

Mini-Projet Etude et application de quelques schémas aux différences finies pour deux lois de conservation

AMECK GUY-MAX DESIRE DOSSEH & RIM ELMGHARI

2024-02-04

On souhaite étudier, appliquer et voir le comportement de quelques schémas aux différences finies pour deux équations relevant de lois de conservation 1D définies sur un domaine $\Omega = [0, L]$.

1. Equation de transport

On considère l'équation de transport soumise à des conditions aux limites periodiques:

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) ; \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

1) A l'aide de la methode des caracteristiques, determiner la solution exacte $u(x, t)$ du probleme (E_1) .

Nous allons chercher une courbe caractéristique $\Gamma((t(s), x(s)))$, s étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} \right) \end{aligned}$$

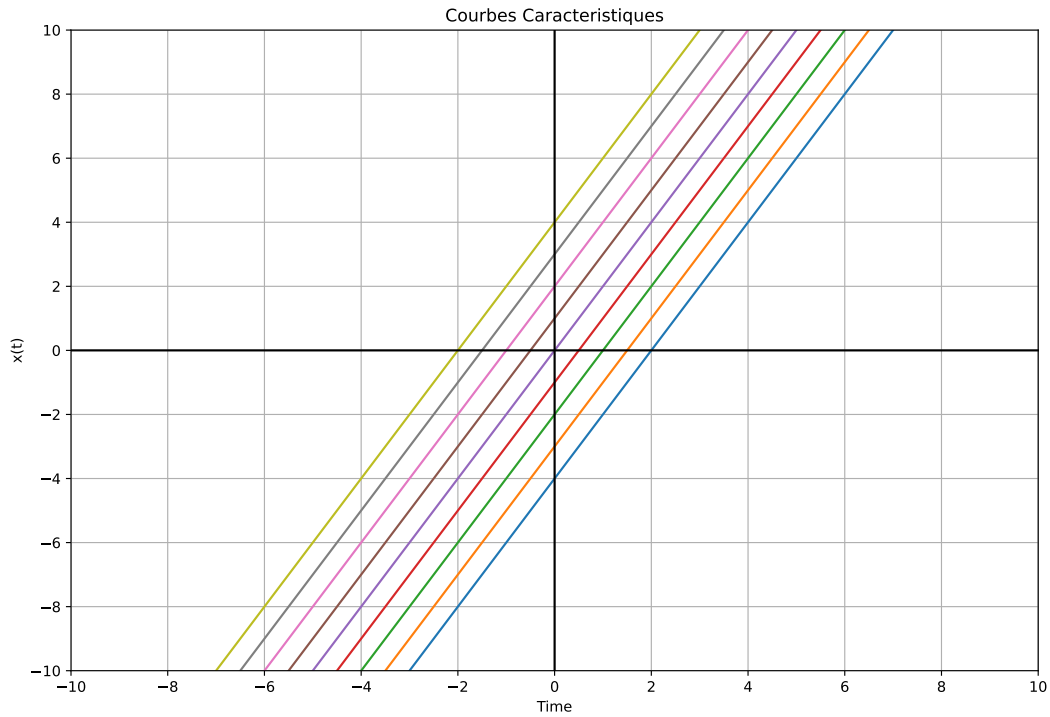
On voit que si on impose $\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} = 0$, on a $\frac{du}{ds} = 0$, c'est à dire que u est constant le long de la courbe caractéristique.

On a donc le système d'EDO suivant a resoudre:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \text{ qui donne la courbe caractéristique } \Gamma \\ \frac{du}{dt} = 0 \text{ qui donne la solution } u(x, t) \text{ sur cette courbe caractéristique} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques:

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ donne } x(t) = at + \xi (\text{avec } \xi \text{ une constante réelle d'intégration})$$



Solution

Sur chaque courbe caractéristique (Γ) : $x - at = \xi$, on a:

$$du = 0 \Rightarrow u(x, t) = cte = f(\xi) \leftarrow \text{i.e. } u \text{ ne depend que de } \xi$$

Soit alors

$$u(x, t) = f(x - at)$$

Cette solution doit etre retrouvee aussi pour $t = 0$.

Or a $t = 0$, on a:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = u_0(x)$$

c'est a dire

$$f \equiv u_0$$

On obtient finalement la solution exacte du probleme (E_1):

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall t > 0$$

On discretise l'intervalle $[0, L]$ en $(N - 1)$ sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, N - 1$) de tailles egales Δx ($\Delta x = \frac{L}{N-1}$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$), et on note par u_i^n la solution approchee au noeud x_i a l'instant $t^n = n\Delta t$ (Δt etant le pas de chnage).

2) Etudier la consistance, la stabilite et la convergence de chacun des schemas numeriques suivants:

Schema 1 (centre):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le developpement de Taylor pour evaluer la consistance du schema. On a:

- D'une part le developpement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

- Et d'autre part le developpement de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

On obtient alors le schema numerique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Par definition de la consistance, Un schema est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}((\Delta x)^2)| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 1 centre est consistant.

• Stabilité

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\ &\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\xi\Delta x) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} i \sin(\xi\Delta x)) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x))^n C^0 \end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned} |1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\ 1 + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \text{ (ce qui est absurde)} \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 1 centre est instable.

- **Convergence**

En utilisant la contraposée du théorème de Lax, on a :

Le schéma 1 centre n'est pas stable, donc il n'est pas convergent.

Schema 2 (decentre):

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a < 0\end{aligned}$$

- **Cas $a > 0$**

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a :

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)\end{aligned}$$

+ Et d'autre part le développement de Taylor de u_j^n et u_{j-1}^n à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}u_j^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)\end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est :

$$\begin{aligned}\text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)\end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit :

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en amont est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi (j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a \frac{1 - e^{-i\xi \Delta x}}{\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\ &\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi \Delta x}) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi \Delta x})) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \lambda(1 - e^{-i\xi \Delta x})) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - \lambda(1 - e^{-i\xi \Delta x})| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
& |1 - \lambda(1 - e^{-i\xi\Delta x})|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda(1 - (\cos(-\xi\Delta x) + i\sin(-\xi\Delta x)))|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda(1 - \cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x))|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda + \lambda\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)|^2 \leq 1 \\
& (1 - \lambda + \lambda\cos(\xi\Delta x))^2 + (\lambda\sin(\xi\Delta x))^2 \leq 1 \\
& 1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2\cos^2(\xi\Delta x) + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) + \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x) \leq 1 \\
& 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 1 \\
& 2\lambda^2 - 2\lambda + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda^2 - \lambda + (1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda(\lambda - 1)(1 - \cos(\xi\Delta x)) \leq 0
\end{aligned}$$

Or $\lambda > 0$ et $1 - \cos(\xi\Delta x) \geq 0$, on doit donc avoir:

$$\begin{aligned}
\lambda - 1 & \leq 0 \\
\lambda & \leq 1 \\
\lambda & = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 2 décentré en amont est stable si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

- **Convergence**

Le schéma 2 décentré étant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le théorème de Lax sous les mêmes conditions de stabilité, on déduit que le schéma 2 décentré en amont ($a > 0$) est convergent.

- **Cas $a < 0$**

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\
\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)
\end{aligned}$$

- Et d'autre part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_j^n à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\
u_j^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\
\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x)
\end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par définition de la consistance, un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en aval est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi (j+1) \Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j \Delta x} + a \frac{e^{i\xi \Delta x} - 1}{\Delta x} C^n e^{i\xi j \Delta x} = 0 \\
&\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{i\xi \Delta x}) C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - \lambda(1 - e^{i\xi \Delta x})) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a \Delta t}{\Delta x}
\end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - \lambda(1 - e^{i\xi \Delta x})| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|1 - \lambda(1 - e^{i\xi \Delta x})|^2 &\leq 1 \\
|1 - \lambda(1 - \cos(\xi \Delta x) + i \sin(\xi \Delta x))|^2 &\leq 1 \\
|1 - \lambda + \lambda \cos(\xi \Delta x) - i \lambda \sin(\xi \Delta x)|^2 &\leq 1 \\
(1 - \lambda + \lambda \cos(\xi \Delta x))^2 + (\lambda \sin(\xi \Delta x))^2 &\leq 1 \\
1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2(\xi \Delta x) + 2(1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2(1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
2\lambda^2 - 2\lambda + 2(1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda^2 - \lambda + (1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda(\lambda - 1)(1 - \cos(\xi \Delta x)) &\leq 0
\end{aligned}$$

Or $\lambda < 0$ et $1 - \cos(\xi \Delta x) \geq 0$, alors, le schéma 2 décentré en aval est inconditionnellement stable.

- **Convergence**

Le schéma 2 décentré étant consistant et stable; en utilisant le théorème de Lax, on déduit que le schéma 2 décentré en aval ($a < 0$) est convergent.

Schema 3 (Lax-Friedrichs):

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\
u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\
\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)
\end{aligned}$$

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

En utilisant les deux premiers développements de Taylor tronqués à l'ordre 1, on obtient u_j^n comme somme de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n :

$$u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + O((\Delta x)^2)$$

En remplaçant dans le troisième développement de Taylor, on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &= O(\Delta t) + O(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$$

Or

$$|O(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t) = 0$$

et

$$|O(\Delta x)^2| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} O(\Delta x)^2 = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 3 Lax-Friedrichs est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi x_{j-1}} + C^n e^{i\xi x_{j+1}})}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x} + C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x})}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x})}{\Delta t} + a \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n = 0 \\ &\implies C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}) C^n \\ &\implies C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n (\cos(\xi\Delta x) - i\sin(\xi\Delta x) + \cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x))) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}) C^n \\ &\implies C^{n+1} = \frac{1}{2}(2\cos(\xi\Delta x) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} 2i\sin(\xi\Delta x)) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

On doit avoir $|\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned} |\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\ (\cos(\xi\Delta x))^2 + (\lambda\sin(\xi\Delta x))^2 &\leq 1 \\ \cos^2(\xi\Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ 1 - \sin^2(\xi\Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ 1 - (1 - \lambda^2) \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ -(1 - \lambda^2) \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \\ 1 - \lambda^2 &\geq 0 \\ \lambda^2 &\leq 1 \\ \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} &\leq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 3 Lax-Friedrichs est stable si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (**condition de Courant-Friedrichs-Lewy**).

- **Convergence**

Le schema 3 Lax-Friedrichs etant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le theoreme de Lax, on deduit que le schema 3 Lax-Friedrichs est convergent.

Schema 4 (Lax-Wendroff):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- 3) Implémenter chacun des schémas numériques pour évaluer la solution approchée, puis comparer cette solution avec la solution exacte. (Tracer les solutions aux temps physiques $t_1 = 2.5$ s et $t_2 = 4.5$ s en testant sur deux maillages différents formés de $N = 100$ et $N = 200$ points. Interpréter les résultats.
- 4) Evaluer l'erreur en norme L^1 de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps $t_1 = 2.5$ s et pour $N = 100$. Interpréter.

Données :

$L = 10m$, $a = 2m/s$, $u_0(x) = 1$ pour $3m \leq x \leq 4m$ et 0 ailleurs.

Nombre de Courant : $CFL = 0.8$.

2. Equation de Burgers

On considere maintenant l'equation de Burgers suivante:

$$(E_2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

- 5) Reprendre les questions 1), 3) et 4).

Données :

$L = 6m$, $u_0(x) = 0.4$ pour $x < 2m$ et 0.1 ailleurs. $CFL = 0.8$.