

# Mini-Projet Etude et application de quelques schémas aux différences finies pour deux lois de conservation

AMECK GUY-MAX DESIRE DOSSEH & RIM ELMGHARI

2024-02-04

On souhaite étudier, appliquer et voir le comportement de quelques schémas aux différences finies pour deux équations relevant de lois de conservation 1D définies sur un domaine  $\Omega = [0, L]$ .

## 1. Equation de transport

On considère l'équation de transport soumise à des conditions aux limites periodiques:

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in ]0, L[ ; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) ; \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

1) A l'aide de la methode des caracteristiques, determiner la solution exacte  $u(x, t)$  du probleme  $(E_1)$ .

Nous allons chercher une courbe caractéristique  $\Gamma((t(s), x(s)))$ ,  $s$  étant le paramètre qui décrit la courbe, le long de laquelle l'EDP devient un système d'EDO.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \\ \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} \right) \end{aligned}$$

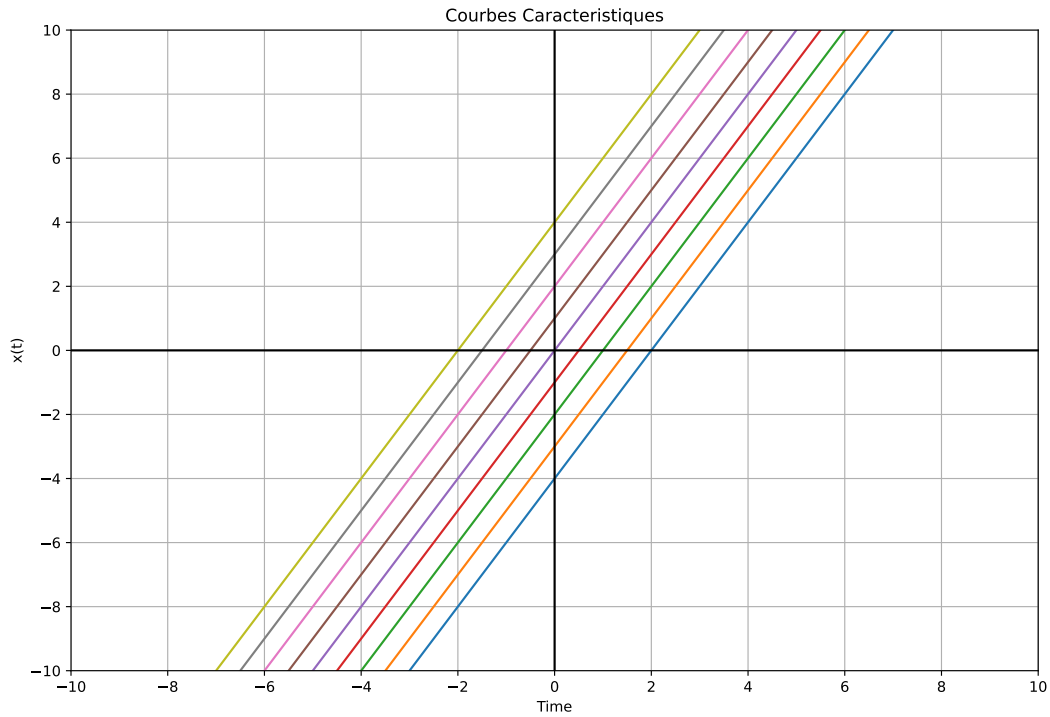
On voit que si on impose  $\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} = 0$ , on a  $\frac{du}{ds} = 0$ , c'est à dire que  $u$  est constant le long de la courbe caractéristique.

On a donc le système d'EDO suivant a resoudre:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \text{ qui donne la courbe caractéristique } \Gamma \\ \frac{du}{dt} = 0 \text{ qui donne la solution } u(x, t) \text{ sur cette courbe caractéristique} \end{cases}$$

### Courbes caractéristiques:

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ donne } x(t) = at + \xi (\text{avec } \xi \text{ une constante réelle d'intégration})$$



### Solution

Sur chaque courbe caractéristique ( $\Gamma$ ) :  $x - at = \xi$ , on a:

$$du = 0 \Rightarrow u(x, t) = cte = f(\xi) \leftarrow \text{i.e. } u \text{ ne depend que de } \xi$$

Soit alors

$$u(x, t) = f(x - at)$$

Cette solution doit etre retrouvee aussi pour  $t = 0$ .

Or a  $t = 0$ , on a:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = u_0(x)$$

c'est a dire

$$f \equiv u_0$$

On obtient finalement la solution exacte du probleme ( $E_1$ ):

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall t > 0$$

On discretise l'intervalle  $[0, L]$  en  $(N - 1)$  sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ) de tailles egales  $\Delta x$  ( $\Delta x = \frac{L}{N-1}$ ,  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ ), et on note par  $u_i^n$  la solution approchee au noeud  $x_i$  a l'instant  $t^n = n\Delta t$  ( $\Delta t$  etant le pas de chnage).

2) Etudier la consistance, la stabilite et la convergence de chacun des schemas numeriques suivants:

**Schema 1 (centre):**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le developpement de Taylor pour evaluer la consistance du schema. On a:

- D'une part le developpement de Taylor de  $u_j^{n+1}$  à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

- Et d'autre part le developpement de Taylor de  $u_{j+1}^n$  et  $u_{j-1}^n$  à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

On obtient alors le schema numerique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in ]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Par definition de la consistance, Un schema est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}((\Delta x)^2)| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 1 centre est consistant.

#### • Stabilité

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\ &\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin(\xi\Delta x) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} i \sin(\xi\Delta x)) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \\ &\implies C^{n+1} = (1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x))^n C^0 \end{aligned}$$

On doit avoir  $|1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned} |1 - i\lambda \sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\ 1 + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \text{ ( ce qui est absurde)} \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 1 centre est instable.

- **Convergence**

En utilisant la contraposée du théorème de Lax, on a:

Le schéma 1 centre n'est pas stable, donc il n'est pas convergent.

**Schema 2 (decentre):**

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a > 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} &= 0 \text{ si } a < 0\end{aligned}$$

- **Cas  $a > 0$**

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de  $u_j^{n+1}$  à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)\end{aligned}$$

+ Et d'autre part le développement de Taylor de  $u_j^n$  et  $u_{j-1}^n$  à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}u_j^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)\end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in ]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned}\text{ET} &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)\end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en amont est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi j\Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi j\Delta x} - C^n e^{i\xi (j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j\Delta x} + a \frac{1 - e^{-i\xi \Delta x}}{\Delta x} C^n e^{i\xi j\Delta x} = 0 \\ &\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi \Delta x}) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-i\xi \Delta x})) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (1 - \lambda(1 - e^{-i\xi \Delta x})) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

On doit avoir  $|1 - \lambda(1 - e^{-i\xi \Delta x})| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
& |1 - \lambda(1 - e^{-i\xi\Delta x})|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda(1 - (\cos(-\xi\Delta x) + i\sin(-\xi\Delta x)))|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda(1 - \cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x))|^2 \leq 1 \\
& |1 - \lambda + \lambda\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)|^2 \leq 1 \\
& (1 - \lambda + \lambda\cos(\xi\Delta x))^2 + (\lambda\sin(\xi\Delta x))^2 \leq 1 \\
& 1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2\cos^2(\xi\Delta x) + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) + \lambda^2\sin^2(\xi\Delta x) \leq 1 \\
& 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 1 \\
& 2\lambda^2 - 2\lambda + 2(1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda^2 - \lambda + (1 - \lambda)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1)\lambda\cos(\xi\Delta x) \leq 0 \\
& \lambda(\lambda - 1)(1 - \cos(\xi\Delta x)) \leq 0
\end{aligned}$$

Or  $\lambda > 0$  et  $1 - \cos(\xi\Delta x) \geq 0$ , on doit donc avoir:

$$\begin{aligned}
\lambda - 1 &\leq 0 \\
\lambda &\leq 1 \\
\lambda &= \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 2 décentré en amont est stable si  $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

- **Convergence**

Le schéma 2 décentré étant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le théorème de Lax sous les mêmes conditions de stabilité, on déduit que le schéma 2 décentré en amont ( $a > 0$ ) est convergent.

- **Cas  $a < 0$**

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de  $u_j^{n+1}$  à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2) \\
\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)
\end{aligned}$$

- Et d'autre part le développement de Taylor de  $u_{j+1}^n$  et  $u_j^n$  à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\
u_j^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \\
\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x)
\end{aligned}$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 & \forall x \in ]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace.

Par définition de la consistance, un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t) = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)| \leq C|\Delta x| \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x) = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 2 décentré en aval est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$



et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi (j+1) \Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta x} = 0 \\
&\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j \Delta x} + a \frac{e^{i\xi \Delta x} - 1}{\Delta x} C^n e^{i\xi j \Delta x} = 0 \\
&\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (1 - e^{i\xi \Delta x}) C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - \lambda(1 - e^{i\xi \Delta x})) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a \Delta t}{\Delta x}
\end{aligned}$$

On doit avoir  $|1 - \lambda(1 - e^{i\xi \Delta x})| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned}
|1 - \lambda(1 - e^{i\xi \Delta x})|^2 &\leq 1 \\
|1 - \lambda(1 - \cos(\xi \Delta x) + i \sin(\xi \Delta x))|^2 &\leq 1 \\
|1 - \lambda + \lambda \cos(\xi \Delta x) - i \lambda \sin(\xi \Delta x)|^2 &\leq 1 \\
(1 - \lambda + \lambda \cos(\xi \Delta x))^2 + (\lambda \sin(\xi \Delta x))^2 &\leq 1 \\
1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2(\xi \Delta x) + 2(1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2(1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
2\lambda^2 - 2\lambda + 2(1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda^2 - \lambda + (1 - \lambda)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1)\lambda \cos(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda(\lambda - 1)(1 - \cos(\xi \Delta x)) &\leq 0
\end{aligned}$$

Or  $\lambda < 0$  et  $1 - \cos(\xi \Delta x) \geq 0$ , alors, le schéma 2 décentré en aval est inconditionnellement stable.

- **Convergence**

Le schéma 2 décentré étant consistant et stable; en utilisant le théorème de Lax, on déduit que le schéma 2 décentré en aval ( $a < 0$ ) est convergent.

**Schema 3 (Lax-Friedrichs):**

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le développement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

- D'une part le développement de Taylor de  $u_{j+1}^n$  et  $u_{j-1}^n$  à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\
u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3) \\
\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_j &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)
\end{aligned}$$

- D'une part le développement de Taylor de  $u_j^{n+1}$  à l'ordre 1:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

En utilisant les deux premiers développements de Taylor tronqués à l'ordre 1, on obtient  $u_j^n$  comme somme de  $u_{j+1}^n$  et  $u_{j-1}^n$ :

$$u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + O((\Delta x)^2)$$

En remplaçant dans le troisième développement de Taylor, on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 & \forall x \in ]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ &= O(\Delta t) + O(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc un schéma d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Par définition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$$

Or

$$|O(\Delta t)| \leq C|\Delta t| \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t) = 0$$

et

$$|O(\Delta x)^2| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} O(\Delta x)^2 = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 3 Lax-Friedrichs est consistant.

- **Stabilité**

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi x_{j-1}} + C^n e^{i\xi x_{j+1}})}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j\Delta x} - \frac{1}{2}(C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x} + C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x})}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\xi(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \\ &\implies \frac{C^{n+1} - \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x})}{\Delta t} + a \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} C^n = 0 \\ &\implies C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n e^{-i\xi\Delta x} + C^n e^{i\xi\Delta x}) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}) C^n \\ &\implies C^{n+1} = \frac{1}{2}(C^n (\cos(\xi\Delta x) - i\sin(\xi\Delta x)) + C^n (\cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x))) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (C^n (\cos(\xi\Delta x) - i\sin(\xi\Delta x)) - C^n (\cos(\xi\Delta x) + i\sin(\xi\Delta x))) \\ &\implies C^{n+1} = \frac{1}{2}(2\cos(\xi\Delta x) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} 2i\sin(\xi\Delta x)) C^n \\ &\implies C^{n+1} = (\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)) C^n, \text{ avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

On doit avoir  $|\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a:

$$\begin{aligned} |\cos(\xi\Delta x) - i\lambda\sin(\xi\Delta x)|^2 &\leq 1 \\ (\cos(\xi\Delta x))^2 + (\lambda\sin(\xi\Delta x))^2 &\leq 1 \\ \cos^2(\xi\Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ 1 - \sin^2(\xi\Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ 1 - (1 - \lambda^2) \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 1 \\ -(1 - \lambda^2) \sin^2(\xi\Delta x) &\leq 0 \\ 1 - \lambda^2 &\geq 0 \\ \lambda^2 &\leq 1 \\ \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x} &\leq 1 \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 3 Lax-Friedrichs est stable si  $\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  (**condition de Courant-Friedrichs-Lewy**).

- **Convergence**

Le schema 3 Lax-Friedrichs etant consistant et conditionnellement stable; en utilisant le theoreme de Lax, on deduit que le schema 3 Lax-Friedrichs est convergent.

**Schema 4 (Lax-Wendroff):**

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0$$

- **Consistance**

Utilisons le developpement de Taylor pour évaluer la consistance du schéma. On a:

Le developpement de Taylor de  $u$  en  $(x_j, t^n + \Delta t)$  a l'ordre 2 est:

$$u(x_j, t^n + \Delta t) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Or  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

D'où:

$$\begin{aligned} u(x_j, t^n + \Delta t) &= u(x_j, t^n) - a\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{1}{2}a^2(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - a\Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n + \frac{1}{2}a^2(\Delta t)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{a^2}{2}\Delta t \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{aligned}$$

Utilisons les developpements de Taylor de  $u_{j+1}^n$  et  $u_{j-1}^n$  a l'ordre 3 pour approximer la derivee seconde de  $u$  par rapport a  $x$ :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)) \end{aligned}$$

On a finalement comme approximation pour la derivee temporelle de  $u$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

En utilisant les developpements de Taylor de  $u_{j+1}^n$  et  $u_{j-1}^n$  a l'ordre 2 precedents, on obtient comme pour approximation pour la derivee spatiale:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

On obtient alors le schéma numérique:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) = 0 & \forall x \in ]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

dont l'erreur de troncature est:

$$\begin{aligned} \text{ET} &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \right) \\ &= \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc un schema d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.

Par definition de la consistance, Un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0. Soit:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Dans notre cas, on a:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Or

$$|\mathcal{O}(\Delta t)^2| \leq C|\Delta t|^2 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta t)^2 = 0$$

et

$$|\mathcal{O}(\Delta x)^2| \leq C|\Delta x|^2 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x)^2 = 0$$

D'où:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \text{ET} = 0$$

Par suite, le schéma 4 Lax-Wendroff est consistant.

#### • Stabilité

Pour étudier la stabilité du schéma, on utilise la méthode de Von Neumann. On pose:

$$u_j^n = C^n e^{i\xi x_j}, \text{ avec } x_j = j\Delta x \text{ et } \xi \text{ est le nombre d'onde}$$

et on injecte cette solution dans le schéma numérique:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) &= 0 \implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi x_j} - C^n e^{i\xi x_j}}{\Delta t} + a \frac{C^n e^{i\xi x_{j+1}} - C^n e^{i\xi x_{j-1}}}{2\Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (C^n e^{i\xi x_{j-1}} - 2C^n e^{i\xi x_j} + C^n e^{i\xi x_{j+1}}) \\
&\implies \frac{C^{n+1} e^{i\xi j \Delta x} - C^n e^{i\xi j \Delta x}}{\Delta t} + a \frac{e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x}}{2\Delta x} e^{i\xi j \Delta x} C^n - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (C^n e^{i\xi (j-1) \Delta x} - 2C^n e^{i\xi j \Delta x} + C^n e^{i\xi (j+1) \Delta x}) \\
&\implies \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} e^{i\xi j \Delta x} + a \frac{e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x}}{2\Delta x} C^n e^{i\xi j \Delta x} - \frac{a^2 \Delta t}{2(\Delta x)^2} (C^n e^{i\xi (j-1) \Delta x} - 2C^n e^{i\xi j \Delta x} + C^n e^{i\xi (j+1) \Delta x}) \\
&\implies C^{n+1} = C^n - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (i \sin(\xi \Delta x)) C^n + \frac{a^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (\cos(\xi \Delta x) - 1) C^n \\
&\implies C^{n+1} = (1 - i \lambda \sin(\xi \Delta x) + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1)) C^n, \text{ avec } \lambda = a \Delta t / \Delta x
\end{aligned}$$

On doit avoir  $|1 - i \lambda \sin(\xi \Delta x) + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1)| \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

On a :

$$\begin{aligned}
|1 - i \lambda \sin(\xi \Delta x) + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1)|^2 &\leq 1 \\
|1 + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1) - i \lambda \sin(\xi \Delta x)|^2 &\leq 1 \\
(1 + \lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1))^2 + (\lambda \sin(\xi \Delta x))^2 &\leq 1 \\
1 + 2\lambda^2 (\cos(\xi \Delta x) - 1) + \lambda^4 (\cos^2(\xi \Delta x) - 2\cos(\xi \Delta x) + 1) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
1 + 2\lambda^2 \cos(\xi \Delta x) - 2\lambda^2 + \lambda^4 \cos^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 1 \\
2\lambda^2 \cos(\xi \Delta x) - 2\lambda^2 + \lambda^4 \cos^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
2\lambda^2 (1 - \sin^2(\xi \Delta x)) - 2\lambda^2 + \lambda^4 \cos^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
2\lambda^2 - 2\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^2 + \lambda^4 \cos^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
-2\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) + \lambda^4 \cos^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda^4 \cos^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 - 2\lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) + \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda^4 (1 - \sin^2(\xi \Delta x)) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
\lambda^4 - \lambda^4 \sin^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) + \lambda^4 - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
2\lambda^4 - 2\lambda^4 \sin^2(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
2\lambda^4 - 2\lambda^4 \cos(\xi \Delta x) - 2\lambda^4 \sin^2(\xi \Delta x) - \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
2\lambda^4 (1 - \cos(\xi \Delta x)) - (2\lambda^2 + 1) \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
-2\lambda^4 (\cos(\xi \Delta x) - 1) - (2\lambda^2 + 1) \lambda^2 \sin^2(\xi \Delta x) &\leq 0 \\
-4\lambda^4 \sin^2(\frac{\xi \Delta x}{2}) - 2\lambda^2 (2\lambda^2 + 1) \sin^2 \frac{\xi \Delta x}{2} \cos^2 \frac{\xi \Delta x}{2} &\leq 0 \quad (\text{ce qui est vrai } \forall \xi \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Ainsi, le schéma 4 Lax-Wendroff est inconditionnellement stable.

### • Convergence

Le schéma 4 Lax-Wendroff étant consistant et stable; en utilisant le théorème de Lax, on déduit que le schéma 4 Lax-Wendroff est convergent.

- 3) Implémenter chacun des schémas numériques pour évaluer la solution approchée, puis comparer cette solution avec la solution exacte. (Tracer les solutions aux temps physiques  $t_1 = 2.5$  s et  $t_2 = 4.5$  s en testant sur deux maillages différents formés de  $N = 100$  et  $N = 200$  points. Interpréter les résultats.

- 4) Evaluer l'erreur en norme  $L^1$  de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps  $t_1 = 2.5s$  et pour  $N = 100$ . Interpréter.

**Données :**

$L = 10m$ ,  $a = 2m/s$ ,  $u_0(x) = 1$  pour  $3m \leq x \leq 4m$  et 0 ailleurs.

Nombre de Courant :  $CFL = 0.8$ .

## 2. Equation de Burgers

On considère maintenant l'équation de Burgers suivante:

$$(E_2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall x \in ]0, L[ ; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

- 5) Reprendre les questions 1), 3) et 4).

**Données :**

$L = 6m$ ,  $u_0(x) = 0.4$  pour  $x < 2m$  et 0.1 ailleurs.  $CFL = 0.8$ .