

Mini-Projet Etude et application de quelques schémas aux différences finies pour deux lois de conservation

AMECK GUY-MAX DESIRE DOSSEH & RIM ELMGHARI

2024-02-04

On souhaite étudier, appliquer et voir le comportement de quelques schémas aux différences finies pour deux équations relevant de lois de conservation 1D définies sur un domaine $\Omega = [0, L]$.

1. Equation de transport

On considère l'équation de transport soumise à des conditions aux limites periodiques:

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) ; \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

1) A l'aide de la methode des caracteristiques, determiner la solution exacte $u(x, t)$ du probleme (E_1) .

Nous allons chercher une courbe caractéristique $\Gamma((t(s), x(s)))$, s étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} \right) \end{aligned}$$

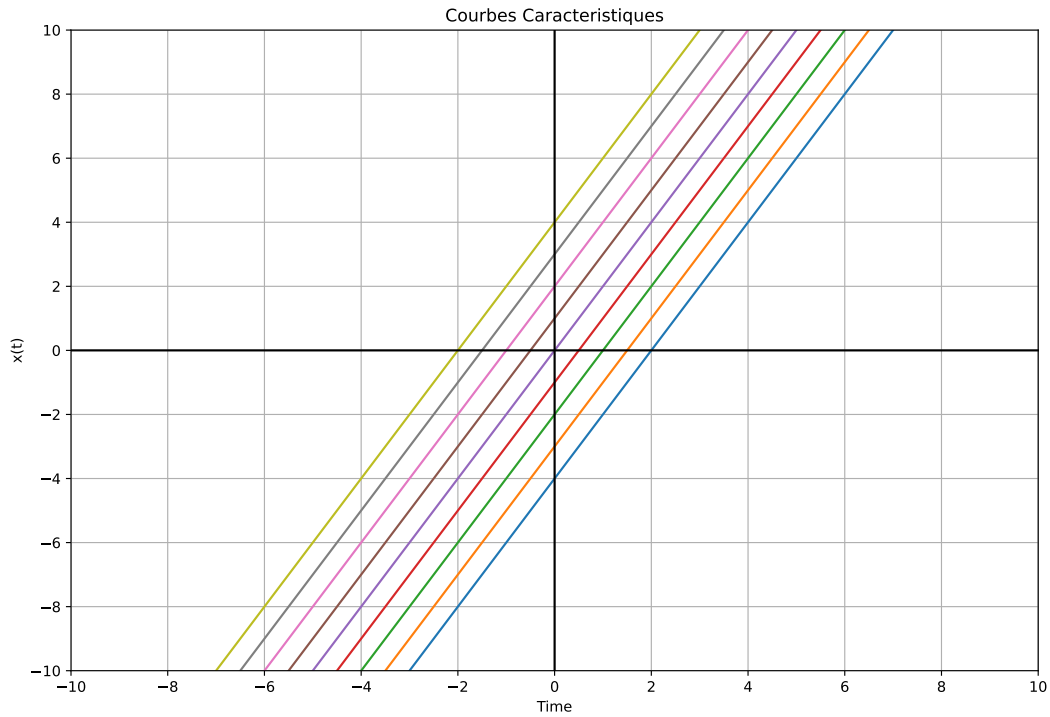
On voit que si on impose $\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} = 0$, on a $\frac{du}{ds} = 0$, c'est à dire que u est constant le long de la courbe caractéristique.

On a donc le système d'EDO suivant a resoudre:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \text{ qui donne la courbe caractéristique } \Gamma \\ \frac{du}{dt} = 0 \text{ qui donne la solution } u(x, t) \text{ sur cette courbe caractéristique} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques:

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ donne } x(t) = at + \xi (\text{avec } \xi \text{ une constante réelle d'intégration})$$



Solution

Sur chaque courbe caractéristique (Γ) : $x - at = \xi$, on a:

$$du = 0 \Rightarrow u(x, t) = cte = f(\xi) \leftarrow \text{i.e. } u \text{ ne depend que de } \xi$$

Soit alors

$$u(x, t) = f(x - at)$$

Cette solution doit etre retrouvee aussi pour $t = 0$.

Or a $t = 0$, on a:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = u_0(x)$$

c'est a dire

$$f \equiv u_0$$

On obtient finalement la solution exacte du probleme (E_1):

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall t > 0$$

On discretise l'intervalle $[0, L]$ en $(N - 1)$ sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, N - 1$) de tailles egales Δx ($\Delta x = \frac{L}{N-1}$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$), et on note par u_i^n la solution approchee au noeud x_i a l'instant $t^n = n\Delta t$ (Δt etant le pas de chnage).

2) Etudier la consistance, la stabilite et la convergence de chacun des schemas numeriques suivants:

Schema 1 (centre):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le developpement de Taylor pour evaluer la consistance du schema. On a:

- D'une part le developpement de Taylor de u_j^{n+1} à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

- Et d'autre part le developpement de Taylor de u_{j+1}^n et u_{j-1}^n à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

On obtient alors le schema numerique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Par definition de la consistance, Un schema est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}((\Delta x)^2)| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 1 centre est consistant.

• Stabilité

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\ &\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\xi\Delta x) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} i \sin(\xi\Delta x)) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x))^n C^0 \end{aligned}$$

On doit avoir $|1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned} |1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\ 1 + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \text{ (ce qui est absurde)} \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 1 centre est instable.

- **Convergence**

En utilisant la contraposée du théorème de Lax, on a :

Le schéma 1 centre n'est pas stable, donc il n'est pas convergent.

Schema 2 (decentre):

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a < 0\end{aligned}$$

Schema 3 (Lax-Friedrichs):

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Schema 4 (Lax-Wendroff):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0$$

- 3) Implémenter chacun des schémas numériques pour évaluer la solution approchée, puis comparer cette solution avec la solution exacte. (Tracer les solutions aux temps physiques $t_1 = 2.5$ s et $t_2 = 4.5$ s en testant sur deux maillages différents formés de $N = 100$ et $N = 200$ points. Interpréter les résultats.
- 4) Evaluer l'erreur en norme L^1 de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps $t_1 = 2.5$ s et pour $N = 100$. Interpréter.

Données :

$L = 10m$, $a = 2m/s$, $u_0(x) = 1$ pour $3m \leq x \leq 4m$ et 0 ailleurs.

Nombre de Courant : $CFL = 0.8$.

2. Equation de Burgers

On considère maintenant l'équation de Burgers suivante:

$$(E_2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

- 5) Reprendre les questions 1), 3) et 4).

Données :

$L = 6m$, $u_0(x) = 0.4$ pour $x < 2m$ et 0.1 ailleurs. $CFL = 0.8$.