

Mini-Projet Etude et application de quelques schémas aux différences finies pour deux lois de conservation

AMECK GUY-MAX DESIRE DOSSEH & RIM ELMGHARI

2024-02-06

On souhaite étudier, appliquer et voir le comportement de quelques schémas aux différences finies pour deux équations relevant de lois de conservation 1D définies sur un domaine $\Omega = [0, L]$.

1. Equation de transport

On considère l'équation de transport soumise à des conditions aux limites périodiques:

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) ; \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

1) A l'aide de la méthode des caractéristiques, déterminer la solution exacte $u(x, t)$ du problème (E_1) .

Nous allons chercher une courbe caractéristique $\Gamma((t(s), x(s)))$, s étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} \right) \end{aligned}$$

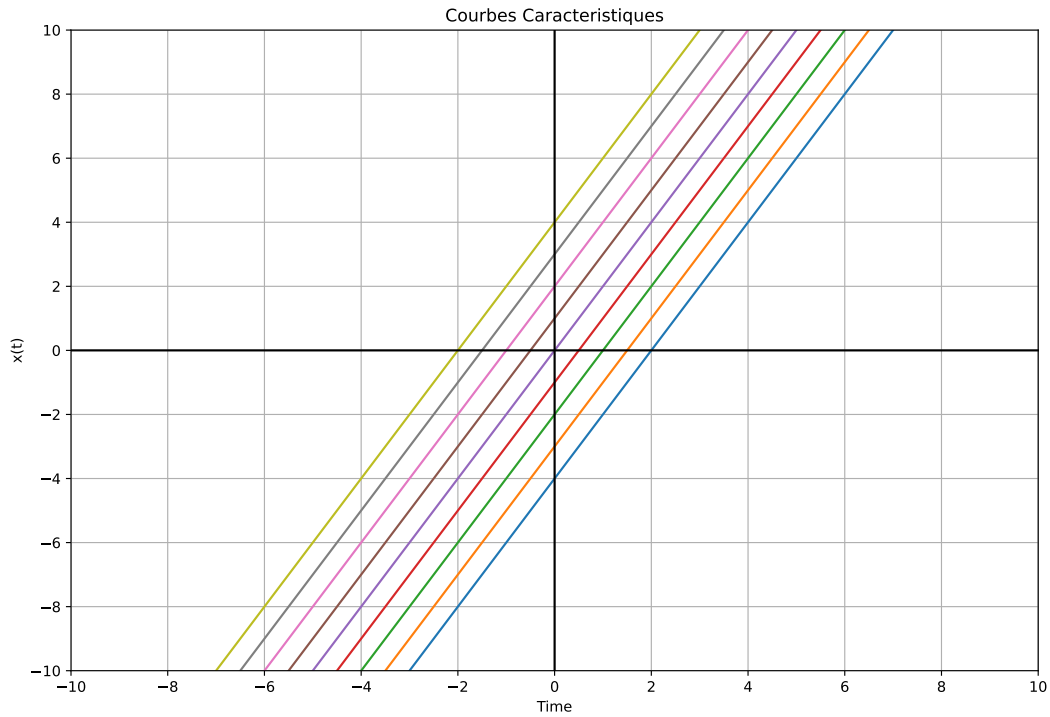
On voit que si on impose $\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} = 0$, on a $\frac{du}{ds} = 0$, c'est à dire que u est constant le long de la courbe caractéristique.

On a donc le système d'EDO suivant à résoudre:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \text{ qui donne la courbe caractéristique } \Gamma \\ \frac{du}{dt} = 0 \text{ qui donne la solution } u(x, t) \text{ sur cette courbe caractéristique} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques:

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ donne } x(t) = at + \xi (\text{avec } \xi \text{ une constante réelle d'intégration})$$



Solution

Sur chaque courbe caractéristique (Γ) : $x - at = \xi$, on a:

$$du = 0 \Rightarrow u(x, t) = cte = f(\xi) \leftarrow \text{i.e. } u \text{ ne depend que de } \xi$$

Soit alors

$$u(x, t) = f(x - at)$$

Cette solution doit être retrouvée aussi pour $t = 0$.

Or a $t = 0$, on a:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = u_0(x)$$

c'est a dire

$$f \equiv u_0$$

On obtient finalement la solution exacte du problème (E_1):

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall t > 0$$

Elle est périodique en x , de période L .

On discrétise l'intervalle $[0, L]$ en $(N-1)$ sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, N-1$) de tailles égales Δx ($\Delta x = \frac{L}{N-1}$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$), et on note par u_i^n la solution approchée au nœud x_i à l'instant $t^n = n\Delta t$ (Δt étant le pas de temps).

2) Etudier la consistance, la stabilité et la convergence de chacun des schémas numériques suivants:

Schéma 1 (centre):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

• **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

- Et d'autre part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à schéma 2 :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}((\Delta x)^2)| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 1 centre est consistant.

• Stabilité

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\ &\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\xi\Delta x) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} i \sin(\xi\Delta x)) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x))^n C^0 \end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned} |1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\ 1 + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \text{ (ce qui est absurde)} \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 1 centre est instable.

- **Convergence**

En utilisant la contraposée du théorème de Lax, on a:

Le schéma 1 centre n'est pas stable, donc il n'est pas convergent.

Schéma 2 (décentré):

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a < 0\end{aligned}$$

- **Cas $a > 0$**

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)\end{aligned}$$

+ Et d'autre part le développement de Taylor de u_j^n et u_{j-1}^n à ordre 1 :

$$\begin{aligned}u_j^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)\end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned}\text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)\end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en amont est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi (j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a \frac{1 - e^{-i\xi \Delta x}}{\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\ &\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi \Delta x}) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi \Delta x})) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \lambda(1 - e^{-i\xi \Delta x})) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - \lambda(1 - e^{-i\xi \Delta x})| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
& |1 - \lambda(1 - e^{-i\xi\Delta x})|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda(1 - (\cos(-\xi\Delta x) + i\sin(-\xi\Delta x)))|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda(1 - \cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x))|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda + \lambda\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)|^2 \leq 1 \\
& (1 - \lambda + \lambda\cos(\xi\Delta x))^2 + (\lambda\sin(\xi\Delta x))^2 \leq 1 \\
& 1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2\cos^2(\xi\Delta x) + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) + \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x) \leq 1 \\
& 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 1 \\
& 2\lambda^2 - 2\lambda + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda^2 - \lambda + (1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda(\lambda - 1)(1 - \cos(\xi\Delta x)) \leq 0
\end{aligned}$$

Or $\lambda > 0$ et $1 - \cos(\xi\Delta x) \geq 0$, on doit donc avoir:

$$\begin{aligned}
\lambda - 1 & \leq 0 \\
\lambda & \leq 1 \\
\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} & \leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 2 décentré en amont est stable si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

- **Convergence**

Le schéma 2 décentré étant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le théorème de Lax sous les mêmes conditions de stabilité, on déduit que le schéma 2 décentré en amont ($a > 0$) est convergent.

- **Cas $a < 0$**

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\
\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)
\end{aligned}$$

- Et d'autre part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_j^n à ordre 1 :

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\
u_j^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\
\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x)
\end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par définition de la consistance, un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en aval est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j \Delta x} + a \frac{e^{i\xi \Delta x} - 1}{\Delta x} C^n e^{i\xi j \Delta x} = 0 \\
&\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (e^{i\xi \Delta x} - 1) C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - \lambda(e^{i\xi \Delta x} - 1)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a \Delta t}{\Delta x}
\end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - \lambda(e^{i\xi \Delta x} - 1)| \leq 1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|1 - \lambda(e^{i\xi \Delta x} - 1)|^2 &\leq 1 \\
|1 - \lambda(\cos(\xi \Delta x) + i \sin(\xi \Delta x) - 1)|^2 &\leq 1 \\
|1 - \lambda - \lambda \cos(\xi \Delta x) - i \lambda \sin(\xi \Delta x)|^2 &\leq 1 \\
(1 - \lambda)^2 + \lambda^2 \cos^2(\xi \Delta x) - 2(1 - \lambda) \lambda \cos(\xi \Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2(\xi \Delta x) - 2(1 - \lambda) \lambda \cos(\xi \Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda(\lambda - 1) \cos(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
2\lambda^2 - 2\lambda + 2\lambda(\lambda - 1) \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
2\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda(\lambda - 1) \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
2\lambda(\lambda - 1)(1 + \cos(\xi \Delta x)) &\leq 0 \\
4\lambda(\lambda - 1) \cos^2 \frac{\xi \Delta x}{2} &\leq 0
\end{aligned}$$

Le schéma 2 décentré en aval est stable si $\lambda < 0 \implies a < 0$.

- **Convergence**

Le schéma 2 décentré étant consistant et stable; en utilisant le théorème de Lax, on déduit que le schéma 2 décentré en aval ($a < 0$) est convergent.

Schéma 3 (Lax-Friedrichs):

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

- D'une part le développement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

En utilisant les deux premiers développements de Taylor tronqués à l'ordre 1, on obtient u_j^n comme somme de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n :

$$u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + O((\Delta x)^2)$$

En remplaçant dans le troisième développement de Taylor, on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)^2| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x)^2 = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 3 Lax-Friedrichs est consistant.

• Stabilité

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \\ & \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi x_{j-1}} + C^n e^{i\xi x_{j+1}})}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ & \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x} + C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x})}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\ & \frac{C^{n+1} - \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x})}{\Delta t} + a \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n = 0 \\ & C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}) C^n \\ & C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n (\cos(\xi\Delta x) - i\sin(\xi\Delta x) + \cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x))) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (\cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x) - \cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x)) C^n \\ & C^{n+1} = \frac{1}{2}(2\cos(\xi\Delta x) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} 2i\sin(\xi\Delta x)) C^n \\ & C^{n+1} = (\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

On doit avoir $|\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\
(\cos(\xi\Delta x))^2 + (\lambda\sin(\xi\Delta x))^2 &\leq 1 \\
\cos^2(\xi\Delta x) + \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\
1 - \sin^2(\xi\Delta x) + \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\
1 - (1 - \lambda^2)\sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\
-(1 - \lambda^2)\sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \\
1 - \lambda^2 &\geq 0 \\
\lambda^2 &\leq 1 \\
\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} &\leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 3 Lax-Friedrichs est stable si $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (**condition de Courant-Friedrichs-Lewy**).

- **Convergence**

Le schéma 3 Lax-Friedrichs étant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le théorème de Lax, on déduit que le schéma 3 Lax-Friedrichs est convergent.

Schéma 4 (Lax-Wendroff):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

Le développement de Taylor de u en $(x_j, t^n + \Delta t)$ à l'ordre 2 est:

$$u(x_j, t^n + \Delta t) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Or $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
u(x_j, t^n + \Delta t) &= u(x_j, t^n) - a\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{1}{2}a^2(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\
u_j^{n+1} &= u_j^n - a\Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + \frac{1}{2}a^2(\Delta t)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\
\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{a^2}{2}\Delta t \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

Utilisons les développements de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à l'ordre 3 pour approximer la dérivée seconde de u par rapport à x :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)) \end{aligned}$$

On a finalement comme approximation pour la dérivée temporelle de u :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

En utilisant les développements de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à l'ordre 2 précédents, on obtient comme pour approximation pour la dérivée spatiale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.

Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)^2| \leq C|\Delta t|^2 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t)^2 = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)^2| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x)^2 = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 4 Lax-Wendroff est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) &= 0 \\ \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (C^n e^{i\xi x_{j-1}} - 2C^n e^{i\xi x_j} + C^n e^{i\xi x_{j+1}}) &= 0 \\ \frac{C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta t} + a \frac{e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x}}{2\Delta x} e^{i\xi j \Delta x} C^n - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (e^{-i\xi \Delta x} - 2 + e^{i\xi \Delta x}) e^{i\xi j \Delta x} C^n &= 0 \\ \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j \Delta x} + a \frac{e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x}}{2\Delta x} C^n e^{i\xi j \Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (e^{-i\xi \Delta x} - 2 + e^{i\xi \Delta x}) C^n e^{i\xi j \Delta x} &= 0 \\ C^{n+1} = C^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (i \sin(\xi \Delta x)) C^n + \frac{a^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (\cos(\xi \Delta x) - 1) C^n \\ C^{n+1} = (1 - i \lambda \sin(\xi \Delta x) + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a \Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - i \lambda \sin(\xi \Delta x) + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1)| \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|1 - i\lambda \sin(\xi \Delta x) + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1)|^2 &\leq 1 \\
|1 - i\lambda \sin(\xi \Delta x) - 2\lambda^2 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2})|^2 &\leq 1 \\
|1 - 2\lambda^2 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) - i\lambda \sin(\xi \Delta x)|^2 &\leq 1 \\
(1 - 2\lambda^2 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}))^2 + (\lambda \sin(\xi \Delta x))^2 &\leq 1 \\
1 - 4\lambda^2 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) + 4\lambda^4 \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2}) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
-4\lambda^2 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) + 4\lambda^4 \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2}) + \lambda^2 [4\sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) - 4\sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2})] &\leq 0 \\
-4\lambda^2 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) + 4\lambda^4 \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2}) + 4\lambda^2 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) - 4\lambda^2 \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2}) &\leq 0 \\
4\lambda^4 \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2}) - 4\lambda^2 \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2}) &\leq 0 \\
4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2}) &\leq 0 \\
\sup_{\xi \in \mathbb{R}} [4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) \sin^4(\frac{\xi \Delta x}{2})] &\leq 0 \\
4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) &\leq 0 \\
\lambda^2 (\lambda^2 - 1) &\leq 0 \\
\lambda^2 - 1 &\leq 0 \\
\lambda^2 &\leq 1 \\
\lambda &\leq 1 \\
\frac{a\Delta t}{\Delta x} &\leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 4 Lax-Wendroff est stable si $\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

- **Convergence**

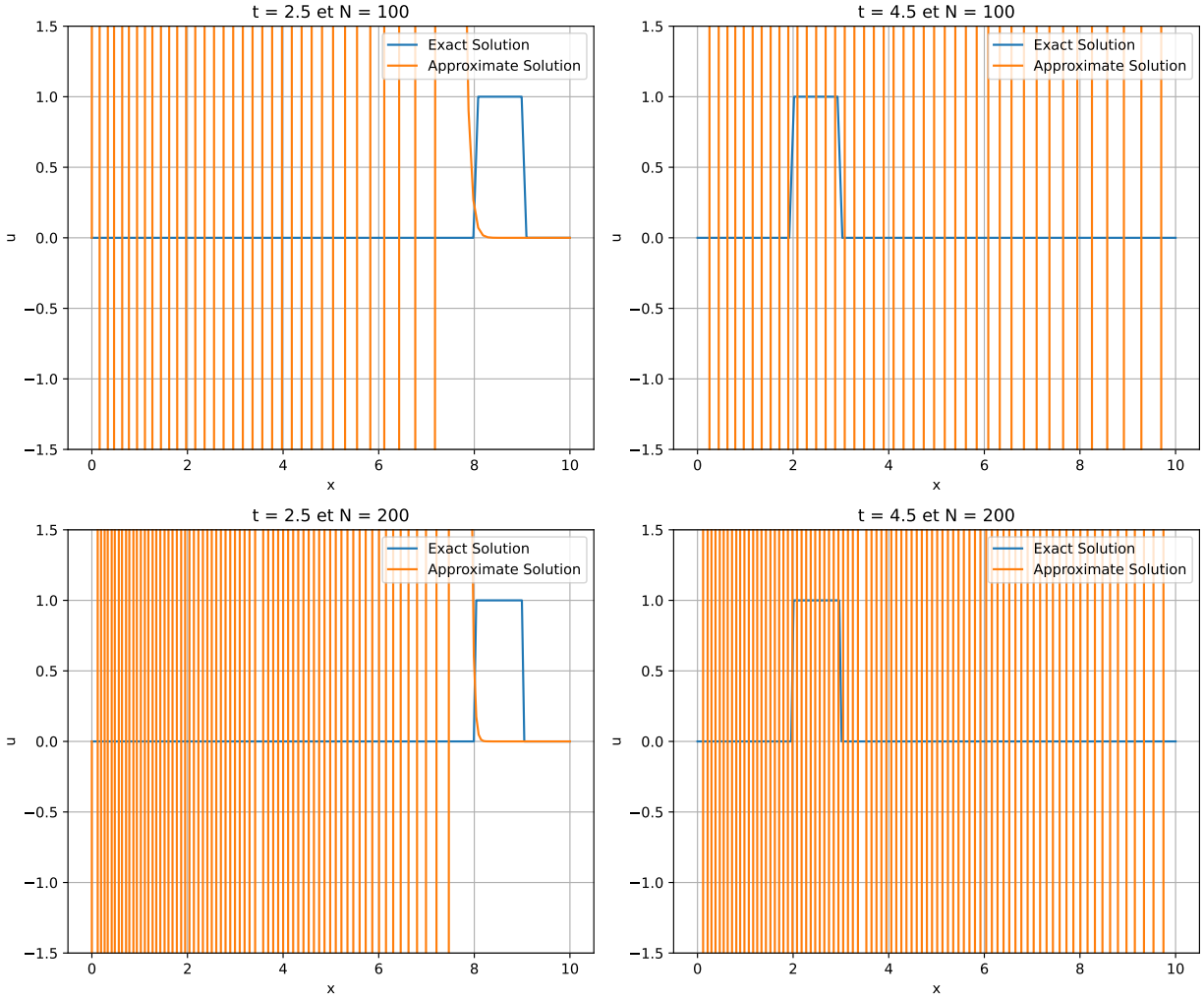
Le schéma 4 Lax-Wendroff étant consistant et stable; en utilisant le théorème de Lax, on déduit que le schéma 4 Lax-Wendroff est convergent.

3) Implémenter chacun des schémas numériques pour évaluer la solution approchée, puis comparer cette solution avec la solution exacte. (Tracer les solutions aux temps physiques $t_1 = 2.5$ s et $t_2 = 4.5$ s en testant sur deux maillages différents formés de $N = 100$ et $N = 200$ points. Interpréter les résultats.

• **Schéma 1 (centré):**

Schéma numérique:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$



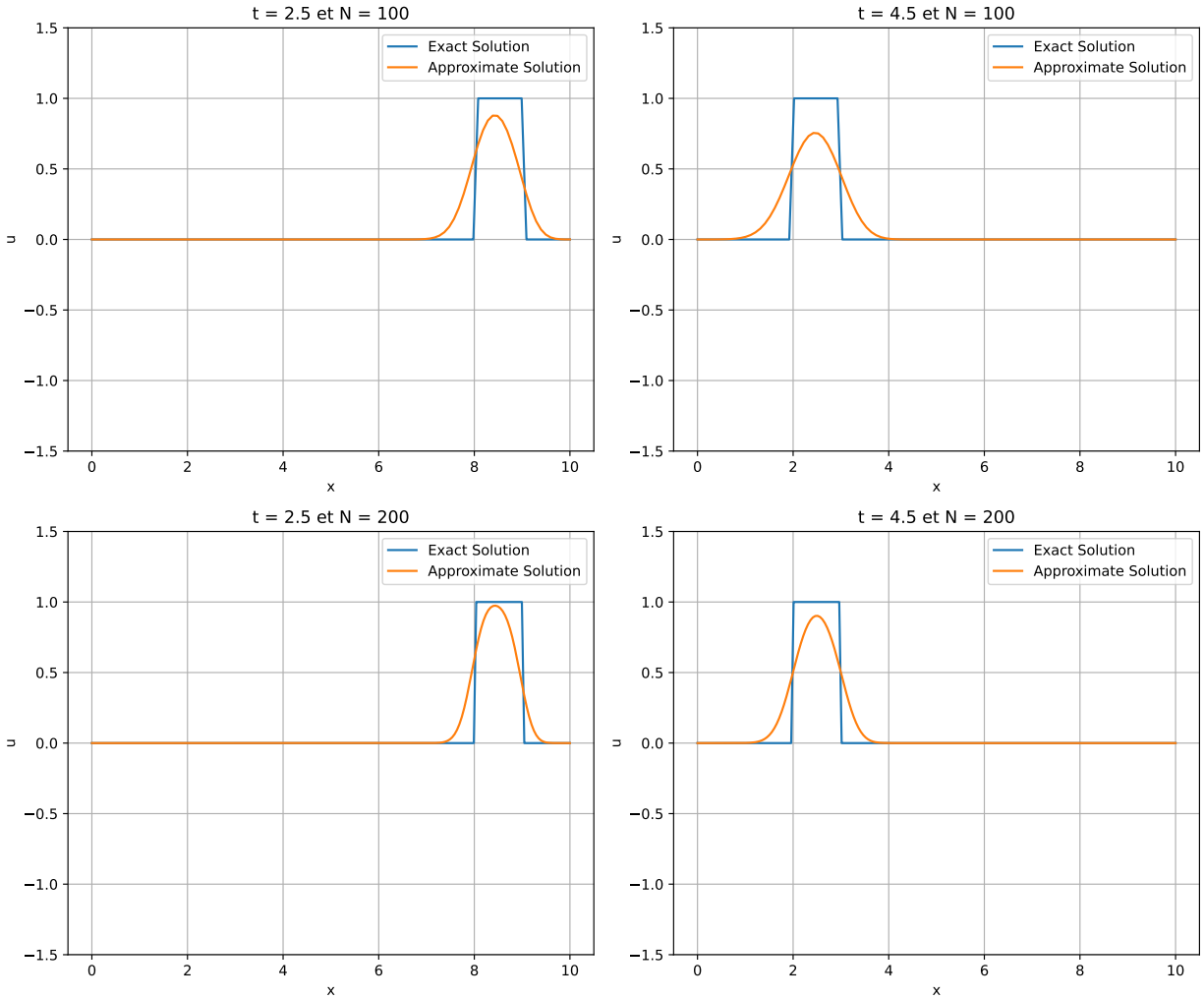
- On remarque que pour le schéma centre, la solution numérique est instable pour $N = 100$ et $N = 200$.
- La solution exacte quant a elle, a $t = 2.5$ s a subi un transport vers la droite de 5m.
- A $t = 4.5$ s, la solution exacte a subi un transport vers la droite de 9m: étant périodique, elle est sorti de l'espace et y est revenue.

- **Schéma 2 décentré en amont:**

Nous sommes dans le cas où $a > 0$

Schéma numérique:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

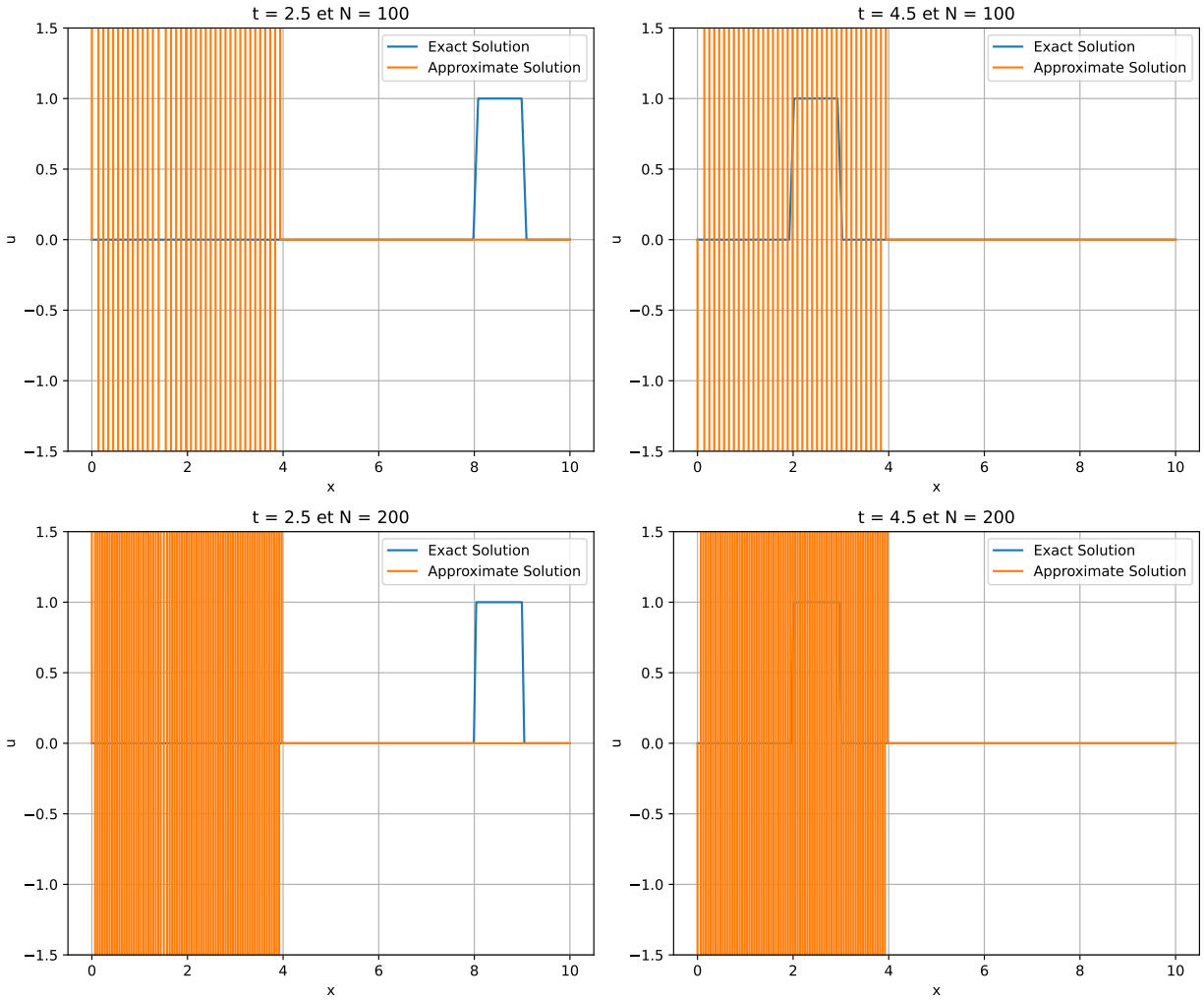


On remarque que pour le schéma décentré en amont, la solution numérique est stable pour $N = 100$ et $N = 200$. On observe juste une faible diffusion numérique.

- Schéma 2 décentré en aval:

Schéma numérique:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

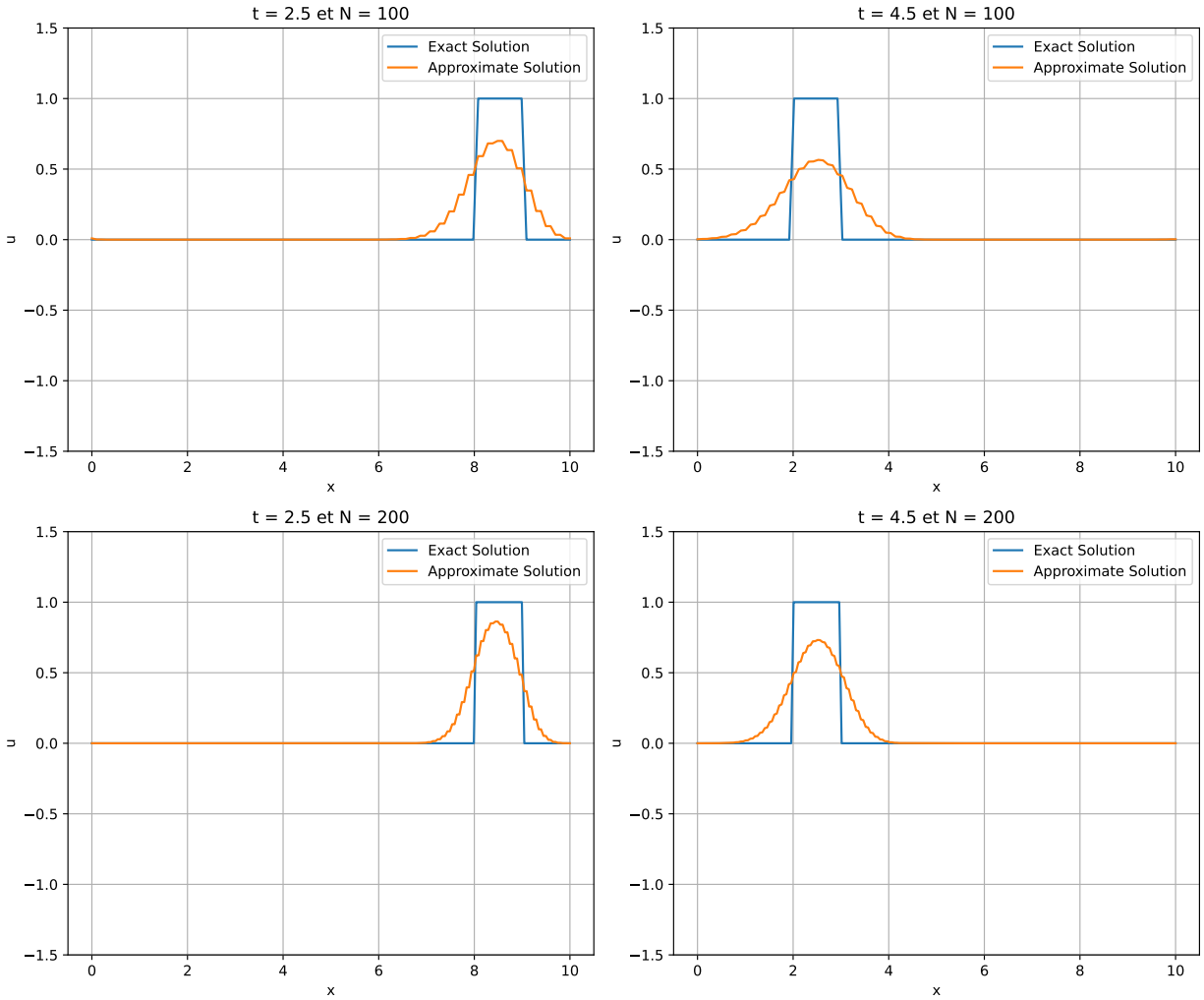


On remarque que pour le schéma décentré en aval, la solution numérique est instable pour $N = 100$ et $N = 200$. Cela est normal car la condition de stabilité ($a < 0$) n'est pas remplie.

- **Schéma 3 (Lax-Friedrichs):**

Schéma numérique:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

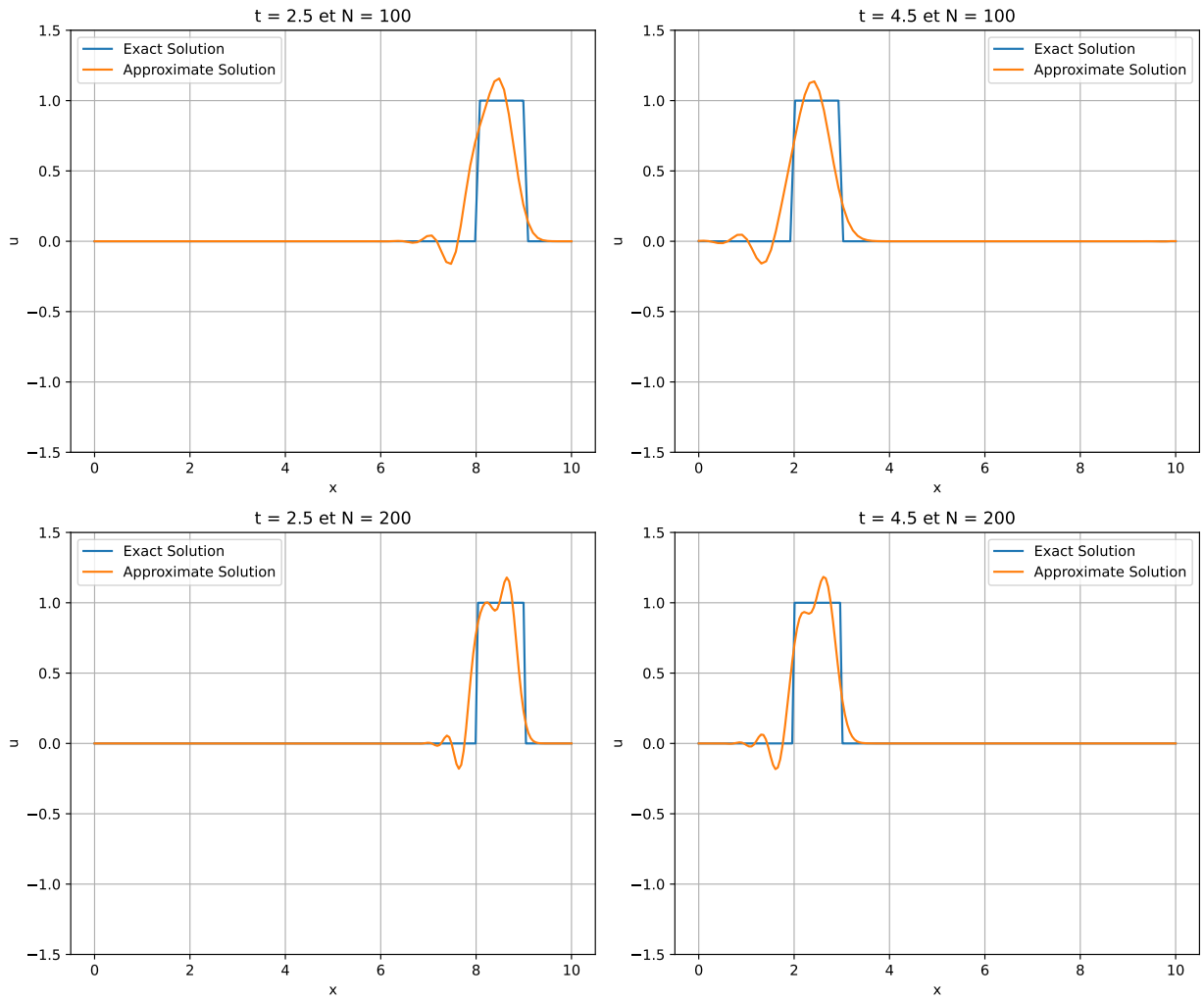


On remarque que pour le schéma Lax-Friedrichs, la solution numérique est stable pour $N = 100$ et $N = 200$. On observe juste une faible diffusion numérique.

- Schéma 4 (Lax-Wendroff):

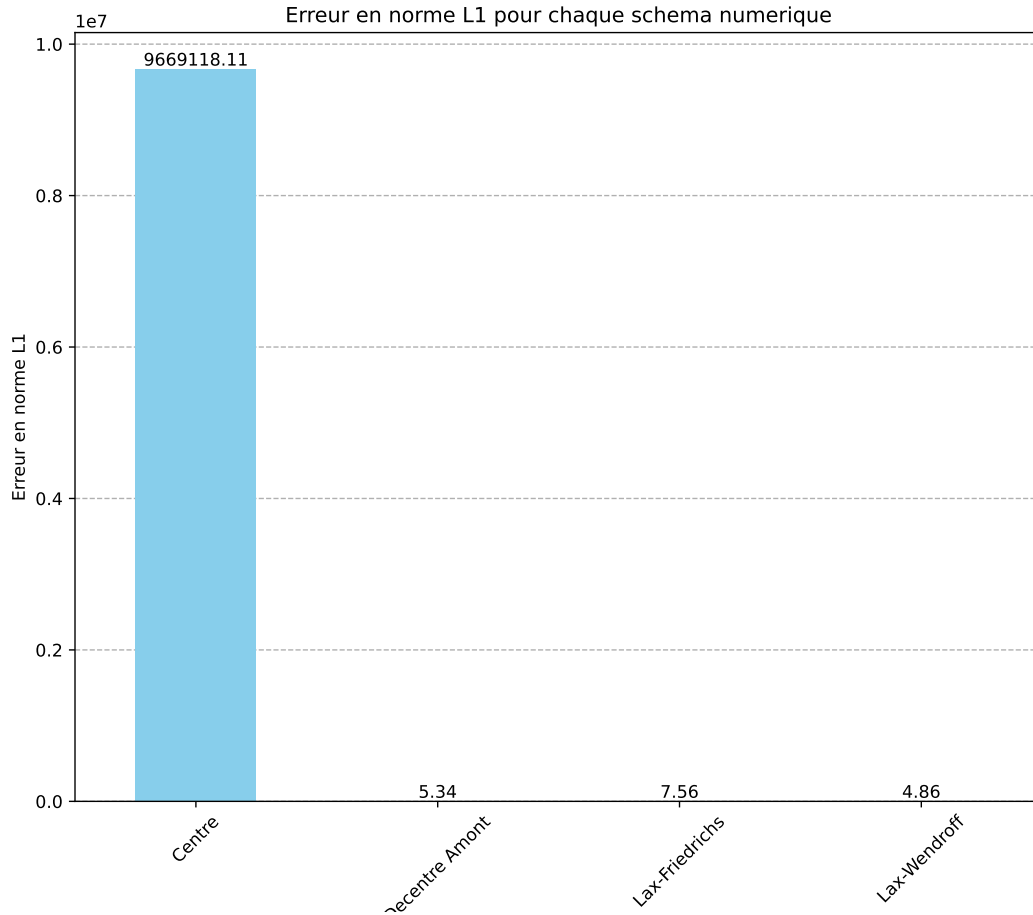
Schéma numérique:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2\Delta t}{2(\Delta x)^2}(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$



On remarque que pour le schéma Lax-Wendroff, la solution numérique est stable pour $N = 100$ et $N = 200$, malgré une diffusion numérique, provenant du terme ajouté par Lax-Wendroff au schéma centre.

- 4) Evaluer erreur en norme L^1 de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps $t_1 = 2.5s$ et pour $N = 100$. Interpréter.



On remarque que le schéma numérique centre est celui qui a la plus grande erreur en norme L^1 , suivi du schéma numérique de Lax-Friedrichs. Les schémas numériques décentré en amont et Lax-Wendroff ont des erreurs en norme L^1 les plus faibles.

Données :

$L = 10m$, $a = 2m/s$, $u_0(x) = 1$ pour $3m \leq x \leq 4m$ et 0 ailleurs.

Nombre de Courant : $CFL = 0.8$.

2. Equation de Burgers

On considère maintenant l'équation de Burger suivante:

$$(E_2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

5) Reprendre les questions 1), 3) et 4).

6) A l'aide de la méthode des caractéristiques, déterminer la solution exacte $u(x, t)$ du problème (E_2) .

Nous allons chercher une courbe caractéristique $\Gamma((t(s), x(s)))$, s étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} - u \frac{dt}{ds} \right) \end{aligned}$$

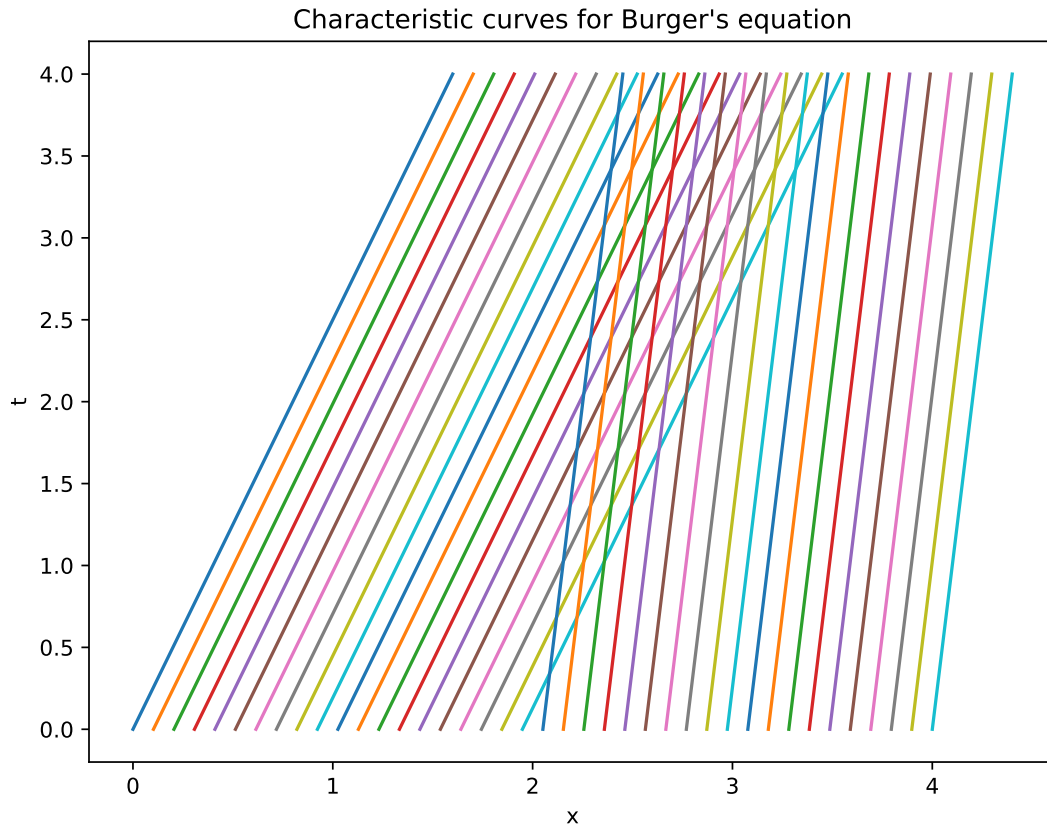
On voit donc que si on impose $\frac{dx}{ds} - u \frac{dt}{ds} = 0$, alors $\frac{du}{ds} = 0$ et donc u est constant le long de la courbe caractéristique.

On a donc le système d'EDO suivant à résoudre:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \text{ qui donne la courbe caractéristique } \Gamma \\ du = 0 \text{ qui donne la solution } u(x, t) \text{ sur cette courbe caractéristique} \end{cases}$$

- **Courbe caractéristique:**

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ donne } x(t) = ut + \xi (\text{avec } \xi \text{ une constante réelle d'intégration})$$



• **Solution:**

Sur chaque courbe caractéristique $\Gamma : x - ut = \xi$, on a:

$$du = 0 \Rightarrow u(x, t) = cte = f(\xi) \leftarrow i.e. u \text{ ne depend que de } \xi$$

Soit alors

$$u(x, t) = f(x - ut)$$

Cette solution doit être retrouvée aussi pour $t = 0$.

Or à $t = 0$, on a:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = u_0(x)$$

c'est à dire

$$f \equiv u_0$$

On obtient finalement la solution exacte du problème (E_1) :

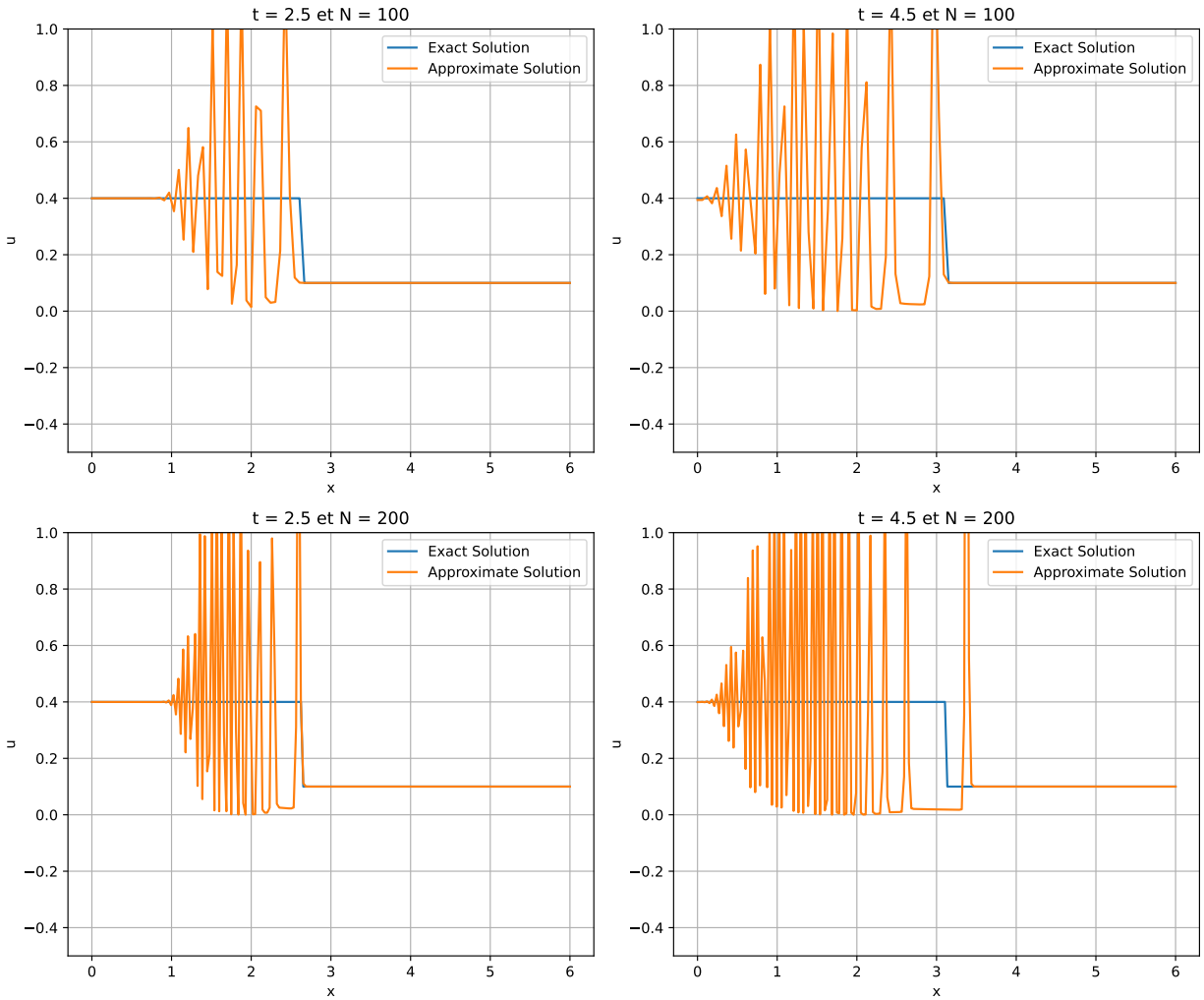
$$u(x, t) = u_0(x - ut), \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall t > 0$$

3) Pour chaque schéma numérique, tracer la solution approchée obtenue au temps $t_1 = 2.5s$ et $t_2 = 4.5s$ avec $N = 100$ et $N = 200$. Commenter les résultats obtenus.

- **Schéma 1 (centré):**

on a alors le schéma numérique centre:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) & \forall t > 0 \end{cases}$$



On remarque que pour le schéma centre associe a l'équation de Burger, la solution numérique est instable pour $N = 100$ et $N = 200$.

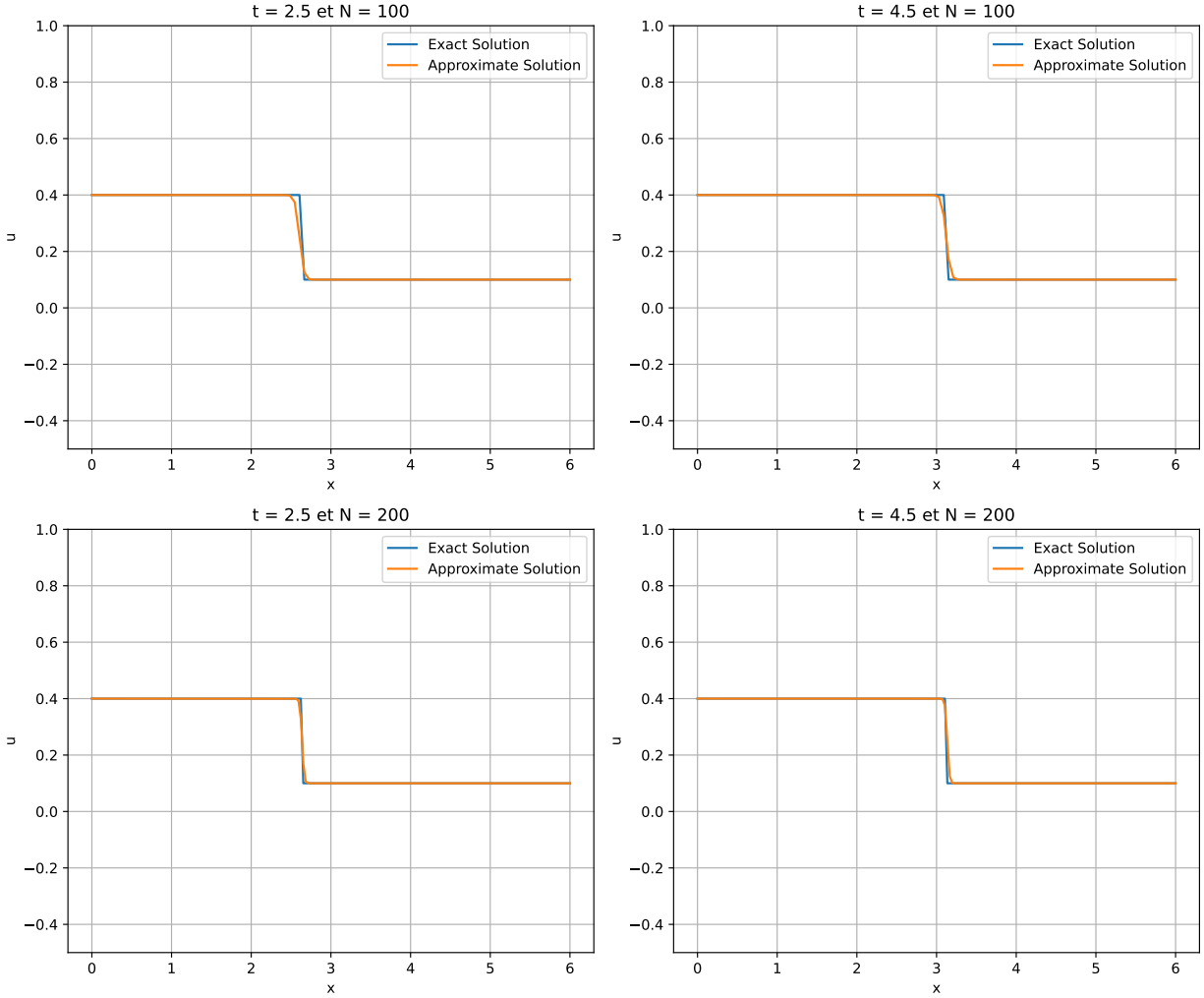
- **Schéma 2 décentré en amont:**

Transformons l'équation de Burgers en une équation de transport pour pouvoir appliquer le schéma numérique décentré en amont.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \frac{u^2}{2}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} &= 0, \text{ avec } F(u) = \frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

On a alors le schéma numérique décentré en amont:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F(u_j^n) - F(u_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

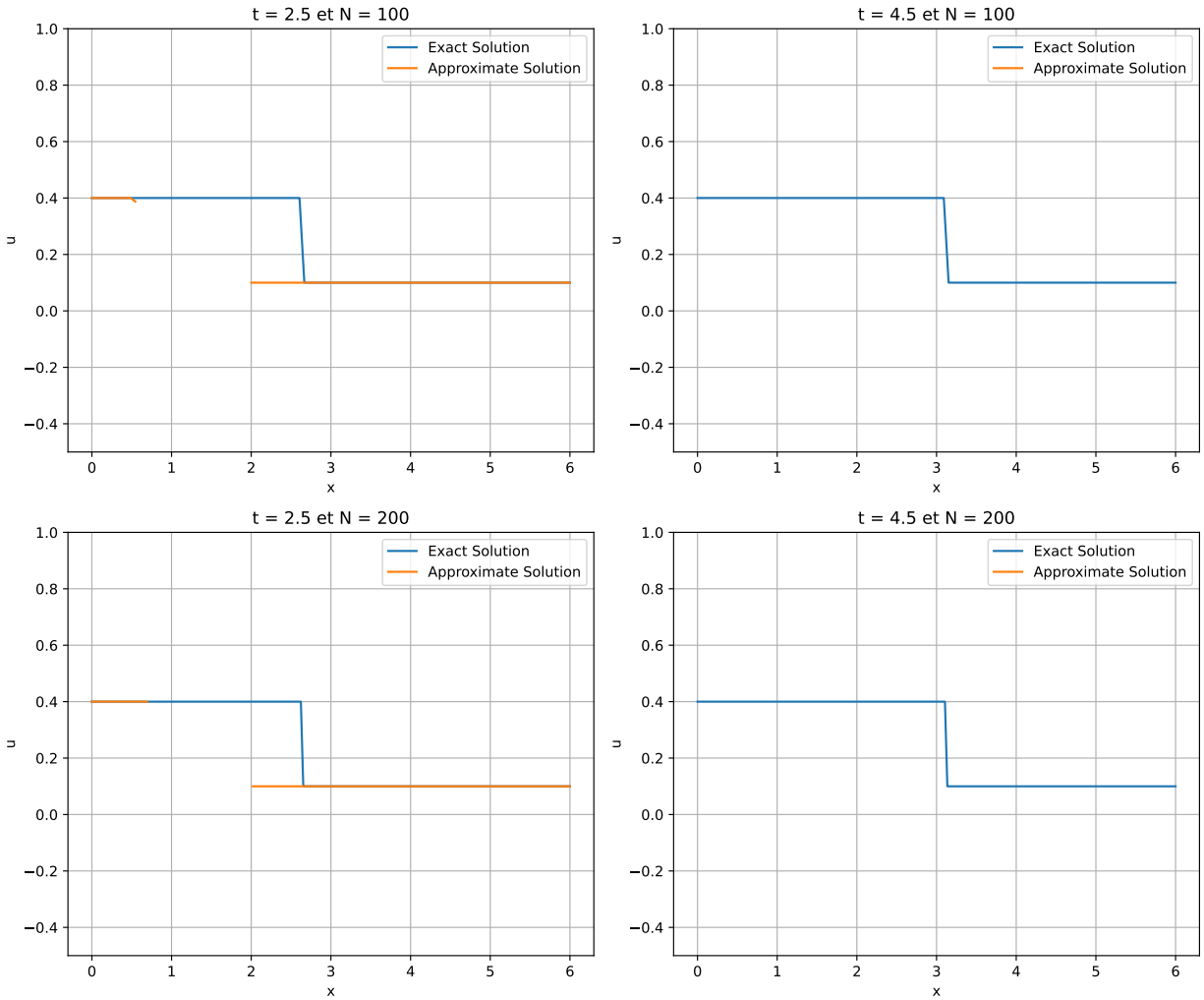


On remarque que pour le schéma décentré en amont associé à l'équation de Burger, la solution numérique est stable pour $N = 100$ et $N = 200$.

- Schéma 2 décentré en aval:

On a le schéma numérique décentré en aval:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

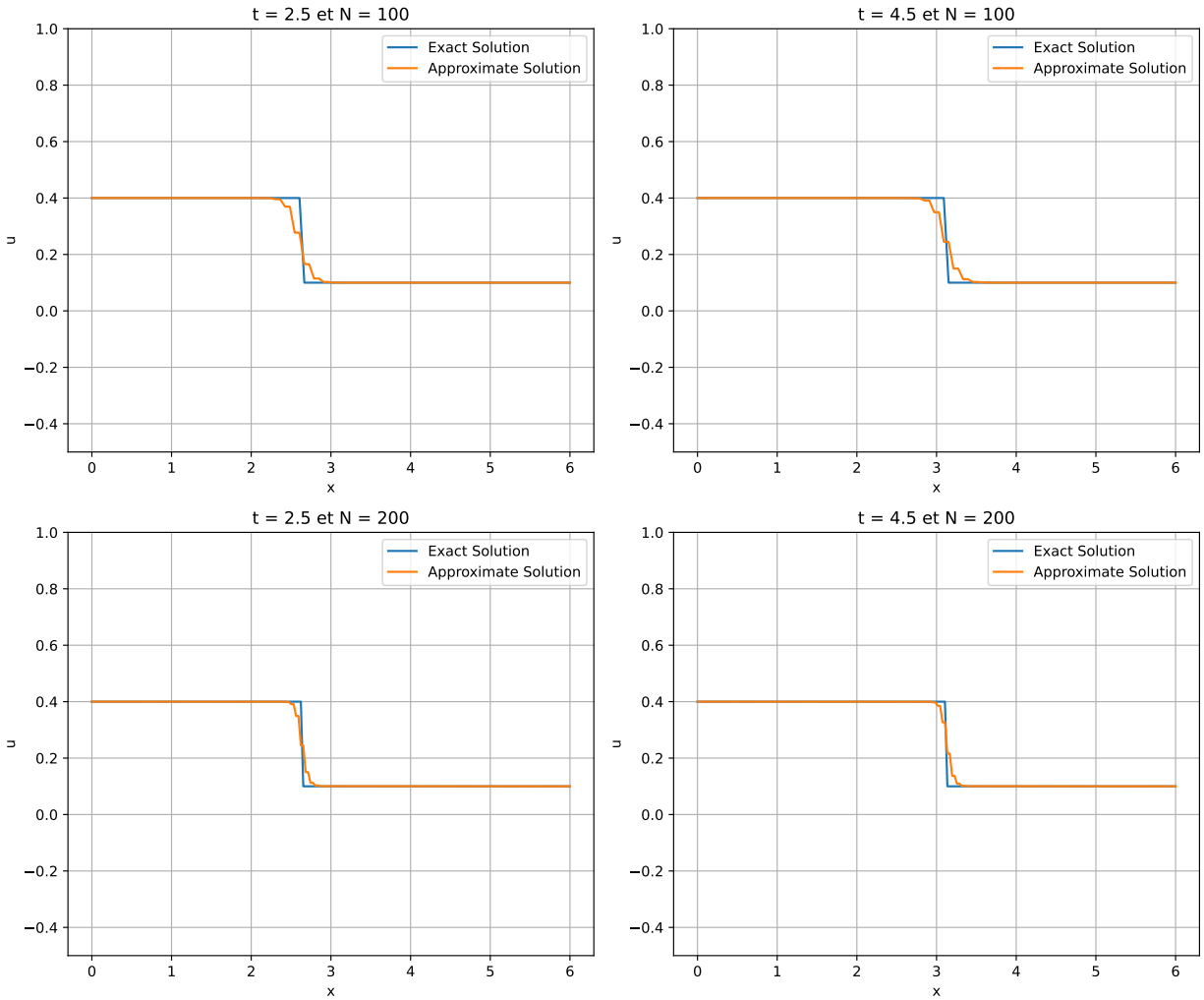


On remarque que pour le schéma décentré en aval associé à l'équation de Burger, la solution numérique est instable pour $N = 100$ et $N = 200$.

- **Schéma 3 Lax-Friedrichs:**

On a le schéma numérique Lax-Friedrichs:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + \frac{F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) & \forall t > 0 \end{cases}$$

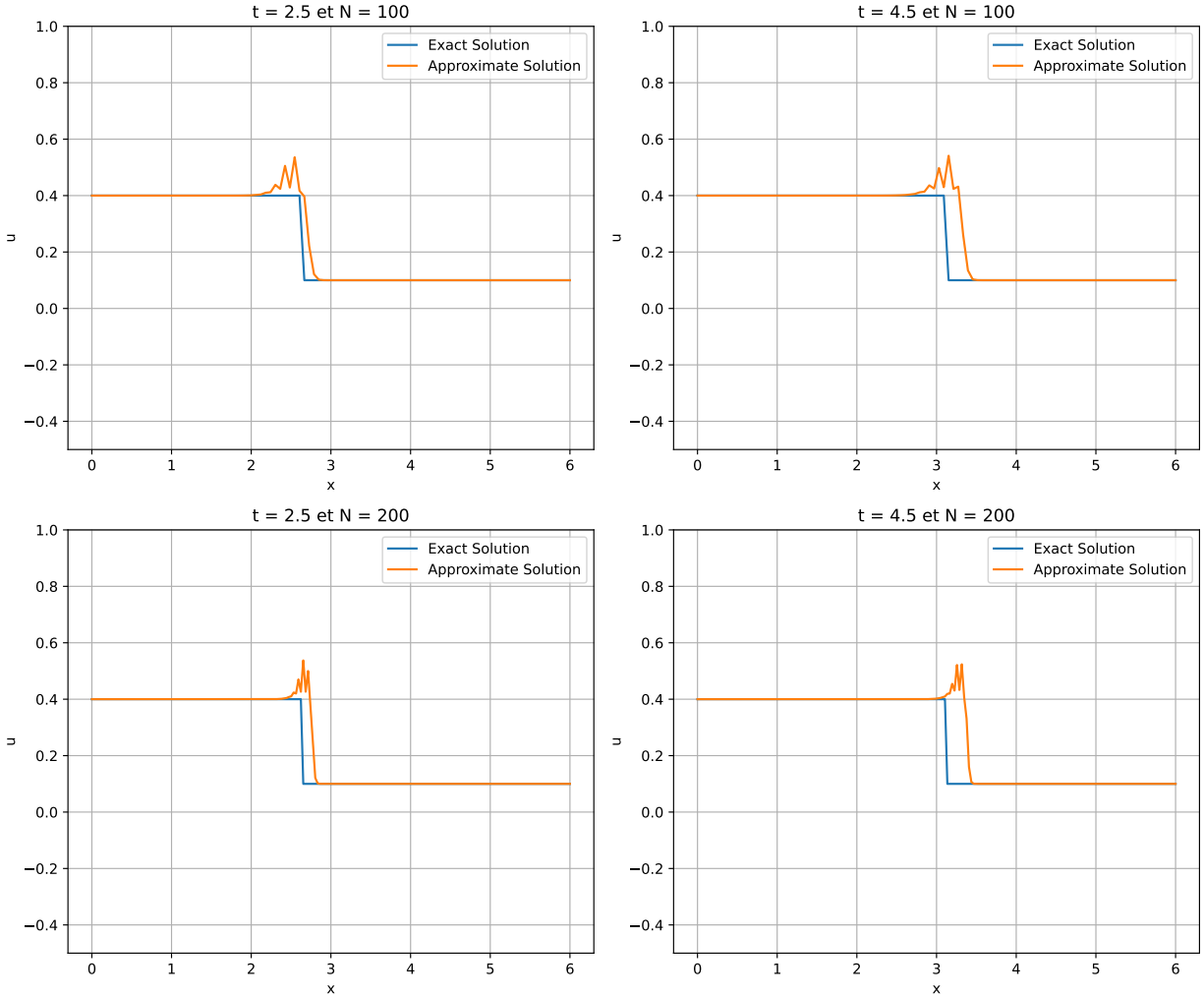


On remarque que pour le schéma Lax-Friedrichs associé à l'équation de Burger, la solution numérique est stable pour $N = 100$ et $N = 200$.

- **Schéma 4 Lax-Wendroff:**

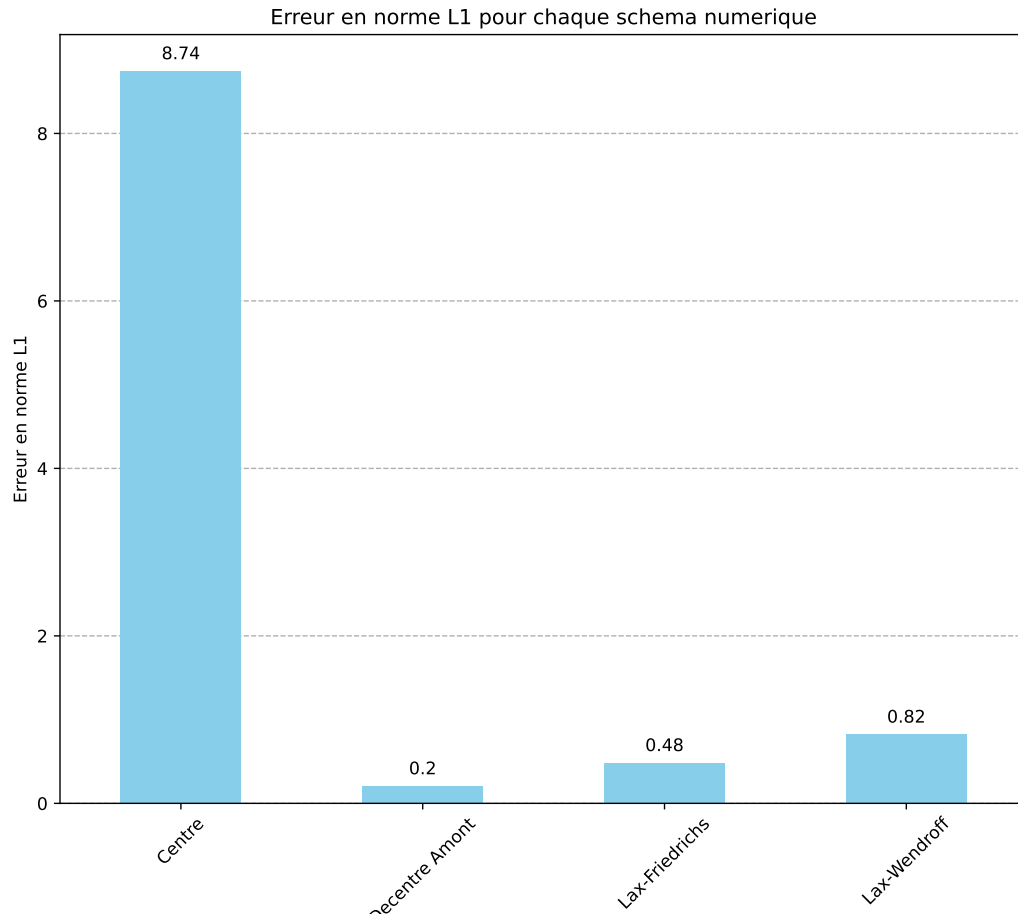
On a le schéma numérique Lax-Wendroff:

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2} (F(u_{j-1}^n) - 2F(u_j^n) + F(u_{j+1}^n)) - \frac{\lambda}{2} (F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n)), & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0, \text{ avec } \alpha = 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) & \forall t > 0 \end{cases}$$



On remarque que pour le schéma Lax-Wendroff associé à l'équation de Burger, la solution numérique est stable pour $N = 100$ et $N = 200$.

- 4) Evaluer Schéma en norme L^1 de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps $t_1 = 2.5s$ et pour $N = 100$. Interpréter.



On remarque que le schéma numérique décentré en amont a la plus petite erreur en norme L^1 au temps $t_1 = 2.5s$ et pour $N = 100$. En effet, le schéma numérique décentré en amont apparaît être le schéma numérique le plus précis pour résoudre l'équation de Burger au sein de notre expérience.

Données :

$L = 6m$, $u_0(x) = 0.4$ pour $x < 2m$ et 0.1 ailleurs. $CFL = 0.8$.

References

1. https://folk.ntnu.no/leifh/teaching/tkt4140/._main075.html
2. https://uma.ensta-paristech.fr/conf/tipe/2014/talks/scilab2/transport_burgers%20p.pdf