1.1 函数

- 1.1.1函数定义
    - 求函数定义域
    - 抽象函数定义域
    - 求函数的表示方法
- 1.1.2 函数的性质
    - 1.1.1.1单调性
    - 1.1.1.2奇偶性
    - 1.1.1.3有界性
    - 1.1.1.4周期性
- 1.1.3 反函数
- 1.1.4 复合函数
- 1.1.5 基本初等函数
    - 5.1 幂函数
    - 5.2 指数函数
    - 5.3 对数函数
    - 5.4 三角函数
        - 图像
        - 性质
        - 特殊角函数值
        - 恒等式
        - 诱导公式
        - 倍角公式
    - 5.5 反三角
    - 三角函数-普林斯顿微积分
        - 三角函数图像
            - sin
            - cos
            - tan
            - 其他
        - 三角恒等式
            - 和与倍公式
    - 1.1.6初等函数
    - 1.1.7精选例题

1.2 极限

- 一 数列极限
    - 1. 数列的定义
    - 2数列极限的定义
    - 3数列极限的性质
    - 4常用数列极限
- 二 函数极限
    - 1当x->x0时,f(x)的极限
        - 定义
        - 存在条件
        - 例题
            - ex1
            - ex2

1.1 函数

1.1.1函数定义

定义域+对应法则 => 值域

D + f = R

```
D : domain 自变量x取值范围
f : function 对应法则,给定x根据对应法则求出y
R : range
当D 与 f完全相同时两个函数表示同一函数
```

判断两个函数是否一致的话, 看2个函数定义域和对应法则是否完全一致

求函数定义域

抽象函数定义域

> 不具体告诉fx表达式

已知f[u(x)]定义域，求f[v(x)]定义域
由x的范围求出u(x)定义域 再等于 v(x)定义域.

- 已知f(x)定义域(0,2] ，则f(x-1)的定义域为(1,3]

```
f(x1): 0< x <=2
f(x2): 0< x-1 <=2
       1< x2 <=3
```

- 已知f(2x-1)定义域为[0,1],则f(x)定义域为____

```
f(2x-1): 已知定义域将端点值代入进去= [-1,1]
f(x):  D-f(x) = [-1,1]
```

- 已知f(x+1)定义域为(0,1],则f(x-1)定义域为___

```
f(x+1)将端点值代入 得出值域(1,2]
f(x-1)的对应法则+值域(1,2] 反推出 定义域 (2,3]
```

求函数的表示方法

- 已知fx的表达式,求f[u(x)]的表达式

已知f(x)=2x,则f(x-1)=__.

```
f(2x-1)
```

- 已知f[u(x)]表达式,求f(x)表达式

f(x+1)=x^2+2x+2则fx=_____

```
换元法
f(x+1)=x^2+2x+2
=x^2+2x+1+1
=(x+1)^2+1

f(x)=x^2+1
```

- 已知f[u(x)]表达式 ，求f[v(x)]表达式

已知f(x-1)=x^2-x,则 f(根x)=

```
f(x-1)=x^2-x
x-1=t
x=t+1
换元代入
=(t+1)^2-(t+1)
=t^2+2t+1-t-1
=t^2+t
将根x代入进
f(根x)=x+根号x
```

1.1.2 函数的性质

1.1.1.1单调性

函数区间内的任意两点x1,x2

```
如果x1<x2,恒有f(x1)<f(x2),函数y=f(x)在该函数区间内单调递增
如果x1<x2,恒有f(x1)>f(x2),函数y=f(x)在该函数区间内单调递减

可导f'(x)>0 增函数
可导f'(x)<0 减函数
```

单调性必须就区间而言

```
定义判断
    1做差f(x1)-f(x2)
    2做商f(x1)/f(x2) (需同号)
求导

图像
我们通常使用函数求导来判断.
```

1.1.1.2奇偶性

- f(x)定义域关于原点对称 //(x∈D,同有-x属于D)

1先看定义域. 偶函数关于y轴对称如y=x^2,也就是类似于 (-∞,+∞)

就是偶函数图像的左(负部分)的关于x轴对称图形

```
如果D内任意点x恒有f(-x)=f(x),则称函数f(x)为D内的偶函数
如果D内任意点x恒有f(-x)=-f(x),则称函数f(x)为D内的奇函数

奇+奇=奇
奇*偶=奇
奇*奇=偶
偶+偶=偶
偶*偶=偶

奇+偶=飞机飞偶
可以把奇函数看作为负数
```

- 判断函数奇偶性一定要以定义域关于原点为前提,若定义域部关于原点对称函数必不是奇函数偶函数
- 以第一天的前提下, 函数图像关于y对称则是偶函数,函数关于原点则是奇函数(可旋转得到)

例题

1.1.1.3有界性

对于y=f(x),若存在M>0,(m有长度)对于该区间任意x恒有|f(x)|<=M则成为有界函数 //-m <= f(x) <= M
有界意味着介于两条线之间,针对于y的值的有界,意味着上界+下届

1.1.1.4周期性

定义域D,存在T>0,对于任意的x属于D,有(x+-T)仍∈D,且恒f(x+-T)=f(x)则y=fx为周期函数,T是函数的fx的周期,最小正数T为最小正周期.

```
sinx,cosx T=2Π
tanx,cotx T=Π
计算方法:
    sin(2x),T= 2pi / 2 = pi
    cos(pi*x),T= 2pi / pi =2
```

1.1.3 反函数

```
反函数求出来后要写上定义域' y=ln(1+x), x∈(1,+∞)
```

```
y=2x+1
f(x): y=2x-1
f^-1(x): y-1=2x -> x=y-1 /2 -> y= x-1 /2
定义域x∈R
```

1.1.4 复合函数

y=f(u), u=g(x);

```
Rg => Df
内函数的值域就是外函数的定义域
```

sin x^2
外函数 sinx
内函数 x^2,
先算内函数再算外函数
```

sin^2 x
外函数是u^2
内函数sinx
```

1.1.5 基本初等函数

> 幂指对三角反三角这5类经过四则或复合形成一个表达式构成初等函数.（未涉及极限）

公式
幂,指

初等函数在其定义域内连续可导

5.1 幂函数

> y=x^u
> Domain随着u变化,u为实数;
> Range(0,+∞)

```
y=x的图象是一条斜线k斜率为45°
y=x^2是一条开口向上抛物线,左右关于y轴对称
y=x^3和x^2抛物线基本类似,左边图像由于立方可以为负所以关于x对称
```

5.2 指数函数

```
D(-∞,+∞)
R(0,+∞)
指数函数图像过(0,1). 任何数的x===1
                                    左(0<a<1), 右(a>1)
```

5.3 对数函数

性质

```
y=log,a,x(a>0,a!=1)
D(0,+∞)
R(无穷)
a>1:函数单调递增
0<a<1:函数单调递减
```

常用公式

```
lg==log,10;
ln==log,e; //(e≈2.718)

e^ ln(x) = x
```

例

5.4 三角函数

```
y=sinx,cosx
    D(∞),R[-1,1]
y=tanx
    D(x∈R,x!=pi/2 + K*pi),R(∞)
y=cosx
    D(x∈R, x !=k*PI)
```

图像

性质

```
sinx是奇函数,cosx是偶函数. 有界函数[-1,1]他们又是周期函数,周期为2PI
tanx=sin/cos(奇/偶)=奇函数,cot=cos/sin=奇函数, 他们都是无界函数,以PI为周期
```

特殊角函数值

恒等式

诱导公式

```
什么是诱导公式:
    将非特殊三角函数值转换为特殊三角函数值
            sinθ=(α+k·π/2)  (cos同理)
            奇变偶不变, 符号看象限
            k的值为奇/偶=>函数相应的要改变为sin, cos
            再根据原角度确定符号
            sin 〖〖210〗^0 〗=30+2·π/2=-sin〖〖30〗^0 〗
            sin 〖〖290〗^0 〗=20+3·π/2=-cos30
```

倍角公式

5.5 反三角

```
arcsinx
    y=sinx在区间[-PI/2 , PI/2]上的反函数,
    D=[-1,1]
    R=[-PI/2 , PI/2]
arccosx
    y=cosx在区间[0,PI]上的反函数
    D[-1,1]
    R[0,PI]
arctanx
    y=tanx在区间(-PI/2,PI/2)上的反函数
    D=(-∞,+∞)
    R=(-PI/2,PI/2)
arccotx
```

```
y=cotx在区间(0,PI)内反函数
```

图像

偶函数图像关于y对称,所以以上4都不是偶函数
(对于函数定义域内的任意一个x，若f(-x)=-f(x)（奇函数）和f(-x)=f(x)（偶函数）都不能成立，那么函数f(x)既不是奇函数又不是偶函数，称为非奇非偶函数。)

三角函数-普林斯顿微积分

首先抛弃掉关于度数的概念转变为弧度,并将常用的弧度进行转换在你脑中联系几次
pi = 180, pi/2 = 90, pi/3=60 pi/4=45, pi/6=30这些基本够了.

一个基本的公式的话

三角函数值

函数在象限内的正负

```
A一象限 all
S二象限 sin
T3?象限 tan
C四象限 cos

在Kπ/2中如果K为偶数时函数名不变，若为奇数时函数名变为相反的函数名。正负号看原函数中α所在象限的正负号。
```

三角函数图像

sin

cos

tan

其他

sec
csc
cot
其中cosx是偶函数其他是奇函数

三角恒等式

毕达哥拉斯

```
cos^2 x + sin^2 x =1
```

分开除以sin | cos将推广2个新的公式

和与倍公式

(⚠符号)

A+B 表示两个不同角和的三角函数值,那么如果AB相同得到就是倍角公式: (其中cos2a = cos^2a - sin^2a).z
再利用毕达哥拉斯 sin^2+cos^2=1 >> sin^2 = 1-cos^2; cos^2 = 1-sin^2得到

1.1.6初等函数

> 幂指对三角反三角这5类经过四则或复合形成一个表达式构成初等函数

初等函数在其定义域内必连续且可导

1.1.7精选例题

1.2 极限

一 数列极限

1. 数列的定义

$$x_1, x_2 \ldots x_n$$

其中xn为数列通项(一般项)

2数列极限的定义

$$当n \to \infty时数列趋向于一个确定的数字C$$
$$C为数列x_n的极限值limit - vlaue$$
$$\lim_{n \to \infty} x_n = C$$

有极限则称为 **收敛**, 无极限则称为 **发散**

3数列极限的性质

- 1 (唯一性) 收敛数列的极限必定唯一
- 2 (有界性) 收敛数列必定有界
- 3 (保号性) 极限存在时一定有N当n>N时 数列值xn大于或小于0
  - 推论: 从某项起 xn大于等于 0 且极限存在,则极限值大于0.(数列的某一项大于零极限值大于0)
  - 推论: 从某项起xn>0, 且极限值=A,则A大于等于0

  若数列极限=A,则对于任意子数列的极限都=A
  若数列极限有一个不存在则数列极限不存在

4常用数列极限

- 1 等比数列

(|q|<1类似于分数之类的)

$$\begin{aligned}&\text{数列}: 1, q, q^2 \dots q^n \\ &= \lim_{n\to\infty} q^n \\ &= 0\end{aligned}$$

- 2当a>0,lim 1/ n^a=0

$$\lim_{n->\infty} 1/n = 1/\infty = 0$$

- 3 lim n√a = 1

$$\lim_{n->\infty} a^(1/n) = a^0 = 1$$

- 4 lim n√n

$$lim n^1/n = \infty^(1/\infty) = \infty^0 = 1$$

二 函数极限

1当x->x0时,f(x)的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

例如f(x)=x+1, 当x->1时可以从图像看出fx趋近2所以

$$\lim_{x\to 1} f(x) = x + 1 = 2$$

以x0为中心的开区间称为x0的邻域,记作U(x0),去掉x0点成为x0的去心邻域.

定义

左右极限

存在条件

左=右=fx, 否则极限不存在

例题

ex1

虽然x在x=1点无定义,但是极限值于函数值点有无定义无关. 所有极限值 f(x)=x+1
极限的定义是极限值很接近的一个值但是没有到达.

ex2

判断函数x->0时极限是否存在

2当x->∞时,f(x)的极限

例如当函数Fx=1/x,当x->∞从函数图像看limx->-∞=0,limx->∞=0. 所以

3函数极限的性质

唯一性: 极限存在且唯一
有界性:
局部保号性: 极限值>0那么趋近过程就一定大于0
四则运算:

夹逼准则

> 如果对于x0某一去心邻域内的一切x都有
> 1, g(x) <= f(x) <= h(x)
> 2, lim g(x) = lim h(x) = A
> 则
>   lim f(x)=A

4函数求极限

1-普通:代入直接求极限

2-分式根式:有理化或者通分

```
ans: -1,2

a^2-b^2=(a+b)(a-b)
a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)

有理化是指同时乘以分子或分母的共轭表达式(好像是这么个名字我从普林斯顿微积分看到的)
```

3-高次项:抓大头

```
低/高 = 1/∞ = 0
高/低 = ∞/1 = ∞
同阶 = 系数之比
```

三 无穷大 无穷小

1定义

> 函数极限为0则称函数为x->x0时无穷小亮
> lim f(x)= 0

```
lim sinx=0
x->0
lim 1/x=0
x->∞
```

> 函数极限为∞,则称无穷大
> lim f(x)=∞

2无穷之间的关系

> 1/无穷小 = 无穷大
>   1/0 = ∞
> 1/无穷大 = 无穷小
>   1/∞ = 0

3性质

> 1有限个无穷小代数和仍时无穷小 （推到得有限个积也一样）
> 2有界函数x无穷小 = 无穷小
> 3常数*无穷小=无穷小

```
但是无无限个无穷小量的代数和未必是无穷小
lim (1/n + n/1 ... 1/n) = n/n = 1
n->∞        n个
无穷小的商也未必
n->0 lim 3x/x =3
```

例题

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sinx}{x} = \frac{1}{x} * sinx = 无穷小 * 有界函数 = 无穷小 = 0$$

4无穷小的比较

> 设lima(x)=0,limb(x)=0
> 更高阶就是指更小,趋近于零更快.也就是他的次数越高肯定他的阶越高

在这个地方迷了很久,焯!!!
首先这个是在x->0的情况下去比较,所以说抓大头就不能用了.
举个栗子: x^3 / x^2 =? 首先可以直观的看出这个分子的次数是3比分母要高,所以他就a是b的高阶无穷小.
?这个地方怎么做呢?
tmd我是个伞兵, 这就是简单的消消乐啊!

```
x^3 / x^2 = x, lim x->0
所以 x=0,结果=0. 于是a就是b的高阶无穷小

lim x^2 / x^3 =  1/x = 1/0 = 无穷 a是b的低阶无穷小
x->0
```

5 ☆常见的无穷小

> 无穷小的等价替换只能用于x->0时,乘除求极限:
> ln(1+x)~x
> e^x-1~x, a^x-1~xlna
> sinx~x, tanx~x, arcsinx~x, arctanx~x
> (1+x)^a -1 ~ ax
>
> 'loga(1+x)~ (1/lna)x (a>0,a!=1)'

上述条件的x->0,可替换成任意的 ■ 只要->0

例题

> 如果分母=0,分子非0
> 　　直接断定1/0,极限为∞不存在

四 ✌个重要极限

1. sinx/x=1

当x->0时,

> 当x->0时, sin🐕/ 🐕 = 1,这个🐕可以是任何无穷小的表达式
> 但是请注意!当x->∞时情况变得不一样了:

2. (1+ 1/x)^x = e

> 仔细看的话这两个公式是一样的:
> 　　lim (1+[无穷小])^∞ = e
> 　　就是1^∞型求极限

可以通过一些题目来练习这个极限的使用方法非常简单

> 有一个通用的解法:
> 　　1先看x趋近方向的极限:这道x->∞,那么1+ 1/∞.题目符合条件
> 　　2lim(1+🐕)^[(1/🐕)x🐕x原指数]
> 　　3就是说,指数部分先*🐕的位置的倒数,再乘以🐕再乘原来的指.
> 　　红圈部分里面值就是e
> 再做道题试一下

还有一道1^∞型,比较好.

(题目总结)

1 fx极限,数列极限

> 分解因式/有理化

2 ∞/∞

> 抓大头就完事了.
>   低/高 = 0
>   高/低 = 无穷
>   同次 = 系数之比

3 利用无穷小的性质

> 无穷小*有界函数 = 无穷小

$$\lim_{x \to 0} x * cosx = 0$$

> 等价无穷小只能用于乘除间的极限运算

4 重要极限

> 关于多次

5 数列

> (首+尾)x项数 x 1/2 = 等差数列求和

6 求极限参数

> 已知,求P=__

> 已知.求A

> 已知求a

这道题的好像能反过来求就是我们已知a了,在求出极限值. 作业帮有类似题目但是我做不出来.如果你可以请提交pull request 或者issue

```
洛必达!!!
```

1.3 连续

把时间当作朋友

[]: