Mini-Projet Etude et application de quelques schémas aux différences finies pour deux lois de conservation

AMECK GUY-MAX DESIRE DOSSEH & RIM ELMGHARI

2024-02-04

On souhaite étudier, appliquer et voir le comportement de quelques schémas aux différences finies pour deux équations relevant de lois de conservation 1D définies sur un domaine $\Omega = [0, L]$.

1. Equation de transport

On considère l'équation de transport soumise à des conditions aux limites periodiques:

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[\ ; \ \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

1) A l'aide de la methode des caracteristiques, determiner la solution exacte $u(x, t)$ du probleme (E_1).

Nous allons chercher une courbe caractéristique $\Gamma((t(s), x(s))$, s étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$
$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}$$
$$\frac{du}{ds} = -a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}$$
$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{dx}{ds} - a\frac{dt}{ds})$$

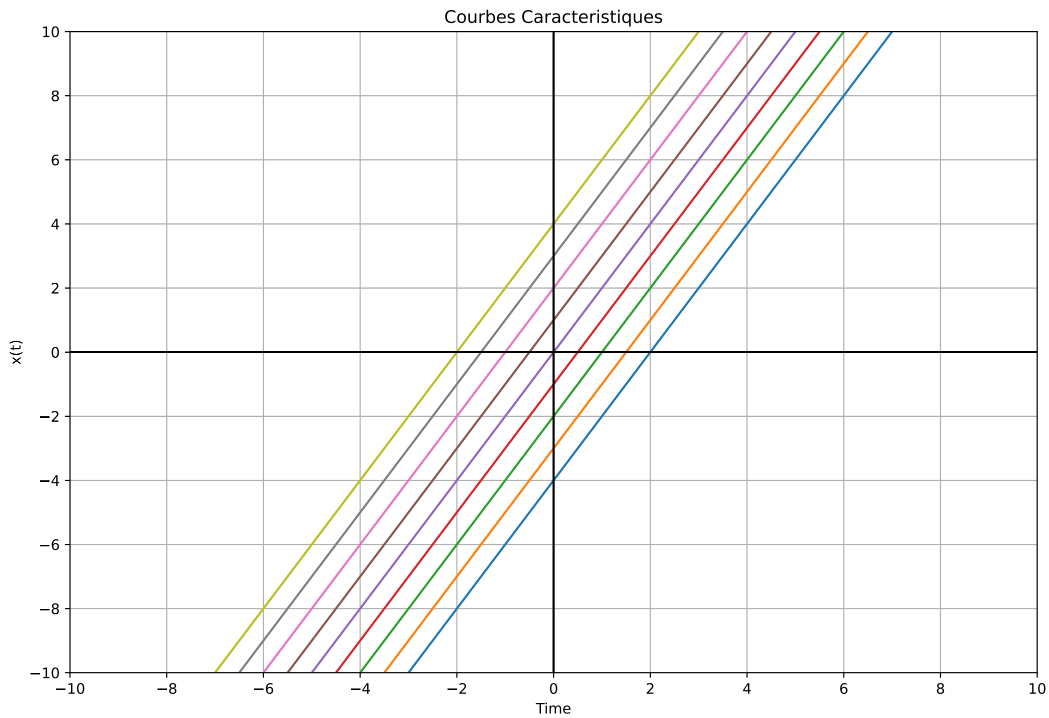
On voit que si on impose $\frac{dx}{ds} - a\frac{dt}{ds} = 0$, on a $\frac{du}{ds} = 0$, c'est à dire que u est constant le long de la courbe caractéristique.

On a donc le système d'EDO suivant a resoudre:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \text{ qui donne la courbe caractéristique } \Gamma \\ du = 0 \text{ qui donne la solution u(x, t) sur cette courbe caractéristique} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques:

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ donne } x(t) = at + \xi(avec\ \xi \text{ une constante reelle d'integration})$$



Solution

Sur chaque courbe caractéristique $(\Gamma) : x - at = \xi$, on a:

$$du = 0 \Rightarrow u(x,t) = cte = f(\xi) \leftarrow i.e. \text{ u ne depend que de } \xi$$

Soit alors

$$u(x,t) = f(x - at)$$

Cette solution doit etre retrouvee aussi pour $t = 0$.

Or a $t = 0$, on a:

$$u(x,0) = u_0(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = u_0(x)$$

c'est a dire

$$f \equiv u_0$$

On obtient finalement la solution exacte du probleme (E_1):

$$u(x,t) = u_0(x - at),\ \forall x \in [0, L],\ \forall t > 0$$

On discretise l'intervalle $[0, L]$ en $(N-1)$ sous-interalles $[x_i, x_{i+1}](i = 1, ..., N-1)$ de tailles egales $\Delta x(\Delta x = \frac{L}{N-1}, x_{i+1} = x_i + \Delta x)$, et on note par u_i^n la solution approchee au noeud x_i a l'instant $t^n = n\Delta t(\Delta t$ etant le pas de chnage).

2) Etudier la consistance, la stabilite et la convergence de chacun des schemas numeriques suivants:

Schema 1 (centre):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

- Et d'autre part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= (\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}) - (\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Par definition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \mathrm{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}((\Delta x)^2)| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \mathrm{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 1 centre est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 &\implies \frac{C^{n+1}e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a\frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1}e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a\frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a\frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\
&\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} sin(\xi\Delta x) C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} i sin(\xi\Delta x)) C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \\
&\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda sin(\xi\Delta x))^n C^0
\end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - i\lambda sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|1 - i\lambda sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\
1 + \lambda^2 sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\
\lambda^2 sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \text{ (ce qui est absurde)}
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 1 centre est instable.

- **Convergence**

En utilisant la contraposee du theoreme de Lax, on a:

Le shéma 1 centre n'est pas stable, donc il n'est pas convergent.

Schema 2 (decentre):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } a > 0$$
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } a < 0$$

- **Cas a > 0**
  - **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n + O(\Delta t^2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

+ Et d'autre part le développement de Taylor de u_j^n et u_{j-1}^n à l'ordre 1 :

$$u_j^n = u_j^n + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2)$$
$$u_{j-1}^n = u_j^n - \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}|_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= (\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}) - (\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par definition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en amont est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 &\implies \frac{C^{n+1}e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a\frac{C^n e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1}e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a\frac{C^n e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t}e^{i\xi j\Delta x} + a\frac{1 - e^{-i\xi\Delta x}}{\Delta x}C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\
&\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(1 - e^{-i\xi\Delta x})C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(1 - e^{-i\xi\Delta x}))C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - \lambda(1 - e^{-i\xi\Delta x}))C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x}
\end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - \lambda(1 - e^{-i\xi\Delta x})| \leq 1 \; \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$
\begin{aligned}
|1-\lambda(1-e^{-i\xi\Delta x})|^2 &\leq 1\\
|1-\lambda(1-(cos(-\xi\Delta x)+isin(-\xi\Delta x)))|^2 &\leq 1\\
|1-\lambda(1-cos(\xi\Delta x)+isin(\xi\Delta x))|^2 &\leq 1\\
|1-\lambda+\lambda cos(\xi\Delta x)-i\lambda sin(\xi\Delta x))|^2 &\leq 1\\
(1-\lambda+\lambda cos(\xi\Delta x))^2+(\lambda sin(\xi\Delta x))^2 &\leq 1\\
1-2\lambda+\lambda^2+\lambda^2cos^2(\xi\Delta x)+2(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x)+\lambda^2 sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1\\
1-2\lambda+2\lambda^2+2(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 1\\
2\lambda^2-2\lambda+2(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda^2-\lambda+(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda(\lambda-1)-(\lambda-1)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda(\lambda-1)(1-cos(\xi\Delta x)) &\leq 0
\end{aligned}
$$

Or $\lambda > 0$ et $1-cos(\xi\Delta x) \geq 0$, on doit donc avoir:

$$
\begin{aligned}
\lambda-1 &\leq 0\\
\lambda &\leq 1\\
\lambda=\frac{a\Delta t}{\Delta x} &\leq 1
\end{aligned}
$$

Ainsi, le schéma 2 décentré en amont est stable si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

- **Convergence**

Le schema 2 décentré etant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le theorème de Lax sous les memes conditions de stabilité, on deduit que le schema 2 décentré en amont($a > 0$) est convergent.

- **Cas a < 0**
  - **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n+O(\Delta t^2)\\
\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n &= \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+O(\Delta t)
\end{aligned}
$$

- Et d'autre part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_j^n à l'ordre 1 :

$$
\begin{aligned}
u_{j+1}^n &= u_j^n+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+O(\Delta x^2)\\
u_j^n &= u_j^n-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+O(\Delta x^2)\\
\frac{\partial u}{\partial x}|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}+O(\Delta x)
\end{aligned}
$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= (\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}) - (\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par definition de la consistance, un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en aval est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=0 &\implies \frac{C^{n+1}e^{i\xi x_j}-C^ne^{i\xi x_j}}{\Delta t}+a\frac{C^ne^{i\xi x_{j+1}}-C^ne^{i\xi x_j}}{\Delta x}=0\\
&\implies \frac{C^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}-C^ne^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t}+a\frac{C^ne^{i\xi(j+1)\Delta x}-C^ne^{i\xi j\Delta x}}{\Delta x}=0\\
&\implies \frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t}e^{i\xi j\Delta x}+a\frac{e^{i\xi\Delta x}-1}{\Delta x}C^ne^{i\xi j\Delta x}=0\\
&\implies C^{n+1}=C^n-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(1-e^{i\xi\Delta x})C^n\\
&\implies C^{n+1}=(1-\lambda(1-e^{i\xi\Delta x}))C^n,\ \text{avec } \lambda=\frac{a\Delta t}{\Delta x}
\end{aligned}$$

On doit avoir $|1-\lambda(1-e^{i\xi\Delta x})|\leq 1\ \forall\xi\in\mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|1-\lambda(1-e^{i\xi\Delta x})|^2 &\leq 1\\
|1-\lambda(1-cos(\xi\Delta x)+isin(\xi\Delta x))|^2 &\leq 1\\
|1-\lambda+\lambda cos(\xi\Delta x)-i\lambda sin(\xi\Delta x))|^2 &\leq 1\\
(1-\lambda+\lambda cos(\xi\Delta x))^2+(\lambda sin(\xi\Delta x))^2 &\leq 1\\
1-2\lambda+\lambda^2+\lambda^2cos^2(\xi\Delta x)+2(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x)+\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1\\
1-2\lambda+2\lambda^2+2(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 1\\
2\lambda^2-2\lambda+2(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda^2-\lambda+(1-\lambda)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda(\lambda-1)-(\lambda-1)\lambda cos(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda(\lambda-1)(1-cos(\xi\Delta x)) &\leq 0
\end{aligned}$$

Or $\lambda<0$ et $1-cos(\xi\Delta x)\geq 0$, alors, le schéma 2 décentré en aval est inconditionnellement stable.

- **Convergence**

Le schema 2 décentré etant consistant et stable; en utilisant le theorème de Lax, on deduit que le schema 2 décentré en aval ($a<0$) est convergent.

Schema 3 (Lax-Friedrichs):

$$\frac{u_j^{n+1}-\frac{1}{2}(u_{j-1}^n+u_{j+1}^n)}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n &= u_j^n+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+O((\Delta x)^3)\\
u_{j-1}^n &= u_j^n-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+O((\Delta x)^3)\\
\frac{\partial u}{\partial x}|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}+O((\Delta x)^2)
\end{aligned}$$

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}|_j^n + O(\Delta t^2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

En utilisant les deux premiers développement de Taylor tronques a l'ordre 1, on obtient u_j^n comme somme de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n:

$$u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + O((\Delta x)^2)$$

En remplacant dans le troisieme développement de Taylor, on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \mathrm{ET} &= (\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}) - (\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Par definition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \mathrm{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \mathrm{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)^2| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{O}(\Delta x)^2 = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 3 Lax-Friedrichs est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$
$$\frac{C^{n+1}e^{i\xi x_j} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi x_{j-1}} + C^n e^{i\xi x_{j+1}})}{\Delta t} + a\frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0$$
$$\frac{C^{n+1}e^{i\xi j\Delta x} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi (j-1)\Delta x} + C^n e^{i\xi (j+1)\Delta x})}{\Delta t} + a\frac{C^n e^{i\xi (j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi (j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0$$
$$\frac{C^{n+1} - \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x})}{\Delta t} + a\frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x}C^n = 0$$
$$C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x})C^n$$
$$C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n(cos(\xi\Delta x) - isin(\xi\Delta x) + cos(\xi\Delta x) + isin(\xi\Delta x)) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(cos(\xi\Delta x) + isin(\xi\Delta x) - cos(\xi\Delta x) + isin(\xi\Delta x))C^n$$
$$C^{n+1} = \frac{1}{2}(2cos(\xi\Delta x) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}2isin(\xi\Delta x))C^n$$
$$C^{n+1} = (cos(\xi\Delta x) - i\lambda sin(\xi\Delta x))C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

On doit avoir $|cos(\xi\Delta x) - i\lambda sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \ \forall\xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|cos(\xi\Delta x) - i\lambda sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\
(cos(\xi\Delta x))^2 + (\lambda sin(\xi\Delta x))^2 &\leq 1 \\
cos^2(\xi\Delta x) + \lambda^2 sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\
1 - sin^2(\xi\Delta x) + \lambda^2 sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\
1 - (1-\lambda^2)sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\
-(1-\lambda^2)sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \\
1 - \lambda^2 &\geq 0 \\
\lambda^2 &\leq 1 \\
\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} &\leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 3 Lax-Friedrichs est stable si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$(**condition de Courant-Friedrichs-Lewy**).

- **Convergence**

Le schema 3 Lax-Friedrichs etant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le theorème de Lax, on deduit que le schema 3 Lax-Friedrichs est convergent.

Schema 4 (Lax-Wendroff):

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}-\frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n)=0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

Le developpement de Taylor de u en $(x_j, t^n+\Delta t)$ a l'ordre 2 est:

$$u(x_j,t^n+\Delta t)=u(x_j,t^n)+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n)+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n)+\mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Or $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$, donc:

$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

D'où:

$$\begin{aligned}
u(x_j,t^n+\Delta t)&=u(x_j,t^n)-a\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n)+\frac{1}{2}a^2(\Delta t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n)+\mathcal{O}((\Delta t)^3)\\
u_j^{n+1}&=u_j^n-a\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}|_j^n+\frac{1}{2}a^2(\Delta t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_j^n+\mathcal{O}((\Delta t)^3)\\
\frac{\partial u}{\partial x}|_j^n&=\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta t}-\frac{a^2}{2}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_j^n+\mathcal{O}((\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

Utilisons les developpements de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n a l'ordre 3 pour approximer la derivee seconde de u par rapport a x:

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n&=u_j^n+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\mathcal{O}((\Delta x)^4)\\
u_{j-1}^n&=u_j^n-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\mathcal{O}((\Delta x)^4)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_j^n&=\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}+\mathcal{O}((\Delta x))
\end{aligned}$$

On a finalement commme approximation pour la derivee temporelle de u:

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_j^n=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n)+\mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

En utilisant les developenments de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n a l'ordre 2 precedents, on obtient comme pour approximation pour la derivee spatiale:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_j^n=\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}+\mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0 & \forall x \in]0,L[; \forall t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= (\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}) - (\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.

Par definition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)^2| \leq C|\Delta t|^2 \implies \lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{O}(\Delta t)^2 = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)^2| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \to 0} \mathcal{O}(\Delta x)^2 = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \to 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 4 Lax-Wendroff est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}-\frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j+1}^n)=0$$
$$\frac{C^{n+1}e^{i\xi x_j}-C^ne^{i\xi x_j}}{\Delta t}+a\frac{C^ne^{i\xi x_{j+1}}-C^ne^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x}-\frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(C^ne^{i\xi x_{j-1}}-2C^ne^{i\xi x_j}+C^ne^{i\xi x_{j+1}})=0$$
$$\frac{C^{n+1}e^{i\xi j\Delta x}-C^ne^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t}+a\frac{e^{i\xi\Delta x}-e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x}e^{i\xi j\Delta x}C^n-\frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(e^{-i\xi\Delta x}-2+e^{i\xi\Delta x})e^{i\xi j\Delta x}C^n=0$$
$$\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t}e^{i\xi j\Delta x}+a\frac{e^{i\xi\Delta x}-e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x}C^ne^{i\xi j\Delta x}-\frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(e^{-i\xi\Delta x}-2+e^{i\xi\Delta x})C^ne^{i\xi j\Delta x}=0$$
$$C^{n+1}=C^n-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(isin(\xi\Delta x))C^n+\frac{a^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}(cos(\xi\Delta x)-1)C^n$$
$$C^{n+1}=(1-i\lambda sin(\xi\Delta x)+\lambda^2(cos(\xi\Delta x)-1))C^n,\ \text{avec } \lambda=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

On doit avoir $|1-i\lambda sin(\xi\Delta x)+\lambda^2(cos(\xi\Delta x)-1)|\leq 1\ \forall\xi\in\mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|1-i\lambda sin(\xi\Delta x)+\lambda^2(cos(\xi\Delta x)-1)|^2 &\leq 1\\
|1+\lambda^2(cos(\xi\Delta x)-1)-i\lambda sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1\\
(1+\lambda^2(cos(\xi\Delta x)-1))^2+(\lambda sin(\xi\Delta x))^2 &\leq 1\\
1+2\lambda^2(cos(\xi\Delta x)-1)+\lambda^4(cos^2(\xi\Delta x)-2cos(\xi\Delta x)+1)+(\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1\\
1+2\lambda^2cos(\xi\Delta x)-2\lambda^2+\lambda^4cos^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4+\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1\\
2\lambda^2cos(\xi\Delta x)-2\lambda^2+\lambda^4cos^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4+\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
2\lambda^2(1-sin^2(\xi\Delta x))-2\lambda^2+\lambda^4cos^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4+\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
2\lambda^2-2\lambda^2sin^2(\xi\Delta x)-2\lambda^2+\lambda^4cos^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4+\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
-2\lambda^2sin^2(\xi\Delta x)+\lambda^4cos^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4+\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda^4cos^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4-2\lambda^2sin^2(\xi\Delta x)+\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda^4(1-sin^2(\xi\Delta x))-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4-\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
\lambda^4-\lambda^4sin^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)+\lambda^4-\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
2\lambda^4-2\lambda^4sin^2(\xi\Delta x)-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)-\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
2\lambda^4-2\lambda^4cos(\xi\Delta x)-2\lambda^4sin^2(\xi\Delta x)-\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
2\lambda^4(1-cos(\xi\Delta x))-(2\lambda^2+1)\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
-2\lambda^4(cos(\xi\Delta x)-1)-(2\lambda^2+1)\lambda^2sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0\\
-4\lambda^4sin^2(\frac{\xi\Delta x}{2})-2\lambda^2(2\lambda^2+1)sin^2\frac{\xi\Delta x}{2}cos^2\frac{\xi\Delta x}{2} &\leq 0 \text{ (ce qui est vrai } \forall\xi\in\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 4 Lax-Wendroff est incoditionnellement stable.

- **Convergence**

Le schema 4 Lax-Wendroff etant consistant et stable; en utilisant le theorème de Lax, on deduit que le schema 4 Lax-Wendroff est convergent.

3) Implémenter chacun des schémas numériques pour évaluer la solution approchée, puis comparer cette solution avec la solution exacte. (Tracer les solutions aux temps physiques t1 = 2.5 s et t2 = 4.5 s en testant sur deux maillages différents formés de N = 100 et N = 200 points. Interpréter les résultats.

4) Evaluer l'erreur en norme L^1 de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps $t_1 = 2.5s$ et pour N = 100. Interpréter.

Données :

$L = 10m,\ a = 2m/s,\ u_0(x) = 1\ pour\ 3m \leq x \leq 4m\ et\ 0\ ailleurs.$

Nombre de Courant : $CFL = 0.8$.

2. Equation de Burgers

On considere maintenant l'equation de Burgers suivante:

$$(E_2)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[\ ;\ \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

5) Reprendre les questions 1), 3) et 4).

Données :

$L = 6m,\ u_0(x) = 0.4\ pour\ x < 2m\ et\ 0.1\ ailleurs.\ CFL = 0.8.$