1} = \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ 16L^2 & -12L & 8L^2 & 0 \\ dx & 12 & -12L & 0 \\ & & 16L^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_2} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 1 \\ & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \underset{(2 \times 2)}{\left[ \overline{K}^* \right]} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL(2L)}{8} + \frac{q(2L)^2}{12} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{7}{12}qL^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -P - \frac{qL}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{3}{2}qL \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\{\bar{P}^*\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}qL^2 \\ -\frac{3}{2}qL \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}qL^2 \\ -\frac{3}{2}qL \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{3}{20} \frac{qL^4}{EI} \end{bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{20} \frac{qL^4}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{10} qL^2 \\ -\frac{2}{10} qL^2 \end{Bmatrix}$$

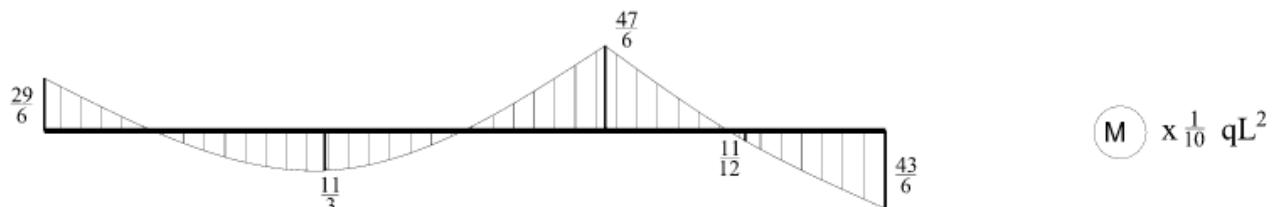
Phần tử 2:

$$\{M\}_2 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{20} \frac{qL^3}{EI} \\ -\frac{3}{20} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{7}{10} qL^2 \\ \frac{8}{10} qL^2 \end{Bmatrix}$$

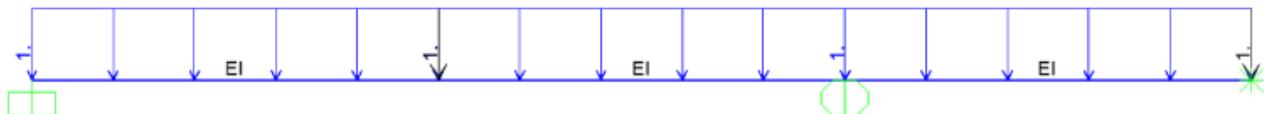
- Biểu đồ mô men M của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



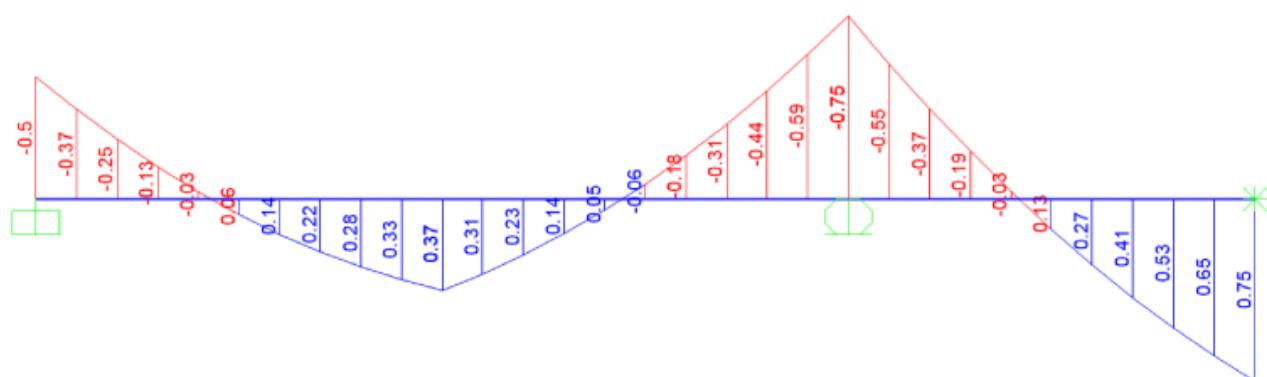
**Hình 3.88.** Biểu đồ mô men M của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1 \text{ m}$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}$  và  $P = 1 \text{ kN}$ ,  $M = 1 \text{ kNm}$



**Hình 3.89.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.90.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

### a) Chuyển vị tại vị trí đặt lực tập trung

$$v(x=L) = [N]\{q\}_e$$

trong đó

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

$$N_1(x=L) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2(x=L) = L \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}L$$

$$N_3(x=L) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4(x=L) = L \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}L$$

Suy ra

$$v(x=L) = [N]\{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{20} \frac{qL^4}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{1}{80} \frac{qL^4}{EI}}$$

**c) Góc xoay tại vị trí đặt lực tập trung**

$$\frac{dv}{dx}(x=L) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1(x=L) = 0 - 3 \times \frac{2L}{4L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = -\frac{3}{2L} + \frac{3}{4L} = \frac{-3}{4L}$$

$$N'_2(x=L) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

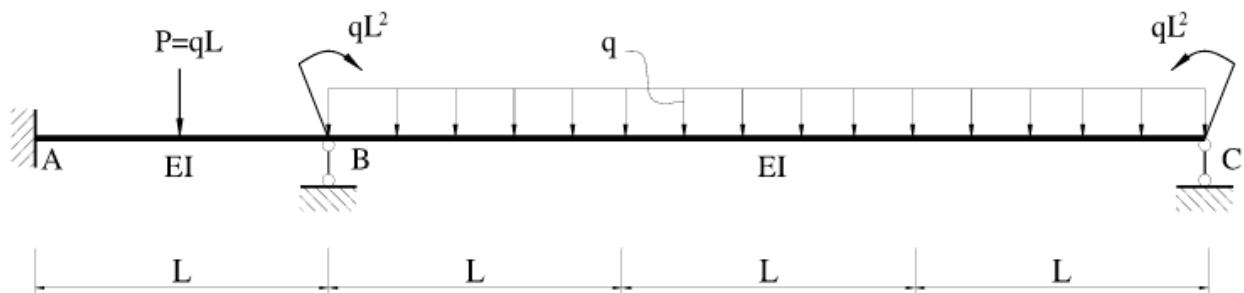
$$N'_3(x=L) = 3 \times \frac{2L}{4L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = \frac{3}{2L} - \frac{3}{4L} = \frac{3}{4L}$$

$$N'_4(x=L) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(x=L) &= [N']\{q\}_2 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{3}{4L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4L} & \frac{-1}{4} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{20} \frac{qL^4}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{1}{80} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 3.18** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.91. Dầm có độ cứng không đổi là EI.



**Hình 3.91.** Sơ đồ kết cấu dầm

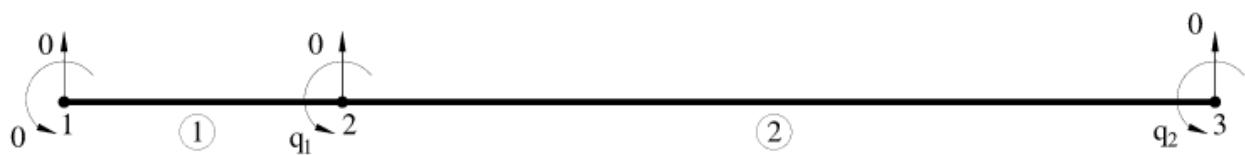
Hãy xác định:

- a) Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- b) Xác định chuyển vị tại các vị trí đặt lực tập trung.
- c) Xác định góc xoay tại các vị trí đặt lực tập trung.

**Giải**

**a) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.92.



**Hình 3.92.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(2 \times 4)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 0 \\ & & 4L^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\underset{(4 \times 4)}{[K]_2} = \frac{EI}{27L^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 12 & 18L & -12 & 18L \\ 36L^2 & -18L & 18L^2 & 0 \\ dx & 12 & -18L & 1 \\ & & 36L^2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 16/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{PL}{8} + qL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{9qL^2}{8} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{q(3L)^2}{12} \\ 0 \\ \frac{q(3L)^2}{12} - qL^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{3qL^2}{4} \\ 0 \\ -\frac{qL^2}{4} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P}^* \right\} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow \left[ \overline{K}^* \right] \left\{ \overline{u}^* \right\} = \left\{ \overline{P}^* \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 16/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3qL^2}{8} \\ -\frac{qL^2}{4} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \frac{qL^4}{EI} \\ -\frac{19}{80} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\begin{aligned} \{M\}_1 &= [S]_1 \{q\}_1 \\ &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

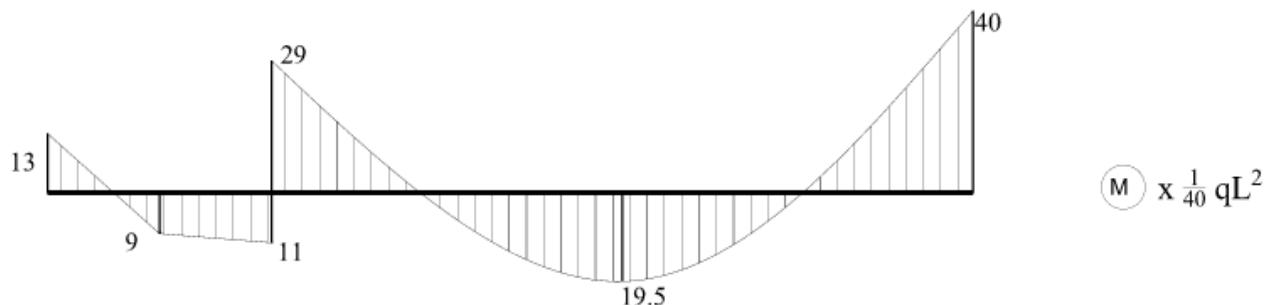
$$= \begin{Bmatrix} -\frac{2}{10} qL^2 \\ \frac{4}{10} qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{8}{40} qL^2 \\ \frac{16}{40} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\begin{aligned} \{M\}_2 &= [S]_2 \{q\}_2 \\ &= \frac{EI}{27L^3} \begin{bmatrix} -18L & -36L^2 & 18L & -18L^2 \\ 18L & 18L^2 & -18L & 36L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{19}{80} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{40} qL^2 \\ -\frac{10}{40} qL^2 \end{Bmatrix}$$

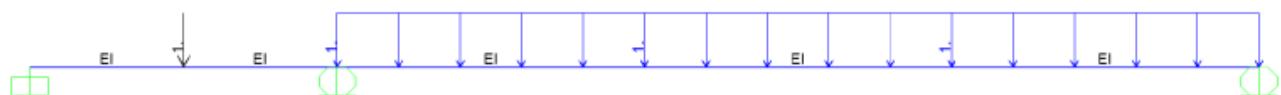
- Biểu đồ mô men  $M$  của đầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



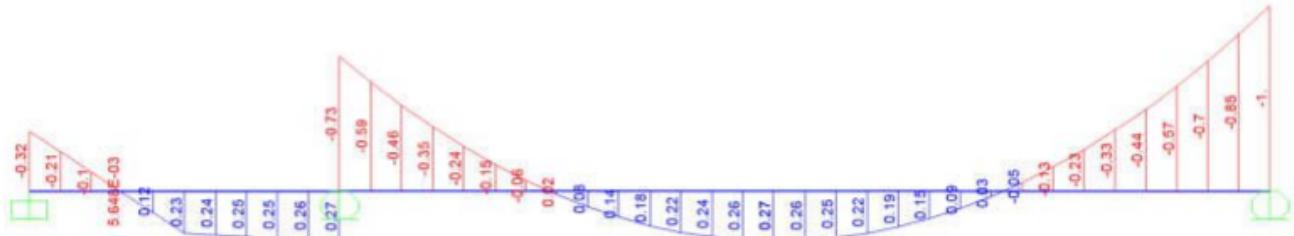
**Hình 3.93.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.94.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.95.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

### b) Chuyển vị tại vị trí giữa thanh BC

$$v\left(x = \frac{3L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1(x = L) = 1 - 3 \frac{(3L/2)^2}{(3L)^2} + 2 \frac{(3L/2)^3}{(3L)^3} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{3L}{2}\right) = \frac{3L}{2} \left(1 - 2 \frac{3L/2}{3L} + \frac{(3L/2)^2}{(3L)^2}\right) = \frac{3}{8}L$$

$$N_3 \left( x = \frac{3L}{2} \right) = 3 \frac{(3L/2)^2}{(3L)^2} - 2 \frac{(3L/2)^3}{(3L)^3} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{3L}{2} \right) = \frac{3L}{2} \left( -\frac{3L/2}{3L} + \frac{(3L/2)^2}{(3L)^2} \right) = -\frac{3}{8}L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v \left( x = \frac{3L}{2} \right) &= [N] \{q\}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{19}{80} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \boxed{\frac{81}{640} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

### c) Góc xoay tại vị trí giữa thanh BC

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{3L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{3L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2(3L/2)}{(3L)^2} + 2 \times \frac{3(3L/2)^2}{(3L)^3}$$

$$= -\frac{1}{L} + \frac{1}{2L} = -\frac{1}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{3L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2 \times (3L/2)}{3L} + \frac{3 \times (3L/2)^2}{(3L)^2}$$

$$= 1 - 2 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{3L}{2} \right) = 3 \times \frac{2 \times (3L/2)}{(3L)^2} - 2 \times \frac{3 \times (3L/2)^2}{(3L)^3}$$

$$= \frac{1}{L} - \frac{1}{2L} = \frac{1}{2L}$$

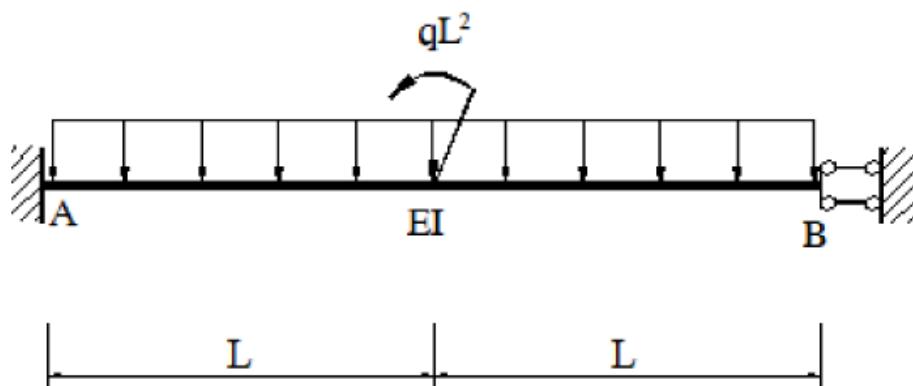
$$N'_4 \left( x = \frac{3L}{2} \right) = -\frac{2(3L/2)}{3L} + \frac{3(3L/2)^2}{(3L)^2} = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

Suy ra

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{3L}{2} \right) = [N'] \{q\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ -\frac{19}{80} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} = \boxed{\frac{11}{320} \frac{qL^3}{EI}}$$

**Bài 3.19** Cho dầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.96. Dầm có độ cứng không đổi là EI.



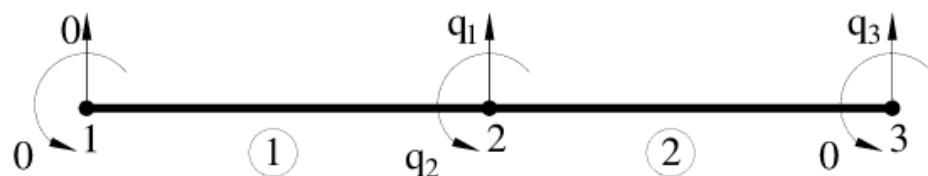
**Hình 3.96.** Sơ đồ kết cấu dầm

Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại vị trí đặt mô men.
- Xác định góc xoay tại vị trí đặt mô men.

**Giải****a) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.97



**Hình 3.97.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(2 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

Phần tử 1:

$$[K]_1_{(4 \times 4)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ dx & 12 & -6L & 1 \\ & & 4L^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$[K]_2_{(4 \times 4)} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 4L^2 & -6L & 2L^2 & 1 \\ dx & 12 & -6L & 2 \\ & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \left[ \overline{K}^* \right]_{(2 \times 2)} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 \\ 0 & 8L^2 & -6L \\ -12 & -6L & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

Phần tử 1:

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} + qL^2 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{13qL^2}{12} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{array} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{array}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P}^* \right\} = \begin{Bmatrix} -qL \\ qL^2 \\ -qL/2 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow [\bar{K}^*] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \} \\ &\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 \\ 0 & 8L^2 & -6L \\ -12 & -6L & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ qL^2 \\ -qL/2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \frac{qL^4}{EI} \end{Bmatrix}$$

- Momen uốn của các phần tử:

Phần tử 1:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

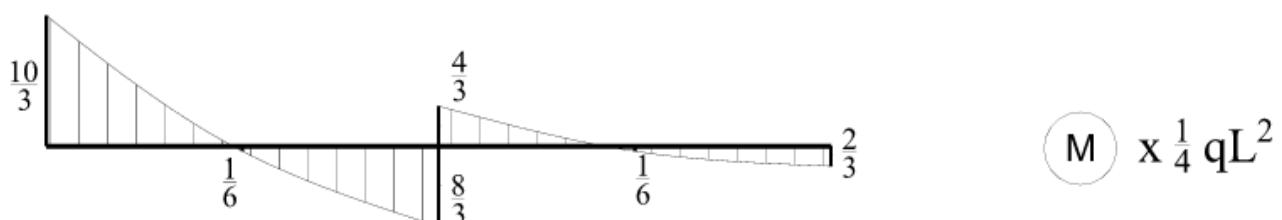
$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{4} qL^2 \\ \frac{3}{4} qL^2 \end{Bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\{M\}_1 = [S]_2 \{q\}_2$$

$$= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{4} qL^2 \\ \frac{1}{4} qL^2 \end{Bmatrix}$$

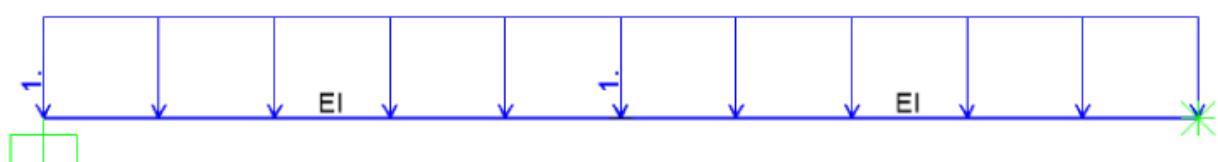
- Biểu đồ mô men M của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



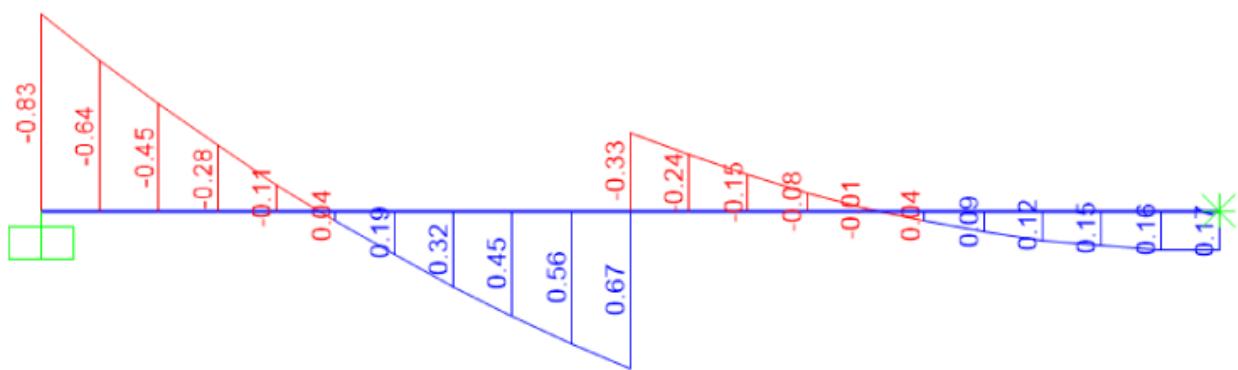
**Hình 3.98.** Biểu đồ mô men M của dầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm



**Hình 3.99.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 3.100.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

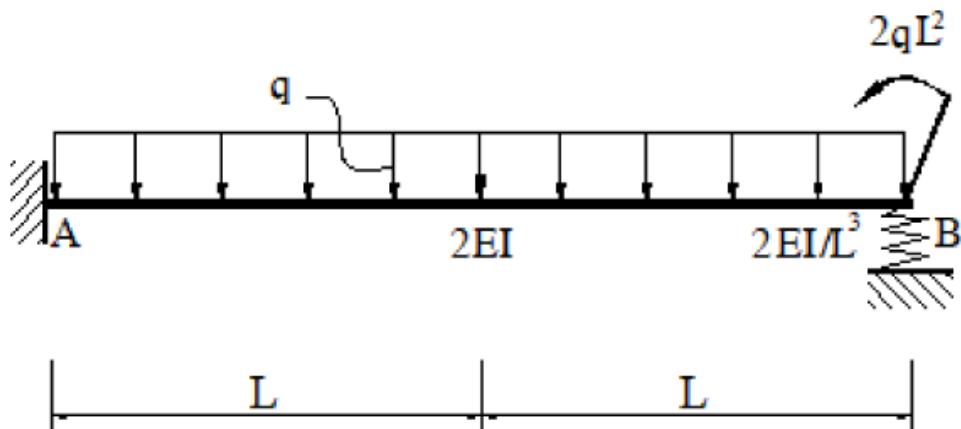
a) Chuyển vị tại vị trí giữa thanh AB

$$v(x = L) = q_1 = -\frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI}$$

b) Góc xoay tại vị trí giữa thanh AB

$$\frac{dv}{dx}(x = L) = q_2 = 0$$

**Bài 3.20** Cho đầm liên tục chịu lực tác dụng như Hình 3.101. Đầm có độ cứng không đổi là  $2EI$ .



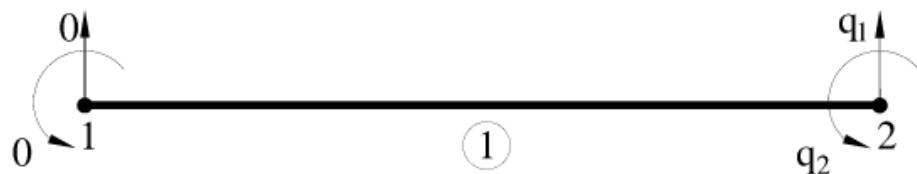
**Hình 3.101.** Sơ đồ kết cấu đầm

Hãy xác định:

- Biểu đồ mô men của đầm bằng phương pháp phân tử hữu hạn.
- Xác định chuyển vị tại vị trí giữa đầm.
- Xác định góc xoay tại vị trí giữa đầm.

**Giải****a) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 3.102.



**Hình 3.102.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(1 \times 4)}{b} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } \underset{(4 \times 4)}{[K]}_1 = \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 12L & -12 & 12L \\ & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ dx & & 12 & -12L \\ & & & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \underset{(2 \times 2)}{\left[ \overline{K}^* \right]} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3L \\ -3L & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

$$\text{Phần tử 1: } \{P\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{q2L}{2} \\ \frac{q(2L)^2}{12} + 2qL^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -qL \\ \frac{7qL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Vectơ tải tổng thể

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \overline{P^*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ \frac{7}{3}qL^2 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

- Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}^* \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & -3L \\ -3L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ \frac{7}{3}qL^2 \end{Bmatrix} - \frac{2EI}{L^3} \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 5 & -3L \\ -3L & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qL \\ \frac{7}{3}qL^2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{26}{33} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix}$$

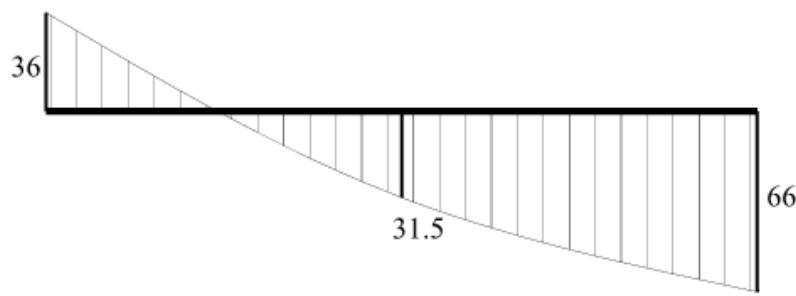
- Momen uốn của phần tử:

$$\{M\}_1 = [S]_1 \{q\}_1$$

$$= \frac{2EI}{8L^3} \begin{bmatrix} -12L & -16L^2 & 12L & -8L^2 \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{11} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{26}{33} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{25}{33}qL^2 \\ \frac{77}{33}qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men M của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$

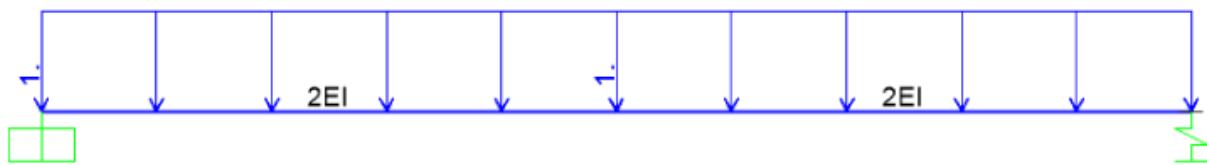
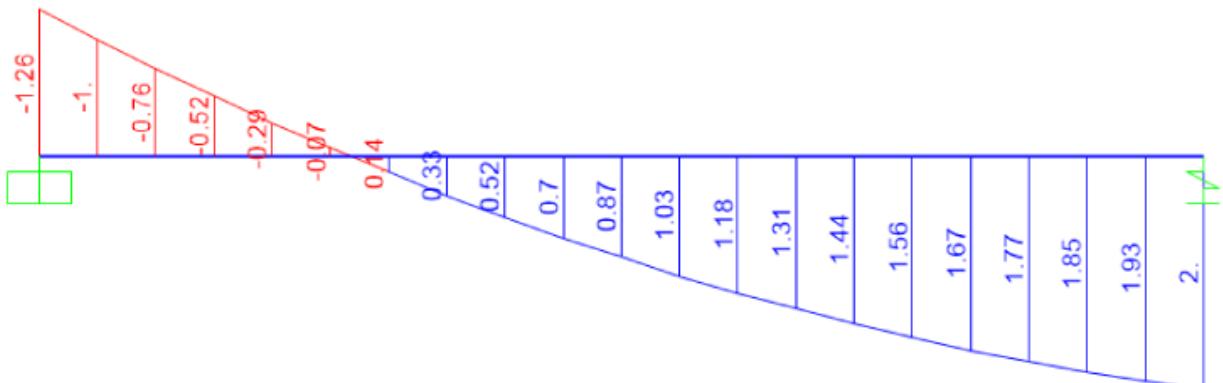


$$M \propto \frac{1}{33} q L^2$$

**Hình 3.103.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN,  $M = 1$  kNm

**Hình 3.104.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000**Hình 3.105.** Biểu đồ mô men  $M$  của đầm nhận được từ phần mềm SAP2000

### a) Chuyển vị tại vị trí giữa đầm

$$v(x=L) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1(x=L) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2(x=L) = L \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}L$$

$$N_3(x=L) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4(x=L) = L \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}L$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} v(x=L) &= [N] \{q\}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{11} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{26}{33} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{2}{33} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

### b) Góc xoay tại vị trí giữa đàm

$$\frac{dv}{dx}(x=L) = [N'] \{q\}_e$$

$$\text{trong đó } [N'] = [N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \quad N'_4]$$

$$N'_1(x=L) = 0 - 3 \times \frac{2L}{4L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = -\frac{3}{2L} + \frac{3}{4L} = \frac{-3}{4L}$$

$$N'_2(x=L) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3(x=L) = 3 \times \frac{2L}{4L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{8L^3} = \frac{3}{2L} - \frac{3}{4L} = \frac{3}{4L}$$

$$N'_4(x=L) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{dv}{dx}(x=L) = [N'] \{q\}_2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{4L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4L} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{11} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{26}{33} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{1}{132} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

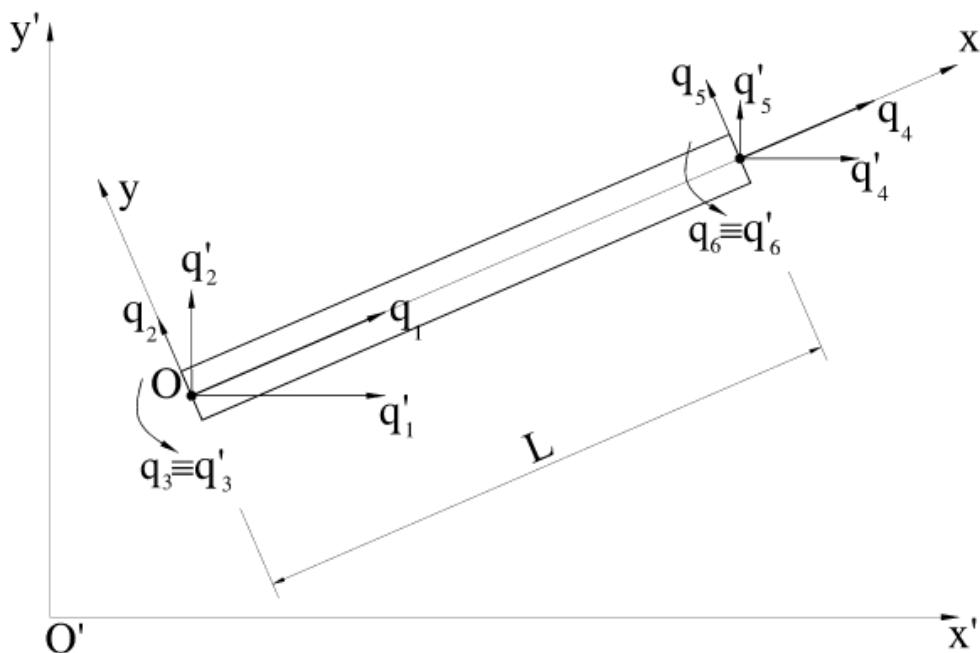
# Chương 4

## PHẦN TỬ KHUNG

### TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Khung phẳng:**

Xét phần tử khung phẳng như Hình 4.1.



**Hình 4.1.** Phần tử khung phẳng

Véc tơ chuyển vị nút phần tử:

$$\begin{aligned} \left\{q\right\}_e &= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{pmatrix}^T \\ &\equiv \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

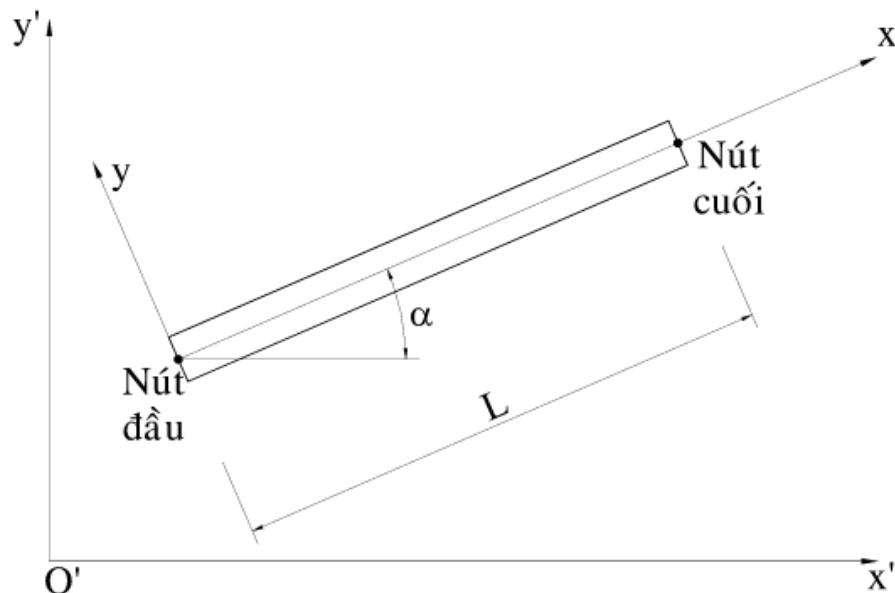
$$\left\{q'\right\}_e = \begin{pmatrix} q'_1 & q'_2 & q'_3 & q'_4 & q'_5 & q'_6 \end{pmatrix}^T$$

Quan hệ giữa chúng:

$$\left\{q\right\}_e = [T]_e \left\{q'\right\}_e$$

Với ma trận chuyển trực:

$$[T]_e = \begin{bmatrix} [\eta] & [0] \\ [0] & [\eta] \end{bmatrix} \text{ với: } [\eta] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$



**Hình 4.2.** Chuyển trực

Ma trận cosin chỉ phương:

$$[\eta] = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ với } \begin{cases} c = \cos \alpha = l_x \\ s = \sin \alpha = m_x \end{cases}$$

Do các chuyển vị nút  $\{q\}_e$  gây ra các biến dạng độc lập với nhau. Cụ thể:

+ Phần tử bị biến dạng dọc trực bởi  $\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_4 \end{Bmatrix}_e$

+ Phần tử bị uốn bởi  $\{q_2 \quad q_3 \quad q_5 \quad q_6\}_e^T$

Vậy:  $[K]_e$  có kích thước  $(6 \times 6)$  được thiết lập từ 2 ma trận con  $(2 \times 2)$  và  $(4 \times 4)$ :

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
$\frac{EA}{L}$			$-\frac{EA}{L}$		
	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$		$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
		$\frac{4EI}{L}$		$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
			$\frac{EA}{L}$		
				$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
$dx$					$\frac{4EI}{L}$

Từ đó dễ xác định được:

$$[K']_e = [T]_e^T [K]_e [T]_e$$

$Ac^2 + Bs^2$	$(A-B)cs$	$-\frac{BL}{2}s$	$-(Ac^2 + Bs^2)$	$-(A-B)cs$	$-\frac{BL}{2}s$
	$As^2 + Bc^2$	$\frac{BL}{2}c$	$-(A-B)cs$	$-(As^2 + Bc^2)$	$\frac{BL}{2}c$
		$4I$	$\frac{BL}{2}s$	$-\frac{BL}{2}c$	$2I$
			$Ac^2 + Bs^2$	$(A-B)cs$	$\frac{BL}{2}s$
				$As^2 + Bc^2$	$-\frac{BL}{2}c$
$dx$					$4I$

với,  $A$ : diện tích mặt cắt ngang,  $B = \frac{12I}{L^2}$

- Nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc đến chuyên vị, ta có  $[K']_e$  ở dạng đơn giản như sau:

$$[K']_e = \frac{E}{L^3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 12s^2 & -12cs & -6Ls & -12s^2 & 12cs & -6Ls \\ \hline & & 12c^2 & 6Lc & 12cs & -12c^2 & 6Lc \\ \hline & & & 4L^2 & 6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ \hline & & & & 12s^2 & -12sc & 6Ls \\ \hline & & & & & 12c^2 & -6Lc \\ \hline \text{đx} & & & & & & 4L^2 \\ \hline \end{array}$$

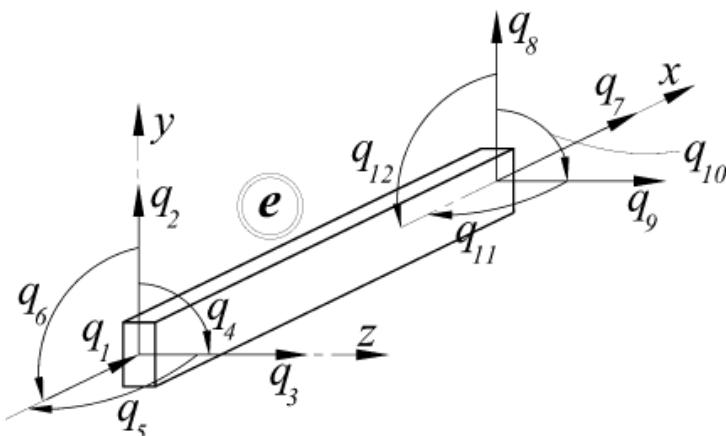
- Momen uốn nội lực tính theo  $\{q'\}_e$ :

$$\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_e = [S']_e \{q'\}_e$$

với:  $[S']_e = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 6Ls & -6Lc & -4L^2 & -6Ls & 6Lc & -2L^2 \\ \hline & -6Ls & 6Lc & 2L^2 & 6Ls & -6Lc & 4L^2 \\ \hline \end{array}$

### **Khung không gian**

Xét phần tử đầm trong không gian với hệ trục địa phương xyz (x: trục đầm, y và z là 2 trục chính của mặt cắt ngang).



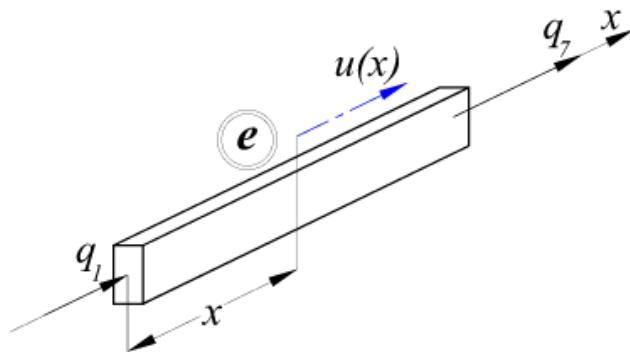
**Hình 4.3.** Phần tử đầm trong không gian

$$\begin{array}{l} \{q\}_e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_{12}\}^T \\ (12 \times 1) \end{array}$$

12 bậc tự do chuyển vị này gây ra 4 nhóm biến dạng độc lập  $\rightarrow [K]_e$  sẽ được thiết lập từ 4 ma trận con:

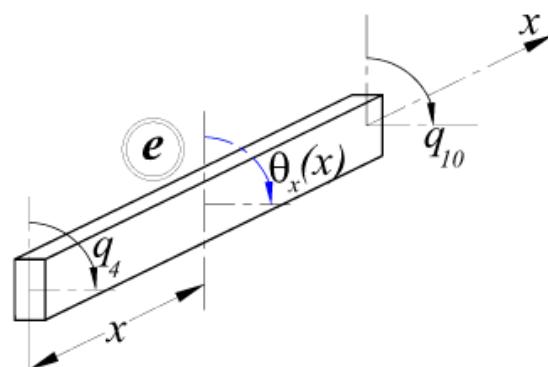
a) Biến dạng dọc trục (do  $q_1$  và  $q_7$ )

$$\left[ K_x \right]_e = \frac{EA}{L} \begin{matrix} & q_1 & q_7 \\ \begin{matrix} (2 \times 2) & \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline dx & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{matrix} q_1 \\ q_7 \end{matrix} \end{matrix}$$



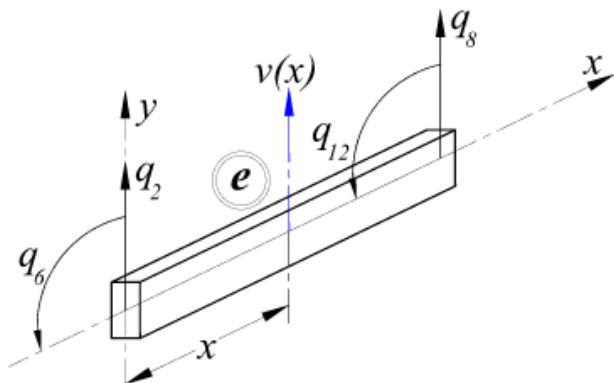
b) Biến dạng xoắn (do  $q_4$  và  $q_{10}$ )

$$\left[ K_{\text{xoắn}} \right]_e = \frac{GI_p}{L} \begin{matrix} & q_4 & q_{10} \\ \begin{matrix} (2 \times 2) & \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline dx & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{matrix} q_4 \\ q_{10} \end{matrix} \end{matrix}$$



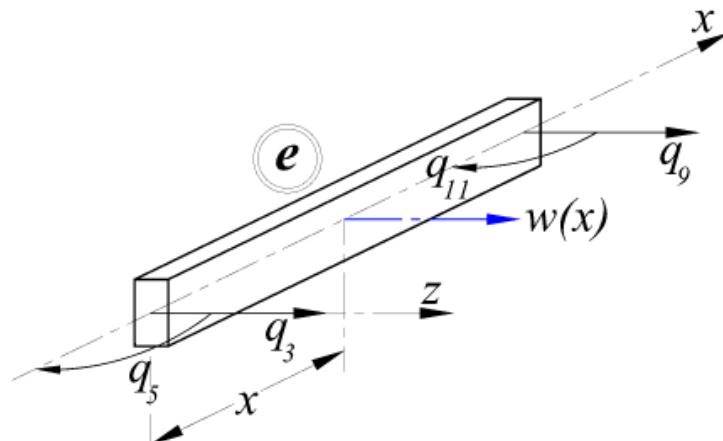
c) Biến dạng uốn trong mặt phẳng xy (do  $q_2$ ,  $q_6$ ,  $q_8$  và  $q_{12}$ )

$$\left[ K_{xy} \right]_e = \frac{EI_z}{L^3} \begin{matrix} & q_2 & q_6 & q_8 & q_{12} \\ \begin{matrix} (4 \times 4) & \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 12 & 6L & -12 & 6L \\ \hline & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \hline & & 12 & -6L \\ \hline dx & & & 4L^2 \\ \hline \end{array} & \begin{matrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{matrix} \end{matrix}$$



d) Biến dạng uốn trong mặt phẳng xz (do  $q_3, q_5, q_9$  và  $q_{11}$ )

	$q_3$	$q_5$	$q_9$	$q_{11}$	
$q_3$	12	$6L$	-12	$6L$	$q_3$
$q_5$		$4L^2$	-6L	$2L^2$	$q_5$
$q_9$			12	-6L	$q_9$
$q_{11}$				$4L^2$	$q_{11}$
$\frac{EI_y}{L^3}$					
$\frac{dx}{\Delta x}$					



Ma trận độ cứng phần tử khung không gian trong hệ tọa độ phần tử xyz:  $[K]_e$   
 $(12 \times 12)$

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$q_7$	$q_8$	$q_9$	$q_{10}$	$q_{11}$	$q_{12}$
$\frac{EA}{L}$						$-\frac{EA}{L}$					
	$\frac{12EI_z}{L^3}$				$\frac{12EI_z}{L^2}$		$-\frac{12EI_z}{L^3}$				$\frac{6EI_z}{L^2}$
		$\frac{12EI_y}{L^3}$		$-\frac{6EI_y}{L^2}$				$-\frac{12EI_y}{L^3}$		$-\frac{6EI_y}{L^2}$	
			$\frac{GI_p}{L}$						$\frac{GI_p}{L}$		
				$\frac{4EI_y}{L}$				$-\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{2EI_y}{L}$	
					$\frac{4EI_z}{L}$		$-\frac{6EI_z}{L^2}$				$\frac{2EI_z}{L}$
						$\frac{EA}{L}$					
							$\frac{12EI_z}{L^3}$				$-\frac{6EI_z}{L^2}$
								$\frac{12EI_y}{L^3}$		$\frac{6EI_y}{L^3}$	
									$\frac{6I_p}{L}$		
										$\frac{4EI_y}{L}$	
											$\frac{4EI_z}{L}$

Ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể:

$$[K']_e = [T]_e [K]_e [T]_e \\ (12 \times 12) (12 \times 12) (12 \times 12) (12 \times 12)$$

trong đó:  $[T]_e =$

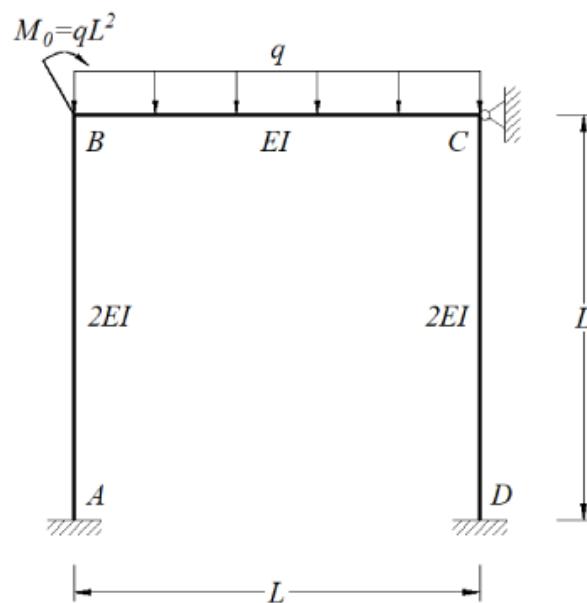
$[\eta]$			
	$[\eta]$		
		$[\eta]$	
			$[\eta]$

với:  $[\eta] =$

$l_x$	$m_x$	$n_x$
$l_y$	$m_y$	$n_y$
$l_z$	$m_y$	$n_z$

## BÀI TẬP

**Bài 4.1** Cho hệ khung phẳng có liên kết chịu lực như Hình 4.4. Độ cứng của thanh AB và CD gấp 2 lần độ cứng thanh BC. Bỏ qua biến dạng dọc trực và biến dạng cắt của các thanh.



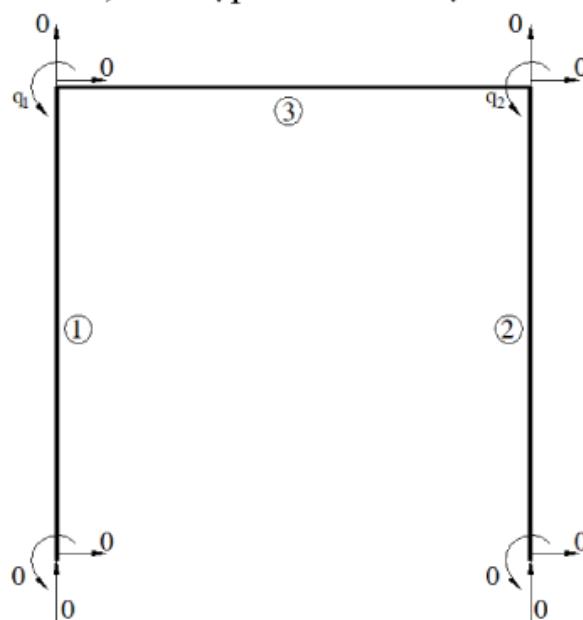
**Hình 4.4.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút B và C.
- Vẽ biểu đồ mô men cho hệ.

**Giải:**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.5:



**Hình 4.5.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ tải tổng thể:

Ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$12s^2$	$-12cs$	$-6Ls$	$-12s^2$	$12cs$	$-6Ls$
	$12c^2$	$6Lc$	$12cs$	$-12c^2$	$6Lc$
		$4L^2$	$6Ls$	$-6Lc$	$2L^2$
			$12s^2$	$-12sc$	$6Ls$
				$12c^2$	$-6Lc$
đx					$4L^2$

• Phần tử 1: c = 0; s = 1

$$[K']_1 = \frac{2EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ & & & & & 4L^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

• Phần tử 2: c = 0; s = 1

$$[K']_2 = \frac{2EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ & & & & & 4L^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ & 4L^2 & .. & .. & 2L^2 & \\ & .. & .. & .. & .. & \\ & & .. & .. & .. & \\ 2L^2 & & & 4L^2 & \\ \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

- Vectơ tải phần tử:

$$\{P'\}_e = \begin{bmatrix} -sP_1 \\ cP_1 \\ P_2 \\ -sP_3 \\ cP_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$ :

$$\{P\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{P'\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 0; s = 1$ :

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{P'\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^0$$

- Phần tử 3:  $s = 0; c = 1$

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \{P'\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ 0 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix}^0$$

- Vecto tải tại nút B:

$$\{P'\}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -qL^2 \end{Bmatrix}^1$$

→ Vecto tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\overline{P^*}\} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{12} - 1 \\ \frac{1}{12} \end{Bmatrix}^1 = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{13}{12} \\ \frac{1}{12} \end{Bmatrix}^2$$

**a) Xác định chuyển vị xoay tại nút B và C**

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{K}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}^* \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{13}{12} \\ \frac{1}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{79}{840} \\ \frac{19}{840} \end{bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

• Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{79}{840} \end{Bmatrix}$$

• Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{19}{840} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{79}{840} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{19}{840} \end{Bmatrix}$$

→ Chuyển vị xoay nút tại B:

$$u_1 = -\frac{79}{840} \frac{qL^3}{EI}$$

→ Chuyển vị xoay nút tại C:

$$u_2 = \frac{19}{840} \frac{qL^3}{EI}$$

### b) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ

Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1: c = 0; s = 1

$$\{M\}_1 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{79}{840} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{79}{210} \times qL^2 \\ -\frac{79}{105} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

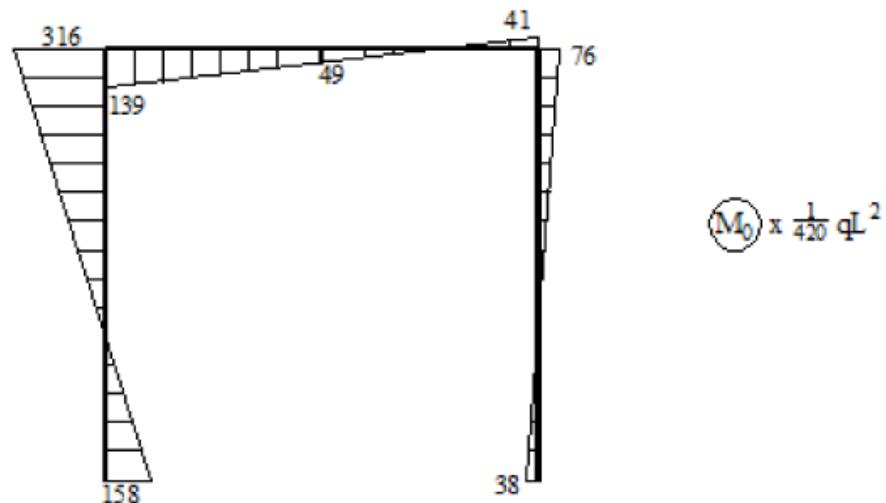
- Phản tử 2: c = 0; s = 1

$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{19}{840} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{19}{210} \times qL^2 \\ \frac{19}{105} \times qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

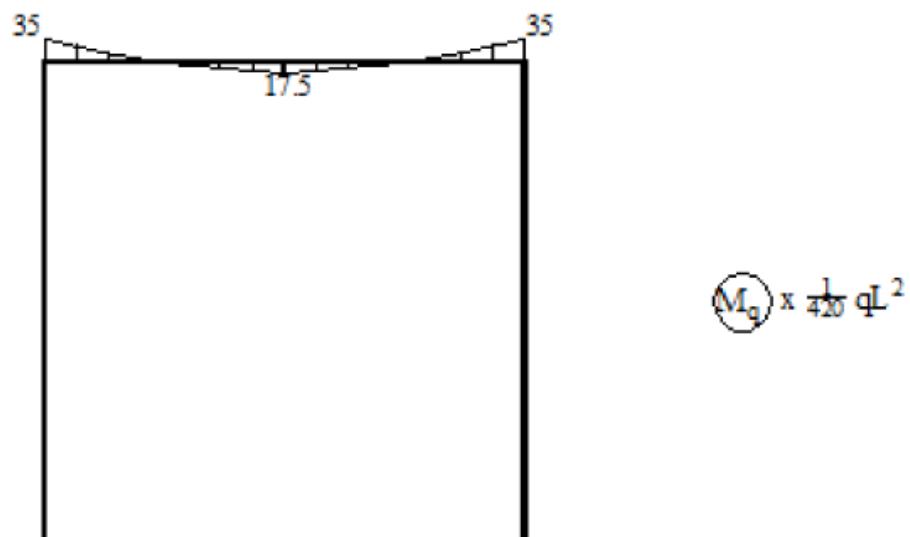
- Phản tử 3: s = 0; c = 1

$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{79}{840} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{19}{840} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{139}{420} \times qL^2 \\ -\frac{41}{420} \times qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

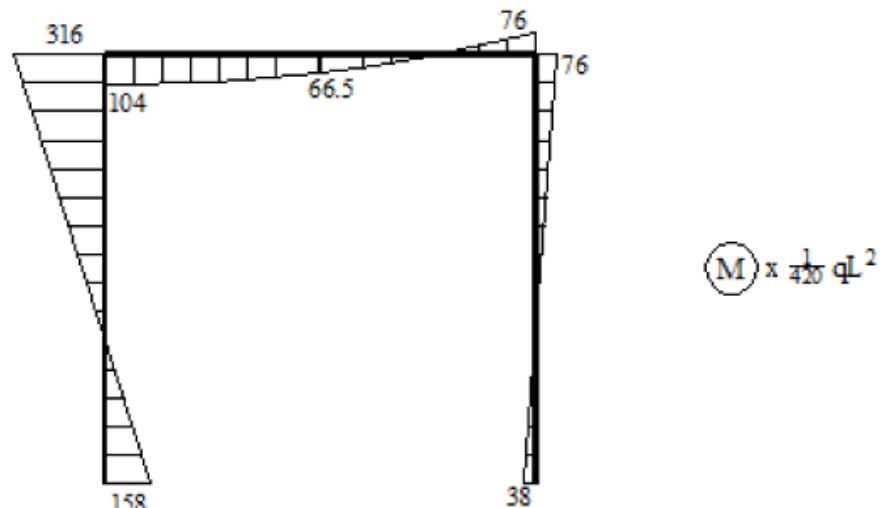
- Biểu đồ mô men M
- Biểu đồ mô men  $M_0$ :



- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :



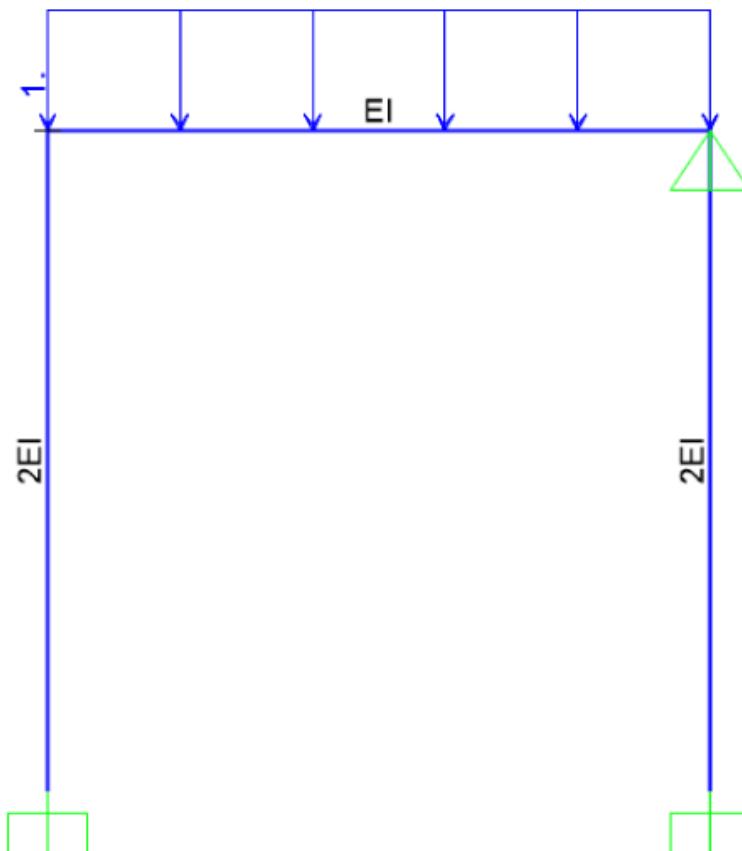
- Biểu đồ mô men M :  $M = M_0 + M_q$



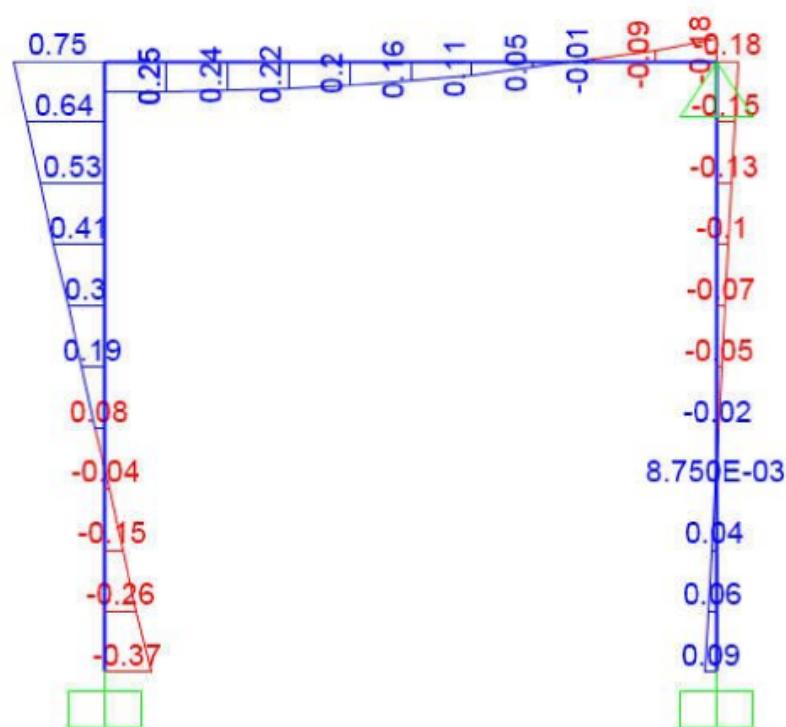
**Hình 4.6.** Biểu đồ mô men M của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.

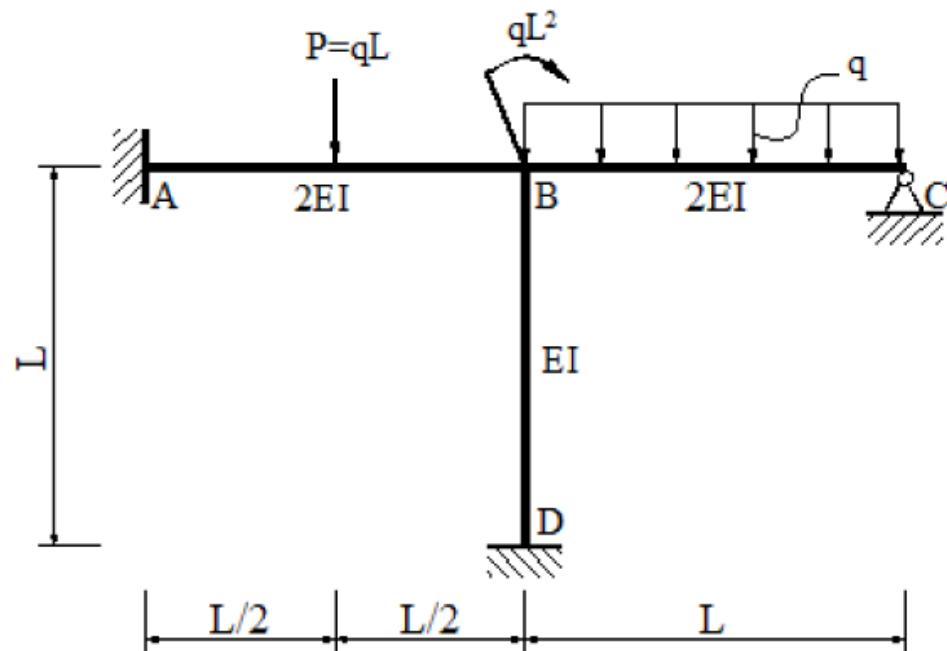


**Hình 4.7.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.8.** Biểu đồ mô men  $M$  của đàm nhận được từ phần mềm SAP2000

**Bài 4.2** Cho hệ khung phẳng có liên kết chịu lực như Hình 4.9. Độ cứng của thanh AB và BC gấp 2 lần độ cứng thanh BD. Bỏ qua biến dạng dọc trục và biến dạng cắt của các thanh.



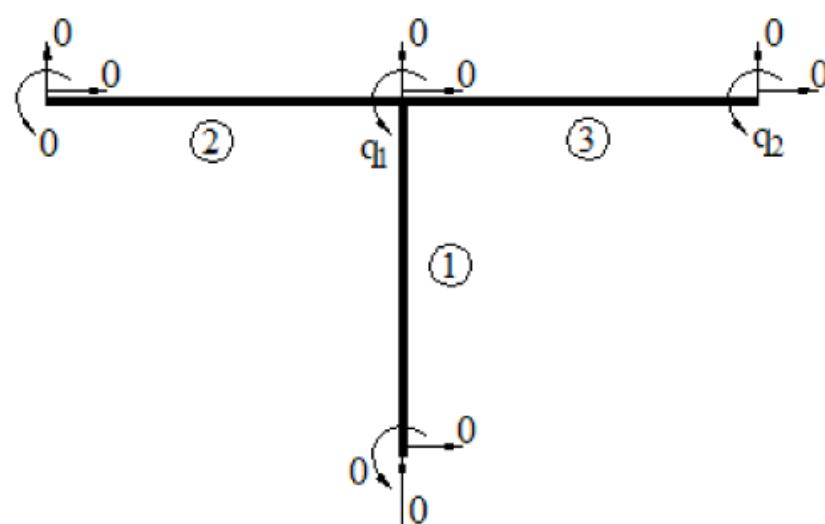
**Hình 4.9.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút B và C.
- Vẽ biểu đồ mô men cho hệ.

**Giải**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.10



**Hình 4.10.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$\underset{(3 \times 6)}{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$12s^2$	$-12cs$	$-6Ls$	$-12s^2$	$12cs$	$-6Ls$
	$12c^2$	$6Lc$	$12cs$	$-12c^2$	$6Lc$
		$4L^2$	$6Ls$	$-6Lc$	$2L^2$
			$12s^2$	$-12sc$	$6Ls$
				$12c^2$	$-6Lc$
$\text{dx}$					$4L^2$

• Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\underset{L^3}{[K']}_2 = \frac{EI}{\begin{array}{l} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4L^2 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

• Phần tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\underset{L^3}{[K']}_2 = \frac{2EI}{\begin{array}{l} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4L^2 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

- Phần tử 3:  $c = 1; s = 0$

$$[K']_3 = \frac{2EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 4L^2 & \cdots & \cdots & 2L^2 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots & \cdots \\ & & 2L^2 & & & 4L^2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \left[ \begin{smallmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{smallmatrix} \right] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

$$\{P'\}_e = \begin{Bmatrix} -sP_1 \\ cP_1 \\ P_2 \\ -sP_3 \\ cP_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$ :

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{P'\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Phản tử 2:  $c = 1; s = 0$ :

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ -PL/8 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{P'\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qL/2 \\ -qL^2/8 \\ 0 \\ -qL/2 \\ qL^2/8 \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

- Phản tử 3:  $s = 0; c = 1$

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} = \{P'\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ 0 \\ -qL/2 \\ qL^2/12 \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{cases}$$

- Vecto tải tại nút B:

$$\{P'\}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -qL^2 \end{Bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

→ Vecto tải tổng thể

$$\Rightarrow \left\{ \overline{P^*} \right\} = qL^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - 1 \\ \frac{1}{12} \end{Bmatrix} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{23}{24} \\ \frac{1}{12} \end{Bmatrix} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

**a) Xác định chuyển vị xoay tại nút B và C**

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow \left[ \bar{K}^* \right] \{ \bar{u}^* \} = \{ \bar{P}^* \}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = qL^2 \begin{Bmatrix} -\frac{23}{24} \\ \frac{1}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{18} \\ \frac{11}{288} \end{Bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

• Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{18} \end{Bmatrix}$$

• Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{18} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{18} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{288} \end{Bmatrix}$$

→ Chuyển vị xoay nút tại B:

$$u_1 = -\frac{1}{18} \frac{qL^3}{EI}$$

→ Chuyển vị xoay nút tại C:

$$u_2 = \frac{11}{288} \frac{qL^3}{EI}$$

### b) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ

Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\{M\}_1 = \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{18} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{2}{18} \times qL^2 \\ -\frac{4}{18} \times qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{72} \times qL^2 \\ -\frac{16}{72} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phản tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\{M\}_2 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{18} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{4}{18} \times qL^2 \\ -\frac{8}{18} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{16}{72} \times qL^2 \\ -\frac{32}{72} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

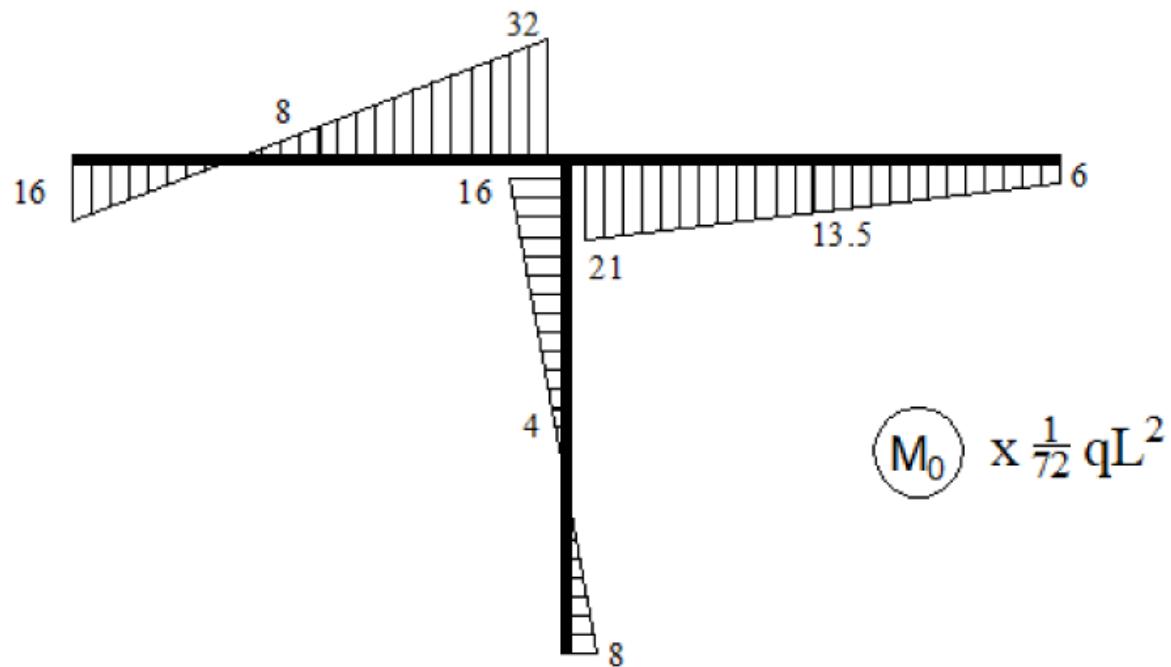
- Phản tử 3:  $s = 0; c = 1$

$$\{M\}_3 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{18} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{288} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

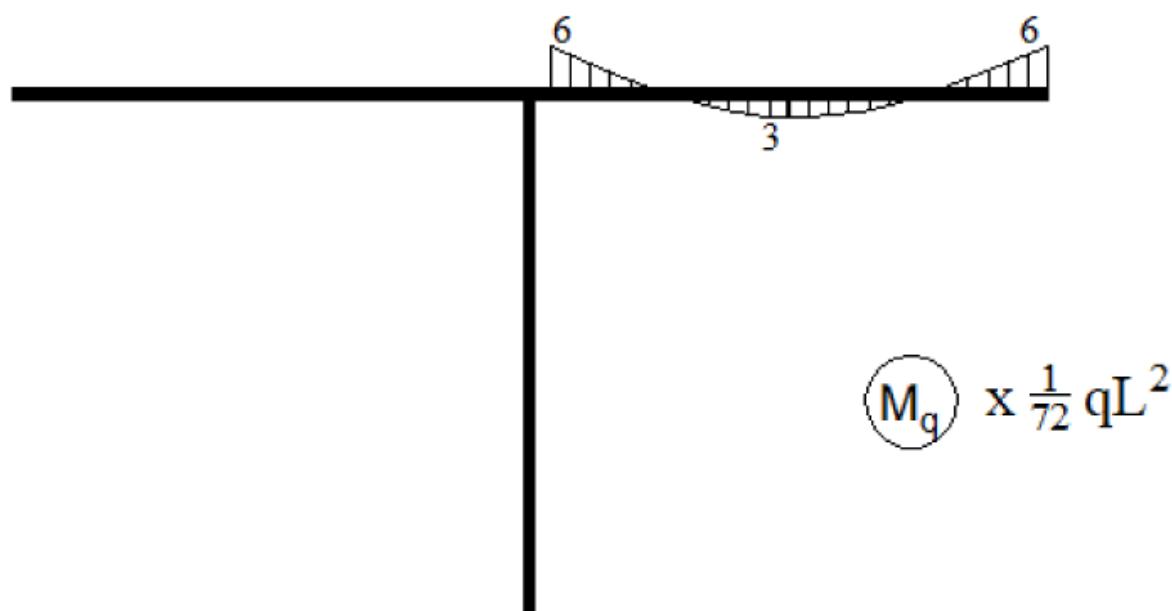
$$= \begin{Bmatrix} \frac{7}{24} \times qL^2 \\ \frac{1}{12} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{21}{72} \times qL^2 \\ \frac{6}{72} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

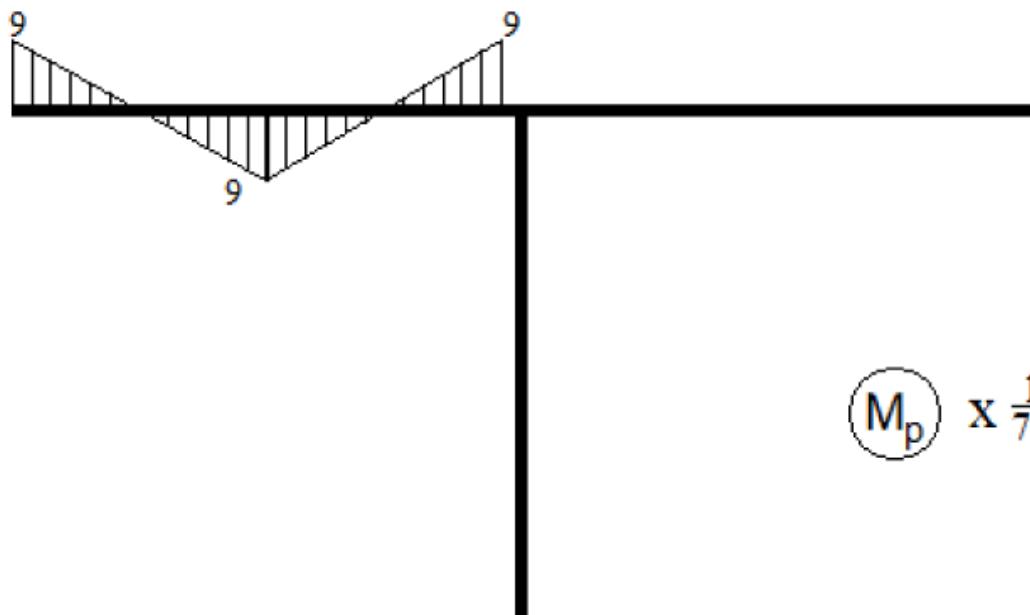
- Biểu đồ mô men  $M$
- Biểu đồ mô men  $M_0$ :



- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$ :

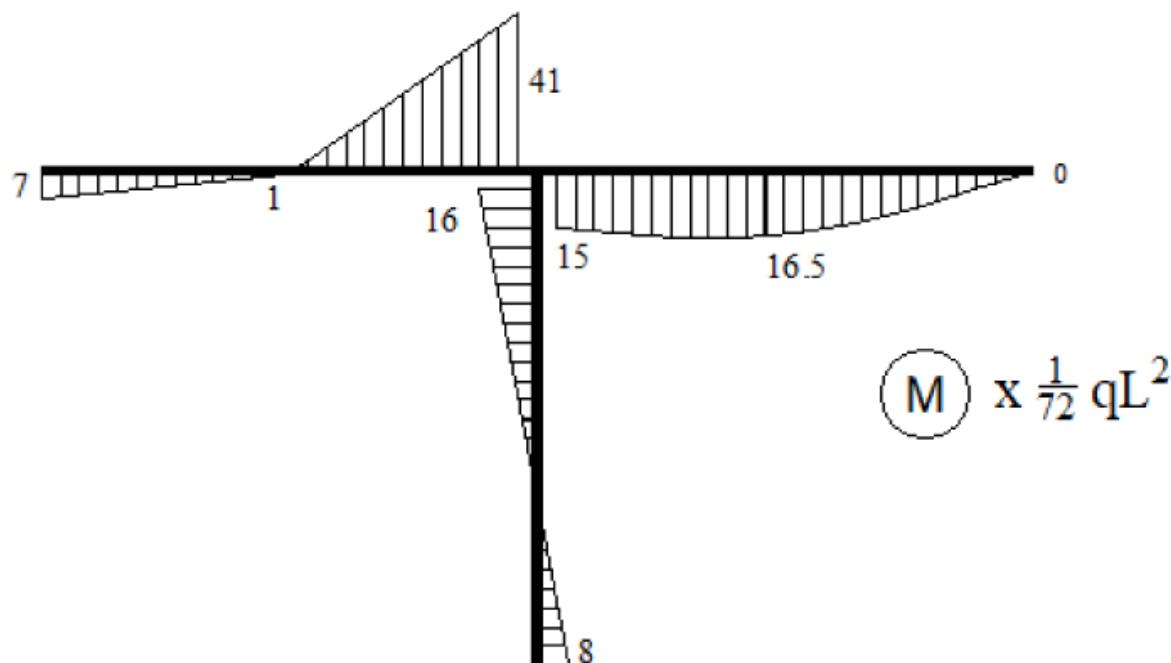


- Biểu đồ mô men  $M_P$  của lực tập trung  $P$ :



$$(M_p) \times \frac{1}{72} qL^2$$

- Biểu đồ mô men  $M$ :  $M = M_0 + M_q + M_p$

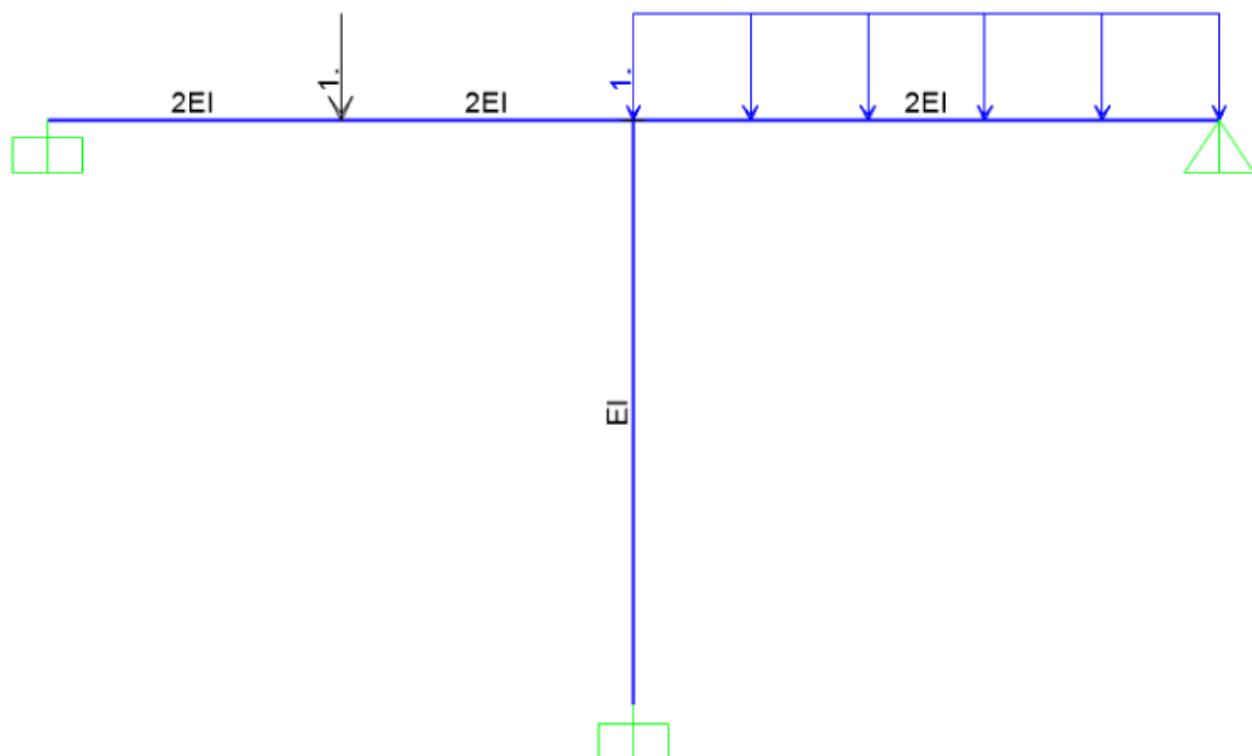


$$(M) \times \frac{1}{72} qL^2$$

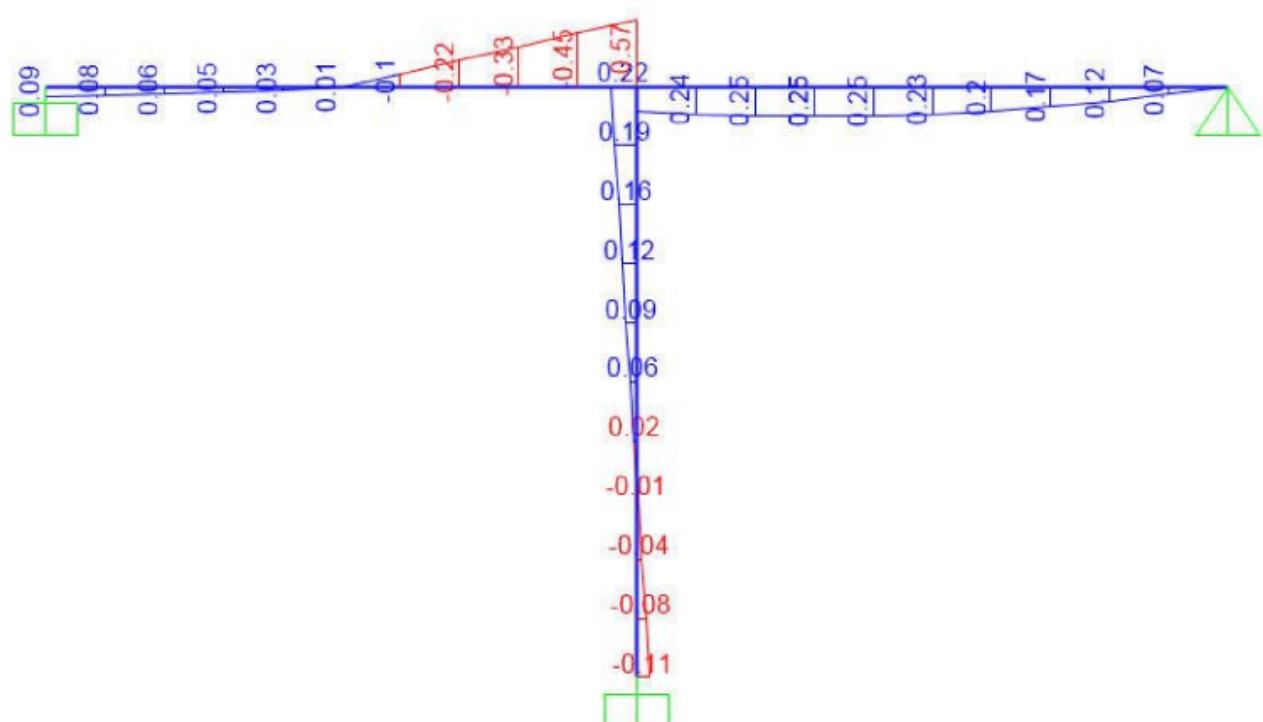
**Hình 4.11.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.

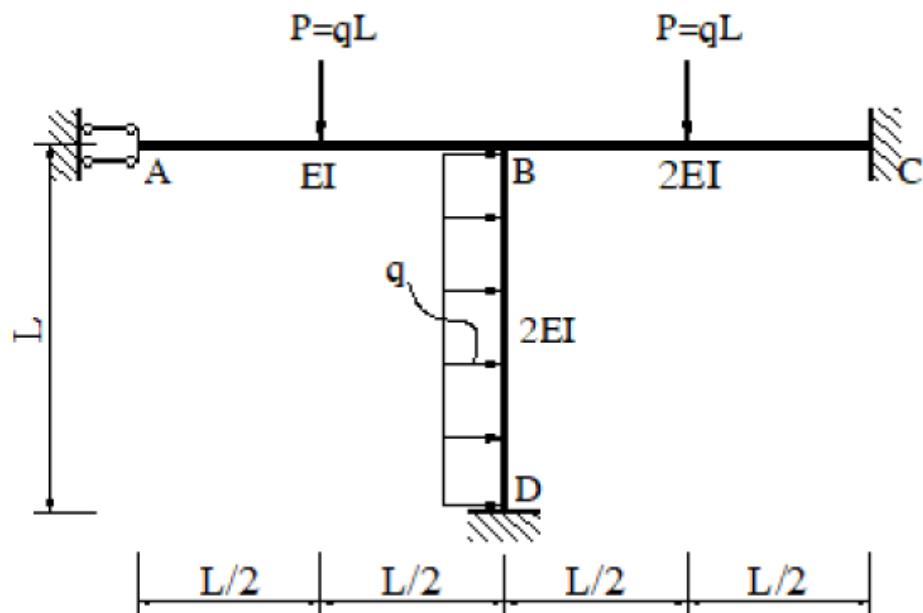


**Hình 4.12.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.13.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

**Bài 4.3** Cho hệ khung phẳng có liên kết chịu lực như Hình 4.14. Độ cứng của thanh AB và BD gấp 2 lần độ cứng thanh BC. Bỏ qua biến dạng dọc trục và biến dạng cắt của các thanh.



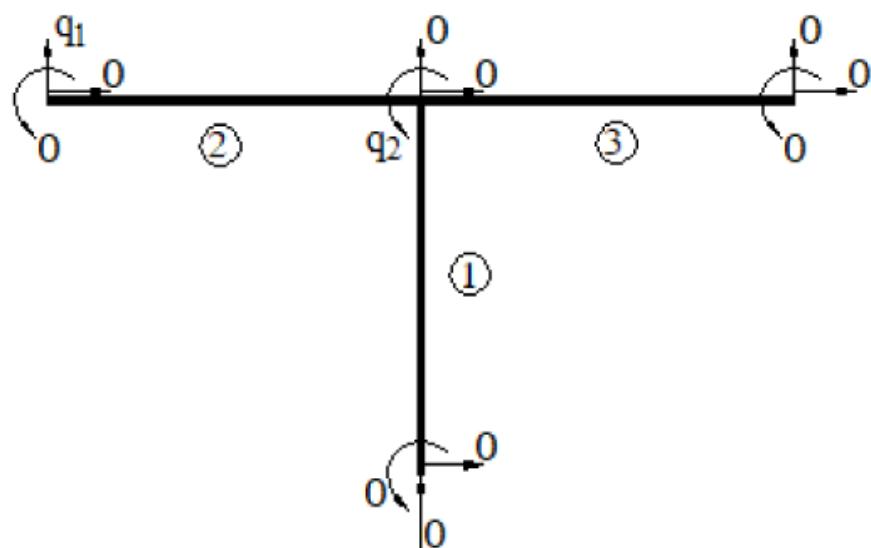
**Hình 4.14.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút A và B.
- Vẽ biểu đồ mô men cho hệ.

### Giải

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.15.



**Hình 4.15.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$(3 \times 6) \begin{bmatrix} b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Thiết lập ma trận độ cứng phần tử:

$12s^2$	$-12cs$	$-6Ls$	$-12s^2$	$12cs$	$-6Ls$
	$12c^2$	$6Lc$	$12cs$	$-12c^2$	$6Lc$
		$4L^2$	$6Ls$	$-6Lc$	$2L^2$
			$12s^2$	$-12sc$	$6Ls$
				$12c^2$	$-6Lc$
$\ddot{x}$					$4L^2$

• Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\left[ K' \right]_1 = \frac{2EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 4L^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

• Phần tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\left[ K' \right]_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 12 & \dots & \dots & \dots & \dots & 6L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 6L & & & & & 4L^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3: c = 1; s = 0

$$[K']_3 = \frac{2EI}{L^3} \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ & & 4L^2 & .. & .. & .. \\ & & & .. & .. & .. \\ & & & & .. & .. \\ & & & & & .. \end{array} \right\} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

→ Ma trận độ cứng tổng thể:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{K}^* \\ (2 \times 2) \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Vectơ tải phần tử:

$$\{P'\}_e = \begin{bmatrix} -sP_1 \\ cP_1 \\ P_2 \\ -sP_3 \\ cP_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

- Phần tử 1: c = 0; s = 1;

$$\{P\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \{P'\}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}$$

- Phân tử 2:  $c = 1; s = 0$ :

$$\{P\}_2 = \begin{bmatrix} -P/2 \\ -PL/8 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{bmatrix} \Rightarrow \{P'\}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -qL/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ qL^2/8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

- Phân tử 3:  $s = 0; c = 1$

$$\{P\}_3 = \begin{bmatrix} -P/2 \\ -PL/8 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{bmatrix} = \{P'\}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -qL^2/8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

→ Vector tải tổng thể

$$\Rightarrow \{\bar{P}^*\} = \begin{bmatrix} -qL/2 \\ qL^2/12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = qL^2 \begin{bmatrix} -\frac{23}{24} \\ \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

### a) Xác định chuyển vị xoay tại nút A và B

Giải hệ phương trình:

$$\Rightarrow [\bar{K}^*] \{\bar{u}^*\} = \{\bar{P}^*\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

- Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

→ Chuyển vị xoay nút tại B:

$$u_1 = \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI}$$

→ Chuyển vị xoay nút tại A:

$$u_2 = -\frac{7}{136} \frac{qL^4}{EI}$$

### b) Vẽ biểu đồ mô men cho hệ

Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1: c = 0; s = 1

$$\begin{aligned} \{M\}_1 &= \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{4}{51} \times qL^2 \\ \frac{8}{51} \times qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{16}{204} \times qL^2 \\ \frac{32}{204} \times qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Phần tử 2: c = 1; s = 0

$$\begin{aligned} \{M\}_2 &= \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{136} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{55}{204} \times qL^2 \\ -\frac{47}{204} \times qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

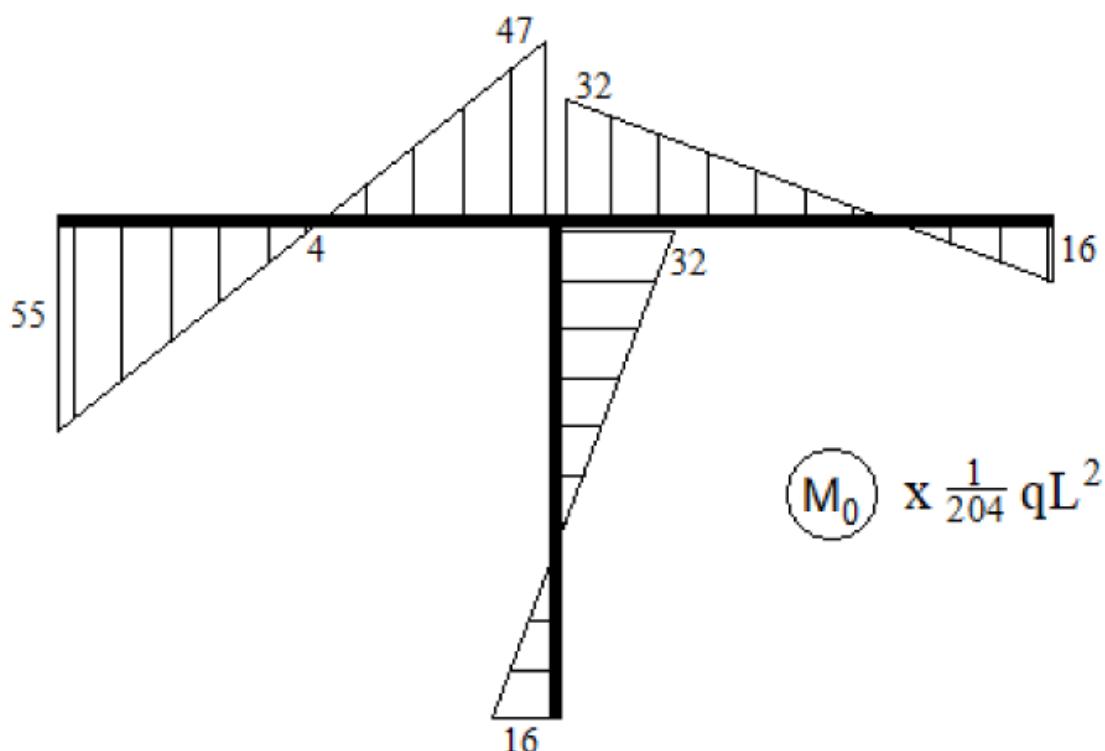
- Phần tử 3:  $s = 0; c = 1$

$$\{M\}_3 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{51} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

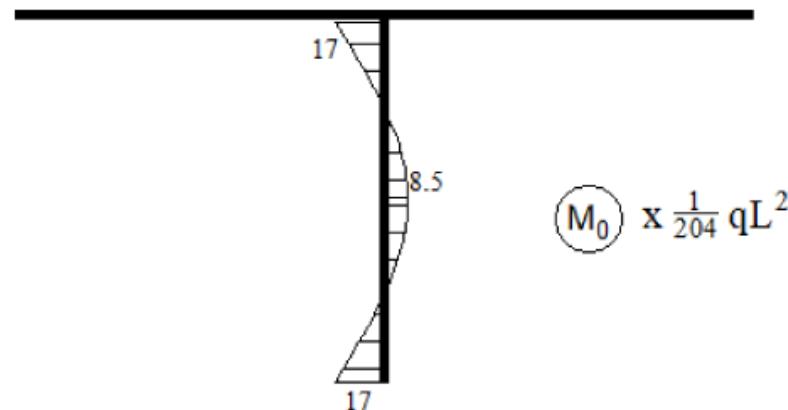
$$= \begin{Bmatrix} -\frac{8}{51} \times qL^2 \\ \frac{4}{51} \times qL^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{32}{204} \times qL^2 \\ \frac{16}{204} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men M

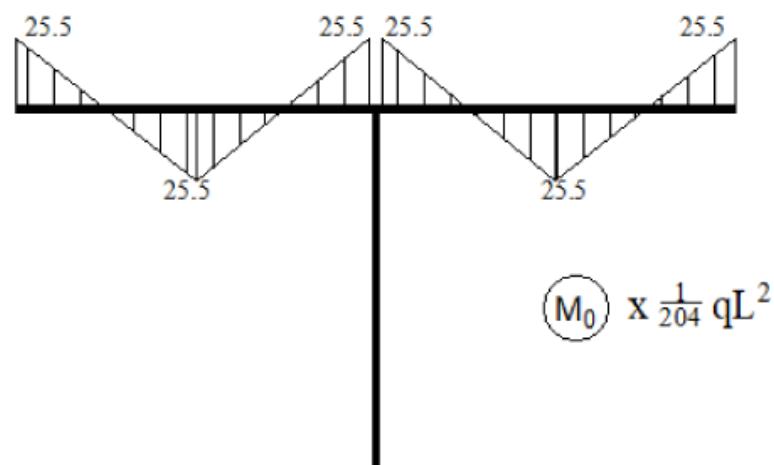
- Biểu đồ mô men  $M_0$ :



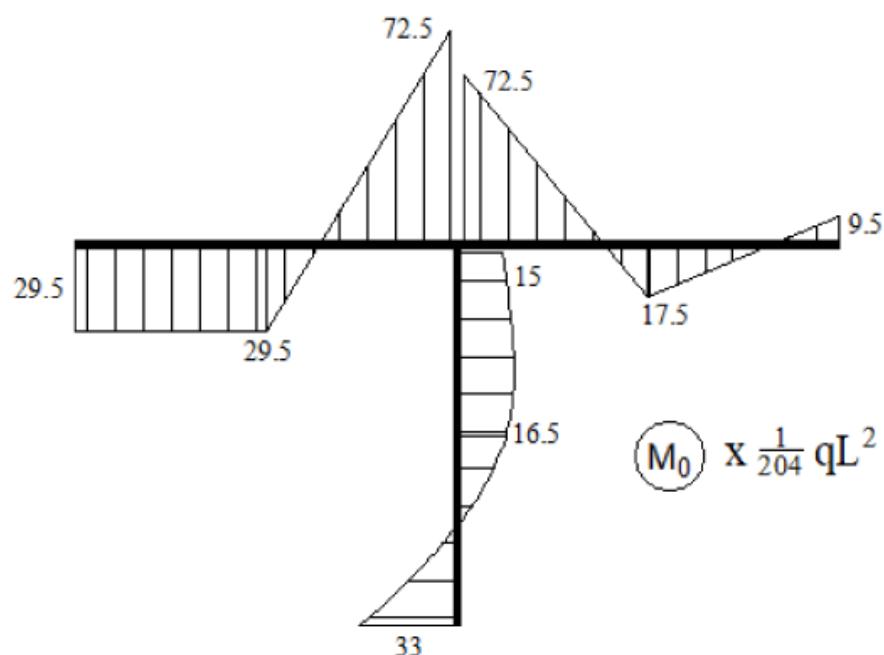
- Biểu đồ mô men  $M_q$  của lực phân bố đều  $q$



- Biểu đồ mô men  $M_p$  của lực tập trung  $P$



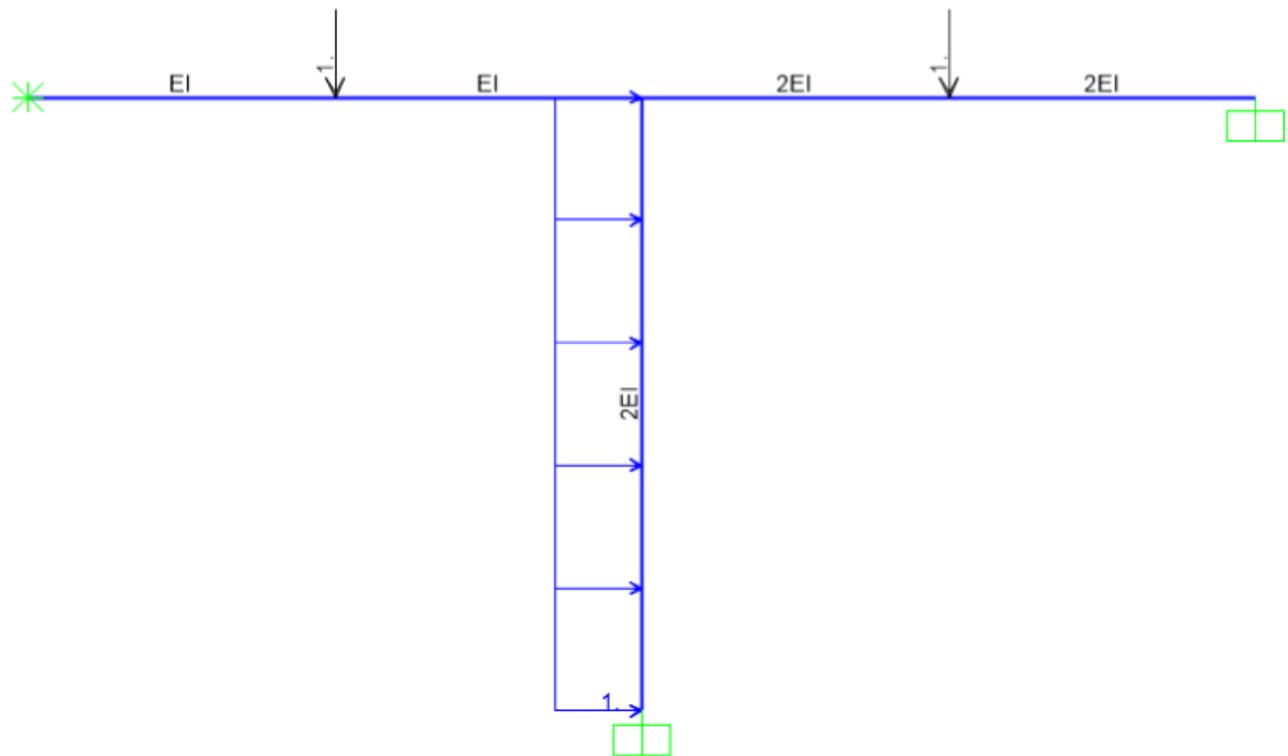
- Biểu đồ mô men  $M$ :  $M = M_0 + M_q + M_p$



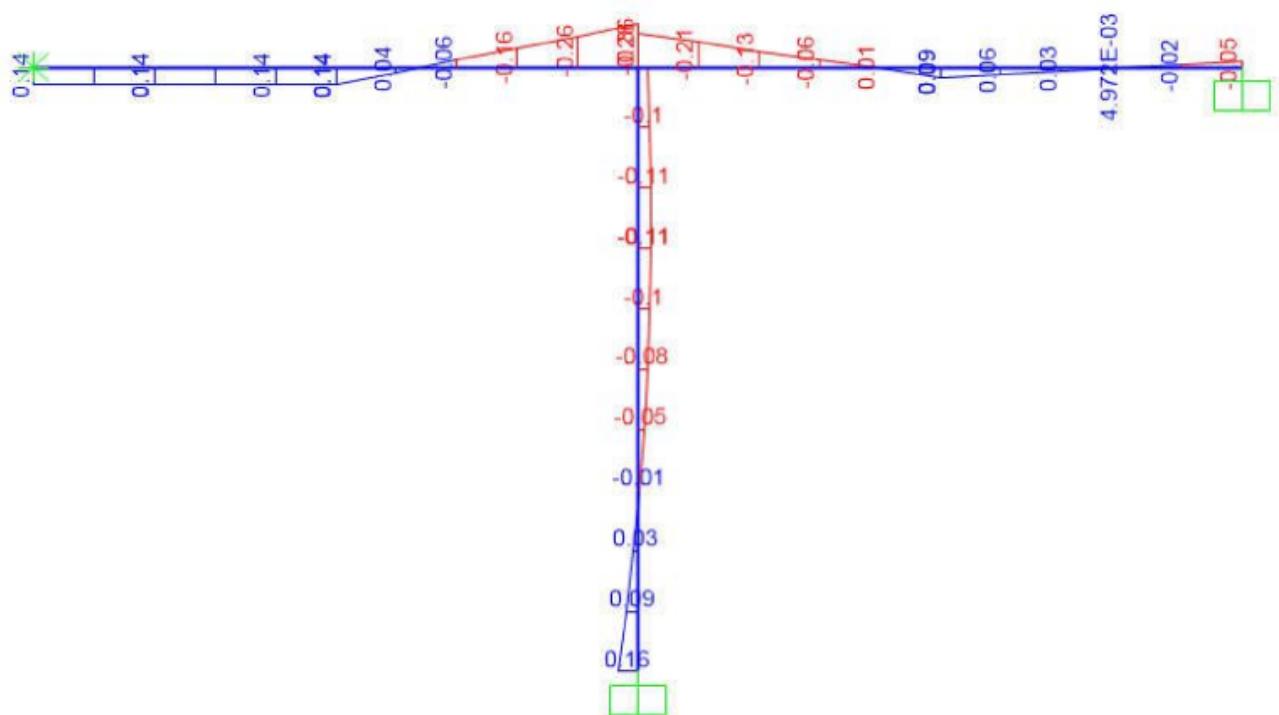
**Hình 4.16.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.

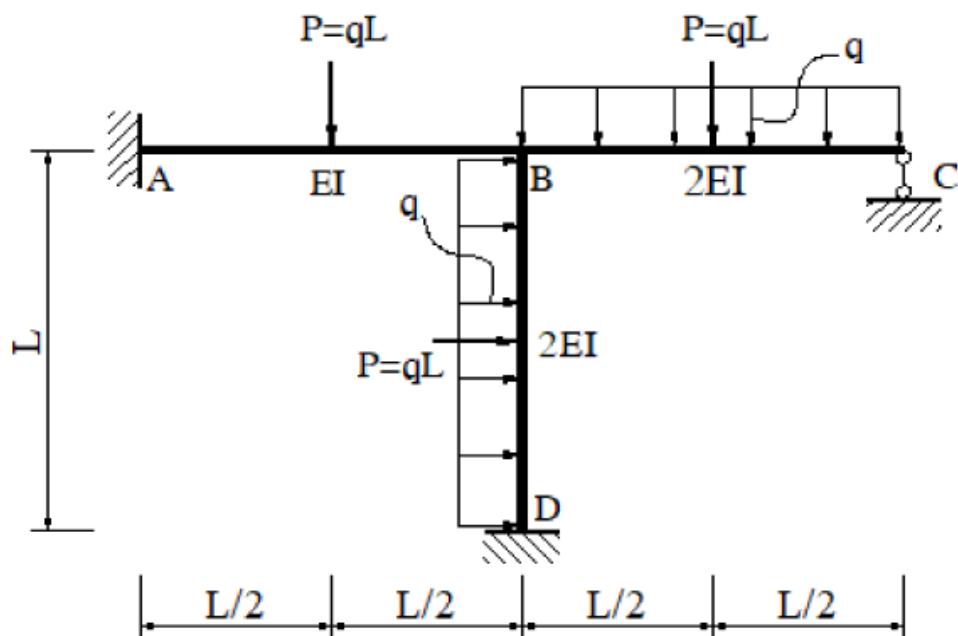


**Hình 4.17.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.18.** Biểu đồ mô men  $M$  của dầm nhận được từ phần mềm SAP2000

**Bài 4.4** Cho hệ khung có độ cứng và chịu lực như Hình 4.19. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị.



**Hình 4.19.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

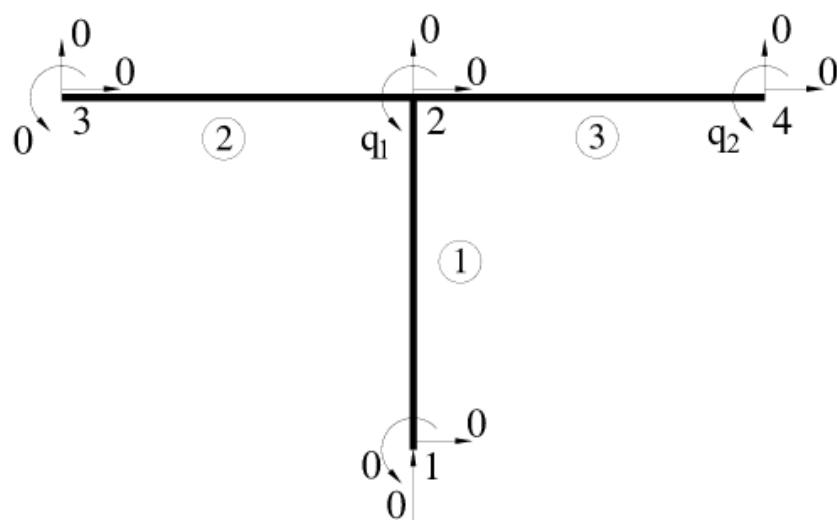
Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút.
- Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung.
- Xác định chuyển vị đứng và chuyển vị xoay tại điểm đặt lực tập trung.

### Giải

#### a) Xác định chuyển vị tại các nút

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.20.



**Hình 4.20.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận chỉ số phần tử b:

$$(3 \times 6) \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j		$c^2$	$s^2$	$cs$	EF/I
(1)	1	2	90	0	1	0	2EI/L
(2)	3	2	0	1	0	0	EI/L
(3)	2	4	0	1	0	0	2EI/L

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ \left[ \overline{K^*} \right] = [K]_1 + [K]_2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

- Xây dựng véc tơ tải tổng thể:

$$\begin{matrix} \left\{ \overline{P^*} \right\} = \left\{ \overline{P'} \right\}_1 + \left\{ \overline{P'} \right\}_2 + \left\{ \overline{P'} \right\}_n \\ (1 \times 2) \\ = \begin{cases} qL^2 / 8 + qL^2 / 12 + qL^2 / 8 - qL^2 / 12 - qL^2 / 8 \\ qL^2 / 8 + qL^2 / 12 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ = \begin{cases} qL^2 / 8 \\ 5qL^2 / 24 \end{cases} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{matrix} \left[ \overline{K^*} \right] \{ \overline{q} \} = \left\{ \overline{P^*} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL^2 / 8 \\ 5qL^2 / 24 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là góc xoay tại các nút 2 và 4:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \\ q_2 = \frac{11}{432} \frac{qL^3}{EI} \end{cases}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

- Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{432} \end{Bmatrix}$$

**b) Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ**

Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\{M\}_1 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{2}{432} \times qL^2 \\ \frac{4}{432} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\{M\}_2 = \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{432} \times qL^2 \\ \frac{2}{432} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

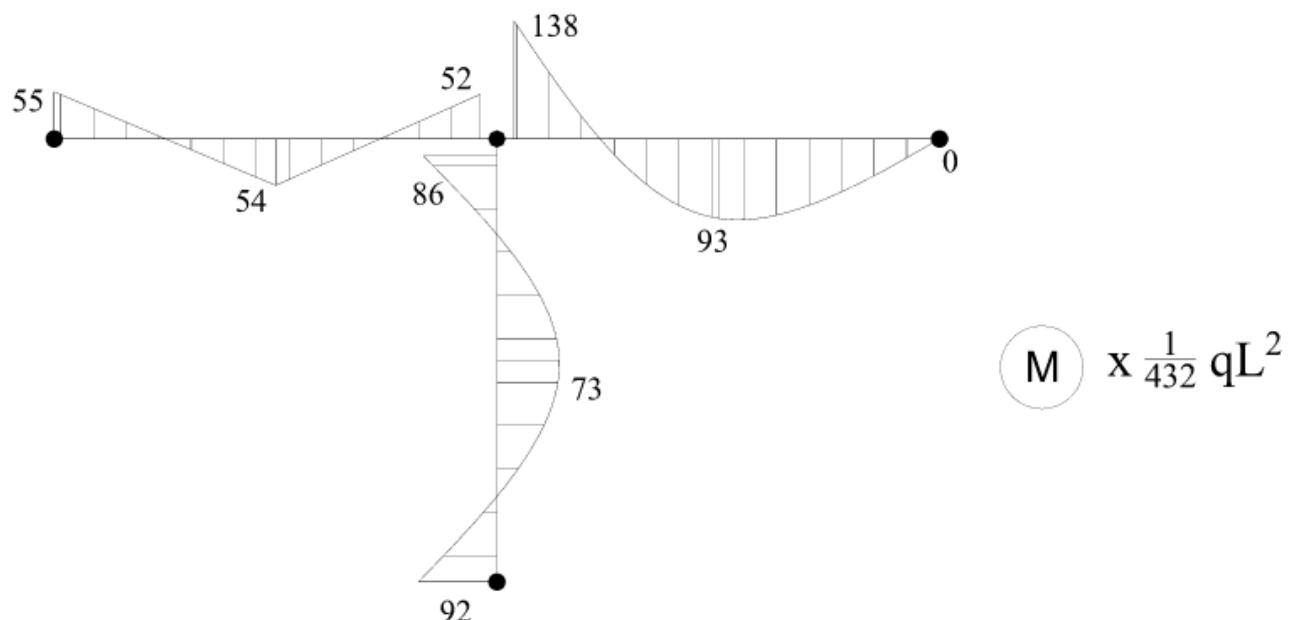
- Phản tử 3:  $c = 0; s = 1$

$$\{M\}_3 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{432} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{48}{432} \times qL^2 \\ \frac{90}{432} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men M

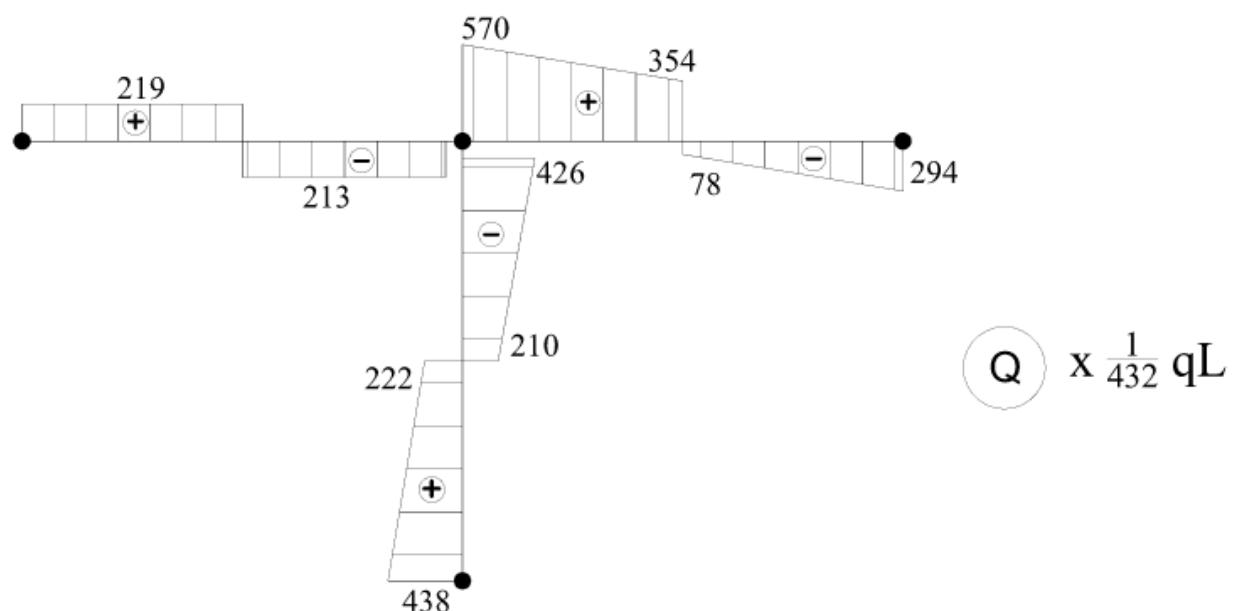
Biểu đồ mô men M của dầm:  $M = M_0 + M_q + M_p$



**Hình 4.21.** Biểu đồ mô men M của khung

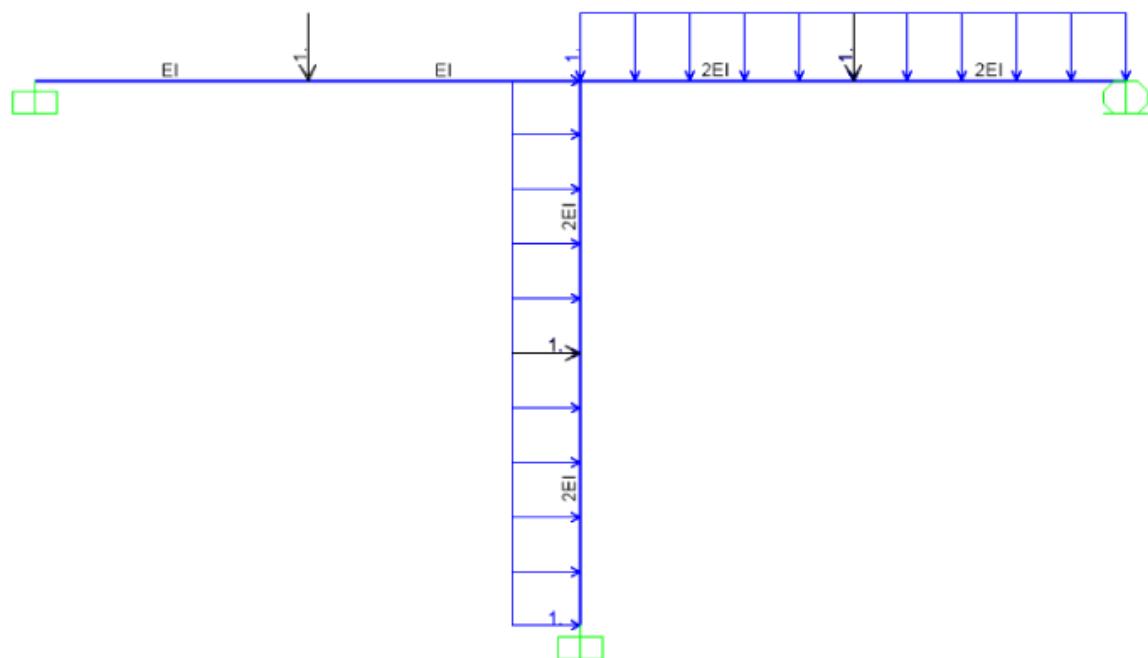
- Biểu đồ lực dọc Q

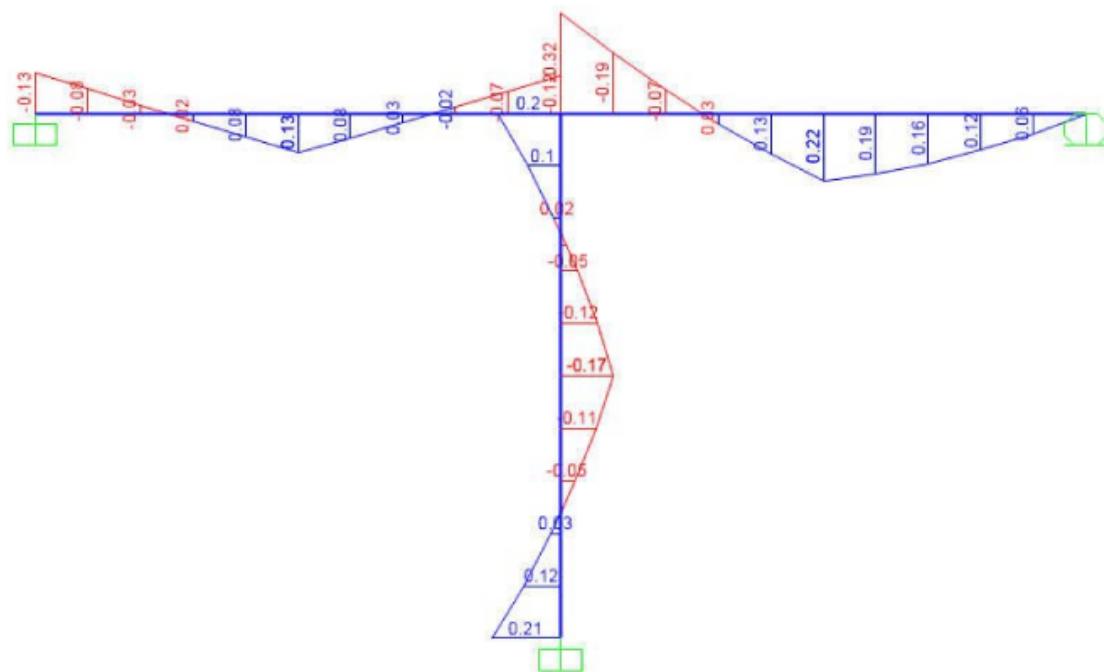
- Biểu đồ lực dọc của dầm:  $Q = Q_0 + Q_q + Q_p$

**Hình 4.22.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung

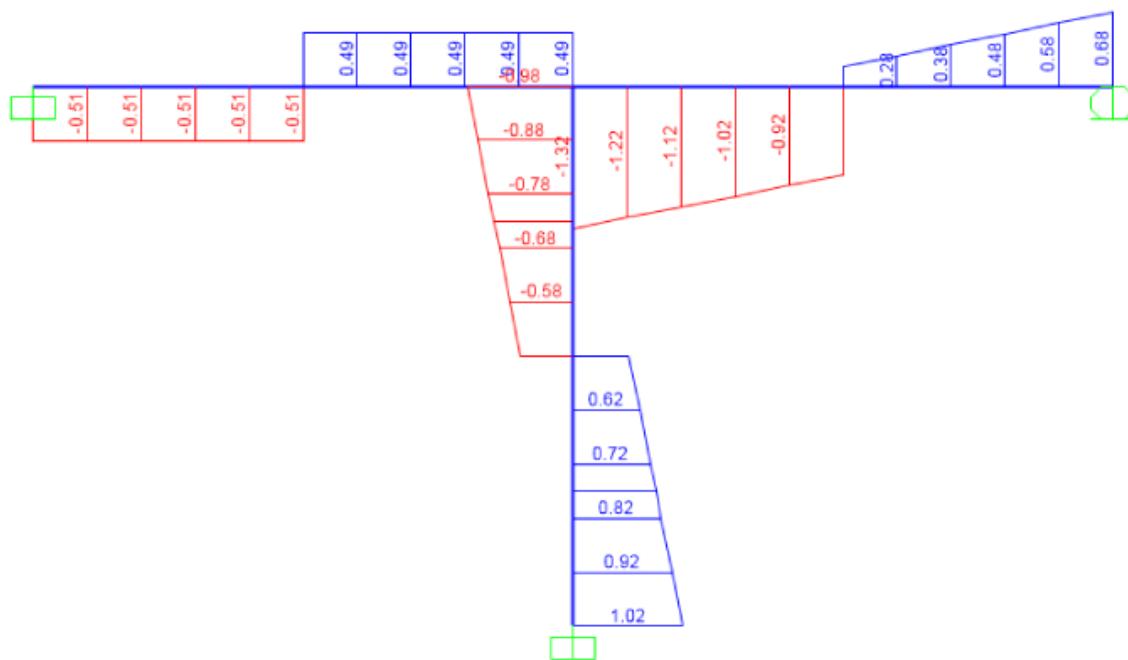
- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.

**Hình 4.23.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.24.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung nhện được từ phần mềm SAP2000



**Hình 4.25.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung nhện được từ phần mềm SAP2000

c) Chuyển vị đứng và góc xoay tại điểm đặt lực tập trung

- Phản tử (1)

Chuyển vị đứng:

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra:

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{6912} \frac{qL^4}{EI}}$$

• Góc xoay:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \quad N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N']\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{1}{3456} \frac{qL^3}{EI}}$$

- **Phản tử (2)**

• **Chuyển vị đúng:**

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra:

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{1}{6912} \frac{qL^4}{EI}}$$

• Góc xoay:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \left[ \frac{-3}{2L} \quad \frac{-1}{4} \quad \frac{3}{2L} \quad \frac{-1}{4} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{3456} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

- Phần tử (3)

• Chuyển vị đứng:

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= [N]\{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{11}{432} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} = \boxed{-\frac{7}{2304} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

• Góc xoay:

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

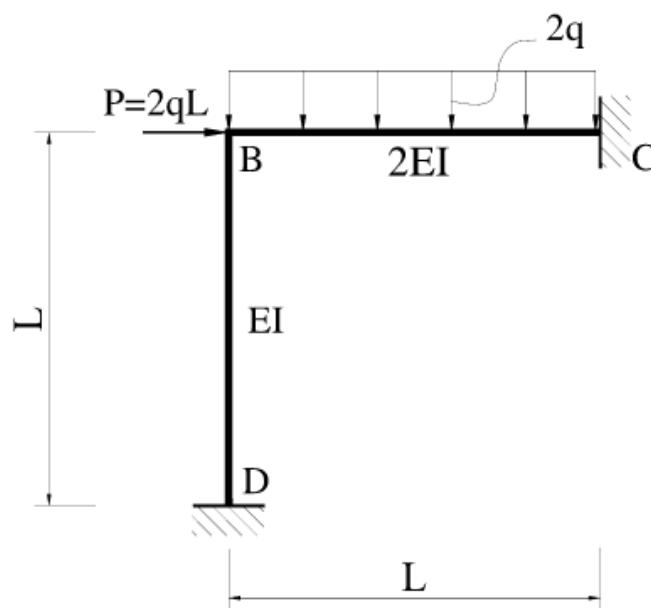
$$N'_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{864} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{11}{432} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \boxed{\frac{23}{3456} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 4.5** Cho hệ khung có độ cứng và chịu lực như Hình 4.26. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị.



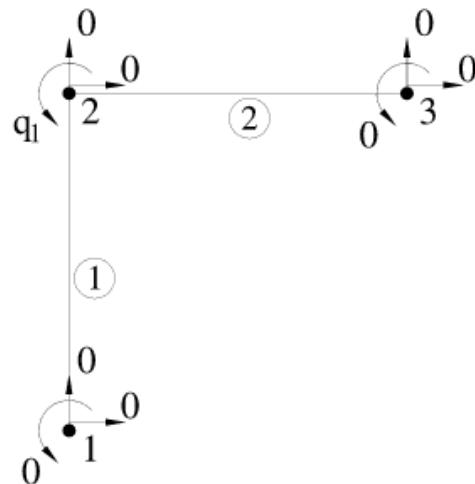
**Hình 4.26.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút.
- Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung.
- Xác định chuyển vị đứng và chuyển vị xoay tại điểm giữa thanh BC.

**Giải****a) Xác định chuyển vị tại các nút**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.27



**Hình 4.27.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận chỉ số phần tử b:

$$(2 \times 6) \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j		$c^2$	$s^2$	$cs$	$EI/l$
(1)	1	2	90	0	1	0	EI/L
(2)	2	3	0	1	0	0	2EI/L

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể:

$$\underset{(1 \times 1)}{\left[ \overline{K^*} \right]} = \left[ K \right]_1 + \left[ K \right]_2 = \frac{EI}{L^3} \left[ 12L^2 \right]$$

- Xây dựng véc tơ tải tổng thể:

$$\underset{(1 \times 1)}{\left\{ \overline{P^*} \right\}} = \left\{ \overline{P'} \right\}_1 + \left\{ \overline{P'} \right\}_2 + \left\{ \overline{P'} \right\}_n = \left\{ -qL^2 / 6 \right\}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\left[ \overline{K^*} \right] \left\{ \overline{q} \right\} = \left\{ \overline{P^*} \right\} \Leftrightarrow \frac{12EI}{L} q_1 = -\frac{qL^2}{6}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được nghiệm  $q_1$  là góc xoay tại các nút 2.

$$q_1 = -\frac{1}{72} \frac{qL^3}{EI}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

$$\bullet \text{ Phần tử 1: } \{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{72} \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \text{ Phần tử 2: } \{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{72} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### b) Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ

Mô men uốn của các phần tử:

• Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\{M\}_1 = \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{72} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

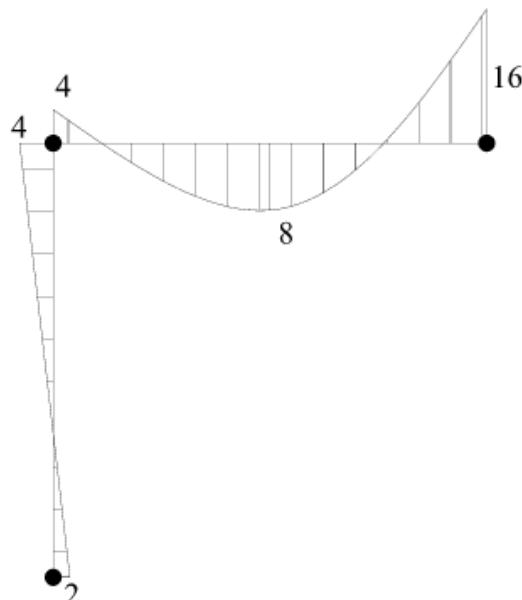
$$= \begin{Bmatrix} \frac{2}{72} \times qL^2 \\ -\frac{4}{72} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phản tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\{M\}_2 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{72} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{8}{72} qL^2 \\ -\frac{4}{72} qL^2 \end{Bmatrix}$$

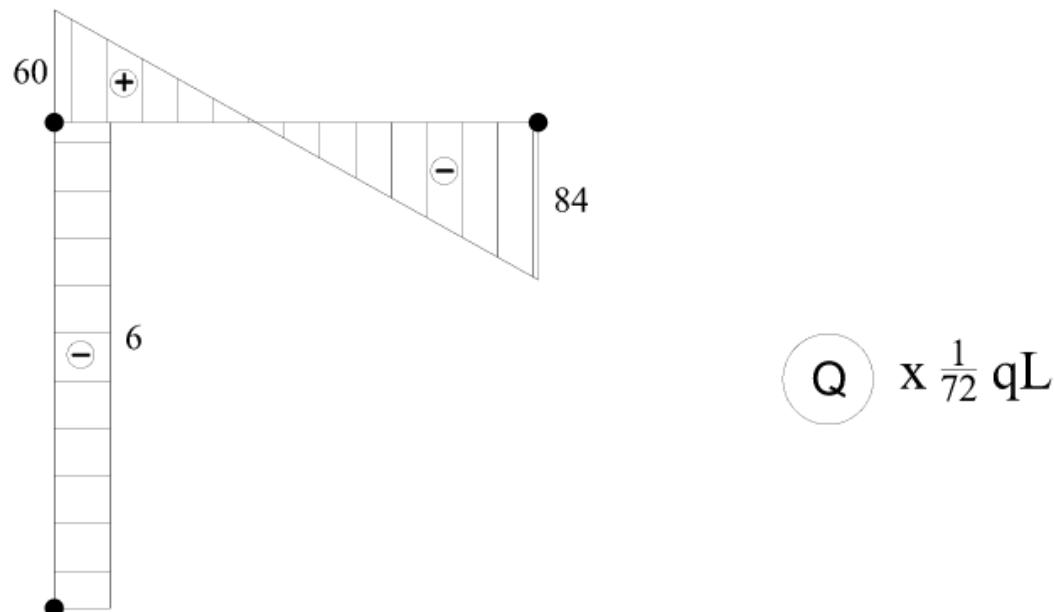
- Biểu đồ mô men  $M = M_0 + M_q + M_p$



$M \propto \frac{1}{72} qL^2$

**Hình 4.28.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

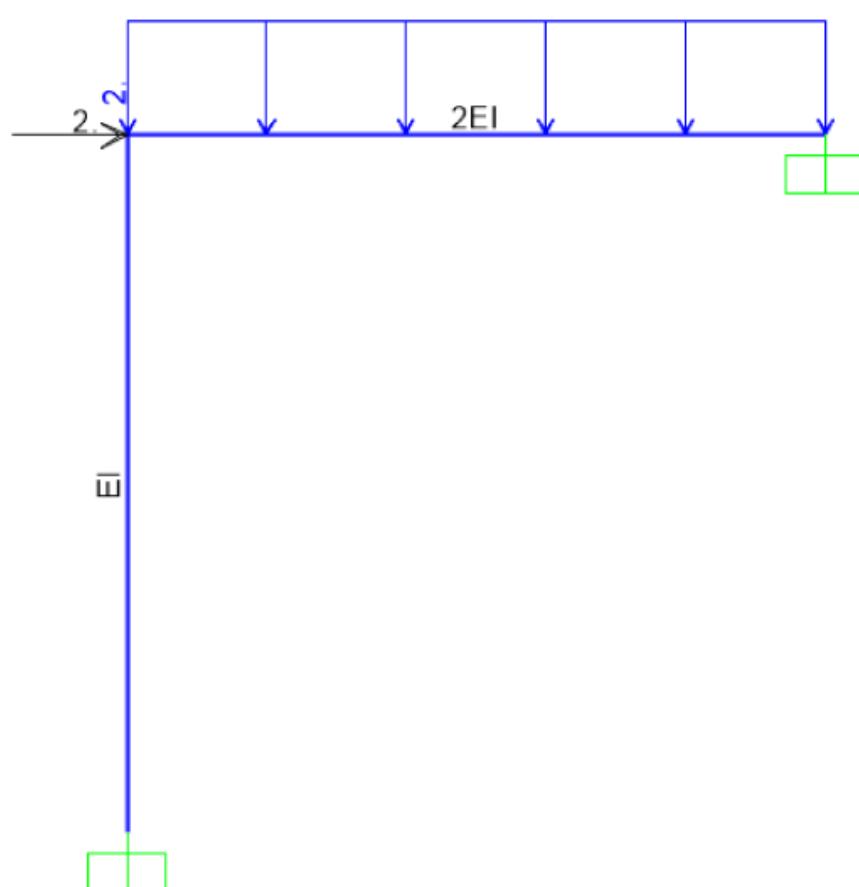
- Biểu đồ lực dọc  $Q = Q_0 + Q_q + Q_p$



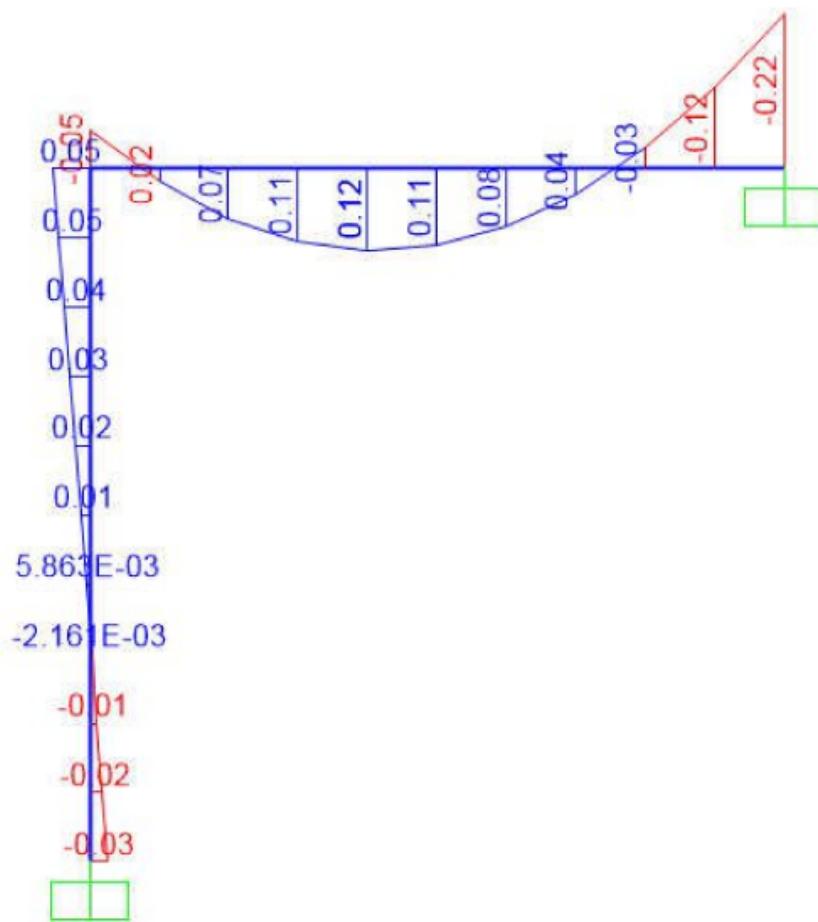
**Hình 4.29.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

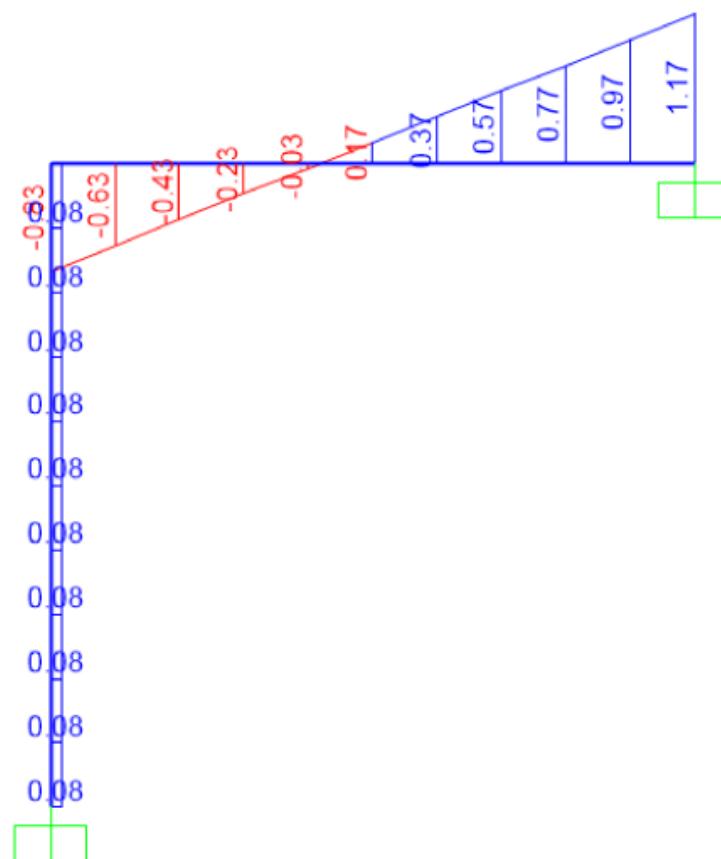
Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.



**Hình 4.30.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.31.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000



**Hình 4.32.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000

**c) Chuyển vị đứng và góc xoay tại vị trí giữa thanh BC**

• **Chuyển vị đứng:**

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{72} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{1}{576} \frac{qL^4}{EI}}$$

• **Góc xoay:**

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

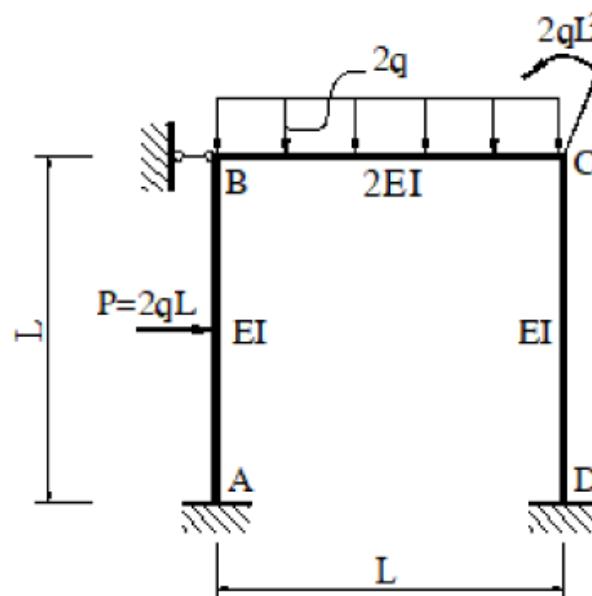
$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{72} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{1}{288} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 4.6** Cho hệ khung có độ cứng và chịu lực như Hình 4.33. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị.



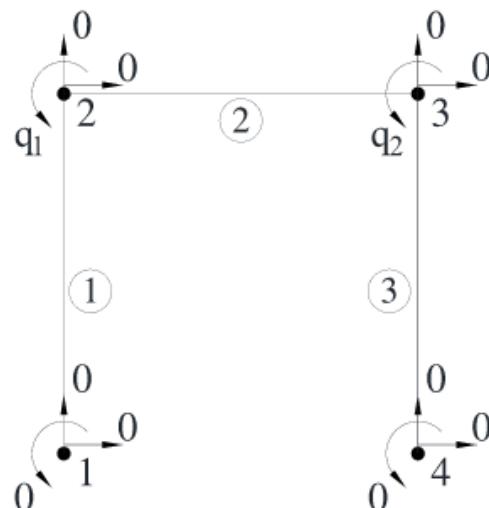
**Hình 4.33.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút.
- Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung.
- Xác định chuyển vị đứng và chuyển vị xoay tại điểm đặt lực tập trung.

**Giải****a) Xác định chuyển vị tại các nút:**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.34.



**Hình 4.34.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j		$c^2$	$s^2$	$cs$	$EF/I$
(1)	1	2	90	0	1	0	$EI/L$
(2)	2	3	0	1	0	0	$2EI/L$
(3)	4	3	90	0	1	0	$EI/L$

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể:

$$\left[ \overline{K}^* \right]_{(2 \times 2)} = [K]_1 + [K]_2 + [K]_3 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

- Xây dựng véc tơ tải tổng thể:

$$\left\{ \overline{P}^* \right\}_{(2 \times 1)} = \left\{ \overline{P}' \right\}_1 + \left\{ \overline{P}' \right\}_2 + \left\{ \overline{P}' \right\}_3 = \begin{cases} PL/8 - 2qL^2/12 \\ 2qL^2/12 + 2qL^2 \end{cases} = \begin{cases} qL^2/12 \\ 13qL^2/6 \end{cases}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\overline{[K^*]}\{\overline{q}\} = \overline{\{P^*\}} \Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL^2/12 \\ 13qL^2/6 \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là góc xoay tại các nút 2 và 3:

$$\begin{cases} q_1 = -\frac{23}{384} \frac{qL^3}{EI} \\ q_2 = \frac{77}{384} \frac{qL^3}{EI} \end{cases}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

- Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{23}{384} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{23}{384} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{77}{384} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{77}{384} \end{Bmatrix}$$

### b) Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ

- Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\begin{aligned} \{M\}_1 &= \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{23}{384} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{23}{192} \times qL^2 \\ -\frac{23}{96} \times qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

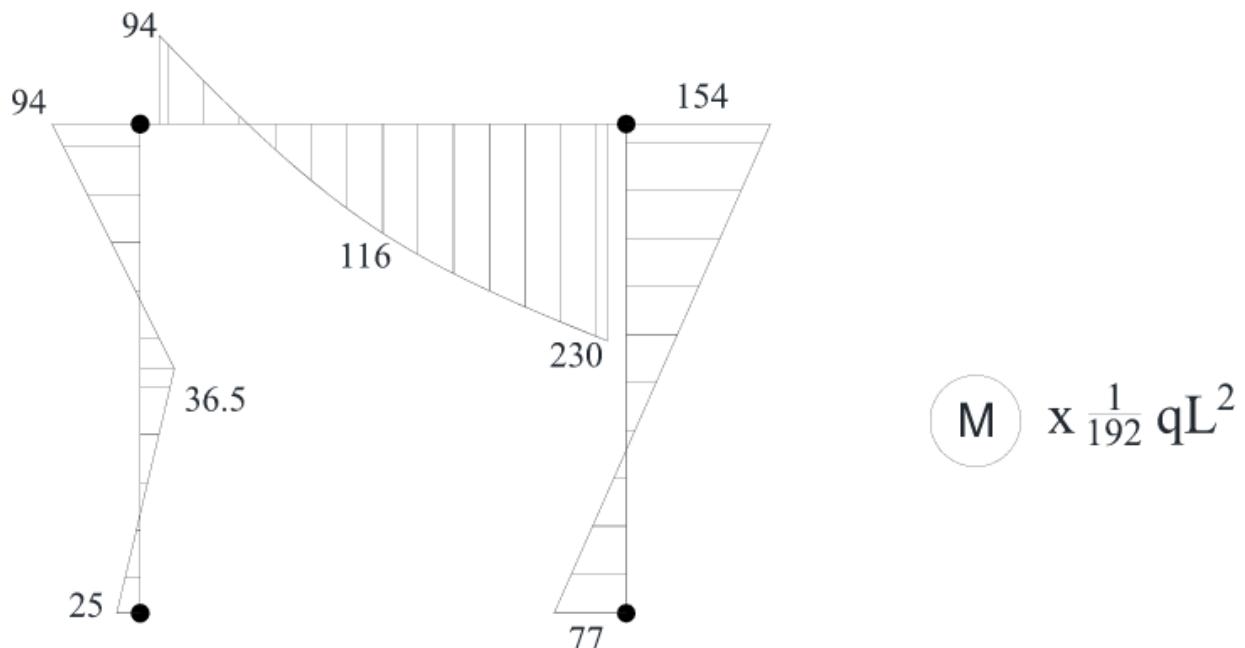
- Phần tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\begin{aligned} \{M\}_2 &= \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{23}{384} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{77}{384} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{31}{96} \times qL^2 \\ \frac{131}{96} \times qL^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Phản tử 3:  $c = 0; s = 1$

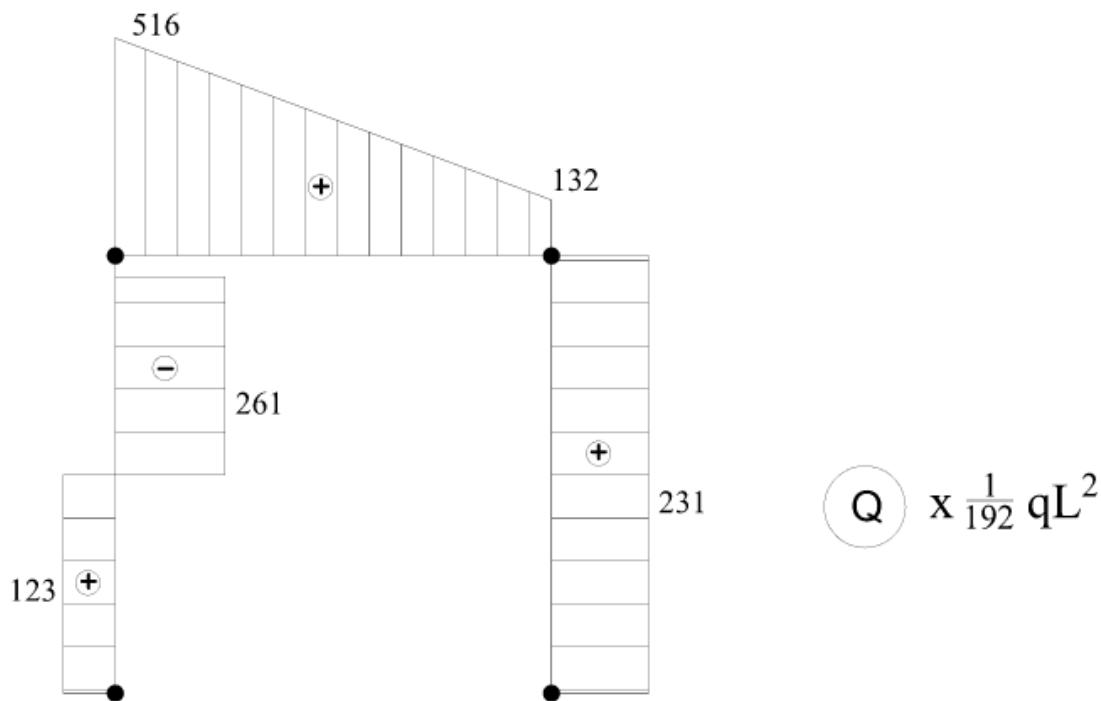
$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{77}{384} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{77}{192} \times qL^2 \\ \frac{77}{96} \times qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Biểu đồ mô men  $M = M_0 + M_q + M_p$



**Hình 4.35.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

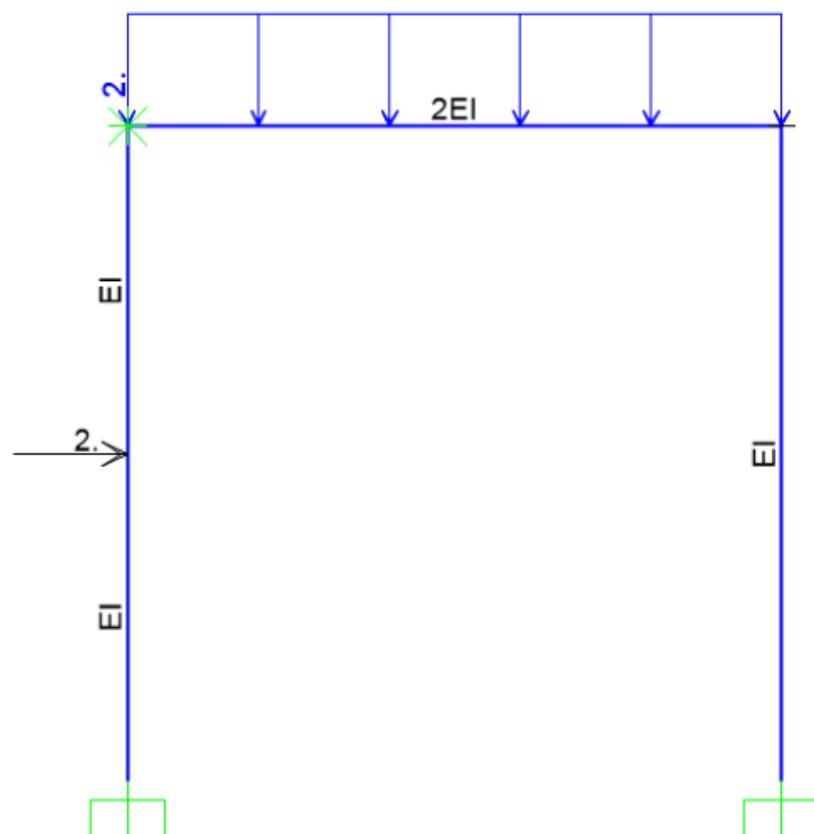
- Biểu đồ lực dọc  $Q = Q_0 + Q_q + Q_p$



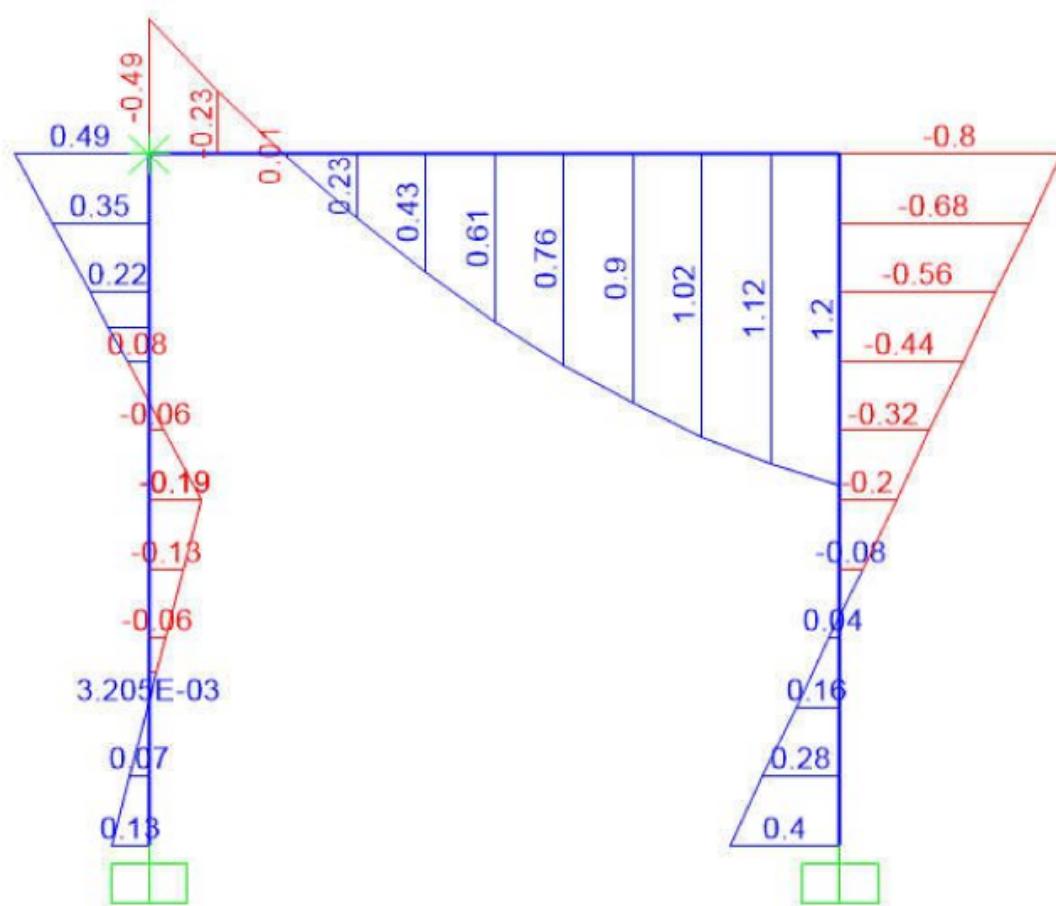
**Hình 4.36.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

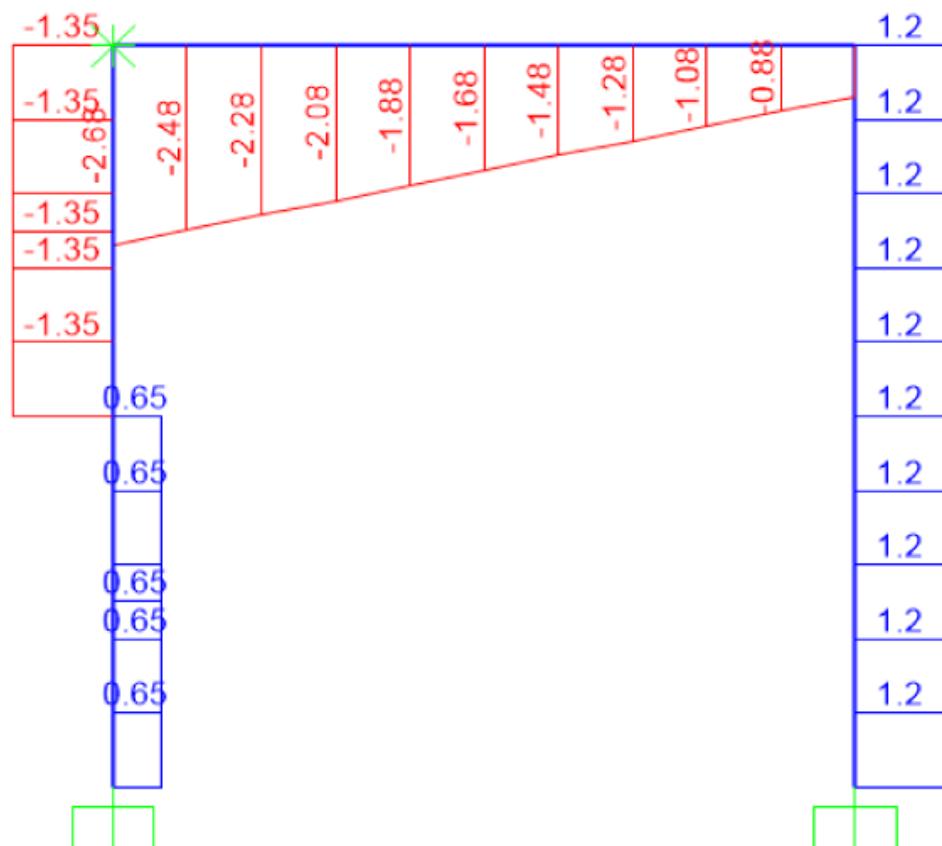
Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.



**Hình 4.37.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.38.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000



**Hình 4.39.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000

**a) Chuyển vị đứng và góc xoay tại điểm đặt lực tập trung****Chuyển vị đứng:**

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$ 

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{23}{384} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{23}{3072} \frac{qL^4}{EI}}$$

**Góc xoay:**

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$ 

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

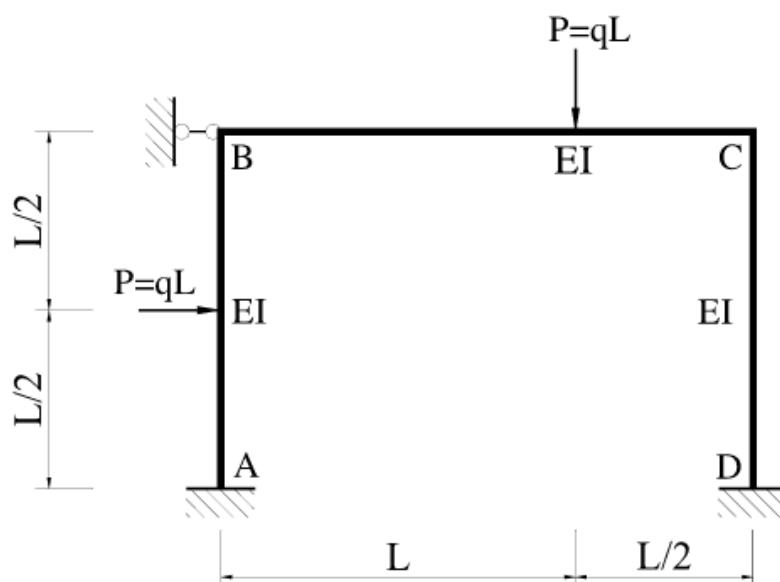
$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{384} \frac{qL^3}{EI} \\ \frac{-3}{2L} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{23}{384} \frac{qL^3}{EI} \end{array} \right\} = \boxed{\frac{23}{1536} \frac{qL^3}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 4.7** Cho hệ khung có độ cứng và chịu lực như Hình 4.40. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị.



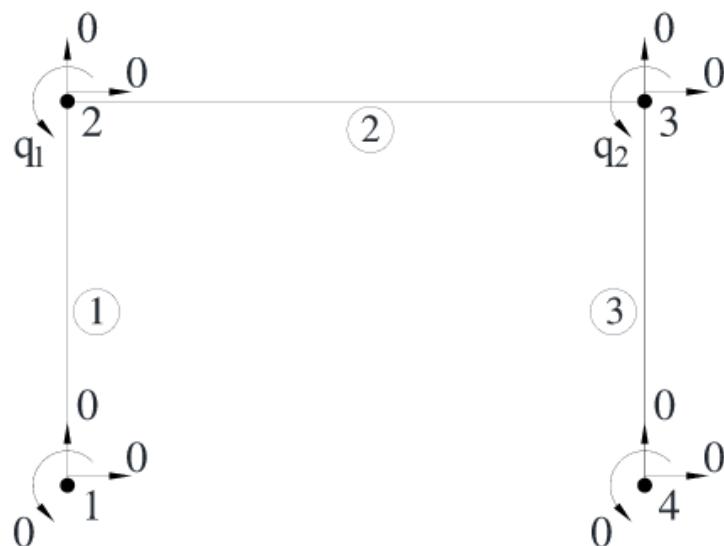
**Hình 4.40.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

Sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút.
- Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung.
- Xác định chuyển vị đứng và chuyển vị xoay tại điểm đặt lực tập trung.

**Giải****a) Xác định chuyển vị tại các nút**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.41.



**Hình 4.41.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j		$c^2$	$s^2$	$cs$	$EI/l$
(1)	1	2	90	0	1	0	$EI/l$
(2)	2	3	0	1	0	0	$EI/(3l/2)$
(3)	4	3	90	0	1	0	$EI/l$

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể:

$$\left[ \overline{K}^* \right]_{(2 \times 2)} = [K]_1 + [K]_2 + [K]_3 = \frac{EI}{3L} \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

1      2

- Xây dựng véc tơ tải tổng thể:

$$\left\{ \overline{P}^* \right\}_{(2 \times 1)} = \left\{ \overline{P}' \right\}_1 + \left\{ \overline{P}' \right\}_2 + \left\{ \overline{P}' \right\}_3 = \begin{Bmatrix} PL/8 - PL/9 \\ 2PL/9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL/72 \\ 2PL/9 \end{Bmatrix}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\overline{[K^*]}\{\overline{q}\} = \overline{\{P^*\}} \Leftrightarrow \frac{EI}{3L} \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} PL/72 \\ 2PL/9 \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là góc xoay tại các nút 2 và 3:

$$\begin{cases} q_1 = -\frac{11}{2304} \frac{PL^2}{EI} \\ q_2 = \frac{79}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{cases}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

- Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{PL^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{11}{2304} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{PL^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{11}{2304} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{79}{2304} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{PL^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{79}{2304} \end{Bmatrix}$$

**b) Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ**

- Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\begin{aligned} \{M\}_1 &= \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{11}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{11}{1152} \times PL \\ -\frac{11}{576} \times PL \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

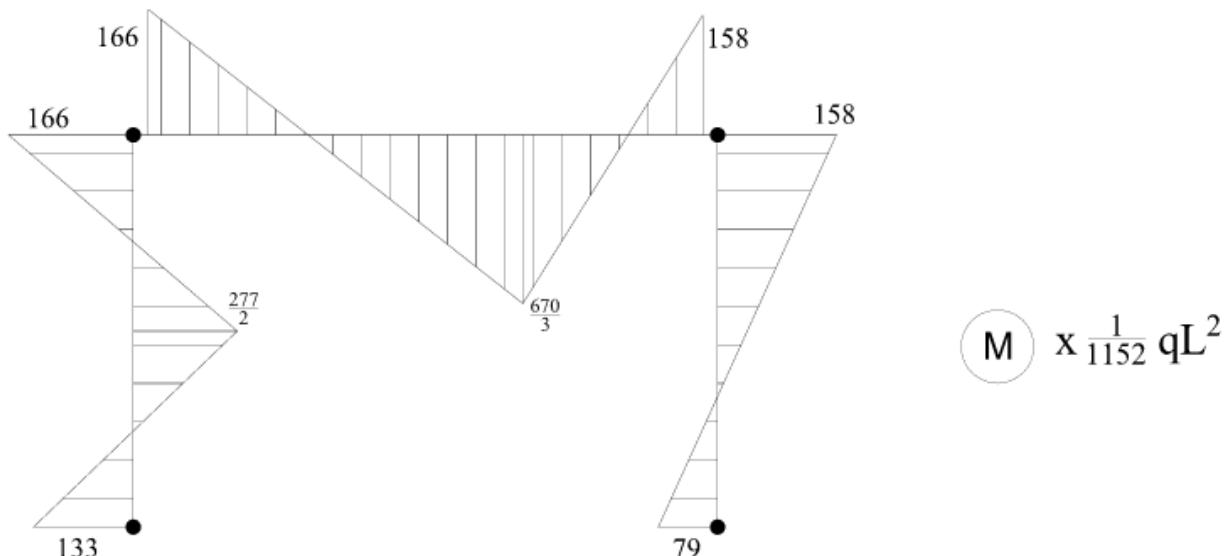
- Phân tử 2: c = 1; s = 0

$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= \frac{EI}{(3L/2)^3} \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & -6(3L/2) & -4(3L/2)^2 & 0 & 6(3L/2) & -2(3L/2)^2 \\ 0 & 6(3L/2) & 2(3L/2)^2 & 0 & -6(3L/2) & 4(3L/2)^2 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{11}{2304} \frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{79}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{19}{576} PL \\ \frac{49}{576} PL \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Phân tử 3: c = 0; s = 1

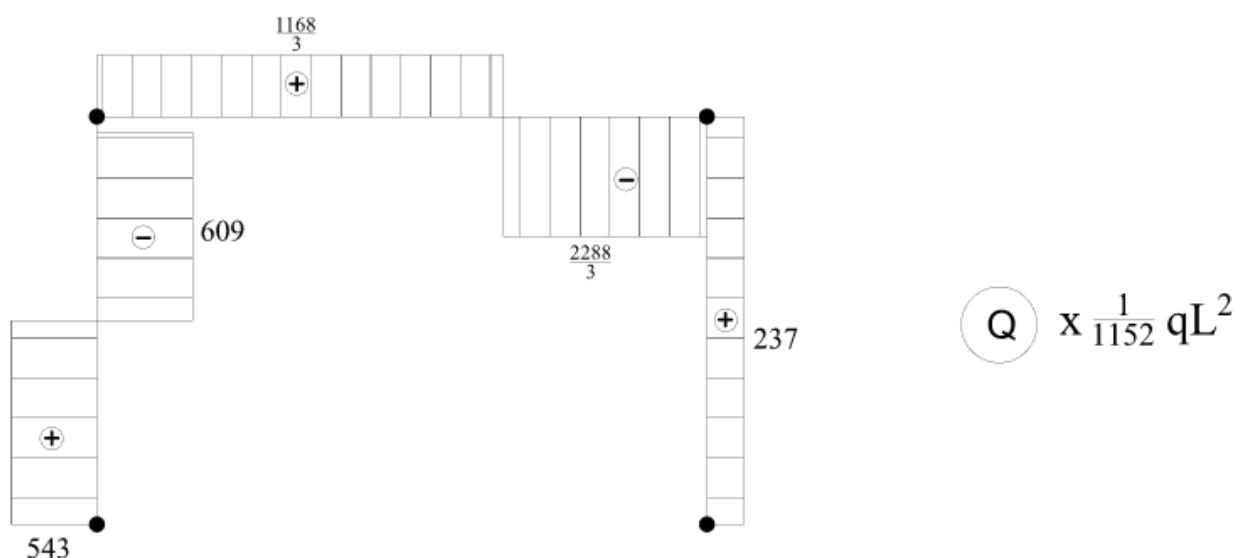
$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{79}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{79}{1152} PL \\ \frac{79}{576} PL \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Biểu đồ mô men  $M = M_0 + M_p$



**Hình 4.42.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

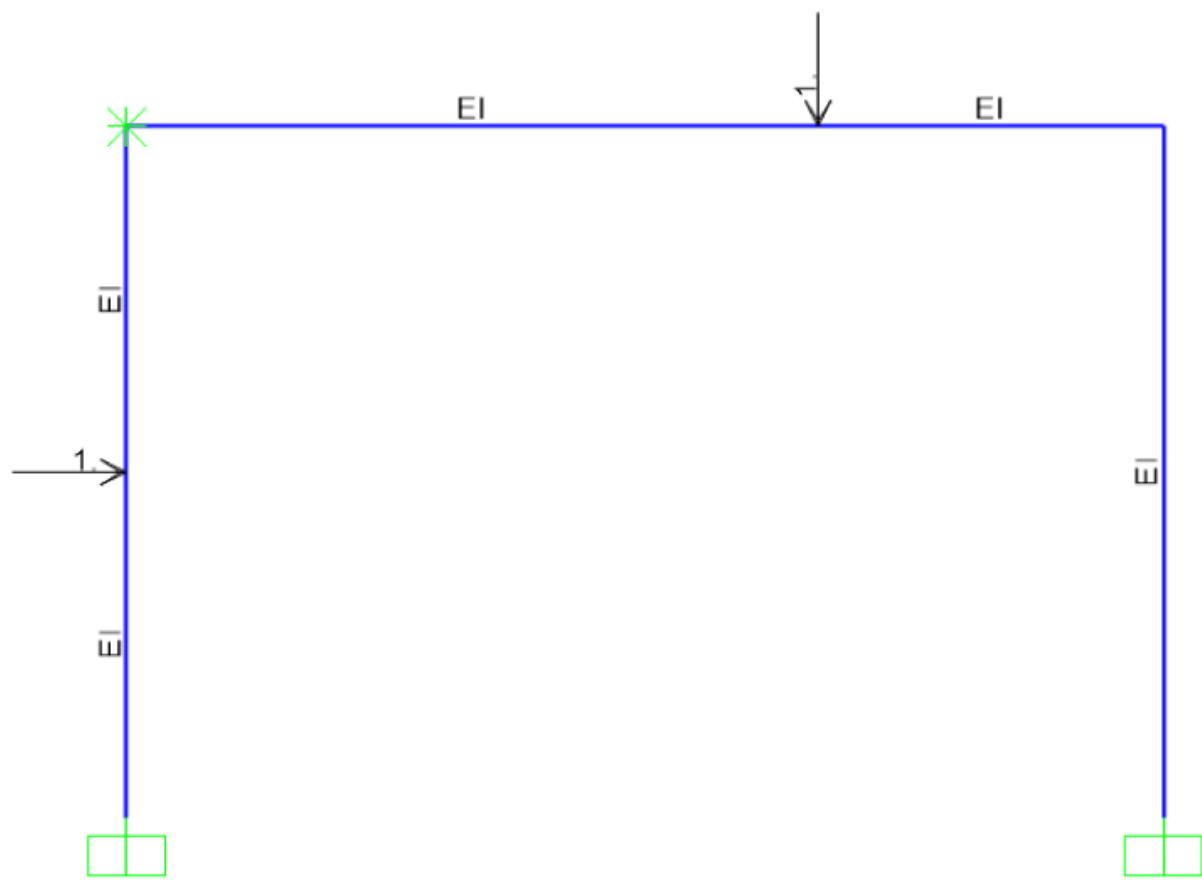
- Biểu đồ lực dọc  $Q = Q_0 + Q_q + Q_p$



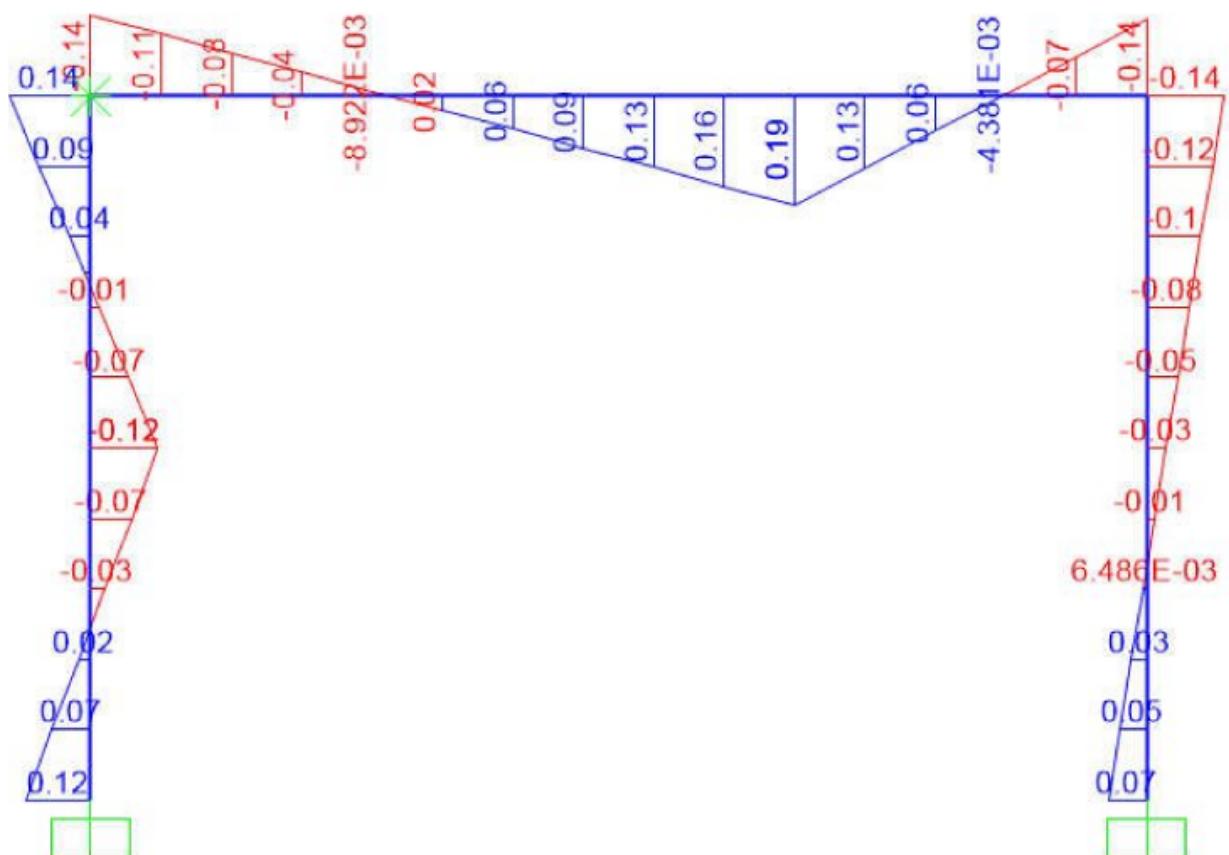
**Hình 4.43.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

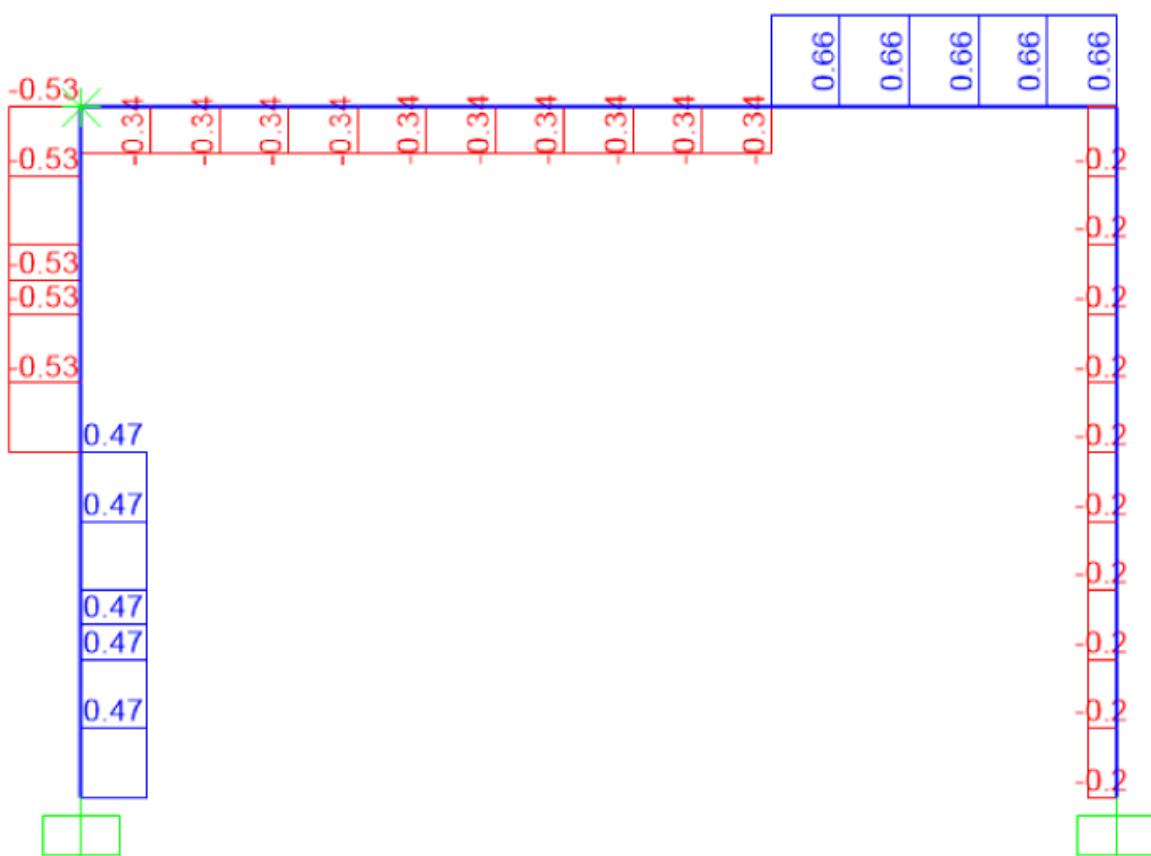
Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.



**Hình 4.44.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.45.** Biểu đồ mô men M của khung nhận được từ phần mềm SAP2000



**Hình 4.46.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000

a) Chuyển vị đứng và góc xoay tại điểm đặt lực tập trung

- Phần tử (1)

Chuyển vị đứng:

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{11}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{11}{18432} \frac{PL^3}{EI}}$$

**Góc xoay:**

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

$$\text{trong đó } [N'] = [N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \quad N'_4]$$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{11}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{11}{9216} \frac{PL^2}{EI}}$$

**- Phần tử (2)**

**Chuyển vị đứng:**

$$v(x=L) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1(x=L) = 1 - 3 \frac{1}{(3/2)^2} + 2 \frac{1}{(3/2)^3} = \frac{7}{27}$$

$$N_2(x=L) = L \left( 1 - 2 \frac{1}{(3/2)} + \frac{1}{(3/2)^2} \right) = \frac{1}{9} L$$

$$N_3(x=L) = 3 \frac{1}{(3/2)^2} - 2 \frac{1}{(3/2)^3} = \frac{20}{27}$$

$$N_4(x=L) = L \left( -\frac{1}{(3/2)} + \frac{1}{(3/2)^2} \right) = -\frac{2}{9} L$$

Suy ra

$$v(x=L) = [N] \{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{27} & \frac{L}{9} & \frac{20}{27} & -\frac{2L}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{11}{2304} \frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ \frac{79}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \boxed{-\frac{49}{6912} \frac{PL^3}{EI}}$$

**Góc xoay:**

$$\frac{dv}{dx}(x=L) = [N'] \{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1(x=L) = 0 - 3 \times \frac{2L}{(3L/2)^2} + 2 \times \frac{3L^2}{(3L/2)^3} = -\frac{8}{3L} + \frac{16}{9L} = \frac{-8}{9L}$$

$$N'_2(x=L) = 1 - 2 \times \frac{2L}{(3L/2)^2} + \frac{3 \times L^2}{(3L/2)^2} = 1 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

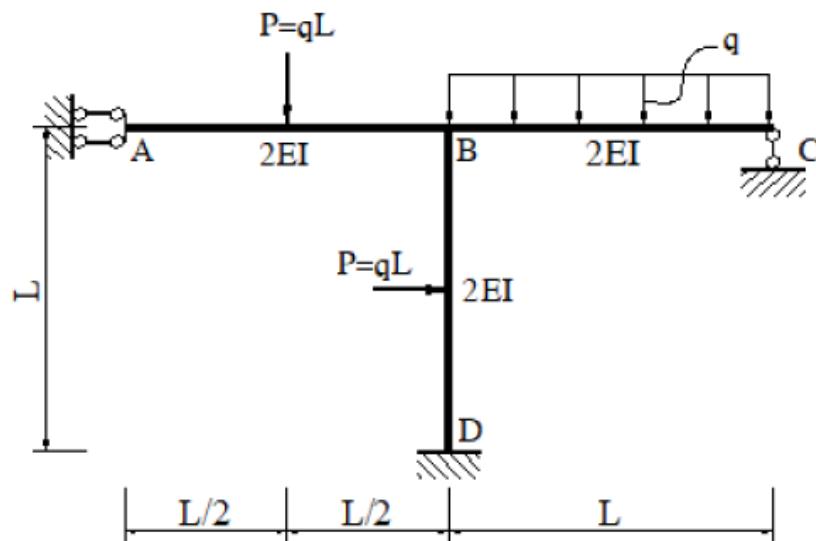
$$N'_3(x=L) = 3 \times \frac{2L}{(3L/2)^2} - 2 \times \frac{3L^2}{(3L/2)^3} = \frac{8}{3L} - \frac{16}{9L} = -\frac{8}{9L}$$

$$N'_4(x=L) = -\frac{2L}{(3L/2)} + \frac{3L^2}{(3L/2)^2} = 0$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(x=L) &= [N']\{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8}{9L} & -\frac{1}{3} & \frac{-8}{9L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{11}{2304} \frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ \frac{79}{2304} \frac{PL^2}{EI} \end{bmatrix} = \boxed{\frac{11}{6912} \frac{PL^2}{EI}} \end{aligned}$$

**Bài 4.8** Cho hệ khung có độ cứng và chịu lực như Hình 4.47. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị.



**Hình 4.47.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

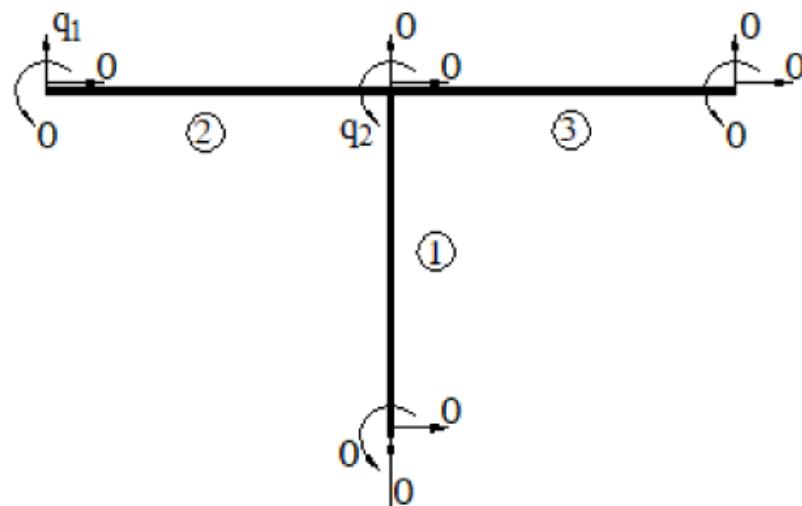
Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút.
- Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung.
- Xác định chuyển vị đứng và chuyển vị xoay tại điểm đặt lực tập trung.

### Giải

#### a) Xác định chuyển vị tại các nút

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.48.



**Hình 4.48.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Ma trận chỉ số phần tử b:

$$b_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j		$c^2$	$s^2$	$cs$	$EF/I$
(1)	1	2	90	0	1	0	$2EI/L$
(2)	3	2	0	1	0	0	$2EI/L$
(3)	2	4	0	1	0	0	$2EI/L$

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể:

$$\left[ \overline{K^*} \right]_{(1 \times 1)} = [K]_1 + [K]_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 12L \\ 12L & 24L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Xây dựng véc tơ tải tổng thể:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{P^*}\right\}_{(1 \times 2)} &= \left\{\overline{P'}\right\}_1 + \left\{\overline{P'}\right\}_2 + \left\{\overline{P'}\right\}_n \\ &= \begin{cases} -qL/2 \\ qL^2/8 + qL^2/8 - qL^2/12 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -qL/2 \\ qL^2/6 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}\end{aligned}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned}\overline{[K^*]}\overline{\{q\}} &= \overline{\{P^*\}} \\ \Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 24 & 12L \\ 12L & 24L^2 \end{bmatrix} \begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases} &= \begin{cases} -qL/2 \\ qL^2/6 \end{cases}\end{aligned}$$

- Giải hệ phương trình, xác định được chuyển vị xoay tại nút 2 là  $q_2$  và chuyển đứng tại nút 3 là  $q_1$ .

$$\begin{cases} q_1 = -\frac{7}{216} \frac{qL^4}{EI} \\ q_2 = \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{cases}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

• Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{cases}$$

- Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{216} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### b) Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ

- Vẽ biểu đồ mô men cho hệ:

Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\{M\}_1 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{5}{54} \times qL^2 \\ \frac{10}{54} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phân tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\{M\}_2 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{216} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

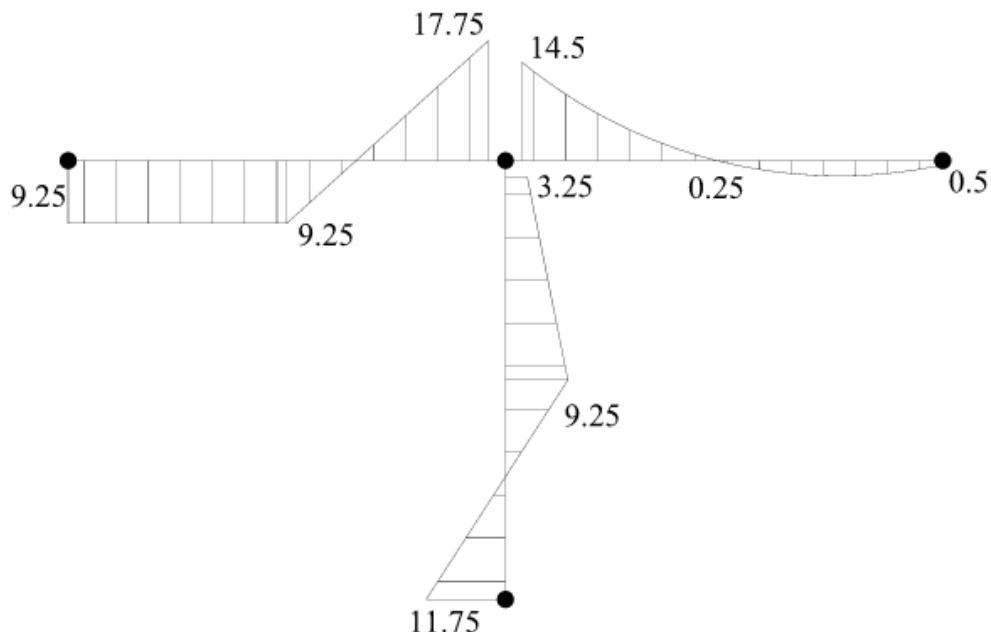
$$= \begin{Bmatrix} \frac{16}{54} \times qL^2 \\ -\frac{11}{54} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phân tử 3:  $s = 0; c = 1$

$$\{M\}_3 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

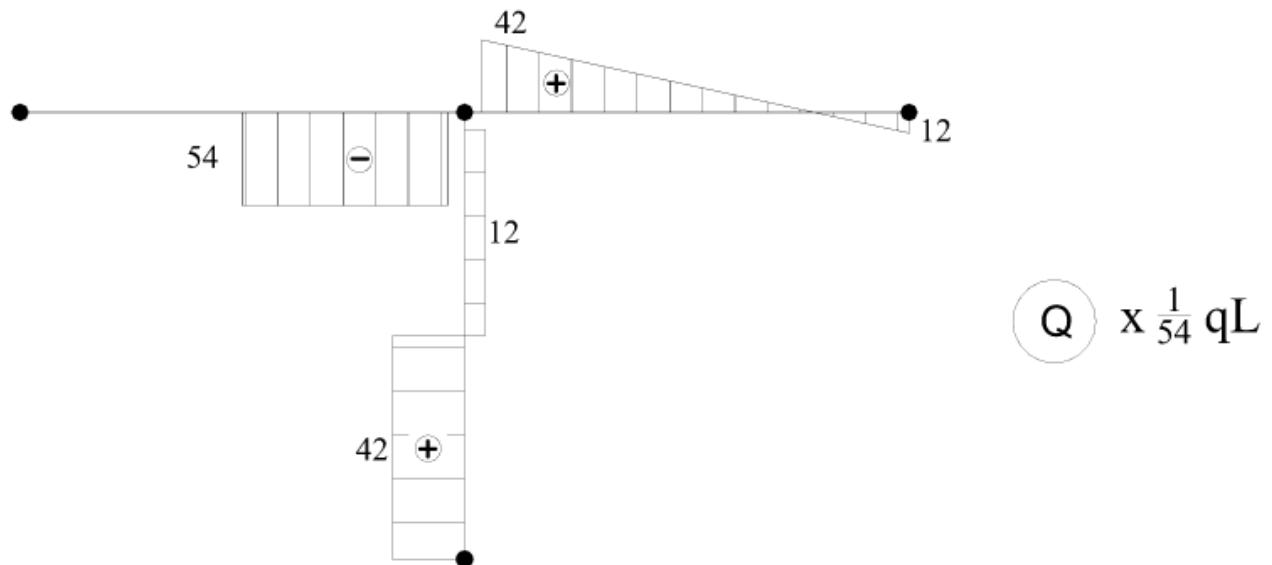
$$= \begin{Bmatrix} -\frac{10}{54} \times qL^2 \\ \frac{5}{54} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men  $M = M_0 + M_q + M_p$



**Hình 4.49.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

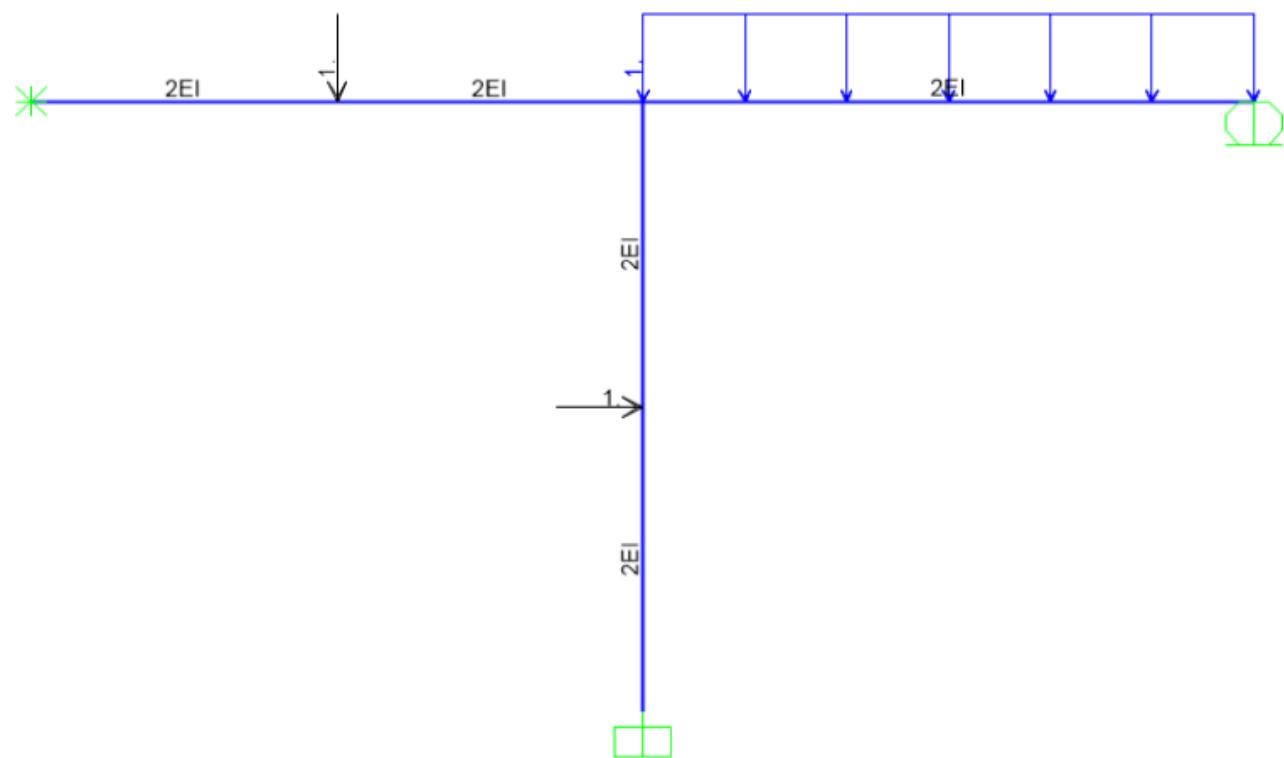
- Biểu đồ lực dọc  $Q = Q_0 + Q_q + Q_p$



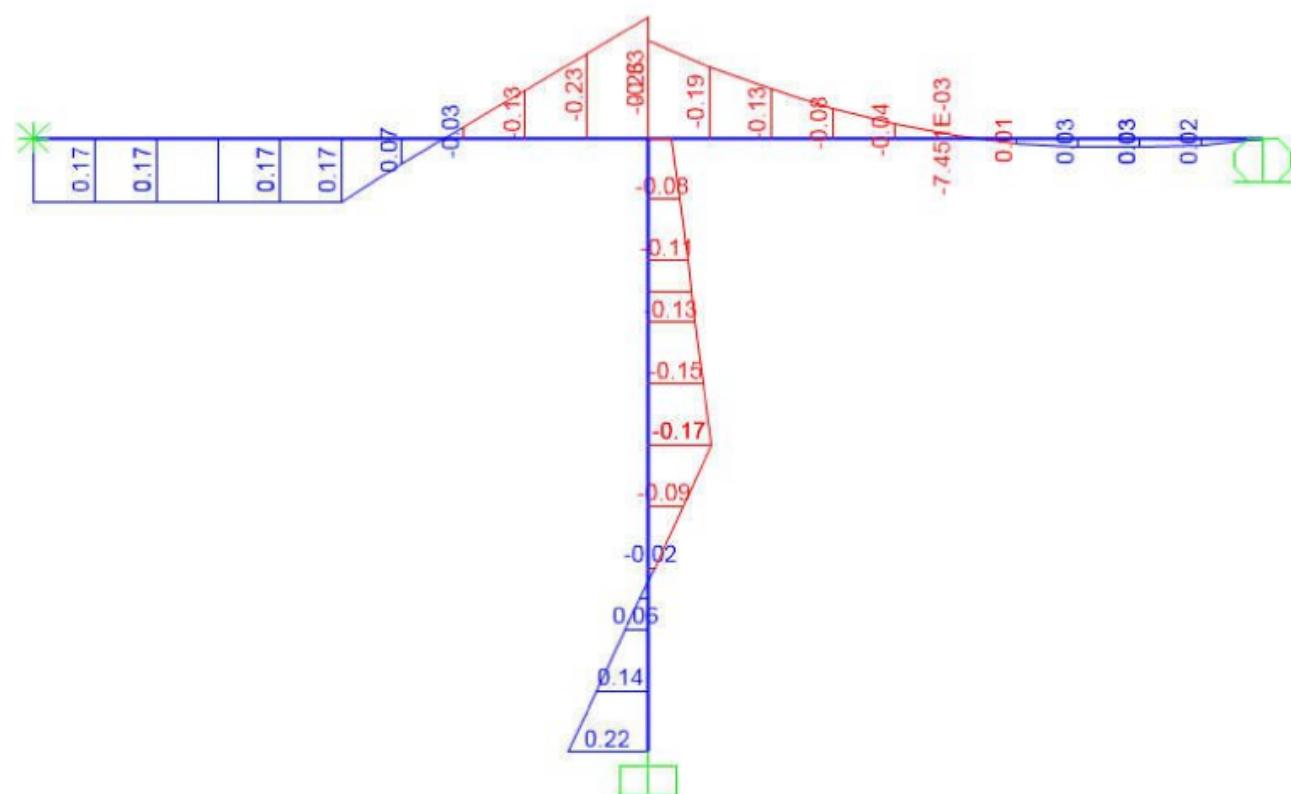
**Hình 4.50.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

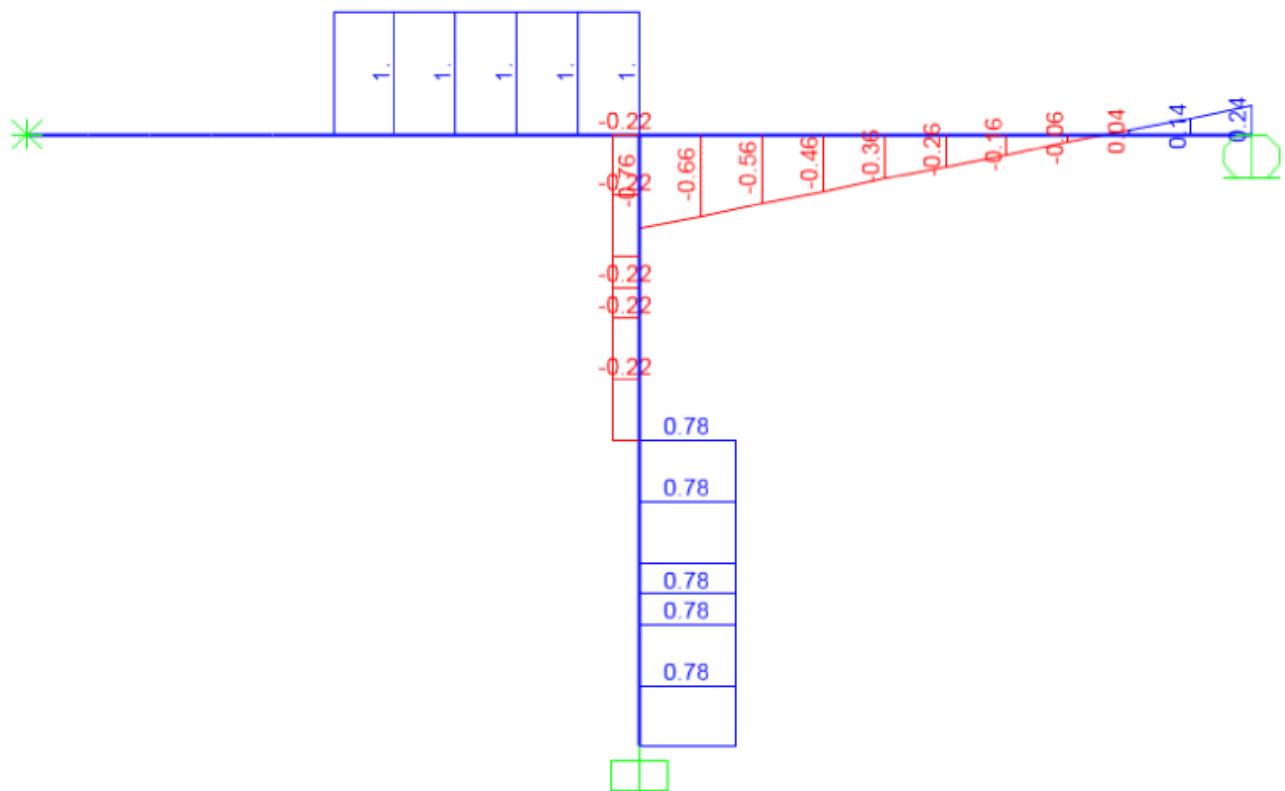
Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.



**Hình 4.51.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.52.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000



**Hình 4.53.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000

**a) Chuyển vị đứng và góc xoay tại vị trí lực tập trung**

- Phần tử (1)

**Chuyển vị đứng**

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{5}{1728} \frac{qL^4}{EI}}$$

### Góc xoay

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{5}{864} \frac{qL^3}{EI}}$$

**- Phần tử (2)**

**Chuyển vị đứng:**

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}L$$

$$N_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}L$$

Suy ra:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{216} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} = \boxed{-\frac{11}{576} \frac{qL^4}{EI}}$$

**Góc xoay**

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \ N'_2 \ N'_3 \ N'_4]$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

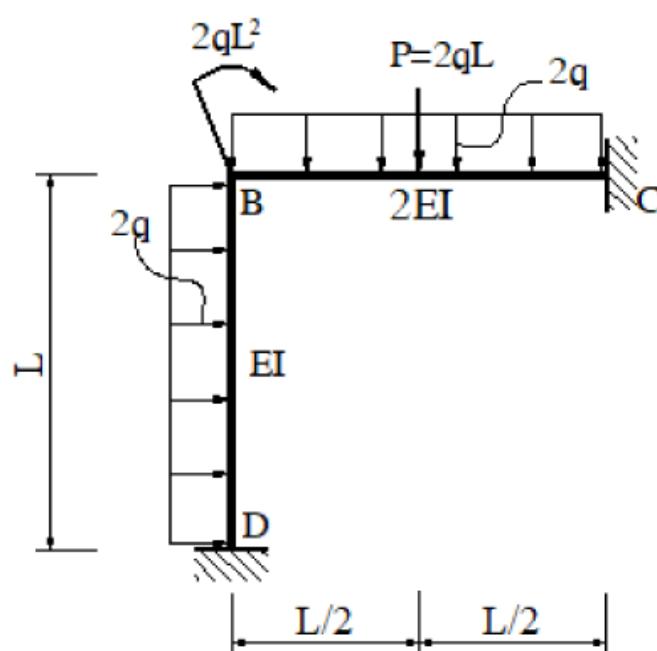
$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N'] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{7}{216} \frac{qL^4}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{216} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{79}{1728} \frac{qL^3}{EI} \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

**Bài 4.9** Cho hệ khung có độ cứng và chịu lực như hình vẽ Hình 4.54. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị.



**Hình 4.54.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

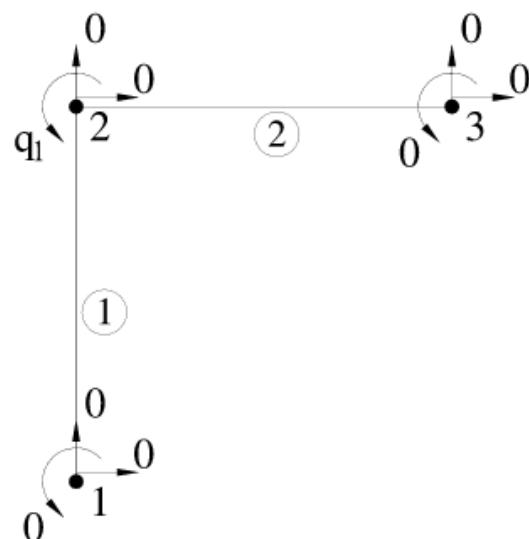
Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút.
- Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung.
- Xác định chuyển vị đứng và chuyển vị xoay tại điểm đặt lực tập trung.

### Giải

#### a) Xác định chuyển vị tại các nút

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.55.



**Hình 4.55.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận chỉ số phần tử b:

$$(2 \times 6) \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j		$\epsilon^2$	$s^2$	$\epsilon s$	$EF/I$
(1)	1	2	90	0	1	0	$EI/L$
(2)	2	3	0	1	0	0	$2EI/L$

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} \overline{K^*} \end{bmatrix}_{(1 \times 1)} = [K]_1 + [K]_2 = \frac{EI}{L^3} [12L^2]$$

- Xây dựng véc tơ tải tổng thể:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{P^*}\right\}_{(1 \times 1)} &= \left\{\overline{P'}\right\}_1 + \left\{\overline{P'}\right\}_2 + \left\{\overline{P'}\right\}_n \\ &= \left\{ \frac{qL^2}{6} - \frac{qL^2}{6} - \frac{(2qL)L}{8} - 2qL^2 \right\} = \left\{ -\frac{9qL^2}{4} \right\}\end{aligned}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\left[ \overline{K^*} \right] \overline{\{q\}} = \overline{\{P^*\}} \Leftrightarrow \frac{12EI}{L} q_1 = -\frac{9qL^2}{4}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1$  là góc xoay tại các nút 2

$$q_1 = -\frac{9}{48} \frac{qL^3}{EI}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

• Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{48} \end{Bmatrix}$$

• Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{48} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**b) Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ**

Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\{M\}_1 = \frac{EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{48} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

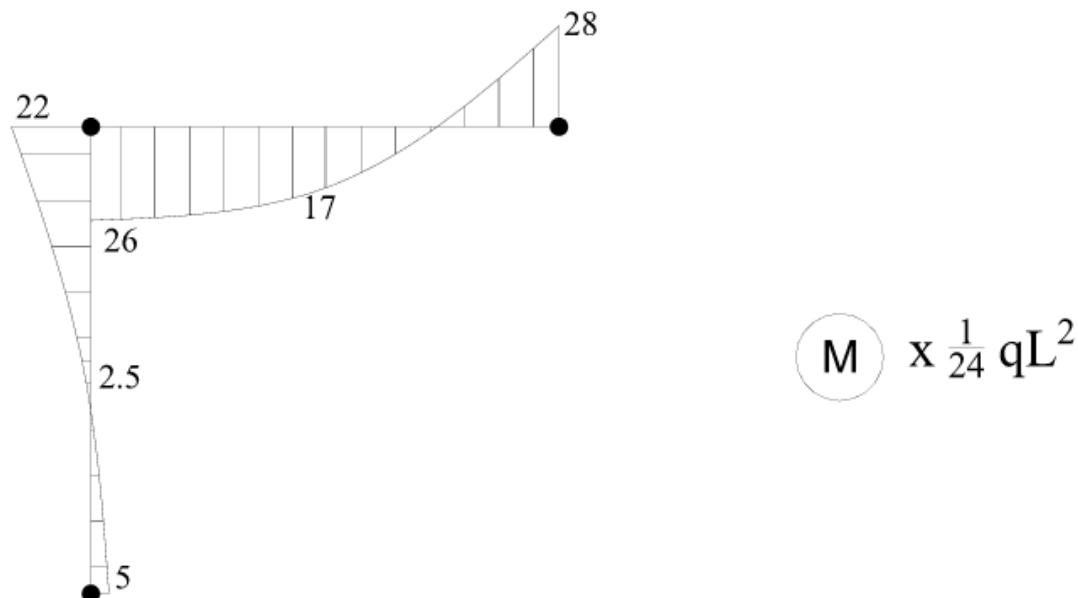
$$= \begin{Bmatrix} \frac{9}{24} \times qL^2 \\ -\frac{18}{24} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\{M\}_2 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 6L & -2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{48} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

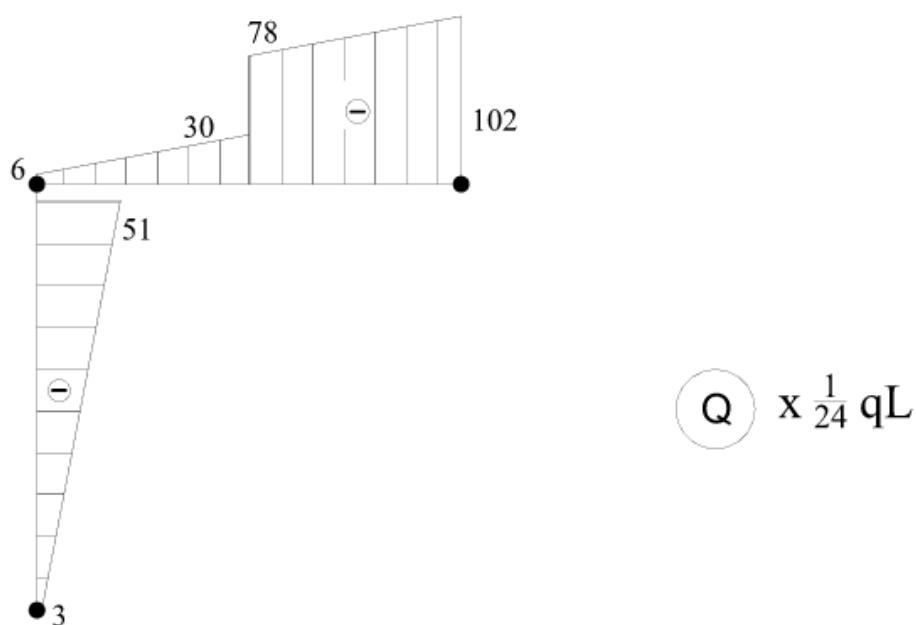
$$= \begin{Bmatrix} \frac{36}{24} qL^2 \\ -\frac{18}{24} qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Biểu đồ mô men  $M = M_0 + M_q + M_p$



**Hình 4.56.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

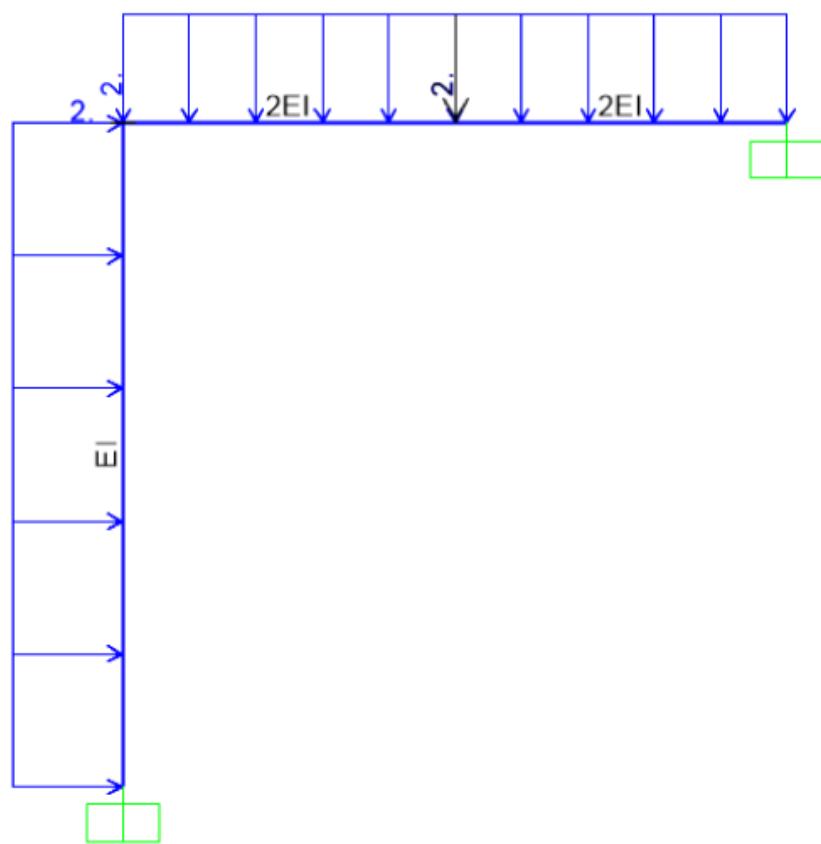
- Biểu đồ lực dọc  $Q = Q_0 + Q_q + Q_p$



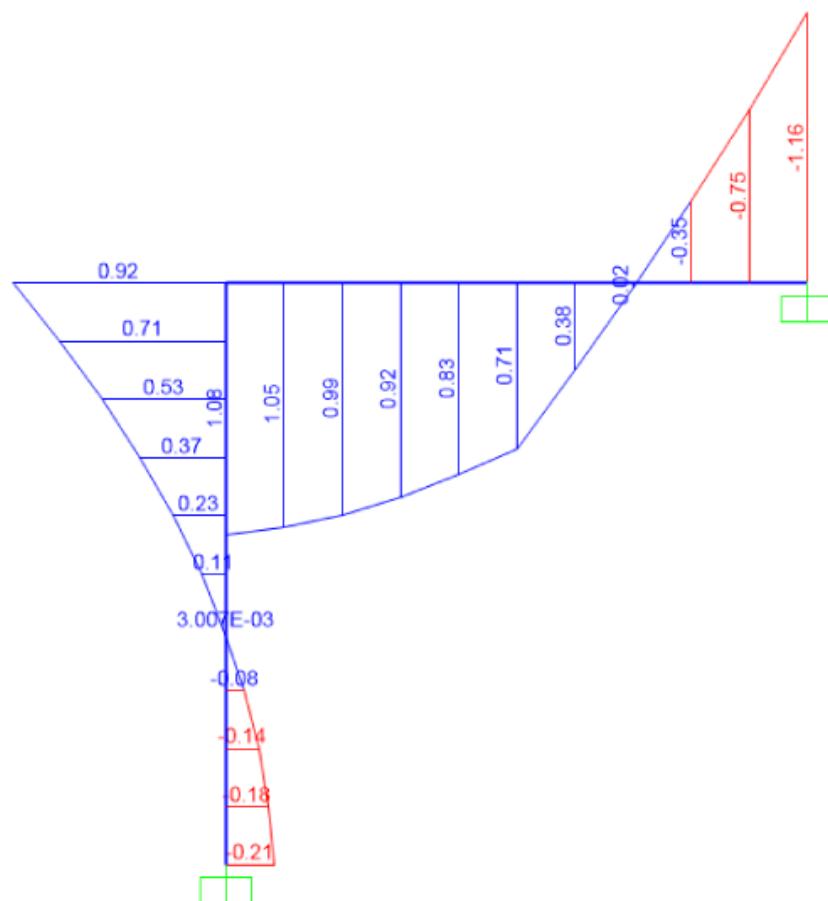
**Hình 4.57.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

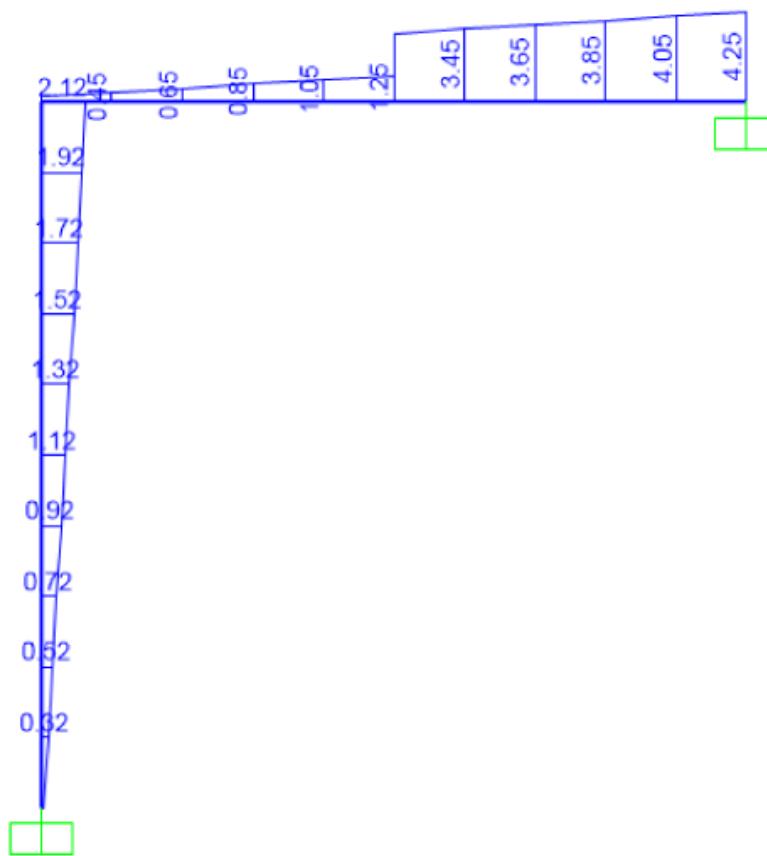
Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.



**Hình 4.58.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.59.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000



**Hình 4.60.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung nhận được từ phần mềm SAP2000

c) Chuyển vị đứng và góc xoay tại vị trí giữa thanh BC

**Chuyển vị đứng:**

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra:

$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N]\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{48} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{9}{384} \frac{qL^4}{EI}}$$

**Góc xoay:**

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_e$$

$$\text{trong đó } [N'] = [N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \quad N'_4]$$

$$N'_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2\left(x = \frac{L}{2}\right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3\left(x = \frac{L}{2}\right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

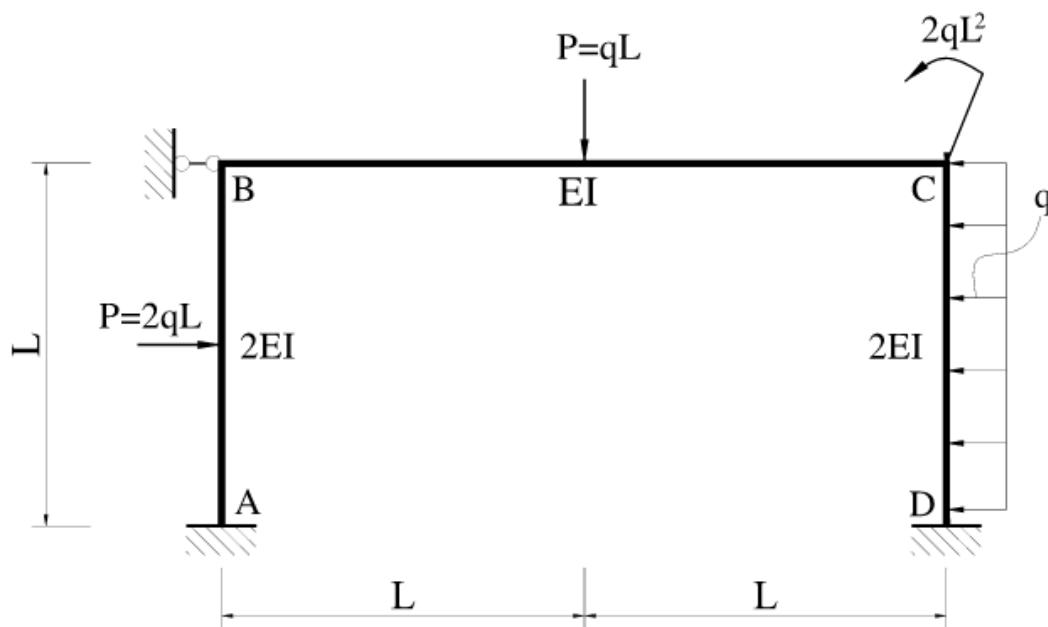
$$N'_4\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\frac{dv}{dx}\left(x = \frac{L}{2}\right) = [N']\{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{48} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{9}{192} \frac{qL^3}{EI}}$$

**Bài 4.10** Cho hệ khung có độ cứng và chịu lực như Hình 4.61. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đối với chuyển vị.



**Hình 4.61.** Sơ đồ kết cấu và tải trọng

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, hãy xác định:

- Chuyển vị tại các nút.
- Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung..
- Xác định chuyển vị đứng và chuyển vị xoay tại điểm đặt lực tập trung.

**Giải**

**a) Xác định chuyển vị tại các nút**

- Rời rạc hóa kết cấu, kết hợp với điều kiện biên như Hình 4.62.



**Hình 4.62.** Sơ đồ nút, phần tử và các bậc tự do

- Xây dựng ma trận chỉ số phần tử b:

$$(3 \times 6) \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Phần tử	Nút i	Nút j		$c^2$	$s^2$	$cs$	$EF/I$
(1)	1	2	90	0	1	0	$2EI/L$
(2)	2	3	0	1	0	0	$EI/2L$
(3)	4	3	90	0	1	0	$2EI/L$

- Xây dựng ma trận độ cứng tổng thể

$$\left[ \overline{K^*} \right]_{(2 \times 2)} = [K]_1 + [K]_2 + [K]_3 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}_{12}$$

- Xây dựng véc tơ tải tổng thể:

$$\begin{aligned} \left\{ \overline{P^*} \right\}_{(2 \times 1)} &= \left\{ \overline{P'} \right\}_1 + \left\{ \overline{P'} \right\}_2 + \left\{ \overline{P'} \right\}_3 \\ &= \begin{Bmatrix} qL^2/4 - qL^2/4 \\ -qL^2/12 + qL^2/4 + 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 13qL^2/6 \end{Bmatrix}_{12} \end{aligned}$$

- Ta có hệ phương trình:

$$\left[ \overline{K^*} \right] \{q\} = \left\{ \overline{P^*} \right\} \Leftrightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 13qL^2/6 \end{Bmatrix}$$

- Giải hệ phương trình, ta nhận được hai nghiệm  $q_1, q_2$  lần lượt là góc xoay tại các nút 2 và 3:

$$\begin{cases} q_1 = -\frac{13}{594} \frac{qL^3}{EI} \\ q_2 = \frac{65}{297} \frac{qL^3}{EI} \end{cases}$$

- Vectơ chuyển vị nút phần tử:

• Phần tử 1:

$$\{q\}_1 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{594} \end{Bmatrix}$$

• Phần tử 2:

$$\{q\}_2 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{594} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{65}{297} \end{Bmatrix}$$

• Phần tử 3:

$$\{q\}_3 = \frac{qL^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{65}{297} \end{Bmatrix}$$

**b) Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ**

- Mô men uốn của các phần tử:

- Phần tử 1:  $c = 0; s = 1$

$$\{M\}_1 = \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{594} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{26}{297} \times qL^2 \\ -\frac{52}{297} \times qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phần tử 2:  $c = 1; s = 0$

$$\{M\}_2 = \frac{EI}{(2L)^3} \times \begin{bmatrix} 0 & -6(2L) & -4(2L)^2 & 0 & 6(2L) & -2(2L)^2 \\ 0 & 6(2L) & 2(2L)^2 & 0 & -6(2L) & 4(2L)^2 \end{bmatrix}$$

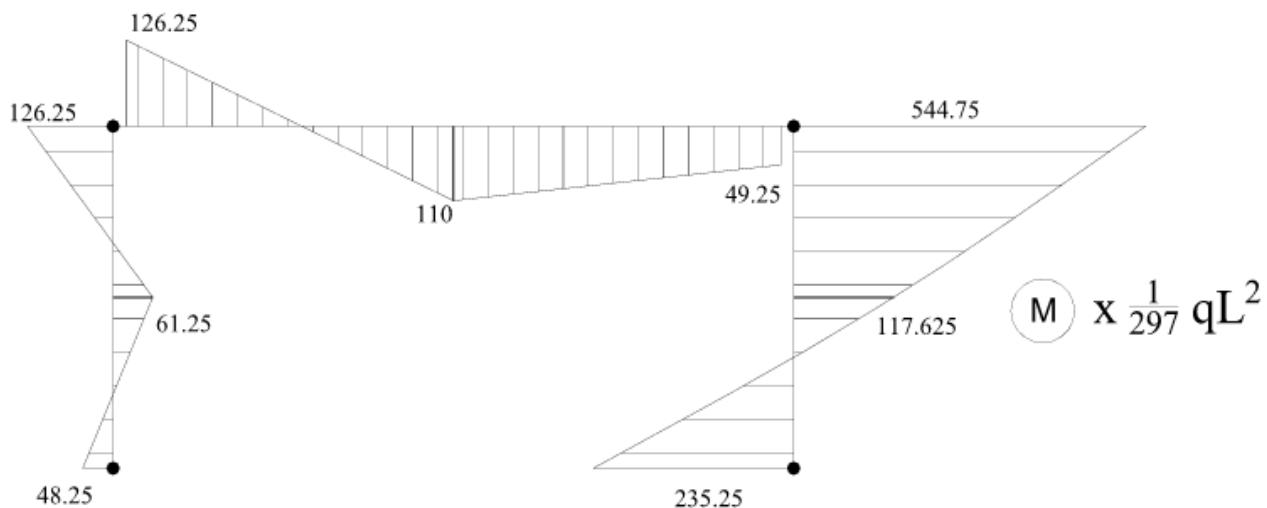
$$\times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{594} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{65}{297} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{52}{297} qL^2 \\ \frac{247}{594} qL^2 \end{Bmatrix}$$

- Phân tử 3:  $c = 0; s = 1$

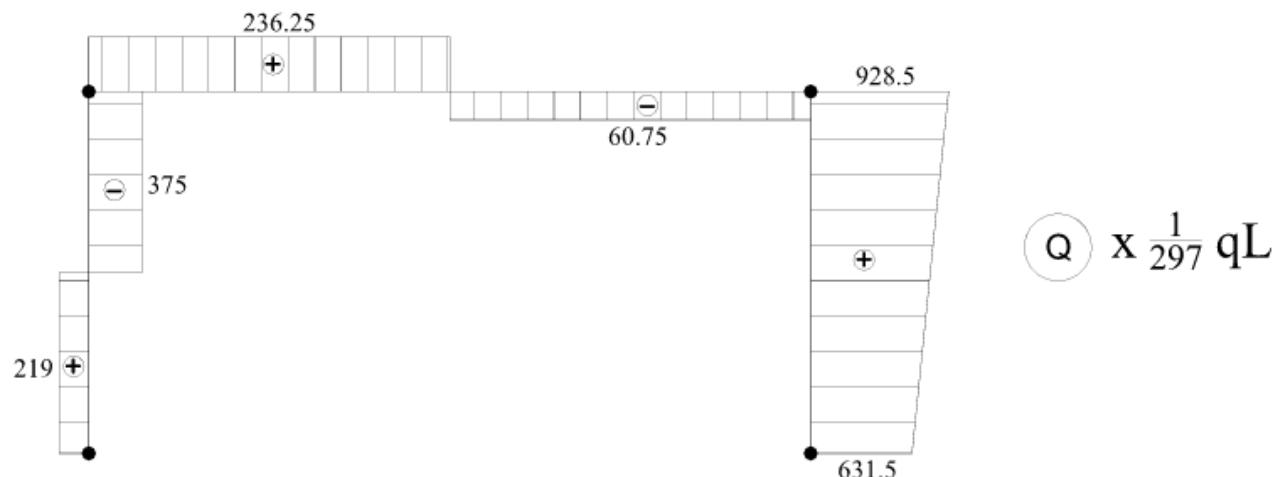
$$\begin{aligned}\{M\}_2 &= \frac{2EI}{L^3} \times \begin{bmatrix} 6L & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & -2L^2 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{65}{297} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{260}{297} qL^2 \\ \frac{520}{297} qL^2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- Biểu đồ mô men  $M = M_0 + M_q + M_p$



**Hình 4.63.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung

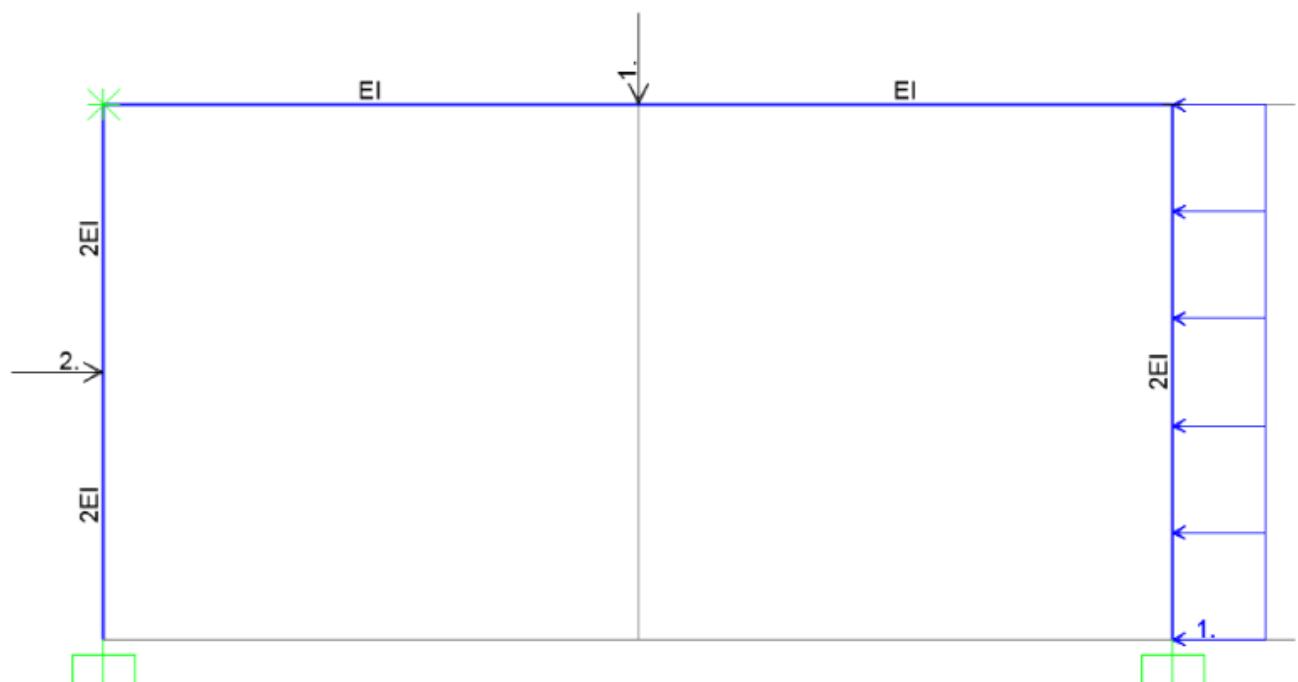
- Biểu đồ lực dọc  $Q = Q_0 + Q_q + Q_p$



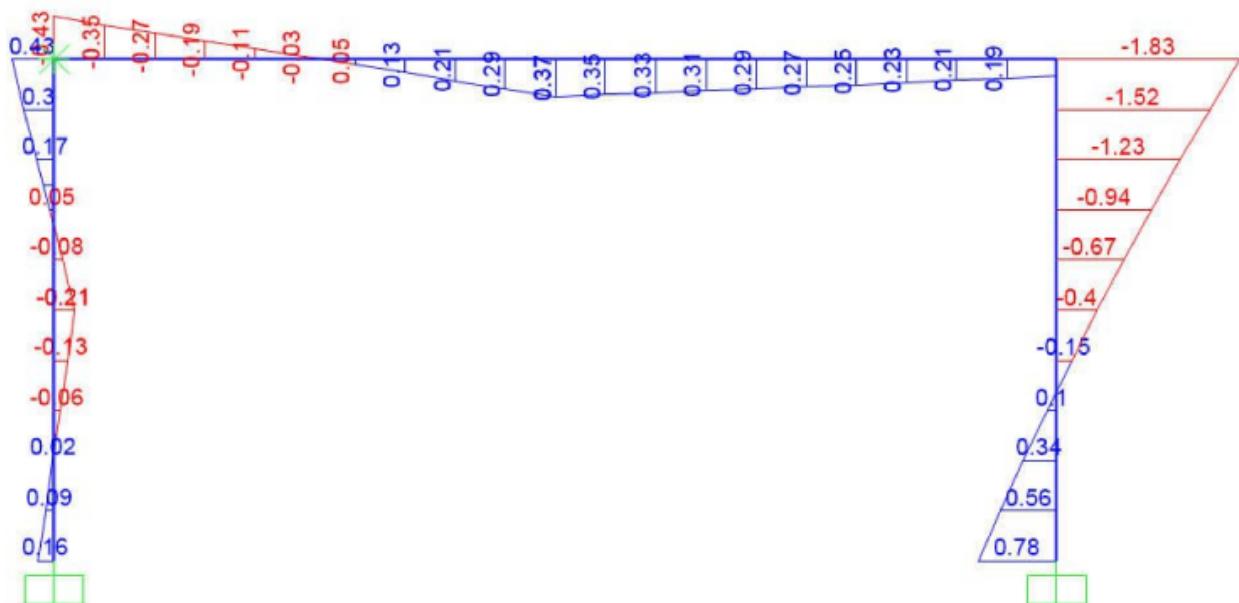
**Hình 4.64.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung

- So sánh kết quả nhận được với kết quả nhận được từ phần mềm SAP2000.

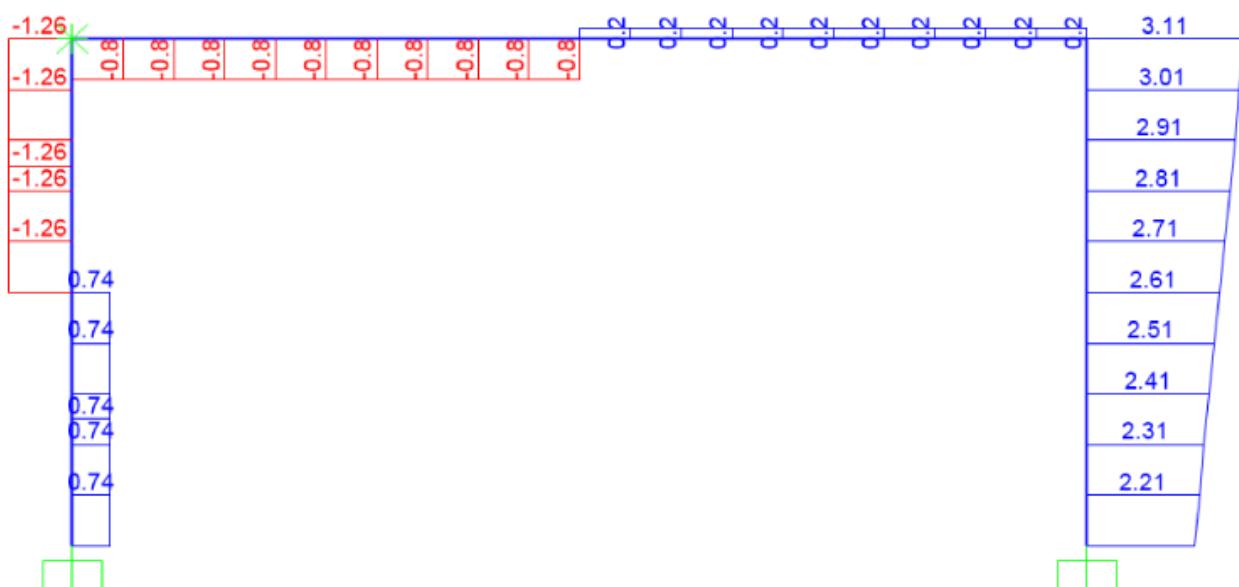
Với các thông số  $L = 1$  m,  $q = 1$  kN/m và  $P = 1$  kN.



**Hình 4.65.** Mô hình kết cấu trong phần mềm SAP2000



**Hình 4.66.** Biểu đồ mô men  $M$  của khung nhện được từ phần mềm SAP2000



**Hình 4.67.** Biểu đồ lực dọc  $Q$  của khung nhện được từ phần mềm SAP2000

c) Chuyển vị đứng và góc xoay tại điểm đặt lực tập trung

- Phần tử (1)

• Chuyển vị đứng:

$$v \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} L$$

$$N_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L}{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8} L$$

Suy ra

$$\begin{aligned} v \left( x = \frac{L}{2} \right) &= [N] \{q\}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{594} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{13}{4752} \frac{qL^4}{EI}} \end{aligned}$$

• Góc xoay:

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_e$$

$$\text{trong đó } [N'] = [N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \quad N'_4]$$

$$N'_1 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 0 - 3 \times \frac{2L}{2L^2} + 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = -\frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{-3}{2L}$$

$$N'_2 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 1 - 2 \times \frac{2L}{2L} + \frac{3 \times L^2}{4 \times L^2} = \frac{-1}{4}$$

$$N'_3 \left( x = \frac{L}{2} \right) = 3 \times \frac{2L}{2L^2} - 2 \times \frac{3L^2}{4L^3} = \frac{3}{L} - \frac{3}{2L} = \frac{3}{2L}$$

$$N'_4 \left( x = \frac{L}{2} \right) = -\frac{2L}{2L} + \frac{3L^2}{4L^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra

$$\frac{dv}{dx} \left( x = \frac{L}{2} \right) = [N'] \{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{594} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\frac{13}{2376} \frac{qL^3}{EI}}$$

- **Phản tử (2)**

**Chuyển vị đứng:**

$$v(x=L) = [N] \{q\}_e$$

trong đó  $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$N_1(x=L) = 1 - 3 \frac{1}{(2)^2} + 2 \frac{1}{(2)^3} = \frac{1}{2}$$

$$N_2(x=L) = L \left( 1 - 2 \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2} \right) = \frac{1}{4} L$$

$$N_3(x=L) = 3 \frac{1}{(2)^2} - 2 \frac{1}{(2)^3} = \frac{1}{2}$$

$$N_4(x=L) = L \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2} \right) = -\frac{1}{4} L$$

Suy ra:

$$v(x=L) = [N] \{q\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{13}{594} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{65}{297} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{-\frac{13}{216} \frac{qL^4}{EI}}$$

• **Góc xoay**

$$\frac{dv}{dx}(x=L) = [N']\{q\}_e$$

trong đó  $[N'] = [N'_1 \quad N'_2 \quad N'_3 \quad N'_4]$

$$N'_1(x=L) = 0 - 3 \times \frac{2L}{(2L)^2} + 2 \times \frac{3L^2}{(2L)^3} = -\frac{6}{4L} + \frac{6}{8L} = \frac{-3}{4L}$$

$$N'_2(x=L) = 1 - 2 \times \frac{2L}{(2L)^2} + \frac{3 \times L^2}{(2L)^2} = 1 - 2 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$N'_3(x=L) = 3 \times \frac{2L}{(2L)^2} - 2 \times \frac{3L^2}{(2L)^3} = \frac{3}{2L} - \frac{3}{4L} = \frac{3}{4L}$$

$$N'_4(x=L) = -\frac{2L}{(2L)^2} + \frac{3L^2}{(2L)^2} = \frac{-1}{4}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(x=L) &= [N']\{q\}_1 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{3}{4L} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4L} & -\frac{1}{4} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{13}{594} \frac{qL^3}{EI} \\ 0 \\ \frac{65}{297} \frac{qL^3}{EI} \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{array}{c} -\frac{13}{264} \frac{qL^3}{EI} \end{array}} \end{aligned}$$

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Chu Quốc Thắng, *Phương pháp phần tử hữu hạn*, NXB Khoa Học và Kỹ Thuật, 1997.
- [2] S. S. Rao, *The finite element method in engineering*, Fifth edition, Elsevier, 2011.
- [3] O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The finite element method*, Volumn 1: The basis, Fifth edition, McGraw-Hill, 2000.
- [4] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1993.
- [5] Đỗ Kiến Quốc, *Giáo trình Đàn hồi ứng dụng*, NXB Đại Học Quốc Gia TPHCM, 2010.
- [6] S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, 1951.
- [7] I. M. Smith, D. V. Griffiths, *Programming the finite element method*, Second edition, John Wiley & Sons, 1988.