QuantAkt

DAV/DGVFM
Herbsttagung
2021

Nicht nur Glückssache!

Die kluge Wahl von Monte Carlo Samples

DAV
DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

DGVFM
DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR VERSICHERUNGS- UND FINANZMATHEMATIK e.V.

Herbsttagung von DAV und DGVFM, 15./16.11.2021

Der Ausgangspunkt: Ein kleines(!) Problem

- Projekt: Unterstützung bei der Erweiterung des internen Modells eines Kunden um eine neue Risikokategorie
  - Komplexes Modell: Mit Grossschäden, hochdimensional durch viele Risikofaktoren und Legal Entities, wichtige Tailabhängigkeiten.
- Nach Modellierung und erfolgreicher Validierung stand einzig die Integration in das übergreifende Modell der Gruppe aus.
- Das Problem: Das Gruppenmodell verarbeitete nur Samples mit 10‘000 Szenarien …. unser Modell brauchte aber 1Mio!
  - Die Genauigkeit von Monte Carlo Simulationen ist proportional zur Grösse des Samples. Ein Faktor 100 bei der Grösse bedeutet einen Faktor 100 in der Varianz der Ergebnisse.
- Was tun?

Die Lösung: Ein «gutes» Sample finden!

- Gesucht ist ein kleines Sample (mit N=10’000), welches das grosse Sample (mit N=1Mio) «gut» widerspiegelt.
  - Zwei Fragen: 1)Was bedeutet «gut» genau? 2)Wie findet man solch ein Sample?

1. Ein kleines Sample ist «gut» wenn es die wichtigen Features des grossen Samples mit geringer Abweichung reproduziert!
   - Features sind Funktionen der Samples: z.B. ein Mittelwert oder eine Korrelation oder die Wahrscheinlichkeit eines Grossschadens in einer Legal Entity.
   - Das Feature wird sowohl für das grosse als auch das kleine Sample berechnet, die quadrierte Differenz ist die Abweichung bzw. der Fehler.
2. Man kann ein gutes kleines Sample z.B. per «Versuch&Irrtum» finden:
   - Wähle aus dem grossen Sample zufällig ein kleines aus
   - Berechne die Features und bestimme den Fehler
   - Wiederhole das z.B. 1’000 mal
   - Verwende dann das Beste der getesteten 1’000 kleinen Samples

Kann man noch mehr erreichen?

- Mit dem Verfahren konnte das damalige Problem gelöst werden.
- Aber diese Anwendung ist etwas untypisch, da alle interessanten Grössen durch das grosse Sample schon genau bekannt waren.
  - Normalerweise möchte man eine/mehrere Zielgrössen bestimmen, deren genauen Wert man gerade NICHT schon vorab kennt!
- Funktioniert dieser Ansatz auch bei nicht vorab bekannten Zielgrössen?
  - Falls eine Funktion nicht explizit bekannt oder sehr schwierig zu berechnen ist kann sie nicht als Feature dienen!
  - Daher muss man Features finden, die sich leicht berechnen lassen und mit diesen Szenarien zur Simulation gezielt auswählen.
  - Frage: Verbessert sich dann auch die Konvergenz für die «schwierigen» Zielgrössen?
  - Frage: Kann man durch die Selektion sogar den Fehler vergrössern?

Das Hull-White Modell

- Vorschlag: Einfach mal ausprobieren in einem Labormodell!
- Hull-White: Stochastisches Zinsmodell
  - Risikofaktoren x bestehen aus jährlichen Shortrates $r(1), \dots, r(T)$ und kumulierten Shortrates $Y(1), \dots, Y(T)$ mit $T = 30$
  - $x = (r, Y)$ haben eine multivariate Normalverteilung
  - Erwartungswertvektor und Covarianzmatrix sind Ergebnis der Kalibrierung (gemäss DAV) und explizit bekannt
  - Einsatzgebiete: Bestimmung der Preise von Zinsinstrumenten und marktkonsistente Werte von zinssensitiven Verpflichtungen
- Preis bzw. marktkonsistenter Wert eines Cash-Flow ist der Erwartungswert des diskontierten Cash-Flows f unter der Verteilung des HW-Modells

$$\text{Preis} = \mathrm{E}_{HW \sim X}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^{60}} f(x)\, dHW(x)$$

Integrale und Designs

- Selbst in einfachen Modellen sind Integrale meist nicht explizit lösbar.
- Oft haben noch nicht einmal die Zielfunktionen eine explizite Darstellung.
- Lösung: Approximation durch empirische Masse

Punkte:	Masse:	Integrale:
Alle $x \in \mathbb{R}^{60}$	Hull-White Mass: $dHW(x)$	$\int_{\mathbb{R}^{60}} f(x)\, dHW(x)$
↓	↓	↓
Design: $x_1, \dots, x_n$	empirisches Mass: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

- Ein *Design* ist eine Menge von Punkten/Szenarien zur Integration

Ein erstes Experiment zum warm werden!

Design:

- iidsample Monte Carlo Sample mit n=250

Zielfunktionen:

- inibond: 30-jähriger Zerobond
- atmswaption: Option auf einen At-the-Money Swap
- otmcall: Out-of-the-Money Call auf einen Bond (mit 90% Ablauf zu Null)
- ultgarant: Garantie (0%) auf den Bank-Account zum Ablauf nach 30 Jahren
- bmomentum: Selbstfinanzierende Bondtradingstrategie. Investiere jedes Jahr in den Bond der im Vorjahr die bessere Rendite hatte.

Ein erstes Experiment zum warm werden!

Vergleichsgrösse für den Fehler

- relMSE: relative Mean Square Error
- Square Error:

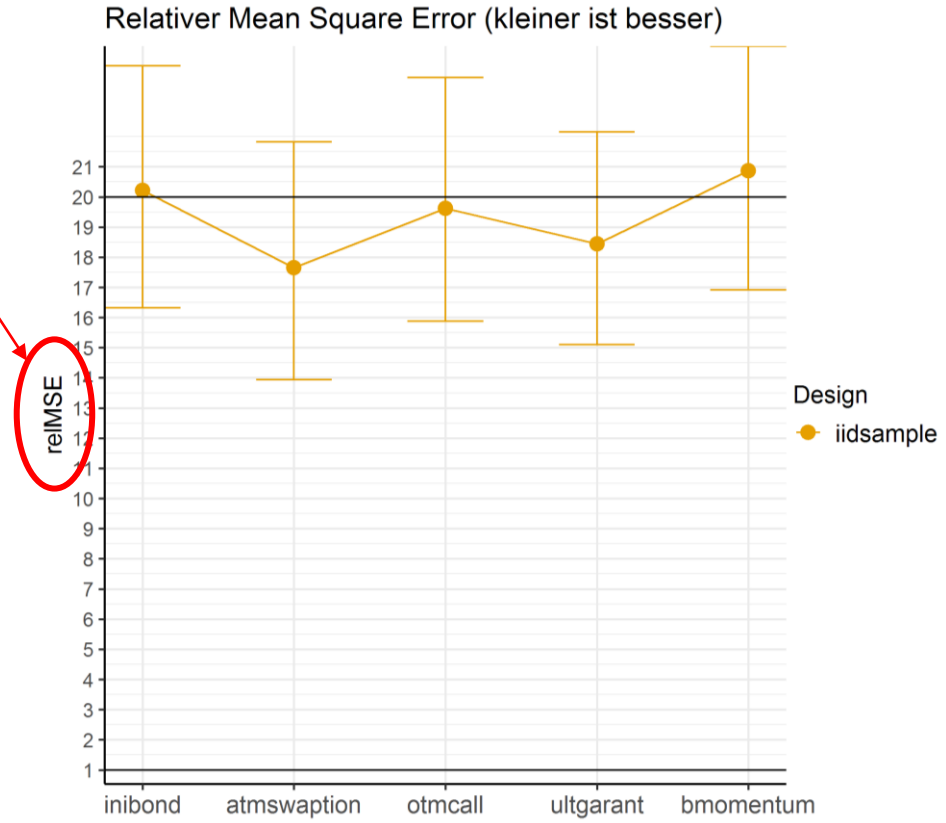
$$SE = \left(\text{Exakt} - \frac{1}{250} \sum_{i=1}^{250} f(x_i) \right)^2$$

Exakt: Analytisch oder sehr grosses MC

- Mean: gemittelt über verschiedene Runs
- relative: Mean Square Error relativ zu einem grossen Sample mit N=5'000.

- relMSE=20 bedeutet:

  Im Mittel ist der quadratische Fehler bei der Integration 20 mal so gross wie der eines iid-Monte Carlo Samples mit N=5'000.



Ein erstes Experiment!

Vergleich von drei Designs

iidsample:

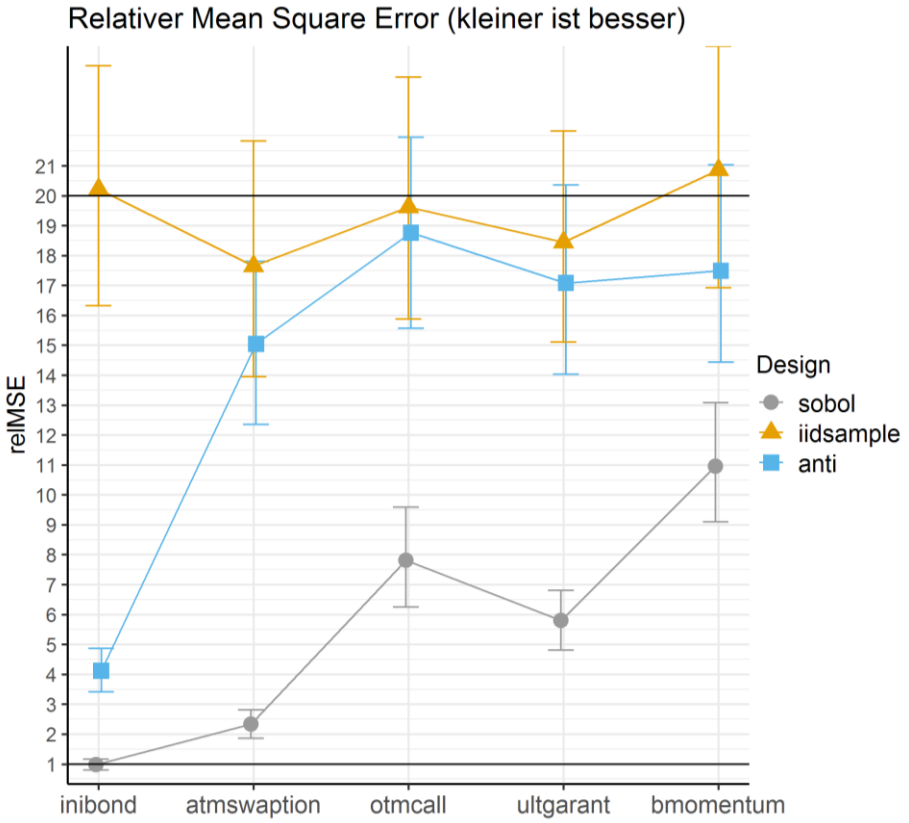
- einfaches Monte-Carlo Sample
- relMSE entspricht für alle Targets etwa dem Verhältnis der Samplegrössen also 5'000 / 250 = 20.

anti:

- Antithetisches Sample
- Verbesserung für inibond ansonsten aber weitgehend wie iid.

sobol:

- Sobol[1)] Quasi-MonteCarlo Zahlen, randomisiert.
- klare und erhebliche Verbesserung der Fehler.
- Effizienz hängt aber deutlich vom Target ab.



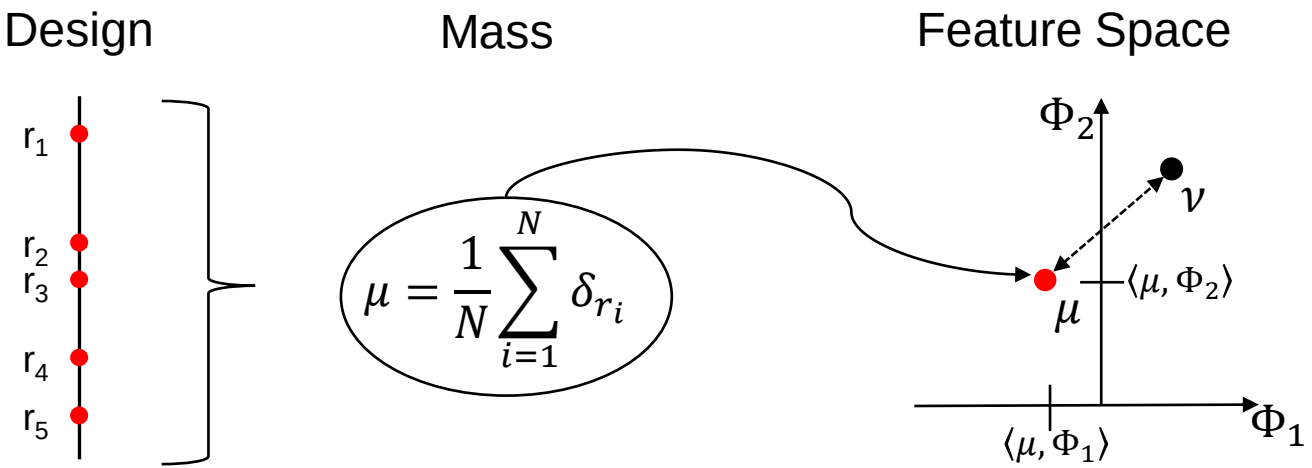
1) Funktion `sobol` in der R-Bibliothek «`randtoolbox`»

Features im Beispiel

- Erstes Beispiel: Verwendung von zwei einfachen Features
  - Fokus auf einen einzigen Risikofaktor r (z.B. Shortrate im Jahr 15)
  - Definition der beiden Features: $\Phi_1(\mathrm{r}) = \mathrm{r}$ und $\Phi_2(\mathrm{r}) = \mathrm{r}^2$
- Jedem Design $r_1, \ldots, r_N$ werden seine Werte der Features zugeordnet
  - Ein Design wirkt durch Integration mit seinem empirischen Mass $\mu = \frac{1}{N}\sum \delta_{r_i}$
  - $\langle \mu, \Phi_1 \rangle = \frac{1}{N}\sum r_i$ empirisches Mittel des Designs
  - $\langle \mu, \Phi_2 \rangle = \frac{1}{N}\sum r_i^2$ zweites empirisches Moment des Designs
- Per Werte der Features lassen sich so je zwei Designs vergleichen:
  - z.B. «grosses» Design μ mit einem «kleinen» Design ν mit Punkten $r_1', \ldots, r_n'$.
  - *Diskrepanz* (oder Fehler) zwischen μ und ν ist die Wurzel aus

$$\left(\langle \mu, \Phi_1 \rangle - \langle \nu, \Phi_1 \rangle \right)^2 + \left(\langle \mu, \Phi_2 \rangle - \langle \nu, \Phi_2 \rangle \right)^2$$

Der Feature Space



- Der *Feature Space* wird aufgespannt durch die Features
  - Integrale der Features sind die Koordinaten im Feature Space
  - Die Abbildung eines Mass auf einen Punkt im Feature Space heisst *Kernel Mean Embedding*
- Die *Diskrepanz* zweier Designs ist ihr Abstand im Feature Space

Der Kernel

- Der *Kernel* eines Feature Space ist das Skalarprodukt der Punktmassen bzw. der Features
- Im Beispiel $$K(r, r') = \langle \delta_r , \delta_{r'} \rangle = \Phi_1(r) \cdot \Phi_1(r') + \Phi_2(r) \cdot \Phi_2(r')$$
$$= r \cdot r' + r^2 \cdot r'^2$$

- Der Kernel kodiert alle Eigenschaften des Feature Space
- Räume von Funktionen, die einen Kernel besitzen, nennt man *Reproducing Kernel Hilbert Spaces*.

Wieviele Features sind möglich?

- Im ersten Beispiel gab es zwei Features für erstes und zweites Moment

$$\Phi_1(r) = r \qquad \Phi_2(r) = r^2$$

- Warum sollte man nicht ALLE Momente kontrollieren?
- Kernel für zwei Momente: $K(r, r') = r \cdot r' + r^2 \cdot r'^2$
- Kernel für ALLE Momente

$$K(r, r') = 1 + r \cdot r' + \frac{1}{2!} r^2 \cdot r'^2 + \frac{1}{3!} r^3 \cdot r'^3 + \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(r \cdot r')^m}{m!} = \exp(r \cdot r')$$

- Die Gewichtung mit $\frac{1}{m!}$ sichert die Konvergenz.

Der Kernel-Trick

- Unendlich viele Features bedeutet unendlich dimensionaler Feature Space
  - Für die praktische Berechnung der Diskrepanz stört das aber gar nicht
- Die Diskrepanz zwischen Designs $r_1, \dots, r_N$ (μ) und $r_1', \dots, r_n'(\nu)$ bezüglich aller Momente ist gegeben durch Summen über Kernelauswertungen

$$\|\mu - \nu\|^2 = \langle \mu - \nu, \mu - \nu \rangle = \langle \mu, \mu \rangle - 2\langle \mu, \nu \rangle + \langle \nu, \nu \rangle$$

$$\langle \mu, \mu \rangle = \left\langle \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{r_i}, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{r_j} \right\rangle = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left\langle \delta_{r_i}, \delta_{r_j} \right\rangle = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \exp\left(r_i\, r_j\right)$$

$$\langle \mu, \nu \rangle = \frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(r_i\, r_j'\right) \qquad \langle \nu, \nu \rangle = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(r_i'\, r_j'\right)$$

- Fazit: Die Diskrepanz zwischen zwei Designs lässt sich auch für unendlich dimensionale Feature-Spaces schnell und effizient berechnen!
  - Siehe Code-Beispiel in https://github.com/QuantAkt/minimal-working-example

Momente als Features

quadratic:

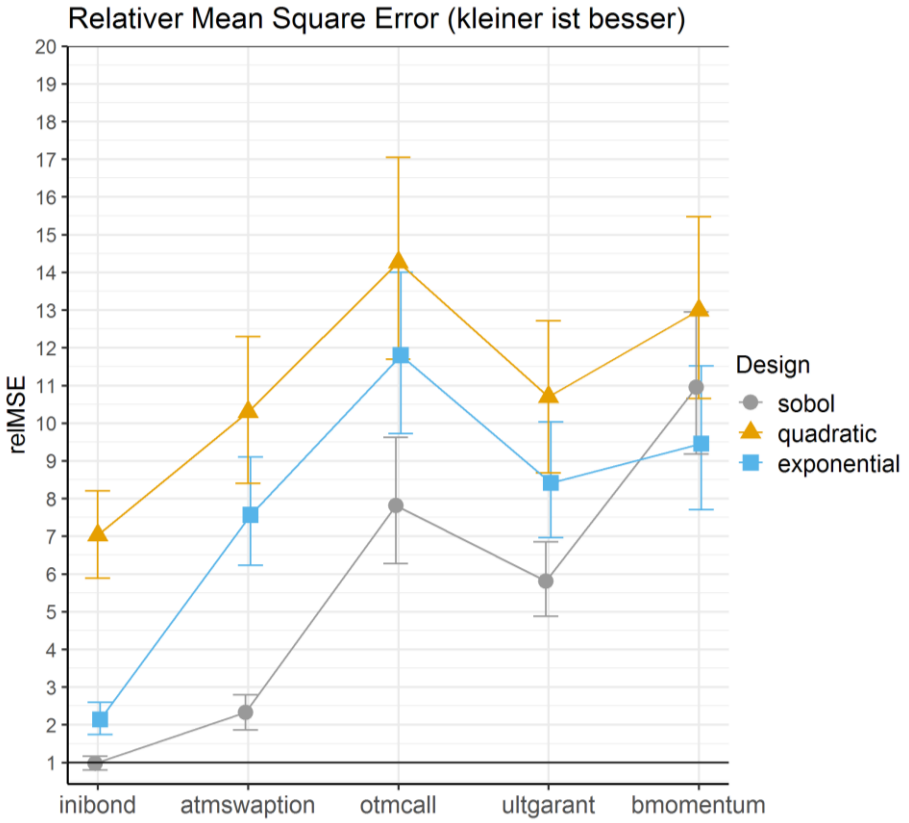
- Der Kernel ist $K(x,y) = (1 + x^T y)^2$
- Enthält auch Interaktionen zwischen Risikofaktoren.

exponential:

- Der Kernel ist $K(x,y) = \exp(x^T y)$

Beide Kernel sind für alle Risikofaktoren definiert.

Auswahl wieder durch «Versuch&Irrtum».



MMD: Maximum Mean Discrepancy

- Der Abstand im Feature Space $\mathcal{F}$ ist ein Worst Case Integrationsfehler!

$$\|\mu - \nu\| = \max_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \|f\| \leq 1}} \int f \, d\mu - \int f \, d\nu$$

- Daher wird der Abstand *Maximum Mean Discrepancy (MMD)* genannt
- Da der Worst Case den Integrationsfehler für ALLE Funktionen aus dem Feature Space begrenzt, erlaubt MMD klare Antworten für welche Funktionen der Fehler kontrolliert werden kann:

$$\text{Für alle } f \in \mathcal{F}\text{: } \left| \int f \, d\mu - \int f \, d\nu \right| \leq \|f\| \cdot MMD(\mu, \nu)$$

Aggressive Optimierung und Kernel-Engineering

Kernel-Engineering: Wahl des Kernels motiviert durch den Feature Space.

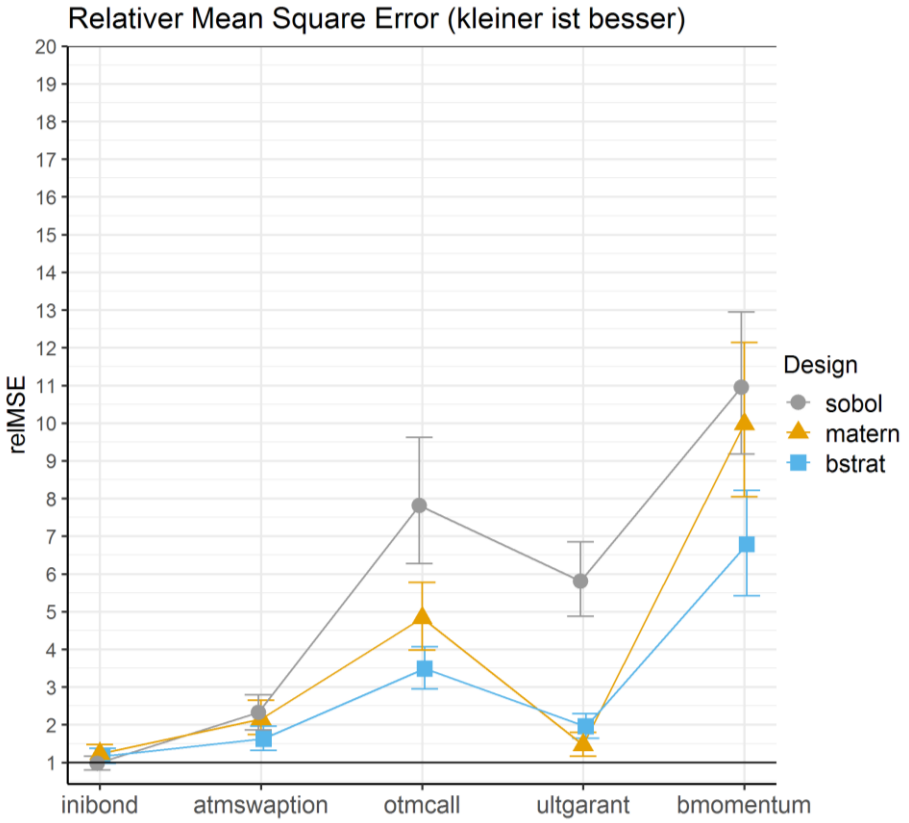
Zusätzlich: «Greedy» Auswahl des Design.

matern:

- Oft genutzter Standardkernel[1)] daher Einsatz out-of-the-box möglich
- Feature Space enthält stetige beschränkte Funktionen

bstrat:

- Feature Space aufgespannt durch Bond-Tradingstrategien



1) siehe z.B. sklearn.gaussian_process.kernels.Matern

Zusammenfassung

- Auswahl mit Features bzw. Kernen kann die Qualität von Samples/Designs signifikant verbessern!
- Die Methode ist völlig generisch, sie funktioniert für beliebige Verteilungen oder Modelle.
- Da die Auswahl einfach mit einem grossen Design beginnt, können die zu Grunde liegenden stochastischen Modelle bzw. die Szenario-Generatoren unverändert verwendet werden.
- Wissen über Zielfunktionen kann durch Kernel-Engineering gezielt eingebracht werden.
- Fehlerabschätzungen ermöglichen Konvergenzaussagen und schaffen so ein solides mathematisches Fundament.
- Methodische/Technische Synergien mit Machine-Learning Ansätzen wie Gauss-Prozess-Regression oder Bayesscher Optimierung.

Literatur

Hier eine erste Übersicht. Ich gebe gerne detailliertere Hinweise auf Anfrage.

- Wikipedia
  - Kernel Method https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_method
  - Kernel Mean Embedding https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_embedding_of_distributions
- Übersichtsartikel zu Kernel Mean Embeddings
  - Kernel Mean Embedding of Distributions: A Review and Beyond https://arxiv.org/abs/1605.09522
- Wissenschaftliche Artikel
  - «Super-Samples from Kernel Herding» von Chen, Yutian and Welling, Max and Smola, Alex in Proceedings of the Twenty-Sixth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence oder als https://arxiv.org/abs/1203.3472
  - "Construction of Optimal Cubature Algorithms with Applications to Econometrics and Uncertainty Quantification" von J.Oettershagen, PhD thesis, University of Bonn, 2017. https://ins.uni-bonn.de/media/public/publication-media/diss_oettershagen.pdf
- Code (minimal working example)
  - https://github.com/QuantAkt/minimal-working-example

Kontakt

QuantAkt

guido.gruetzner@quantakt.com

https://www.linkedin.com/in/guido-gruetzner

Gerne können sie mich bei allen Fragen völlig unverbindlich kontaktieren. Insbesondere wenn sie das einfach mal bei sich ausprobieren, würden mich ihre Erfahrungen interessieren!