

# 经济网络:理论与计算

QUANTECON BOOK I

John Stachurski  
Thomas J. Sargent

【译】窦钱斌 孙美露 胡灵

2023 年 2 月 9 日

# 目录

常用符号	IV
<b>第一章 引言</b>	<b>1</b>
1.1 动机 . . . . .	1
1.2 谱理论 . . . . .	5
1.2.1 特征分解 . . . . .	5
1.2.2 Neumann 级数引理 . . . . .	10
1.2.3 Perron–Frobenius 定理 . . . . .	12
1.3 概率 . . . . .	15
1.3.1 离散概率 . . . . .	15
1.3.2 幂律 . . . . .	18
1.4 图论 . . . . .	23
1.4.1 非加权有向图 . . . . .	24
1.4.2 加权有向图 . . . . .	30
1.4.3 网络中心度 . . . . .	38
1.4.4 无标度网络 . . . . .	45
1.5 章节说明 . . . . .	48
<b>第二章 生产</b>	<b>50</b>
2.1 多部门模型 . . . . .	50
2.1.1 生产网络 . . . . .	50
2.1.2 均衡 . . . . .	53
2.1.3 需求冲击 . . . . .	58
2.1.4 前向关联 . . . . .	64
2.2 一般均衡 . . . . .	67
2.2.1 供给和需求 . . . . .	67
2.2.2 粒状假说 . . . . .	70

2.2.3 网络结构与冲击传播 . . . . .	73
2.3 其他谱理论 . . . . .	77
2.3.1 向量范数 . . . . .	77
2.3.2 矩阵范数 . . . . .	79
2.3.3 矩阵空间的迭代 . . . . .	82
2.3.4 精确的稳定性条件 . . . . .	84
2.4 章节说明 . . . . .	87
<b>第三章 最优流</b>	<b>88</b>
3.1 最短路径 . . . . .	88
3.1.1 定义与示例 . . . . .	88
3.1.2 贝尔曼方法 . . . . .	91
3.1.3 介数中心度 . . . . .	97
3.2 线性规划与对偶性 . . . . .	97
3.2.1 线性分配 . . . . .	98
3.2.2 线性规划 . . . . .	100
3.3 最优传输 . . . . .	106
3.3.1 Monge-Kantorovich 问题 . . . . .	106
3.3.2 Kantorovich 对偶 . . . . .	117
3.3.3 最优传输和竞争性均衡 . . . . .	118
3.3.4 一般流问题 . . . . .	121
3.4 章节说明 . . . . .	125
<b>第四章 马尔可夫链与网络</b>	<b>127</b>
4.1 马尔可夫链有向图 . . . . .	127
4.1.1 马尔可夫模型 . . . . .	127
4.1.2 分布动态 . . . . .	134
4.1.3 平稳性 . . . . .	137
4.2 渐进理论 . . . . .	140
4.2.1 遍历性 . . . . .	140
4.2.2 非周期性和平稳性 . . . . .	144
4.2.3 Markov–Dobrushin 系数 . . . . .	147
4.2.4 信息和社会网络 . . . . .	152
4.3 章节说明 . . . . .	155

<b>第五章 非线性交互作用</b>	<b>156</b>
5.1 不动点理论 . . . . .	156
5.1.1 压缩映射 . . . . .	157
5.1.2 最短路径问题再探讨 . . . . .	160
5.1.3 供给约束 . . . . .	161
5.1.4 不动点和单调性 . . . . .	162
5.2 金融网络 . . . . .	165
5.2.1 传染 . . . . .	165
5.2.2 违约级联 . . . . .	166
5.2.3 资产:交叉持股 . . . . .	170
5.3 章节说明 . . . . .	173
<b>第六章 附录</b>	<b>175</b>
6.1 数学回顾 . . . . .	175
6.1.1 集合和函数 . . . . .	175
6.1.2 序 . . . . .	183
6.1.3 收敛 . . . . .	186
6.1.4 线性代数 . . . . .	189
6.1.5 凸性和凹性 . . . . .	198
6.1.6 最优化 . . . . .	201
6.1.7 拉格朗日对偶 . . . . .	203
6.2 部分练习解答 . . . . .	207
<b>参考文献</b>	<b>229</b>

# 常用符号

$P \implies Q$	$P$ 意味着 $Q$
$P \iff Q$	$P \implies Q$ 和 $Q \implies P$
$[n]$	集合 $\{1, \dots, n\}$
$\alpha := 1$	$\alpha$ 被定义为等于 1
$f \equiv 1$	函数 $f$ 处处等于 1
$\wp(A)$	$A$ 的幂集, 即集合 $A$ 的所有子集的集合
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$	分别表示自然数、整数和实数
$\mathbb{C}$	复数的集合(见 §6.1.1.8)
$\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+$ , etc.	$\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ 等中的非负元素.
$\mathbb{M}^{n \times k}$	所有 $n \times k$ 矩阵
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	主对角线上的元素分别为 $a_1, \dots, a_n$ 的对角矩阵
$ x $	$x \in \mathbb{R}$ 的绝对值
$ B $	集合 $B$ 中元素的数量
$f: A \rightarrow B$	$f$ 是一个从集合 $A$ 到 $B$ 的函数
$x \mapsto y$	$x$ 被映射到 $y$ (在某个给定函数下)
$\mathbb{R}^S$	从 $S$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有函数的集合
$\mathbb{R}^n$	所有实数的 $n$ 元组 ( $n$ -tuples )
$\ x\ _1$	$\ell_1$ 范数 $\sum_i  x_i $ (见 §2.3.1.1)
$\ x\ _\infty$	$\ell_\infty$ 范数 $\max_i  x_i $ (见 §2.3.1.1)
$\ A\ $ , 当 $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$	$A$ 的算子范数(见 §2.3.2.3)
$\langle a, b \rangle$	$a$ 和 $b$ 的内积
$a \vee b$	$a$ 和 $b$ 的最大值(如果它们是向量, 则逐点取值)
$a \wedge b$	$a$ 和 $b$ 的最小值(如果它们是向量, 则逐点取值)
$g \ll h$	函数(或向量) $g$ 在所有地方都严格小于 $h$

$\mathbb{1}$	1 向量或者处处为 1 的方程
$1\{P\}$	指标:若命题 $P$ 为真,则令其为 1,否则为 0
$i_d(v)$	节点 $v$ 的入度
$o_d(v)$	节点 $v$ 的出度
$\mathcal{I}(v)$	节点 $v$ 的直接前驱的集合
$\mathcal{O}(v)$	节点 $v$ 的直接后继的集合
$u \rightarrow v$	节点 $v$ 从节点 $u$ 是可达的
IID	独立同分布
$\delta_x$	集中于点 $x$ 的概率分布
$X \stackrel{d}{=} Y$	$X$ 和 $Y$ 具有相同的分布
$X \sim F$	$X$ 服从 $F$ 分布
$\Pi(\phi, \psi)$	所有 $(\phi, \psi)$ 耦合的集合
$f \circ g$	$f$ 和 $g$ 函数的复合

# 第一章 引言

关系是现实世界的基本结构。

---

Michele Coscia

## 1.1 动机

在过去的数十年里，随着计算机网络的指数式增长，我们见证了“网络科学”的同步快速崛起。当计算机网络使得“网络结构”成为新的关注点时，科学家们发现在各个学科领域中，“网络”几乎无处不在，甚至包括那些已经用其他方法探究了几个世纪的现象。因此，科学家们开始尝试使用网络理论来组织和扩展各个科学领域的知识。

这样的例子有很多，在本章结尾的阅读笔记里，我们列出了涉及网络理论和方法的数百项参考资料。仅在计算机科学和机器学习领域，我们就看到了计算图、图形网络、神经网络和深度学习；在运筹学领域，网络分析则侧重于解决最小成本流、旅行商、最短路径以及分配问题；在生物学领域，网络则是一种用于表达生物实体之间相互作用的标准模型。

在本书中，我们的兴趣是经济和社会现象。在这里，网络也是普遍存在的，比如金融网络、生产网络、贸易网络、运输网络和社会网络。例如，社会和信息网络会影响情绪和观点的发展趋势、消费者的决策、以及一系列同群效应 (peer effect)，金融网络的拓扑结构有助于确定金融系统的相对脆弱性，而生产网络的结构则会影响到贸易、创新和局部冲击的传播。

图1.1-1.2展示了两个贸易网络的例子。图1.1被称为桑基图(Sankey diagram)，这是一种用来表示流动性的图。从左到右表示的是石油流动的方向，左边的国家是前 10 名的原油出口国，而右边则是前 20 名的原油消费国。该图与我们的核心议题之一有关：网络中的最优(和均衡)流。我们将在第三章进行详细讨论。<sup>1</sup>

图1.2显示了 2019 年大型商用飞机的国际贸易情况。<sup>2</sup> 节点(node)大小与出口国的出口总额成正比，连线(link)宽度与出口国对目标国的出口总额成正比。可以发现，美国、法国和德国是主要的出口中心国。

---

<sup>1</sup> 该图是由 QuantEcon 的研究员 Matthew McKay 利用哈佛大学增长实验室 (The Growth Lab) 收集的国际贸易数据 (SITC, Rev 2) 构建的。

<sup>2</sup> 该图同样是由 Matthew McKay 构建的，使用的是 2019 年 SITCRevision 2 的国际贸易数据，商品编码为 7924。该数据涉及到重量至少为 15000 公斤商用飞机的贸易，数据来源为 CID Dataverse。

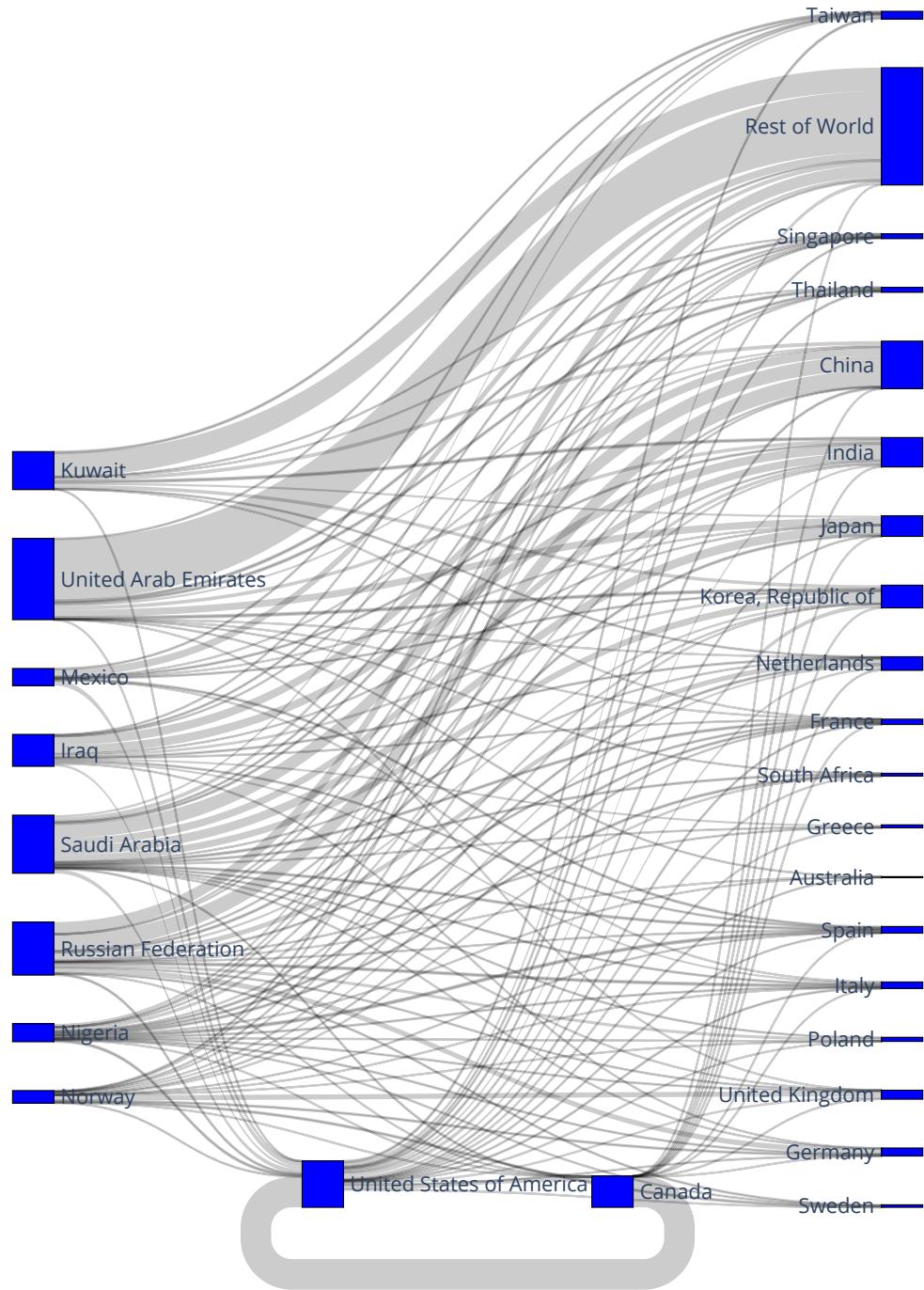


图 1.1: 2019 年原油的国际贸易

在观察图1.1-1.2时, 虽然有些读者一开始可能会怀疑, 网络视角只不过是增加了一种有趣的数据可视化技术, 但实际上它有更丰富的内涵。例如, 在图1.2中, 节点的颜色取决于该节点在网络中“重要性”的排名, 称之为特征向量中心度(eigenvector centrality), 这一概念我们将在 §1.4.3.4中进行介绍。这种排名和中心度的测算是目前网络科学家关注的一个活跃领域, 特征向量和其他形式的中心度概念也贯穿本书。例如, 我们将看到, 这些概念不仅与多年前投入-产出经济学领域的学者提出的基本思想密切相关, 而且还对这些基本思想进行了新的阐释。

此外, 在生产网络研究领域中, 大量事实证明了, 冲击传播的性质在很大程度上取决于网络的底层结构。例如, 对于少数高度关联的节点, 发生在某一家公司或某一个部门的冲击可能会对总体水平的波动产生巨大影响。经济学家们目前正在努力理解其中的关系, 并探究它们与各种中心度指标的相互联系, 以及其他密切相关的现象。

要理解这项工作, 以及网络方法在经济和金融领域的其他应用, 我们需要一些技术基础。例如, 为了定义特征向量中心度, 我们需要熟悉特征向量、谱分解(spectral decompositions)以及 Perron-Frobenius 定理; 为了使用网络科学和经济学中经常出现的卡兹中心度(Katz centrality), 我们需要对 Neumann 级数引理有充分的理解。Perron-Frobenius 定理和 Neumann 级数引理构成了本书的重要技术基础。我们将在 §1.2中详细回顾它们, 并在其它章节中进一步扩展。

网络分析具有挑战性的一个原因是高维性。要了解其中的原因, 请考虑一个具有  $n$  个经济主体的模型, 在一个经济主体是分散的或者由固定数量的价格所调节的模型中, 需要比一个代表性经济主体多  $n$  倍的数据。例如, Carvalho & Grassi (2019) 对  $n = 6 \times 10^6$  家企业的动态进行建模, 在运行模拟时需要跟踪所有这些企业。但是, 如果我们希望对每一对  $i, j$  之间的交互进行建模(如供应联系、负债等), 那么在缺乏稀疏性条件(sparsity conditions)的情况下, 数据处理需求会像  $O(n^2)$  一样增长。<sup>3</sup> 在Carvalho & Grassi (2019) 的例子中,  $n^2$  就是  $3.6 \times 10^{13}$ , 这一数据量即使对于现代计算机也是非常大的。我们可能得到的一个教训是, 如果我们不仔细思考算法的话, 即使使用强大的计算机, 网络模型可能也很难求解。

一般来说, 要很好地掌握经济网络的工作原理, 我们不仅需要计算机技能, 也需要对线性代数、概率论以及离散数学领域中的图论具有较为深刻的理解, 本章的其余部分对这些背景知识进行了相关介绍。在回顾这些知识之前, 我们建议读者先浏览第IV页的常用符号列表, 以及从第175页开始的附录中的数学知识。(该附录不是为了顺序阅读, 而是作为定义和基本结果的溯源, 以便在接下来的内容中进行使用。)

---

<sup>3</sup>有关大  $O$  符号的讨论, 详见 §6.1.3。

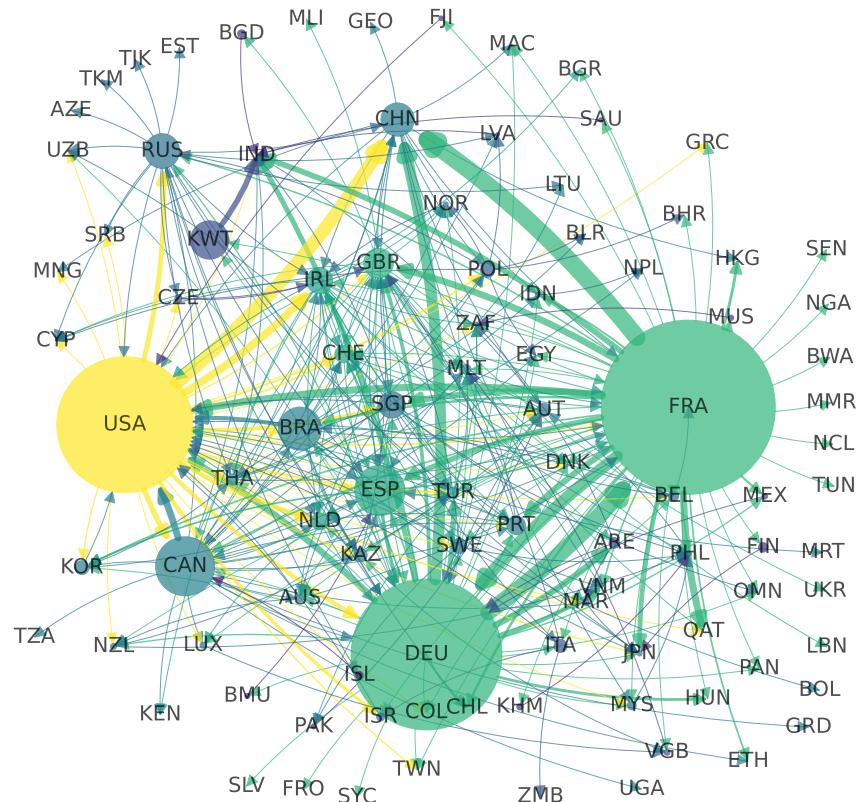


图 1.2: 2019 年商业飞机的国际贸易

## 1.2 谱理论

在本节中, 我们将回顾一些研究图和网络所需的线性代数知识, 重点包括可对角化矩阵的谱分解, Neumann 级数引理, 以及 Perron-Frobenius 定理。

### 1.2.1 特征分解

我们的第一个任务是介绍谱分解 (spectral decompositions) 和谱定理 (spectral theorem), 我们首先简要回顾一下特征值及其性质 (如果你不熟悉特征值和特征向量, 请先查阅基本处理方法, 例如, 参见Cohen (2021))。

#### 1.2.1.1 特征值

令  $A$  为一个  $\mathbb{M}^{n \times n}$ 。如果存在非零的复向量 (complex vector)  $e \in \mathbb{C}^n$  使得  $Ae = \lambda e$ , 则标量  $\lambda \in \mathbb{C}$  称为  $A$  的特征值 (eigenvalue), 满足这个等式的向量  $e$  称为特征值  $\lambda$  所对应的特征向量 (eigenvector) (请注意, 尽管这里我们可以将  $A$  的元素限定为实数, 但是特征值和特征向量也可以是复数)。 $A$  的所有特征值的集合称为  $A$  的谱 (spectrum), 记为  $\sigma(A)$ 。如下文所示,  $A$  最多可以有  $n$  个不同的特征值。

在 Julia 中, 我们可以通过 `eigvals(A)` 代码来检验一个给定方阵  $A$  的特征值。下面给出了一个例子。

```
using LinearAlgebra
A = [0 -1;
      1  0]
eigvals = eigvals(A)
```

在 Jupyter 单元格(带 Julia 内核)或 Julia REPL 中运行这段代码会产生:

```
2-element Vector{ComplexF64}:
 0.0 - 1.0im
 0.0 + 1.0im
```

这里的 `im` 代表  $i$ , 即虚数单位 ( $i^2 = -1$ )。

练习 1.2.1. 用笔和纸, 验证 Julia 的输出结果是正确的。注意是否符合如下结果:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(A) = \{i, -i\}$$

对应的特征向量为  $(-1, i)^\top$  和  $(-1, -i)^\top$ 。

如果  $\lambda \in \sigma(A)$ , 并且  $e$  是  $\lambda$  所对应的一个特征向量, 那么可以将一对  $(\lambda, e)$  称作为特征对(eigenpair)。

**练习 1.2.2.** 证明: 如果  $(\lambda, e)$  是  $A$  的一个特征对, 同时  $\alpha$  是一个非零标量, 那么  $(\lambda, \alpha e)$  也是  $A$  的一个特征对。

**引理 1.2.1.** 当且仅当  $\det(A - \lambda I) = 0$  时,  $\lambda \in \mathbb{C}$  是  $A$  的一个特征值。

证明. 如果  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 那么引理1.2.1可以直接从第196页的定理6.1.14中获得。因为  $\det(A - \lambda I) = 0$  等同于存在非零向量  $e$ , 使得  $(A - \lambda I)e = 0$ , 这也等价于  $\lambda$  是  $A$  的特征值。同样的论证可以延伸到  $\lambda \in \mathbb{C}$  的情况, 因为定理6.1.14中的陈述对复数矩阵同样有效(例如, 参见Jänich (1994))。□

可以看出,  $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$  是一个  $n$  次多项式,<sup>4</sup>这个多项式可以称为  $A$  的特征多项式(characteristic polynomial)。根据代数基本定理, 这个多项式有  $n$  个根(即方程  $p(\lambda) = 0$  的  $\mathbb{C}$  解), 尽管在  $p(\lambda)$  的完全因式分解中可能会有一些重复的根。根据引理1.2.1, 可知:

- (1) 这些根中的每一个值都是一个特征值, 并且
- (2) 除了这  $n$  个根之外不存在其他特征值。

如果  $\lambda \in \sigma(A)$  在多项式  $p(\lambda)$  的因式分解中出现  $k$  次, 则称  $\lambda$  具有  $k$  代数重数(algebraic multiplicity)。一个具有代数重数为 1 的特征值叫做简单(simple)特征值。在练习1.2.2的意义上, 一个简单特征值  $\lambda$  的特征向量在标量倍数内是唯一的。换言之,  $\{e \in \mathbb{C}^n : (\lambda, e) \text{ 是一个特征对}\}$ (称为  $\lambda$  的特征空间(eigenspace))的线性张成是一维的。

**练习 1.2.3.** 固定  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ 。证明: 对于所有  $\tau > 0$ , 当且仅当  $\tau\lambda \in \sigma(\tau A)$  时,  $\lambda \in \sigma(A)$  成立。

**练习 1.2.4.** 关于特征向量的一个有用的事是, 如果特征多项式  $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$  有  $n$  个不同的根, 那么与之相对应的  $n$  个特征向量可以构成  $\mathbb{C}^n$  的基。考虑在所有特征向量都是实数的情况下证明这一点, 也即证明  $n$  个(实数)特征向量构成  $\mathbb{R}^n$  的一个基(基的定义参见 §6.1.4.2, 证明  $n = 2$  的情况也是一个很好的尝试)。

### 1.2.1.2 特征分解方法

什么是最容易处理的矩阵? 一个显而易见的答案是: 对角矩阵。例如, 令  $i \in [n]$ , 当矩阵  $D = \text{diag}(\lambda_i)$  时,

- 线性系统  $Dx = b$  可以简化为  $n$  个完全独立的标量方程;
- 矩阵  $D$  的  $t$  次方  $D^t$  恰好是  $\text{diag}(\lambda_i^t)$ ;

<sup>4</sup>例如, 参见 Jänich (1994) 第 6 章。

- 在假设所有的  $(\lambda_i)$  都是非零的情况下,逆矩阵  $D^{-1}$  恰好是  $\text{diag}(\lambda_i^{-1})$ 。

虽然大多数矩阵都不是对角矩阵,但是通过构造出某些替代的“基”(basis),对  $\mathbb{R}^n$  中常用的坐标进行转换之后,可以将“几乎所有”矩阵看作是对角矩阵。这可能非常有用,其关键思想如下所述。

固定矩阵  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ 。如果存在矩阵  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  和非奇异矩阵  $P$ ,能够使得  $A = PDP^{-1}$ ,则称矩阵  $A$  是可对角化的 (diagonalizable) (注意:这里允许  $D$  和  $P$  都包含复数)。 $PDP^{-1}$  的过程也被称为  $A$  的特征分解 (eigendecomposition) 或谱分解 (spectral decomposition)。

我们可以从映射的角度去想象对角化的方法,如:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ P^{-1} \downarrow & & \uparrow P \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

我们可以直接用矩阵  $A$  完成  $\mathbb{R}^n$  对  $\mathbb{R}^n$  的映射,或者,也可以通过  $P^{-1}$  转换到  $\mathbb{C}^n$ ,应用对角矩阵  $D$  进行映射,然后再通过  $P$  转换回  $\mathbb{R}^n$ 。

等式  $A = PDP^{-1}$  也可以写成  $AP = PD$ 。对这个方程进行跨列向量分解,可以发现,  $P$  的每一列代表的是  $A$  的特征向量,沿着  $D$  主对角线上的每一个元素代表的是  $A$  的特征值。

**练习 1.2.5.** 确认上述这一性质。并回答:为什么列向量取自非零的  $P$ ,正如特征值定义所要求的那样?

**练习 1.2.6.** 在  $A$  可对角化的情况下证明:矩阵的迹等于其特征值之和,矩阵的行列式等于其特征值之积。

**练习 1.2.7.**  $A$  的特征值决定了映射  $m \mapsto A^m$  的渐近性质,这一性质在可对角化 (即  $A = P\text{diag}(\lambda_i)P^{-1}$ ) 情形下最为清楚。为了说明这一性质,请使用归纳法来证明:

$$A = P\text{diag}(\lambda_i)P^{-1} \implies A^m = P\text{diag}(\lambda_i^m)P^{-1}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

接下来的问题是,矩阵在何时是可对角化的?

矩阵的可对角化并不是普遍的,  $\mathbb{M}^{n \times n}$  中不可对角化的矩阵集合在  $\mathbb{M}^{n \times n}$  中具有“勒贝格零测集”(Lebesgue measure zero)。宽泛地说,只有特殊的或精心构造的矩阵才不能对角化,接下来的结果为该性质提供了条件。

**定理 1.2.2.** 矩阵  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  是可对角化的,当且仅当其特征向量能够构成  $\mathbb{C}^n$  的基。

这一结果很直观:对于  $A = PDP^{-1}$ ,我们需要  $P$  是可逆的,这要求它的  $n$  列向量是线性无关的。因为  $\mathbb{C}^n$  是  $n$  维的,这也意味着这些列可以构成  $\mathbb{C}^n$  的基。

**推论 1.2.3.** 如果  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  有  $n$  个不同的特征值, 那么  $A$  就是可对角化的。

证明. 参见练习1.2.4。 □

**练习 1.2.8.** 给出一个反例, 说明推论1.2.3 中的条件不是充要条件。

还有一种方法是, 我们可以在对称性的基础上建立可对角化。对称性也使得对角化具有某些特殊性质, 这些特性在应用中非常有用, 也即下面这个定理。

**定理 1.2.4** (谱定理(Spectral theorem)). 如果矩阵  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  是对称的, 那么必存在一个  $n \times n$  的实正交矩阵  $U$ , 使得

$$A = UDU^\top, \quad \text{其中 } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_i \in \mathbb{R}_+ (\forall i).$$

因为对于正交矩阵  $U$  来说, 我们有  $U^\top = U^{-1}$ (参见引理6.1.15), 因此, 谱定理的一个结果是  $A$  是可对角化的。出于显而易见的原因, 我们也经常说  $A$  是可正交对角化(orthogonally diagonalizable)的。

### 1.2.1.3 劳动力动态 I

让我们研究一下特征分解的一个小应用。假设每个月工人被雇佣的概率为  $\alpha$ , 被解雇的概率为  $\beta$ , 工人可能的两种状态分别是 unemployment (状态 1) 和 employment (状态 2)。图1.3显示了给定工人在这两种状态之间的转移概率。

我们将这一动态转化为矩阵形式:

$$P_w = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}, \text{ 其中 } 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \quad (1.2)$$

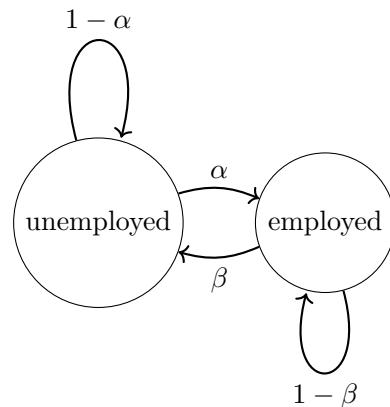


图 1.3: 劳动力转移动态

- $P_w$  的第 1 行分别给出当前处在失业状态下的工人的失业和就业概率。

- $P_w$  的第 2 行分别给出当前处在就业状态下的工人的失业和就业概率。

练习 1.2.9. 使用引理 1.2.1, 证明:  $P_w$  的两个特征值分别是  $\lambda_1 := 1$  和  $\lambda_2 := 1 - \alpha - \beta$ 。并证明: 当  $\min\{\alpha, \beta\} > 0$  时,

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad e_2 := \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

是两个对应的特征向量, 并且  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是简单特征值。

练习 1.2.10. 证明: 当  $\alpha = \beta = 0$  时, 特征值  $\lambda_1$  不是简单特征值。

接下来, 我们将证明  $P_w$  的  $m$  次幂为工人提供了  $m$  步的转换概率。考虑到这一问题实际上讨论的就是, 如何在任意的  $m \in \mathbb{N}$  上寻找  $P_w^m$  的表达式。如果我们使用对角化, 将极大简化这一问题。

练习 1.2.11. 假设  $\min\{\alpha, \beta\} > 0$  (当  $\alpha = \beta = 0$  时, 计算  $P_w$  的幂次方意义不大)。证明:

$$P_w = EDE^{-1}, \quad \text{当 } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \text{ 时。}$$

利用式(1.1), 证明:

$$P_w^m = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha(1 - \alpha - \beta)^m & \alpha(1 - (1 - \alpha - \beta)^m) \\ \beta(1 - (1 - \alpha - \beta)^m) & \alpha + \beta(1 - \alpha - \beta)^m \end{pmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

#### 1.2.1.4 左特征向量

令  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 如果一个向量  $\varepsilon$  是  $A^\top$  的特征向量, 则可以称向量  $\varepsilon \in \mathbb{C}^n$  是矩阵  $A$  的左特征向量 (left eigenvector)。换句话说,  $\varepsilon$  是非零的, 并且存在一个  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 能够使得  $A^\top \varepsilon = \lambda \varepsilon$  成立。注意到, 该表达式同时也可被改写为  $\varepsilon^\top A = \lambda \varepsilon^\top$ , 这也是“左”特征向量名称的由来。

左特征向量将在下文中发挥重要作用, 包括马尔可夫假设下动态模型的随机稳态。为了帮助区分普通和左特征向量, 我们有时将  $A$  的(普通)特征向量称为  $A$  的右特征向量 (right eigenvector)。

如果  $A$  是可对角化的, 那么  $A^\top$  也可对角化。为了证明这一点, 假设  $A = PDP^{-1}$ ,  $D = \text{diag}(\lambda_i)$ , 从前面的讨论中可知,  $P$  的列是  $A$  的(右)特征向量。

练习 1.2.12. 设  $Q = (P^\top)^{-1}$ , 证明:  $Q^\top P = I$ ,  $A^\top = QDQ^{-1}$ 。

这个练习的结果表明, 当  $A = PDP^{-1}$  时,  $(P^\top)^{-1}$  的列与  $A$  的左特征向量重合(为什么?)。等价地,  $A = PDQ^\top$ , 其中  $Q = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  是  $n \times n$  矩阵, 第  $i$  列等于  $A$  的第  $i$  个左特征向量。

练习 1.2.13. 令  $(e_i)_{i=1}^n$  为  $A$  的右特征向量,  $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$  为  $A$  的左特征向量, 证明:

$$\langle \varepsilon_i, e_j \rangle = \mathbb{1}\{i = j\} \quad (i, j \in [n]). \quad (1.4)$$

(提示: 使用练习1.2.12的结果。)

练习 1.2.14. 继续使用上面定义的符号, 并继续假设  $A$  是可对角化的, 证明:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \varepsilon_i^\top \quad \text{且} \quad A^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m e_i \varepsilon_i^\top, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

式(1.5) 左侧  $A$  的表达式称为  $A$  的谱表示(spectral representation)。

练习 1.2.15. 证明: 在  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \varepsilon_i^\top$  中, 每一个  $n \times n$  的矩阵  $\lambda_i e_i \varepsilon_i^\top$  的秩都为 1。

### 1.2.1.5 相似矩阵

可对角化是一个更一般概念的特例。如果存在一个可逆矩阵  $P$  满足  $A = PBP^{-1}$ , 则称  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  相似(similar)于  $B \in \mathbb{M}^{n \times n}$ 。在这个术语之下, 当且仅当矩阵  $A$  相似于对角矩阵时,  $A$  是可对角化的。

练习 1.2.16. 证明: 矩阵之间的相似性意味着  $\mathbb{M}^{n \times n}$  上的等价关系 (equivalence relation)(参见 §6.1.1.2)。<sup>5</sup>

练习 1.2.17. 上一个练习指出的事实, 暗示了这种关系可以将  $\mathbb{M}^{n \times n}$  划分为互不相交的等价类(equivalence classes), 并且等价类中的元素都是相似的。证明: 每个等价类中的所有矩阵都有相同的特征值。

练习 1.2.18. 证明: 如果  $A$  相似于  $B$ , 那么  $A^m$  也相似于  $B^m$ , 特别是

$$A = PBP^{-1} \implies A^m = PB^mP^{-1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

这一个结果是对式(1.1) 的推广。当矩阵  $A$  的规模很大时, 幂次方  $A^k$  在计算上可能会很复杂或不可行。然而, 如果  $A$  相似于一些比较简单的矩阵  $B$ , 那么我们就可以先计算  $B$  的幂, 然后使用相似关系转换到  $A$  上。<sup>6</sup>

### 1.2.2 Neumann 级数引理

大多数高中生都知道, 如果  $a$  是一个数字, 并且有  $|a| < 1$ , 那么,

$$\sum_{i \geq 0} a^i = \frac{1}{1 - a}. \quad (1.6)$$

<sup>5</sup>若矩阵  $A$  经过若干次初等变换后变为矩阵  $B$ , 则称  $A$  与  $B$  等价。

<sup>6</sup>这种转移过程的唯一问题是不一定能够找到满足条件的  $P$ , 这意味着可能并不存在矩阵的逆。

这种几何级数的表示扩展到矩阵就是：如果矩阵  $A$  满足某个特定条件，则式(1.6)成立，即  $\sum_{i \geq 0} A^i = (I - A)^{-1}$ （这里  $I$  是单位矩阵）。但是，我们需要对  $A$  施加一个什么样的“特定条件”，才能够把  $|a| < 1$  的概念一般化到矩阵上？这个问题的答案则涉及到矩阵的“谱半径”概念，我们现在来加以描述。

### 1.2.2.1 谱半径

对于  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ，用  $|z|$  来表示复数  $z$  的模(modulus)，则  $A$  的谱半径(spectral radius)可以被定义为：

$$r(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{是} A \text{的一个特征值}\}. \quad (1.7)$$

经济学中，谱半径在动态分析、资产定价和许多其他领域都有重要应用。正如我们将看到的，这一概念在网络分析中也起着关键作用。

**备注 1.2.1.** 对于任何方阵  $A$ ，我们都有  $r(A^\top) = r(A)$ 。这是因为  $A$  和  $A^\top$  总是具有相同的特征值。

**示例 1.2.1.** 像前文一样，对角矩阵提供了一个最简单的例子：如果  $D = \text{diag}(d_i)$ ，那么谱  $\sigma(D)$  就是  $\{d_i\}_{i \in [n]}$ ，因此  $r(D) = \max_i |d_i|$ 。

在执行下述代码后，

```
import numpy as np
```

再运行下面的 Python 代码，可以计算方阵  $M$  的谱半径：

```
def spec_rad(M):
    return np.max(np.abs(np.linalg.eigvals(M)))
```

### 1.2.2.2 几何级数

我们现在可以回到式(1.6)的矩阵扩展，并对结果进行一个正式的陈述。

**定理 1.2.5** (Neumann 级数引理(NSL))。如果  $A$  在  $\mathbb{M}^{n \times n}$  中，并且  $r(A) < 1$ ，那么  $I - A$  就是非奇异的并且有：

$$(I - A)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} A^m. \quad (1.8)$$

其中， $\sum_{m=0}^{\infty} A^m$  被称为  $(I - A)^{-1}$  的幂级数(power series)表示，矩阵级数的收敛则可以被理解为逐个元素的收敛。

定理1.2.5的完整证明可以在Cheney (2013) 和许多其他文献中找到。其核心思想很简单：如果有  $S = I + A + A^2 + \dots$ ，那么有  $I + AS = S$ 。重组后可以得到  $(I - A)S = I$ ，即等价于式(1.8)。其中，主要的技术问题是证明幂级数收敛，完整的证明过程表明，当  $r(A) < 1$  时，上述结果总是成立的。

练习 1.2.19. 对于  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 证明: 如果  $r(A) < 1$ , 则对于每个  $b \in \mathbb{R}^n$ , 线性系统  $x = Ax + b$  总是有唯一解  $x \in \mathbb{R}^n$ , 并且为

$$x^* = \sum_{m=0}^{\infty} A^m b. \quad (1.9)$$

### 1.2.3 Perron–Frobenius 定理

在本节中, 我们将陈述并讨论由 Oskar Perron 和 Ferdinand Frobenius 提出的一个影响深远的定理, 该定理在网络理论、机器学习、资产定价、马尔可夫动态、非线性动态、投入-产出分析以及诸多其他领域都有应用。本质上, 当所讨论的矩阵在某种意义上为正时, 该定理提供了有关特征值和特征向量的附加信息。

#### 1.2.3.1 矩阵空间的序

我们需要一些定义作为前提。在下文中, 对于  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$ , 我们定义:

- 如果  $A$  中所有元素都是非负的, 则代表  $A \geq 0$ ;
- 如果  $A$  中所有元素都是严格正数, 则代表  $A \gg 0$ 。

很容易想象, 非负性(nonnegativity)和正性(positivity)是矩阵的重要概念, 就像它们对数字一样。然而, 矩阵中每个元素都严格为正的条件是很难满足的, 特别是对于大型矩阵而言。因此, 数学家们经常使用与“主严格正”相关的两个其它概念,<sup>7</sup> 这有时也为使用定理提供了足够的支持。

具体来说, 对于  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 我们说  $A \geq 0$  是

- 不可约的(irreducible), 当  $\sum_{m=0}^{\infty} A^m \gg 0$  时;
- 本原的(primitive), 当存在一个  $m \in \mathbb{N}$  能够使得  $A^m \gg 0$  时。

显然, 对于  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 我们有:

$$A \gg 0 \Rightarrow A \text{是本原的(primitive)} \Rightarrow A \text{是不可约的(irreducible)} \Rightarrow A \geq 0,$$

如果一个非负矩阵不是不可约的, 则称它为可约(reducible)矩阵。

练习 1.2.20. 观察式(1.3)中  $P_w^m$  的表达式, 证明:  $P_w^m$  是

- (1) 不可约的(irreducible), 当且仅当  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ;
- (2) 本原的(primitive), 当且仅当  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  并且  $\min\{\alpha, \beta\} < 1$ 。

<sup>7</sup>译者注: 术语“主严格正”对应的原文是“predominantly strictly positive”, 表达的含义是矩阵中绝大部分位置的数值都是正的。

除上述符号外,对于  $A, B \in \mathbb{M}^{n \times k}$ ,我们也可以使用如下的表述方式:

- 如果  $A - B \geq 0$ ,则记为  $A \geq B$ ;
- 如果  $A - B \gg 0$ ,则记为  $A \gg B$ ;
- 如果  $-A \geq 0$ ,则记为  $A \leq 0$ ,等等。

**练习 1.2.21.** 证明:在  $\mathbb{M}^{n \times k}$  上,  $\leq$  是一种偏序(partial order)关系(参见 §6.1.2.1)。

上面练习中讨论的偏序  $\leq$  通常也被称作为  $\mathbb{M}^{n \times k}$  上的逐点偏序 (pointwise partial order)。类似的符号和术语也常被用于向量上。

下面的练习将表明, 向量空间中的逐点偏序会使得非负矩阵具有保序映射(order-preserving maps)(参见 §6.1.2.3)。未来我们将多次利用这一事实。

**练习 1.2.22.** 证明:只要  $A \geq 0$ , 映射  $x \mapsto Ax$  就是保序的(参见 §6.1.2.3)。也即,对于任意一对向量  $x$  和  $y$ ,  $x \leq y$  意味着  $Ax \leq Ay$ 。

### 1.2.3.2 定理的描述

令  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 通常情况下,  $r(A)$  不会直接等于  $A$  的一个特征值。例如,

$$A = \text{diag}(-1, 0) \implies \sigma(A) = \{-1, 0\} \quad \text{而} \quad r(A) = 1.$$

但是,当  $A \geq 0$  时,  $r(A)$  总是会等于  $A$  的其中一个特征值。这就是以下著名定理的其中一个含义。

**定理 1.2.6** (Perron–Frobenius 定理). 如果矩阵  $A \geq 0$ , 则  $r(A)$  一定会是“具有非负实数左、右特征向量的  $A'$ ”的其中一个特征值, 即:

存在非零的  $e, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ , 能够使得  $Ae = r(A)e$  和  $\varepsilon^\top A = r(A)\varepsilon^\top$  成立。 (1.10)

如果  $A$  是不可约的(irreducible), 那么, 还能得到:

- (1)  $r(A)$  是严格正的并且是一个简单特征值;
- (2) 特征向量  $e$  和  $\varepsilon$  处处为正;
- (3) 与  $A$  的其他特征值相关的特征向量不能是非负的。

如果  $A$  是本原的(primitive), 那么, 还能得到:

- (1) 对于所有不同于  $r(A)$  的  $A$  的特征值  $\lambda$  来说, 不等式  $|\lambda| \leq r(A)$  严格成立;
- (2) 将  $e$  和  $\varepsilon$  归一化, 使得  $\langle \varepsilon, e \rangle = 1$ , 我们有

$$r(A)^{-m} A^m \rightarrow e \varepsilon^\top \quad (m \rightarrow \infty). \quad (1.11)$$

“ $r(A)$  在不可约条件下是简单特征值”的这一事实意味着, 它的特征向量是唯一的。我们将在几个重要的唯一性证明中使用这个性质。

在本文中, 我们将  $r(A)$  称为  $A$  的主特征值(dominant eigenvalue)或 Perron 根(Perron root), 将  $\varepsilon$  和  $e$  分别称为  $A$  的左和右主特征向量(dominant left and right eigenvectors)。

为什么在这里我们要使用“主”(dominant)这个词? 为了帮助说明, 假设  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  是本原的(primitive), 并且固定所有的  $x \in \mathbb{R}^n$ 。考虑随着  $m$  的增长,  $x_m := A^m x$  会发生什么? 根据式(1.11), 在  $m$  足够大的条件下, 我们有  $A^m x \approx r(A)^m c e$ , 其中  $c = \varepsilon^\top x$ 。换句话说, 序列  $A^m x$  仅仅是  $e$  的标量倍数, 并渐近地以  $\ln r(A)$  的速率增长。因此,  $r(A)$  在控制  $A^m x$  的增长率方面相比其他特征值处在主导地位, 而  $e$  在控制增长方向方面相比其他特征向量处在主导地位。

**练习 1.2.23.** 式(1.11)中  $n \times n$  的矩阵  $P := e\varepsilon^\top$  被称为  $A$  的 Perron 投影 (Perron projection)。证明:  $P^2 = P$ (这是一个经常用于定义投影矩阵的性质)和  $\text{rank } P = 1$ , 并描述  $P$  是如何将所有  $\mathbb{R}^n$  投影到一维空间的。

**示例 1.2.2.** 对于  $A \geq 0$ , 如果  $r(A) = 1$ , 则  $I - A$  是不可逆的。为什么? 注意到, 根据定理1.2.6, 由于  $r(A)$  是  $A$  的特征值, 因此存在一个非零向量  $e$  使得  $(I - A)e = 0$ 。

### 1.2.3.3 劳动力动态 II

因为定理 1.2.6 的完整证明较长, 我们在此省略, 可以在 Meyer (2000)、Seneta (2006b) 或者 Meyer-Nieberg (2012) 中找到。<sup>8</sup>相反, 为了建立直觉, 让我们在一个相对比较简单的设计环境中证明该定理。

我们要考虑的特例是如下的一类矩阵:

$$P_w = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

这个例子来自 §1.2.1.3对劳动力动态的研究。

你可能还记得 §1.2.1.3中讨论的, 特征值  $\lambda_1 = 1$  和  $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$ 。显然,  $r(A) = 1$ , 所以  $r(A)$  是矩阵  $A$  的一个特征值, 正如 Perron-Frobenius 定理的第一部分所说的那样。

从现在开始, 我们假设  $\min\{\alpha, \beta\} > 0$ , 这意味着我们排除了单位矩阵存在的可能性, 以避免一些繁琐的限定说明。

两个右特征向量  $(e_1, e_2)$  和两个左特征向量  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  分别为:

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 := \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 := \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

<sup>8</sup>另参见Glynn & Desai (2018), 该文基于概率论, 通过扩展无限状态空间, 提供了新的证明思路。

练习 1.2.24. 验证以上公式。(右特征向量已经在 §1.2.1.3 中进行处理了。)

练习 1.2.25. 回顾练习 1.2.20, 当且仅当  $\alpha$  和  $\beta$  都是严格正数时,  $P_w$  是不可约的。证明: 在这个不可约条件下, Perron-Frobenius 定理中关于不可约矩阵的所有陈述对  $P_w$  都有效。

练习 1.2.26. 回顾一下练习 1.2.20, 当且仅当  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  并且  $\min\{\alpha, \beta\} < 1$  时,  $P_w$  是本原的。在这些条件下, 利用  $P_w$  验证式(1.11)成立。为此, 你可以使用式(1.3)中  $P_w^m$  的表达式。

#### 1.2.3.4 谱半径的界限

利用 Perron-Frobenius 定理, 我们可以为非负矩阵的谱半径提供有用的界限。在下文中, 令  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 并设定

- $\text{rowsum}_i(A) := \sum_j a_{ij} = A$  的第  $i$  行加总,
- $\text{colsum}_j(A) := \sum_i a_{ij} = A$  的第  $j$  列加总。

**引理 1.2.7.** 如果  $A \geq 0$ , 则有:

- (1)  $\min_i \text{rowsum}_i(A) \leq r(A) \leq \max_i \text{rowsum}_i(A)$ ,
- (2)  $\min_j \text{colsum}_j(A) \leq r(A) \leq \max_j \text{rowsum}_j(A)$ 。

证明. 令  $A$  保持前述设定,  $e$  为式(1.10)中的右特征向量。由于  $e$  是非负且非零的, 我们可以假设  $\sum_j e_j = 1$ 。从  $Ae = r(A)e$  中, 我们可以推知, 对于所有的  $i$ , 有  $\sum_j a_{ij}e_j = r(A)e_i$ 。对  $i$  求和, 可以得到  $\sum_j \text{colsum}_j(A)e_j = r(A)$ 。由于  $e$  的元素非负且加总为 1, 因此  $r(A)$  是列加总的加权平均值。因而, 引理 1.2.7 中的第(2) 对界限是成立的。其余证明类似(使用左特征向量)。  $\square$

## 1.3 概率

接下来, 我们回顾网络分析所需要的一些概率论知识。

#### 1.3.1 离散概率

我们首先介绍有限集上的概率模型, 然后考虑抽样方法和随机矩阵。

##### 1.3.1.1 有限集上的概率

在本文中, 如果  $S$  是一个有限集(finite set), 那我们设定

$$\mathcal{D}(S) := \left\{ \varphi \in \mathbb{R}_+^S : \sum_{x \in S} \varphi(x) = 1 \right\}$$

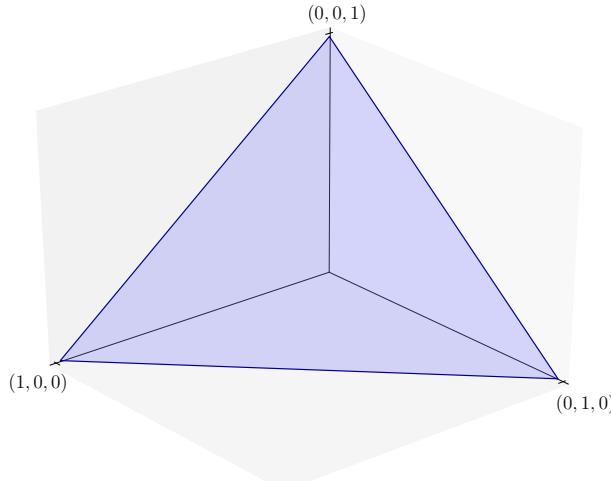


图 1.4:  $\mathcal{D}(S)$  为  $\mathbb{R}^3$  空间中的单位单纯形( $S = \{1, 2, 3\}$ )

并称  $\mathcal{D}(S)$  为  $S$  上的分布(distributions)集。如果

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \varphi(x), \quad \forall x \in S,$$

我们说,在  $S$  中取值的一个随机变量  $X$  具有分布  $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ , 并记作  $X \stackrel{d}{=} \varphi$ 。

分布  $\varphi$  也可以理解为一个向量  $(\varphi(x_i))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  (参见 §6.1.1.3 中的引理6.1.2)。因此,  $\mathcal{D}(S)$  可以被视为  $\mathbb{R}^n$  的子集。图 1.4 提供了当  $S = \{1, 2, 3\}$  时的一个可视化结果, 每个  $\varphi \in \mathcal{D}(S)$  可以看成  $\mathbb{R}^3$  空间中的点  $(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3))$ 。

更一般地, 如果  $|S| = n$ , 那么  $\mathcal{D}(S)$  可以用  $\mathbb{R}^n$  中的单位单纯形来表示, 它是所有非负且加总为 1 的  $n$  维向量的集合。

在整个过程中, 给定  $x \in S$ , 我们用符号  $\delta_x$  来表示  $\mathcal{D}(S)$  中把所有质量(mass)放在  $x$  上的元素。换言之, 对于所有的  $y \in S$ , 有  $\delta_x(y) = \mathbb{1}\{y = x\}$ 。在图 1.4 中, 每个  $\delta_x$  就是单位单纯形(unit simplex)的一个顶点。

我们会经常使用到全概率定律(law of total probability)。该定律指出, 对于  $S$  上的随机变量  $X$  和任意  $A \subset S$  来说, 有

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \sum_i \mathbb{P}\{X \in A \mid X \in B_i\} \mathbb{P}\{X \in B_i\} \tag{1.12}$$

其中,  $B_i$  是  $S$  的一个分区(即  $S$  中不相交子集的有限集合, 并使它们的并集等于  $S$ )。

**练习 1.3.1.** 假设  $\mathbb{P}\{X \in B_i\} > 0 (\forall i)$ , 证明式(1.12)。

### 1.3.1.2 逆变换采样

令  $S$  是一个有限集, 假设我们有能力在  $(0, 1]$  上生成均匀分布的随机变量。我们现在想要从  $S$  中生成“服从任意的  $\varphi \in \mathcal{D}(S)$  分布”的随机抽样。

令  $W$  均匀分布在  $(0, 1]$  上, 这样, 对于所有的  $a \leq b \in (0, 1]$ , 我们有  $\mathbb{P}\{a < W \leq b\} = b - a$ , 这等价于区间  $(a, b]$  的长度。<sup>9</sup> 如果我们可以创建一个从  $(0, 1]$  到  $S$  的函数  $z \mapsto \kappa(z)$  使得  $\kappa(W)$  具有分布  $\varphi$ , 那么我们的问题就可以得到解决。一种可行的办法如下。

首先, 对于每一个  $x \in S$ , 我们可以将单位区间  $(0, 1]$  划分为若干个不相交的子区间, 与  $x$  相对应的区间可以称为  $I(x)$ , 并且其长度被选为  $\varphi(x)$ 。更具体地说, 当  $S = \{x_1, \dots, x_N\}$ , 我们取:

$$I(x_i) := (q_{i-1}, q_i], \text{ 其中 } q_i := \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_i) \text{ 以及 } q_0 := 0$$

这样我们就可以很容易地确认, 对于所有的  $i$ ,  $I(x_i)$  的长度就是  $\varphi(x_i)$ 。

现在考虑函数  $z \mapsto \kappa(z)$ , 将其定义为:

$$\kappa(z) := \sum_{x \in S} x \mathbb{1}\{z \in I(x)\} \quad (z \in (0, 1]) \quad (1.13)$$

其中, 当  $z \in I(x)$  时,  $\mathbb{1}\{z \in I(x)\}$  为 1, 否则为 0。事实证明,  $\kappa(W)$  就是我们想要的分布。

**练习 1.3.2.** 证明:

- (1) 对于所有的  $x \in S$ , 当且仅当  $z \in I(x)$  时, 我们有  $\kappa(z) = x$ ;
- (2) 随机变量  $\kappa(W)$  具有分布  $\varphi$ 。

**练习 1.3.3.** 令  $\varphi, \kappa(z)$  和  $W$  保持上述定义。证明: 对于所有的  $j \in [n]$ , 都有  $\mathbb{E}\mathbb{1}\{\kappa(W) = j\} = \varphi(j)$ 。

**练习 1.3.4.** 令  $S = \{1, 2, 3\}$  以及  $\varphi = (0.2, 0.1, 0.7)$ , 使用 Julia 或其它语言, 实现上述逆变换采样 (inverse transform sampling) 过程。从  $\varphi$  中生成 1,000,000 次 (准) 独立抽样  $(X_i)$ , 并验证对于  $j \in \{1, 2, 3\}$  来说, 有  $(1/n) \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = j\} \approx \varphi(j)$ 。

最后一个练习告诉我们, 大数定律在这种设定下是成立的。因为在这个定律之下, 我们期望当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = j\} \longrightarrow \mathbb{E}\mathbb{1}\{X_i = j\}$$

的概率为 1。根据练习1.3.3, 等式右边等于  $\varphi(j)$ 。

**练习 1.3.5.** 假设在计算机上, 你只能在  $(0, 1]$  上生成均匀随机变量, 并且你希望模拟一个有偏硬币的翻转, 其正面概率为  $\delta \in (0, 1)$ 。请提出一种方法。

---

<sup>9</sup>无论不等式是弱的还是严格的, 概率都是相同的。

练习 1.3.6. 假设在计算机上, 你能够从定义在某个集合  $S$  上的分布  $\varphi$  和  $\psi$  中进行抽样。集合  $S$  可以是离散的或连续的, 在后一种情况下, 分布可以理解为密度。在计算机上提出一种从凸组合(convex combination)  $f(s) = \delta\varphi(s) + (1 - \delta)\psi(s)$  中进行采样的方法, 其中  $\delta \in (0, 1)$ 。

### 1.3.1.3 随机矩阵

一个矩阵  $P = (p_{ij}) \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 当

$$P \geq 0 \quad \text{并且} \quad P\mathbf{1} = \mathbf{1} \text{ 时(其中 } \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n \text{ 是 1 的列向量),}$$

$P$  可以称作为随机矩阵(stochastic matrix)。换句话说,  $P$  是一个非负且行加总为 1 的矩阵。

在本书中, 我们将看到随机矩阵的许多应用。这些应用通常是概率性的, 其中  $P$  的每一行都被解释为一个有限集合上的分布。

练习 1.3.7. 令  $P, Q$  为  $n \times n$  的随机矩阵, 证明下列事实:

- (1)  $PQ$  也是随机的;
- (2)  $r(P) = 1$ ;
- (3) 存在一个行向量  $\psi \in \mathbb{R}_+^n$ , 满足  $\psi\mathbf{1} = 1$  和  $\psi P = \psi$ 。

练习1.3.7中第(3)部分的向量  $\psi$  也被一些作者称为 PageRank 向量, 因为它在 Google 的 PageRank 算法中很突出, 我们将其称为平稳分布(stationary distribution)<sup>10</sup>。平稳分布在马尔可夫链(Markov chains)理论中起到非常关键的作用, 这一内容将在 §4.1 中进行介绍。排名方法(Ranking methods)会在 §1.4.3 中再次讨论, 而 PageRank 则会在 §4.2.3.3 中进行更详细的处理。

### 1.3.2 幂律

接下来我们讨论(非离散)集合  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{R}_+$  上的分布。我们对某些类型的分布特别感兴趣, 例如“幂律”(Power Laws)分布, 这些分布显然是非标准的, 但在经济学、社会科学和网络研究中却非常频繁的出现。

接下来, 给定一个实数随机变量  $X$ , 函数

$$F(t) := \mathbb{P}\{x \leq t\} \quad (t \in \mathbb{R})$$

可以称为  $X$  的累积分布函数(cumulative distribution function, CDF)。 $X$  的互补累积分布函数(counter CDF, CCDF)则为  $G(t) := \mathbb{P}\{x > t\} = 1 - F(t)$ 。

<sup>10</sup>在 Larry Page 和 Sergey Brin 为 PageRank 算法申请专利之前一个多世纪, 许多数学家已经对随机矩阵的平稳分布进行了深入研究, 因此让他们占用这个名称似乎并不公平。

对于任何非负随机变量  $X$  和  $p \in \mathbb{R}_+$  来说,一个比较有用的性质是:

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}\{X > t\}dt \quad (1.14)$$

例如,参见Cimlar (2011) 第 63 页。

### 1.3.2.1 厚尾

回顾一下,如果在  $\mathbb{R}$  上的一个随机变量  $X$  的密度函数为

$$\varphi(t) := \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

那么这个随机变量就是服从均值为  $\mu$ 、方差为  $\sigma^2$  的正态分布 (normal distribution), 记为  $X \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2)$ 。正态密度的一个显著特征是密度的尾部会迅速接近零。例如,在  $t \rightarrow \infty$  时,  $\varphi(t)$  会像  $\exp(-t^2)$  一样迅速归零。

如果在  $\mathbb{R}_+$  上的一个随机变量  $X$  密度函数为

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0),$$

那么这个  $X$  就称为指数分布(exponentially distributed),并记作  $X \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\lambda)$ 。随着  $t \rightarrow \infty$ , 指数密度的尾部就会像  $\exp(-t)$  一样比较快的趋近于 0。

当一个分布的尾部是一个相对轻尾(light-tailed)时,也就代表着它的尾部会很快趋近于 0, 从这个分布中抽样出的数据会很少偏离平均值几个标准差。例如在正态随机变量的情况下,观察到比平均值高 3 个标准差以上的抽样的概率约为 0.0014, 而对于 6 个标准差, 概率会进一步下降到  $10^{-11}$ 。

相反,对于某些分布来说,“极端”结果会相对频繁地发生。为了更为直观的说明这一现象,图1.5的左图从 1.5 个自由度的 t 分布中模拟进行了 1000 次独立抽样结果,作为比较,右图显示了从  $N(0, 4)$  的分布中进行相同数量的独立抽样。前者显示了抽样结果会在 0 附近形成较为紧密的聚类,但是存在相对较大的偏差。

形式上,至少存在一个大于 0 的  $t$ , 满足在  $\mathbb{R}$  上的随机变量  $X$  的矩母函数 (moment generating function)

$$m(t) := \mathbb{E}e^{tX} \quad (t \geq 0) \quad (1.15)$$

是有限的,那么这个随机变量  $X$  就称为是“轻尾”(light-tailed)的。否则这个  $X$  就称为是“厚尾”(heavy-tailed)的。<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup>厚尾这个术语在不同文献中叫法各不相同,我们倾向于这样表述。例如,参见Foss et al. (2011) 或者Nair et al. (2021)。

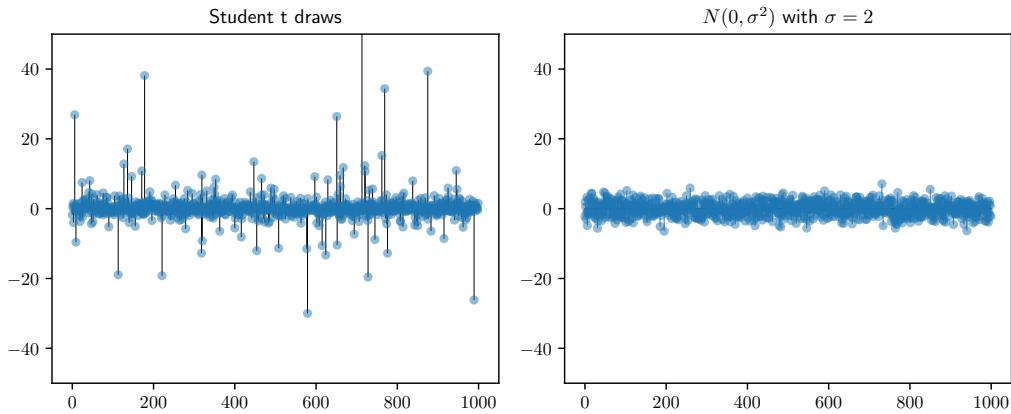


图 1.5: 从 t 分布和正态分布中进行独立抽样的结果

示例 1.3.1. 如果  $X \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2)$ , 那么  $X$  的矩母函数就是:

$$m(t) = \exp\left(\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right) \quad (t \geq 0),$$

因此,  $X$  是轻尾的。

示例 1.3.2. 如果在  $(0, \infty)$  上的一个随机变量  $X$  满足  $\ln X \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2)$ , 那么我们说随机变量  $X$  具有对数正态密度(lognormal density), 并记作  $X \stackrel{d}{=} LN(\mu, \sigma^2)$ 。该分布的均值和方差分别为:

$$\mathbb{E}X = \exp(\mu + \sigma^2/2) \quad \text{和} \quad \text{Var } X = (\exp(\sigma^2) - 1) \exp(2\mu + \sigma^2)$$

已知矩母函数  $m(t)$  对于所有  $t > 0$  都是无限的, 因此任何对数正态分布的随机变量都是厚尾的。

对于任意随机变量  $X$  和任意的  $r \geq 0$ , 期望  $\mathbb{E}|X|^r$  叫做  $X$  的  $r$  阶矩(moment) (可能是无穷的)。

引理 1.3.1. 令  $X$  为  $\mathbb{R}_+$  上的一个随机变量, 如果  $X$  是轻尾的, 那么它的所有矩都是有限的。

证明. 选择任意的  $r > 0$ , 我们将证明  $\mathbb{E}X^r < \infty$ 。由于  $X$  是轻尾的, 因此存在  $t > 0$  使得  $m(t) = \mathbb{E}\exp(tx) < \infty$  成立。对于一个足够大的常数  $\bar{x}$  来说, 只要  $x \geq \bar{x}$ , 我们就有  $\exp(tx) \geq x^r$ 。因此, 以  $F$  作为  $X$  的分布, 我们有:

$$\mathbb{E}X^r = \int_0^{\bar{x}} x^r F(dx) + \int_{\bar{x}}^{\infty} x^r F(dx) \leq \bar{x}^r + m(t) < \infty$$

□

练习 1.3.8. 证明:对数正态分布的每一阶矩都是有限的。

与引理 1.3.1一起,练习1.3.8的结果表明,无穷矩的存在是厚尾的充分但非必要条件。

### 1.3.2.2 帕累托尾

给定  $\alpha > 0$ ,对于一个非负的随机变量  $X$  来说,如果存在  $c > 0$ ,使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \mathbb{P}\{X > t\} = c, \quad (1.16)$$

则称该随机变量  $X$  是具有尾指数(tail index)  $\alpha$  的帕累托尾(Pareto tail)。换言之,关于  $X$  的互补累积分布函数  $G$  会满足如下形式:

$$G(t) \approx ct^{-\alpha}, \quad \text{当 } t \text{ 较大时。} \quad (1.17)$$

此时,如果  $X$  在某些  $\alpha > 0$  上有帕累托尾,我们也称  $X$  服从幂律(power law)。

示例 1.3.3. 如果在  $\mathbb{R}_+$  上的随机变量  $X$  的 CCDF 服从

$$G(t) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } t < \bar{x} \\ (\bar{x}/t)^\alpha & \text{如果 } t \geq \bar{x} \end{cases}, \quad (1.18)$$

则称  $X$  是具有参数  $\bar{x}, \alpha > 0$  的帕累托分布(Pareto distribution)。显然,这样的随机变量  $X$  有一条帕累托尾,且尾指数为  $\alpha$ 。

请注意:关于示例1.3.3的结果,反之则不成立。即,具有帕累托尾的随机变量并不必然服从帕累托分布。因为帕累托尾的性质仅限制了最右侧的尾。

练习 1.3.9. 证明:如果  $X$  有一个尾指数为  $\alpha$  的帕累托尾,那么对于所有的  $r \geq \alpha$  来说,一定有  $\mathbb{E}[X^r] = \infty$ 。(提示:使用式(1.14))

从练习1.3.9和引理1.3.1中,我们可以看到每一个拥有帕累托尾的随机变量都是厚尾的,但反之则不成立。这是因为,帕累托尾的性质(式(1.16))是非常具体的。尽管如此,但事实证明,网络研究中涉及的许多厚尾分布实际上就是帕累托尾。

练习 1.3.10. 证明:对于某些  $\lambda > 0$ ,如果有  $X \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\lambda)$ ,那么,随机变量  $X$  不服从幂律。

### 1.3.2.3 经验性的幂律图

当帕累托尾性质成立时,对于一个较大的  $t$ ,CCDF 满足  $\ln G(t) \approx \ln c - \alpha \ln t$ 。换言之,函数  $G$  可以进行对数线性(log linear)化。图1.6使用帕累托分布说明了这一点,为了便于比较,图中还显示了指数分布的 CCDF。

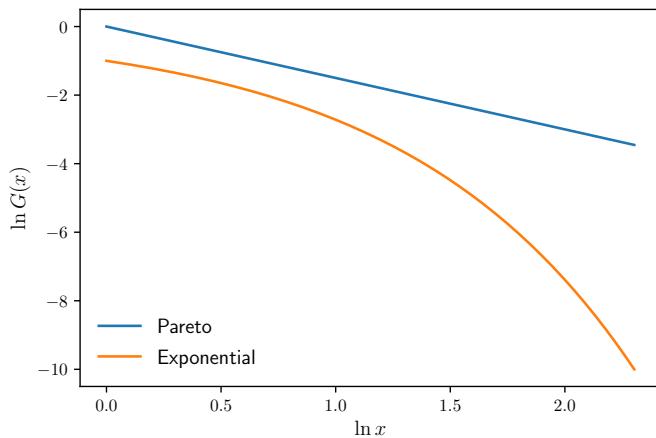


图 1.6: 帕累托分布和指数分布的 CCDF 图

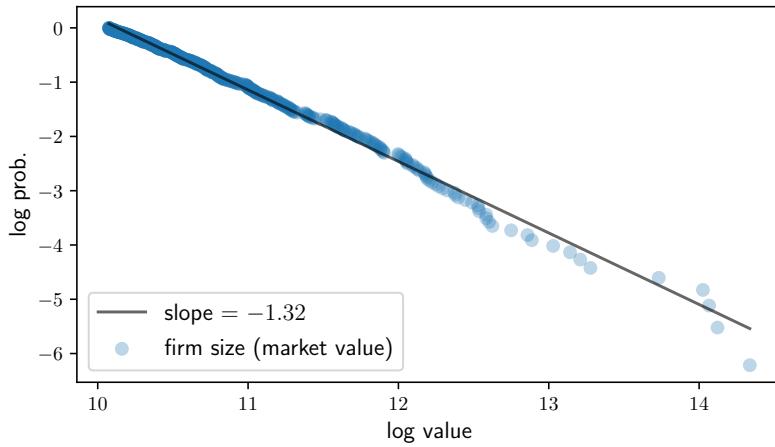


图 1.7: 规模最大公司的经验 CCDF 图(福布斯)

如果我们将 CCDF 的  $G$  应用到经验数据中——对于每一个  $x$ , 返回样本中数值高于  $x$  的部分的概率——那么在帕累托尾的假设之下, 我们应该可以获得一条近似于直线的结果。

例如, 考虑公司规模的横截面分布。虽然这种分布的精确性取决于公司规模的衡量标准、公司样本以及其他因素, 但这种分布存在的一个典型特征是极端厚尾。作为说明, 图1.7给出了截至 2021 年 3 月福布斯全球 2000 强排行榜中前 500 家公司的“市场价值的经验 CCDF 对数图”。可以发现, 估算出的斜率(slope)和数据分布都与帕累托尾和无限总体方差一致。

#### 1.3.2.4 离散幂律

如示例1.3.3中所述, 令  $X$  为具有帕累托分布的随机变量, 这个随机变量在集合  $[\bar{x}, \infty)$  上的密度为  $p(t) = ct^{-\gamma}$ 。其中,  $c := \alpha\bar{x}^\alpha$ ,  $\gamma := \alpha + 1$ 。下一个练习将对该想法进行拓展。

练习 1.3.11. 令  $X$  为  $\mathbb{R}_+$  上密度为  $p$  的随机变量, 假设对于常数  $c > 0$ 、 $\gamma > 1$  以及

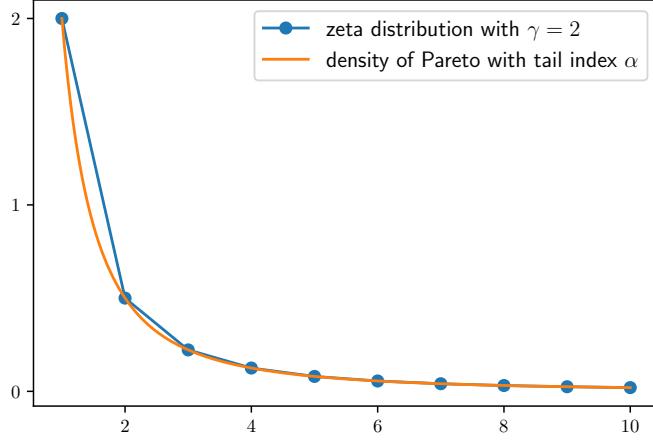


图 1.8: Zeta 分布和帕累托分布

$\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ , 我们有

$$p(t) = ct^{-\gamma}, \quad \text{每当 } t \geq \bar{x}. \quad (1.19)$$

证明: 随机变量  $X$  具有帕累托尾, 并且尾指数为  $\alpha := \gamma - 1$ 。

对式(1.19)进行离散模拟会变成一个正整数上的分布, 并且对于一个较大的  $k$ , 有

$$f(k) = ck^{-\gamma}. \quad (1.20)$$

此时, 如果对于所有的  $k \in \mathbb{N}$  等式都成立, 并且同时选择一个合适的  $c$  使得  $\sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) = 1$ , 那么在这种特殊情形下, 我们就进一步得到了 [zeta 分布\(zeta distribution\)](#)。<sup>12</sup>

一般来说, 当我们看到一个形如式(1.20) ( $k$  较大) 的概率质量函数 (probability mass function) 时, 我们可以用一个具有尾指数  $\alpha = \gamma - 1$  的帕累托尾来识别它。图1.8给出了  $\gamma = 2$  时的例子。

## 1.4 图论

图论(Graph theory)是离散数学的一个主要分支, 它构成了网络分析的基础, 在本文中起着至关重要的作用。本节将对图论内容进行简要并且快速的介绍。<sup>13</sup>

图论在经济学中也有重要应用: 许多经济模型是随机的和动态的, 这意味着它们规定了世界的状态以及不同状态之间的转换率。将这些思想进行概念化的最自然方式之一, 就是将不同状态视为图中的不同节点, 将状态之间的转换率视为节点之间的关系。

<sup>12</sup> 显然,  $c$  的正确值取决于  $\gamma$ , 所以我们可以用一个合适的函数  $H$  将其写成  $c = H(\gamma)$ , 能够引致上述归一化的正确函数也被称为黎曼 Zeta 函数(Riemann zeta function)。

<sup>13</sup> 我们通常认为, 图论源于杰出的瑞士数学家 Leonhard Euler (1707-1783) 的工作, 包括他关于 “Seven Bridges of Königsberg” 的著名论文。

我们从定义和基本概念开始。我们将重点关注有向图的分析 (directed graphs), 其中存在自然的不对称关系(例如, 银行 A 向银行 B 拆借, 公司 A 向公司 B 供给产品等)。这样做不会损失一般性, 因为无向图 (undirected graphs, 其中关系是对称的双向连接) 可以通过坚持对称性来恢复(即, 从 A 到 B 的连接存在意味着从 B 到 A 的连接也存在)。

### 1.4.1 非加权有向图

我们从非加权有向图 (unweighted directed graphs) 开始, 研究其标准性质, 例如连通性 (connectedness) 和非周期性 (aperiodicity)。

#### 1.4.1.1 定义和示例

有向图 (directed graph or digraph) 指的是一对  $\mathcal{G} = (V, E)$ , 其中,

- $V$  是一个有限非空集,
- $E$  是有序对  $(u, v) \in V \times V$  的集合, 称为边 (edges),

$V$  中的元素称为  $\mathcal{G}$  的节点 (vertices or nodes)<sup>14</sup>。直观上和视觉上,  $(u, v)$  可以被理解为从节点  $u$  到节点  $v$  的箭头。

图 1.9-1.10 给出了两个示例图, 每个图中都有三个节点。在这些示例中, 可以将箭头 (边) 想像成: 在给定的单位时间内, 状态进行转换的可能性。

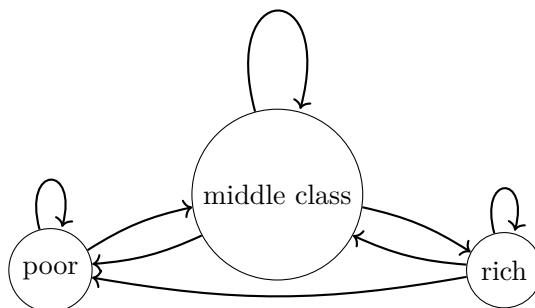


图 1.9: 一个阶层转换的有向图

对于一个给定的边  $(u, v)$ , 节点  $u$  称为这条边的尾 (tail), 而  $v$  称为这条边的头 (head)。同时,  $u$  也被称为  $v$  的“直接前驱” (direct predecessor),  $v$  也被称为  $u$  的“直接后继” (direct successor)。对于  $v \in V$ , 我们使用以下符号:

- $\mathcal{I}(v) := v$  的所有直接前驱的集合,
- $\mathcal{O}(v) := v$  的所有直接后继的集合。

<sup>14</sup>译者注: 也有学者将“vertices”称为“顶点”, 本书统一将“vertices”和“nodes”都译为“节点”。

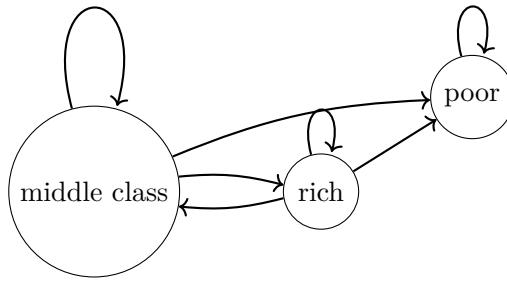


图 1.10: 改变边的列表

此外,我们将节点  $v \in V$  的入度(in-degree)  $i_d(v)$  和出度(out-degree)  $o_d(v)$  分别定义为:

- $i_d(v) := |\mathcal{I}(v)|$ ,
- $o_d(v) := |\mathcal{O}(v)|$ 。

如果  $i_d(v) = 0$  而  $o_d(v) > 0$ , 则  $v$  可以称为源点(source)。如果  $\mathcal{O}(v) = \emptyset$  或者  $\mathcal{O}(v) = \{v\}$ , 则  $v$  可以称为汇点(sink)。例如,在图1.10中,节点“poor”就是一个入度为 3 的汇点。

#### 1.4.1.2 Networkx 中的有向图

Python 和 Julia 都为图形的数值计算提供了有价值的接口。在这些库中, Python 包 Networkx 可能是最成熟和最完善的。它提供了一种比较方便的数据结构用来表示有向图, 并补充了许多常用的程序用来分析它们。为了将其导入到 Python, 我们运行:

```
import networkx as nx
```

在下面显示的所有代码片段中, 我们假设读者已经执行了上述以及下面两个导入语句:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

作为一个例子, 让我们创建图1.10中的有向图, 在后文中我们用  $\mathcal{G}_p$  来表示。为此, 我们首先创建一个空的 DiGraph 对象:

```
G_p = nx.DiGraph()
```

其次, 用节点和边来填充它。为了做到这一点, 我们写下一个所有边的列表, 并用 `p` 代表 `poor`, 以此类推:

```
edge_list = [
    ('p', 'p'),
```

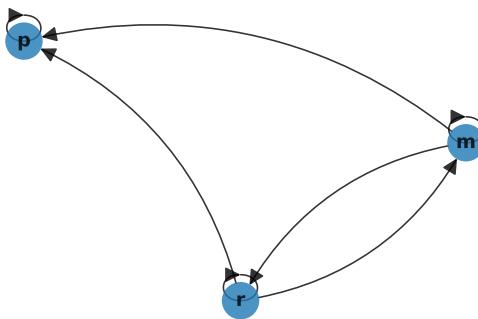


图 1.11: 由 Networkx 绘制的有向图

```

('m', 'p'), ('m', 'm'), ('m', 'r'),
('r', 'p'), ('r', 'm'), ('r', 'r')
]

```

最后,我们将这些边添加到我们的 `DiGraph` 对象中:

```

for e in edge_list:
    u, v = e
    G_p.add_edge(u, v)

```

添加边会自动添加节点,因此 `G_p` 现在是  $\mathcal{G}_p$  的正确表示。对于我们的小有向图来说,我们可以通过 Networkx 绘制图形来验证这一点,代码如下:

```

fig, ax = plt.subplots()
nx.draw_spring(G_p, ax=ax, node_size=500, with_labels=True,
                font_weight='bold', arrows=True, alpha=0.8,
                connectionstyle='arc3,rad=0.25', arrowsize=20)
plt.show()

```

这段代码生成了图1.11,它与图1.10中的原始有向图相对应。

`DiGraph` 对象中也有计算节点入度和出度的方法,例如:

```
G_p.in_degree('p')
```

prints 3。

### 1.4.1.3 通信

接下来我们研究通信(communication)和连通性(connectedness),这些内容对生产、金融、运输等各类网络以及马尔可夫链(Markov chains)的动态特性都具有重要意义。

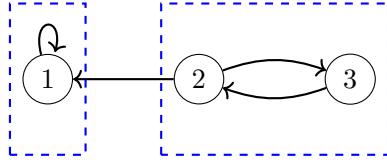


图 1.12: 有向图(矩形)的强连通分量

在有向图  $\mathcal{G}$  中, 从节点  $u$  到节点  $v$  的一个**有向游走(directed walk)**是一个有限的节点序列, 它以  $u$  开始, 并以  $v$  结束。在这样的序列中, 任何一个连续对 (consecutive pair) 都是  $\mathcal{G}$  的边 (edge)。从  $u$  到  $v$  的**有向路径(directed path)**指的是从  $u$  到  $v$  有向游走的过程, 需要满足路径中所有节点都是不同的。例如, 在图1.12中,  $(3, 2, 3, 2, 1)$  是一条从 3 到 1 的有向游走, 但不是有向路径, 而  $(3, 2, 1)$  既是从 3 到 1 的有向游走, 也是从 3 到 1 的有向路径。<sup>15</sup>

遵循标准做法, 有向游走(或路径)的**长度(length)**计算的是边的数量而不是节点的数量。例如, 图1.12中从 3 到 1 的有向路径  $(3, 2, 1)$  的长度为 2。

如果  $u = v$ , 或者存在一条从  $u$  到  $v$  的有向路径, 则可以称节点  $v$  从节点  $u$  是**可达的(accessible or reachable)**, 记作  $u \rightarrow v$ 。如果集合  $V \setminus U$  中没有任何元素是从  $U$  中可达的, 那么对于有向图  $(V, E)$  来说, 我们称集合  $U \subset V$  是**吸收(absorbing)**的。

**示例 1.4.1.** 令某个代表生产网络的有向图为  $\mathcal{G} = (V, E)$ , 其中  $V$  的元素指的是部门, 并且  $(i, j) \in E$  代表的是  $i$  向  $j$  部门提供产品或服务。那么, 只要  $m \rightarrow l, m$  部门就是  $l$  部门的上游供应商。

**示例 1.4.2.** 图1.10显示, 马尔可夫有向图中的节点  $\{\text{poor}\}$  就是吸收 (absorbing) 态, 因为  $\{\text{middle}, \text{rich}\}$  从  $\{\text{poor}\}$  节点是不可达的。

如果存在  $u \rightarrow v$  和  $v \rightarrow u$ , 则称两个节点  $u$  和  $v$  之间具有**通信(communicate)**。

**练习 1.4.1.** 令  $(V, E)$  为一个有向图, 如果  $u$  和  $v$  是通信的, 则记为  $u \sim v$ 。证明: “ $\sim$ ”是一种等价关系(参见 §6.1.1.2)。

由于“通信”是一种等价关系, 它可以将  $V$  划分为一个有限的等价类集合。在每一个类之中, 所有的元素都是通信的, 这些类也被称为**强连通分量(strongly connected components)**。如果图中只有一个这样的分量, 那么这个图本身也被称为**强连通的(strongly connected)**, 也就是说, 对于任何一对  $(u, v) \in V \times V$ , 节点  $v$  从  $u$  中都是可达的。这一思想相当于说, 任何节点从其他任意节点出发都可到达。

**示例 1.4.3.** 图1.12显示了具有强连通分量  $\{1\}$  和  $\{2,3\}$  的有向图, 但有向图本身不是强连通的。

**示例 1.4.4.** 在图1.9 中, 有向图是强连通的。相反, 在图1.10中, rich 节点从 poor 出发是不可达的, 因此该图不是强连通的。

<sup>15</sup>译者注: 也有译文将“directed walk”译为“有向途径”或“有向通路”等, 将“directed path”译为“有向路”等。

Networkx 可用于检验通信和强连通性, 以及计算强连通分量。例如, 应用于图1.9 中的有向图, 代码为

```
G = nx.DiGraph()
G.add_edge(1, 1)
G.add_edge(2, 1)
G.add_edge(2, 3)
G.add_edge(3, 2)

list(nx.strongly_connected_components(G))

prints [{1}, {2, 3}]。
```

#### 1.4.1.4 非周期性

有向图  $\mathcal{G} = (V, E)$  的环(cycle)  $(u, v, w, \dots, u)$  指的是  $\mathcal{G}$  中的有向游走, 满足(1)第一个和最后一个节点相同, 以及(2)其他节点均不重复。如果存在  $k > 1$ , 使得环(cycle)的长度都是  $k$  的倍数, 则称该图具有周期性 (periodic)。反之, 不具备这一性质的图则是非周期性的 (aperiodic)。

示例 1.4.5. 在图1.13中, 存在环  $(a, b, a), (b, a, b), (b, c, b), (c, b, c), (c, d, c)$  和  $(d, c, d)$ 。因此, 每个环的长度都是 2, 该图是周期性图。



图 1.13: 一个周期性的有向图

非周期性的一个明显充分条件是图中存在一个自环 (self-loop)。也正是因为这个条件, 图1.9-1.12 中的有向图都是非周期性的。

为了理解连通图 (connected graphs) 的非周期性 (aperiodicity), 下面结果提供了一种简单方法, 具体证明过程可以在Häggström *et al.* (2002) 和Norris (1998) 中找到。

**引理 1.4.1.** 令  $\mathcal{G} = (V, E)$  为一个有向图, 如果  $\mathcal{G}$  是强连通的, 那么对于所有的  $v \in V$ ,  $\mathcal{G}$  是非周期性的, 当且仅当, 存在一个  $q \in \mathbb{N}$ , 使得对于所有的  $k \geq q$ , 存在  $v$  到  $v$  并且长度为  $k$  的有向游走。

通常, 我们把满足引理1.4.1的条件的节点  $v$  称为非周期性 (aperiodic) 的。有了这个术语, 引理1.4.1指出, 当且仅当所有的节点都是非周期性的, 强连通的有向图才是非周期性的。

Networkx 可用于检验节点或图的非周期性性质。例如, 如果  $G$  是一个 DiGraph 对象 (object), 那么 `nx.is_aperiodic(G)` 就会根据  $G$  的非周期性返回 `True` 或者 `False`。

### 1.4.1.5 邻接矩阵

在一个具有固定节点的图中, 边(edges)可以和一个称为邻接矩阵的二进制矩阵之间存在着简单映射。通过邻接矩阵去观察“连接”(connections)的好处就是, 它可以把线性代数的力量带入到有向图的分析中。我们在此先简要说明这一点, 并在 §1.4.2 中进行详细说明。

令  $\mathcal{G} = (V, E)$  为一个有向图, 其中  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , 那么, 对应于  $(V, E)$  的一个  $n \times n$  邻接矩阵(adjacency matrix)就被定义为:<sup>16</sup>

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{其中 } a_{ij} = \mathbb{1}\{(v_i, v_j) \in E\}. \quad (1.21)$$

例如, 将  $\{\text{poor, middle, rich}\}$  映射到  $(1, 2, 3)$ , 与图1.10中的有向图对应的邻接矩阵就是:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

邻接矩阵为我们提供了足够的信息来恢复图中的边。更一般地说, 给定一组节点  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , 一个元素为二进制的  $n \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  能够产生一个有向图  $\mathcal{G}$ , 该图的节点为  $V$ , 边为

$$E = \{(v_i, v_j) \in V \times V : a_{ij} = 1\}.$$

图  $(V, E)$  的邻接矩阵就是  $A$ 。

**练习 1.4.2.** 如果  $(u, v) \in E$  同时意味着  $(v, u) \in E$ , 则这个有向图  $(V, E)$  也称作为无向(undirected)图。这意味着邻接矩阵具有什么样的性质?

**备注 1.4.1.** 练习1.4.2中提出的有向图可以是无向的, 这个想法似乎是矛盾的。毕竟, 有向图是有向的。另一种介绍无向图的方法是将其定义为一个“节点-边”(vertex-edge)的对(pair)  $(V, E)$ , 其中每条边  $\{u, v\} \in E$  都是无序对, 而不是有序对  $(u, v)$ 。显然, 练习1.4.2中的定义与这一定义本质上是等价的, 但是考虑到我们的研究对象主要是有向图, 使用练习中的定义更为简便。

和 Networkx 一样, QuantEcon Python 库中 `quantecon` 提供了一个实现某些图论算法的图对象(graph object)。可用的算法集比较有限, 但通过即时编译加速, 可以使得每一种算法都更快。在 QuantEcon 的 `DiGraph` 对象(object)中, 一个实例就是通过邻接矩阵创建的。例如, 为了构建一个与图1.10相对应的有向图, 我们使用了相应的邻接矩阵(1.22), 具体如下所示。

```
import quantecon as qe
```

<sup>16</sup>请注意, 在某些应用领域, 邻接矩阵是转置的: 如果边是从  $j$  到  $i$ , 而不是从  $i$  到  $j$ , 那么  $a_{ij} = 1$ 。我们将避免这种奇怪和混乱的定义(这与标准图论和马尔科夫链研究中的标准符号惯例相矛盾)。

表 1.1: 金融网络中 16 个国家的代码

AU	澳大利亚	DE	德国	CL	智利	ES	西班牙
PT	葡萄牙	FR	法国	TR	土耳其	GB	英国
US	美国	IE	爱尔兰	AT	奥地利	IT	意大利
BE	比利时	JP	日本	SW	瑞士	SE	瑞典

```

import numpy as np

A = ((1, 0, 0),
      (1, 1, 1),
      (1, 1, 1))

A = np.array(A)          # 转换为 NumPy 数组
G = qe.DiGraph(A)

```

我们来 print 一组强连通分量的集合,作为 NumPy 数组的列表:

```
G.strongly_connected_components
```

输出的结果是 [array([0]), array([1, 2])]。

### 1.4.2 加权有向图

早期对网络的定量研究倾向于关注非加权有向图(unweighted digraphs),其中边的存在或不存在都被视为具有足够的信息(例如,关注或不关注社交媒体,存在或不存在连接两个城镇的道路)。然而,对于某些网络来说,这种二元的度量不如连接的大小或强度更重要。

图1.14给出了一个例子,按照来源国分组,它显示了私人银行间的资金流动(即贷款)。例如,从日本指向美国的箭头表示日本银行对所有在美国注册的银行持有的总债权,数据来源于国际清算银行(BIS)。图中每个节点的大小随着所有其他节点对该节点的外国债权总额增加而增加,箭头的宽度与它们所代表的外国债权成正比。<sup>17</sup> 国家代码在表1.1中给出。

在这个网络中,几乎每个  $u$  和  $v$  之间都存在一条边  $(u, v)$ (即,几乎涉及到网络中的每个国家),因此,边的存在并没有为我们提供足够多的信息。要了解这样的网络,我们不仅需要记录信用流的存在与否,还需要记录信用流的大小,而记录这些信息的正确数据结构就是“加权有向图”(“weighted directed graph”或“weighted digraph”)。<sup>18</sup> 在本节中,我们将对这一对象进行定义,并研究其性质。

<sup>17</sup>该图数据来自 2019 年第四季度国际清算银行(BIS)的综合银行统计数据(consolidated banking statistics),我们的计算使用了境内外银行金融债权的即时交易对手数据,该数据计算了“跨境债权”和“海外分支机构以外币和本币计算的本地债权”两者之和。一个节点对自身的外国债权被设定为零。

<sup>18</sup>事实上,低于 1000 万美元的外国债权所代表的箭头已从图 1.14 中剔除,因此,原本的网络要比现在看起来更加密集。

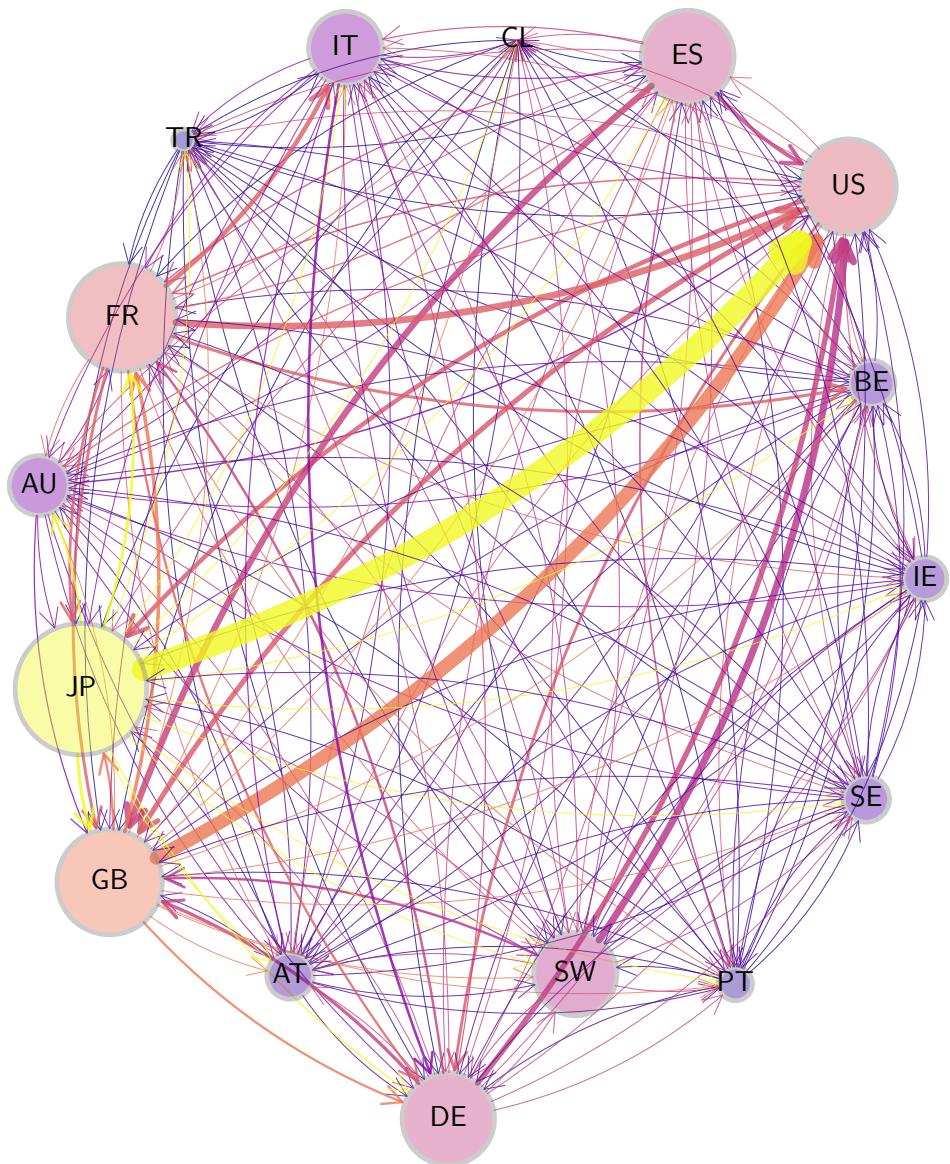


图 1.14: 按国家分组的国际私人信贷流动

### 1.4.2.1 定义

**加权有向图**(weighted digraph)  $\mathcal{G}$  是一个三元组  $(V, E, w)$ , 其中  $(V, E)$  表示的是一个有向图, 而  $w$  表示的则是从  $E$  到  $(0, \infty)$  的函数, 称为**权函数**(weight function)。

**备注 1.4.2.** 一般来说, 权重都被认为是非负的, 在本文中, 我们坚持认为权重更是正的, 亦即对于所有的  $(u, v) \in E$ , 函数  $w(u, v) > 0$ 。这是因为, 在本书中零权重(zero weight)的直观涵义就是不存在连接。换言之, 如果  $(u, v)$  具有零权重, 那么  $(u, v)$  就不会在  $E$  中, 因此  $w$  也就没有定义到  $(u, v)$  上。

**示例 1.4.6.** 如上所述, 图1.14可以被视为一个加权有向图。根据图1.14, 节点是来源国, 当  $u$  中的私人银行向  $v$  中的银行提供非零数量的贷款时, 国家  $u$  和  $v$  之间存在一条边, 分配给边  $(u, v)$  的权重则是从  $u$  到  $v$  的总贷款。

**示例 1.4.7.** 图1.15显示了另一个加权有向图, 箭头代表了加权有向图的边(与图1.9中的非加权有向图进行比较), 边旁边的数字代表了权重。在这个案例中, 你可以把箭头上的数字看作是一年内一个家庭在不同状态之间的转移概率。例如, 一个富裕的家庭会有 10% 的概率变穷。

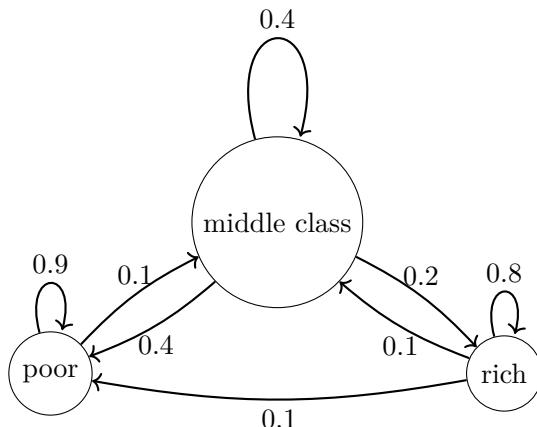


图 1.15: 一个加权有向图

上文对**可达性**(accessibility)、**通信**(communication)、**周期性**(periodicity)以及**连通性**(connectedness)的定义, 均可应用于  $(V, E)$ , 进而扩展到任意加权有向图  $\mathcal{G} = (V, E, w)$  中。例如, 如果  $(V, E)$  是强连通的, 那么  $(V, E, w)$  也被称为是强连通的, 图1.15的加权有向图就是强连通的。

### 1.4.2.2 加权有向图的邻接矩阵

在 §1.4.1.5 中, 我们讨论了非加权有向图的邻接矩阵, 而具有节点  $\{v_1, \dots, v_n\}$  的加权有向图  $(V, E, w)$  的邻接矩阵(adjacency matrix)则是:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ 其中 } a_{ij} = \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{如果 } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

显然, 在我们列举出  $V$  中的所有节点后, 权函数和邻接矩阵提供的信息基本相同。出于计算的简便性考虑, 我们更加倾向于使用后者。

**示例 1.4.8.** 图1.15中, 将  $\{\text{poor, middle, rich}\}$  映射到  $(1, 2, 3)$  上, 则对应于加权有向图的邻接矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

在 QuantEcon 的 `DiGraph` 具体实现中, 权重是通过关键词 `weighted` 进行记录的:

```
A = ((0.9, 0.1, 0.0),
      (0.4, 0.4, 0.2),
      (0.1, 0.1, 0.8))

A = np.array(A)
G = qe.DiGraph(A, weighted=True) # 存储权重
```

关于邻接矩阵, 需要记住的一个关键点是, 在相关的有向图中, 可以通过矩阵转置来“反转所有箭头”。

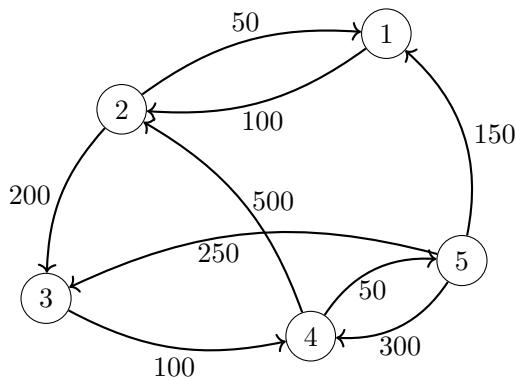


图 1.16: 银行间的信贷流动网络

**示例 1.4.9.** 图1.16的有向图可以看成是金融网络的典型例子, 类似于图1.14, 其中节点指的是银行, 边指的是现金流。例如, 我们可以看到 2 号银行向 3 号银行发放了一笔规模为 200

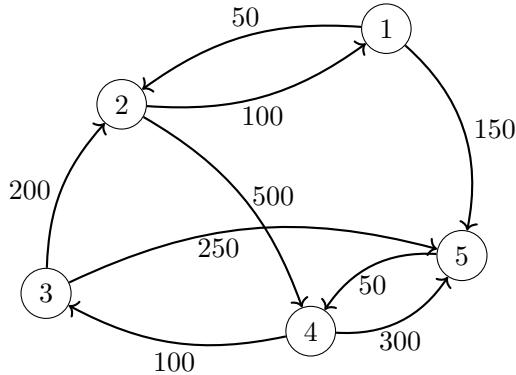
的贷款。图1.16对应的邻接矩阵是：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & 50 \\ 150 & 0 & 250 & 300 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

该矩阵的转置是：

$$A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 & 150 \\ 100 & 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

转置矩阵对应的网络则如图 1.17 所示, 该图的含义转变为贷款发放后的负债网络。当然, 这两个网络(原始网络和转置网络)都可用于金融市场分析(例如, 参见第五章)。



不难看出, 每个非负的  $n \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})$  都可以看作是节点等于  $[n]$  的加权有向图的邻接矩阵。所讨论的加权有向图  $\mathcal{G} = (V, E, w)$  可以设定为如下形式:

$$V = [n], \quad E = \{(i, j) \in V \times V : a_{ij} > 0\} \quad \text{以及} \quad w(i, j) = a_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E$$

我们也将  $\mathcal{G}$  称为由  $A$  诱导的加权有向图(weighted digraph induced by  $A$ )。

下一个练习将有助于加强对“矩阵转置会反转边的方向”的理解。

**练习 1.4.3.** 令  $A$  为非负的  $n \times n$  矩阵, 并且令  $\mathcal{G} = ([n], E, w)$  和  $\mathcal{G}' = ([n], E', w')$  分别为由  $A$  以及  $A^\top$  诱导的加权有向图。证明:

(1)  $(j, k) \in E'$  成立, 当且仅当  $(k, j) \in E$ ;

(2) 在  $\mathcal{G}'$  中有  $j \rightarrow k$ , 当且仅当在  $\mathcal{G}$  中有  $k \rightarrow j$ 。

### 1.4.2.3 应用:二次网络博弈

[Acemoglu et al. \(2016\)](#) 和 [Zenou \(2016\)](#) 考虑了一个具有  $n$  个代理人(agents)的二次博弈,其中代理人  $k$  寻求最大化:

$$u_k(x) := -\frac{1}{2}x_k^2 + \alpha x^\top Ax + x_k \varepsilon_k \quad (1.26)$$

这里,  $x = (x_i)_{i=1}^n$ ,  $A$  是一个对角线元素  $a_{ii} = 0$  ( $\forall i$ ) 的对称矩阵,  $\alpha \in (0, 1)$  是一个参数,  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^n$  是一个随机变量,这是[Acemoglu et al. \(2016\)](#) 在第 21.2.1 节中关于二次博弈的设定。对于所有的  $j \neq k$ ,第  $k$  个代理人在式(1.26)的最大化之下对  $x_j$  的选择进行决策。

在这个例子中,  $A$  可以被理解为一个具有节点  $V = [n]$  的图的邻接矩阵,其中,每个节点都是一个代理人。我们可以通过设定  $w(i, j) = a_{ij}$  ( $a_{ij} > 0$ ),并令  $E$  成为  $[n] \times [n]$  中所有的  $(i, j)$  对,进而重构加权有向图  $(V, E, w)$ 。这些权重识别了代理人之间存在的某种关系,例如影响力或友谊。

**练习 1.4.4.** 二次网络博弈的**纳什均衡 (Nash equilibrium)** 是一个向量  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , 该向量使得对于所有的  $i \in [n]$ , 在给定所有的  $j \neq i$  时, 代理人  $i$  在式(1.26)最大化条件下具有最优选择  $x_i^*$ 。证明:只要  $r(A) < 1/\alpha$ , 那么在  $\mathbb{R}^n$  中就存在唯一的纳什均衡解  $x^*$ , 并且有  $x^* := (I - \alpha A)^{-1} \varepsilon$ 。

本节描述的网络博弈有许多有趣的应用,包括社会网络 (social networks)、犯罪网络 (crime networks)和对等网络(peer networks)等,本章的 §1.5中提供了相关的参考资料。

### 1.4.2.4 性质

在本节中,我们将研究有向图、权函数以及邻接矩阵的一些基本性质和关系,我们将所要研究的有向图的节点集  $V$  都设为  $[n]$ 。这样做并不失一般性,因为本书中有向图的节点集总是有限和非空的。

此外,前文我们提到过加权有向图的额外通用性,下面连接“邻接矩阵”和“加权有向图”的结果对于非加权有向图同样是有效的。实际上,通过引入一个将  $E$  中的每个元素映射到单位 1 的权函数,可以将一个加权有向图映射到非加权有向图  $\mathcal{G} = (V, E)$  上,由此产生的邻接矩阵与我们在式(1.21)中对非加权有向图的原始定义一致。

作为附加的一般做法,如果  $A$  是一个邻接矩阵,且  $A^k$  是  $A$  的  $k$  次幂(其中,  $A^0$  是一个单位阵),那么我们就用  $a_{ij}^{s+t}$  表示成矩阵  $A^k$  的一个对应元素,通过这个符号,我们可以看到,由于  $A^{(s+t)} = A^s A^t$ ,矩阵的乘法法则意味着:

$$a_{ij}^{s+t} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^s a_{\ell j}^t \quad (i, j \in [n], \quad s, t \in N). \quad (1.27)$$

下一个命题解释了幂的重要性。

**命题 1.4.2.** 令  $\mathcal{G}$  为一个具有邻接矩阵  $A$  的加权有向图, 对于不同的节点  $i, j \in [n]$  以及  $k \in \mathbb{N}$ , 我们有:

$$a_{ij}^k > 0 \iff \text{从 } i \text{ 到 } j \text{ 存在长度为 } k \text{ 的有向游走。}$$

证明. ( $\Leftarrow$ ) 当  $k = 1$  时, 根据定义, 该命题显然成立。除此之外, 假设  $\Leftarrow$  在  $k - 1$  处成立, 并假设从  $i$  到  $j$  存在一个长度为  $k$  的有向游走  $(i, l, m, \dots, n, j)$ 。根据归纳假设, 我们有  $a_{in}^{k-1} > 0$ 。并且, 由于  $n, j$  是这个有向游走的一部分, 有  $a_{nj} > 0$ 。应用式(1.27), 可以得到  $a_{ij}^k > 0$ 。

( $\Rightarrow$ ) 留作练习(只需使用相同的逻辑)。  $\square$

**示例 1.4.10.** 在 §4.1 中, 我们表明, 如果  $A$  的元素表示的是跨状态的一步(one-step)转移概率, 那么  $A^t$  的元素( $A$  的  $t$  次幂)提供的就是  $t$  步( $t$ -step)转移概率。在马尔可夫过程理论中, 式(1.27)也被称为 Chapman-Kolmogorov 方程。

在这种情况下, 下一个定理是一个基础定理。

**定理 1.4.3.** 令  $\mathcal{G}$  为一个加权有向图, 以下两个陈述是等价的:

- (1)  $\mathcal{G}$  是强连通的;
- (2) 由  $\mathcal{G}$  生成的邻接矩阵是不可约的。

证明. 令  $\mathcal{G}$  为具有邻接矩阵  $A$  的加权有向图, 根据命题1.4.2, “ $\mathcal{G}$  是强连通的”等价于如下陈述: 对于每个  $i, j \in V$ , 我们都可以找到一个  $k \geq 0$ , 使得  $a_{ij}^k > 0$ (如果  $i = j$ , 则令  $k = 0$ )。这反过来, 又等价于  $\sum_{m=0}^{\infty} A^m \gg 0$ , 也即  $A$  的不可约性质。  $\square$

**示例 1.4.11.** 在图1.18的加权有向图中, 强连通性是不成立的, 因为节点 4 是一个源点(source)。根据定理1.4.3, 其邻接矩阵必定是可约的(reducible)。

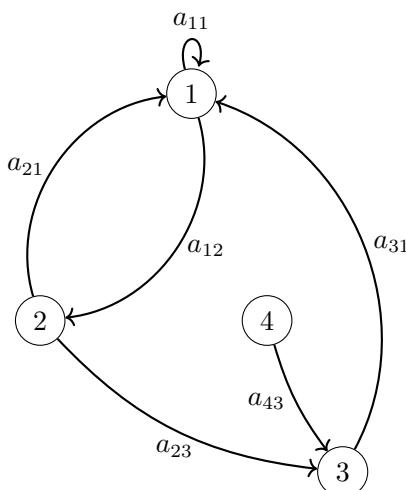


图 1.18: 不成立的强连通性

我们会发现,矩阵本原性(primitive)的性质对分析是有价值的(Perron-Frobenius定理暗示了这一点)。为了获得本原性,我们需要在强连通性上增加什么条件?

**定理1.4.4.** 对于一个加权有向图  $\mathcal{G} = (V, E, w)$ , 以下两个陈述是等价的:

- (1)  $\mathcal{G}$  是强连通的且非周期的。
- (2) 由  $\mathcal{G}$  生成的邻接矩阵是本原的。

**定理1.4.4的证明.** 在整个证明过程中, 我们设定  $V = [n]$ 。首先我们证明, 如果  $\mathcal{G}$  是非周期且强连通的, 那么对于所有的  $i, j \in V$ , 存在一个  $q \in \mathbb{N}$ , 使得每当  $k \geq q$ , 有  $a_{ij}^k > 0$ 。为此, 在  $V$  中任选  $i, j$ , 由于  $\mathcal{G}$  是强连通的, 所以存在一个  $s \in \mathbb{N}$ , 能够使得  $a_{ij}^s > 0$ , 同时由于  $\mathcal{G}$  是非周期的, 我们可以找到一个  $m \in \mathbb{N}$ , 使得在  $l \geq m$  时有  $a_{jj}^l > 0$ 。选择  $l \geq m$ , 并应用式(1.27), 可以得到

$$a_{ij}^{s+\ell} = \sum_{r \in V} a_{ir}^s a_{rj}^\ell \geq a_{ij}^s a_{jj}^\ell > 0。$$

因此, 令  $t = s + m$ , 每当  $k \geq t$ , 有  $a_{ij}^k > 0$ 。

((1)  $\Rightarrow$  (2)) 根据前面的论证, 给定任意  $i, j \in V$ , 存在一个  $s(i, j) \in \mathbb{N}$ , 使得每当  $m \geq s(i, j)$ , 有  $a_{ij}^m > 0$ 。在所有的  $(i, j)$  上设定  $k := \max s(i, j)$ , 可以得到  $A^k \gg 0$ 。

((2)  $\Rightarrow$  (1)) 假定  $A$  是本原的, 那么对于某些  $k \in \mathbb{N}$ , 我们有  $A^k \gg 0$ , 从命题1.4.2中可以直接得到有向图的强连通性。之后只需要检验非周期性。

如果我们能够证明对于所有的  $t \geq 0$ , 有  $a_{ii}^{k+t} > 0$ , 则非周期性成立。为了证明这一点, 我们只需证明对于所有的  $t \geq 0$ , 有  $A^{k+t} \gg 0$  就足够了。此外, 为了证明后者, 我们也只需证明  $A^{k+1} \gg 0$ , 因为剩余的部分可以通过归纳法得出。

为了论证  $A^{k+1} \gg 0$ , 请注意, 对于任意给定的  $i, j$ , 式(1.27)意味着

$$a_{ij}^{k+1} = \sum_{\ell \in V} a_{i\ell} a_{\ell j}^k \geq \bar{a} \sum_{\ell \in V} a_{i\ell}。$$

其中,  $\bar{a} := \min_{\ell \in V} a_{\ell j}^k > 0$ 。如果  $\sum_{\ell \in V} a_{i\ell} > 0$ , 则证明完成。但是该不等式一定是成立的, 否则节点  $i$  就是一个汇点(sink), 显然这与强连通性的性质相矛盾。  $\square$

**示例 1.4.12.** 在练习1.2.20中, 我们努力证明当且仅当  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  时,  $P_w$  是不可约的, 使用的方法是直接计算并检验  $P_w$  的幂(如式(1.3)所示)。然而, 当我们检验图1.3对应的有向图并使用“不可约性等价于强连通性”这一事实时, 检验结果就微不足道了。同样, 练习1.2.20的结果表明, 当且仅当  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  并且  $\min\{\alpha, \beta\} < 1$  时,  $P_w$  是本原的, 如果我们检验有向图并使用定理1.4.4, 那么这一结果就变得更容易确定了。

### 1.4.3 网络中心度

在研究各种网络时,一个反复出现的话题是不同节点的相对“中心度”(centrality)或“重要性”(importance),<sup>19</sup>一个经典的应用就是搜索引擎对网页的排名。这里给出了一些在经济学中的应用:

- 如果考虑到所有的后向关联(backward linkages),哪个行业中的1美元额外需求对加总生产的影响最大?哪个部门的生产率提高对国家产出影响最大?
- 如果某个负面冲击能够危及整个银行业的偿付能力,那么政府应该先救助哪些机构?
- 在§1.4.2.3考虑的网络博弈中,纳什均衡是 $x^* = (I - \alpha A)^{-1} \varepsilon$ 。博弈中参与者的 behavior 取决于网络的拓扑结构,正如 $A$ 所刻画的。一个常见的发现是,代理人的活动或努力程度(例如,犯罪网络中参与者犯罪活动的严重程度),可以从他们在网络中的“中心度”来预测。

在本节中,我们将回顾与网络中心度有关的一些基本概念。<sup>20</sup>

#### 1.4.3.1 中心度度量

令 $G$ 表示加权有向图的集合,中心度度量(centrality measure)将 $G$ 中的每个 $\mathcal{G} = (V, E, w)$ 关联到了 $m(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{|V|}$ ,其中, $m(\mathcal{G})$ 的第 $i$ 个元素被解释为节点 $v_i$ 的中心度(或排名),大多数情况下 $m(\mathcal{G})$ 是非负的。在下文中,为了简化符号,我们取 $V = [n]$ 。

(不幸的是,即使是最常见的中心度度量,其定义和术语在不同文献中也存在较大差异。我们的惯例是遵循数学家的常用用法,而不是物理学家,例如,我们使用的术语与 Benzi & Klymko (2015) 保持一致。)

#### 1.4.3.2 权威 vs 枢纽

搜索引擎设计者认识到网页可能以两种不同的方式变得重要:某些页面具有很高的枢纽中心度(hub centrality),这意味着它们会链接到有价值的信息源(例如新闻聚合网站);而某些网页则具有较高的权威中心度(authority centrality),这意味着它们包含有价值的信息,正如它们传入链接的数量和重要性所展示的(例如主流新闻组织网站)。图1.19有助于直观地理解这两种方式之间的差异。

类似的想法可以并且已经应用到了经济网络中(通常使用不同的术语)。例如,在我们下面研究的生产网络中,高枢纽中心度(high hub centrality)通常与上游有关,即这些部门倾向于为许多重要行业提供中间产品;相反,高权威排名(high authority ranking)通常与下游较为吻合。

<sup>19</sup>译者注:也有学者将“centrality”翻译为“中心性”。

<sup>20</sup>中心度度量(centrality measures)有时被称为“影响力度量”(influence measures),特别是在社会网络相关的领域。

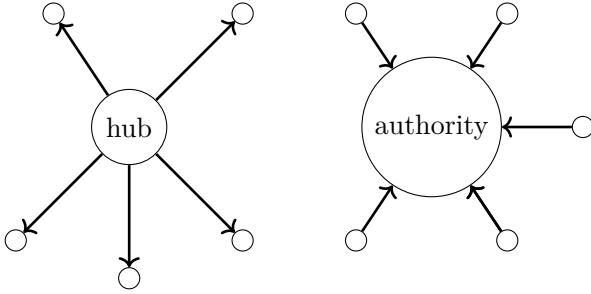


图 1.19: 枢纽 vs 权威

在下文中, 我们将讨论基于枢纽 (hub-based) 和基于权威 (authority-based) 的中心度度量, 在给出定义的基础上进一步阐明它们之间的联系。

#### 1.4.3.3 点度中心度

给定有向图  $\mathcal{G} = (V, E)$ , 衡量一个节点“重要性”的两个最基本度量指标就是入度 (in-degree) 和出度 (out-degree), 这两者都提供了有关中心度的测量方法。入度中心度 (in-degree centrality) 被定义为向量  $(i_d(v))_{v \in V}$ , 出度中心度 (out-degree centrality) 被定义为  $o(\mathcal{G})$ 。如果  $\mathcal{G}$  被表示为 Networkx 包 DiGraph 的对象  $G$  (例如, 参见 §1.4.1.2), 那么  $i(\mathcal{G})$  可以通过以下代码进行计算:

```
iG = [G.in_degree(v) for v in G.nodes()]
```

当有向图  $\mathcal{G}$  较大时, 这种方法相对较慢, 由于向量化操作通常更快, 所以我们可以尝试使用数组操作的替代方法。

为了说明该方法, 请回顾图1.16中的金融机构网络, 我们可以通过将式(1.24)所示的邻接矩阵转换为一个二进制矩阵来计算入度和出度中心度, 该二进制矩阵对应的是同一个网络下非加权有向图的邻接矩阵:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

现在当且仅当  $i$  指向  $j$  时,  $U(i, j) = 1$ 。此时, 出度和入度中心度可以分别由下式进行计算:

$$o(\mathcal{G}) = U \mathbb{1} \quad \text{和} \quad i(\mathcal{G}) = U^\top \mathbb{1}。 \quad (1.29)$$

也就是说, 对  $U$  的行求和可以测算出度中心度, 对列求和则可以测算入度中心度。

出度中心度的测算是一种基于枢纽 (hub-based) 的排名, 而入度中心度则是基于权威 (authority-based) 的排名。对于图1.16中的金融网络, 某个机构的出度越高意味着该机构向

许多其他机构提供贷款,而入度越高则意味着许多其他机构向该机构提供贷款。

请注意,如果想要从基于枢纽的排名转换到基于权威的排名,我们只需要对(二进制)邻接矩阵  $U$  进行转置。我们将看到,其他中心度指标的测算也可以进行类似操作。这种做法也是直观的,因为转置邻接矩阵会反转边的方向(练习1.4.3)。

类比式(1.29),对于具有邻接矩阵  $A$  的加权有向图  $\mathcal{G} = (V, E, w)$ ,我们可以将**加权出度中心度 (weighted out-degree centrality)** 和**加权入度中心度 (weighted in-degree centrality)** 的测算分别定义为:

$$o(\mathcal{G}) = A\mathbb{1} \quad \text{和} \quad i(\mathcal{G}) = A^\top\mathbb{1}。 \quad (1.30)$$

我们将在下面的应用中介绍这些测算的一些直觉。

不幸的是,虽然中心度的入度和出度很容易进行测算,但它们并不总是能提供有效信息。例如,在此考虑图1.14中的国际信贷网络,几乎每个节点之间都存在一条边,因此基于入度或出度的中心度排名无法有效地将国家进行区分,图1.20中显示的国家出度排名(左上角图)和国家入度排名(右上角图)也佐证了这一点。

基于点度(degree-based)的中心度排名还有其他局限性。例如,假设网页 A 有很多入站链接,而网页 B 的入站链接较少,尽管网页 A 在入度方面占优势地位,但是,如果进入网页 B 的链接可能是访问量更大的页面,那么对于潜在的广告商来说,网页 A 的重要性可能不如网页 B。对这一点的思考表明,“重要性”可以是递归的,即给定节点的重要性取决于链接到它的其他节点的重要性。我们要讨论的下一组中心度度量方法就具有这种递归性质。

#### 1.4.3.4 特征向量中心度

令  $\mathcal{G} = (V, E, w)$  为具有邻接矩阵  $A$  的加权有向图,回顾一下, $r(A)$  是  $A$  的谱半径。 $\mathcal{G}$  的**枢纽特征向量中心度 (hub-based eigenvector centrality)** 被定义为通过求解式(1.31)获得的  $e \in \mathbb{R}_+^n$ :<sup>21</sup>

$$e = \frac{1}{r(A)} Ae。 \quad (1.31)$$

逐个元素来看,就有:

$$e_i = \frac{1}{r(A)} \sum_{j \in [n]} a_{ij} e_j, \quad \forall i \in [n]。 \quad (1.32)$$

注意该定义的递归性质:通过对  $i$  到所有节点的“流量”(rates of flow)进行加权,节点  $i$  的中心度与这些节点中心度的加总成正比。如果满足(1)有许多边从  $i$  离开,(2)这些边具有较大的权重,(3)这些边指向的其他节点排名较高,那么节点  $i$  的排名就会很高。

当我们在 §2.1.3研究需求冲击时,将对特征向量中心度提供更具体的解释。我们将看到,在生产网络中,具有较高的枢纽特征向量中心度的部门是重要的供应商,特别是,一旦订单通

<sup>21</sup>译者注:“hub-based eigenvector centrality”也可被译为“基于枢纽的特征向量中心度”,本书为了简化起见,直接将这一术语称为“枢纽特征向量中心度”。类似地,后文中的“authority-based eigenvector centrality”,我们也将其译为“权威特征向量中心度”。

过网络进行后向流动,它们就会被一系列的需求冲击所激活。

**练习 1.4.5.** 证明:只要  $A$  是强连通的,那么在正的标量倍数范围内,式(1.32)有唯一解。

顾名思义,枢纽特征向量中心度就是对枢纽中心度的测量:当某个节点指向的其他节点越重要时,那么该节点就会获得越高的排名。接下来两个练习有助于强化对这一点的认识。

**练习 1.4.6.** 证明:出度为 0 的节点,其枢纽特征向量中心度总是为 0。

如果邻接矩阵  $A$  是本原的(primitive),那么在计算特征向量中心度时,我们就可以使用 Perron-Frobenius 定理,它告诉我们,在  $m \rightarrow \infty$  下,有  $r(A)^{-m}A^m \rightarrow e\varepsilon^\top$ ,其中  $\varepsilon$  和  $e$  分别为矩阵  $A$  主特征值对应的左和右特征向量。<sup>22</sup>这意味着,

$$r(A)^{-m}A^m\mathbb{1} \rightarrow ce, \quad \text{其中 } c := \varepsilon^\top \mathbb{1} \quad (1.33)$$

因此,在一个较大  $m$  之下,  $r(A)^{-m}A^m\mathbb{1}$  会返回一个  $e$  的标量倍数。Networkx 包提供了一个通过式(1.33)来计算特征向量中心度的函数。

这种方法的一个问题是本原矩阵的假设,因为如果没有本原性,式(1.33)的收敛可能会失败。以下函数使用了一种基于 Arnoldi 迭代的替代技术,即使在本原性失效的情况下,它也能正常工作。(下面将解释 `authority` 选项)

```
import numpy as np
from scipy.sparse import linalg

def eigenvector_centrality(A, m=40, authority=False):
    """
    计算并归一化 A 的主特征向量
    """
    A_temp = A.T if authority else A
    r, vec_r = linalg.eigs(A_temp, k=1, which='LR')
    e = vec_r.flatten().real
    return e / np.sum(e)
```

**练习 1.4.7.** 证明:图1.21中的有向图不是本原的。使用上面的代码或其他合适的程序,计算枢纽特征向量中心度排名,你应该能够获得接近  $e = (0.3694, 0.2612, 0.3694, 0)$  的值。请注意,汇点(sink,也即节点 4)的排名是最低的。

图1.20的左中图给出了图1.14所示的国际信贷网络的枢纽特征向量中心度排名。根据这一排名,获得高评级的国家往往是信贷供应方面的重要参与者。该测算中,日本的排名最高,

<sup>22</sup>译者注:简便起见,下文对于主特征值对应的左和右特征向量分别表述为“左主特征向量”和“右主特征向量”。

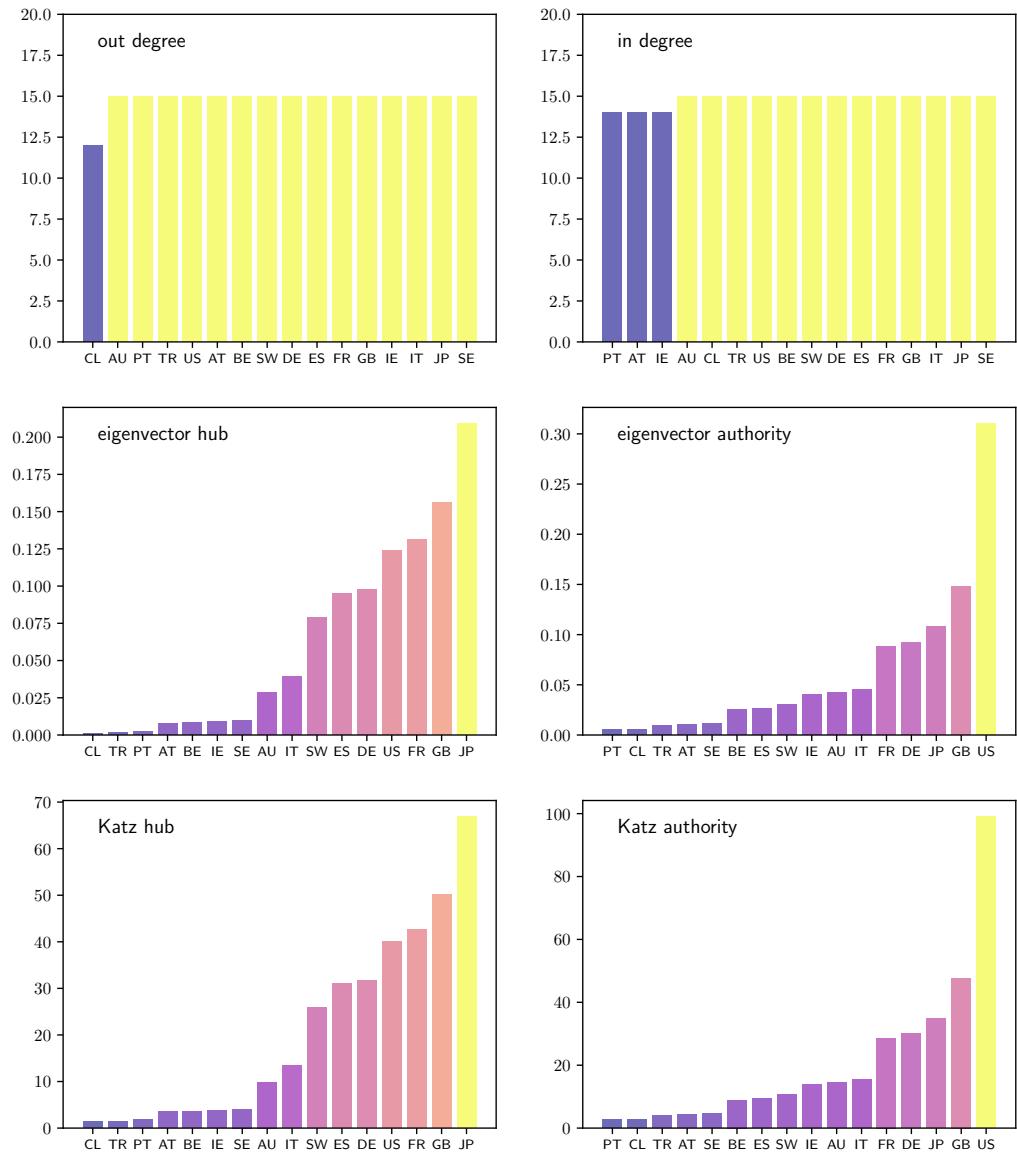


图 1.20: 信贷网络的中心度度量

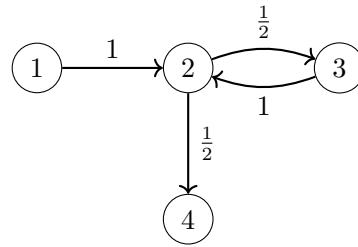


图 1.21: 一个有源点和汇点的网络

尽管像英国和法国这样拥有大型金融部门的国家并不落后。(图1.14中的配色方案也与枢纽特征向量中心度相匹配。)

**权威特征向量中心度** (authority-based eigenvector centrality) 被定义为通过求解式(1.34)获得的  $e \in \mathbb{R}_+^n$ :

$$e = \frac{1}{r(A)} A^\top e \quad (1.34)$$

式(1.34)和(1.31)的不同之处仅仅是矩阵  $A$  的转置(转置不影响矩阵的谱半径)。逐个元素来看，则有：

$$e_j = \frac{1}{r(A)} \sum_{i \in [n]} a_{ij} e_i, \quad \forall j \in [n] \quad (1.35)$$

可以看出，如果链接到  $j$  的节点，其权威特征向量中心度较高，那么， $e_j$  也会相对较高。

图1.20右中图给出了图1.14所示的国际信贷网络的权威特征向量中心度排名。排名靠前的都是那些“吸引大量信贷流入的”或者“从具有重要网络地位的国家信贷流入的”国家。作为银行间信贷的目标，美国显然在排名中占主导地位。

**练习 1.4.8.** 假设  $A$  是强连通的，证明：权威特征向量中心度在正的缩放常数范围内是被唯一定义的，并且等于  $A$  的左主特征向量。

#### 1.4.3.5 卡兹中心度

特征向量中心度可能也存在一些问题。虽然在矩阵  $A$  是强连通的假设条件下，式(1.32)的定义是有意义的（因此，根据 Perron-Frobenius 定理， $r(A) > 0$ ），但是，在许多现实世界网络中，强连通性并不成立。我们将在 §2.1 中看到这方面的例子，即由投入-产出矩阵定义的生产网络。

此外，虽然强连通性保证了主特征向量的严格正性，但是当这一条件失效时，许多节点的排名得分就会变为 0(例如，参见练习1.4.6)。当我们研究具体的网络时，这种零排名往往与我们的直觉相悖。

考虑到诸如此类的情形，我们希望使用另一种网络中心度的概念，即卡兹中心度 (Katz centrality)，其最早由Katz (1953) 提出，它在一个较弱的条件下保持为正，并且在一个调整参数之下是可以被唯一定义的。令参数  $\beta$  的范围为  $(0, 1/r(A))$ ，一个具有邻接矩阵  $A$  的

加权有向图  $\mathcal{G}$ , 其枢纽卡兹中心度 (hub-based Katz centrality) 在参数  $\beta$  处被定义为求解式(1.36)获得的向量  $\kappa := \kappa(\beta, A) \in \mathbb{R}_+^n$ :<sup>23</sup>

$$\kappa_i = \beta \sum_{j \in [n]} a_{ij} \kappa_j + 1, \quad \forall i \in [n]. \quad (1.36)$$

这种定义提供的直觉与特征向量中心度非常相似, 即当  $i$  被具有高中心度的节点所连接时, 节点  $i$  就被赋予了较高中心度。(1.36)和(1.32)之间的区别仅仅在于加入了常数 1。

**练习 1.4.9.** 证明: 在规定的  $0 < \beta < 1/r(A)$  条件下, 枢纽卡兹中心度总是有限的, 并且可以被唯一定义为:

$$\kappa = (I - \beta A)^{-1} \mathbb{1} = \sum_{\ell \geq 0} (\beta A)^\ell \mathbb{1}, \quad (1.37)$$

其中  $\mathbb{1}$  为 1 的列向量。

**练习 1.4.10.** 从 Perron-Frobenius 定理中我们知道, 当有向图是强连通时, 特征向量中心度会处处为正。一个比强连通更弱的条件是, 每个节点都有正的出度。证明: 在这个条件下, 每个节点的卡兹中心度都是严格正的。

衰减参数  $\beta$  用于确保  $\kappa$  在  $0 < \beta < 1/r(A)$  条件下是有限的且可以被唯一定义。可以证明, 当网络图是强连通时, 随着  $\beta \uparrow 1/r(A)$ , 枢纽(或权威)卡兹中心度会收敛到枢纽(或权威)特征向量中心度。<sup>24</sup>这就是为什么图1.20的底部双图显示, 枢纽(或权威)卡兹中心度排名非常接近于与其相对应的特征向量中心度。

一般情况下, 当  $r(A) < 1$  时, 我们可以使用  $\beta = 1$  作为卡兹中心度计算的默认值。

**练习 1.4.11.** 当  $\beta = 1$  时, 计算图1.21中简单有向图的枢纽卡兹中心度排名, 你应该可以得到  $\kappa = (5, 4, 5, 1)$ 。因此, 源点(节点 1)的排名相对较高, 而汇点(节点 4)的排名相对较低。

类似地,  $\mathcal{G}$  的权威卡兹中心度 (authority-based Katz centrality) 被定义为求解式(1.38)获得的  $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ :

$$\kappa_j = \beta \sum_{i \in [n]} a_{ij} \kappa_i + 1, \quad \forall j \in [n] \quad (1.38)$$

**练习 1.4.12.** 证明: 在限制条件  $0 < \beta < 1/r(A)$  下, 式(1.38)的唯一解由下式给出(验证这一等价关系):

$$\kappa = (I - \beta A^\top)^{-1} \mathbb{1} \iff \kappa^\top = \mathbb{1}^\top (I - \beta A)^{-1} \quad (1.39)$$

**练习 1.4.13.** 当  $\beta = 1$  时, 计算图1.21中有向图的权威卡兹中心度排名, 你应该可以得到  $\kappa = (1, 6, 4, 4)$ 。请注意, 现在源点的排名相对较低, 这是因为枢纽(hubs)相对于权威(authorities)来说其值是下降的。

<sup>23</sup>译者注: 与前文做法类似, “hub-based Katz centrality”也可被译为“基于枢纽的卡兹中心度”, 为简化起见, 本文直接译为“枢纽卡兹中心度”。类似地, 后文中的“authority-based Katz centrality”, 我们也将其译为“权威卡兹中心度”。

<sup>24</sup>例如, 参见 Benzi & Klymko (2015)。

### 1.4.4 无标度网络

大型复杂网络通常具有哪些性质? 关于复杂网络最引人注目的事实之一就是,许多网络都表现出了无标度 (scale-free) 特性,这意味着,宽泛地说,网络中每个节点拥有的连通数量 (the number of connections) 遵循着幂律 (power law)。无标度特性之所以引人注目,是因为它适用于各种各样的网络,尽管从社会网络到引证、销售、金融和生产网络,每一个网络都是由不同的底层机制生成的,但是它们普遍具有这种特定的统计结构。

在这一节中,我们首先定义度分布,然后讨论其性质,包括可能的幂律行为。

#### 1.4.4.1 经验度分布

令  $\mathcal{G} = (V, E)$  为一个有向图,在不失一般性的前提下,假设  $V = [n]$ , 其中  $n \in \mathbb{N}$ 。 $G$  的入度分布 (in-degree distribution) 指的是由下式定义的序列  $\varphi_{in}(k)$ :

$$\varphi_{in}(k) = \frac{\sum_{v \in V} \mathbb{1}\{i_d(v) = k\}}{n} \quad (k = 0, \dots, n), \quad (1.40)$$

其中,  $i_d(v)$  表示的是节点  $v$  的入度。换言之,在  $k$  处考察的入度分布就是网络中入度为  $k$  的节点所占的比例。在 Python 中,如果  $\mathcal{G}$  被表示为一个叫做  $G$  的 NetworkxDiGraph, 并执行 `import numpy as np`, 那么可以通过以下方式计算入度分布:

```
def in_degree_dist(G):
    n = G.number_of_nodes()
    iG = np.array([G.in_degree(v) for v in G.nodes()])
    phi = [np.mean(iG == k) for k in range(n+1)]
    return phi
```

出度分布 (out-degree distribution) 的定义与此类似,将式(1.40) 中的  $i_d$  替换为  $o_d$ ,并表示为  $(\varphi_{out}(k))_{k=0}^n$ 。

回顾一下,如果  $(u, v) \in E$  同时代表着  $(v, u) \in E$ ,则有向图  $\mathcal{G} = (V, E)$  也称为无向图。如果  $\mathcal{G}$  是无向的,那么对于所有的  $v \in V$ ,有  $i_d(v) = o_d(v)$ 。在这种情况下,我们通常直接用  $\varphi$ ,而不是  $\varphi_{in}$  或者  $\varphi_{out}$ ,用以指代有向图的度分布 (degree-distribution)。

无标度网络 (scale-free network) 指的是度分布服从幂律 (power law) 的网络,即存在正的常数  $c$  和  $\gamma$ ,满足:

$$\varphi(k) \approx ck^{-\gamma}, \quad \text{在 } k \text{ 较大时。} \quad (1.41)$$

这里的  $\varphi(k)$  既可以指入度,也可以指出度,或同时指两者,这取决于我们研究的兴趣。根据 §1.3.2.4 的讨论,度分布有一个尾指数  $\alpha = \gamma - 1$  的帕累托尾,这两者在想法上是一致的。

虽然我们省略了正式的检验,但图1.2所示的商用飞机国际贸易网络的度分布近似于无标度。图1.22说明了这一点,它将度分布与  $f(x) = cx^{-\gamma}$  (其中,  $c = 0.2$  并且  $\gamma = 1.1$ ) 绘制在

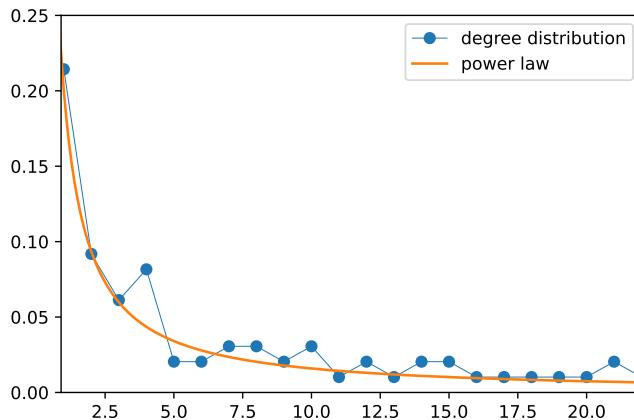


图 1.22: 商用飞机国际贸易网络的度分布

了一起(在由 Networkx 函数 `degree_histogram` 执行的度分布计算中, 忽略了方向性, 将网络视作无向图)。

Barabási & Albert (1999) 注意到了许多网络的无标度性质, 例如, 他们发现通过超链接连接的互联网页面的入度和出度分布都遵循幂律。在随后的几年中, 许多网络都被发现具有无标度特性, 达到一阶近似, 包括 Twitter 上的关注网络 (Pearce, 2017; Punel & Ermagun, 2018)、其他社会网络 (Rybksi et al., 2009) 和学术合作网络(例如, 论文加引用)。

在经济和金融领域, Carvalho (2014) 表明, 美国投入-产出数据的加权出度分布(在第二章中会进一步讨论)遵循着幂律, 卡兹中心度也是如此。Carvalho et al. (2021) 还考察了日本公司关联网络中的入度(供应商)和出度(客户)分布的幂律尾部。在许多金融和银行间信用网络中也可以观察到无标度度分布(Scale-free degree distributions) (Kim et al., 2007; Ou et al., 2007; De Masi et al., 2011)。

在许多情况下, 一个给定网络的无标度特性对经济产出和福利都具有重要意义。例如, 投入-产出网络中的幂律通常表明少数非常大的部门或公司占主导地位, 这反过来又影响了产业的活力和企业层面的冲击所导致的总体不稳定的可能性。我们将在第二章中探讨其中的一些问题。

#### 1.4.4.2 随机图

探讨不同动态(dynamics)对图的度分布具有何种影响, 其中一种方法就是指定一个随机生成图的规律(law), 然后检验其所产生的度分布。这种方法能够比较有效的使我们理解无标度网络生成的各种机制。

我们先从一种最流行和最基本的无向图随机生成方法开始, 该方法最初由Erdős & Rényi (1960) 提出。生成图  $\mathcal{G} = (V, E)$  的过程是:

- (1) 确定一个整数  $n \in \mathbb{N}$  以及一个  $p \in (0, 1)$ ,

- (2) 将  $V := [n]$  视作节点的集合,
- (3) 令  $E = \{\emptyset\}$ ,
- (4) 对于每个  $(i, j) \in V \times V$ , 且  $i \neq j$ , 以概率  $p$  将无向边  $(i, j)$  添加到边集  $E$  中。

在最后一步中, 添加的方法是独立的, 也即每次我们抛出一枚无偏的 IID 硬币的概率为  $p$ , 如果硬币是正面的, 就添加到边中。

下面的 Python 代码提供了一个函数, 可以调用该函数以使用此程序随机生成无向图, 它应用了来自 `itertools` 库的 `icombinations` 函数, 对于调用 `combinations(A, k)`, 它会返回一个大小为  $k$  的  $A$  的所有子集的列表。例如:

```
import itertools
letters = 'a', 'b', 'c'
list(itertools.combinations(letters, 2))

returns [('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'c')].
```

我们使用 `combinations` 来产生所有可能的边的集合, 然后以概率  $p$  将它们添加到图中:

```
def erdos_renyi_graph(n=100, p=0.5, seed=1234):
    " 返回一个 Erdos-Renyi 随机图"
    np.random.seed(seed)
    edges = itertools.combinations(range(n), 2)
    G = nx.Graph()

    for e in edges:
        if np.random.rand() < p:
            G.add_edge(*e)

    return G
```

(此处提供的代码是 Networkx 库中所包含的功能的简化版本, 这是为了清晰而不是为了高效而编写的, 更高效的版本可以在 Networkx 和 Julia 的 Graphs.jl 库中找到。)

图1.23的左侧显示了一个由 `erdos_renyi_graph` 函数生成的图形实例, 其中,  $n = 100$ ,  $p = 0.05$ , 节点上颜色越浅表示程度越高 (即连接越多)。右图则展示了对应的度分布, 呈现出了典型的 Erdos-Renyi 随机图的钟形曲线。事实上, 可以证明 (例如, 参见Bollobás (1999) 或Durrett (2007)), 度分布也满足如下二项式:

$$\varphi(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

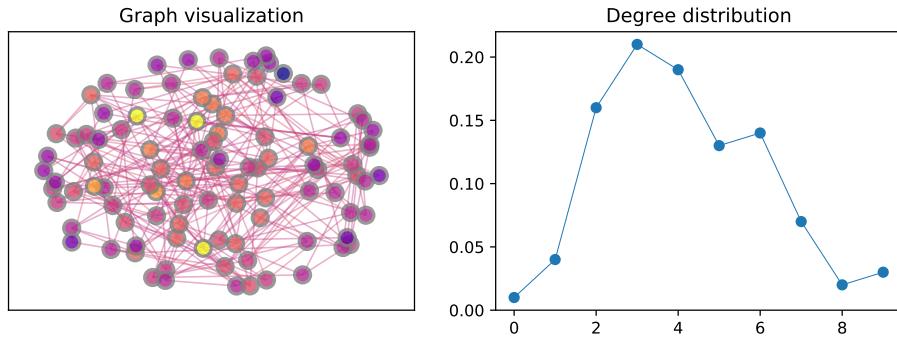


图 1.23: Erdos-Renyi 随机图的一个例子

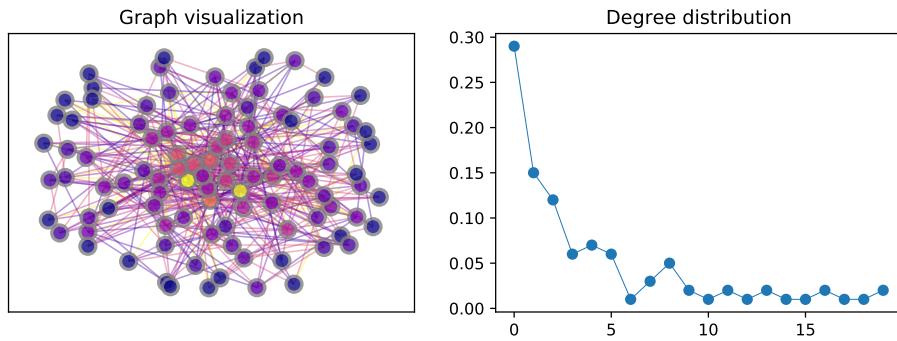


图 1.24: 优先连接随机图的一个例子

#### 1.4.4.3 优先连接

显然, Erdos-Renyi 随机图未能复刻许多网络中观察到的度分布的右厚尾 (heavy right hand tail), 对此, Barabási & Albert (1999) 提出了一种能够随机生成具有无标度网络图的机制。

他们提出的随机机制被称为优先连接(preferential attachment)。本质上说,每次有新的节点加入到无向图时,它都会通过边连接到现有的节点  $m$ , 其中, 节点  $v$  被选中的概率与  $v$  的度数(degree)成正比。Barabási & Albert (1999) 表明,当节点数量收敛到  $+\infty$ ,在极限内所得的度分布会表现出帕累托尾。详细的证明可以在 Durrett (2007) 的第 4 章中找到。

虽然我们省略了证明的细节,但我们可以看到模拟中看到幂律的出现。例如, 图1.24显示了一个由 Networkx 的 barabasi\_albert\_graph 函数生成的有 100 个节点的随机图,连接(attachments)的数量设置为 5。图1.24中右图的度分布模拟已经显示出了一个长的右尾。

## 1.5 章节说明

Perron-Frobenius 定理归功于 Oskar Perron(1880-1975)和 Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917),其主要结果在 1912 年得到证明。早在 1915 年, Dénes König(1884-1944)就发

现了 Perron-Frobenius 定理与图论之间的联系，并提供了使用二部图 (bipartite graphs) 的替代证明。[Schrijver \(2005\)](#) 讨论了这方面的一些历史。

我们已经提到了[Jackson \(2010\)](#)、[Easley et al. \(2010\)](#) 和[Borgatti et al. \(2018\)](#) 的经济和社会网络教科书，以及[Bramoullé et al. \(2016\)](#) 的手册。[Jackson \(2014\)](#) 则进行了系统的文献研究。在网络科学领域中，[Newman \(2018\)](#)、[Menczer et al. \(2020\)](#) 以及 [Coscia \(2021\)](#) 的高水平讲义都非常出色。

[Kepner & Gilbert \(2011\)](#) 是一本关于图和图论算法的好书。[Ballester et al. \(2006\)](#) 从二次博弈的纳什均衡角度对 Katz 中心度（他们称之为 Bonacich 中心度）进行了解释。[Du et al. \(2015\)](#) 展示了如何从一个经济问题的竞争性均衡中获得 PageRank。[Calvó-Armengol et al. \(2009\)](#) 建立了一个模型，将代理人决策嵌入到了网络中，获得的结果与卡兹中心度成正比。[Elliott & Golub \(2019\)](#) 表明，在代理人可以创造非竞争性、异质性公共产品的设定下，一组重要的有效解的方案特征是，贡献与代理人在网络中的特征向量中心度成正比。

[Kumamoto & Kamiyashi \(2018\)](#) 对经济学和社会科学中的幂律进行了详细研究，包括对[Barabási & Albert \(1999\)](#) 的优先连接模型进行了讨论。[Newman \(2005\)](#) 也有很强的可读性。[Durrett \(2007\)](#) 的教科书写的很严谨、仔细，不仅包含了有趣的动机背景，还有对无标度网络研究的大量引用列表。

从式(1.41)的符号  $\approx$  应该可以看出，无标度网络的定义并不完全严格。此外，当把定义与观察到的网络联系起来时，我们不能像在 §1.3.2 中定义幂律时那样，通过取一个极限来获得完美的定义，因为节点的数量总是有限的。定义中的这种不精确性导致了很多激烈的争论（例如，参见[Holme \(2019\)](#)）。鉴于实证研究的优势，我们认为，在合理的近似程度下，无标度性质是非常普遍的。

在 §1.4.2.3 中，我们简要提到了网络博弈、社会网络和关键参与者。这些主题比我们能够提供的内容更值得关注。[Zenou \(2016\)](#) 给出了一个很好的综述。[Amarasinghe et al. \(2020\)](#) 则将这些想法应用到了经济发展问题上。其他有价值的相关论文包括[Allouch \(2015\)](#)、[Belhaj et al. \(2016\)](#)、[Demange \(2017\)](#)、[Belhaj & Deroian \(2019\)](#)、[Galeotti et al. \(2020\)](#)。

为了使本书更加简洁，我们不情愿地省略的另一个主题是经济环境中的内生网络形成。该领域有影响的论文包括[Bala & Goyal \(2000\)](#)、[Watts \(2001\)](#)、[Graham \(2017\)](#)、[Galeotti & Goyal \(2010\)](#)、[Hojman & Szeidl \(2008\)](#) 和[Jackson & Wolinsky \(1996\)](#)。

最后，[Candogan et al. \(2012\)](#) 研究了向社交网络参与者出售商品的垄断者利润最大化问题，其主要思想是，在某些情况下，垄断者会发现向网络中的主要参与者提供折扣是有利可图的。[Atalay et al. \(2011\)](#) 认为，在美国买方-供应商网络中观察到的入度要比幂律具有更轻的尾部，并提供了一个更适合其数据的模型。

# 第二章 生产

本章我们将研究多部门环境下的生产，其基本框架是投入-产出分析，由 Wassily Leontief (1905-1999) 提出并在 [Leontief \(1941\)](#) 中得到推广。投入-产出分析通常被用来构建国民账户以及研究产业间关系。1973 年，Leontief 因其在投入-产出系统方面的工作而获得诺贝尔经济学奖。

投入-产出分析目前正被纳入现代多部门模型下的贸易、增长、冲击传播以及加总波动理论中 ([§2.4](#) 提供了一份详细的参考文献清单)，该方法重新引起兴趣的原因之一是，网络分析和图论概念的引入，使我们产生了一些新的见解。本章将对其中的主要观点进行介绍。

## 2.1 多部门模型

本节我们将介绍基本的投入-产出模型，解释模型的网络涵义，并将传统问题（例如跨部门需求冲击的相对影响）与网络拓扑和网络中心度联系起来。

### 2.1.1 生产网络

我们从投入-产出表的基本概念及其与生产网络的关系开始，为了简化说明，我们在下文中忽略了进口和出口 ([§2.4](#) 中给出了一些关于一般情形的讨论)。

#### 2.1.1.1 投入-产出分析

负责收集国家和地区生产账户的机构，例如美国经济分析局（the US Bureau of Economic Analysis），他们会根据 [Leontief \(1941\)](#) 提出的结构编制投入-产出数据。企业被划分为  $n$  个部门，每个部门都生产单一的同质产品，这些部门被组织成一个投入-产出表。一个高度简化的例子是：

	部门 1	部门 2	部门 3
部门 1	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
部门 2	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
部门 3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

其中,元素  $a_{ij}$  被称为 **投入-产出系数(input-output coefficients)**,并且

$$a_{ij} = \frac{\text{部门 } j \text{ 从部门 } i \text{ 购买的投入品价值}}{\text{部门 } j \text{ 的总销售额}}$$

因此,如果部门  $i$  是部门  $j$  的重要中间产品供应商,那么  $a_{ij}$  就会较大。表中第  $j$  列的加总给出了部门  $j$  的所有投入品价值,第  $i$  行则给出了每个部门使用产品  $i$  作为中间产品的密集程度。

**生产系数矩阵(production coefficient matrix)**  $A = (a_{ij})$  能够导出一个加权有向图  $\mathcal{G} = (V, E, w)$ , 其中,  $V = [n]$  代表部门列表,  $E := \{(i, j) \in V \times V : a_{ij} > 0\}$  代表边的集合,  $a_{ij}$  的值代表跨部门的后向关联(backward linkages)。

给定  $i \in V$ ,  $i$  的直接后继(direct successors)的集合  $\mathcal{O}(i)$  指的是  $i$  向其提供正数量产出的所有部门,而集合  $\mathcal{F}(i)$  则指的是所有向  $i$  提供正数量产出的部门。

图2.1显示了与“经济分析局提供的 2019 年 15 个部门版本的投入-产出表”相关的加权有向图,数据来源为美国经济分析局的“2019 Input-Output Accounts Data”。<sup>1</sup>由  $i$  指向  $j$  的箭头代表正向的权重  $a_{ij}$ ,并且箭头的宽度越大则权重系数越大,与相应的投入-产出系数成正比。节点的大小与其所属部门总销售额的市场份额成正比。表2.1提供了部门编码的含义。

观察图2.1 可以发现,制造业(ma)是许多部门的重要供应商,包括建筑业(co)和农业(ag)。同样地,金融部门(fi)和专业服务部门(pr)也为许多其他部门提供服务。另一方面,教育部门(ed)是相对下游的,只是其他部门中间产品的一个小供应商。

节点的配色方案基于的是枢纽特征向量中心度的排名,颜色越亮代表中心度越高。稍后在 §2.1.3 中,我们将给出枢纽特征向量中心度在投入-产出系统中的解释,将其与需求冲击的相对影响联系起来。

### 2.1.1.2 连通性

我们在 §1.4 中研究了图论的一些概念,本节将应用这些概念来深入理解投入-产出网络。我们可以研究的一个基本性质是连通性(connectedness)。可以想象,当网络相对连通时,需求和生产率冲击会通过给定的生产网络形成更广泛的扩散,相反,在一个吸收集内发生的需求冲击,其影响会被隔离到该集合中的部门。

图2.1中的 15 部门网络是强连通的,但是在视觉上检验此结果较为困难,因此我们使用图论算法。该算法从 QuantEcon 的 DiGraph 类(class)中可以找到强连通的部分,由于可以从邻接矩阵中直接创建实例,所以这个“类”对于目前所要解决的问题来说很方便。当权重由 15 个部门的投入-产出模型给出时,检查这个“类”的属性就可以证实其强连通性,也可以使用同一类来检验该网络是非周期的。因此,投入-产出矩阵  $A$  是本原的(primitive)。这一事实将用于以下计算。

<sup>1</sup> 我们从 Make-Use Tables 中可以获得每个部门的投入支出和总销售额。该图是用 Python 的 Networkx 库创建的。

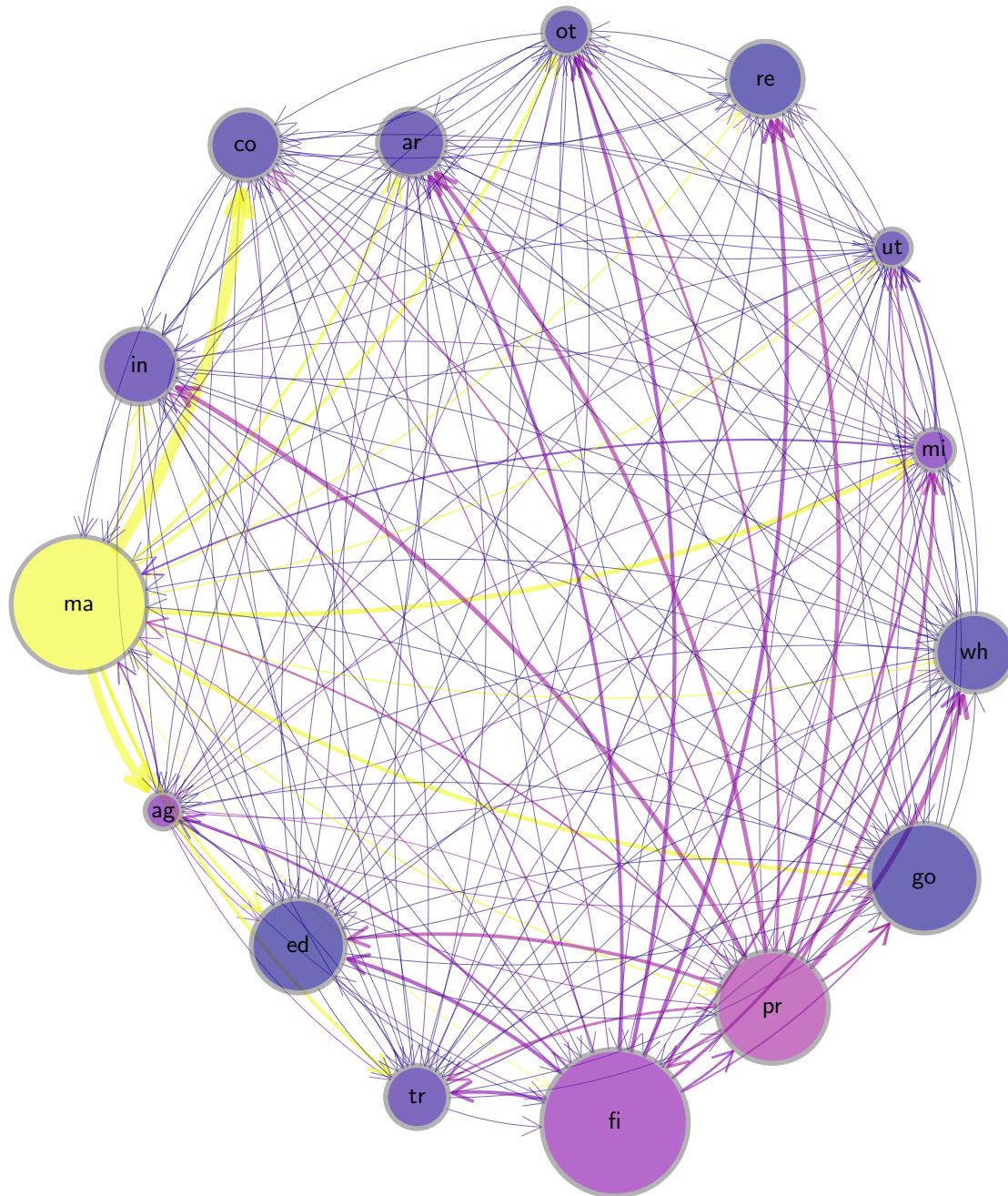


图 2.1: 2019 年美国 15 个行业的后向关联

表 2.1: 15 个部门代码的含义

标签	部门
ag	农、林、牧、渔业
mi	采矿业
ut	公用事业
co	建筑业
ma	制造业
wh	批发业
re	零售业
tr	交通运输和仓储业
in	信息业
fi	金融、保险、房地产和租赁
pr	专业和商业服务
ed	教育服务、医疗保健和社会援助
ar	艺术、娱乐、住宿和餐饮服务
ot	除政府服务以外的其他服务
go	政府服务

### 2.1.1.3 分解

对标图2.1, 图2.2给出了更细分的 71 个部门的网络图, 表2.2提供了部门编码的含义。为了提高视觉清晰度, 低于 0.01 美元的投入-产出系数被省略为零, 其他设定与图2.1保持一致, 节点和边的大小分别与销售份额和投入-产出系数成正比, 较亮的颜色表示较高的枢纽特征向量中心度(这一概念我们将在 §2.1.3 中与需求冲击的传播联系起来)。

与图2.1的 15 个部门情形不同的是, 2019 年 71 个部门的投入-产出矩阵不是强连通的, 这是因为图2.2包含了汇点(即出度为 0 的部门)。例如, 根据数据显示, 尽管“食品和饮料店”会向最终消费者提供产品, 但它们不提供任何中间投入。

### 2.1.2 均衡

求解 Leontief 模型的均衡需要考虑追踪最终需求的影响, 因为最终需求会在经济中对其他部门形成后向关联的影响效应。为了说明这一问题带来的挑战, 考虑图2.3所示的简化网络。假设部门 3 受到正需求冲击, 为了满足这一需求, 将需要其直接供应商(即第 2 和第 4 部门)进行更多的产出, 然而, 第 2 部门产量的增加需要第 1 部门更多的产出, 进而需要第 3 部门更多的产出, 也即最初冲击发生的地方。这反过来又需要部门 2 和部门 4 的更多产出, 以此类推。因此, 后向关联的链条会导致一个无限的循环, 而解决这个“逐尾”问题需要一些分析。

#### 2.1.2.1 恒等式

为了寻找均衡, 我们设定:

- $d_i :=$  最终消费者对产品  $i$  的需求。

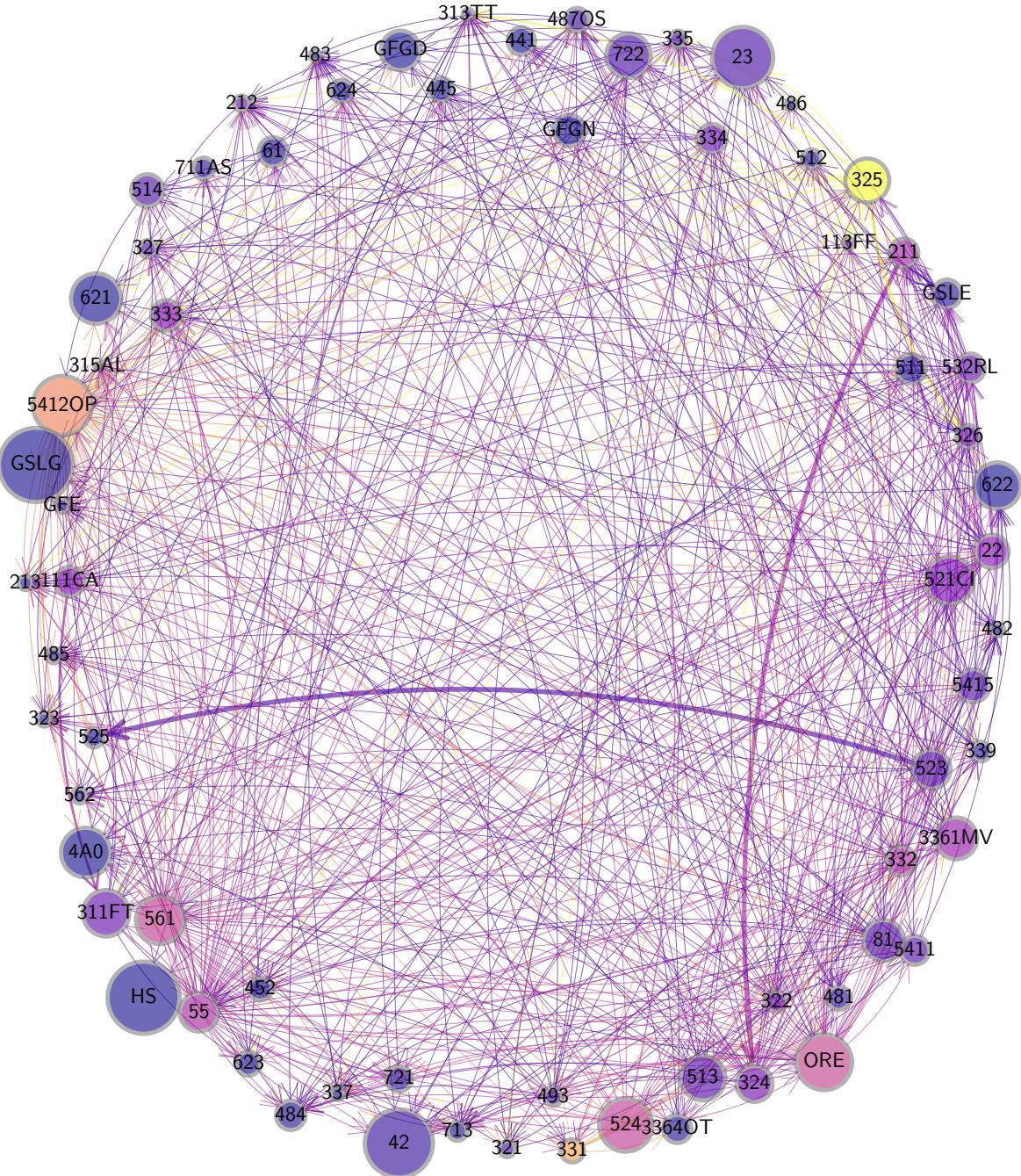


图 2.2: 2019 年美国 71 个行业的网络

表 2.2: 71 个部门代码的含义

IO 代码	部门	IO 代码	部门
111CA	农场	486	管道运输业
113FF	林业、渔业	487OS	其他交通
211	油气开采	493	仓储业
212	除石油、天然气外的采矿业	511	出版业
213	采矿支持行业	512	电影和声音
22	公用事业	513	广播、电信
23	建筑业	514	数据处理、网络出版业
321	木制品业	521CI	储蓄银行、信用中介
327	非金属矿产品	523	证券投资业
331	初级金属	524	保险公司
334	电脑和电子产品	525	基金、信托、金融工具
333	机械	HS	房屋
332	金属制品	ORE	其他房地产活动
335	电气设备	532RL	出租和租赁服务
337	家具	55	公司管理
3364OT	其他运输设备	5415	计算机系统设计
3361MV	机动车辆、零件	5412OP	其他技术服务
339	其他制造	5411	法律服务
311FT	食品、饮料和烟草	561	行政
313TT	纺织厂和纺织品	562	废物处理
315AL	服装和皮革	61	教育服务
322	纸制品	621	门诊医疗保健服务
323	印刷业	622	医院
324	石油和煤炭	623	护理及住院护理设施
325	化工产品	624	社会救助
326	塑料、橡胶	711AS	艺术、观赏性运动、博物馆
42	批发业	713	娱乐、赌博、休闲
441	汽车及零部件经销商	721	住宿
445	食品和饮料店	722	餐饮场所
452	杂货店	81	除政府服务以外的其他服务
4A0	其他零售	GFGD	联邦政府(国防)
481	空运	GSLE	州和地方政府企业
482	轨道交通	GFE	联邦政府企业
483	水运	GSLG	州和地方政府
484	卡车运输	GFGN	联邦政府(非国防)
485	客运		

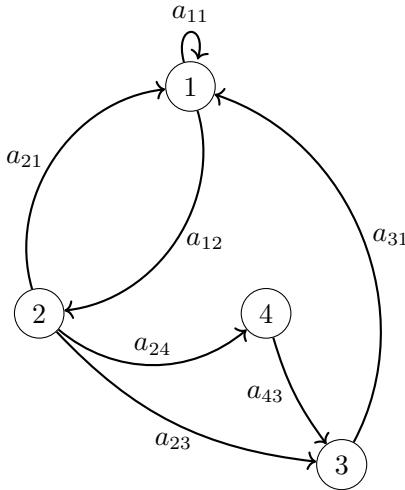


图 2.3: 一个简单的生产网络

- $x_i :=$  部门  $i$  的总销售额。
- $z_{ij} :=$  从部门  $i$  到部门  $j$  的跨部门销售额。

所有数字都可以理解为以某国货币作为单位——例如美元。对于每个部门  $i$ , 我们有会计恒等式:

$$x_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} + d_i, \quad (2.1)$$

该式表明, 总销售额可以被划分为对其他行业的销售额以及对最终消费者的销售额。

注意到,

$$\frac{z_{ij}}{x_j} = \text{部门 } j \text{ 的每 1 美元产出中来自 } i \text{ 投入的美元价值} = a_{ij}。 \quad (2.2)$$

其中,  $a_{ij}$  的值是 §2.1.1.1 中讨论的投入-产出系数。利用这一系数, 式(2.1) 可以改写为:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i, \quad i = 1, \dots, n。 \quad (2.3)$$

当产出向量为  $x := (x_i)_{i=1}^n$  时, 右边第一项代表的含义是需要投入的产品  $i$  的数量。我们可以将式(2.3)中的  $n$  个方程组合成线性系统:

$$x = Ax + d。 \quad (2.4)$$

### 2.1.2.2 存在性与唯一性

到目前为止, 我们只使用了会计恒等式及其定义。然而, 在给定需求向量  $d$  并且令矩阵  $A$  不变的情况下, 我们还想利用式 (2.4) 来确定产出向量  $x$ 。作为第一步, 我们将寻找式

(2.4)的非负解存在且唯一的条件。

将部门  $j$  的增加值(value added)定义为销售额减去中间产品的支出,也即,

$$v_j := x_j - \sum_{i=1}^n z_{ij}.$$

**假设 2.1.1.** 投入-产出邻接矩阵  $A$  服从

$$\eta_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, \quad \forall j \in [n]. \quad (2.5)$$

**练习 2.1.1.** 证明:只要每个部门的增加值都严格为正,则假设2.1.1成立。

**练习2.1.1**表明,假设2.1.1是一个非常“温和”的约束。例如,在竞争均衡中,企业的利润为0,正的增加值意味着对中间产品以外的生产要素(劳动、土地等)的支付都严格为正。

**练习 2.1.2.** 令  $\eta(A) := \max_{j \in [n]} \eta_j$ , 证明:只要假设2.1.1成立,则  $r(A) \leq \eta(A) < 1$ 。

**命题 2.1.1.** 如果假设 2.1.1 成立,那么,对于每一个  $d \geq 0$ , 生产系统(2.4) 都有唯一且非负的产出解:

$$x^* = Ld, \quad \text{其中} \quad L := (I - A)^{-1}. \quad (2.6)$$

证明. 通过练习2.1.2以及假设2.1.1, 我们可以得到  $r(A) < 1$ 。因此, Neumann 级数引理(NSL) 意味着式(2.6) 中的  $x^*$  是  $\mathbb{R}^n$  空间中的唯一解。关于非负性, 因为  $A$  是非负的, 所以对于所有  $i$ ,  $A^i$  也是非负的。因此, 根据 NSL 提供的幂级数转换方式  $L = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$ , 可知  $x^* \geq 0$ 。  $\square$

式(2.6)中的矩阵  $L = (\ell_{ij})$ , 通常被称为与系数矩阵  $A$  相关的里昂惕夫逆矩阵(Leontief inverse), 我们将在 §2.1.3 中讨论它的具体涵义。

**练习 2.1.3.** 如果  $d \neq 0$ , 则称需求向量是非平凡的(nontrivial)。令  $d$  为非平凡的, 并假设  $r(A) < 1$ , 证明: 在均衡状态下, 当矩阵  $A$  不可约(irreducible)时, 每个部门都是活跃的, 也即  $x^* \gg 0$ 。

**练习 2.1.4.** 一个封闭的投入-产出系统指的是一个  $d = 0$  的系统。封闭系统  $x = Ax$  的非平凡解也即一个能够满足  $Ax^* = x^*$  的非零解  $x \in \mathbb{R}_+^n$ 。令  $A$  是不可约矩阵, 证明: 当  $r(A) < 1$  时, 不存在非平凡解; 当  $r(A) = 1$  时, 存在一个非平凡解并且在常数倍数范围内是唯一的。

**练习 2.1.5.** 考虑一个由投入矩阵  $A$  所定义的投入-产出系统, 并令  $A$  为一个本原(primitive)矩阵, 证明:每一个非平凡解处处为正;当  $r(A) > 1$  时, 不存在非平凡解。

### 2.1.2.3 假设

我们通常将(2.6)的表达式  $x^* = (I - A)^{-1}d$  解释为由需求驱动供给, 虽然这不是一个普遍的真理, 但在某些情况下确实是合理的。例如我们在分析短期需求变化时, 需求的变化会带来库存的变化, 而库存的变化通常又会使得企业改变生产数量。我们将在 §2.1.3中深入研究这些思想。

另一个假设则涉及到每个部门的生产函数, 您可能会从初级微观经济学中回忆起里昂惕夫生产函数(Leontief production function)的形式为:

$$x = f(z_1, \dots, z_n) = \min\{\gamma_1 z_1, \dots, \gamma_n z_n\}. \quad (2.7)$$

其中,  $x$  是一个给定部门的产出,  $\{\gamma_i\}$  是一组参数,  $\{z_i\}$  是一组投入集。为了理解式(2.7)为什么被称为 Leontief 生产函数, 请注意, 根据式(2.2) 我们有:

$$x_j = \frac{z_{ij}}{a_{ij}}, \quad \text{对于所有满足 } a_{ij} > 0 \text{ 的 } i \in [n]. \quad (2.8)$$

如果我们把所有的  $z/0 = \infty$  都理解为  $z \geq 0$ , 那么式(2.8)就意味着  $x_j = \min_{i \in [n]} z_{ij}/a_{ij}$ , 即式(2.7)是专门针对部门  $j$  的一个特殊形式。因此, 式(2.7)自然产生于 Leontief 投入-产出分析中。

关于假设的最后一个评论是, 虽然 Leontief 模型对于某些研究目的来说过于简单, 但它可以在更复杂的模型中作为一个有用的构建模块存在, 我们会在 §2.2.1中讨论一个这样的模型。

### 2.1.3 需求冲击

在本节中, 我们将通过 Leontief 逆矩阵  $L$  的幂级数表示形式  $\sum_{i \geq 0} A^i$  来研究需求变化的影响。在此, 我们始终假设  $r(A) < 1$ , 因此, 该级数和  $L$  是有限且相等的。

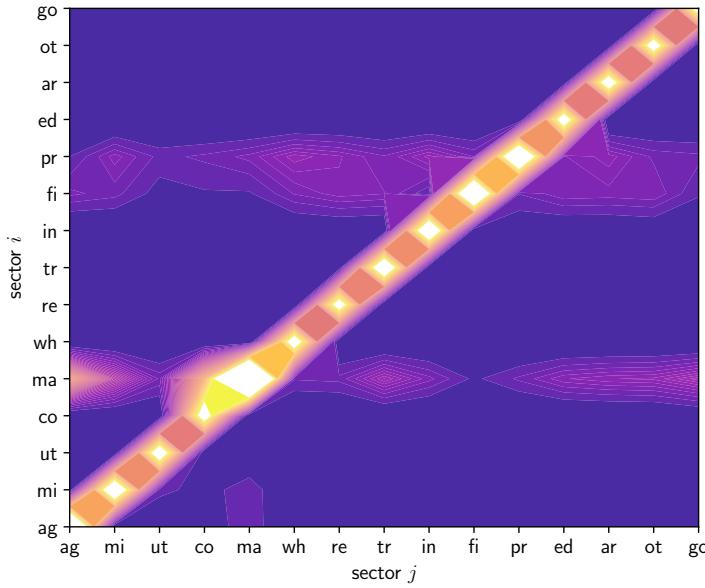
#### 2.1.3.1 对需求冲击的反应

考虑一个规模为  $\Delta d$  的需求冲击的影响, 使得需求从  $d_0$  转变为  $d_1 = d_0 + \Delta d$ , 均衡的产出向量由  $x_0 = Ld_0$  转变为  $x_1 = Ld_1$ 。用第二个方程减去第一个方程, 并将结果用差分表示, 得到  $\Delta x = L\Delta d$ 。使用 Leontief 逆矩阵产生的几何级数形式, 可以得到:

$$\Delta x = \Delta d + A(\Delta d) + A^2(\Delta d) + \dots \quad (2.9)$$

该加总式表明了冲击是如何通过生产网络进行后向传播的:

- (1)  $\Delta d$  是每个部门的初始反应,

图 2.4: Leontief 逆矩阵  $L$ (颜色越亮表示值越大)

(2)  $A(\Delta d)$  是第一轮后向关联产生的反应,

(3)  $A^2(\Delta d)$  是第二轮产生的反应,以此类推。

总反应就是所有轮次反应之和。

我们可以通过说明  $L = \sum_{m \geq 0} A^m$  中的某个元素  $\ell_{ij}$  来总结上述内容,表明在考虑所有直接和间接影响后,产品  $j$  的 1 单位需求变化对部门  $i$  的加总影响。 $L$  本身也会让人联想到凯恩斯乘数:需求变化乘以这个矩阵,进而产生最终的产出。

图2.4 有助于直观地观察从 15 个部门网络中计算出的 Leontief 逆矩阵,其中,纵轴为  $i$ ,横轴为  $j$ ,颜色越亮表示  $\ell_{ij}$  的值越大。例如,我们可以看到,几乎所有部门的需求增加都会带来制造业产出的增加。

### 2.1.3.2 冲击传播

图2.5显示了在 15 个部门的投入-产出模型中,由给定的需求冲击向量  $\Delta d$  所产生的影响。在这个模拟中, $\Delta d$  的每个元素都是从一个均匀分布中独立抽取的,“第 0 轮”(round 0)的面板直观地显示了向量  $\Delta d$ ,较亮的颜色表示较大的数值,零售(re)、农业(ag)和批发(wh)的冲击幅度相对较大。

剩余轮次则显示了  $A(\Delta d)$ 、 $A^2(\Delta d)$  等数值,颜色越亮表示数值越高。在每一轮中,为了使部门之间的对比更加清晰,在应用颜色映射之前,向量  $A^i(\Delta d)$  的值都被重新缩放到  $[0, 1]$  区间内。

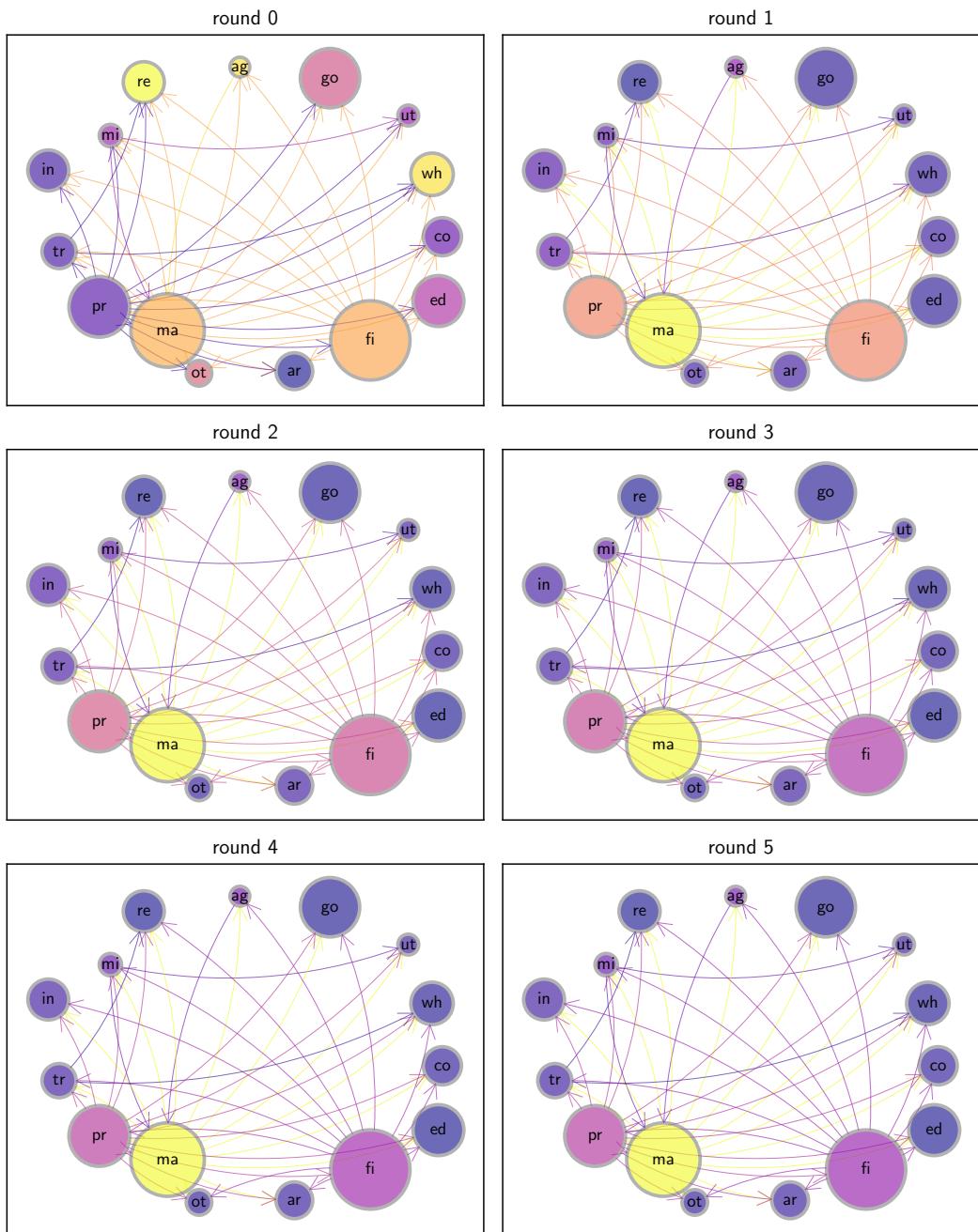


图 2.5: 需求冲击通过后向关联进行传播

注意到,到第 4 轮(round 4)时,  $A^i(\Delta d)$  的值已经稳定在一个固定比例的范围内了(正如刚才所讨论的,由于值都被重新调整为  $[0, 1]$ ,因此这只是一个比例常数)。可以发现,制造业(ma)是最活跃的部门,金融(fi)和专业服务(pr)部门也非常活跃。事实上,如果我们采用新的  $\Delta d$  进行重复模拟,活跃部门的形态也会迅速收敛到完全相同的配置。

我们可以使用 Perron-Frobenius 定理来解释这一现象。由于  $A$  是本原的(在 15 个部门的情形下),我们知道,  $r(A)^{-m}A^m$  会随着  $m \rightarrow \infty$  而收敛到  $e\varepsilon^\top$ ,其中  $e$  和  $\varepsilon$  分别为左和右主特征向量,归一化使得  $\langle \varepsilon, e \rangle = 1$ 。由此可知,对于一个较大的  $m$ ,我们有

$$A^m(\Delta d) \approx r(A)^m \langle \varepsilon, \Delta d \rangle e. \quad (2.10)$$

换言之,在一定的缩放常数之下,冲击反应  $A^m(\Delta d)$  会收敛到右主特征向量上,这也是枢纽特征向量中心度。

在图2.5中是无法观察到缩放常数的,因为在映射颜色之前,数值已经被重新缩放到了一个固定的区间中。然而,式(2.10)向我们证明了缩放常数的存在以及它会像  $r(A)^m$  一样收敛到零的事实。因此,主特征对  $(r(A), e)$  既向我们提供了在任意需求冲击下的反应配置,也向我们提供了当我们通过链接进行追溯时反应消失的速度。

在这一点上,我们回顾一下,图2.1 中的部门是根据枢纽特征向量中心度进行着色的。如果你将此图与图2.5进行比较,你会发现,至少在后面的几轮中,颜色的配置是一致的(也正如理论所预测的)。金融(fi)和制造业(ma)的排名很高,提供咨询、会计和法律等业务的专业服务部门(pr)也是如此。

### 2.1.3.3 特征向量中心度

接下来,让我们更深入地研究枢纽特征向量中心度。在生产网络中,枢纽性质的含义转变为了重要的供应商。我们在 §2.1.3 中对需求冲击的研究强调了枢纽特征向量中心度的重要性:如果部门  $i$  的枢纽特征向量中心度越高,那么它在各种不同的冲击下都会变得越活跃。柱状图2.6显示了 15 个部门网络中的枢纽特征向量中心度,根据测算可知,制造业是迄今为止美国经济中最重要的部门。

根据目前我们对特征向量中心度的理解,回顾图2.2 中的配色方案,我们可以看到化学产品(325)和初级金属(331)的排名都比较靠前,因此,广泛的需求冲击会在这些行业产生较高的活跃度。

为了提供一些额外的背景信息,我们使用澳大利亚统计局收集的澳大利亚 2018 年投入-产出数据,画出了另一张类似的图形。其中,节点大小与销售份额成正比,箭头宽度与投入-产出系数成正比。彩色图展示了枢纽特征向量中心度。

根据测算结果,排名最高的行业是 6901,即“专业、科学和技术服务”,该行业包括了科学、工程、计算机系统设计、法律、会计、广告、市场研究和管理咨询等各类服务。其次是建

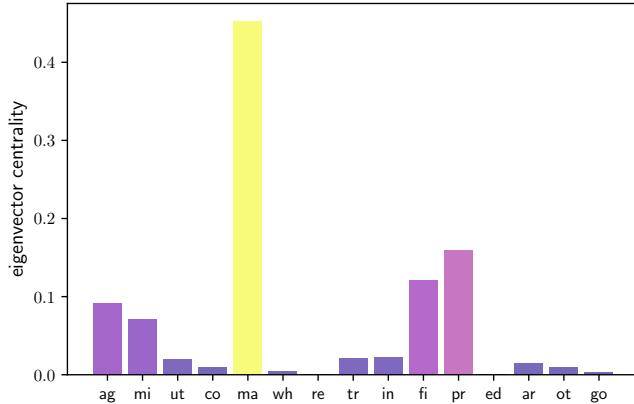


图 2.6: 美国工业部门的特征向量中心度

筑和发电业。这一结果与美国形成鲜明对比,美国的制造业在排名中名列前茅。

#### 2.1.3.4 产出乘数

在投入-产出分析中,通常会通过产出乘数来对部门重要性进行排名。部门  $j$  的产出乘数(output multiplier),下面用  $\mu_j$  来表示,通常被定义为“部门  $j$  额外一美元的需求对整个部门产生的加总影响”,其中加总影响意味着要考虑到后向关联。在研究财政政策刺激效果时,这一方法一直是政策制定者感兴趣的工具。

回顾 §2.1.3.1,  $\ell_{ij}$  表示产品  $j$  的单位需求变化对部门  $i$  的总影响,我们可以得出定义:

$$\mu_j = \sum_{i=1}^n \ell_{ij} \quad (j \in [n]).$$

在向量符号中,也即是  $\mu^\top = \mathbb{1}^\top L$ ,或者

$$\mu^\top = \mathbb{1}^\top (I - A)^{-1}. \quad (2.11)$$

将其与式(1.39)进行比较,我们可以看出,产出乘数向量方程等价于权威卡兹中心度(authority-based Katz centrality)的测算方法(其中参数  $\beta$  默认为 1)。

将这两种方法进行联系是有意义的:权威中心度越高意味着一个部门有许多内向链接(inward links),并且这些链接来自于其他重要部门。广义上说,这样的部门也是中间投入中的重要购买方。在这些测算标准之下,排名越靠前的部门,如果受到需求冲击,将对整个生产网络造成更大的影响。

基于前文美国 15 个部门的投入-产出数据,图2.8展示了式(2.11)的计算结果,得到美国 15 个工业部门的产出乘数大小。可以发现,排名最高的分别是制造业(ma)、农业(ag)和建筑

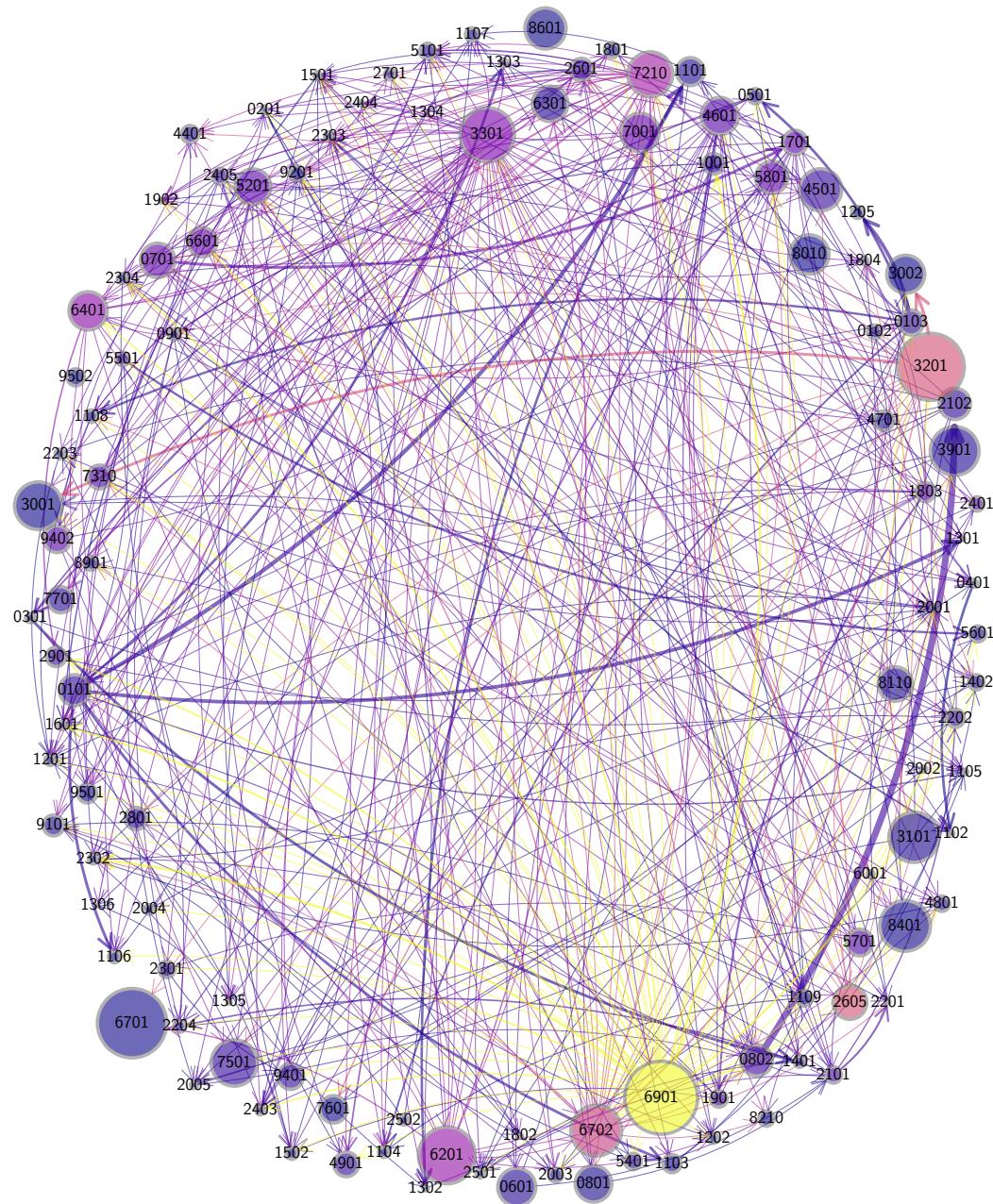


图 2.7: 2018 年澳大利亚 114 个行业的网络

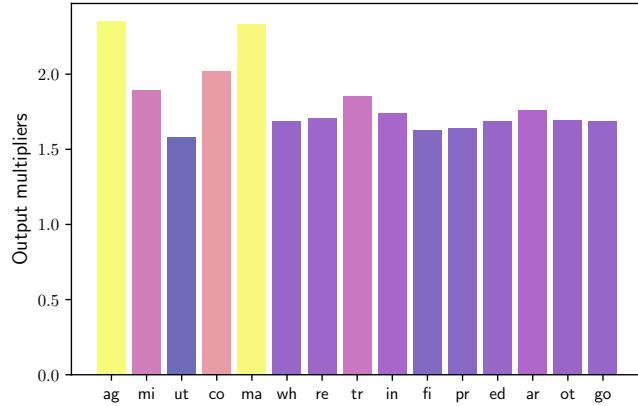


图 2.8: 美国 15 个工业部门的产出乘数

业(co)。

#### 2.1.4 前向关联

某些经济问题与部门或产品的相对“上游度(upstreamness)”有关。例如, Olabisi (2020)发现上游度与行业波动有关,而Antràs *et al.* (2012)则研究了上游度与出口倾向之间的关系。在应用于上游行业而不是下游行业时,关税变化往往会产生不同的加总效应(Martin & Otto, 2020)。最后,自二战以来,许多发展中国家系统地支持和鼓励发展了上游行业(Liu, 2019)。

为了研究上游度,我们会首先介绍前向关联(forward linkages)的 Ghosh 模型,该模型使用了原始的 Leontief 模型中的相关术语。

##### 2.1.4.1 Ghosh 模型

回顾一下,  $a_{ij} = z_{ij}/x_j = j$  的每 1 美元销售额中来自  $i$  投入的美元价值。现考虑相关数量

$$f_{ij} := \frac{z_{ij}}{x_i} = i \text{ 的每 1 美元产出中投入到 } j \text{ 的美元价值} \quad (2.12)$$

令  $F := (f_{ij})_{i,j \in [n]}$ , 矩阵  $F$  叫做直接产出矩阵(direct-output matrix)或Ghosh 矩阵(Ghosh matrix)。元素  $f_{ij}$  可以理解为从  $i$  到  $j$  的前向关联的大小。与  $A$  类似,矩阵  $F$  可以看作是产出部门的权函数,图2.9提供了可视化的结果,该图使用的数据源与图2.1保持一致。

练习 2.1.6. 证明:当  $x \gg 0$  时,  $A$  和  $F$  是相似矩阵(见1.2.1.5)。

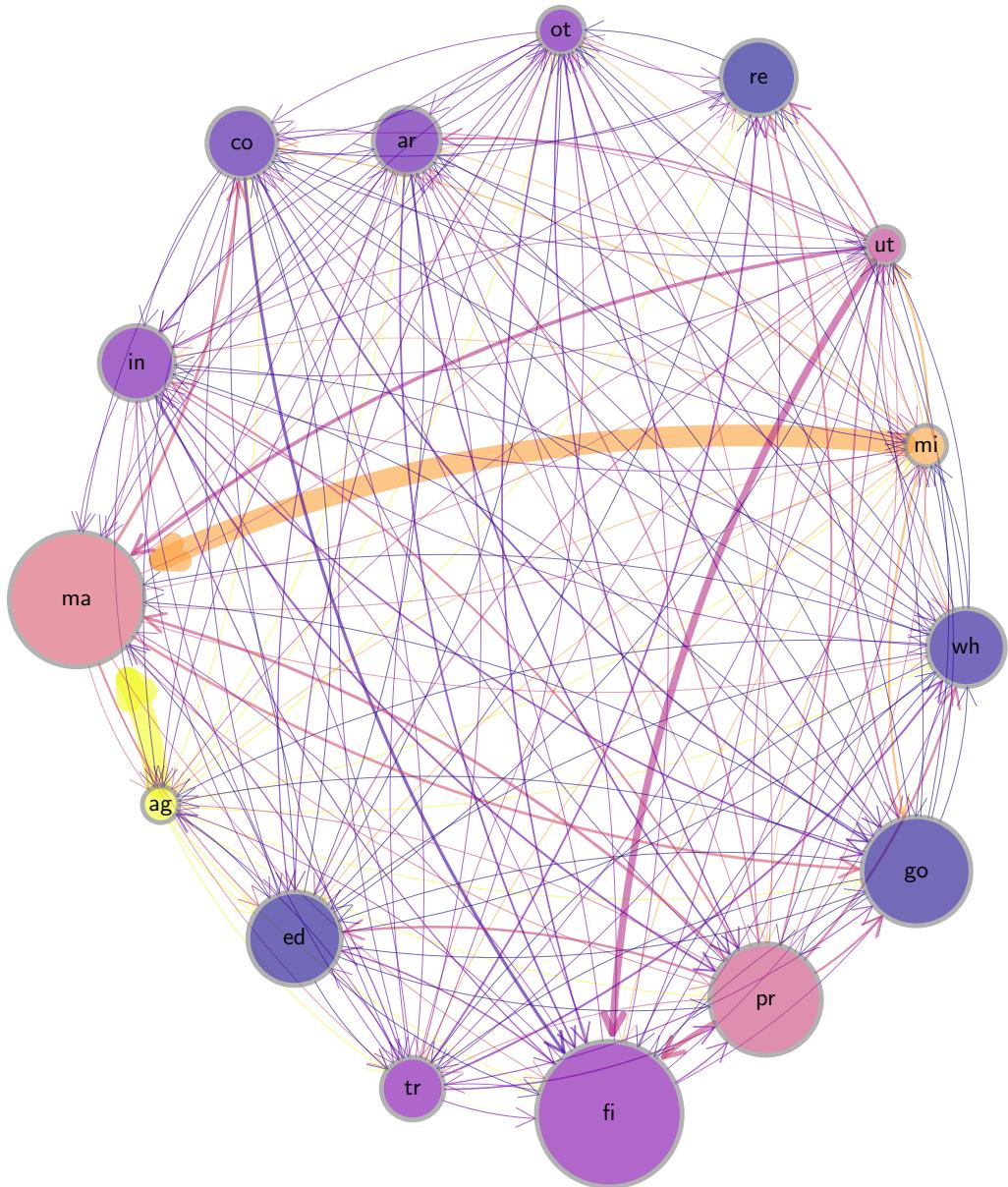


图 2.9: 美国工业部门的前向关联与上游度

令  $v_j$  为  $j$  部门的增加值(即,对中间产品以外的生产要素进行的支付),我们可以得到:

$$x_j = \sum_{i=1}^n z_{ij} + v_j \quad (j \in [n]). \quad (2.13)$$

该式表明,在完全竞争的条件下,部门  $j$  的收入可以划分为中间产品的支出(即第一项  $\sum_{i=1}^n z_{ij}$ )以及其他生产要素的支付(即增加值)。

使用前向关联,我们可以将式(2.13)改写为  $x_j = \sum_i f_{ij} x_i + v_j (\forall j)$ ,或者写成矩阵形式:

$$x^\top = x^\top F + v^\top. \quad (2.14)$$

在假设  $r(F) < 1$  的条件下进行转置并求解,可以得到:

$$x^* = (I - F^\top)^{-1} v. \quad (2.15)$$

我们可以将式 (2.15) 中的解  $x^*$  理解为“获得一定数量的增加值所需的产出量”,由于增加值是对基础生产要素进行支付的,因而 Ghosh 模型也被称为“供给侧投入-产出模型”。

**练习 2.1.7.** 在 §2.1.2.2 中,我们认为  $r(A) < 1$  几乎总是成立的。这一性质同样适用于  $r(F)$ ,因为只要当  $x \gg 0$ ,就有  $r(A) = r(F)$ 。证明后一个论述。

我们没有讨论供给和需求驱动的投入-产出模型的相对优点,我们对前向关联的主要兴趣在于,它们与“按相对上游度对行业进行排名”的研究主题有关。

#### 2.1.4.2 上游度

哪些行业属于相对上游? Antràs *et al.* (2012) 提出了一个衡量上游度的方法。利用式(2.12)中定义的  $f_{ij}$ ,部门  $i$  上游度(upstreamness)的递归定义为:

$$u_i = 1 + \sum_{j=1}^n f_{ij} u_j. \quad (2.16)$$

式(2.16)中向量  $u$  的递归定义源于这样一种想法:那些向上游产业出售大部分产出的部门,其本身应该属于上游。

我们可以将 (2.16) 写成向量形式  $u = \mathbb{1} + Fu$ ,并进行求解,可得:

$$u = (I - F)^{-1} \mathbb{1}. \quad (2.17)$$

只要  $r(F) < 1$ ,该式就存在一个唯一的非负解。根据练习2.1.7中的发现,我们预期这在一般情形下都是成立的。

继续保持前文惯例  $\beta = 1$ ,我们可以看到Antràs *et al.* (2012) 提出的上游度实际上就是

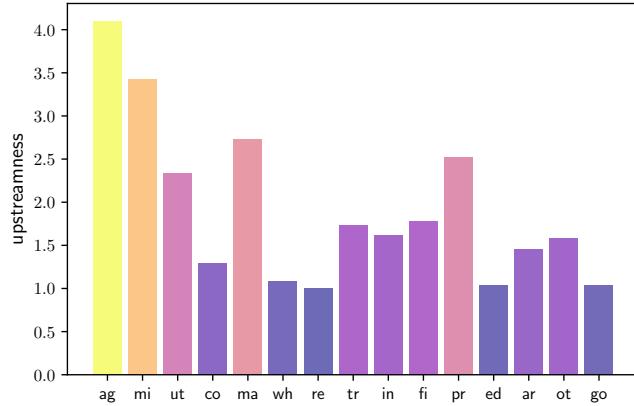


图 2.10: 美国各工业部门的相对上游度

生产网络中的枢纽卡兹中心度 (hub-based Katz centrality), 其权重主要由前向关联矩阵  $F$  分配。

基于式(2.17), 柱状图2.10 显示了前文 15 个部门投入-产出网络中  $u$  的测算结果。与预期一致, 初级产品生产者(农业(ag)和采矿业(mi))是最上游的, 而零售(re)、教育和医疗保健(ed)是典型的下游部门。

图2.9中的节点也按上游度进行了着色。

## 2.2 一般均衡

§2.1 中 Leontief 投入-产出分析的一个限制是, 需求是固定并且外生的。在本节中, 我们将 Leontief 模型嵌入到一个均衡环境中, 其产出和价格由供给和需求共同决定。我们的目标之一是了解投入-产出结构是如何与企业层面的冲击相互作用, 进而形成加总波动的。

### 2.2.1 供给和需求

我们的第一步是在 Acemoglu *et al.* (2012) 和 Carvalho & Tahbaz-Salehi (2019) 的基础上, 引入并求解一个多部门的一般均衡模型。

#### 2.2.1.1 生产和价格

与 Leontief 经济一样, 有  $n$  个部门, 也叫产业(或行业), 每个部门生产一种商品。部门  $j$  的实际产出为

$$y_j = s_j \ell_j^\alpha \prod_{i=1}^n q_{ij}^{a_{ij}}. \quad (2.18)$$

这里,

- $s_j$  指的是一个特定部门的冲击(跨行业独立),
- $\ell_j$  指的是  $j$  部门的劳动投入,
- $q_{ij}$  指的是用于产品  $j$  生产的产品  $i$  的数量,
- $\alpha$  和  $a_{ij}$  取值区间为  $(0, 1)$ , 并满足  $\alpha + \sum_i a_{ij} = 1 (\forall j \in [n])$ 。

最后一个条件意味着每个部门的规模报酬不变(constant returns to scale, CRS)。<sup>2</sup>

**练习 2.2.1.** 令  $A = (a_{ij})$  为来自式(2.18) Cobb-Douglas 生产函数的一个  $n \times n$  的技术系数(technical coefficients)矩阵。使用 §1.2.3.4 中所述的假设和结果, 证明:  $r(A) < 1$ 。<sup>3</sup>

**练习 2.2.2.** 证明: 对于所有的  $m \in \mathbb{N}$ , 有  $\sum_i \sum_j a_{ij}^{(m)} = n(1 - \alpha)^m$ , 其中  $a_{ij}^{(m)}$  是矩阵  $A^m$  的第  $(i, j)$  个元素。

企业是价格接受者,  $p_j$  是产品  $j$  的价格。通过选择  $n + 1$  个控制参数  $\ell_j$  和  $q_{1j}, \dots, q_{nj}$ , 部门  $j$  中的企业要实现的最大化利润为

$$\pi_j := p_j y_j - w \ell_j - \sum_i p_i q_{ij} \circ \quad (2.19)$$

**练习 2.2.3.** 证明: 当价格和工资给定时, 式 (2.19) 唯一的全局最优化解为:

$$\ell_j = \alpha \frac{p_j y_j}{w} \quad \text{和} \quad q_{ij} = a_{ij} \frac{p_j y_j}{p_i} \quad (i, j \in [n]). \quad (2.20)$$

**备注 2.2.1.** 基于式(2.20), 我们有  $a_{ij} = (p_i q_{ij}) / (p_j y_j)$ , 表明第  $(i, j)$  个技术系数是  $j$  的每 1 美元销售额中来自  $i$  投入的美元价值, 这与 §2.1.1.1 中我们讨论的投入-产出系数  $a_{ij}$  的定义一致。因此, 在目前的设定下, (不可观测的) 技术系数矩阵等于 §2.1 中定义的(可观测的) 投入-产出系数矩阵。

将式(2.20) 代入到生产函数中, 可以得到,

$$y_j = c s_j \left( \frac{p_j y_j}{w} \right)^\alpha \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_j y_j}{p_i} \right)^{a_{ij}}, \quad (2.21)$$

其中,  $c$  表示的是一个仅被参数所决定的正的常数。

**练习 2.2.4.** 利用式(2.21), 证明:

$$\rho_j = \sum_i a_{ij} \rho_i - \varepsilon_j, \quad \text{其中} \quad \rho_j := \ln \frac{p_j}{w} \quad \text{并且} \quad \varepsilon_j := \ln(c s_j).$$

<sup>2</sup>为了与传统的投入-产出符号保持一致, 相对于 Acemoglu *et al.* (2012) 和 Carvalho & Tahbaz-Salehi (2019) 文献来说, 我们将  $i$  和  $j$  进行了转置。当然, 这只是一个约定俗成的问题。

<sup>3</sup>稍后, 在 §2.3 中, 我们会进一步使用谱理论来证明一个确切的结果  $r(A) = 1 - \alpha$ 。

令  $\rho$  和  $\varepsilon$  分别为练习2.2.4中标准化价格和对数冲击的列向量  $(\rho_i)_{i=1}^n$  和  $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ 。将这些方程组合起来,可以得到  $\rho^\top = \rho^\top A - \varepsilon^\top$ ,或

$$\rho = A^\top \rho - \varepsilon. \quad (2.22)$$

练习 2.2.5. 证明:

$$\rho_j = - \sum_i \varepsilon_i \ell_{ij}, \quad \text{其中 } L := (\ell_{ij}) := (I - A)^{-1}. \quad (2.23)$$

为什么可以这样定义  $L$ ?

与前文一样,矩阵  $L$  是由  $A$  生成的 Leontief 逆矩阵。

### 2.2.1.2 消费

工资被支付给一个代表性家庭,其消费选择服从最大化效用  $\sum_i \ln c_i$ 。在均衡状态下,利润为零,所以家庭的唯一收入就是工资收入。该家庭无弹性地提供一单位的劳动。因此,该家庭的预算约束为  $\sum_i p_i c_i = w$ 。

练习 2.2.6. 证明:对于所有的  $i \in [n]$ , 唯一的最大化效用解的列向量  $(c_1, \dots, c_n)$  满足  $p_i c_i = w/n$ (在每件商品上的花费相等)。

### 2.2.1.3 加总产出

在这个经济体中,总增加值(定义见 §2.1.4)等于工资,这一数量与实际总产出(也被称为 GDP)相一致。每个部门的Domar 权重(Domar weight)被定义为其销售额占 GDP 的比重:

$$h_i := \frac{p_i y_i}{w}.$$

依据封闭经济市场出清条件  $y_i = c_i + \sum_j q_{ij}$  以及最优化条件,我们可以得到:

$$y_i = \frac{w}{np_i} + \sum_j a_{ij} \frac{p_j y_j}{p_i}. \quad (2.24)$$

练习 2.2.7. 令  $L = (\ell_{ij})$  为 Leontief 逆矩阵,利用式(2.24),证明:Domar 权重满足

$$h_i = \frac{1}{n} \sum_j \ell_{ij}, \quad \forall i \in [n].$$

练习 2.2.8. 证明: $\sum_{i=1}^n h_i = 1/\alpha$ 。

根据练习2.2.4,我们可以得到  $\ln w = \ln p_j + \sum_i \varepsilon_i \ell_{ij}$ , 设定  $g := \ln w$ , 并对收益进行加

总可以得到：

$$ng = \sum_j \ln p_j + \sum_i \varepsilon_i \sum_j \ell_{ij}.$$

将价格标准化,使  $\sum_i \ln p_i = 0$ ,上式可以简化为:

$$g = \sum_i \varepsilon_i h_i. \quad (2.25)$$

因此可以说,对数 GDP 就是部门冲击和 Domar 权重的内积。

## 2.2.2 粒状假说

我们刚刚构建了一个生产和产出的多部门模型,我们计划用这个模型来研究冲击传播和加总波动。然而,在此之前,我们需要对冲击传播的无标度网络性质进行简单讨论。第一步是将冲击传播与企业规模的分布联系起来,然后,在 §2.2.3 中,我们将看到这些想法与一般均衡模型和生产网络拓扑结构之间的关系。

### 2.2.2.1 加总冲击 vs 异质冲击

GDP 增长和失业率等加总变量的一些波动可能与总体环境的巨大外生变化直接相关。一个明显的例子是,2020 年 2 月至 4 月间美国失业率从 3.5% 跃升至 14.8%,显然这是由 COVID 大流行以及由此引发的经济停摆所导致的。

一些其他重大波动则缺乏明确的宏观原因。例如,研究人员对 1990 年美国经济衰退提供了不同的解释,包括“技术冲击”、“消费冲击”和“信心丧失”(Cochrane, 1994)。然而,这些解释要么难以根据可观察到的结果进行验证,要么需要变量的外生变化,而这些变量可能应当被视为内生的。

为了寻找至少能够解释大多数国家产出增长变化的变量,其中一种可行的方法是考虑基于企业层面和特定部门的生产率和供应冲击。特定部门冲击的例子包括:

- (1) 2018 年非洲猪瘟向中国蔓延,
- (2) 2011 年日本东部大地震及其引发的海啸,导致了福岛第一核电站三个反应堆的熔毁,以及
- (3) 2020 年 10 月,Asahi Kasei Microdevices 在宫崎县(Miyazaki Prefecture)的大型集成电路工厂被毁。

在下面的讨论中,我们研究了企业层面的冲击能在多大程度上影响加总生产率的波动。

### 2.2.2.2 大量小企业的案例

有的学者认为，异质的、企业层面的冲击只能占总体波动的很小一部分（例如，参见Dupor (1999)）。这一观点的核心逻辑是，独立随机变量会产生平均化的抑制效应。为了说明这一思想，我们遵循Gabaix (2011) 提出的一个没有企业间关联的简单生产模型。

假设有  $n$  个企业，用企业的销售额来衡量第  $i$  个企业的规模，记为  $S_i$ 。由于所有销售都是为了满足最终需求，因而 GDP 由  $Y := \sum_{i=1}^n S_i$  给出。我们用上角标来表示下一期的值，并用  $\Delta$  来表示一阶差分（例如， $\Delta S_i = S'_i - S_i$ ）。我们假设企业增长  $\Delta S_i / S_i$  等于  $\sigma_F \varepsilon_i$ ，其中， $\{\varepsilon_i\}$  对应的是企业层面异质性冲击的 IID 随机变量。我们还假设  $\text{Var}(\varepsilon_i) = 1$ ，因而  $\sigma_F$  代表了企业层面的增长波动。

那么，GDP 增长率就是：

$$G := \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}{Y} = \sigma_F \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{Y} \varepsilon_i.$$

**练习 2.2.9.** 将当前企业规模分布  $\{S_i\}$  和 GDP 视为给定的，证明：在该假设下，GDP 增长率的标准差  $\sigma_G := (\text{Var}G)^{1/2}$  为

$$\sigma_G = \sigma_F H_n, \quad \text{其中 } H_n := \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i}{Y} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.26)$$

如果说所有企业的规模都相同，那么有  $nS_i = Y$ ，这意味着  $\sigma_G = \sigma_F / \sqrt{n}$ ，所以当企业数量很多时，加总水平的波动率会非常小。例如，如果企业的数量  $n$  是  $10^6$ ，这与美国的企业数据大体一致，那么，

$$\frac{\sigma_G}{\sigma_F} = H_n = \left( \frac{1}{10^6} \right)^{1/2} = 10^{-3} = 0.001. \quad (2.27)$$

因此，企业层面的波动率仅能够解释加总波动率的 0.1%。

更具体地说，Gabaix (2011) 计算了  $\sigma_F = 12$ ，这意味着通过式(2.27)，可以得到  $\sigma_G = 0.012\%$ ，然而，实际中 GDP 增长的波动率要高得多。事实上，根据图2.11，对于美国来说， $\sigma_G$  约为 2%，比上面的数值高出两个数量级。这一发现蕴含的核心信息是，在上述假设之下，企业层面的冲击只能解释加总波动的很小部分。

### 2.2.2.3 厚尾的影响

§2.2.2.2 中使用的推理思路有一些明显的问题。其中一个问题是，所有企业都被假定为具有相同的规模。而在现实中，大多数企业都是中小型的，相对而言，只有少数企业是大型的。例如，在美国，少数巨头主导着科技、电子和零售业。

Gabaix (2011) 强调，我们可以通过对企业规模分布进行更深思熟虑的设计，来接近实际的 GDP 波动率。改变分布  $\{S_i\}_{i=1}^n$  会改变式(2.27)中  $H_n$  的值，该指数也被称为赫芬达尔指

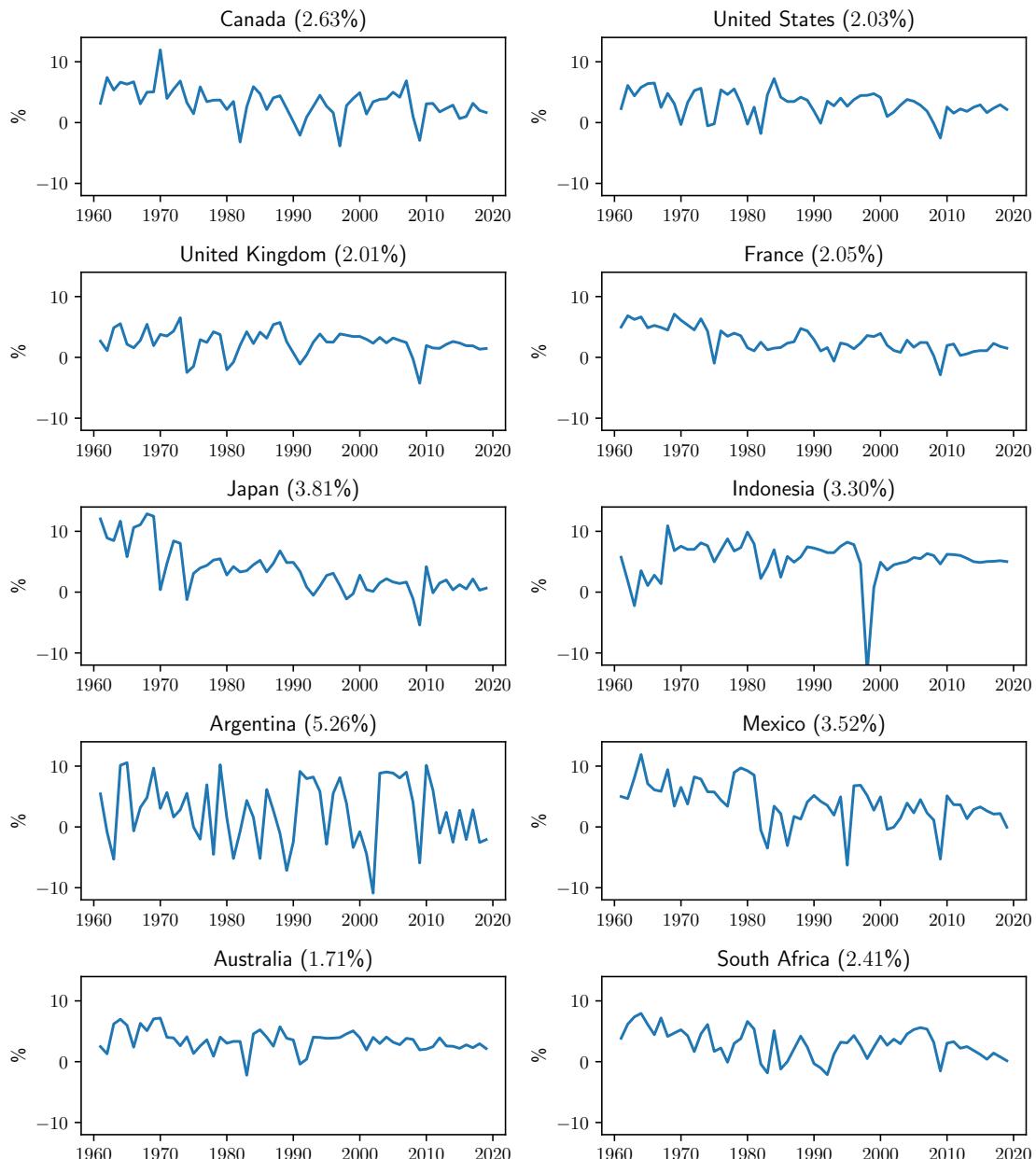


图 2.11: 10 个国家的 GDP 增长率和标准差(括号内)

数(Herfindahl index),这个指数通常被应用于一个行业中的一组公司,以此来衡量行业集中度。对于给定的总产出  $Y$ ,当  $S_i = S_j (\forall i, j)$  时,赫芬达尔指数最小,这也是我们上面考虑的情况。当单个企业主导所有销售时,该指数在  $H_n = 1$  处达到最大。根据式(2.27),更大的赫芬达尔指数会使得  $\sigma_G$  相对于  $\sigma_F$  增长更多,这将导致企业层面的冲击能够解释更多的加总波动。

$H_n$  的计算有一定挑战性,因为整体的企业规模分布  $\{S_i\}_{i=1}^n$  很难观察。尽管如此,我们可以通过(1)估计一个符合经验分布  $\{S_i\}_{i=1}^n$  的总体概率分布,(2)使用分析或者蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟来计算  $H_n$  的值。

对于步骤(1),Gabaix (2011) 引用了Axtell (2001) 的研究,发现企业规模分布服从帕累托分布,尾指数为 1.059。如果我们从一个  $\alpha = 1.059$  并且  $n = 10^6$  的帕累托分布中重复抽取  $\{S_i\}_{i=1}^n$ ,记录每次抽取后的  $H_n$  值,然后取中位数作为我们的估计值,我们可以得到  $H_n \approx 0.88$ 。换言之,在刚才的帕累托假设下,企业层面的波动几乎占到了加总波动率的 90%。从本质上讲,这意味着,要解释加总波动率,我们只需要看企业层面的冲击。

#### 2.2.2.4 敏感性分析

上一节的发现是相当惊人的,我们应该如何认真对待它?

一个问题是,当假设发生微小变化时,  $H_n \approx 0.88$  这一数值并不稳健。例如,图1.7的回归表明,我们应当将 1.32 作为尾指数  $\alpha$  的估计值,而不是 Axtell 的 1.059。如果我们采用  $\alpha = 1.32$  重新进行上述计算,  $H_n$  的值会下降到 0.018。换言之,企业层面的冲击仅能解释加总波动率的 1.8%。

另一个问题是,虽然在 Axtell 参数下能够获得较大的  $H_n$  值,但是该值对企业规模分布所能选择的参数族来说非常敏感。接下来的练习将说明这一点。

练习 2.2.10. 图1.7仅表明企业规模分布的最右端服从帕累托法则。事实上,一些作者认为,对数正态分布能够比帕累托分布提供更好的拟合(Kondo et al. (2020) 提供了一些最新的讨论)。所以,现在假设  $\{S_i\}$  是来自  $LN(\mu, \sigma^2)$  分布(见示例1.3.2)中的  $n$  个 IID 的抽样,其中  $\mu$  和  $\sigma$  为参数。<sup>4</sup>执行并运行 Algorithm1。设定  $m = 10^3$  以及  $n = 10^6$ ,选择  $\mu$  和  $\sigma$ ,使  $LN(\mu, \sigma^2)$  分布的均值和中位数与尾指数为  $\alpha$  的标准帕累托分布一致,即分别为  $\alpha/(\alpha - 1)$  和  $2^{1/\alpha}$ 。与 Gabaix (2011) 一样,设定  $\alpha = 1.059$ 。你获得的  $H_n$  估计值是多少?解释了多少的加总波动率?

#### 2.2.3 网络结构与冲击传播

§2.2.2.4 中的敏感性分析表明,我们应该怀疑,企业层面的冲击是否真的可以解释大多数我们可以观察到的加总层面的冲击。这意味着,要么微观层面的冲击只能解释加总波动的一小部分,要么就是模型过于简单,微观层面的冲击通过其他一些机制被放大了。

<sup>4</sup>换句话说,每个  $S_i$  都是随机变量  $S := \exp(\mu + \sigma Z)$  的独立副本,其中  $Z$  指的是标准正态。

```

for  $j$  in  $1, \dots, m$  do
    | 从  $LN(\mu, \sigma^2)$  分布中产生  $n$  个独立的抽样  $\{S_i^j\}$  ;
    | 计算与  $\{S_i^j\}$  相对应的赫芬达尔指数  $H_n^j$  ;
end
设定  $H_n$  等于  $\{H_n^j\}_{j=1}^m$  的中位数;
return  $H_n$ 

```

**Algorithm 1:** 在对数正态下生成  $H_n$  的估计值

显然,进一步深入探索的一个方向是允许企业之间存在关联,即一些企业的投入是另一些企业的产出。这样进行扩展,可以使我们进一步讨论冲击是如何通过网络进行传播的。即使对于上面列出的特定部门的冲击,如日本东部大地震,这似乎也是合理的。虽然其最初的影响集中在发电方面,但对其他部门的关联影响是迅速而巨大的 (Carvalho *et al.*, 2021)。

为了更深入地研究,我们把对粒状假说(granular hypothesis)的讨论与上面研究的多部门模型联系起来,从而使我们能够研究跨行业的流动效应和乘数效应。

### 2.2.3.1 产业集中度和冲击

从式(2.25) 和部门冲击的独立性来看,对数 GDP 的标准差  $\sigma_g$  为:

$$\sigma_g = \sigma H_n, \quad \text{其中 } H_n := \left( \sum_{i=1}^n h_i^2 \right)^{1/2}, \quad (2.28)$$

其中,  $\sigma$  指的是每一个  $\varepsilon_i$  的标准差。

请注意,这一加总波动率的表达式与我们在 §2.2.2 中讨论粒状假说时的式(2.26)形式相同,其中  $H_n$  为赫芬达尔指数。再一次,该指数是决定企业层面的波动有多少能够传递到加总波动的关键因素。特别是,正如 §2.2.2.3 中所讨论的,除非  $H_n$  很大,否则独立的企业层面的冲击不能有效解释加总波动,这反过来又要求向量  $h$  的分量相对集中在单个或少数几个部门中。

为了研究一个极端情况,我们回顾练习2.2.8中证明的  $\sum_{i=1}^n h_i = 1/\alpha$ 。赫芬达尔指数是  $H_n := \|h\|$ ,其中  $\|\cdot\|$  指的是欧几里得范数(Euclidean norm)。

**练习 2.2.11.** 在给定  $\sum_{i=1}^n h_i = 1/\alpha$  的条件下,其中  $h_i = 1/(\alpha n) (\forall i)$ , 证明:  $\|h\|$  的最小值解(minimizer)是常数向量。

在这一部门份额的配置之下,有

$$H_n = \frac{1}{n\alpha} \|\mathbf{1}\| = \frac{1}{n\alpha} \sqrt{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

因此,通过式(2.28),我们可以得到  $\sigma_g = O(n^{-1/2})$ 。这也是典型的多样化产生的结果,对数 GDP 的标准差会像  $n^{-1/2}$  一样趋于零,就像 §2.2.2 中相同企业规模情况一样。

现在,让我们考虑其他的极端情形。

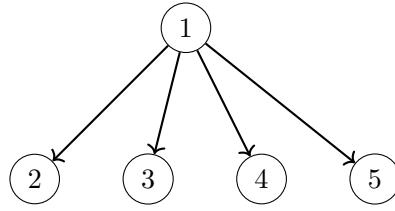


图 2.12: 具有单一枢纽(hub)的星状网络

**练习 2.2.12.** 证明: 在  $\sum_{i=1}^n h_i = 1/\alpha$  的约束条件下,  $H_n = \|h\|$  的最大值是  $1/\alpha$ (可以通过将某些  $k$  设定为  $h_k = 1/\alpha$  并将其他指标设定为  $h_j = 0$  来获得)。

这是多样化程度为零的极端情况。根据式 (2.25), 对数 GDP 为

$$g = \sum_i \varepsilon_i h_i = \frac{1}{\alpha} \varepsilon_k.$$

对数 GDP 的波动率在  $n$  个部门中是恒定的, 而不是随着部门数量的减少而减少。换句话说, 异质性冲击和加总冲击是相同的。

### 2.2.3.2 网络拓扑的作用

在上一节中, 我们研究了两种极端情况, 这两种情况都不现实, 现在我们来看看中间情况。在此过程中, 我们注意到一个有趣的新特征: 与 §2.2.2 中的分析不同, §2.2.2 中部门份额是从某个固定分布中选择的, 而现在我们让生产网络结构来决定赫芬达尔指数。

为了看到这一点, 我们可以使用练习2.2.7的结果来获得:

$$h = \frac{1}{n} L \mathbb{1} = \frac{1}{n} \sum_{m \geq 0} A^m \mathbb{1}.$$

回顾我们在 §1.4.3.5 中讨论的, 我们可以看到, Domar 权重向量只是对投入-产出模型中的枢纽卡兹中心度排名向量的重新缩放。因此, 特定部门的生产率冲击传播到加总水平取决于卡兹中心度在部门间的分布。这种分布越“不平均”, 影响效应也就越大。

图2.13显示了不同网络配置的一些例子, 不同配置对应着不同的卡兹中心度向量。对称网络具有均匀的中心度向量, 因而所有部门都具有相同的中心度, 这一结果并不奇怪, 如 §2.2.3.1 所述, 这是最大多样化下的情况。其他两种情况的中心度向量不均匀, 因而加总波动率相对更大。<sup>5</sup>

**练习 2.2.13.** 令图2.13 中箭头所示的非零投入产出系数  $a_{ij}$  都具有相等的值 0.2。通过

<sup>5</sup> 图2.13的标题将这两种情况称为“星状网络”(star networks), 这与最近在多部门生产模型中的用法一致。在图论中, 星状网络属于无向图, 它(1)是强连通的, (2)只有一个节点的度数大于 1。

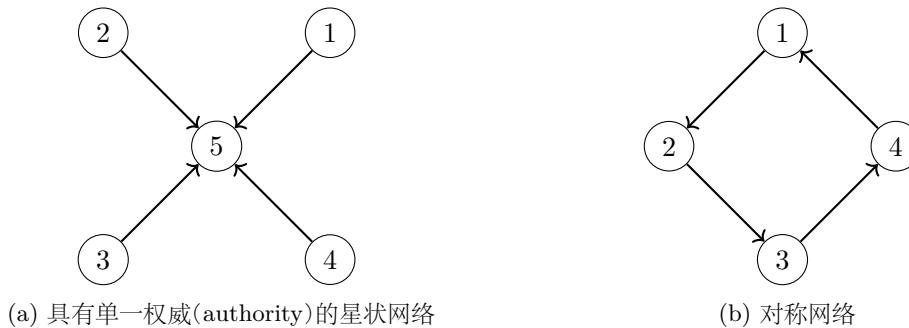


图 2.13: 对称和非对称网络

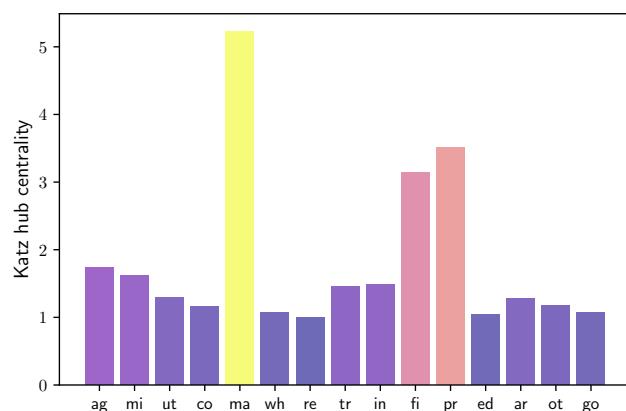


图 2.14: 美国 15 个工业部门的枢纽卡兹中心度

计算证明:节点 1 到节点 5 在枢纽和星状网络下的枢纽卡兹中心度分别为:

$$\kappa_h = (1.8, 1, 1, 1, 1) \quad \text{和} \quad \kappa_s = (1.2, 1.2, 1.2, 1.2, 1)。$$

练习2.2.13的结果表明,枢纽网络中节点之间具有更不均等的卡兹中心度。并不奇怪,枢纽网络中源点的枢纽中心度排名较高,针对该部门的生产率冲击会对加总 GDP 产生很大影响。

图2.14展示了根据 2019 年 15 个部门的投入-产出数据计算出的枢纽卡兹中心度。我们可以看到,制造业的生产率冲击对总产出的影响明显大于零售和教育业等的冲击。

### 2.2.3.3 供给冲击 vs 需求冲击

在上一小节中,我们看到生产率冲击在经济中的传播程度取决于不同部门的枢纽中心度排名。这一结论也是直观地,充当枢纽的部门为许多部门提供服务,因而这些部门生产率变化将产生巨大的流动效应。

这与我们在 §2.1.3.4 中了解到的情况相反，在 §2.1.3.4 中，高权威中心度会导致更大的冲击传播。两者之间的差异可以用冲击的来源进行解释：在 §2.1.3.4 中，我们关注的是需求冲击带来的影响，当许多部门从部门  $i$  购买投入品时，部门  $i$  的需求冲击具有很大的流动效应。因此，权威中心度更适合研究这种情况。

## 2.3 其他谱理论

本节是一个相对技术性的章节，它深入分析了向量动态 (vector dynamics) 和谱理论的各个方面，主要针对的是那些想在数学方面进一步探索的读者。本部分研究的思想能够应用到生产理论中，从而使我们对均衡的存在性与唯一性具有更深入的理解，同时它也会被应用到本书的后面章节中，例如网络中马尔可夫模型 (Markov models) 的分布收敛。

### 2.3.1 向量范数

在本节中，我们将学习  $\mathbb{R}^n$  上的抽象向量范数 (vector norms)，我们也提供了几个示例。稍后，我们将看到不同范数之间的关系，以及它们对某些类型网络分析的作用。

#### 2.3.1.1 范数

对于任意的  $\alpha \in \mathbb{R}$  以及  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ，如果满足：

- (1)  $\|u\| \geq 0$ , (非负性)
- (2)  $\|u\| = 0 \iff u = 0$ , (正定性)
- (3)  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$  以及 (正齐次性)
- (4)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ , (三角不等式)

则函数  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  被称为  $\mathbb{R}^n$  上的范数 (norm)。

顾名思义，欧几里得范数 (Euclidean norm) 是  $\mathbb{R}^n$  上的范数。

**示例 2.3.1.** 将向量  $u \in \mathbb{R}^n$  的  $\ell_1$  范数 ( $\ell_1$  norm) 定义为：

$$u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto \|u\|_1 := \sum_{i=1}^n |u_i|. \quad (2.29)$$

在机器学习应用中， $\|\cdot\|_1$  有时也被称为“曼哈顿范数”(Manhattan norm)。而  $d_1(u, v) := \|u - v\|_1$  则被称为向量  $u$  和  $v$  之间的“曼哈顿距离”(Manhattan distance) 或“出租车距离”(taxicab distance)，我们则将其称为  $\ell_1$  距离 ( $\ell_1$  distance) 或  $\ell_1$  偏差 ( $\ell_1$  deviation)。

**练习 2.3.1.** 验证  $\mathbb{R}^n$  上的  $\ell_1$  范数是否满足上述条件(1)–(4)。

$\ell_1$  范数和欧几里得范数是所谓  $\ell_p$  范数( $\ell_p$  norm)的特例, 它由  $p \geq 1$  定义为:

$$u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto \|u\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p}。 \quad (2.30)$$

可以证明  $u \mapsto \|u\|_p$  是对所有  $p \geq 1$  的范数, 也正如其名称所暗示的那样 (例如, 参见Kreyszig (1978))。对于这个范数, 条件(4)中的次可加性(subadditivity)也被称为闵可夫斯基不等式(Minkowski inequality)。

由于欧氏情形是通过设定  $p = 2$  获得的, 因此欧几里得范数也称为  $\ell_2$  范数。在需要清晰表达这一点时, 我们将其记为  $\|\cdot\|_2$ , 而不是  $\|\cdot\|$ 。

练习 2.3.2. 证明:  $u \mapsto \|u\|_\infty := \max_{i=1}^n |u_i|$  也是  $\mathbb{R}^n$  上的一个范数。

(使用符号  $\|u\|_\infty$  是因为,  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ , 在  $p \rightarrow \infty$  之下, 我们有  $\|u\|_p \rightarrow \|u\|_\infty$ , 这个范数也被称为上确界范数(supremum norm)。)

练习 2.3.3. 在数据科学应用中经常使用的所谓  $\ell_0$  范数  $\|u\|_0 := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{u_i \neq 0\}$ , 实际上并不是  $\mathbb{R}^n$  上的范数, 请证明这一点。

### 2.3.1.2 向量范数的等价性

当  $u$  和  $(u_m) := (u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  都是  $\mathbb{R}^n$  上的元素时, 对于在  $\mathbb{R}^n$  上的范数, 如果满足

当  $m \rightarrow \infty$  时, 有  $\|u_m - u\| \rightarrow 0$ ,

我们就说  $(u_m)$  收敛(converges)到  $u$ , 并记为  $u_m \rightarrow u$ 。

这个定义似乎并不精确, 难道我们不需要阐明这种收敛是针对何种特定的范数吗?

事实上, 我们并不需要, 因为在  $\mathbb{R}^n$  上的任意两个范数  $\|\cdot\|_a$  和  $\|\cdot\|_b$  都是等价的(equivalent)。这是因为存在有限常数  $M, N$ , 能够使得

$$M\|u\|_a \leq \|u\|_b \leq N\|u\|_a, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n。 \quad (2.31)$$

练习 2.3.4. 如果存在有限的  $M, N$  使得式(2.31)成立, 我们就记为  $\|\cdot\|_a \sim \|\cdot\|_b$ 。证明:  $\sim$  是  $\mathbb{R}^n$  上范数集的等价关系。

练习 2.3.5. 令  $\|\cdot\|_a$  和  $\|\cdot\|_b$  是  $\mathbb{R}^n$  上的任意两个范数, 给定  $\mathbb{R}^n$  中的一个点  $u$  和  $\mathbb{R}^n$  中的一个序列  $(u_m)$ , 使用式(2.31) 来确认:  $\|u_m - u\|_a \rightarrow 0$  意味着, 当  $m \rightarrow \infty$  时有  $\|u_m - u\|_b \rightarrow 0$ 。

另一种理解  $u_m \rightarrow u$  的方法是通过逐点收敛(pointwise convergence): 向量序列  $u_m$  的每个元素都收敛到  $u$  的相应元素。下一个结果将表明, 逐点收敛和范数收敛是等价的。

引理 2.3.1. 令  $(u_m) \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^n$  以及范数  $\|\cdot\|$  建立在  $\mathbb{R}^n$  上。在  $m \rightarrow \infty$  的条件下, 以下说法都是等价的:

- (1)  $\|u_m - u\| \rightarrow 0$ ,
- (2) 对于所有的  $a \in \mathbb{R}^n$ , 有  $\langle a, u_m \rangle \rightarrow \langle a, u \rangle$ , 以及
- (3)  $(u_m)$  逐点收敛到  $u$ 。

练习 2.3.6. 证明引理2.3.1。

练习 2.3.7. 利用引理2.3.1, 证明: 在加法和标量乘法之下, 收敛性在  $\mathbb{R}^n$  中仍能继续保持, 即, 如果在  $\mathbb{R}^n$  中有  $u_m \rightarrow x$  以及  $v_m \rightarrow y$ , 而在  $\mathbb{R}$  中有  $\alpha_m \rightarrow \alpha$ , 那么可以得到,  $u_m + v_m \rightarrow x + y$  以及  $\alpha_m u_m \rightarrow \alpha x$ 。

## 2.3.2 矩阵范数

在实际应用中, 一个给定有向图的节点数量  $n$  可能是以“万”或“亿”为单位的, 这意味着邻接矩阵  $A$  是非常巨大的。为了控制复杂性, 经常会使用一个稀疏近似的矩阵  $A_s$  来代替  $A$ , 这自然就要求  $A$  和  $A_s$  之间非常近似。但是, 该如何定义这种近似呢?

更一般地说, 我们该如何在矩阵集合上施加一个度量单位来确定它们之间的相似性或距离? 一种选择是效仿  $\mathbb{R}^n$  上向量的例子, 在  $\mathbb{M}^{n \times k}$  上引入一个范数。有了这样的范数  $\|\cdot\|$ , 我们可以认为,  $A$  和  $A_s$  在  $\|A - A_s\|$  很小时是很近似的。

出于这样一些原因, 我们现在引入矩阵范数的概念。

### 2.3.2.1 定义

与  $\mathbb{R}^n$  上的向量类似, 对于任意的  $A, B \in \mathbb{M}^{n \times k}$ , 如果满足

- (1)  $\|A\| \geq 0$ , (非负性)
- (2)  $\|A\| = 0 \iff u = 0$ , (正定性)
- (3)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ , 以及 (正齐次性)
- (4)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ , (三角不等式)

我们将这个从  $\mathbb{M}^{n \times k}$  到  $\mathbb{R}_+$  的映射函数  $\|\cdot\|$  称为矩阵的范数(norm)。

然后将两个矩阵  $A, B$  之间的距离确定为  $\|A - B\|$ 。

与向量不同, 矩阵在可相乘矩阵对(conformable matrix pairs)上具有一个乘积运算的定义, 我们希望矩阵范数能以一种可预测的方式与这个乘积互动。例如, 当一个矩阵范数  $\|\cdot\|$  是次可乘(submultiplicative)时, 这意味着,

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \forall \text{可相乘矩阵 } A, B, \tag{2.32}$$

这一性质有助于我们进行分析。式(2.32)的一个有用的含义是，对于任意的  $i \in \mathbb{N}$  以及  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 有  $\|A^i\| \leq \|A\|^i$ , 其中  $A^i$  是  $A$  的  $i$  次幂。

### 2.3.2.2 Frobenius 范数

在矩阵空间  $\mathbb{M}^{n \times k}$  上构建范数的一种方法是，首先引入矩阵  $A = (a_{ij})$  和  $B = (b_{ij})$  的Frobenius 内积(Frobenius inner product)为：

$$\langle A, B \rangle_F := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{ij} b_{ij} = \text{trace}(AB^\top) = \text{trace}(BA^\top). \quad (2.33)$$

从这个内积的定义出发,  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$  的 Frobenius 范数被定义为：

$$\|A\|_F := \langle A, A \rangle_F^{1/2}. \quad (2.34)$$

本质上,Frobenius 范数就是将  $n \times k$  的矩阵转换为  $nk$  向量,然后计算欧几里得范数。

Frobenius 范数是次可乘的。下一个练习要求你在一个特殊情形下证明这一点。

**练习 2.3.8.** 假设  $A$  是行向量,  $B$  是列向量,当  $\|\cdot\|$  是 Frobenius 范数时,证明:式(2.32)在该情况下成立。

### 2.3.2.3 算子范数

另一个重要的矩阵范数是算子范数(operator norm),基于  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$ ,将其定义为:

$$\|A\| := \sup\{\|Au\| : u \in \mathbb{R}^k \text{ 并且 } \|u\| = 1\} \quad (2.35)$$

其中,式(2.35)右边的范数  $\|\cdot\|$  指的是  $\mathbb{R}^n$  上的欧几里得范数。

**示例 2.3.2.** 如果  $A = \text{diag}(a_i)$ ,那么,对于任意的  $u \in \mathbb{R}^n$ ,我们有  $\|Au\|^2 = \sum_i (a_i u_i)^2$ 。为了在  $\sum_i u_i^2 = 1$  的条件下最大化该值,我们选择  $j$  使得  $a_j^2 \geq a_i^2 (\forall i)$ ,并设定  $u_i = \mathbb{1}\{i=j\}$ 。那么,  $\|Au\|$  的最大值则为:

$$\|A\| = \sqrt{a_j^2} = \max_{i \in [n]} |a_i|.$$

**练习 2.3.9.** 证明:对于任意的  $u \neq 0$ ,  $\|A\|$  等于  $\|Au\|/\|u\|$  的上确界。

**练习 2.3.10.** 从算子范数的定义可以直接看出,

$$\|Au\| \leq \|A\| \cdot \|u\|, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n. \quad (2.36)$$

利用这一事实,证明:算子范数是次可乘的。

**练习 2.3.11.** 令  $\|\cdot\|$  为  $\mathbb{M}^{n \times n}$  上的算子范数。证明:对于每个  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ,我们都有,

- (1)  $\|A\|^2 = r(A^\top A)$ ,
- (2)  $r(A)^k \leq \|A^k\| (\forall k \in \mathbb{N})$ , 以及
- (3)  $\|A^\top\| = \|A\|$ .

#### 2.3.2.4 其他矩阵范数

另外两个有用的矩阵范数是  $\ell_1$  和  $\ell_\infty$  范数, 其定义分别由下式给出的:

$$\|A\|_1 := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k |a_{ij}| \quad \text{和} \quad \|A\|_\infty := \max_{i \in [n], j \in [k]} |a_{ij}|.$$

练习 2.3.12. 证明:两者都是  $\mathbb{M}^{n \times k}$  上的范数。

练习 2.3.13. 证明:两个范数都是次可乘的。

#### 2.3.2.5 矩阵范数的等价性

在 §2.3.1.2 中, 我们看到所有在  $\mathbb{R}^n$  上的向量范数都是等价的, 同样的结果也适用于矩阵范数: 在  $\mathbb{M}^{n \times k}$  上的任意两个矩阵范数  $\|\cdot\|_a$  和  $\|\cdot\|_b$  都是等价的 (equivalent), 也即存在有限常数  $M$  和  $N$ , 能够使得

$$M\|A\|_a \leq \|A\|_b \leq N\|A\|_a, \quad \forall A \in \mathbb{M}^{n \times k}. \quad (2.37)$$

其证明可以在 Bollobás (1999) 中找到(对于抽象的有限维向量空间)。

类似于向量情形, 给定在  $\mathbb{M}^{n \times k}$  中的  $A$  和  $(A_m) := (A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , 如果在  $m \rightarrow \infty$  的条件下有  $\|A_m - A\| \rightarrow 0$  (其中,  $\|\cdot\|$  表示矩阵范数), 我们说  $(A_m)$  收敛 (converges) 到  $A$ , 并记为  $A_m \rightarrow A$ 。再一次, 由于等价性, 我们不需要阐明具体是何种范数。此外, 范数收敛也等价于逐点收敛, 参见下一个练习。

练习 2.3.14. 证明: 给定  $\mathbb{M}^{n \times k}$  中的  $A$  和  $(A_m)$ , 在  $m \rightarrow \infty$  条件下我们可以获得  $A_m \rightarrow A$ , 当且仅当  $A_m$  中的元素  $a_{ij}^m$  收敛到  $A$  中相对应的元素  $a_{ij}$ 。

练习 2.3.15. 对于矩阵  $A, B, C$  和矩阵序列  $(A_m), (B_m)$ , 假定  $m \rightarrow \infty$  以及矩阵的规模是可相乘的 (conformable), 证明:

- (1) 如果  $B_m \rightarrow A$  并且  $A_m - B_m \rightarrow 0$ , 则  $A_m \rightarrow A$ 。
- (2) 如果  $A_m \rightarrow A$ , 则  $BA_mC \rightarrow BAC$ 。

示例 2.3.3. Perron-Frobenius 定理式(1.11)中 Perron 投影的收敛是使用逐点收敛定义的。根据练习 2.3.14, 范数收敛同样成立。使用范数的优点之一是我们可以给出范数偏差的收敛速度。这一想法将在 §2.3.3.3 中进一步讨论。

练习 2.3.16. 给定  $\mathbb{M}^{n \times n}$  中的  $A$  和  $(A_m)$ , 假设  $m \rightarrow \infty$ , 证明:  $A_m \rightarrow A$  当且仅当  $s^\top A_m s \rightarrow s^\top A s$  ( $\forall s \in \mathbb{R}^n$ )。

### 2.3.3 矩阵空间的迭代

第36页命题1.4.2的结果已经向我们展示了邻接矩阵的幂的重要性。Perron-Frobenius 定理揭示了谱半径、主特征向量以及正矩阵的幂之间的关系。在本节中, 我们将更深入地研究矩阵的幂。

#### 2.3.3.1 Gelfand 方程

矩阵幂和谱半径之间存在的一个非常普遍的联系是关于谱半径的Gelfand 方程:

**定理 2.3.2.** 对于任意矩阵范数  $\|\cdot\|$  以及矩阵  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 我们都有

$$r(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}。 \quad (2.38)$$

证明过程可以在Bollobás (1999) 或者 Kreyszig (1978) 中找到。

练习 2.3.17. 上述参考文献表明, 式(2.38)的极限总是存在的。利用这一事实, 证明:  $\mathbb{M}^{n \times n}$  上的每个范数选择都会产生相同的极限值。

下一个练习表明,  $r(A) < 1$  意味着  $\|A^k\|$  会以某个几何速度趋向于 0( $\|A^k\| \rightarrow 0$  )。

练习 2.3.18. 利用式 (2.38), 证明:  $r(A) < 1$  意味着存在一个  $\delta < 1$  和  $M < \infty$ , 能够使得  $\|A^k\| \leq \delta^k M$  ( $\forall k \in \mathbb{N}$ )。

练习 2.3.19. 考虑一个给定  $x_0$  的动态系统  $x_t = Ax_{t-1} + d$ , 其中每个  $x_t$  和  $d$  都是  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 并且  $A$  是  $n \times n$  矩阵(如果你愿意, 可以把这一过程想象成订单通过生产网络向后流动的过程)。证明: 当  $r(A) < 1$  时, 序列  $(x_t)_{t \geq 0}$  会收敛到  $x^* := (I - A)^{-1}d$ , 并且独立于  $x_0$  的选择。

练习 2.3.20. 在 §2.2.1 中, 我们研究了  $\mathbb{M}^{n \times n}$  中  $A = (a_{ij})$  形式的生产系数矩阵, 其中每个  $a_{ij}$  取值都在  $(0, \infty)$  中, 并且对于一些  $\alpha > 0$  有  $\alpha + \sum_i a_{ij} = 1(\forall j)$ 。我们可以利用以下策略计算  $r(A)$ 。在练习2.2.2中, 我们看到  $\sum_i \sum_j a_{ij}^{(m)} = n(1 - \alpha)^m (\forall m \in \mathbb{N})$ , 其中  $a_{ij}^{(m)}$  是  $A^m$  的第  $(i, j)$  元素。利用  $\|B\|_1 := \sum_i \sum_j |b_{ij}|$  是一个矩阵范数的事实, 应用 Gelfand 方程可以得到  $r(A) = 1 - \alpha$ 。

#### 2.3.3.2 一个局部的谱半径定理

下一个定理是 Gelfand 方程的一个“局部”版本, 它依赖于正性。它将矩阵范数替换为更容易计算的向量范数。

**定理 2.3.3.** 令  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  且  $\|\cdot\|$  是  $\mathbb{R}^n$  上的任意范数。如果  $A \geq 0$  以及  $x \gg 0$ , 那么就有

$$\|A^m x\|^{1/m} \rightarrow r(A) \quad (m \rightarrow \infty). \quad (2.39)$$

定理2.3.3 告诉我们,对于任意的正的  $x$ ,向量  $A^m x$  的范数以  $r(A)$  的速率增长。证明可以参见Krasnoselskii (1964)。<sup>6</sup>

**示例 2.3.4.** 在 §2.1.3中,我们研究了一个给定的需求冲击  $\Delta d$  是如何通过生产网络向后流动的,其中  $A^m(\Delta d)$  给出了在  $m$  层(后向关联)对部门产生的影响。当  $\Delta d \gg 0$  并且  $r(A) < 1$  时,定理2.3.3告诉我们,  $\|A^m \Delta d\| = O(r(A)^m)$ 。如果我们把范数设定为  $\|\cdot\|_\infty$ ,这告诉我们,通过后向关联的需求冲击的最大影响是以  $r(A)$  的速率在消退的。

**练习 2.3.21.** 在  $A$  是一个本原矩阵的条件下,证明定理2.3.3。

### 2.3.3.3 收敛到 Perron 投影

局部谱半径定理假设  $A \geq 0$ ,现在我们进一步加强这一假设,要求  $A$  是本原矩阵。在这种情况下, $r(A)^{-m} A^m$  会在  $m \rightarrow \infty$  时收敛到 Perron 投影(参见式(1.11)),现在我们希望得到高维环境中的收敛速度。

我们令  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ,并采用  $|\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i| (\forall i)$  的规则标记特征值。请注意  $|\lambda_1| = \lambda_1 = r(A)$ 。令  $E := e \varepsilon^\top$  为 Perron 投影。

**命题 2.3.4.** 如果  $A$  是可对角化且本原的矩阵,那么就有  $\alpha := |\lambda_2/\lambda_1| < 1$ ,同时还有

$$\|r(A)^{-m} A^m - E\| = O(\alpha^m). \quad (2.40)$$

因此,收敛到 Perron 投影的速度的上限是由两个特征值之比的模决定的。

证明. 我们在式(1.5) 中看到,对于所有的  $m \in \mathbb{N}$ ,有  $A^m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m e_i \varepsilon_i^\top$ 。从这一表达式中,我们可以得到:

$$r(A)^{-m} A^m - e_1 \varepsilon_1^\top = r(A)^{-m} (A^m - r(A)^m e_1 \varepsilon_1^\top) = \sum_{i=2}^n \theta_i^m e_i \varepsilon_i^\top,$$

其中,  $\theta_i := \lambda_i/r(A)$ 。令  $\|\cdot\|$  为  $\mathbb{M}^{n \times n}$  上的算子范数,三角不等式性质给出了

$$\|r(A)^{-m} A^m - e_1 \varepsilon_1^\top\| \leq \sum_{i=2}^n |\theta_i|^m \|e_i \varepsilon_i^\top\| \leq |\theta_2|^m \sum_{i=2}^n \|e_i \varepsilon_i^\top\|.$$

由于  $A$  是本原矩阵,Perron–Frobenius 定理告诉我们  $|\lambda_2| < r(A)$ 。因此,  $\alpha := |\theta_2| < 1$ 。证毕。  $\square$

<sup>6</sup>Borovička & Stachurski (2020) 的 Theorem B1 提供了定理2.3.3的广义版本的直接证明。

### 2.3.4 精确的稳定性条件

Neumann 级数引理告诉我们,只要  $r(A) < 1$ ,线性系统  $x = Ax + d$  就有唯一解。我们还看到,在投入-产出模型中,  $A$  是邻接矩阵,只要每个部门有正的增加值,条件  $r(A) < 1$  就成立(假设2.1.1和练习2.1.2)。因此,我们有稳定性的充分条件。

这种分析虽然很重要,但也留下了一个问题,即我们需要的条件到底应该控制在怎样的严格程度,或者当条件不满足时会发生什么。例如,我们可能会问:

- (1) 为了得到  $r(A) < 1$ ,是否每个部门都必须有正的增加值? 或者我们可以在较弱的条件下获得相同的结果吗?
- (2) 当  $r(A) < 1$  的条件不满足时,会发生什么? 我们是否会失去解的存在性,或者唯一性,或者两者都失去?

在下面的 §2.3.4.1 和 §2.3.4.2 中,我们将解决这两个问题。

#### 2.3.4.1 次随机矩阵的谱半径

重申一下,§5.1.3 中的结果依赖于假设每个部门都有正的增加值,这反过来又为我们提供了投入-产出生产网络邻接矩阵的  $r(A) < 1$  的性质。然而,每个部门正增加值的条件并不是必须的。在这里,我们研究一个较弱的条件,它对  $r(A) < 1$  来说是完全必要和充分的。这个较弱条件对于理解其他类型的网络也很有帮助,包括金融网络,如 §5.2 中所讨论的。

首先,回顾一下,如果矩阵  $P \geq 0$  并且  $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$ ,则  $P \in \mathbb{M}^{n \times n}$  可以叫做随机矩阵。类似地,如果  $P \geq 0$  并且  $P\mathbb{1} \leq \mathbb{1}$ ,则将矩阵  $P \in \mathbb{M}^{n \times n}$  称为次随机(substochastic)的。因此,一个次随机矩阵就是行加总小于单位 1 且非负的矩阵。显然,一个非负矩阵  $Q$  的转置  $Q^\top$  是次随机的,当且仅当  $Q$  的列加总小于单位 1。

次随机矩阵的一个自然示例是投入-产出网络邻接矩阵  $A$  的转置  $A^\top$ 。事实上,这样的  $A$  是非负的,并且对于第  $j$  列的加总,我们有

$$\sum_i a_{ij} = \frac{\sum_i z_{ij}}{x_j} = \frac{\text{部门 } j \text{ 的投入支出}}{\text{部门 } j \text{ 的总销售额}}.$$

因此,  $\sum_i a_{ij} \leq 1$ , 即表示一个给定产业在中间产品和服务上的支出不会超过其总销售收入,这也是部门  $j$  非负利润的必要条件。当这一点对所有  $j$  均成立时,邻接矩阵的列加总会小于单位 1。

从第15页的引理1.2.7中我们可以看到,任何次随机矩阵  $P$  都有

$$r(P) \leq \max_i \text{rowsum}_i(P) \leq 1. \quad (2.41)$$

我们想知道何时可以将这一条件收紧到  $r(P) < 1$ 。

从式(2.41)来看,一个明显的充分条件是  $\text{rowsum}_i(P) < 1 (\forall i)$ 。本质上,这就是我们在投入-产出模型中使用的假设2.1.1(每个部门都有正的增加值)。在这一条件下,我们有  $\sum_i a_{ij} < 1 (\forall j)$ ,即表示所有的列和均严格小于 1。因此,

$$\max_i \text{colsum}_i(A) < 1 \iff \max_i \text{rowsum}_i(A^\top) < 1 \implies r(A^\top) < 1 \iff r(A) < 1,$$

其中,等式中间的隐含关系由式 (2.41) 决定,最后的等价关系由  $r(A) = r(A^\top)$  决定。

现在我们根据网络结构,为  $r(P) < 1$  提供一个较弱的条件——事实上也是充要条件。为此,我们引入弱链次随机的概念。如果对于所有的  $m \in [n]$ ,存在一个  $i \in [n]$  能够使得  $m \rightarrow i$  且  $\sum_j p_{ij} < 1$ ,那么我们将这个  $n \times n$  的次随机矩阵  $P = (p_{ij})$  定义为 **弱链次随机**(weakly chained substochastic)矩阵。这里,从  $m$  到  $i$  的可达性(accessibility)是服从诱导加权有向图的。<sup>7</sup>

**练习 2.3.22.** 令  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}^{n \times n}$  为非负的。证明:  $A^\top$  是弱链次随机矩阵,当且仅当  $A$  的列加总小于单位 1,并且对于每一个  $m \in [n]$ ,在(诱导有向图) $A$  以及  $\sum_k a_{ki} < 1$  之下,都存在一个  $i \in [n]$  使得  $i \rightarrow m$ 。

**命题 2.3.5.** 对于一个次随机矩阵  $P$ ,我们有

$$r(P) < 1 \iff P \text{ 是弱链次随机的。}$$

其证明可以在 Azimzadeh (2019) 的推论 2.6 中找到。

现在我们回到投入-产出模型。如果投入-产出网络中  $i \rightarrow j$ ,我们同意说,部门  $i$  是部门  $j$  的**上游供应商**(upstream supplier)。根据第36页的命题1.4.2,一个等价陈述是,存在一个  $k \in \mathbb{N}$ ,使得  $a_{ij}^k > 0$ 。

**练习 2.3.23.** 假设  $A$  是一个投入-产出网络的邻接矩阵,并假定每个部门的增加值都是非负的。利用命题2.3.5,证明:当且仅当网络中的每个部门都有一个具有正的增加值的上游供应商时,  $r(A) < 1$ 。

#### 2.3.4.2 Neumann 级数引理的反面

由于 Neumann 级数引理是许多经济应用的一个基础性结果,我们想知道当引理的条件失败时会发生什么。下面是部分反例。

**定理 2.3.6.** 假设  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  且  $A \geq 0$ 。如果  $A$  是不可约矩阵,那么下面陈述是等价的:

- (1)  $r(A) < 1$ 。
- (2) 对于所有的  $b \geq 0$  且  $b \neq 0$ ,  $x = Ax + b$  有一个唯一的处处正解。

<sup>7</sup>参见 §1.4.2.1对诱导加权有向图(induced weighted digraph)的定义。根据命题1.4.2,从  $m$  到  $i$  的可达性等价于存在一个  $k$  使得  $p_{mi}^k > 0$ ,其中  $p_{mi}^k$  指的是  $P^k$  的第  $(m, i)$  个元素。

(3) 对于至少某一个  $b \geq 0$  且  $b \neq 0$ ,  $x = Ax + b$  有一个非负解。

(4) 存在一个  $x \gg 0$ , 能够使得  $Ax \ll x$ 。

**备注 2.3.1.** 如果  $A$  是不可约的, 并且(1)-(4)项之一(因而所有)为真, 那么, 根据 Neumann 级数引理, 唯一解是  $x^* := \sum_{m \geq 0} A^m b$ 。

**备注 2.3.2.** 陈述(3)明显弱于陈述(2)。然而, 在  $r(A) < 1$  条件失效的情形下, 这一点很重要。在这种情况下, 从(3)的否定中, 我们可以得到结论, 在  $\mathbb{R}_+^n$  中甚至没有一个非平凡的  $b$ , 能够使得  $x = Ax + b$  的非负解存在。

定理2.3.6的证明. 我们首先证明 $(1) \iff (4)$ , 然后证 $(1) \iff (2) \iff (3)$ 。

$((1) \Rightarrow (4))$ 。对于(4)中的  $x$ , 我们可以使用 Perron-Frobenius 定理来获得一个满足  $Ae = r(A)e \ll e$  且  $e \gg 0$  的实特征向量  $e$ 。

$((4) \Rightarrow (1))$ 。假设  $x \gg 0$  且满足  $x \gg Ax$ 。通过正缩放, 我们可以假设  $\|x\| = 1$ 。选择一个  $\lambda < 1$  保证其能够满足  $\lambda x \geq Ax$ 。对这个不等式进行迭代, 可以得到, 对于所有的  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda^k x \geq A^k x \implies \lambda^k = \lambda^k \|x\| \geq \|A^k x\| \iff \|A^k x\|^{1/k} \leq \lambda,$$

因此, 根据局部谱半径定理2.3.3的结果, 可知,  $r(A) \leq \lambda < 1$ 。

$((1) \Rightarrow (2))$ 。从 NSL 中可以得到, 唯一解  $x^* = \sum_{i \geq 0} A^i b$  的存在性。正性来自  $A$  的不可约性, 因为  $b \neq 0$  并且  $\sum_i A^i \gg 0$ 。

$((2) \Rightarrow (3))$ 。显然的。

$((3) \Rightarrow (1))$ 。假设有一个  $b \geq 0$  且  $b \neq 0$ , 以及某一个能够满足  $x = Ax + b$  的  $x \geq 0$ 。根据 Perron-Frobenius 定理, 我们可以选择一个左特征向量  $e$ , 使得  $e \gg 0$  且  $e^\top A = r(A)e^\top$ 。对于这个  $e$ , 我们有:

$$e^\top x = e^\top Ax + e^\top b = r(A)e^\top x + e^\top b.$$

由于  $e \gg 0$  以及  $b \neq 0$ , 我们必然有  $e^\top b > 0$ 。此外, 由于  $x \neq 0$ (因为  $b \neq 0$  以及  $x = Ax + b$ ), 所以可以得到  $e^\top x > 0$ 。因而对于正的常数  $\alpha$  和  $\beta$ ,  $r(A)$  满足  $(1 - r(A))\alpha = \beta$ 。所以,  $r(A) < 1$ 。  $\square$

**练习 2.3.24.** 假设某个生产系统  $x = Ax + d$ , 对于每一个非平凡的  $d$ , 我们对矩阵  $A$  作何要求, 才能使  $r(A) < 1$  成为非负产出解  $x^*$  存在的必要条件?

**练习 2.3.25.** 不可约性质无法从定理2.3.6中删除。提供一个例子来证明: 在没有不可约性的情况下, 对于某个  $A \geq 0$  有  $r(A) \geq 1$ , 但却可以找到一个非零的  $b \geq 0$  和一个  $x \geq 0$ , 使得  $x = Ax + b$ 。

## 2.4 章节说明

有关投入-产出分析和多部门生产网络的高质量教科书有 [Nikaido \(1968\)](#), [Miller & Blair \(2009\)](#) 以及 [Antras \(2020\)](#)。关于生产网络和加总冲击的参考文献有 [Acemoglu et al. \(2012\)](#)、[Antràs et al. \(2012\)](#)、[Di Giovanni et al. \(2014\)](#)、[Carvalho \(2014\)](#)、[Barrot & Sauvagnat \(2016\)](#)、[Baqae \(2018\)](#)、[Carvalho & Tahbaz-Salehi \(2019\)](#)、[Acemoglu & Azar \(2020\)](#)、[Miranda-Pinto \(2021\)](#) 和 [Carvalho et al. \(2021\)](#)。

其他有关多部门模型的网络中心度分析, 例如参见 [Bernard et al. \(2019\)](#), 他们使用比利时的买方-供应商关系数据, 研究了企业在生产网络中相互关联时企业规模异质性的起源。[Dew-Becker \(2022\)](#) 研究了非线性生产网络中的尾部风险和加总波动。[Herskovic \(2018\)](#) 分析了生产网络对资产定价的影响。[Cai & Szeidl \(2018\)](#) 考虑了企业间关系对企业绩效的影响。[Elliott & Golub \(2022\)](#) 则对网络脆弱性进行了有价值的研究, 其中包括了对生产网络和部门冲击影响的讨论。

# 第三章 最优流

到目前为止，我们已经分析了网络结构中的一些问题，而这些网络要么是固定的，要么是由某个特定随机过程生成的。在本章，我们将探究另外一种网络，该网络中的“连接”(connections)由均衡或最优条件所内生决定。在此过程中，我们将介绍一些可以用来求解网络或最优化问题的强大方法，其应用范围能够从传统图论和网络问题(如贸易、匹配和通信)，跨度到机器学习、计量经济学和金融学等。

## 3.1 最短路径

首先，我们研究**最短路径(shortest path)**问题，该问题在生产、网络设计、人工智能、运输等众多领域都有应用。针对该问题，我们采用的求解方法恰好能够比较清晰的展现贝尔曼最优化原理的特性，这也是最优化理论和现代经济分析的基石之一。

### 3.1.1 定义与示例

我们先从一个简单的例子来引入我们讨论的问题(在下一节中，我们将问题标准化并考虑求解方法。)

#### 3.1.1.1 模型设定

某一企业希望用最低成本将集装箱从  $A$  运送到  $G$ ，其中  $A$  和  $G$  是图3.1所示的加权有向网络  $\mathcal{G}$  的节点，箭头(边)表示运输路径，边的权重表示经过该运输路径的成本。在这种情况下，权函数也被称为**成本函数 (cost function)**，用  $c$  表示。比如： $c(A, B)$  表示的是从节点  $A$  运输到节点  $B$  所花费的成本。

由于这个图讨论的网络比较简单，我们可以直观地找到最小成本路径。经过观察不难发现，从  $A$  运输到  $G$  的最低成本为 8，且有两条路径可选择，分别是  $(A, C, F, G)$ (见图3.2)和  $(A, D, F, G)$ (见图3.3)。

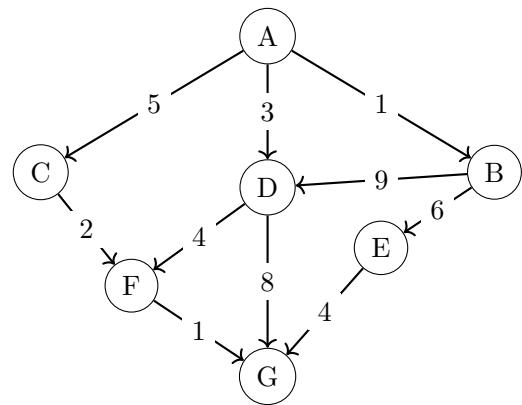


图 3.1：最短路径问题图示

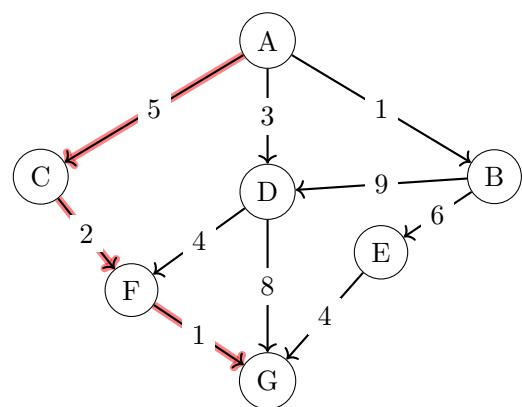


图 3.2：方案 1

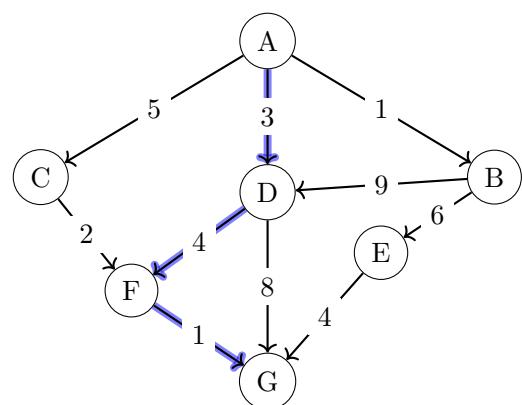
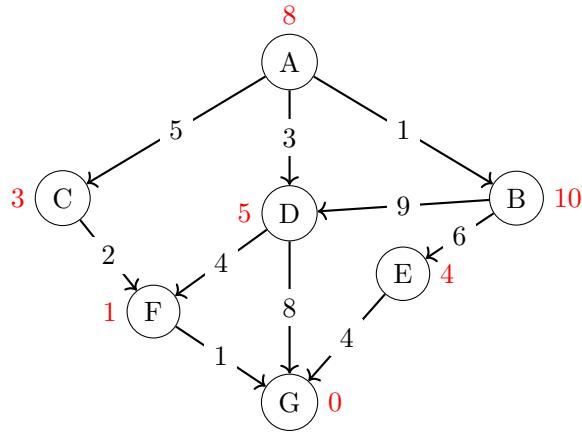


图 3.3：方案 2

图 3.4: 路径成本函数(每个  $x$  处的红色数字表示  $q^*(x)$ )

### 3.1.1.2 递归视角

接下来,我们考虑一个能够应用到更大的网络中的系统性求解方法。令  $q^*(x)$  表示以节点  $x$  为起点的最小路径成本 (minimum cost-to-go),也就是说,  $q^*(x)$  就是从  $x$  到  $G$  在最优路径下的总成本。图3.4标注了每个节点到节点  $G$  的最小路径成本数值,我们用如下所示的向量形式表示成本  $q^*$ :

$$(q^*(A), q^*(B), q^*(C), q^*(D), q^*(E), q^*(F), q^*(G)) = (8, 10, 3, 5, 4, 1, 0) \in \mathbb{R}^7。 \quad (3.1)$$

根据图3.4我们可以清楚地看到,只要  $q^*$  是已知的,就可以按如下方式计算最小成本路径:在任意的节点  $x$ (从节点  $A$  开始,以此类推),移动到任意节点  $y$ ,然后求解如下方程:

$$\min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + q^*(y)\}。 \quad (3.2)$$

其中,  $\mathcal{O}(x) = \{y \in V : (x, y) \in E\}$  是  $x$  的直接后继 (direct successors) 的集合(定义参见 §1.4.1),  $c(x, y)$  是从  $x$  到  $y$  的运输成本。换句话说,为了使运输成本最小化,我们选择的下一条路径是能够满足“当前路径的成本(即  $c(x, y)$ )加上后继节点的最优成本(即  $q^*(x)$ )”最小化的条件。

因此,如果我们知道每个节点  $x$  的最优路径总成本  $q^*(x)$ ,那么找到最优路径的方法就可以简化为式(3.2)中的两阶段最优化问题。

但现在出现了另一个问题:在更复杂的情况下,即图中节点和边的数量非常多的情况下,如何找到  $q^*(x)$ ? 解决该问题的一种方法是利用如下事实:

$$q^*(x) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + q^*(y)\} \quad (3.3)$$

即,除了节点  $G$ (其中,  $q^*(G) = 0$ )之外,式(3.3) 对图中的每个节点  $x$  都必须成立。

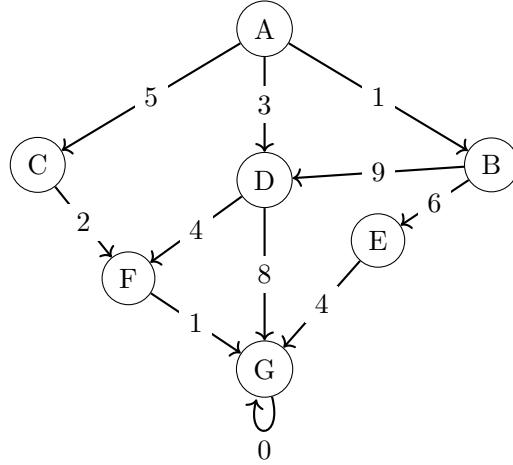


图 3.5: 在目的地处添加自循环

花点时间说服你自己，在我们的示例中，函数  $q^*$  满足式(3.3)。特别是检查式(3.3)在图3.4中的每个非终点的  $x$  处是否成立。

式(3.3)通常称为**贝尔曼方程(Bellman equation)**，我们可以将其理解为对  $q^*$  的限制，这有助于我们理解这个向量。该方法的主要困难在于，贝尔曼方程在未知函数  $q^*$  中是非线性的。我们的解决方法是将这个非线性方程转换为不动点问题，从而可以应用不动点理论。

我们将在一个更一般的最短路径问题中，使用这一方法。

### 3.1.2 贝尔曼方法

考虑一个**流网络(flow network)**上的一般最短路径问题，流网络主要由一个加权有向网络  $\mathcal{G} = (V, E, c)$  组成。该网络中，存在一个作为**目的地(destination)**的汇点(sink)  $d \in V$ ，以及一个权函数  $c: E \rightarrow (0, \infty)$ (该权函数将每条边  $(x, y) \in E$  与正值成本联系起来)。我们现在考虑如何为每个节点  $x \in V$  找到从  $x$  到  $d$  的最短(即最小成本)路径。为了使这个问题有意义，我们做出如下假设：

**假设 3.1.1.** 对于每个  $x \in V$ ，都存在从  $x$  到  $d$  的有向路径。

为了使假设3.1.1在  $x = d$  处成立，并使证明更加简洁，我们在  $d$  处添加自循环(即，将  $(d, d)$  添加到  $E$  中)，并令  $c(d, d) = 0$ ，从而将  $c$  扩展到这一自循环上。这只是意味着“终止于  $d$ ”与“停留在  $d$ ”相同，因为到达目的地后将不再产生更多的成本。图3.5对前文的示例进行了说明。

我们将利用上一节建立的直觉，基于贝尔曼方程，构建出一种求解方法。下面我们取  $|V| = n + 1$ 。

### 3.1.2.1 策略

事实证明,与最优路径相比,以最优策略为研究目标更加便捷。一般来说,策略是指在不同情况下如何采取行动的方案。在目前的设定下,策略(policy)就是一个映射  $\sigma: V \rightarrow V$ ,其中  $\sigma(x) = y$  可以理解为:在节点  $x$  出发,前往节点  $y$ 。如果一个策略能够使所有的  $x \in V$  满足  $\sigma(x) \in \mathcal{O}(x)$ ,则称该策略是可行的(feasible)。

对于任意可行策略  $\sigma$  和  $x \in V$ ,  $\sigma$  下  $x$  的轨迹(trajectory)指的是从  $x$  到可行策略所指示的目的地的路径。换句话说,它是由  $p_0 = x$  和  $p_i = \sigma(p_{i-1}) (\forall i \in \mathbb{N})$  定义的序列  $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ 。它也可以被表示为:  $(\sigma^i(x)) := (\sigma^i(x))_{i \geq 0}$ , 其中  $\sigma^i$  表示  $\sigma$  自身的  $i$  次复合。

令  $\Sigma$  是所有可行且不循环(do not cycle)策略的集合,即,对于任意的  $i \in \mathbb{N}$ ,不存在  $x \in V \setminus \{d\}$ ,使得  $\sigma^i(x) = x$ 。 $\Sigma$  中的策略有这样的特性:它们生成的每条轨迹都会在有限时间内到达  $d$ (并且根据我们对  $d$  的假设,必然会停留在此处)。最后一句话意味着:

$$\sigma^i(x) = d, \quad \forall i \geq n \quad \text{和} \quad \forall x \in V. \quad (3.4)$$

**练习 3.1.1.** “式(3.4)收敛到  $d$ ”假设了,任何最终到达  $d$  的轨迹都是在  $n$  步或更少步之内实现的。解释为什么会这样?

给定  $q \in \mathbb{R}_+^V$ ,如果有

$$\sigma(x) \in \operatorname{argmin}_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + q(y)\} \quad \forall x \in V,$$

我们称  $\sigma \in \Sigma$  为  $q$ -贪心策略( $q$ -greedy)。从本质上讲,贪心策略将  $q$  视为最小成本函数,并在该假设下选择一条最优路径。

使用新术语,我们可以将 §3.1.1.2 中的讨论重述为:最短路径问题可以通过找到真正的最小成本函数  $q^*$ ,并遵循  $q^*$ -greedy 来求解。在本节的剩余部分,我们将更仔细地证明这一说法。

### 3.1.2.2 策略的成本

我们需要评估任意给定策略的成本。为此,对于每个  $x \in V$  和  $\sigma \in \Sigma$ ,令  $q_\sigma(x)$  表示从节点  $x$  出发遵循策略  $\sigma$  的成本,有,

$$q_\sigma(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c(\sigma^i(x), \sigma^{i+1}(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} c(\sigma^i(x), \sigma^{i+1}(x)). \quad (3.5)$$

第二个等式成立,是因为  $\sigma^i(x) = d (\forall i \geq n)$  且  $c(d, d) = 0$ 。我们称函数  $q_\sigma \in \mathbb{R}_+^V$  为给定策略  $\sigma$  下的路径成本(cost-to-go)。

设计一个算子,使  $q_\sigma$  成为该算子的不动点,这对下文的论述是非常有帮助的。为此,我

们令  $U$  表示所有  $q \in \mathbb{R}_+^V$  的集合, 并定义映射  $T_\sigma: U \rightarrow U$ , 使其满足

$$(T_\sigma q)(x) = c(x, \sigma(x)) + q(\sigma(x)) \quad (x \in V)。$$

在这里和下文中, 对于  $k \in \mathbb{N}$ , 表达式  $T_\sigma^k$  表示  $T_\sigma$  与其自身映射的第  $k$  次复合(即,  $T_\sigma$  被应用  $k$  次)。

**练习 3.1.2.** 证明:对于所有的  $\sigma \in \Sigma$ ,  $T_\sigma$  是在  $U$  上的自映射。

**命题 3.1.1.** 对于每个  $\sigma \in \Sigma$ , 函数  $q_\sigma$  是映射  $T_\sigma$  在  $U$  上的唯一不动点, 并且对于所有的  $k \geq n$  和  $q \in U$ , 有  $T_\sigma^k q = q_\sigma$  成立。

证明. 给定  $\sigma \in \Sigma$  和  $q \in U$ , 对于每个  $x \in V$  都有:

$$(T_\sigma^2 q)(x) = c(x, \sigma(x)) + (T_\sigma q)(\sigma(x)) = c(x, \sigma(x)) + c(\sigma(x), \sigma^2(x)) + q(\sigma^2(x))。$$

更一般地,对于  $k \geq n$ , 我们有:

$$(T_\sigma^k q)(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c(\sigma^i(x), \sigma^{i+1}(x)) + q(\sigma^k(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} c(\sigma^i(x), \sigma^{i+1}(x))。$$

第二个等式成立, 是因为对于所有  $k \geq n$  和  $q(d) = 0$ , 都有  $\sigma^k(x) = d$  成立。因此根据式(3.5)得到  $(T_\sigma^k q)(x) = q_\sigma(x)$ 。 $q_\sigma$  是  $T_\sigma$  唯一不动点的事实, 参见附录中第180页的练习6.1.3。  $\square$

### 3.1.2.3 最优化

**最小路径成本(minimum cost-to-go)**函数  $q^*$  可以被定义为:

$$q^*(x) = \min_{\sigma \in \Sigma} q_\sigma(x) \quad (x \in V)。$$

如果某个策略达到了该表达式中的最小值, 则该策略  $\sigma^* \in \Sigma$  被称为是**最优的(optimal)**, 因此在集合  $V$  上有  $q^* = q_{\sigma^*}$ 。注意到,  $q^*$  的定义与我们在 §3.1.1.2中给出的直观定义一致, 即对于每个  $x \in V$ ,  $q^*(x)$  是从  $x$  到目的地  $d$  的最小路径成本。

现在我们的主要目标是:

- (1) 找到计算  $q^*$  的方法,并且
- (2) 验证  $q^*$ -greedy 实际上是最优的,也正如我们上文中所讨论的那样。

关于第一步,我们说  $q^*$  满足贝尔曼方程(3.3)。为了证明这个说法,我们引入**贝尔曼算子**

(Bellman operator)  $T$ :

$$(Tq)(x) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + q(y)\} \quad (x \in V). \quad (3.6)$$

通过构造,  $q^*$  满足贝尔曼方程(3.3), 当且仅当  $Tq^* = q^*$ 。

**练习 3.1.3.** 证明:  $T$  是  $U$  上的自映射, 并且对于所有的  $q \in U$  和  $\sigma \in U$ , 都有  $Tq \leq T_\sigma q$ 。

**练习 3.1.4.** 证明:  $T$  和  $T_\sigma$  在  $\mathbb{R}_+^V$  上都是保序(order-preserving)映射, 且具有逐点偏序关系  $\leq$ 。并证明: 对于所有的  $q \in U$ ,  $\sigma \in \Sigma$  和  $k \in \mathbb{N}$ , 都有  $T^k q \leq T_\sigma^k q$ 。

**练习 3.1.5.** 令  $q \in U$ , 并令  $\sigma$  是一个  $q$ -greedy, 证明:  $Tq = T_\sigma q$ 。

下一个结果非常重要, 它证明了最优路径成本函数满足贝尔曼方程, 并且为我们提供了一种成本函数的计算方法: 在  $U$  中选取任意  $q$ , 然后用  $T$  进行迭代。

**命题 3.1.2.** 函数  $q^*$  是映射  $T$  在集合  $U$  上的唯一不动点, 并且, 对于所有  $q \in U$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时有  $T^k q \rightarrow q^*$ 。

证明. 回顾附录中的练习6.1.3 (第180页), 如果能够验证存在一个  $m \in \mathbb{N}$ , 使其对于所有  $k \geq m$  和所有  $q \in U$ , 等式  $T^k q = q^*$  成立, 那么命题就能得到证明。在此, 我们令  $\gamma$  是除  $(d, d)$  外  $c(x, y)$  的最小值 ( $(x, y) \in E$ )。由于  $c$  在每条边上都是正数, 且边的集合  $E$  是有限集, 有  $\gamma > 0$ 。

令  $q \in U$ , 我们说, 对于足够大的  $k$ , 有  $T^k q \geq q^*$ 。证明如下, 令  $k \in \mathbb{N}$ , 迭代  $T$  得到:

$$(T^k q)(x) = c(x, p_1) + c(p_1, p_2) + \cdots + c(p_{k-1}, p_k) + q(p_k), \quad \text{对于某些路径 } (x, p_1, \dots, p_k)$$

如果该路径指向  $d$ , 那么当  $k \geq n$  时, 有  $(T^k q)(x) \geq q^*(x)$ , 这是因为  $q^*(x)$  是从  $x$  到达  $d$  的最小成本,<sup>1</sup> 否则  $(T^k q)(x) \geq k\gamma$ 。所以当  $k\gamma \geq \max_{x \in V} q^*(x)$  时, 对  $k$  有  $(T^k q)(x) \geq q^*(x)$ 。

对于反向不等式, 令  $k \geq n$ , 根据命题3.1.1和练习3.1.4中的不等式, 得到:

$$T^k q \leq T_{\sigma^*}^k q = q_{\sigma^*} = q^*.$$

我们现在证明了, 对足够大的  $k$ , 可以得到  $T^k q = q^*$ 。  $\square$

我们现在有一种方法来计算最优路径成本函数(从任意  $q \in U$  开始, 迭代  $T$ ), 此外, 还有一种方法来验证以下关键结果。

**定理 3.1.3.** 策略  $\sigma \in \Sigma$  是最优的, 当且仅当  $\sigma$  是  $q^*$ -greedy。

<sup>1</sup>回顾一下,  $q^*(x)$  是在某一策略下到达  $d$  的最小成本。当在任何策略下都无法实现路径  $(x, p_1, \dots, p_k)$  时会怎样? 这只会在路径中包含环(cycle)的情况下出现。如果这种情况发生, 我们可以通过去除路径中的环, 来得到一条更短路径。有环路径的成本比  $q^*(x)$  更高, 因此不等式  $(T^k q)(x) \geq q^*(x)$  依然成立。

证明. 根据贪心策略的定义:

$$\sigma \text{ 是 } q^*\text{-greedy} \iff c(x, \sigma(x)) + q^*(\sigma(x)) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + q^*(y)\}, \quad \forall x \in V.$$

因为  $q^*$  满足贝尔曼等式, 我们得到:

$$\sigma \text{ 是 } q^*\text{-greedy} \iff c(x, \sigma(x)) + q^*(\sigma(x)) = q^*(x), \quad \forall x \in V.$$

其中, 等式右边等价于  $T_\sigma q^* = q^*$ 。同时,  $T_\sigma$  在  $U$  中只有一个不动点, 即  $q_\sigma$ 。因此  $q_\sigma = q^*$ 。通过这个逻辑链和最优性的定义得到:

$$\sigma \text{ 是 } q^*\text{-greedy} \iff q^* = q_\sigma \iff \sigma \text{ 是最优的。}$$

□

### 3.1.2.4 Julia 中的代码实现

让我们用上面提出的思路, 来解决最初的最短路径问题, 即我们在 §3.1.1.1 中介绍的关于运输路径的问题。我们将在 Julia 中实现。

我们第一步是设置成本函数, 并将其储存成一个数组  $c$ , 同时, 用整数  $1, \dots, 7$  来识别节点  $A, \dots, G$ 。当从  $i$  到  $j$  没有边时, 我们令  $c[i, j] = \text{Inf}$ , 因此在计算贝尔曼算子(如式(3.3)所定义的)时就不会选择此路径。当边确实存在时, 我们输入图3.1中所示的成本。

```
c = fill(Inf, (7, 7))

c[1, 2], c[1, 3], c[1, 4] = 1, 5, 3
c[2, 4], c[2, 5] = 9, 6
c[3, 6] = 2
c[4, 6] = 4
c[5, 7] = 4
c[6, 7] = 1
c[7, 7] = 0
```

接下来我们定义贝尔曼算子:

```
function T(q)
    Tq = similar(q)
    n = length(q)
    for x in 1:n
        Tq[x] = minimum(c[x, :] + q[:])
    end
```

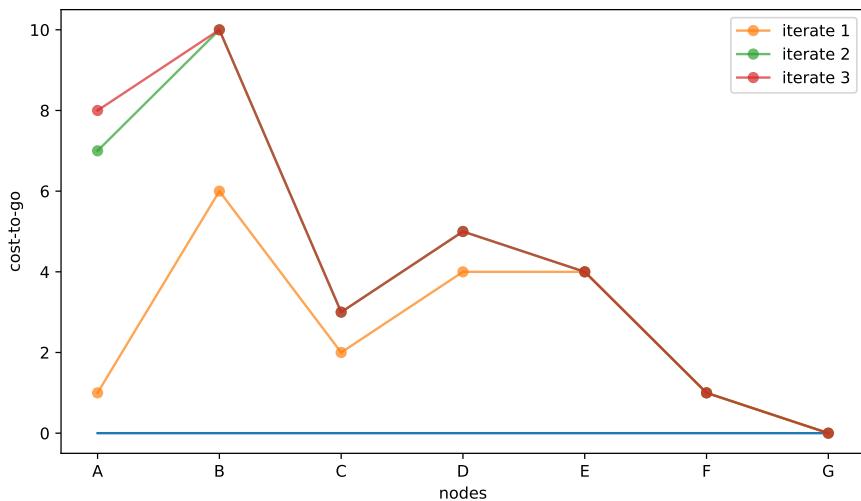


图 3.6: 最短路径贝尔曼迭代

```

    return Tq
end

```

现在我们任意设置  $q \equiv 0$ , 生成  $Tq, T^2q, T^3q$  的迭代序列, 并绘制它们:

```

using PyPlot
fig, ax = plt.subplots()

n = 7
q = zeros(n)
ax.plot(1:n, q)

for i in 1:3
    new_q = T(q)
    ax.plot(1:n, new_q, "-o", alpha=0.7)
    q = new_q
end

```

在添加一些标签后, 输出的结果如图3.6所示。值得注意的是, 通过  $T^3q$ , 结果已经收敛到  $q^*$ 。你可以通过检查  $T^3q$  的值与我们在图3.4中手动获得的值是否一致, 来确认这一点。

### 3.1.3 介数中心度

在 §1.4.3 中, 我们讨论了一系列网络中心度, 包括: 度、特征向量中心度、卡兹(Katz)中心度。除此之外, 还有一种常用的中心度——介数中心度。介数中心度建立在最短路径的概念之上, 主要应用于社会网络及对等网络(peer networks)的研究中。

形式上, 对于给定的图  $\mathcal{G} = (V, E)$ , 有向或无向, 节点  $v \in V$  的介数中心度(betweenness centrality)为,<sup>2</sup>

$$b(v) := \sum_{x,y \in V \setminus \{v\}} \frac{|S(x,v,y)|}{|S(x,y)|},$$

其中,  $S(x,y)$  表示的是从节点  $x$  到  $y$  的所有最短路径组成的集合,  $S(x,v,y)$  表示从  $x$  到  $y$  且经过节点  $v$  的所有最短路径的集合(与前文一致,  $|A|$  指的是  $A$  的基数, 即集合  $A$  中元素的个数)。因此,  $b(v)$  与“从节点  $x$  到  $y$  的最短路径中随机选择出的路径包含节点  $v$  的概率”成正比, 其中,  $x, y$  是随机选择的一对节点。所以, 那些“位于”大量节点对之间的节点, 其排名会相对较高。

例如, 在 Networkx 工具包中有名为 `florentine_families_graph` 的图, 该图描绘了 15 世纪佛罗伦萨 15 个显赫家族之间的婚姻关系。该数据可通过以下代码获得:

```
import networkx as nx
G = nx.florentine_families_graph()
```

图3.7 中的网络通过以下代码创建:

```
nx.draw_networkx(G, [params])
```

其中, `[params]` 表示包含节点大小、颜色等特征的配置参数列表。在此图中, 节点大小及颜色明暗正比于节点的介数中心度数值, 该数值通过以下命令计算得到:

```
nx.betweenness_centrality(G)
```

尽管该图较为简单, 但从图中我们可以清楚的观察到, Medici 家族凭借其惊人的财富及影响力, 在佛罗伦萨历史上扮演了举足轻重的角色。

## 3.2 线性规划与对偶性

在 §3.1 中, 我们对最短路径的研究使用了一种相对专业的优化方法。在这一节中, 我们将介绍更多关于优化和对偶的一般性结论, 然后将其应用到内生网络、最优传输和最优流问题。我们的想法是, 首先选择一些具有挑战性的优化问题, 然后探讨其正则化问题(通常是通过凸优化的形式实现的)。

<sup>2</sup>译者注:也有学者将“betweenness centrality”译为“中介中心度”。

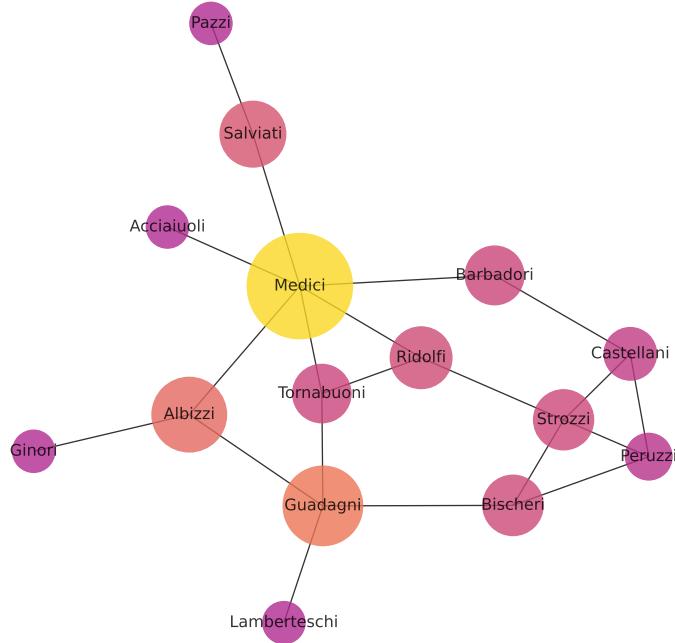


图 3.7: 佛罗伦萨家族网络中的中心度(通过节点大小和颜色表示)

在深入理论研究之前,我们在下面的 §3.2.1中,通过一个非常具体的应用阐明研究动机。这个应用涉及的问题,在经济学中通常被称为匹配(matching)问题,在数学中被称为线性分配(linear assignment)问题。我们将以工人(workers)与工作(jobs)的匹配为背景来说明关键思想,稍后,当我们讨论如何解决这个问题时,我们将看到线性规划(linear programming)、凸优化(convexification)和对偶性(duality)的力量。

### 3.2.1 线性分配

在斯普林菲尔德镇,当地的一个雇主停工了,40名工人被闲置。对这些工人来说,幸运的是,斯普林菲尔德因为政治因素,市长希望引进新雇主。市长的成功在于她向新公司承诺,将对这40名工人进行再培训,以使他们掌握所需的新技能。为了数学上的方便,让我们假设正好有40个新职位,每个职位都有不同的技能要求。

市长成立的小组记录了这40名工人的个人技能,以及新职位的要求,并估算出了为重新培训员工*i*到岗位*j*所需成本为 $c(i, j)$ 。该小组的挑战是使再培训的总成本最小化。具体来说,他们希望能解决:

$$\min_{\sigma \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{40} c(i, \sigma(i)), \quad (3.7)$$

其中, $\mathcal{P}$ 是在整数集合 $1, \dots, 40$ 上的排列组合序列(即双射自映射)的集合。图3.8说明了一种可能的排列组合。

该问题是离散的,所以一阶条件不可用。虽然问题不易处理,但可以借助一台强大的计

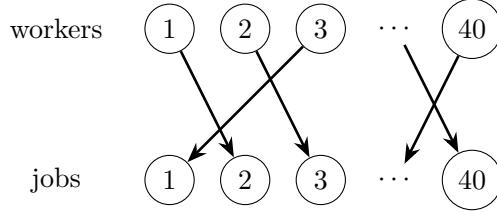


图 3.8: 一种可能的组合 (即 [40] 上的一组排列组合)

算机,该团队指示其工作站遍历所有可能的排列组合,并记录使得再培训总成本最低的组合。该指令通过如下算法2实现(在 Algorithm 2 中给出)。

```

设定  $m = +\infty$  ;
for  $\sigma$  in  $\mathcal{P}$  do
    设定  $t(\sigma) = \sum_{i=1}^{40} c(i, \sigma(i))$  ;
    if  $t(\sigma) < m$  then
        设定  $m = t(\sigma)$  ;
        设定  $\sigma^* = \sigma$  ;
    end
end
return  $\sigma^*$ 
```

**Algorithm 2:** 遍历所有排列组合使总成本最小化

程序经过五天的不断运行,计算机仍在工作,市长变得不耐烦了,团队开始计算运行需要多长时间。主要决定因素是集合  $\mathcal{P}$  的大小,基本的排列组合知识告诉我们,一个大小为  $n$  的集合的排列组合数量是  $n!$ 。快速计算表明, $40!$  超过  $8 \times 10^{47}$ 。团队中某个成员指出,这远远小于可能的 AES-256 密码密钥的数量(大约为  $10^{77}$ )。市长没有得到满意结果并要求估计出大概所需的运算时间。

进一步的计算揭示了以下结果:对于  $\mathcal{P}$  中的每个  $\sigma$ ,如果工作站可以在  $10^{-10}$  秒内评估成本  $t(\sigma) = \sum_{i=1}^{40} c(i, \sigma(i))$ (这是极为乐观的估计),那么总运行时间将是,

$$10^{-10} \times 8 \times 10^{47} = 8 \times 10^{37} \text{ 秒} \approx 2.5 \times 10^{30} \text{ 年}.$$

团队中另一个成员指出,太阳将在不到  $10^{10}$  的时间里,膨胀成一个红巨星并蒸发掉地球。

通过直接计算来解决这个问题的巨大计算成本,就是人们常说的“维度诅咒”(curse of dimensionality)的一个例子。这句话是 Richard Bellman(1920-1984)在对动态优化的基础研究中创造的,指的是随着维数的增加,解决一定精度水平的计算问题所需的处理周期,会呈现指数型增长。我们刚刚描述的匹配问题是高维的,因为选择变量  $\sigma$  是在  $\mathcal{P}$  中的一个排列组合,自然的,有向量  $(\sigma(1), \dots, \sigma(40))$  可与之对应,这又是 40 维向量空间中的一个点。<sup>3</sup>

<sup>3</sup>熟悉高性能计算技术的读者可能会认为,对于匹配问题来说,维度诅咒并不值得关注,因为搜索算法是可以并行化处理的。不幸的是,即使是最好的并行化方法也无法挽救工作站,使其不至于在计算未完成时就被太阳蒸发掉。最好的情况是,增加一个执行线程,使每秒的有效计算量增加一倍,从而使执行时间减少一半。然而,即使有  $10^{10}$  个这样的线程(一个巨大的数量),执行时间仍将是  $2.5 \times 10^{20}$  年。

幸运的是,人们已经发现了这种匹配问题的巧妙算法,对于像这样的问题,可以相对快速地计算出最优分配的有效近似值。例如,Dantzig (1951) 展示了如何将这类问题转化为线性规划(我们将在下面讨论)。近年来,在优化问题中引入允许基于导数方法的正则化约束条件上,我们已经取得了进一步进展。

在接下来的章节中,我们将匹配问题推广到更一般的环境中,并展示如何有效地解决它们。我们首先要做的是回顾一下线性规划的基础知识。

### 3.2.2 线性规划

线性规划(linear program)是一个具有线性目标函数和线性约束的优化问题。如果你先前的想法是,所有有趣的问题都是非线性的,那么我们向你保证,线性规划的适用性是非常广泛的。有点令人惊讶的是,线性规划的适用领域之一就是 §3.2.1 中的分配问题,正如美国数学家 George Bernard Dantzig (1914-2005) 在Dantzig (1951) 中所证明的。其他应用也包括网络上的最优流和最优传输问题,而这些问题又在经济、金融、社会等诸多领域有不同的应用。

我们首先介绍线性规划,并解释其中的核心思想。

#### 3.2.2.1 一个企业问题

定义线性规划的一种方法是,以开源和商业求解器主要解决什么样的线性规划问题为角度。通常,这些求解器的问题采用如下形式:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad (3.8)$$

$$\text{s.t. } A_1 x = b_1, A_2 x \leq b_2 \text{ 和 } d_\ell \leq x \leq d_u. \quad (3.9)$$

这里,每个  $A_i$  都是具有  $n$  列的矩阵,  $c, b_1, b_2, d_\ell$  和  $d_u$  则是具有对应维度的列向量。

为了说明这一点,让我们考虑一个简单的例子。一家企业制造标记为  $1, \dots, n$  的产品,制造每个产品都需要机器时间和劳动力,每产出一单位的产品  $i$  需要  $m_i$  的机时和  $\ell_i$  的工时。如下表所示:

产品	机时	工时	单位价格
1	$m_1$	$\ell_1$	$p_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$m_n$	$\ell_n$	$p_n$

总共有  $M$  个机时和  $L$  个工时可用。假设  $q_i$  表示产品  $i$  的产量,该企业的问题是,

$$\max_{q_1, \dots, q_n} \pi(q_1, \dots, q_n) := \sum_{i=1}^n p_i q_i - wL - rM$$

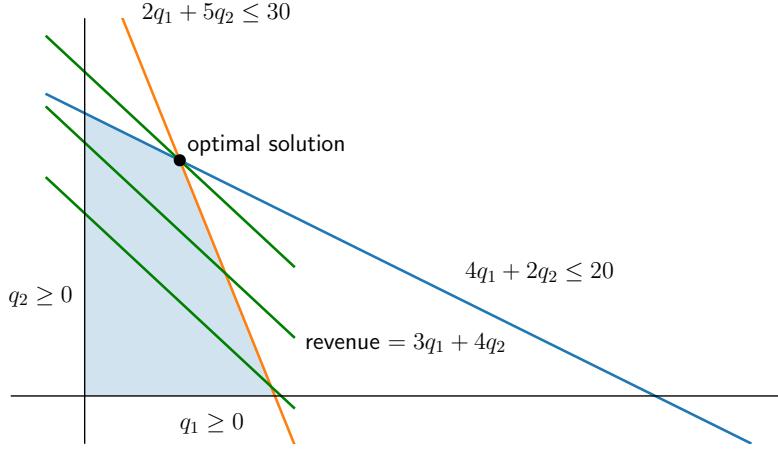


图 3.9: 收入最大化

受约束于(subject to),

$$\sum_{i=1}^n m_i q_i \leq M, \quad \sum_{i=1}^n \ell_i q_i \leq L \quad \text{和} \quad q_1, \dots, q_n \geq 0. \quad (3.10)$$

这里  $\pi$  是利润,  $w$  和  $r$  分别是工资率和资本利率。我们将后面这些值与  $L$  和  $M$  一起作为固定值, 因此, 选择能使利润最大化的  $q \in \mathbb{R}_+^n$  等价于选择能使收入  $\sum_{i=1}^n p_i q_i$  最恶化的  $q$ 。这将是我们接下来的目标。

(为什么总的劳动力供应和机时在这里是固定的? 我们可以把这个问题看作是设计一个每日或每周的生产计划, 在当前给定的价格下, 对现有资源进行最优分配。)

图3.9显示了包含两种产品的简单案例。与练习3.2.3一致, 可行集的图像是一个多边形, 用蓝色阴影表示。绿线是收入函数  $(q_1, q_2) \mapsto p_1 q_1 + p_2 q_2$ , 其中  $p_1 = 3$  且  $p_2 = 4$ 。通过观察, 可以直观地看出收入沿着东北方向增加, 很明显在图中所示的极端点上获得最大值。

收入最大化等价于  $\sum_i (-p_i) q_i$  的最小化, 所以在令  $c = (-p_1, -p_2)$  的条件下, 我们可以使用求解器来求解这个线性规划问题。

### 3.2.2.2 Python 实现

通过 SciPy 的开源求解器 `linprog`, 让我们看看用 Python 解决这个问题的一个方案。对于简单的双产品公司问题, 我们忽略式(3.9)中不必要的等式约束, 并设定

$$A_2 = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} M \\ L \end{pmatrix}.$$

边界  $0 \leq q$  是默认的, 所以我们不需要指定  $d_\ell$  和  $d_u$ 。

我们代入图3.9中的数字, 所以该问题的最大化版本是:

$$\max_{q_1, q_2} 3q_1 + 4q_2 \quad \text{s.t. } q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, 2q_1 + 5q_2 \leq 30 \text{ 和 } 4q_1 + 2q_2 \leq 20. \quad (3.11)$$

现在我们设置了基础元素, 并按如下方式调用 `linprog`:

```
A = ((2, 5),
      (4, 2))
b = (30, 20)
c = (-3, -4) # 这里使用负号是为了转变为最小化问题

from scipy.optimize import linprog
result = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b)
print(result.x)
```

输出是  $[2.5, 5.0]$ , 表明我们应该设定  $q_1 = 2.5$  和  $q_2 = 5.0$ , 这个结果是通过 §3.2.2.8中讨论的单纯形法获得的。

**练习 3.2.1.** 为了对求解器输出的结果进行交叉验证, 试着从图3.9中以更直观的方式推导出解  $q = (2.5, 5.0)$ 。

**练习 3.2.2.** 考虑一个相同参数下的相同问题, 但现在假设, 除了前面的约束条件外,  $q_2$  的产出以 4 为上界。使用 `linprog` 或其他数字线性求解器得到新的解。

### 3.2.2.3 Julia 实现

在求解线性规划时, 一种选择是使用特定领域的建模语言来设定优化问题的目标和约束条件。在 Python 中, 我们可以通过开放源资源库来完成, 如 Pyomo 和谷歌的 OR-Tools。在 Julia 中, 我们则可以使用 JuMP。

以上文中的公司问题(3.11)为例, 下面代码提供了在 Julia 中使用 JuMP 的示例。

```
using JuMP
using GLPK

m = Model()
set_optimizer(m, GLPK.Optimizer)

@variable(m, q1 >= 0)
@variable(m, q2 >= 0)
```

```

@constraint(m, 2q1 + 5q2 <= 30)
@constraint(m, 4q1 + 2q2 <= 20)
@objective(m, Max, 3q1 + 4q2)

optimize!(m)

```

请注意我们是如何使用 JuMP 建模语言将目标函数和约束式写成表达式的。例如， $2q_1 + 5q_2 \leq 30$ 。这使代码更接近于数学公式，并使其具有高度可读性。

如果我们现在运行 `value.(q1)` 和 `value.(q2)`，我们会分别得到 2.5 和 5.0，这与我们之前的求解结果相同。

### 3.2.2.4 标准的线性规划

式(3.8)–(3.9)中的规划问题对实际应用来说是很方便的，但对理论来说却有些麻烦。线性规划问题的一个更加规范的版本是：

$$P := \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax = b \quad \text{和} \quad x \geq 0. \quad (3.12)$$

这里， $x$  被解释为  $\mathbb{R}^n$  的一个列向量， $c$  也是  $\mathbb{R}^n$  的一个列向量。 $A$  是  $m \times n$  的矩阵， $b$  是  $m \times 1$  的向量。(3.12)形式的线性规划也被称为**标准形式**(standard equality form)。为了准备下面关于对偶性的讨论，我们也把(3.12)称为**原问题**(primal problem)。

**练习 3.2.3.** 证明：线性规划式(3.12)的可行集(feasible set)  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \text{ 和 } x \geq 0\}$  是一个多面体。

线性规划的标准型相较于一开始介绍的等式更加普遍。事实上，原先的式(3.8)–(3.9)可以通过一连串的变形转换成标准型。因此，在处理下面理论时，我们可以专门研究标准等式形式，同时不失一般性。

尽管我们省略了关于必要转换过程的全部细节(这些细节可以在Bertsimas & Tsitsiklis (1997)和其他许多资料中找到)，但我们通过将公司案例中的优化问题转换为标准型，可以获得更好的理解。为了简化符号，我们仅在  $n = 3$  时进行讨论，尽管一般情况与此几乎是相同的。

如上所述，我们通过使用“收入最大化等价于  $\sum_i (-p_i)q_i$  最小化”的事实，转换到线性约束的最小化问题。接下来，我们需要将两个不等式约束(3.10)转换成等式约束。我们引入**松弛变量**(slack variables)  $s_m$  和  $s_\ell$ ，并将约束条件改写为：

$$\sum_{i=1}^3 m_i q_i + s_m = M, \quad \sum_{i=1}^3 \ell_i q_i + s_\ell = L \quad \text{和} \quad q_1, q_2, q_3, s_m, s_\ell \geq 0.$$

事实上，我们可以看到，要求  $\sum_{i=1}^3 m_i q_i + s_m = M$  和  $s_m \geq 0$ ，与要求  $\sum_{i=1}^3 m_i q_i \leq M$  是一

致的,同样的逻辑也可以延伸到劳动约束上。

设  $x := (q_1, q_2, q_3, s_m, s_\ell)$ , 我们可以将问题表示为:

$$\min_x c^\top x, \quad \text{其中 } c^\top := (-p_1, -p_2, -p_3, 0, 0)$$

受约束于,

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & 1 & 0 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s_m \\ s_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ L \end{pmatrix} \quad \text{和 } x \geq 0.$$

这是一个线性规划问题的标准等式形式。

### 3.2.2.5 线性规划的对偶性

有关线性规划的一个最重要的事实是,强对偶性总是成立的。让我们陈述一下关键结论。  
对应于线性规划问题标准等式形式(3.12)的**对偶问题(dual problem)**是:

$$D = \max_{\theta \in \mathbb{R}^m} b^\top \theta \quad \text{s.t.} \quad A^\top \theta \leq c. \quad (3.13)$$

读者如果阅读过附录中的 §6.1.7, 就能看到这个表达式的由来。特别是, 通过附录中的式(6.18), 对应于标准等式形式的对偶问题, 线性规划 (3.12)可以写为:

$$D = \max_{\theta \in \mathbb{R}^m} \min_{x \in E} L(x, \theta), \quad \text{其中 } L(x, \theta) := c^\top x + \theta^\top (b - Ax) \quad (3.14)$$

且  $E = \mathbb{R}_+^n$ 。(我们也可以通过一个乘数来处理不等式  $x \geq 0$ , 但这是不必要的)。现在观察:

$$\min_{x \in E} L(x, \theta) = b^\top \theta + \min_{x \geq 0} x^\top (c - A^\top \theta) = \begin{cases} b^\top \theta & \text{如果 } A^\top \theta \leq c \\ -\infty & \text{否则} \end{cases}$$

由于对偶问题是在  $\theta \in \mathbb{R}^n$  上使这个表达式最大化, 我们可以立即看到, 违反  $A^\top \theta \leq c$  的  $\theta$  永远不会被选中。因此, 原问题(3.12)的对偶形式是(3.13)。

### 3.2.2.6 强对偶性

如附录 §6.1.7.1 中所示, 不等式  $D \leq P$  总是成立, 其中  $P$  是 (3.12) 中的原值, 这种情形被称为**弱对偶(weak duality)**。如果  $P = D$ , 则称**强对偶(strong duality)**成立。与弱对偶性不同, 强对偶性需要更强的约束条件。

下一个定理指出, 对于线性规划, 只要存在解, 强对偶性就会成立。证明可以通过 Dantzig 的单纯形法或 Farkas 引理得到, 可以参见Bertsimas & Tsitsiklis (1997) 的第四章或Matousek & Gärtner (2007) 的第六章。

**定理 3.2.1** (线性规划的强对偶性). 原问题(3.12) 存在一个有限的最小值  $x^*$ , 当且仅当对偶问题(3.13) 存在一个有限的最大值  $\theta^*$ 。如果这些解存在, 那么  $c^\top x^* = b^\top \theta^*$ 。

线性规划的强对偶性有许多重要作用。其中一些是算法层面的: 对偶性可以用来为线性规划问题设计出有效的求解方法。对经济学家而言, 对偶性的重要性体现在, 它在最优性和竞争均衡之间建立了深刻的联系, 正如我们在下面所要展示的。

### 3.2.2.7 互补松弛

对于线性规划(3.12), 当下式成立时,

$$\theta_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = 0 \quad \forall i \in [m] \quad (3.15)$$

$$x_j^* \left( c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \theta_i^* \right) = 0 \quad \forall j \in [n], \quad (3.16)$$

我们就说,  $x^* \geq 0$  和  $\theta^* \in \mathbb{R}^m$  是满足互补松弛 (complementary slackness) 条件的。虽然可以从 §6.1.7.3 的 KKT 条件中的互补松弛推导出这些表达式, 但更好的方法是将它们与鞍点条件直接联系起来。

为了了解这一点, 假设  $x^* \geq 0$  对于原问题是可行的, 而  $\theta^* \in \mathbb{R}^m$  对对偶问题是可行的。如果  $(x^*, \theta^*)$  是  $L$  的一个鞍点, 那么, 互补松弛条件 (3.15)–(3.16) 必定成立。事实上, 当  $x^*$  是可行解时, 式(3.15)是微不足道的, 因为  $Ax^* = b$ 。同时, 式(3.16)必须为真, 否则意味着,

$$x_j^* \left( c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \theta_i^* \right) > 0, \quad \text{对于某些 } j \in [n],$$

这是因为对偶可行性(即  $A^\top \theta^* \leq c$ )和  $x^* \geq 0$ 。但是, 在这种情形下,  $(x^*, \theta^*)$  并不是  $L$  的鞍点, 这是因为如果将  $x^*$  的第  $j$  个元素改为 0, 则会导致下式拉格朗日值严格下降,

$$L(x, \theta) = c^\top x + \theta^\top (b - Ax) = x^\top (c - A^\top \theta) + \theta^\top b.$$

通过加强这一观点, 可以证明, 对于线性规划, 互补松弛条件是拉格朗日鞍点的充要条件 (necessary and sufficient conditions)。由此可得到下一个定理。

**定理 3.2.2.** 如果  $x^* \geq 0$  对于原问题是可行的, 并且  $\theta^*$  对于对偶问题也是可行的, 则下面的表述是等价的:

- (1)  $x^*$  对于原问题是唯一的, 并且  $\theta^*$  对于对偶问题是唯一的。

(2)  $(x^*, \theta^*)$  服从互补松弛性条件(3.15)-(3.16)。

Bertsimas & Tsitsiklis (1997) 的第四章提供了更多讨论和定理3.2.2的完整证明。下面，我们将说明竞争性经济环境中互补松弛与均衡之间的一些巧妙联系。

### 3.2.2.8 单纯形法

线性规划在高维条件中的应用具有挑战性，部分原因是线性目标函数意味着解不在内部。线性规划的第一个有效求解方法出现在 20 世纪 30 年代和 40 年代，首先是 Kantorovich 和 Dantzig 的单纯形法(simplex method)。随着单纯形法开始证明它的价值，线性规划逐渐成为一种具有巨大实际意义的技术，运筹学、通信和生产系统开始大量使用线性规划。

单纯形法利用了Bertsimas & Tsitsiklis (1997) 中定理 2.7 的结果。

**定理 3.2.3.** 如果线性规划(3.12)有一个最优解，那么它在可行集的极点(*extreme point*)位置上，也存在一个最优解。

(多面体中极点的定义参考 §6.1.5.1，可行集在练习3.2.3中被证明是一个多面体)。

单纯形法利用定理3.2.3，沿着构成可行集的多面体的边缘，从一个极点到另一个极点，每一步都在寻找那些能够严格降低目标函数值的新的极点(该极点与多面体的顶点重合)。详细内容可参见Bertsimas & Tsitsiklis (1997) 和 Matousek & Gärtner (2007)。

## 3.3 最优传输

接下来，我们将讨论跨网络的最优流问题。我们在 §3.2.1中分析的线性分配问题就是一个简单的——在计算上并不复杂的——网络流问题。在该例子中，节点是工人数量或工作数量，边是分配方式，目标是通过最优化选择使总成本最小化。更一般的网络流问题扩展了上述思路，使其允许在更复杂的环境中内生形成网络。这种问题的一般结构是，给定节点，通过选择边和权重来优化某些标准。这些思想在贸易、运输和通信领域显然有天然的应用，而在经济学、金融学、统计学和机器学习中的应用则比较隐晦。

在网络流的研究中，我们从最优传输问题开始，它是一般网络流问题的最重要特例。(事实上，正如我们在 §3.3.4.3中所展示的，存在一种方式，总是可以将一般的网络流问题简化为一个最优传输问题。)

### 3.3.1 Monge-Kantorovich 问题

最优传输 (Optimal transport) 是一个经典问题，可以追溯到 Gaspard Monge (1746-1818) 的工作，他研究了许多其它问题，例如用于建造堡垒的土方运输问题。这个问题听起来很简单，即如何用最小的成本将一堆给定形状的货物运输到另一堆给定形状的货物之中？在归一化之后，这个问题可以转化为一个分布向另一个分布转换的最小成本问题。

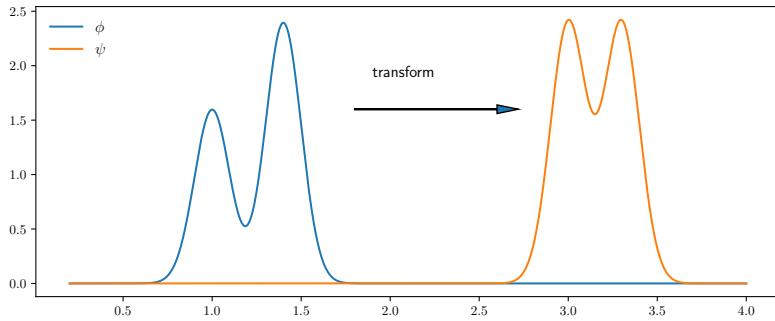

 图 3.10: 将分布  $\phi$  转化为分布  $\psi$ 

图3.10给出了在一个维度上,将一个分布转化为另一个分布的直观图形(尽管未给定成本函数)。

事实证明,通过定义不同的成本概念,该传输问题提供了一个高度灵活的方法来比较两种分布之间的距离,其基本思路是,如果一个分布可以以较低的成本转化为另一个分布,则被视为“接近”(close)。由此产生的距离概念在统计学、机器学习等应用数学的各个分支中都有广泛而重要的应用。<sup>4</sup>

在经济学中,最优传输在运输和贸易网络,以及在匹配问题、计量经济学、金融等方面都有着重要应用(例如,参见 Galichon (2018)),因此,经济学家为最优传输问题做出巨大贡献也就不足为奇了。伟大的俄罗斯数学经济学家 Leonid Kantorovich (1912-1986) 以及荷兰经济学家 Tjalling Koopmans (1910-1985) 完成了深入且基础性的工作,因其在线性规划和最优传输方面的工作,他们共同获得了 1975 年的诺贝尔奖。<sup>5</sup>

我们先从一个简单的数学介绍开始我们的讨论。然后,在 §3.3.3 中,我们将把数学与经济问题联系起来,并展示传输、对偶性、互补松弛以及竞争均衡之间的深层联系。

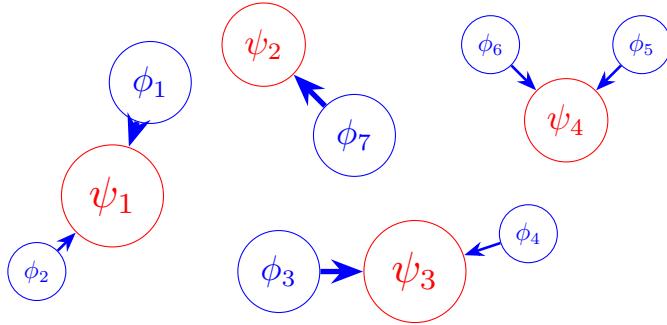
### 3.3.1.1 Monge 方程

我们先从 Monge 的经典问题开始,这很容易解释。我们给定两个有限集合  $X$  和  $Y$ ,与之对应的分布是  $\phi \in \mathcal{D}(X)$  和  $\psi \in \mathcal{D}(Y)$ 。 $X$  和  $Y$  中的元素被称为位置(locations)。为了避免繁琐的附加说明,我们始终假设  $\phi$  和  $\psi$  在其定义域上是严格正数。此外,我们还有一个成本函数  $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,我们的目标是以最小的成本将  $\phi$  传输到  $\psi$ 。即,求解下式:

$$\min_T \sum_x c(x, T(x)), \quad (3.17)$$

<sup>4</sup>例如,在图像处理中,如果通过改变单个像素将一个图像转化为另一个图像的成本很小,则认为这两个图像之间是“接近”的。即使到现在,在图像处理和机器学习的一些分支中,由最优传输方法产生的概率分布集合上的测算是被称为“earth mover’s distance”,以此纪念 Monge 的工作。

<sup>5</sup>最优传输问题继续吸引着许多杰出的数学家和经济学家,最近有两项菲尔兹奖授予最优传输领域的工作。第一项在 2010 年颁发给了 Cedric Villani,第二项在 2018 年授予 Alessio Figalli。请注意,与每年颁发一次的诺贝尔奖不同,菲尔兹奖每四年才颁发一次。

图 3.11: 从  $\phi$  到  $\psi$  的 Monge 映射

遍历集合  $T, T$  表示从  $X$  到  $Y$  的所有映射的集合, 其满足:

$$\sum_x \phi(x) \mathbb{1}\{T(x) = y\} = \psi(y), \quad \forall y \in Y. \quad (3.18)$$

$T$  满足如下约束: 对于每个目标位置  $y$ , 所有映射到  $y$  的概率质量之和等于指定的概率质量  $\psi(y)$ 。符号  $\sum_x$  是  $\sum_{x \in X}$  的缩写。在此约束条件下,  $T$  通常被称为蒙格映射(Monge map)。

练习 3.3.1. 我们要求  $T$  将  $X$  映射到  $Y$  上, 这意味着, 每个  $y \in Y$  都有原像, 此条件已经在式 (3.18) 中暗示了。请解释原因。

上述问题在目前的离散条件下很容易解释。图3.11给出了一个可视化例子, 图中位置列举为  $X = \{x_1, \dots, x_7\}$  和  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ , 其中  $X$  和  $Y$  都是  $\mathbb{R}^2$  的子集。为简单起见,  $\phi(x_i)$  被写成  $\phi_i$ , 同样地,  $\psi(y_j)$  也是如此。节点大小与分配给节点的概率质量成正比。边代表一个可行的 Monge 映射。

约束条件(3.18)的离散性和缺乏凸性意味着, Monge 问题在一般情况下是很难解决的。真正的突破性进展是 Kantorovich 证明了凸性能够极大简化这个问题。虽然凸化过程需要将问题转移到一个更高维度的空间, 但高维度问题的代价可以被凸性和消除离散性所带来的正则化所抵消。我们将在 §3.3.1.3 中研究 Kantorovich 方程。

练习 3.3.2. 最优传输的 Monge 方程所隐含的另一个问题是很容易无解。举一个例子来说明, 在  $X$  和  $Y$  都是有限的情况下, 不存在 Monge 映射。

### 3.3.1.2 将分配问题视为最优传输问题

§3.2.1 研究的线性分配问题(训练工人  $i$  从事工作  $j$ , 花费的成本为  $c(i, j)$ ), 是最优传输的一个特例。我们所要做的就是设定  $X = Y = [n]$ , 并将  $\phi$  和  $\psi$  作为  $[n]$  上的离散均匀分布。

练习 3.3.3. 证明: 在这种情况下, 当且仅当  $T$  是  $[n]$  到其自身的双射时,  $T$  是一个 Monge 映射。

由于  $T$  必须是  $[n]$  上的一个双射, 也是  $[n]$  中元素的一个排列组合, 所以在当前环境下

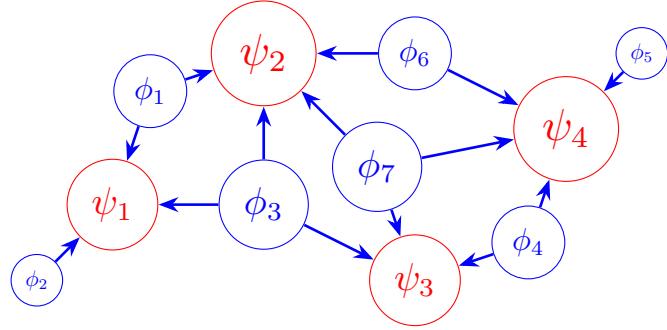


图 3.12: Kantorovich 对 Monge 问题的放松

最优传输问题的目标是：

$$\min_{T \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n c(i, T(i)), \quad (3.19)$$

其中,  $\mathcal{P}$  是  $[n]$  中所有排列组合的集合, 这与式(3.7)中线性分配问题是同一个优化问题。

### 3.3.1.3 Kantorovich 对 Monge 问题的放松

Kantorovich 对 Monge 问题放的基本思想是, 允许位于任意位置的  $x \in X$  的概率质量被映射到  $Y$  中的多个位置, 而不是只有一个。这意味着, 我们不再寻求一个函数  $T$ , 因为根据定义, 一个函数只可以将一个给定的点映射到一个图像。相反, 我们寻求的是一个“传输计划”, 将  $x$  处质量的一定比例  $\pi(x, y)$  传输到  $y$ 。对于所有  $x$  和  $y$ , 该计划受制于以下要求:

1. 到达位置  $y$  的总概率质量等于  $\psi(y)$ , 且
2. 从位置  $x$  发出的总概率质量等于  $\phi(x)$ 。

这些限制条件意味着我们采用了一种“耦合”(coupling)的形式, 我们将在下文对其进行定义。

图3.12给出了离散条件下可行的传输计划。与图3.11一样,  $\phi(x_i)$  被写为  $\phi_i$ , 类似地还有  $\psi(y_j)$ , 节点大小正比于概率质量。与图3.11中 Monge 设定不同的是, 只要遵从约束条件, 每个节点的质量  $\phi_i$  可以共享到多个  $\psi_j$ 。

让我们更仔细地写出这些约束。我们回顾一下, 在概率论中, 耦合表示的是一个具有特定边际分布的联合分布。更确切地说, 给定  $\mathcal{D}(X)$  中的  $\phi$  和  $\mathcal{D}(Y)$  中的  $\psi$ , 关于  $(\phi, \psi)$  的耦合(coupling)指的是  $\mathcal{D}(X \times Y)$  中的元素  $\pi$ , 其边际分布为  $\phi$  和  $\psi$ 。边际分布需满足如下条件:

$$\sum_y \pi(x, y) = \phi(x) \quad \forall x \in X, \quad \text{并且} \quad (3.20)$$

$$\sum_x \pi(x, y) = \psi(y) \quad \forall y \in Y. \quad (3.21)$$

式 (3.20)–(3.21) 要求:

1. 对任意  $x \in \mathbb{X}$ , 流出  $x$  的概率质量总和为  $\phi(x)$ ,
2. 对任意  $y \in \mathbb{Y}$ , 流入  $y$  的概率质量总和为  $\psi(y)$ 。

在目前的设定中,一个耦合也被称为一个**传输计划(transport plan)**。

**练习 3.3.4.** 约束条件(3.20)-(3.21), 定义了  $\phi$  和  $\psi$  的耦合  $\pi$ 。这概括了式(3.18)中的 Monge 约束。为了看清这一点,令映射  $T$  满足式(3.18)中的映射,并在  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  上,令

$$\pi(x, y) = \phi(x)\mathbb{1}\{T(x) = y\}$$

因此,  $\pi$  是将所有质量放在  $T$  的值域上的联合分布。证明:式(3.20)–(3.21)都成立。

令  $\Pi(\phi, \psi)$  是  $\psi$  和  $\phi$  的所有耦合的集合。给定  $\phi, \psi$  和成本函数  $c$ , 一般的**Monge–Kantorovich 问题 (Monge–Kantorovich problem)**, 也叫**最优传输问题 (optimal transport problem)**, 是要解决如下问题,

$$P := \min_{\pi} \langle c, \pi \rangle_F \quad \text{s.t.} \quad \pi \in \Pi(\phi, \psi). \quad (3.22)$$

其中,

$$\langle c, \pi \rangle_F := \sum_x \sum_y c(x, y) \pi(x, y),$$

上式是  $c$  和  $\pi$  的**Frobenius 内积(Frobenius inner product)**, 也被视为  $|\mathbb{X}| \times |\mathbb{Y}|$  矩阵。 $\langle c, \pi \rangle_F$  中的累和度量了在计划  $\pi$  下, 将  $\phi$  传输到  $\psi$  的总成本。成本函数中包含了线性关系, 即若从  $x$  运送到  $y$  的数量增加一倍, 相关成本就会以  $c(x, y)$  的速率等比例增加。

我们称式(3.22)的任意解  $\pi$  为**最优计划(optimal plan)**。由于我们是在一个有限集上求最大化, 因此至少有一个这样的最优计划存在。

**备注 3.3.1.** 如下所示, 式(3.22)有时可以用随机变量来表示。在这种情况下,  $\Pi(\phi, \psi)$  中的一个耦合  $\pi$  被定义为一对随机变量  $(X, Y)$ 。使得,  $X \stackrel{d}{=} \phi$  且  $Y \stackrel{d}{=} \psi$ 。然后我们可以写出:

$$P = \min_{(X, Y)} \mathbb{E} c(X, Y) \quad \text{s.t.} \quad (X, Y) \in \mathcal{D}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) \quad \text{其中 } X \stackrel{d}{=} \phi \text{ 和 } Y \stackrel{d}{=} \psi.$$

**练习 3.3.5.** Kantorovich 松弛的一个最重要的特点是, 对于给定的  $\phi$  和  $\psi$ , 约束集是凸集。为了验证这一点, 我们令  $n = |\mathbb{X}|$  且  $m = |\mathbb{Y}|$ , 将每一个  $x \in \mathbb{X}$  与  $i \in [n]$  关联, 每一个  $y \in \mathbb{Y}$  与  $j \in [m]$  关联,  $c$  和  $\pi$  为  $n \times m$  阶矩阵,  $c_{ij}$  和  $\pi_{ij}$  分别表示矩阵中的元素。矩阵满足如下约束,

$$\pi \mathbb{1}_m = \phi \quad \text{和} \quad \pi^\top \mathbb{1}_n = \psi, \quad (3.23)$$

其中,  $\mathbb{1}_k$  为  $k \times 1$  阶 1 向量。证明: 满足约束条件  $\pi \in \mathbb{M}^{n \times m}$  的集合  $\Pi(\phi, \psi)$  是凸集, 也即,

$$\pi, \hat{\pi} \in \Pi(\phi, \psi) \text{ 和 } \alpha \in [0, 1] \implies \alpha\pi + (1 - \alpha)\hat{\pi} \in \Pi(\phi, \psi)。$$

### 3.3.1.4 将最优传输理解为线性规划问题

通过一些相对简单的操作, 一般的最优传输问题可以被映射成一个标准形式的线性规划。这样做有两个显而易见的好处。第一, 我们可以应用对偶性理论, 从而产生一些重要见解。第二, 在计算方面, 我们可以使用线性规划求解器来计算出最优计划。

为了将最优传输问题转化为线性规划, 我们需要将矩阵转化为向量。我们将使用 vec 算子, 取任意  $A \in \mathbb{M}^{n \times m}$ , 通过对纵向列的堆叠, 将其映射为  $\mathbb{R}^{nm}$  中的一个向量。例如:

$$\text{vec} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}。$$

在这一节中, 我们沿用了练习3.3.5中的符号, 现在可以将最优传输问题的目标函数  $\langle c, \pi \rangle_F$  表示为  $\text{vec}(c)^\top \text{vec}(\pi)$ 。

为了用  $\text{vec}(\pi)$  重写约束条件, 我们引入Kronecker 乘积(Kronecker product), 用  $\otimes$  表示, 其定义见下文。假设  $A$  是  $m \times s$  阶矩阵, 其元素表示为  $(a_{ij})$ ,  $B$  是  $n \times t$  阶矩阵。 $A$  和  $B$  的 Kronecker 乘积  $A \otimes B$  是以分块矩阵形式定义的  $mn \times st$  矩阵, 表示为:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1s}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2s}B \\ \vdots & & & \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{ms}B \end{pmatrix}。$$

可以证明, Kronecker 乘积和 vec 算子有以下关联: 对于符合条件的矩阵  $A$ ,  $B$  和  $M$ , 我们有,

$$\text{vec}(AMB) = (B^\top \otimes A)\text{vec}(M)。 \quad (3.24)$$

使用式(3.24)和  $k \times k$  阶单位矩阵符号  $I_k$ , 我们可以把式(3.23)中的第一个约束改写为:

$$\phi = I_n \pi \mathbb{1}_m = \text{vec}(I_n \pi \mathbb{1}_m) = (\mathbb{1}_m^\top \otimes I_n)\text{vec}(\pi)。 \quad (3.25)$$

**练习 3.3.6.** 证明: 可以将式(3.23)中的第二个约束改写为:

$$\psi = (I_m \otimes \mathbb{1}_n^\top)\text{vec}(\pi)。 \quad (3.26)$$

现在, 使用分块矩阵符号并设定:

$$A := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m^\top \otimes I_n \\ I_m \otimes \mathbb{1}_n^\top \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad b := \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix},$$

然后, 可以将最优传输问题表示为如下的线性规划标准形式,

$$\min_x \text{vec}(c)^\top x \quad \text{在 } x \in \mathbb{R}_+^{nm} \text{ 上, 使得 } Ax = b. \quad (3.27)$$

最后, 对于一个给定的解  $x$ , 传输计划可通过反转  $x = \text{vec}(\pi)$  得到。

### 3.3.1.5 应用

Listing 1是实现上述步骤的一个函数, 给定平面(一维的)数组 `phi` 和 `psi`, 分别代表原始和目标位置的分布, 加上一个二维数组 `c` 代表运输成本。(方法参数`highs-ipm`的含义是, 告诉 `linprog` 使用一个特定的内点方法。详细信息可以在 `linprog` 文档中找到, 单纯形法和其他方法也会得到类似的结果)。

请注意, 在 Listing 1中, 重排序指令为 `F`。这告诉 NumPy 以 Fortran列主序 (column-major) 进行重排序, 这与 §3.3.1.4中描述的 `vec` 算子的定义相吻合。(Python 向量化操作的默认方式是行主序 (row-major), 它代表的意思是连接行而不是堆叠列。相比之下, Julia 默认使用列主序的方式)。

让我们调用这个函数来解决一个非常简单的问题,

$$\phi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

有了这些基础元素, 所有来自  $\phi_1$  和  $\phi_2$  的质量都应该被传输到  $\psi_1$ 。为了实现这个问题, 我们设定,

```
phi = np.array((0.5, 0.5))
psi = np.array((1, 0))
c = np.ones((2, 2))
```

然后通过以下指令调用求解器 `ot_solver`:

```
ot_solver(phi, psi, c)
```

输出结果如预期一样:

```
array([[0.5, 0. ],
       [0.5, 0.]])
```

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog

def ot_solver(phi, psi, c, method='highs-ipm'):
    """
    解决与分布  $\phi$ 、 $\psi$  和成本矩阵  $c$  相关的  $OT$  问题。

    参数
    -----
    phi : 1-D 数组
        在源位置上的分布。
    psi : 1-D 数组
        在目标位置上的分布。
    c : 2-D 数组
        成本矩阵。
    """
    n, m = len(phi), len(psi)

    # 向量化 c
    c_vec = c.reshape((m * n, 1), order='F')

    # 构造 A 和 b
    A1 = np.kron(np.ones((1, m)), np.identity(n))
    A2 = np.kron(np.identity(m), np.ones((1, n)))
    A = np.vstack((A1, A2))
    b = np.hstack((phi, psi))

    # 调用求解器
    res = linprog(c_vec, A_eq=A, b_eq=b, method=method)

    # 反转 vec 运算, 从而获得矩阵形式的求解
    pi = res.x.reshape((n, m), order='F')
    return pi
```

Listing 1: 通过线性规划解决传输问题的工具函数

### 3.3.1.6 Python 最优传输

在 Python 中,上述步骤可以由Flamary *et al.* (2021) 的 Python Optimal Transport 程序包自动实现。对于 §3.3.1.5中的简单问题,我们可以运行:

```
import ot
ot.emd(phi, psi, c) # 通过 emd 求解器使用单纯形法
```

输出结果再次等于:

```
array([[0.5, 0.],
       [0.5, 0.]])
```

图3.13显示了一个用 Python Optimal Transport 包解决最优传输问题的例子。尽管节点数量更多,其解释与图3.12相似。此外,边显示的是最优传输配置,在这个意义上,最优传输计划  $\pi^*$ ,可以视为图的邻接矩阵(该图为非加权图,当  $\pi_{ij}^* > 0$  时,从  $\phi_i$  到  $\psi_j$  就会画出一个箭头)。如前所述,通过将传输问题转换为线性规划,并应用单纯形法求解,我们就可以获得最优传输计划。尽管图中每种类型的节点有 32 个,但该问题在不到一毫秒的时间内就被单纯形法解决了。

### 3.3.1.7 Kantorovich 松弛与线性分配

正如我们在 §3.3.1.2中展示的那样, §3.2.1中研究的线性分配问题是最优传输问题的一个特例,其中  $\phi$  和  $\psi$  是  $[n]$  上的离散均匀分布。此外,正如我们刚刚讨论的,Kantorovich 松弛为使用线性规划创造了条件,由此可以进行快速求解。

在 §3.2.1的讨论中,我们使用了  $n = 40$  这一条件。接下来,我们先用  $n = 4$  来说明这个方法,然后再尝试  $n = 40$ 。成本矩阵  $c(i, j)$  将由一个独立且均匀的随机变量数组随机生成,是唯一的实质性元素。然后与 §3.3.1.6的做法一致,应用 Python Optimal Transport (POT) 库。

步骤如下:

```
import numpy as np
import ot

n = 4
phi = np.ones(n)
psi = np.ones(n)
```

我们打破了  $\phi$  和  $\psi$  之和为 1 的规则。这可以通过使用  $np.ones(n)/n$  而不是  $np.ones(n)$  来轻松解决,但是 POT 库并不关心这点(只要  $np.sum(phi)$  等于

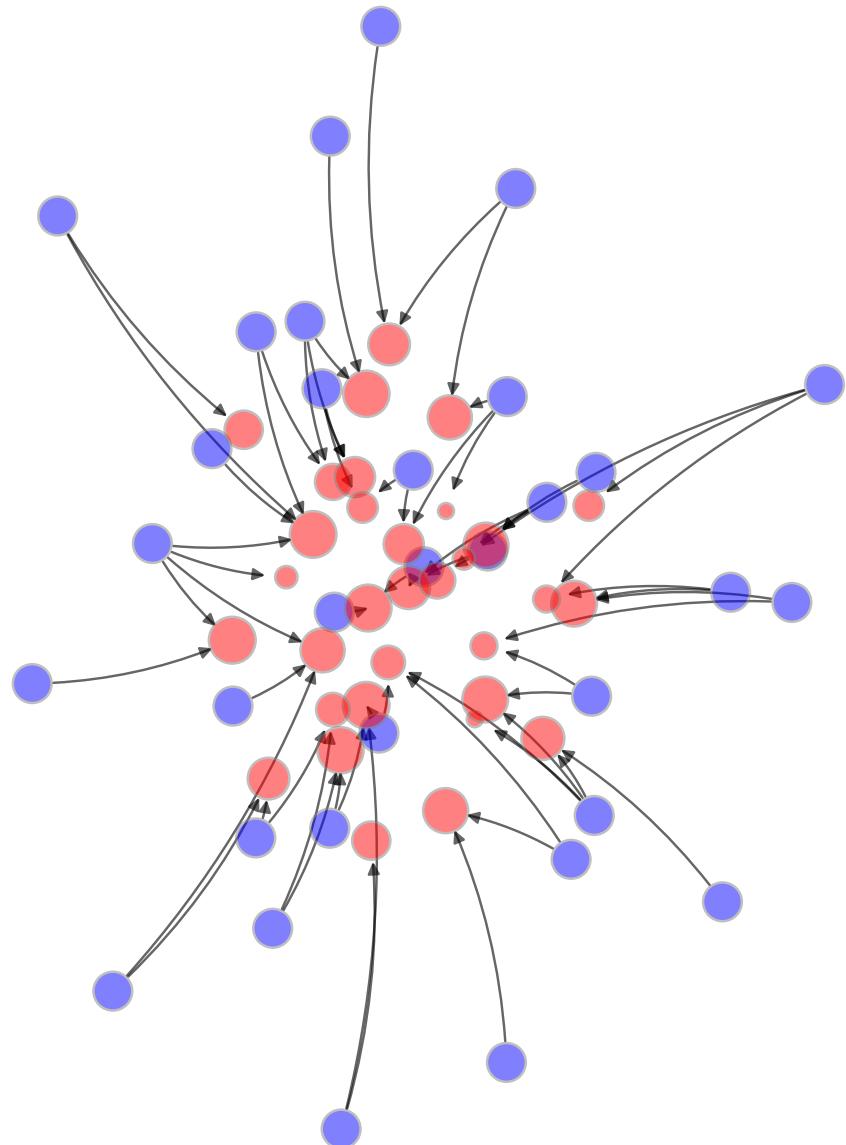


图 3.13: 通过线性规划求解最优传输问题

`np.sum(psi))`。此外，把单位质量放在所有地方的想法是很自然的，因为  $\phi$  中每个元素代表一个工人， $\psi$  中每个元素代表一个工作。

现在我们建立成本矩阵：

```
c = np.random.uniform(size=(n, n))
```

输出如下：

```
array([[0.03841, 0.32896, 0.55989, 0.41682],
       [0.91527, 0.24566, 0.26022, 0.64510],
       [0.96275, 0.44089, 0.79274, 0.93065],
       [0.40454, 0.87307, 0.43555, 0.54903]])
```

(例如，为了工作 2 重新培训工人 1 的成本是 0.32896。) 最后，我们调用求解器：

```
ot.emd(phi, psi, c)
```

输出如下：

```
array([[1., 0., 0., 0.],
       [0., 0., 1., 0.],
       [0., 1., 0., 0.],
       [0., 0., 0., 1.]])
```

这是一个置换矩阵，它提供了另一种方式来表达  $[n]$  中的排列方式。第一行告诉我们，工人 1 被分配到工作 1，第二行告诉我们工人 2 被分配到工作 3，以此类推。

如果我们现在设置  $n = 40$ ，并重新运行代码，`ot.emd(phi, psi, c)` 这一行代码调用基于单纯形法的求解器，在一台中档笔记本电脑上的运行时间不到 1 毫秒。这与我们在 §3.2.1 中得到的  $2.5 \times 10^{30}$  年的暴力求解时间相比，有了显著改进。

### 3.3.1.8 严格松弛

请注意，在使用单纯形法求解线性分配问题时，我们并没有分裂质量，这是 Kantorovich 松弛所允许的。例如，我们不会把一个工人的一半派给一个岗位，剩下的一半又派给另一个岗位。这点很方便，但为什么它能成立呢？

虽然我们省略了细节，但其基本思想如下：一般的 Kantorovich 传输计划是一个双随机矩阵，而所有这样的矩阵都可以表示为置换矩阵的凸组合（这也被称为 Birkhoff 定理）。换句话说，置换矩阵是双随机矩阵的特殊点。此外，定理3.2.3告诉我们，任何线性规划的最优解都有一个极点(extreme point)——在这种情况下，就是一个置换矩阵。

### 3.3.2 Kantorovich 对偶

Kantorovich 最伟大成就之一是证明了最优传输问题可以与对偶问题联系起来, 以及如何用对偶问题描述解决方案, 他的工作预见了后来对偶性理论在线性规划中的发展。

本节在陈述主要结果时, 使用的符号为,

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_x f(x) \phi(x), \quad \text{其中 } f \in \mathbb{R}^X, \phi \in \mathcal{D}(X).$$

当我们把  $f$  和  $\phi$  视为  $\mathbb{R}^{|X|}$  上的向量时, 这只是普通的内积。另外, 给定  $X \times Y$  上的成本函数  $c$ , 令  $\mathcal{F}_c$  为  $\mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^Y$  中所有  $(w, p)$  的集合, 从而有,

$$p(y) \leq c(x, y) + w(x), \quad \text{在 } X \times Y \text{ 上。} \quad (3.28)$$

Kantorovich 对偶理论的部分结果如下。

**定理 3.3.1.** 对所有的  $\phi \in \mathcal{D}(X)$  和  $\psi \in \mathcal{D}(Y)$ , 我们有  $P = D$ , 其中,

$$D := \max_{(w, p)} \{ \langle p, \psi \rangle - \langle w, \phi \rangle \} \quad \text{s.t. } (w, p) \in \mathcal{F}_c. \quad (3.29)$$

我们现在可以将定理3.3.1 理解为一般结果的一个特例, 即我们在定理3.2.1中讨论过的, 线性规划的强对偶性成立。本着这一想法, 我们可以使用 §3.3.1.4中提供的最优传输问题的线性规划公式, 用定理3.2.1来验证定理3.3.1。

为此, 我们使用(3.27)中的公式, 并应用(3.13)中的对偶公式得到,

$$D = \max_{\theta \in \mathbb{R}^{n+m}} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}^\top \theta \quad \text{s.t. } \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m^\top \otimes I_n \\ I_m \otimes \mathbb{1}_n^\top \end{pmatrix}^\top \theta \leq \text{vec}(c).$$

如果我们把参数  $\theta \in \mathbb{R}^{n+m}$  写成  $(-w, p)$ , 那么我们现在在  $-w \in \mathbb{R}^n$  和  $p \in \mathbb{R}^m$  这两部分上进行最大化计算, 同时转置约束条件, 可以得到,

$$\max_{w, p} \{ p^\top \psi - w^\top \phi \} \quad \text{s.t. } p^\top (I_m \otimes \mathbb{1}_n^\top) - w^\top (\mathbb{1}_m^\top \otimes I_n) \leq \text{vec}(c)^\top,$$

其中,  $w \in \mathbb{R}^n$  和  $p \in \mathbb{R}^m$ 。使用 Kronecker 内积的定义并仔细写出各个项, 可以证明, 此表达式中的约束等价于在所有  $(i, j) \in [n] \times [m]$  上, 满足  $p_j - w_i \leq c_{ij}$ 。回顾一下,  $X$  已经被映射到  $[n]$ ,  $Y$  被映射到  $[m]$ , 这与式(3.28)的约束完全相同。

在这一点上, 很明显, 式(3.29) 只不过是由最优传输问题形成的线性规划的对偶问题。定理3.3.1直接来自于线性规划的强对偶(定理3.2.1)。

练习 3.3.7. 证明:

$$\langle c, \pi \rangle \geq \langle p, \psi \rangle - \langle w, \phi \rangle \quad \text{只要 } \pi \in \Pi(\phi, \psi) \text{ 和 } (w, p) \in \mathcal{F}_c. \quad (3.30)$$

利用这一事实可以直接证明弱对偶性在最优传输问题中是成立的, 即  $D \leq P$ 。(这里  $P$  是在原问题 (3.22) 中定义的,  $D$  是在对偶问题(3.29)中定义的。)

### 3.3.3 最优传输和竞争性均衡

Kantorovich 在最优传输的对偶理论方面的另一个主要成就是, 将传输计划的最优性与对偶问题中函数  $w, p$  的存在性联系起来, 从而使得互补松弛条件成立。在这里, 我们不以原来的直接表述方式来呈现这个结果, 而是通过竞争均衡问题的视角, 这样做可以帮助我们在价格、分散均衡和有效分配之间建立一些更深刻的认识。

#### 3.3.3.1 顾问的问题

我们设想以下情况。铁是在有限的地点集合(用  $X$  表示)中开采的。我们用点  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  来表示一个元素  $x \in X$ , 该点可以理解为地图上所讨论的矿场的位置。按照女王的意愿, 为了保护帝国不受贪婪对手的侵害, 这些铁被铁匠们锻造为剑。这个国家有许多才华横溢的铁匠, 他们的位置在  $Y$ 。与  $X$  相对应, 每个  $y \in Y$  也表示  $\mathbb{R}^2$  中的一个点。因此, 下文中我们的表述为“矿场  $x$ ”, 而不是“矿场在  $x$ ”, 以此类推。

每个月, 矿场  $x$  生产  $\phi(x)$  盎司的铁矿石, 而铁匠  $y$  消耗的铁矿石为  $\psi(y)$  盎司, 我们将这些数量视为固定的。假设总供给等于总需求, 因此  $\sum_x \phi(x) = \sum_y \psi(y)$ 。为方便起见, 我们对其做归一化处理。因此,  $\phi$  和  $\psi$  分别是  $\mathcal{D}(X)$  和  $\mathcal{D}(Y)$  中的元素。

从  $x$  到  $y$  的运输成本是已知的, 用每盎司  $c(x, y)$  表示。国王首席顾问的任务是, 将铁矿石分配和运输到铁匠那里, 使每个铁匠  $y$  以最低的成本获得他们想要的铁矿石数量  $\psi(y)$ 。只要稍加思考, 你就会知道, 顾问面对的问题就是一种最优传输问题(3.22), 我们在下文中称其为原问题(primal problem)。

在 Kantorovich、Dantzig 和电子计算机出现之前的时代, 顾问雇用了一个庞大的会计团队, 指示他们通过尝试不同的组合, 来找到成本最低的分配方式。然而, 几天后她意识到这项任务是徒劳的。(由于与我们的数学模型对应的是无限可分性, 因而分配方式也是无限的。如果我们用一个有限近似来代替无限可分性, 只需要适量的矿场和铁匠, 那么它的计算规模可以很容易地达到 §3.2.1 中讨论的匹配问题的规模。)

#### 3.3.3.2 公会的问题

这时, 顾问有了另一个想法。有一个由旅行推销员组成的行会, 他们在在一个镇上购买商品, 并在另一个镇上出售这些商品。她找到这个工会的会长并要求他按照以下方式竞标该项

目：该工会将向女王的国库支付每盎司  $w(x)$ ，购买矿场  $x$  的铁矿石；然后，他们将以每盎司  $p(y)$  的价格将铁矿石卖给女王在铁匠处  $y$  的代表。只要向所有铁匠提供他们所需的铁矿石数量，差价可以被公会收入囊中。顾问要求公会会长给出价格函数  $w$  和  $p$ 。

公会会长一眼就看出，对每一个  $x$  和  $y$ ,  $p$  和  $w$  必须满足  $p(y) - w(x) \leq c(x, y)$ ，否则顾问也不是傻瓜，他会立即看到，通过自己组织运输可以节省资金。考虑到这一约束，行会会长寻求总利润最大化，即  $\sum_y p(y)\psi(y) - \sum_x w(x)\phi(x)$ 。此时，你就会发现，行会会长的问题正是定理3.3.1所述的 Kantorovich 对偶问题。

由于顾问已经放弃了她的会计团队，公会会长雇用了他们，并要求他们提出最优的一对价格。会计师们开始工作，尝试满足约束条件的不同价格组合。然而，由于没有系统的方法可循或快速的计算机可使用，他们的进展很慢。顾问开始担心，即将到来的战争会在行会会长答复之前结束。

### 3.3.3.3 去中心化均衡

在这一点上，顾问想到了另一种方法：将矿场私有化，废除公会，让旅行销售员、矿主和铁匠做出个人选择，以使他们的利益最大化。购买和销售价格以及从每个矿场运往每个铁匠的铁矿石数量，都将由自由市场决定。

虽然这位顾问比 Kantorovich 更早，但她的理由是，竞争会阻止每个推销员牟取暴利，而对利润的渴望会鼓励高水平的运输和最小的浪费。事实证明，在我们现在描述的问题上，这个想法的效果非常好。

为了方便记录，我们将这个市场的竞争性均衡(competitive equilibrium)定义为  $\mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^Y$  上的一对价格向量  $(w, p)$  和数量的集合  $\pi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ 。此时，对所有  $X \times Y$  中的  $(x, y)$ ，满足以下三个条件

$$\sum_{v \in Y} \pi(x, v) = \phi(x) \quad \text{和} \quad \sum_{u \in X} \pi(u, y) = \psi(y) \quad (\text{RE})$$

$$p(y) \leq c(x, y) + w(x) \quad (\text{NA})$$

$$p(y) = c(x, y) + w(x) \quad \text{每当 } \pi(x, y) > 0. \quad (\text{IC})$$

条件 (RE) 是一种资源约束，它建立在没有矿石被浪费的假设中。条件 (NA) 是指没有套利，如果沿着路线  $(x, y)$  违反该条件，那么另一位销售商（我们假设有许多）将能够通过在  $x$  处提供略高的购买价格或在  $y$  处提供略低的销售价格来获得业务而不遭受损失。最后，条件 (IC) 是一种激励约束，即只要一条路线处于活跃状态（其含义是运输量不为零），价格就可以保证销售商不亏本。

我们并不是说竞争均衡会立即且在每时每刻都成立，然而，如前一段所述，正如顾问所做的那样，我们推断竞争均衡具有自然的稳定性。因此，我们预测这是分散贸易的可能结果，前

前提是私有产权得到执行(例如,路线上不存在匪徒),并且非竞争行为被阻止(例如,矿主的勾结行为会受到适当的痛苦惩罚)。

给定  $c, \phi$  和  $\psi$ ,我们可以陈述以下关键定理,即任何竞争性均衡都同时解决了顾问的数量问题和公会会长的价格问题。

**定理 3.3.2.** 如果价格  $(w, p)$  和  $\pi \in \mathbb{M}^{n \times m}$  形成一个竞争性均衡,那么

- (1)  $\pi$  是一个最优传输计划,解决了原问题 (3.22),并且
- (2)  $(w, p)$  解决了 Kantorovich 对偶问题(3.29)。

我们将使用下一个练习的结果来证明这个定理。

**练习 3.3.8.** 令  $A$  和  $B$  为非空集。令  $f$  和  $g$  为  $A$  和  $B$  上的实值,使得对所有  $(a, b) \in A \times B$  有  $f(a) \geq g(b)$ ,并且  $\min_{a \in A} f(a) = \max_{b \in B} g(b)$ 。证明:如果存在  $\bar{a} \in A$  和  $\bar{b} \in B$ ,使得  $f(\bar{a}) = g(\bar{b})$ ,那么  $\bar{a}$  是  $f$  在  $A$  上的一个最小值解, $\bar{b}$  是  $g$  在  $B$  上的一个最大值解。

我们将按以下方式使用练习3.3.8。令  $A = \Pi(\phi, \psi)$  和  $B = \mathcal{F}_c$ ,  $f$  为原始值,  $g$  为对偶值。通过式 (3.30),顺序关系  $f(\pi) \geq g(w, p)$  对所有可行的  $\pi \in A$  和  $(w, p) \in B$  的组合都成立。根据强对偶性,我们仍有  $\min_{\pi \in A} f(\pi) = \max_{(w, p) \in B} g(w, p)$ 。因此,我们只需要证明,当  $(w, p)$  和  $\pi$  构成竞争性均衡时,  $f(\pi) = g(w, p)$  成立。

**定理3.3.2的证明.** 假设  $(w, p)$  和  $\pi$  构成一个竞争性均衡。根据(RE),我们知道  $\pi$  对于原问题是可行的。根据(NA),我们知道  $(w, p)$  对于对偶问题是可行的。由于(IC)条件中的等式在  $\pi(x, y) > 0$  时成立,我们通过将这个等式的两边都乘以  $\pi(x, y)$ ,然后在所有  $x, y$  上求和,得到,

$$\sum_{x,y} c(x, y)\pi(x, y) = \sum_y p(y)\psi(y) - \sum_x w(x)\psi(x). \quad (3.31)$$

应用练习3.3.8的结果,因此  $\pi$  在原问题中达到最小值,而  $(w, p)$  在对偶问题中达到最大值。  $\square$

我们还可以得到如下的逆命题:

**定理 3.3.3.** 如果  $\pi$  是一个最优传输计划,那么存在一对  $(w, p) \in \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^Y$ ,能够使  $\pi$  所决定的数量和  $(w, p)$  中的价格形成一个竞争性均衡。

证明. 令  $\pi$  是一个最优计划。要成为最优计划, $\pi$  必须是可行的,因此  $\pi \in \Pi(\phi, \psi)$ ,这意味着 (RE) 成立。

根据 Kantorovich 对偶性定理(定理3.3.1),我们可以得到  $(w, p) \in \mathcal{F}_c$ ,这样式(3.31)成立。因为  $(w, p) \in \mathcal{F}_c$ (NA) 成立,根据 (NA),对于所有  $x, y$ ,有  $c(x, y) + w(x) - p(y) \geq 0$  成立。结合上述结论和式(3.31),我们得到 (IC) 一定是有效的。因此我们得出结论,  $\pi$  和  $(w, p)$  形成一个竞争性均衡。  $\square$

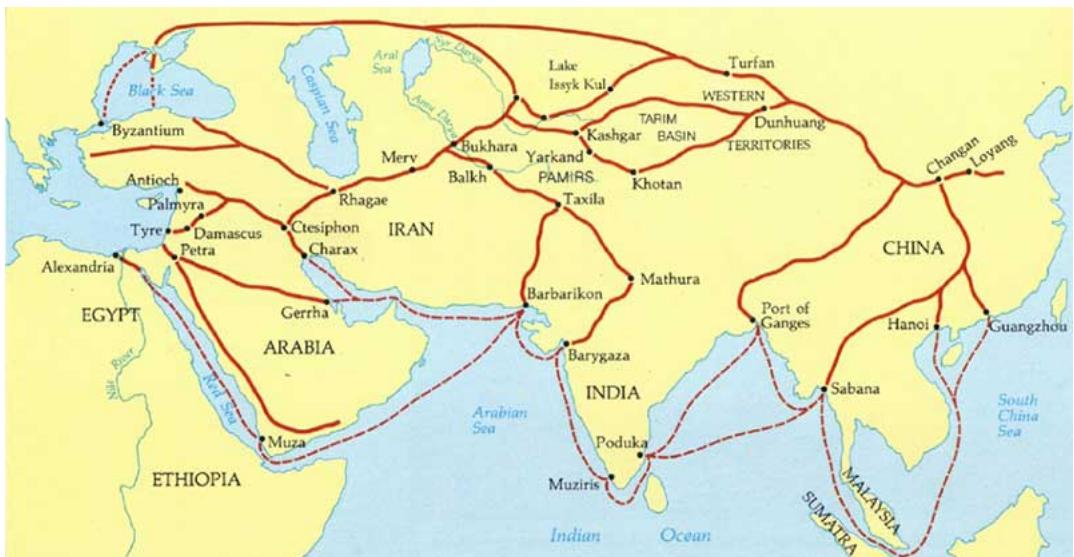


图 3.14: 丝绸之路

### 3.3.4 一般流问题

我们现在描述一个一般性的网络流问题，可应用到国际贸易、通信和分配等各个领域。这个一般问题的特例就是最优传输问题。

当我们介绍了这个问题时，我们会展示两个结果。首先，这个问题可以很容易地表述为一个线性规划，并使用标准的线性规划方法来求解。其次，即使最优传输是一般流问题的严格子集，每个一般流问题都可以使用最优传输和最短路径方法的组合来求解。

#### 3.3.4.1 问题描述

我们对有  $n$  个节点的网络上的商品或服务流感兴趣。这个网络可以理解为一个加权有向图  $(V, E, c)$ 。为了简化符号，我们将节点从 1 到  $n$  进行标记，并使  $V = [n]$ 。存在一条权重为  $c(i, j)$  的边  $e = (i, j) \in E$ ，表示货物可以以  $c(i, j)$  的成本从  $i$  运到  $j$ 。回顾 §1.4.1,  $\mathcal{I}(i)$  是节点  $i$  的直接前趋节点的集合（对于所有  $u \in V$ ，都有  $(u, i) \in E$ ）， $\mathcal{O}(i)$  是直接后继节点的集合（对于所有  $j \in V$ ，都有  $(i, j) \in E$ ）。

一个典型的例子是古代著名的丝绸之路，其中一部分如图3.14所示。丝绸在洛阳（Loyang）和长安（Changan）等东部城市生产，然后向西运输以满足罗马（Rome）、君士坦丁堡（Constantinople）和亚历山大（Alexandria）的最终需求，而像叶尔羌（Yarkand）这样的城镇则成为贸易枢纽。贸易商通常不会在整个路线上行走，而是在他们熟悉其语言和习俗的一对枢纽之间来回穿梭。<sup>6</sup>

回到模型中，我们允许在每个节点上都有商品的初始供给 (initial supply) 和最终需求 (final demand)（尽管其中一个或两个可能是零）。令  $s(i)$  和  $d(i)$  分别为节点  $i$  的供给和需

<sup>6</sup> 我们用丝绸之路作为网络流问题的一个例子并不是原创的。Galichon (2018) 在最优传输的背景下提供了一个高度可读的处理方法。

求,假设网络上的总供给和总需求相等,因此有:

$$\sum_{i \in V} s(i) = \sum_{i \in V} d(i). \quad (3.32)$$

这可以理解为一种均衡条件:价格已经调整到初始供给和最终需求在总量上相等。我们自始至终假定向量  $s$  和  $d$  是非负的,且至少有一个正元素。

对于所有的  $i, j \in V$ ,令  $q(i, j)$  表示为从节点  $i$  运到节点  $j$  的货物数量。最小成本网络流问题就是最小化总运输成本(total shipping cost),即

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c(i, j) q(i, j), \quad (3.33)$$

约束条件为  $q \geq 0$ ,以及

$$s(i) + \sum_{v \in \mathcal{S}(i)} q(v, i) = d(i) + \sum_{j \in \mathcal{O}(i)} q(i, j), \quad \forall i \in V. \quad (3.34)$$

式(3.34)左边代表的是对节点  $i$  的总供给量(初始供给加上来自其他节点的流入),等式右边则代表的是总需求(最终需求加上流向其他节点的流出)。

**练习 3.3.9.** 虽然我们把它们分开介绍,但逐个节点的约束(3.34)意味着加总约束(3.32)。解释一下为什么会这样。

### 3.3.4.2 最优化

有几种方法可以将网络流问题转化为一个线性规划问题。遵循Bertsimas & Tsitsiklis (1997) 的介绍,我们把  $m = |E|$  看作边的总数,并将它们(以任何方便的方式)列举为  $e_1, \dots, e_m$ 。对于某些  $j \in [n]$ ,如果  $e_k = (i, j)$ ,则假设  $e_k$  离开(leaves)了节点  $i$ 。同样的,对于  $\ell \in [n]$ ,如果  $e_k = (\ell, i)$ ,则假设  $e_k$  进入(enters)了节点  $i$ 。然后,我们定义  $n \times m$  维节点-边的关联矩阵(node-edge incidence matrix)  $A$  为:

$$A = (a_{ik}), \quad \text{其中 } a_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{如果 } e_k \text{ 离开 } i \\ -1 & \text{如果 } e_k \text{ 进入 } i \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

**示例 3.3.1.** 考虑图3.15中非常简单的最小成本流问题。装运成本  $c(i, j)$  列在每条现有边的旁边,节点 1 的初始供应量为 10,其他节点为 0,最终需求在节点 4 为 10,其他节点为 0。我们将边列举为,

$$E = \{e_1, \dots, e_4\} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}. \quad (3.35)$$

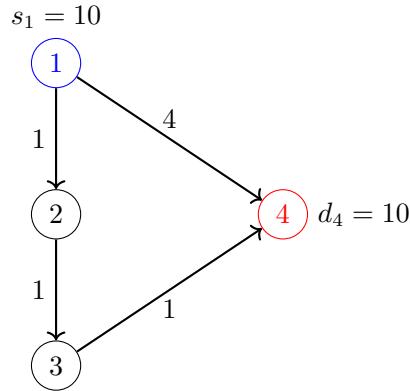


图 3.15: 一个简单的网络流问题

节点-边的关联矩阵为,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

现在,回到一般情况,我们将  $q$  和  $c$  重新排列为  $m \times 1$  的向量  $(q_k)$  和  $(c_k)$ , 其中  $q_k$  是沿边  $k$  运输的数量,  $c_k$  是成本。例如, 如果  $e_k = (i, j)$ , 那么  $q_k = q(i, j)$ ,  $c_k = c(i, j)$ 。此外, 我们将  $b$  设定为  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 其第  $i$  个元素为  $s(i) - d(i)$ , 它是节点  $i$  的净外生供给。

**练习 3.3.10.** 沿用此设定, 在示例3.3.1的特殊情形下, 证明: 式(3.34)与  $Aq = b$  等价。

**练习 3.3.11.** 令  $(Aq)(i)$  为  $Aq$  的第  $i$  行, 证明:

$$(Aq)(i) = \sum_{j \in \mathcal{O}(i)} q(i, j) - \sum_{v \in \mathcal{I}(i)} q(v, i). \quad (3.36)$$

式(3.36) 告诉我们,  $Aq$  的第  $i$  行给出了在传输计划  $q$  之下节点  $i$  的净流出。现在, 使用符号  $\langle c, q \rangle := \sum_{k=1}^m c_k q_k$ , 最小成本网络流问题现在可以表示为:

$$\min \langle c, q \rangle \quad \text{s.t.} \quad q \geq 0 \quad \text{和} \quad Aq = b. \quad (3.37)$$

这是一个标准等式形式的线性规划, 我们可以应用任意线性规划求解器。对于示例3.3.1, 我们运行以下程序:

```
A = (( 1,  1,  0,  0),
      (-1,  0,  1,  0),
      ( 0,  0, -1,  1),
      ( 0, -1,  0, -1))
```

```

b = (10, 0, 0, -10)
c = (1, 4, 1, 1)

result = linprog(c, A_eq=A, b_eq=b, method='highs-ipm')
print(result.x)

```

输出是 [10. 0. 10. 10.]。回顾式(3.35)中路径的顺序,与我们直觉得到的结果一样,最优传输计划为  $q(1,4) = 0$  和  $q(1,2) = q(2,3) = q(3,4) = 10$ 。

**练习 3.3.12.** 一些网络流问题有容量约束 (capacity constraints), 这可以使用映射  $g: E \rightarrow [0, \infty]$  以及限制条件  $q(e) \leq g(e)$  ( $\forall e \in E$ ) 来建模 (如果  $g(e) = +\infty$ , 则在边  $e$  上不存在运输能力的约束)。将其建模为一个线性规划问题, 并修改上面解决示例3.3.1的代码, 在其中添加  $g(1,2) = 5$  的容量约束。求解最优方案。

**练习 3.3.13.** 解释 §3.3.1中处理的一般最优传输问题, 是如何成为最小成本网络流问题的一个特例的。

### 3.3.4.3 回归最优传输

在练习3.3.13中, 我们看到每个最优传输问题都是一种特殊的最小成本网络流问题。从某种意义上说, 反之亦然。特别是, 我们可以使用最优传输方法来解决任何网络流问题, 但前提是首先通过应用最短路径来修改网络流问题。

为了解释这一点, 我们讨论 §3.3.4.1中描述的抽象网络流问题, 设有加权有向图  $(V, E, c)$ ,  $V = [n]$ , 初始供应向量为  $s \in \mathbb{R}_+^n$ , 最终需求向量为  $d \in \mathbb{R}_+^n$ 。就本节而言, 我们将满足  $s(i) - d(i) > 0$  的节点  $i$  称为纯供应商 (net supplier), 将满足  $d(i) - s(i) > 0$  的节点  $i$  称为纯消费者 (net consumer), 将满足  $s(i) = d(i)$  的节点称为贸易枢纽 (trading stations)。

**示例 3.3.2.** 在图3.16的左边, 节点 1 和 2 是纯供应商, 3 是贸易枢纽, 4 和 5 是纯消费者。

**示例 3.3.3.** 在丝绸之路的应用中, 罗马是一个纯消费者, 即最终需求量巨大且为正, 而初始供应量为零。像叶尔羌这样的城市可能应该被建模为一个贸易枢纽, 也即  $s(i) = d(i) = 0$ 。

回归最优传输背后的逻辑是, 将网络供应商节点视为源位置, 将网络消费者节点视为最优传输问题中的目标位置。下一步是计算从每个网络供应商  $i$  到每个纯消费者  $j$  的最短路径 (如果有多个, 则选择任意一条), 令  $\rho(i, j)$  表示这条路径, 表示为  $E$  中的一系列边。遍历  $\rho(i, j)$  的成本是,

$$\hat{c}(i, j) := \sum_{k=1}^m c_k \mathbb{1}\{e_k \in \rho(i, j)\}.$$

现在, 取消贸易枢纽, 我们用以下符号解决最优传输问题:

- $X$  = 纯供应商的集合,



图 3.16: 将最小成本的最优流动问题回归到最优传输问题

- $\mathbb{Y}$  = 纯消费者的集合,
- $\mathbb{X}$  上有,  $\phi(i) = s(i) - d(i)$ ,
- $\mathbb{Y}$  上有,  $\psi(j) = d(j) - s(j)$ ,
- 成本函数  $\hat{c}(i, j)$  如上定义。<sup>7</sup>

在我们找到最优传输计划  $\pi$  之后, 通过以下设定得到沿任意边  $e_k \in E$  的网络最小成本流  $q_k$ , 即

$$q_k = \sum_{i \in \mathbb{X}} \sum_{j \in \mathbb{Y}} \pi(i, j) \mathbb{1}\{e_k \in \text{从 } i \text{ 到 } j \text{ 的最短路径}\}.$$

**练习 3.3.14.** 回顾我们对  $s$  和  $d$  的假设, 证明,  $\sum_{i \in \mathbb{X}} \phi(i) = \sum_{j \in \mathbb{Y}} \psi(j)$ , 并且这个加总是非零的。

**备注 3.3.2.** 不同于最优传输问题标准公式的要求, 我们没有强加  $\sum_i \phi(i) = \sum_j \psi(j) = 1$ , 但这种归一化条件只是为了阐述方便而使用的, 大多数求解器并不对此作出要求。

图3.16说明了该方法。在计算出最短路径后, 贸易枢纽 3 被取消了。

### 3.4 章节说明

我们对最短路径的处理可以理解为 Bellman-Ford 算法和 Dijkstra 算法的简化版本, 这两种算法经常被用来解决大型最短路径规划问题。我们的方法旨在强调递归求解, 从实际建模(例如, [Lucas & Stokey \(1989\)](#) 或 [Ljungqvist & Sargent \(2018\)](#)) 到生产链 ([Kikuchi et al., 2021](#)), 这些方法对于经济问题分析都很有价值。

如果想更深入地了解线性规划, 我们推荐 [Bertsimas & Tsitsiklis \(1997\)](#) 和 [Matousek & Gärtner \(2007\)](#) 的优秀教材。作为睡前读物的话, [Cook \(2011\)](#) 提供了一些有趣的介绍, 该书介绍了网络问题的一些主要思想和应用, 并回顾了一些计算方法的发展历程。

虽然在 §3.2.1 中, 我们对匹配和分配问题做了一个异想天开的介绍, 但这些问题在现实世界中有很重要的应用。例如, 将肾脏捐赠者分配给接受者, 将母亲分配到产科病房, 将医生

<sup>7</sup> 如果不存在从  $i$  到  $j$  的路径, 那么我们设定  $\hat{c}(i, j) = \infty$ . 这种设定可以在线性规划求解器中通过添加容量约束实现。例如, [Peyré et al. \(2019\)](#) 中的 10.3 节。

分配到医院, 将学生分配到学校, 为送货司机分配订单, 为自动驾驶汽车分配乘客。<sup>8</sup>关于分配、匹配问题和组合优化的简史可参见 [Schrijver \(2005\)](#)。Greinecker & Kah (2021) 则研究了一个在有许多代理人的环境中, 稳定匹配的存在性。

[Villani \(2008\)](#) 和 [Vershik \(2013\)](#) 介绍了关于最优传输问题的历史背景。[Vershik \(2013\)](#) 提到了 Kantorovich 作为在斯大林和赫鲁晓夫时代工作的数学家所面临的一些问题, 他关于最优传输的对偶性定理可以被看作是竞争性市场均衡可达到最优传输计划的证明。

在 §3.3.2 中, 我们提到 Kantorovich 的工作预见到了后来线性规划对偶性理论的大部分发展。事实上, 根据 [Vershik \(2013\)](#), Kantorovich 预见到了关于线性规划本身的部分一般理论, 包括提供了一个后来由 Dantzig 重新发现和扩展的单纯形算法。

最优传输的应用范围非常广泛, 遍及经济学、计量经济学、金融学、统计学、人工智能、机器学习等领域。在经济学领域, [Galichon \(2018\)](#) 提供了一个很好的概述。[Fajgelbaum & Schaal \(2020\)](#) 考虑了空间均衡中的最优传输。[Beiglböck et al. \(2022\)](#) 回顾了现代金融理论中的一些重要里程碑, 并探讨了它们之间是如何通过最优传输建立起联系的。[Kolouri et al. \(2017\)](#) 则探究了最优传输与机器学习的关系。

现在, 最优传输计算理论是一个重要的研究领域, [Peyré et al. \(2019\)](#) 对此提供了高质量的阐述, [Blanchet et al. \(2018\)](#) 使用最优传输计算理论解决了平均场博弈论中的 Cournot-Nash 均衡。

---

<sup>8</sup>最后一个问题是关于自动驾驶 (Autonomous Mobility on Demand, AMoD) 领域, 参见 [Ascenzi & Palanza \(2021\)](#) 或 [Simonetto et al. \(2019\)](#)。

# 第四章 马尔可夫链与网络

随机过程中有一大类理论是以有限集合演化的马尔可夫链为基础的,马尔可夫链在经济学、金融学、运筹学和社会科学等领域的定量建模上都有广泛应用。马尔可夫链用加权有向图进行展示是最容易理解的,其图论性质(例如连通性与周期性)是动态学研究的关键基础。

## 4.1 马尔可夫链有向图

我们先从基本的定义开始,然后进入动态研究。

### 4.1.1 马尔可夫模型

一个有限马尔可夫模型(finite Markov model),其加权有向图为  $\mathcal{M} = (S, E, p)$ ,其中, $S$  是(有限)节点的集合, $E$  是边的集合, $p$  是权重函数,其附加限制为:

$$\sum_{y \in \mathcal{O}(x)} p(x, y) = 1, \quad \forall x \in S. \quad (4.1)$$

第32页的图1.15 提供了这种有向图的一个例子。

有限马尔可夫模型  $\mathcal{M} = (S, E, p)$  的节点集  $S$  也称为模型的**状态空间(state space)**,节点称为**状态(states)**。两种标准的解释是:

- (1)  $S$  代表某个随机元素(状态)的一组可能状态集,权重  $p(x, y)$  代表状态从  $x$  一步转移到  $y$  的概率。
- (2)  $S$  代表大规模样本中一组可能测算值的集合(例如,测量大量横截面样本家庭的每周工作小时数), $p(x, y)$  是单位时间内从状态  $x$  转移到状态  $y$  的代理人所占的比重。

这两种解释关系到我们在后文中的讨论内容。

#### 4.1.1.1 转移矩阵

如果  $\mathcal{M}$  是有限马尔可夫模型,则式(4.1)的约束等价于,与  $\mathcal{M}$  关联的邻接矩阵是随机的(有关定义参见 §1.3.1.3)。用  $\{1, 2, 3\}$  标识  $S = \{\text{poor}, \text{middle}, \text{rich}\}$ ,则此加权有向图的

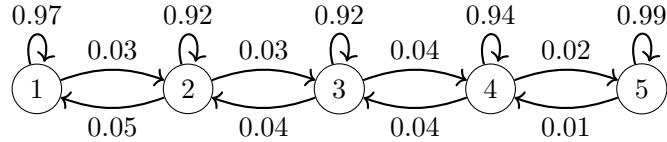


图 4.1: 用国家 GDP 的相对动态变化作的有向图

邻接矩阵为,

$$P_a = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

由于  $P_a \geq 0$  且每行和为 1, 根据定义,  $P_a$  是一个随机矩阵。在有限马尔可夫模型中,  $\mathcal{M}$  的邻接矩阵也称为转移矩阵(transition matrix)。

在符号表示方面, 当  $S$  具有代表性元素  $x, y$  时, 将转移矩阵  $P$  的元素写成  $P(x, y)$  要比  $P_{ij}$  或其他类似形式更方便。我们可以把  $P$  视为将权重函数  $p$  从  $E$  扩展到  $S \times S$  中所有  $(x, y)$  对的集合, 当  $(x, y) \notin E$  时, 赋值为 0。因此, 对于  $(x, y)$  的每个可能选择,  $P(x, y)$  的值代表了从  $x$  到  $y$  的一步转移概率。

现在,  $P$  的随机性要求其可以被重新记为  $P \geq 0$  以及

$$\sum_{y \in S} P(x, y) = 1, \quad \forall x \in S. \quad (4.3)$$

式(4.3)的约束条件只是说状态空间是“完整”的: 在到达  $x \in S$  之后, 状态必须转移到某个  $y \in S$  中。

使用 §1.3.1中的符号,若  $P$  是随机的,就等于要求  $P$  的每一行都在  $\mathcal{D}(S)$  中。

**示例 4.1.1.** Quah (1993) 在研究国际增长动态时, 估计了一个马尔可夫模型。模型中的状态被规定为一个特定国家的实际人均 GDP 相对于世界的平均水平。Quah 将可能值离散地设为  $0-1/4, 1/4-1/2, 1/2-1, 1-2$  和  $2-\infty$ , 并分别将这些状态称为 1 到 5。状态发生变化的时间设定为一年。加权有向图4.1给出了估算的一步转移概率,其中

- $S = \{1, \dots, 5\}$  表示状态空间,
- 边的集合  $E$  由箭头所表示,
- 转移概率用附加在这些边上的权重进行标识。

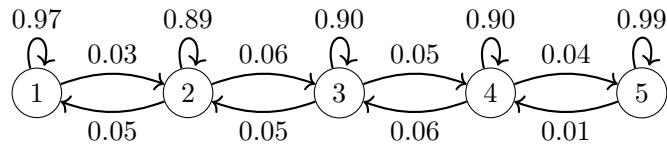


图 4.2: 用国家 GDP 的相对动态变化作的有向图(数据更新后)

示例4.1.1中马尔可夫模型对应的转移矩阵为:

$$P_Q = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.03 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.05 & 0.92 & 0.03 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.04 & 0.92 & 0.04 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.04 & 0.94 & 0.02 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.99 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

请注意,  $P_Q$  主对角线上的值相对较大, 这意味着状态的强持久性: 状态在不同时期保持恒定的概率很高。

Quah (1993) 通过最大似然估计估算了  $P_Q$ , 并汇总了 1960–1984 年间的状态转移情况。(在这种情形下, 最大似然估计相当于记录状态之间转换的相对频率)。图4.2显示了使用世界银行 1985–2019 年的 GDP 数据, 来重复上述估计过程的结果。与先前估计相比, 这些数值相对稳定。下面我们将研究长期预测是如何被影响的。

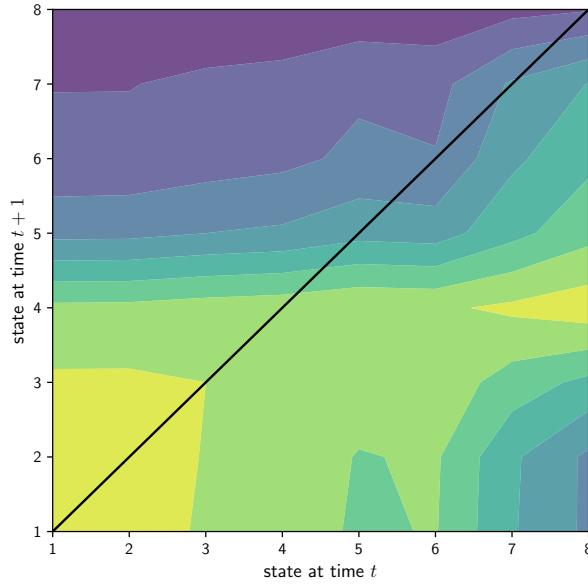
在另一个例子中, Benhabib *et al.* (2019) 估计了下述代际社会流动性的转移矩阵:

$$P_B := \begin{pmatrix} 0.222 & 0.222 & 0.215 & 0.187 & 0.081 & 0.038 & 0.029 & 0.006 \\ 0.221 & 0.22 & 0.215 & 0.188 & 0.082 & 0.039 & 0.029 & 0.006 \\ 0.207 & 0.209 & 0.21 & 0.194 & 0.09 & 0.046 & 0.036 & 0.008 \\ 0.198 & 0.201 & 0.207 & 0.198 & 0.095 & 0.052 & 0.04 & 0.009 \\ 0.175 & 0.178 & 0.197 & 0.207 & 0.11 & 0.067 & 0.054 & 0.012 \\ 0.182 & 0.184 & 0.2 & 0.205 & 0.106 & 0.062 & 0.05 & 0.011 \\ 0.123 & 0.125 & 0.166 & 0.216 & 0.141 & 0.114 & 0.094 & 0.021 \\ 0.084 & 0.084 & 0.142 & 0.228 & 0.17 & 0.143 & 0.121 & 0.028 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

这里, 各种状态表示财富分布的分位数。特别是, 用  $1, 2, \dots, 8$  来表示状态, 其相对应的百分位数分别为:

0–20%, 20–40%, 40–60%, 60–80%, 80–90%, 90–95%, 95–99%, 99–100%。

转移概率是根据美国 2007–2009 年消费者金融调查数据估算的。与状态强持久的矩阵  $P_Q$  对比,  $P_B$  矩阵上主对角线上的权重越小, 意味着代际间的混合越多: 初始条件的影响是相对


 图 4.3: 转移矩阵  $P_B$  的等值线图

短暂的。

如图4.3所示,可以从矩阵  $P_B$  的等值线图中获得有关动态的更多信息。在这里,我们把  $P_B$  逆时针旋转 90 度后绘制成热力图(heat map)。旋转的目的是为了使该矩阵的动态与通常用于理解离散时间动态系统的 45 度图相一致,从状态  $x$  开始的垂直线对应于下一期的条件分布  $P(x, \cdot)$ 。

在这种情况下,我们看到,相对较低的状态是更容易出现的,而家庭处于最高状态往往会长向中间地带回落。

**练习 4.1.1.** 令  $\mathcal{M}$  是具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型。证明:  $U \subset S$  对于有向图  $\mathcal{M}$  来说是吸收集(参见 §1.4.1.3),当且仅当

$$\sum_{y \in U} P(x, y) = 1, \quad \forall x \in U. \quad (4.6)$$

#### 4.1.1.2 马尔可夫链

考虑一个具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型  $\mathcal{M}$ ,与前文一样,  $P(x, y)$  表示从  $x$  转移到  $y$  的一步概率。换句话说,当处于状态  $x$  时,我们通过分布  $P(x, \cdot)$  从  $S$  中选择一个新的状态,从而更新到该状态,由此产生的随机过程称为马尔可夫链。

我们可以更正式地进行如下表述。令  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$  是一个在集合  $S$  中取值的随机变量序列,

如果在  $S$  上存在一个随机矩阵  $P$  能够使得

$$\mathbb{P}\{X_{t+1} = y \mid X_0, X_1, \dots, X_t\} = P(X_t, y), \quad \forall t \geq 0, y \in S, \quad (4.7)$$

则我们说  $(X_t)$  是在  $S$  上的马尔可夫链 (Markov chain)。为了简化术语, 当  $(X_t)$  满足式 (4.7) 时, 我们也称其为  $P$ -Markov。我们将  $X_0$  或分布  $\psi_0$  称为  $(X_t)$  的初始条件 (initial condition), 具体取决于上下文。

马尔可夫链的定义说明了两件事:

- (1) 状态  $X_t$  更新到  $X_{t+1}$  时, 不需要更早的状态信息。
- (2) 给定  $X_t$ , 矩阵  $P$  编码了执行状态更新所需的所有信息。

可以用算法来模拟一种马尔可夫链的生成方式: 令  $P$  为随机矩阵,  $\psi_0$  为  $\mathcal{D}(S)$  的一个元素。现在, 用算法3(Algorithm3)生成  $(X_t)$ , 生成的序列是初始条件为  $\psi_0$  的  $P$ -Markov。

```

设定  $t = 0$ , 从分布  $\psi_0$  中抽样得到  $X_t$ 
while  $t < \infty$  do
    | 从  $P(X_t, \cdot)$  分布中抽样得到  $X_{t+1}$ 
    | 令  $t = t + 1$ 
end
```

**Algorithm 3:** 初始状态为  $\psi_0$  的  $P$ -Markov( $X_t$ ) 生成过程

#### 4.1.1.3 模拟

对于模拟和理论来说, 能够将算法3转化为控制  $(X_t)_{t \geq 0}$  演化的随机差分方程是非常有用的。现在, 我们概述使用逆变换采样 (inverse transform sampling) 的过程 (参见 §1.3.1.2)。为简单起见, 我们假设  $S = [n]$ , 其代表性元素为  $i, j$ 。我们的基本思路是, 对  $P$  的每一行使用逆变换采样方法, 然后在每次更新时通过一个均匀的随机变量来进行样本随机抽样。

为此, 我们设,

$$F(i, u) := \sum_{j=1}^n j \mathbb{1}\{q(i, j - 1) < u \leq q(i, j)\} \quad (i \in S, u \in (0, 1)),$$

其中, 对于每一个  $i, j \in S$ ,  $q(i, j)$  的值都被递归地定义为,

$$q(i, j) := q(i, j - 1) + P(i, j), \quad \text{其中 } q(i, 0) = 0.$$

令  $U(0, 1)$  代表  $(0, 1)$  上的均匀分布, 并取

$$X_{t+1} = F(X_t, U_{t+1}), \quad \text{其中 } (U_t) \stackrel{\text{IID}}{\sim} U(0, 1). \quad (4.8)$$

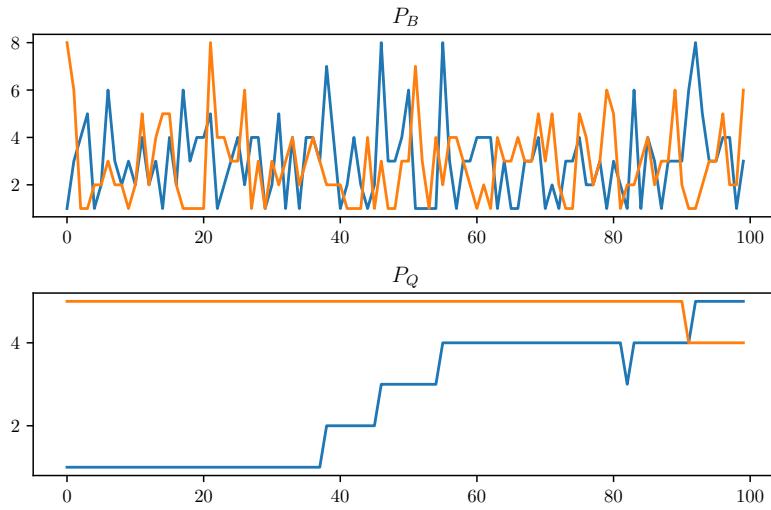


图 4.4: 跨期财富分位数

如果  $X_0$  是一个独立抽样的随机变量, 在  $S$  上的分布为  $\psi_0$ , 那么,  $(X_t)$  就是在  $S$  上的初始条件为  $\psi_0$  的  $P$ -Markov, 正如练习4.1.2所要证明的。

**练习 4.1.2.** 以  $X_t = i$  为条件, 证明: 对于给定的  $j \in S$ ,

- (1)  $X_{t+1} = j$ , 当且仅当  $U_{t+1}$  位于区间  $(q(i, j - 1), q(i, j)]$ ,
- (2) 该事件的概率为  $P(i, j)$ 。

得出结论, 式(4.8)中的  $X_{t+1}$  是来自  $P(i, \cdot)$  中的抽样。

图4.4中的每个子图都展现了两条马尔可夫链, 它们都是由随机差分方程(4.8)生成的。生成的序列来自于各自的独立抽样序列  $(U_t)$ , 上子图  $P_B$  的基础转移矩阵来自于式(4.5), 下子图  $P_Q$  则来自于式(4.4)。在这两个图形中, 一条链从最低点的状态开始, 另一条从最高点的状态开始。请注意, 由  $P_B$  生成的时间序列要比  $P_Q$  生成的时间序列代际混合的更快: 初始状态的差异并不能有力地预测“老化(burn in)”时期后的结果。<sup>1</sup> 我们将在下面讨论混合及其与平稳性的关系。

#### 4.1.1.4 高阶转移矩阵

给定一个具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型  $\mathcal{M}$ , 对于所有的  $k$ , 定义  $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$  为  $P^{k+1} = PP^k$ , 并将单位矩阵界定为  $P^0 = I =$  单位矩阵。换句话说, 对于每个  $k$ , 矩阵  $P^k$  是  $P$  的  $k$  次幂。如果我们逐个元素拼凑出矩阵乘积  $P^{k+1} = PP^k$ , 可以得到,

$$P^{k+1}(x, y) := \sum_z P(x, z)P^k(z, y) \quad (x, y \in S, k \in \mathbb{N}). \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>译者注: 马尔可夫链需要经过多次状态转移才能获得一个较平稳的状态, 此时的采样也比较接近真实分布, 这一过程被称为“burn in”。

练习 4.1.3. 证明:对于所有的  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P^k$  都是  $S$  中的随机矩阵。

在此情形下,  $P^k$  被称为对应于矩阵  $P$  的  $k$  步转移矩阵( $k$ -step transition matrix)。其解释如下:如果  $(X_t)$  是  $P$ -Markov,那么对于任意的  $t, k \in \mathbb{N}$  以及  $x, y \in S$ ,都有,

$$P^k(x, y) = \mathbb{P}\{X_{t+k} = y | X_t = x\}. \quad (4.10)$$

换句话说,  $P^k$  为  $P$ -Markov 链  $(X_t)$  提供了  $k$  步转移概率,也正如其名称所暗示的那样。

这种说法可以通过归纳法来验证。给定  $t \in \mathbb{N}$  和  $x, y \in S$ ,根据定义,当  $k = 1$  时,该说法显然正确。假设在  $k$  步时也正确,现在考虑  $k + 1$  的情况。根据全概率定律,我们有,

$$\mathbb{P}\{X_{t+k+1} = y | X_t = x\} = \sum_z \mathbb{P}\{X_{t+k+1} = y | X_{t+k} = z\} \mathbb{P}\{X_{t+k} = z | X_t = x\}.$$

归纳假设允许我们使用式(4.10),所以上述方程变为,

$$\mathbb{P}\{X_{t+k+1} = y | X_t = x\} = \sum_z P(z, y) P^k(x, z) = P^{k+1}(x, y).$$

归纳法证明结束。

高阶马尔可夫矩阵中有一个常用的恒等式是,

$$P^{j+k}(x, y) = \sum_z P^k(x, z) P^j(z, y) \quad ((x, y) \in S \times S). \quad (4.11)$$

该式对于  $\mathbb{N}$  中任意的  $j, k$  都适用,该式也被称为Chapman–Kolmogorov 方程。请注意,

- 式(4.9) 是式(4.11) 的特殊形式,
- 式(4.11) 是第35页式 (1.27)的特殊形式,只不过换了一种表达形式。

为了给 Chapman–Kolmogorov 方程的有效性提供概率上的直觉,给定  $X_0 = x$  以及  $y \in S$ ,再次使用全概率定律,我们有,

$$\mathbb{P}\{X_{j+k} = y | X_0 = x\} = \sum_z \mathbb{P}\{X_{j+k} = y | X_0 = x, X_k = z\} \mathbb{P}\{X_k = z | X_0 = x\}$$

根据马尔可夫性质式(4.7),未来和过去在给定的当下条件下是独立的,于是有,

$$\sum_z \mathbb{P}\{X_{j+k} = y | X_0 = x, X_k = z\} = \sum_z \mathbb{P}\{X_{j+k} = y | X_k = z\}.$$

依据该事实和式(4.10),上上个等式可以重写为式(4.11)。

### 4.1.2 分布动态

令  $\mathcal{M}$  是具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型, 令  $(X_t)$  为  $P$ -Markov, 并且对于每个  $t \geq 0$ , 将  $\psi_t \in \mathcal{D}(S)$  定义为:

$$\psi_t := \mathbb{P}\{X_t = \cdot\} = X_t \text{ 的分布。}$$

向量  $\psi_t$  被称为  $X_t$  的**边际分布** (marginal distribution)。虽然  $(X_t)$  是随机的, 但序列  $(\psi_t)$  是确定的。本节将研究其动态变化。

#### 4.1.2.1 更新的边际分布

本节的核心思想在于: 连续的边际分布之间存在简单的联系。根据全概率公式, 我们有,

$$\mathbb{P}\{X_{t+1} = y\} = \sum_x \mathbb{P}\{X_{t+1} = y | X_t = x\} \cdot \mathbb{P}\{X_t = x\},$$

该式也可以写作,

$$\psi_{t+1}(y) = \sum_x P(x, y)\psi_t(x) \quad (y \in S). \quad (4.12)$$

这个基础表达式告诉我们, 如何在给定转移矩阵  $P$  的条件下, 更新边际分布。

当每个  $\psi_t$  被解释为一个行向量时, 我们可以将式(4.12)写为,

$$\psi_{t+1} = \psi_t P. \quad (4.13)$$

(此后, 在涉及矩阵代数的表达式中, 除非另有说明, 否则分布均为行向量)。一些作者将式(4.13)称为与  $P$  相关的**前向方程** (forward equation), 而  $\psi \mapsto \psi P$  则被称为**前向算子** (forward operator), 类似于连续时间的 Kolmogorov 前向方程。

将式(4.13)视为分布空间中的差分方程。向后迭代,

$$\psi_t = \psi_{t-1} P = (\psi_{t-2} P) P = \psi_{t-2} P^2 = \cdots = \psi_0 P^t.$$

给定任意  $\psi_0 \in \mathcal{D}(S)$  和  $t \in \mathbb{N}$ , 我们有,

$$\psi_0 P^t = X_t \text{ 的分布, 其中 } X_0 \stackrel{d}{=} \psi_0.$$

**示例 4.1.2.** 作为说明, 我们取Quah (1993) 中使用 1960-1984 年数据估计出的矩阵  $P_Q$ , 并用  $P_Q^t$  来更新 1985 年后的分布, 共更新  $t = 2019 - 1985 = 34$  次, 以获得 2019 年跨国收入分布的预测值。图4.5展示了这一预测与根据世界银行 GDP 数据计算的 2019 年实际分布对比

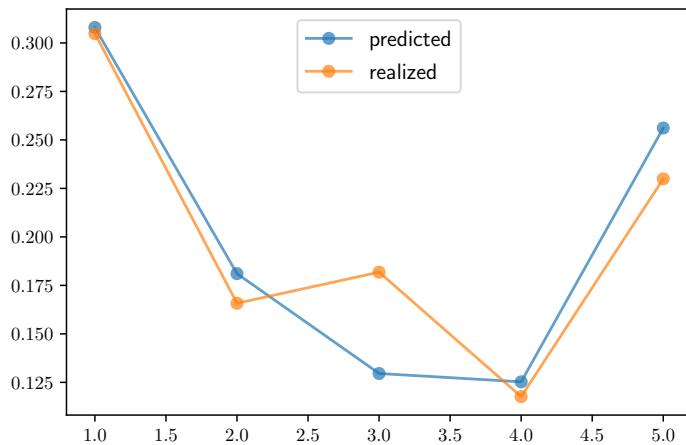


图 4.5: 2019 年预测与实现的跨国收入分布

的情况。<sup>2</sup>

#### 4.1.2.2 长期轨迹

马尔可夫链分析的主要子领域之一是分布序列的渐近性 (asymptotics)，这个主题对网络理论也很重要。在 §4.2.2 中，我们将深入研究渐近性。本节我们先通过模拟建立一些直觉。

图 4.6 显示了当  $S = \{1, 2, 3\}$ ,  $\psi = (0, 0, 1)$  且  $P_a$  为转移矩阵式 (4.2) 时的轨迹  $(\psi P_a^t)$ 。蓝色三角形是  $\mathbb{R}_+^3$  中的单位单纯形，由所有能够使得  $\psi \geq 0$  且  $\psi \mathbf{1} = 1$  的行向量  $\psi \in \mathbb{R}^3$  组成。当  $S = \{1, 2, 3\}$  时，可以用  $\mathcal{D}(S)$  来识别单位单纯形。图中的红点是序列  $(\psi P_a^t)$  在  $t = 0, \dots, 20$  时的分布。图 4.7 显示了  $P_a$  从初始条件  $\psi = (0, 1/2, 1/2)$  开始的分布动态。

似乎这两条序列都在收敛，事实证明也是这样的——图中的黑点是两条序列的极限。此外，如 §1.3.1.3 中定义的，这个点是  $P_a$  的平稳分布。事实上，我们还将进一步证明不存在其他平稳分布，并且无论选择何种  $\psi \in \mathcal{D}(S)$ ,  $\psi P_a^t$  都会收敛到平稳分布。这是由  $P_a$  的某些性质决定的，例如连通性和非周期性。

图 4.8 提供了另一个分布序列的可视化图形，这次是由式 (4.5) 中的矩阵  $P_B$  所生成的，并且初始条件  $\psi_0$  是均匀的。图中所示的不同分布结果是在不同  $t$  值下计算出的  $\psi P_Q^t$ ，各财富阶层的分布似乎会迅速收敛到一个长期极限。下面我们将证实这一点，并且证明该极限与初始条件无关，快速收敛的速度是由动态转换过程中的高度混合所造成的。

<sup>2</sup>示例 4.1.2 旨在说明分布更新的机制。虽然 Quah (1993) 中的方法是发人深省的，但它很难对像跨国收入分布这样复杂的事情做出合理的长期预测。事实上，2019 年预测分布和实际分布之间的 Kullback–Leibler 偏差要大于 1985 年和 2019 年分布之间的 Kullback–Leibler 偏差。显然，一个天真的“什么都不会改变”的估计模型要比 Quah 预测的更好。本文大部分的重点是短期预测情景，在该情境下，系统在适当的转换后大致处于静止状态，而不是难以量化的非平稳变化的长期预测。

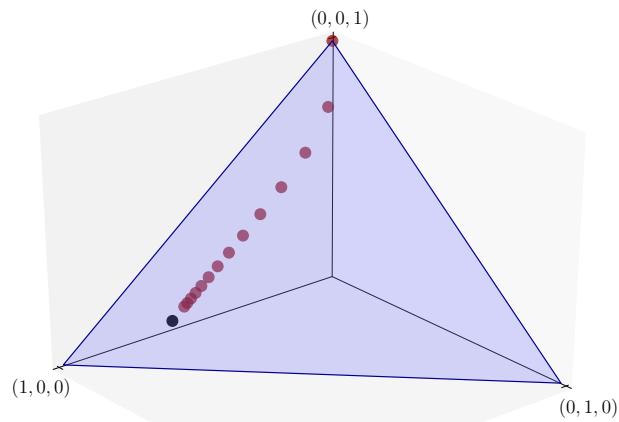


图 4.6: 从  $\psi_0 = (0, 0, 1)$  开始的轨迹

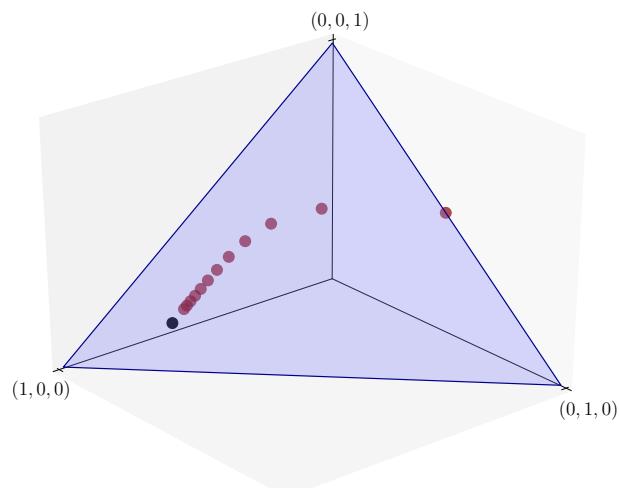
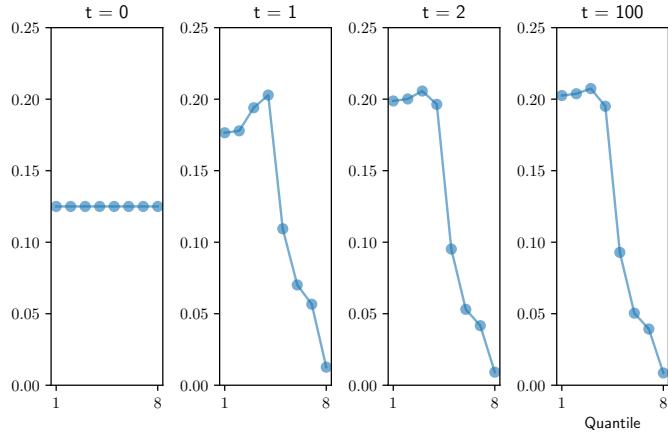


图 4.7: 从  $\psi_0 = (0, 1/2, 1/2)$  开始的轨迹


 图 4.8: 依据  $P_B$  得出的分布预测

### 4.1.3 平稳性

在本节中, 我们将研究平稳分布及其性质。正如我们将看到的, 平稳分布可以被视为边际分布序列演化到一种稳态。(在我们后续研究遍历性时, 平稳分布将获得另一种重要的解释)。

#### 4.1.3.1 平稳分布

回顾一下 §1.3.1.3, 如果  $P$  是一个随机矩阵,  $\psi \in \mathbb{R}_+^n$  是能够满足  $\psi 1 = 1$  以及  $\psi P = \psi$  的一个行向量, 那么就称,  $\psi$  对  $P$  来说是平稳的。所以, 现在令  $\mathcal{M}$  为一个具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型。用马尔可夫链的符号来表述就是, 如果,

$$\psi^*(y) = \sum_{x \in S} P(x, y) \psi^*(x) \quad \forall y \in S,$$

则称分布  $\psi^* \in \mathcal{D}(S)$  对于  $\mathcal{M}$  来说是**平稳 (stationary)** 的。我们也将此表达式写为  $\psi^* = \psi^* P$ , 并将  $\psi^*$  理解为更新分布映射  $\psi \mapsto \psi P$  的不动点(参见式(4.13))。

如果  $X_t \stackrel{d}{=} \psi^*$ , 那么, 对于任意的  $j \in \mathbb{N}$ , 不动点性质意味着  $X_{t+j} \stackrel{d}{=} \psi^* P^j = \psi^*$ 。因此

$$X_t \stackrel{d}{=} \psi^* \implies X_{t+j} \stackrel{d}{=} \psi^*, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

**示例 4.1.3.** 假设工人被雇佣的概率为  $\alpha$ , 被解雇的概率为  $\beta$ , 则工人在失业和就业状态之间的转移矩阵为

$$P_w = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

在 §1.2.3.3 中, 我们证明了,  $\alpha + \beta > 0$  意味着  $\psi = (\beta/(\alpha + \beta), \alpha/(\alpha + \beta))$  是  $P_w$  的左主特征向量(dominant left eigenvector)。由于  $r(P_w) = 1$ , Perron–Frobenius 定理告诉我们,  $\psi$  对

于  $P_w$  是平稳的。其中的含义是，如果两个就业工人的状态分布由  $\psi$  给出，并且状态更新服从于  $\psi$  编码的动态，那么观测到的失业率就不会有进一步变化。

**示例 4.1.4.** 图4.6–4.7中的每个黑点，代表了边际序列的极限，也是第128页式(4.2)中显示的马尔可夫矩阵  $P_a$  的平稳分布。我们将在 §4.1.3.4中讨论它的计算。

**练习 4.1.4.** 令  $\mathcal{M}$  是具有状态空间  $|S| = n$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型，令  $\psi \equiv 1/n$  为  $S$  上的均匀分布。证明：当且仅当  $P$  具有双重随机性(doubly stochastic)（即列加总与行加总都是单位 1）时， $\psi$  对于  $P$  来说是稳态的。

在图4.6–4.7中，所有的轨迹都向平稳分布收敛，但并非所有的平稳分布都具有这种“吸引者”(attractor)的属性，而且一般来说，平稳分布也可以有许多个。下一个例子将说明这一点。

**练习 4.1.5.** 令当且仅当  $x = y$  时， $\mathcal{M} = (S, E, p)$  是具有  $(x, y) \in E$  的有限马尔可夫模型。描述对应的权重函数和相应的转移矩阵，并证明： $\mathcal{D}(S)$  中的每个分布对于  $\mathcal{M}$  都是平稳的。

### 4.1.3.2 存在性和唯一性

根据 Perron-Frobenius 定理，我们很容易得到以下基本结果。

**定理 4.1.1** (平稳分布的存在性和唯一性). 每个有限马尔可夫模型  $\mathcal{M} = (S, E, P)$  在  $\mathcal{D}(S)$  中至少有一个平稳分布  $\psi^*$ 。如果有向图  $(S, E)$  是强连通的，那么  $\psi^*$  在  $S$  上唯一且处处为正。

证明. 令  $\mathcal{M}$  是一个有限马尔可夫模型，由于对应的邻接矩阵  $P$  是随机的，因此存在性可由 §1.3.1.3中的练习1.3.7得到。根据第36页的定理1.4.3， $\mathcal{M}$  的强连通性意味着  $P$  具有不可约性(irreducibility)。当  $P$  不可约时，平稳分布的唯一性和处处为正的性质可由 Perron-Frobenius 定理得出(第13页)。□

定理4.1.1唯一性背后的基本思想如下。假设  $\mathcal{M}$  是强连通的，但在  $\mathcal{D}(S)$  中有两个不同的平稳分布  $\psi^*$  和  $\psi^{**}$ 。由于从状态  $\psi^*$  开始的  $P$ -Markov chain 总是具有边际分布  $\psi^*$ ，同样，对于  $\psi^{**}$  也是如此，也即不同的初始条件会导致不同的长期结果。但是，这通过如下方式违背了强连通性：强连通性意味着两条链都遍历了整个状态空间。此外，作为马尔可夫链，它们一旦到达某一状态，更早的信息就可以被忽略，因此最开始的抽样应该是无关紧要的。

(实际上，最后一段叙述并不完整。初始条件在某种意义上能够决定强连通性下的长期结果：一个“周期性”(periodic) 马尔可夫模型可以遍历整个空间，但只能在特定时间内进行，而这取决于开始的位置。如果我们排除了这种周期性，我们得到的结果甚至比定理4.1.1更强。这一问题将在 §4.2.2中处理。)

### 4.1.3.3 Brouwer's 定理

证明定理4.1.1中存在性的另一种方法是,通过 L. E. J. Brouwer (1881-1966) 提出的著名的不动点定理。

**定理 4.1.2 (Brouwer).** 如果  $C$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个闭凸子集(*convex compact subset*),并且  $G$  是  $C$  上的一个连续自映射,那么, $G$  在  $C$  中至少有一个不动点。

在一维中证明定理4.1.2并不困难,然而在更高维度上的证明是有难度的。例如,参见Aliprantis & Border (1999)。

**练习 4.1.6.** 应用中值定理,证明:在  $C = [0, 1]$  情形下的 Brouwer 不动点定理。

Brouwer 不动点定理的一个优点是其条件相当宽松,其缺点则是它只提供了存在性,无法得出唯一性或平稳性。图6.4提供了一个例子,展示了在该定理的条件下,多个不动点是如何共存的。<sup>3</sup>

**练习 4.1.7.** 应用 Brouwer 不动点定理,证明:定理4.1.1的第一部分(平稳分布的存在)。

### 4.1.3.4 运算

我们来考虑如何计算平稳分布。虽然  $\psi^* P = \psi^*$  是我们希望直接解出  $\psi^*$  的有限线性方程组,但这种想法存在问题。例如,  $\psi^* = 0$  是一个不存在于  $\mathcal{D}(S)$  中的解。

为了将解限制在  $\mathcal{D}(S)$  内,我们进行如下操作:假设  $|S| = n$ ,并注意当且仅当  $\psi(I - P) = 0$  时,行向量  $\psi \in \mathcal{D}(S)$  是平稳的(其中  $I$  是  $n \times n$  的单位矩阵)。令  $\mathbb{1}_n$  为  $1 \times n$  的行向量  $(1, \dots, 1)$ , $\mathbb{1}_{n \times n}$  为  $n \times n$  的 1 矩阵。

**练习 4.1.8.** 考虑一个线性系统,

$$\mathbb{1}_n = \psi(I - P + \mathbb{1}_{n \times n}), \quad (4.15)$$

其中,  $\psi$  是一个行向量。证明:

- (1) 式(4.15)的每个解  $\psi$  都在  $\mathcal{D}(S)$  中,并且
- (2) 当且仅当式(4.15)成立时,  $\psi$  对于  $P$  是平稳的。

在任何情况下,求解线性系统(4.15)都会产生一个平稳分布,而且该平稳分布是唯一的。如果不是这种情况,就会出现问题。

**练习 4.1.9.** 当  $P$  为随机矩阵时,  $(I - P + \mathbb{1}_{n \times n})$  总是非奇异的。对该陈述,给出一个反例。

也有一些图论算法可用于计算任意随机矩阵的平稳分布。(Python 和 Julia 中的 QuantEcon.py 和 QuantEcon.jl 库,有此类算法的应用)。

<sup>3</sup>Brouwer 定理有许多有用的扩展,例如Kakutani (1941) 对集值函数的一个扩展。这些结果在经济学上也有很多应用,例如Nash (1950)。在另一篇论文中,Schauder (1930) 将 Brouwer 的结果扩展到了无限维空间。

## 4.2 漸进理论

在本节中,我们将讨论马尔可夫链的长期性质,例如遍历性。在掌握这些概念后,我们将研究社会网络中的信息演变。

### 4.2.1 遍历性

让我们从遍历性这个迷人且重要的主题开始。理解遍历性最简单的方法是将大数定律从 IID 序列扩展到更一般的环境,其中 IID 性质仅在有限意义上成立。

#### 4.2.1.1 调和函数

令  $\mathcal{M}$  是一个具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型,令  $h \in \mathbb{R}^S$ ,并令

$$Ph(x) := \sum_{y \in S} P(x, y)h(y) \quad (x \in S). \quad (4.16)$$

如果将  $h$  理解为  $\mathbb{R}^{|S|}$  中的一个列向量,那么  $Ph(x)$  就是向量  $Ph$  中位于  $x$  的元素。 $h \mapsto Ph$  的映射有时被称为“条件期望算子”(conditional expectation operator),因此,给定  $P(x, y) = \mathbb{P}\{X_{t+1} = y | X_t = x\}$ ,我们有,

$$\sum_{y \in S} P(x, y)h(y) = \mathbb{E}[h(X_{t+1}) | X_t = x].$$

如果  $Ph = h$  在  $S$  上逐点成立,那么函数  $h \in \mathbb{R}^S$  被称为  $P$ -harmonic。因此,  $P$ -harmonic 函数是条件期望算子  $h \mapsto Ph$  的不动点。

如果  $h$  是  $P$ -harmonic,且  $(X_t)$  是  $P$ -Markov,那么有,

$$\mathbb{E}[h(X_{t+1}) | X_t] = (Ph)(X_t) = h(X_t). \quad (4.17)$$

(具有这种性质的随机过程——即当前值是下一期值的最佳预测值——被称为鞅(martingale)。鞅是概率论、统计学和金融学的基础概念之一)。

**示例 4.2.1.** 令  $\mathcal{M}$  是一个具有状态空间为  $S$ 、转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型。对于  $\mathcal{M}$  来说,如果  $A \subset S$  和  $A^c := S \setminus A$  都是吸收集,那么  $\mathbb{1}_A$  和  $\mathbb{1}_{A^c}$  都是  $P$ -harmonic。为了看到这一点,我们应用练习4.1.1,得到,

$$(P\mathbb{1}_A)(x) = \sum_{y \in S} P(x, y)\mathbb{1}_A(y) = \sum_{y \in A} P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in A \\ 0 & \text{如果 } x \in A^c \end{cases}$$

换句话说, $P\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$ 。通过类似的论证,可以得出  $P\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_{A^c}$ 。

**练习 4.2.1.** 令  $\mathcal{M}$  为一个有限马尔可夫模型, 其状态空间为  $S$ , 转移矩阵为  $P$ 。证明:  $\mathbb{R}^S$  中的每个常值函数(constant function)都是  $P$ -harmonic。

#### 4.2.1.2 定义和应用

令  $\mathcal{M}$  是一个具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型。我们知道  $\mathbb{R}^S$  中的每个常值函数都是  $P$ -harmonic。如果  $\mathbb{R}^S$  中唯一的  $P$ -harmonic 是常值函数, 我们就称  $\mathcal{M}$  具有**遍历性(ergodic)**。

**示例 4.2.2.** 如果对于  $S$  中所有的  $x, y$ , 都有  $P(x, y) = \phi(y)$ , 其中  $\phi$  是  $S$  上的某个固定分布, 那么  $P$  会生成一个 IID 的马尔可夫链, 因为下一期的抽样不依赖于当前状态。任何具有这种特性的邻接矩阵模型  $\mathcal{M}$  都具有遍历性。事实上, 如果  $P$  有这个性质, 并且  $h \in \mathbb{R}^S$  是  $P$ -harmonic, 那么, 对于任意的  $x \in S$ , 我们有,

$$h(x) = (Ph)(x) = \sum_y P(x, y)h(y) = \sum_y \phi(y)h(y)$$

因此,  $h$  为常数。这证明了任何  $P$ -harmonic 方程都是一个常值函数。

**示例 4.2.3.** 一个劳动者要么失业(状态 1), 要么就业(状态 2)。在状态 1 中, 他被雇佣的概率为  $\alpha$ 。在状态 2 中, 他被解雇的概率为  $\beta$ 。相应的马尔可夫模型  $\mathcal{M}$  的状态空间和转移矩阵如下,

$$S = \{1, 2\} \quad \text{且} \quad P_w = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

条件  $P_w h = h$  变为

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(1) \\ h(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(1) \\ h(2) \end{pmatrix}$$

第一行是  $(1 - \alpha)h(1) + \alpha h(2) = h(1)$ , 或  $\alpha h(1) = \alpha h(2)$ 。因此, 只要  $\alpha > 0$ ,  $\mathcal{M}$  就是遍历的。通过类似的论证, 只要  $\beta > 0$ ,  $\mathcal{M}$  就是遍历的。

**示例 4.2.4.** 令  $\mathcal{M}$  是一个有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型。从示例4.2.1中可以看出, 如果  $S$  被分为两个非空的吸收集, 那么  $\mathcal{M}$  就是非遍历的。因此, 图4.9中的贫困陷阱模型不具有遍历性。同样, 在示例4.2.3中讨论的矩阵  $P_w$ , 如果满足  $\alpha = \beta = 0$ , 则  $P_w = I$ , 并且每个状态都是一个不相交的吸收集, 因此遍历性失效。

上面讨论的例子表明, 对于有限马尔可夫模型  $\mathcal{M}$  来说, 遍历性取决于有向图的连通性。下面结果将证实这一点。

**命题 4.2.1.** 如果  $\mathcal{M}$  是强连通的, 那么  $\mathcal{M}$  具有遍历性。

**证明.** 令  $\mathcal{M}$  为一个强连通的马尔可夫模型, 其状态空间为  $S$ , 转移矩阵为  $P$ 。令  $h$  为  $P$ -harmonic,  $x \in S$  是  $h$  在  $S$  上的最大值解, 并令  $m = h(x)$ 。假设在  $S$  中存在一个  $y$ , 使得

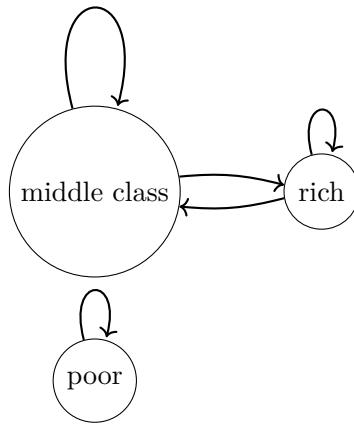


图 4.9: 一个贫困陷阱

$h(y) < m$ 。另一方面,由于  $\mathcal{M}$  是强连通的,我们可以选择一个  $k \in \mathbb{N}$ ,使得  $P^k(x, y) > 0$ 。由于  $h$  是  $P$ -harmonic,我们有  $h = P^k h$ ,因此

$$m = h(x) = \sum_z P^k(x, z)h(z) = P^k(x, y)h(y) + \sum_{z \neq y} P^k(x, z)h(z) < m.$$

这一矛盾表明  $h$  是常数,因此  $\mathcal{M}$  具有遍历性。  $\square$

命题4.2.1只是得到遍历性的其中一种方式,正如下个练习所要说明的。

练习 4.2.2. 举出一个有限马尔可夫模型的例子,使得该模型具有遍历性,但不是强连通的。

#### 4.2.1.3 遍历性的含义

概率论中最重要的结论之一就是大数定律(law of large numbers)(LLN)。在有限状态的设定中,该定理的经典版本指出,

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} h(X_t) = \sum_{x \in S} h(x)\phi(x) \right\} = 1.$$

其中, $(X_t)_{t \geq 0}$  是具有共同分布  $\phi \in \mathcal{D}(S)$  的 IID 随机变量序列,并且  $h$  是  $\mathbb{R}^S$  的一个任意元素。

因为 IID 的假设是强制施加的,因此这个版本的 LLN 是经典的。事实证明,IID 假设可以被削弱,以允许观察值之间有一定程度的依赖性,这也使我们产生疑问:LLN 是否对马尔可夫链也成立?

这个问题的答案是肯定的,但前提是观测值之间的依赖性消失得足够快。一个备选的条件就是遍历性条件。事实上,遍历性是将大数定律扩展到马尔可夫链所需的确切充要条件。

下一个定理给出其中的细节。

**定理 4.2.2.** 令  $\mathcal{M}$  为任意的有限马尔可夫模型, 其状态空间为  $S$ , 转移矩阵为  $P$ 。以下陈述是等价的:

(1)  $\mathcal{M}$  有遍历性。

(2)  $\mathcal{M}$  具有唯一的平稳分布  $\psi^*$ , 且对于任意的  $P$ -马尔可夫链  $(X_t)$  和任意的  $h \in \mathbb{R}^S$ , 有

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} h(X_t) = \sum_{x \in S} h(x) \psi^*(x) \right\} = 1. \quad (4.18)$$

Meyn & Tweedie (2009) 的第 17 章给出了定理4.2.2的证明。我们跳过证明, 通过下面的例子提供一些直观的理解。

**示例 4.2.5.** 回顾一下示例4.2.2中的 IID 情形, 我们证明了  $\mathcal{M}$  是遍历的。根据定理4.2.2, 式(4.18)的收敛性在  $\psi^* = \phi$  的条件下成立。这与 IID 序列下的 LLN 一致。

**示例 4.2.6.** 令  $\mathcal{M}$  是一个  $S = \{1, 2\}$  且  $P = I$  (单位矩阵) 的有限马尔可夫模型, 由  $P$  生成的马尔可夫链是常数。由于每个  $h \in \mathbb{R}^2$  都满足  $Ph = h$ , 可知  $\mathcal{M}$  不具有遍历性。这意味着, 式(4.18)中的 LLN 结果失败。但这正是我们所期望的, 因为一个常数链  $(X_t)$  意味着对于所有  $k$ , 都有  $\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} X_t = X_0$ 。特别是, 如果  $X_0$  是从非退化分布 (nondegenerate distribution) 中抽取的, 那么样本平均数就不会收敛到任何恒定值。

**示例 4.2.7.** 再考虑一下图4.9中的贫困陷阱模型。假设  $h(x)$  为状态  $x$  下的收益,  $h(\text{poor}) = 1$ ,  $h(\text{middle}) = 2$ ,  $h(\text{rich}) = 3$ 。从  $X_0 = \text{poor}$  开始的家庭将永远贫穷, 所以, 对于所有的  $k$ , 都有  $\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} h(X_t) = 1$ 。以  $X_0$  在  $\{\text{middle}, \text{rich}\}$  开始的家庭将永远保持在这个吸收集里, 所以对于所有的  $k$ , 都有  $\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} h(X_t) \geq 2$ 。特别是, 该加总的极限取决于初始条件, 这违背了定理4.2.2中的第 (2) 部分, 即极限独立于  $X_0$  分布。

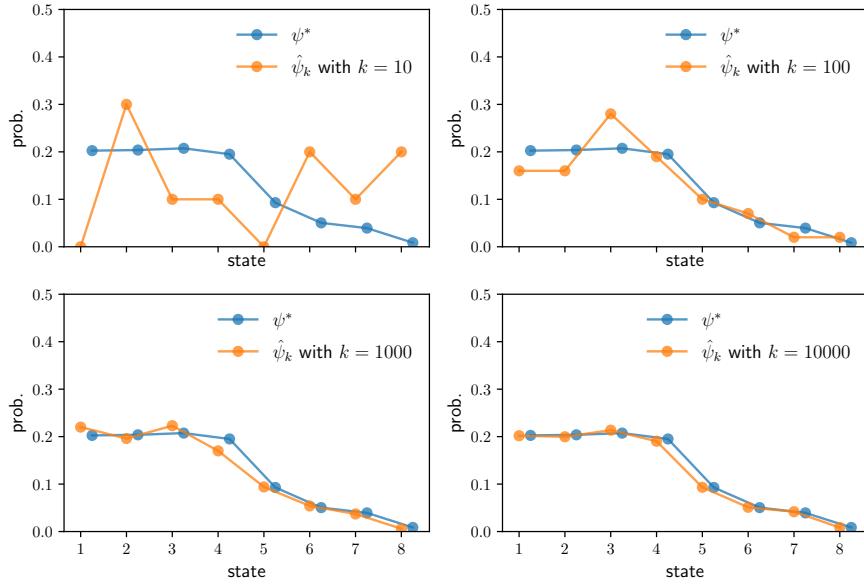
#### 4.2.1.4 重新解释稳态分布

遍历性有许多有用的含义, 其中之一就是对平稳分布的新解释。为了说明这一点, 令  $\mathcal{M}$  是一个具有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的遍历马尔可夫模型。令  $(X_t)$  是一个  $P$ -chain 且

$$\hat{\psi}_k(y) := \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \mathbb{1}\{X_t = y\} \quad (y \in S).$$

值  $\hat{\psi}_k(y)$  衡量了  $P$ -chain 在  $1, \dots, k$  的时间区间内花在状态  $y$  上的时间比例。在遍历性条件下, 对于固定的  $y \in S$ , 我们可以用式(4.18)与  $h(x) = \mathbb{1}\{x = y\}$ , 得到,

$$\hat{\psi}_k(y) \rightarrow \sum_{x \in S} \mathbb{1}\{x = y\} \psi^*(x) = \psi^*(y). \quad (4.19)$$

图 4.10: 经验分布向  $\psi^*$  收敛

变换(4.19), 我们可以发现,

$$\psi^*(y) \approx \text{任意 } P\text{-chain}(X_t) \text{ 在状态 } y \text{ 上花费的时间百分比} \quad (4.20)$$

图4.10阐释了这一思想, 即模拟由式(4.5)中的矩阵  $P_B$  生成的马尔可夫链 ( $X_t$ )。该图比较了不同  $k$  值下的  $\hat{\psi}_k$  和  $\psi^*$ , 随着  $k \rightarrow \infty$ , 会出现式(4.19)中介绍的收敛现象。

当然, 我们必须记住, 式(4.20)只在遍历性条件下有效。例如, 如果  $P = I$ , 即单位矩阵, 那么每个分布都是平稳的, 每个  $P$ -马尔可夫链都是恒定的, 此时式(4.20)不成立。

请注意, 由于定理4.2.2中式(4.18)的收敛可以发生在任意初始条件下, 这就给我们提供了在遍历性条件下, 通过模拟(利用式(4.19))计算平稳分布的方法。虽然对于小问题来说, 这种方法比代数技术(例如参见 §4.1.3.4)更慢, 但当  $|S|$  较大时, 它可能就是唯一可行的选择。

## 4.2.2 非周期性和平稳性

在 §4.2.1 中, 我们讨论了马尔可夫链的样本路径特征, 发现强连通性能够充分得到时间序列均值的平稳性。接下来我们转向链的边际分布和它们的长期特性, 我们在 §4.1.2.2 中非正式地研究了这些特性, 我们将看到, 为了保证这些序列的收敛性, 我们还需要一个限制周期性的条件。

#### 4.2.2.1 边际收敛

令  $\mathcal{M}$  是包含状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型。如果其在  $\mathcal{D}(S)$  中只有一个平稳分布  $\psi^*$ , 并且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi P^t = \psi^* \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(S), \quad (4.21)$$

那么, 我们称  $\mathcal{M}$  是全局稳定的(globally stable)。换句话说, 每个  $P$ -马尔可夫链的边际分布都会收敛到模型的唯一稳态分布。

全局稳定性和吸收集之间存在一个有用的联系。直观地说, 如果  $\mathcal{M}$  是全局稳定的且有一个吸收集  $A$ , 这个吸收集可以从任意  $x \in S$  到达, 那么由这些动态产生的任意马尔可夫链最终都会到达  $A$ , 且不再离开。因此, 平稳分布必须将其所有的概率质量放在  $A$  上。下面的练习证明了这点。

**练习 4.2.3.** 令  $\mathcal{M}$  是状态空间为  $S$ , 转移矩阵为  $P$  的有限马尔可夫模型。令  $A$  是  $S$  的一个非空的吸收子集。假设:

- (1)  $\mathcal{M}$  是全局稳定, 且具有唯一平稳分布  $\psi^*$ , 并且
- (2) 对于每个  $x \in A^c := S \setminus A$ , 存在一个  $a \in A$ , 能够使得  $a$  从  $x$  处是可达的。

证明: 在上述条件下, 存在一个  $\varepsilon > 0$ , 能够使得对于所有  $x \in S$ , 都有  $\sum_{y \in A^c} P^n(x, y) \leq 1 - \varepsilon$  (其中,  $n = |S|$ )。利用这一事实, 证明: 除此之外, 还有  $\sum_{y \in A} \psi^*(y) = 1$ 。

#### 4.2.2.2 一个关键定理

从定理4.1.1中我们看到, 强连通性条件对于稳态分布的唯一性来说已经足够了。大家可能希望强连通性也足以推出全局稳定性, 但事实并非如此。究其原因, 举例来说, 假设  $S = \{0, 1\}$  且  $E = \{(0, 1), (1, 0)\}$ , 转移矩阵为

$$P_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

虽然这个模型是强连通的, 但全局稳定性失败了。事实上, 如果  $(X_t)$  是  $P_d$ -Markov, 并且从状态 0 开始, 那么  $(X_t)$  将在奇数日期访问状态 1, 在偶数日期访问状态 0。也就是说,  $P_d^t \delta_0 = \delta_{t \bmod 2}$ , 这个序列并不收敛。

$P_d$  的问题是, 即使链穿越了整个状态空间, 但由于存在周期性,  $X_t$  的分布将影响到  $X_{t+j}$  ( $\forall j$ ), 这将导致平稳性失效。然而, 如果我们能够排除周期性, 那么我们就有足够的条件来保证平稳性。通过上述推理, 可以得到下面这个著名的定理。

**定理 4.2.3.** 令  $\mathcal{M}$  是一个有限马尔可夫模型。如果  $\mathcal{M}$  是强连通且非周期的, 那么  $\mathcal{M}$  就是全局稳定的。

证明. 令  $\mathcal{M}$  是有限马尔可夫模型, 其状态空间为  $S$ , 转移矩阵为  $P$ 。假设  $\mathcal{M}$  具有强连通性和非周期性, 并令  $\psi^*$  是  $\mathcal{M}$  的唯一平稳分布。依据定理1.4.4, 可知  $P$  是本原矩阵, 因此我们可以应用 Perron–Frobenius 定理的最后一部分(见第13页)。利用  $r(P) = 1$ , 结果告诉我们, 随着  $t \rightarrow \infty$ , 有  $P^t \rightarrow e_r e_\ell^\top$ , 其中  $e_r$  和  $e_\ell$  分别是对应于特征值  $r(P) = 1$  的矩阵  $P$  的唯一右和左特征向量, 同时也满足归一化  $\langle e_\ell, e_r \rangle = 1$ 。

现在观察一下,  $\psi^*$  服从  $\psi^* = \psi^* P$ , 此外,  $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$ 。因此,  $\psi^*$  和  $\mathbb{1}$  是对应于特征值  $r(P) = 1$  的左和右特征向量。同时还有,  $\langle \psi^*, \mathbb{1} \rangle = 1$ 。因此, 可得  $e_r = \mathbb{1}$  以及  $e_\ell^\top = \psi^*$ 。

结合这些事实, 可以得出,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = P^*, \quad \text{其中 } P^* := \mathbb{1}\psi^*. \quad (4.23)$$

如果我们挑选任意  $\psi \in \mathcal{D}(S)$ , 那么, 根据式(4.23), 我们得到  $\psi P^t \rightarrow \langle \psi, \mathbb{1} \rangle \psi^* = \psi^*$ 。因此, 全局稳定性成立。  $\square$

**示例 4.2.8.** 根据 §1.4.1.4的结果, §4.1.1中的马尔可夫模型  $P_Q$  和  $P_B$  都是非周期的。同时, 由于它们具有强连通性, 因此它们也是全局稳定的。

一般来说, 定理4.2.3中的非周期性条件并不严格, 但强连通性的要求却是相当严格的。我们将在 §4.2.3中看到, 在较弱的条件下也可以得到全局稳定性。

### 4.2.2.3 收敛速度: 谱隙

虽然全局稳定性是一个非常有用的性质, 但其含义是定性而不是定量的。在实践中, 我们通常想知道一些关于收敛速度的信息, 有几种方法可以做到这一点。在本节和下一节中, 我们将介绍其中两种最常见的方法。

首先, 固定一个状态空间为  $S$ , 转移矩阵为  $P$  的马尔可夫模型  $\mathcal{M}$ 。我们使用第10页的式(1.5), 把  $P^t$  写作,

$$P^t = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^t e_i \varepsilon_i^\top + \mathbb{1}\psi^*, \quad (4.24)$$

其中, 每个  $\lambda_i$  是  $P$  的一个特征值,  $e_i$  和  $\varepsilon_i$  分别为对应于  $\lambda_i$  的左和右两个特征向量。我们将特征值从小到大排序, 并使用 Perron–Frobenius 定理, 推断得到  $\lambda_n = r(P) = 1$ , 加上定理4.2.3的证明过程, 可知  $e_n = \mathbb{1}$  和  $\varepsilon_n^\top = \psi^*$ 。

将  $P^t$  预乘以任意的  $\psi \in \mathcal{D}(S)$  并重新排列, 可以得到,

$$\psi P^t - \psi^* = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^t \psi e_i \varepsilon_i^\top. \quad (4.25)$$

回顾一下, 特征值是由小到大排序的, 而且, 根据 Perron–Frobenius 定理, 当  $P$  为本原矩阵时, 对于所有的  $i < n$ , 一定有  $\lambda_i < 1$ (即  $\mathcal{M}$  是强连通且非周期的)。因此, 在取欧式范数偏

差后,我们可以得到,

$$\|\psi P^t - \psi^*\| = O(\eta^t), \quad \text{其中 } \eta := |\lambda_{n-1}| < 1. \quad (4.26)$$

因此,收敛速度受第二大特征值的模数所制约。

一个非负矩阵的最大特征值和第二大特征值之间的差值通常被称为谱隙 (spectral gap)。出于这个原因,我们也可以说明,对于本原的随机矩阵,收敛速度是由(非零的)谱隙所决定的。

**示例 4.2.9.** 在研究 §1.2.1.3 中具有雇用率  $\alpha$  和解雇率  $\beta$  的工人模型时,我们发现转移矩阵  $P_w$  的特征值是  $\lambda_1 = 1 - \alpha - \beta$  和  $\lambda_2 = 1$ 。因此,谱隙为  $\alpha + \beta$ , 收敛速度是  $O((1 - \alpha - \beta)^t)$ 。高雇用率和解雇率都会产生更快的收敛。从本质上讲,这是因为较高的雇佣和解雇率意味着工人不会在任何状态下停留很长时间,所以初始条件的影响会削弱的更快。

### 4.2.3 Markov–Dobrushin 系数

§4.2.2 中给出的  $\psi P^t$  到  $\psi^*$  的收敛速度,将向量之间的欧几里得距离限定为一个关于  $t$  的函数。然而,在研究收敛速度时,我们还可以使用其他度量方法,有时这些方法会给出更方便的结果。事实上,正如我们在本节中展示的,与 §4.2.2 中(更广为人知的)基于非周期性的结果相比,一个好的度量选择会使我们获得更一般的稳定结果。

#### 4.2.3.1 一个替代的度量

基于本节的目标,对于  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(S)$ , 我们假设

$$\rho(\phi, \psi) := \|\phi - \psi\|_1 := \sum_{x \in S} |\phi(x) - \psi(x)|,$$

即,将  $\phi$  和  $\psi$  之间的  $\ell_1$  偏差表示为  $\rho(\phi, \psi)$ (参见 §2.3.1.1)。

**练习 4.2.4.** 证明:对于任意的  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(S)$ , 我们都有,

- (1)  $\rho(\phi, \psi) \leq 2$ ,
- (2) 对任意随机矩阵  $P$  来说,  $\rho(\phi P, \psi P) \leq \rho(\phi, \psi)$  均成立。

性质(2)被称为  $\ell_1$  偏差下随机矩阵的非延展性质 (nonexpansiveness property)。正如我们将看到的,当  $P$  满足一些确定的性质时,我们可以收紧这个约束。

作为第一步,我们注意到,对于  $\ell_1$  偏差,给定任意随机矩阵  $P$ , 我们都有,

$$\rho(\phi P, \psi P) \leq (1 - \alpha(P))\rho(\phi, \psi), \quad (4.27)$$

其中,

$$\alpha(P) := \min \left\{ \sum_{y \in S} [P(x, y) \wedge P(x', y)] : (x, x') \in S \times S \right\}. \quad (4.28)$$

这里,  $a \wedge b := \min\{a, b\}$ , 其中  $a, b \in \mathbb{R}$ 。我们称  $\alpha(P)$  为  $P$  的 [Markov–Dobrushin 系数](#), 有些文献中也有其他名称。式(4.27)的约束证明可以在 [Stachurski \(2022a\)](#) 或 [Seneta \(2006a\)](#) 中找到。<sup>4</sup>

**练习 4.2.5.** 考虑一个随机矩阵

$$P_w = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

证明: 当且仅当  $\alpha = \beta = 0$  或  $\alpha = \beta = 1$  时,  $\alpha(P_w) = 0$ 。

应该如何理解 Markov–Dobrushin 系数? 当矩阵  $P$  的各行相对相似时, 该系数就相对较大。例如, 如果行  $P(x, \cdot)$  和  $P(x', \cdot)$  是相同的, 那么  $\sum_{y \in S} [P(x, y) \wedge P(x', y)] = 1$ 。行的相似性与平稳性有关, 下一个练习有助于说明该问题。

**练习 4.2.6.** 令矩阵  $P$  的所有行都相同, 且等于  $\phi \in \mathcal{D}(S)$ 。证明: 全局稳定性在一步内成立, 即  $\phi$  是唯一的平稳分布, 并且对于所有的  $\psi \in \mathcal{D}(S)$ , 等式  $\psi P = \phi$  均成立。

**练习 4.2.7.** 根据式(4.27), 证明: 对于任意  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(S)$ , 我们都有

$$\rho(\phi P^t, \psi P^t) \leq (1 - \alpha(P))^t \rho(\phi, \psi) \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (4.29)$$

由于随机矩阵的幂也是随机的, 并且由于式(4.27)对任意随机矩阵都有效, 那么, 对于任何给定的  $k \in \mathbb{N}$ , 式(4.29)中的约束可以通过将  $P$  替换为  $P^k$  来进行类推, 因而可以得到(将  $t$  替换为  $\tau$ ),

$$\rho(\phi P^{\tau k}, \psi P^{\tau k}) \leq (1 - \alpha(P^k))^\tau \rho(\phi, \psi) \quad \forall \tau \in \mathbb{N}.$$

现在观察一下, 对于任意的  $t \in \mathbb{N}$ , 我们都可以写作  $t = \tau k + j$ , 其中  $\tau \in \mathbb{Z}_+$  且  $j \in \{0, \dots, k - 1\}$ 。固定  $t$  并选择  $j$  使得该等式成立, 我们可以得到,

$$\rho(\phi P^t, \psi P^t) = \rho(\phi P^{\tau k + j}, \psi P^{\tau k + j}) \leq \rho(\phi P^{\tau k}, \psi P^{\tau k}) \leq (1 - \alpha(P^k))^\tau \rho(\phi, \psi).$$

其中第二个不等式是由随机矩阵的非延展性 (练习4.2.4) 得到的。由于  $\tau$  是一个满足  $\tau = \lfloor t/k \rfloor$  的整数, 其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  为一个“向下取整”函数, 也即 floor function, 现在我们可以陈述如下定理。

<sup>4</sup>[Seneta \(2006a\)](#) 还讨论了 Andrey Markov 工作的历史, 本节基于压缩(contraction)理论进行的各种论证, 都可以追溯到他的工作。

**定理 4.2.4.** 令  $\mathcal{M}$  是有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的马尔可夫模型, 对于所有的  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(S)$  和所有  $k, t \in \mathbb{N}$ , 我们有

$$\rho(\phi P^t, \psi P^t) \leq (1 - \alpha(P^k))^{\lfloor t/k \rfloor} \rho(\phi, \psi). \quad (4.30)$$

特别地, 如果存在一个  $k \in \mathbb{N}$  能够使得  $\alpha(P^k) > 0$ , 那么  $\mathcal{M}$  就是全局稳定的。

为了理解定理4.2.4中所述的全局稳定性为什么成立, 假设存在一个  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $\alpha(P^k) > 0$ 。现在将任意的  $\psi \in \mathcal{D}(S)$  和矩阵  $P$  下的任意平稳分布  $\psi^*$  代入式(4.30)中, 得到

$$\rho(\psi P^t, \psi^*) \leq (1 - \alpha(P^k))^{\lfloor t/k \rfloor} \rho(\psi, \psi^*) \leq 2(1 - \alpha(P^k))^{\lfloor t/k \rfloor}, \forall t \in \mathbb{N} \quad (4.31)$$

其中, 第二个约束条件来自练习4.2.4。

**练习 4.2.8.** 在前面的讨论中, 分布  $\psi^*$  被认为是  $P$  的任意平稳分布。利用式(4.31), 证明: 当  $\alpha(P^k) > 0$  时,  $P$  只有唯一的平稳分布。

定理4.2.4的主要优点之一是不需要  $\mathcal{M}$  的强连通性。在下一节中, 我们将看到一个有限马尔可夫模型  $\mathcal{M}$  的例子, 其中 (1) 强连通性失效, 但是 (2) 定理4.2.4中的条件是满足的。<sup>5</sup>

**练习 4.2.9.** 令  $\mathcal{M}$  是有状态空间  $S$  和转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型。证明: 只要  $\mathcal{M}$  具有强连通性和非周期性, 就必然存在一个  $k \in \mathbb{N}$ , 满足  $\alpha(P^k) > 0$ 。

### 4.2.3.2 充分条件

对任意给定的  $k$ , 虽然 Markov–Dobrushin 系数  $\alpha(P^k)$  可以在计算机上通过追踪  $P^k$  中的所有行对来计算, 但当  $S$  较大时, 这种计算是很庞大的。在适当的条件下, 下面的引理为  $\alpha(P^k) > 0$  提供了充分条件, 从而简化了问题。

**引理 4.2.5.** 令  $k$  是一个自然数,  $\mathcal{M}$  是一个状态空间为  $S$  和转移矩阵为  $P$  的有限马尔可夫模型。如果存在一个状态  $z \in S$ , 使得对于每一个  $x \in S$ , 都存在一条从  $x$  到  $z$  且长度为  $k$  的有向游走(*directed walk*), 那么  $\alpha(P^k) > 0$ 。

证明. 令  $k \in \mathbb{N}$  和  $z \in S$  满足: 对于每一个  $x \in S$ , 存在一条从  $x$  到  $z$ 、长度为  $k$  的有向游走。根据命题1.4.2, 我们有  $r := \min_{x \in S} P^k(x, z) > 0$ 。因为, 对于任意的  $x, x' \in S$ , 有

$$\sum_{y \in S} [P^k(x, y) \wedge P^k(x', y)] \geq P^k(x, z) \wedge P^k(x', z) \geq r > 0,$$

根据 Markov–Dobrushin 系数的定义可知,  $\alpha(P^k)$  是严格为正的。  $\square$

<sup>5</sup>可以证明, 对于某些  $k \in \mathbb{N}$ , 条件  $\alpha(P^k) > 0$  对于有限马尔可夫模型的全局稳定性是必要的也是充分的。因此, 严格来说, 定理4.2.4的条件要弱于定理4.1.1中要求的强连通性和非周期性。

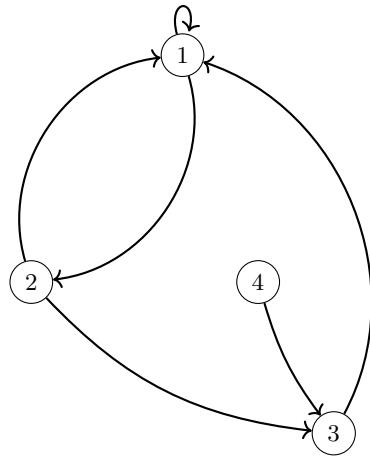


图 4.11: 一个从任何节点到节点 1 且长度为 2 的有向图

**示例 4.2.10.** 考虑图4.11的有向图,这个有向图不是强连通的,因为 4 不能从任何地方进入。然而,存在一个从任何节点到节点 1 并且步数  $k = 2$  的有向游走。例如,从 2 开始,我们可以选择  $2 \rightarrow 1$ ,然后  $1 \rightarrow 1$ ;或者从 1 开始,选择  $1 \rightarrow 1$ ,然后再选择  $1 \rightarrow 1$ ,等等。因此,如果图4.11是具有转移矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型的有向图,那么我们可以得到  $\alpha(P^2) > 0$ 。

**示例 4.2.11.** 考虑一下第25页图1.10提出的马尔可夫动态。虽然没有权重,但我们可以看到, **poor** 从所有状态中都是可以一步进入的,所以  $\mathcal{M}$  必然是全局稳定的。此外,**poor** 本身也是一个吸收集,因此,根据练习4.2.3,无论选择何种与这些边兼容的权重,平稳分布最终还是会把它的所有质量集中在 **poor** 上。

**备注 4.2.1.** 正如在引理4.2.5的证明中所指出的,在该引理条件下,对于所有的  $x \in S$ , 我们都有  $P^k(x, z) > 0$ 。这意味着,只要  $P^k$  有一个严格的正列,就有  $\alpha(P^k) > 0$ 。

### 4.2.3.3 应用:PageRank

在 §1.4.3中,我们讨论了有关网络中心度的测度方法。根据网络中节点的“中心度”或“重要性”的含义,中心度提供了一种对网络节点进行排名的方法。网络节点排名的一个最重要应用就是对互联网上的网页进行重要性排名。从历史上看,互联网排名机制最典型的例子是 PageRank,它将谷歌从一个小公司转变为一个技术巨头。在这一节中,我们将对 PageRank 的原始形式做一个简单介绍,并将其与之前讨论的中心度联系起来。

考虑一个有限的网页集合  $W$ ,令  $L$  作为它们之间的超链接。我们将  $(W, L)$  理解为一个有向图  $\mathcal{G}$ ,其中  $W$  是节点,  $L$  是边。令  $A$  为相对应的邻接矩阵,如果从  $u$  到  $v$  存在一条链接,那么有  $A(u, v) = 1$ ,否则为 0。我们设  $n = |W|$ ,因此  $A$  是  $n \times n$  矩阵。

为进行分析,我们考虑  $\mathcal{G}$  是强连通的情况,例如图4.12中的小型网络。此外,我们引入第

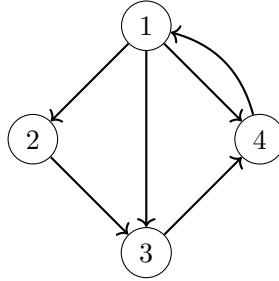


图 4.12: 一个从任何节点到节点 1 且长度为 2 的有向图

二个矩阵  $P$ , 其中  $A$  的每一行都被归一化, 使其加总为 1。对于图4.12的网络, 这意味着,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

现在考虑一个互联网网民, 每分钟一次, 随机地点击一个页面上的  $k$  个出站链接, 每个链接都以均匀的概率  $1/k$  被选择。PageRank 的理念是为每个页面  $u \in W$  分配一个值  $g(u)$ , 该值等于这个网民长期花在页面  $u$  上的时间比例。直观地说,  $g(u)$  的值越高, 表明该网站的访问量越大, 该页面也越重要。

鉴于我们对马尔可夫链的理解, 向量  $g$  很容易计算。令  $\mathcal{M}$  为与随机网民相关的有限马尔可夫模型, 其状态空间为  $W$ , 邻接矩阵由  $P$  给出。由于  $\mathcal{M}$  是强连通的, 遍历性定理(第143页)告诉我们,  $P$  有一个唯一的平稳分布  $\psi^*$ , 并且网民在页面  $u$  花费的时间等于平稳分布下分配给  $u$  的概率(参见(4.20))。因此,  $g = \psi^*$ 。

由于  $g$  是平稳的, 且  $r(P) = 1$ , 我们可以将其重写为  $g = (1/r(P))gP$ 。通过转置可以得到  $g^\top = (1/r(P))P^\top g^\top$ 。与第43页的式(1.34)相比, 我们可以看到, 对于这种简单的设定, PageRank 向量  $g$  就是  $\mathcal{M}$  的权威特征向量中心度。因此, PageRank 会对那些有许多入站链接的网页给予高排名, 并且网页中那些入站链接本身的排名越高, 该网页越具有高价值。

前面的分析有两个问题。第一, 我们假设互联网是强连通的, 这显然不符合事实(我们只需要一个没有外向链接的页面作为反例)。第二, 互联网用户有时不使用超链接, 而是通过手动输入 URL 来选择网页。

对于这个问题, PageRank 的解决方案是用所谓的Google 矩阵(Google matrix)来代替  $P$ , 即

$$G := \delta P + (1 - \delta) \frac{1}{n} \mathbb{1},$$

其中,  $\mathbb{1}$  是  $n \times n$  的 1 矩阵, 值  $\delta \in (0, 1)$  被称为阻尼系数(damping factor)。

练习 4.2.10. 证明: 对所有的  $\delta \in (0, 1)$ ,  $G$  是一个随机矩阵。

嵌入在随机矩阵  $G$  中的马尔可夫动态, 可以以如下方式进行理解: 开始时, 网民抛出一枚正面概率为  $\delta$  的硬币 (参见练习1.3.6及其解答, 从而了解凸组合(convex combinations)和抛硬币之间的联系)。如果硬币正面向上, 那么网民就会随机选择并跟踪当前页面上的一个链接。如果不是, 那么该网民就会随机选择并移动到互联网上的任何页面。

对于给定的  $\delta$ , 该设定下的 PageRank 向量被调整为 Google 矩阵  $G$  的平稳分布。

**练习 4.2.11.** 验证: 与  $G$  中转移概率相对应的有向图总是强连通的 (如上所述, 假设  $\delta \in (0, 1)$ )。

作为练习4.2.11的结果, 我们总是可以将  $G$  的平稳状态解释为: 告诉了我们从长远来看, 该网民花费在每个页面上的时间比例。

**练习 4.2.12.** 利用式(4.31), 可以得到  $\psi G^t$  向调整后的 PageRank 向量  $g^*$  的收敛速度 (即  $G$  的唯一平稳分布  $g^*$ ), 其中  $\psi$  是  $W$  上任意的一个初始分布 (设  $k = 1$ )。

#### 4.2.4 信息和社会网络

近年来, 观点在社交网络中的传播方式已经成为全球许多国家关注的重要话题。研究这种现象的一个著名数学模型是De Groot 学习 (De Groot learning), 它最初是由DeGroot (1974) 提出。这种模型机制具有线性特性, 使其相对容易分析 (尽管大型和复杂的基础网络会带来巨大挑战)。

在 De Groot 学习中, 一组被标记 1 到  $n$  的代理人, 被某种类型的社会或信息网络所连接。连接由信任矩阵(trust matrix) $T$  非正式地表示为,

$$T(i, j) = i \text{ 相信 } j \text{ 的观点的数量}.$$

换句话说, 如果代理人  $i$  对代理人  $j$  的观点赋予很大的正向权重, 那么  $T(i, j)$  就大。同时, 矩阵  $T$  也被认为是随机的。

我们可以把信任矩阵看作是加权有向图  $\mathcal{S}$  的邻接矩阵, 该图的节点为  $V := [n]$ , 边为

$$E = \{(i, j) \in V \times V : T(i, j) > 0\}.$$

图4.13显示了两个社会网络  $\mathcal{S}_a$  和  $\mathcal{S}_b$ , 其信任矩阵分别为,

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad T_b = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

在网络 A 中, 代理人 1 不相信任何人的观点, 只相信自己的观点。在网络 B 中, 他至少对代

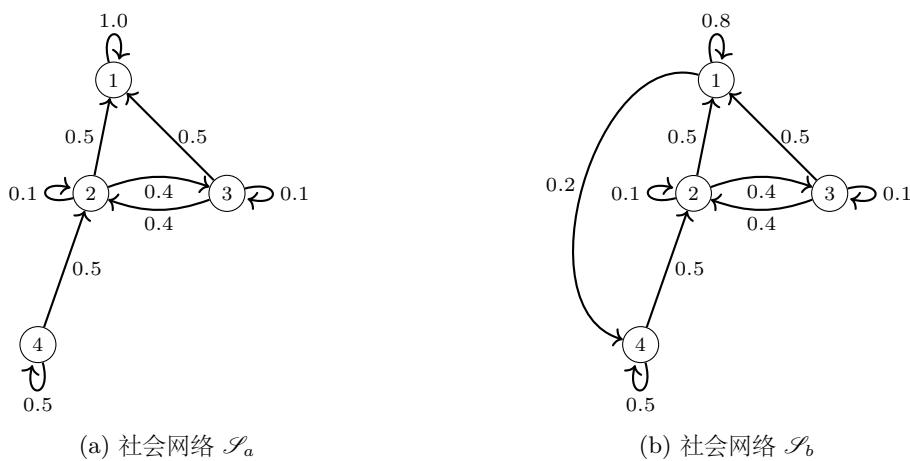


图 4.13: 两个社会网络

理人 4 的观点比较信任。下面我们将展示这些差异对信念的动态变化有何种影响。

#### 4.2.4.1 学习

对于某个给定声明的有效性，所有代理人在初始时刻都存在一个初始的主观信念 (belief)，信念的取值范围为  $[0, 1]$ ，其中 1 表示完全（主观）肯定该声明为真。令  $b_0(i)$  为代理人  $i$  在 0 时刻的信念。

代理人根据其他人的想法，按对其观点的信任程度加权，依序列更新观点。具体来说，代理人  $i$  在 1 个单位时间后将其信念更新为  $\sum_{j=1}^n T(i, j)b_0(j)$ 。更一般地说，在时间  $t + 1$ ，代理人  $i$  观点更新为，

$$b_{t+1}(i) = \sum_{j=1}^n T(i, j)b_t(j) \quad (i \in V). \quad (4.32)$$

用矩阵符号进行表示，即为  $b_{t+1} = Tb_t$ ，其中每个  $b_t$  被视为一个列向量。

（请注意，这个更新规则与我们在第134页上讨论的马尔可夫链边际分布的更新规则（正向方程）相似，但不完全相同。在这里，我们是用一个列向量进行后乘，而不是用一个行向量进行前乘。）

**练习 4.2.13.** 证明：如果代理人的某个子组  $U \subset V$  是有向图  $\mathcal{S}$  的吸收集，表明该组成员不信任外部人员，那么外部人员 ( $U^c = V \setminus U$  的成员) 的初始观点  $\{b_0(i)\}_{i \in U^c}$  在任何时刻都不会影响内部人员 ( $U$  的成员) 的信念。

#### 4.2.4.2 共识

随着  $t \rightarrow \infty$ ，如果有  $|b_t(i) - b_t(j)| \rightarrow 0 (\forall i, j \in V)$ ，则称社会网络引致了共识 (consensus)。共识意味着所有代理人最终都有相同的信念。一个重要的问题是，什么样的网络条件会引致共识结果的产生？

**命题 4.2.6.** 如果存在一个  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $\alpha(T^k) > 0$ , 那么共识的结果就会产生。特别地,

$$|b_t(i) - b_t(j)| \leq 2(1 - \alpha(T^k))^{\lfloor t/k \rfloor} \quad \forall t \in \mathbb{N} \text{ 和 } i, j \in V. \quad (4.33)$$

证明. 令  $i, j \in V$  和  $t \in \mathbb{N}$ , 并令  $b = b_0$ 。对任意的  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(V)$ , 应用三角不等式可以得到,

$$|\phi T^t b - \psi T^t b| = \left| \sum_j (\phi T^t)(j) b(j) - \sum_j (\psi T^t)(j) b(j) \right| \leq \sum_j |(\phi T^t)(j) - (\psi T^t)(j)|,$$

其中, 我们使用了  $|b(j)| = b(j) \leq 1$  这一事实。应用  $\ell_1$  偏差的定义和式(4.30), 我们可以得到约束,

$$|\phi T^t b - \psi T^t b| \leq (1 - \alpha(T^k))^{\lfloor t/k \rfloor} \rho(\phi, \psi) \leq 2(1 - \alpha(T^k))^{\lfloor t/k \rfloor}. \quad (4.34)$$

由于这一约束对任意选择的  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(V)$  都有效, 我们可以将它们分别令为  $\phi = \delta_i$  和  $\psi = \delta_j$ , 同时应用  $T^t b = b_t$ , 得到,

$$|b_t(i) - b_t(j)| = |\delta_i T^t b - \delta_j T^t b| \leq 2(1 - \alpha(T^k))^{\lfloor t/k \rfloor}. \quad \square$$

利用命题4.2.6可以研究图4.13中的两个社会网络  $\mathcal{S}_a$  和  $\mathcal{S}_b$ 。例如, 在网络  $\mathcal{S}_a$  中, 对于每个节点  $i$ , 都存在一条从节点  $i$  到节点 1 且长度为 2 的游走。因此, 根据引理4.2.5, 我们有  $\alpha(T^2) > 0$ 。在网络  $\mathcal{S}_b$  中也是如此。

**练习 4.2.14.** 令  $\mathcal{S}$  是一个具有信任(和邻接)矩阵  $T$  的社会网络。使用命题4.2.6来证明: 只要  $\mathcal{S}$  是强连通并且非周期的,  $\mathcal{S}$  就会带来共识。

#### 4.2.4.3 权威的影响

现在来考虑, 当共识出现时, 信念会收敛到什么程度。特别地, 我们感兴趣的是, 对于一个给定的信任矩阵, 在 De Groot 学习机制下, 谁的意见最有影响力。

为了回答这个问题, 令  $\mathcal{S}$  是一个具有信任矩阵  $T$  的给定社会网络。假设对于某些  $k \in \mathbb{N}$ , 有  $\alpha(T^k) > 0$ 。根据定理4.2.4, 网络  $\mathcal{S}$  作为一个有限马尔可夫模型来看是全局稳定的。令  $\psi^*$  是唯一的平稳分布, 因此有  $\psi^* = \psi^* T$ 。

应用式(4.34)中的  $\phi = \delta_i$  和  $\psi = \psi^*$ , 可以得到,

$$|b_t(i) - b^*| \leq (1 - \alpha(T^k))^{\lfloor t/k \rfloor} \rho(\phi, \psi) \leq 2(1 - \alpha(T^k))^{\lfloor t/k \rfloor},$$

其中,

$$b^* := \sum_{j \in V} \psi^*(j) b_0(j).$$

我们的结论是, 每个代理人的信念都会以几何级数的速度收敛到  $b^*$ , 这也是所有代理人初始

信念的加权平均值。特别是,那些在平稳分布下具有高权重的代理人,对这些均衡信念有很大影响。

我们可以通过中心度的概念来解释这一点。由于  $r(T) = 1$ , 我们有  $(\psi^*)^\top = (1/r(T))T^\top(\psi^*)^\top$ , 所以  $\psi^*$  就是  $\mathcal{S}$  上的权威特征向量中心度。因此,每个代理人对长期信念的影响与他们的权威特征向量中心度成正比。这是有道理的,因为这样的代理人被许多代理人高度信任,而这些代理人本身也是高度自信的。

**练习 4.2.15.** 对于图4.13的网络  $\mathcal{S}_a$ , 证明:  $b^* = b_0(1)$ , 也即,所有代理人的信念都会收敛到代理人 1 的信念。

**练习 4.2.16.** 使用计算机, 证明:  $\mathcal{S}_b$  的平稳分布, 四舍五入到小数点后两位, 为  $\psi^* = (0.56, 0.15, 0.07, 0.22)$  (注意, 网络结构从  $\mathcal{S}_a$  到  $\mathcal{S}_b$  的相对微小变化, 大大降低了代理人 1 的影响力)。

### 4.3 章节说明

对有限状态马尔可夫动态的高质量研究包括: [Norris \(1998\)](#), [Privault \(2013\)](#) 和 [Häggström et al. \(2002\)](#)。对于一般状态情形的研究, 参见 [Meyn & Tweedie \(2009\)](#)。

关于 De Groot 学习的评论请参见 [Jackson \(2010\)](#)。[Golub & Jackson \(2010\)](#) 提供了一些与“群众智慧”现象相关的有趣拓展。[Acemoglu et al. \(2021a\)](#) 研究了信息网络中的错误信息和回音室效应。[Board & Meyer-ter Vehn \(2021\)](#) 分析了大型社会网络中连续时间的学习动态。[Shiller \(2020\)](#) 对思想如何在社会网络中传播并形成经济结果进行了有趣讨论。[Dasaratha et al. \(2022\)](#) 分析了贝叶斯代理人是如何通过与“邻居”(neighbors) 的互动来了解不断变化的状态的, 虽然由此产生的动态与 De Groot 模型的动态相似, 但这一动态是作为均衡结果产生的,而不是作为行为假设强加的。

# 第五章 非线性交互作用

网络分析之所以有趣,主要在于研究选择带来的影响是如何在网络中流动的。一般来说,给定节点  $i$  所做的决策会对其相邻节点产生影响,并通过这些相邻节点再影响到它们的相邻节点,以此类推。随着这些影响在网络中流动,它们反过来又会影响  $i$  的选择。这是一个逐尾的情景,可以通过不动点理论来解决。

在某些网络设定中,如 §2.1 中的投入-产出模型,交互是线性的,不动点问题会简化为线性方程组。但是在某些情况下,交互作用本质上是非线性的,因此,我们需要更复杂的不动点理论。

本章专门研究具有非线性交互作用的网络。我们从与其相关的不动点理论开始,然后将其应用到经济网络分析中的一系列问题,包括具有供应约束的生产模型和金融网络。

## 5.1 不动点理论

令  $S$  为任意集合。回顾 §6.1.1.6, 给定  $S$  上的自映射 (self-map)  $G$ , 如果存在一个点  $x \in S$  能够使得  $Gx = x$ ,那么称该点为  $G$  的不动点(fixed point)( $S$  上的自映射指的是某一个从  $S$  到其自身的函数  $G$ ,在处理自映射时,我们通常将  $G(x)$  缩写为  $Gx$ )。在本章中,对于任意的  $x \in S$ ,如果  $G$  有唯一的不动点  $x^* \in S$ ,并且在  $k \rightarrow \infty$  时有  $G^k x \rightarrow x^*$ ,我们说  $G$  在  $S$  上是全局稳定的(globally stable)。换句话说,在这个性质下,不动点在  $G$  的迭代下不仅是唯一的,而且是全局吸引的。

我们已经在多种情形下间接或直接地讨论了不动点:

- 在第二章中,我们研究了方程  $x = Ax + d$ ,其中  $x$  是产出向量,  $A$  是系数矩阵,  $d$  是需求向量。这个方程的解  $x$  也可以被认为是仿射映射(affine map)  $Fx = Ax + d$  的一个不动点。
- 在第四章中,我们了解到,具有状态空间  $S$  和邻接矩阵  $P$  的有限马尔可夫模型的平稳分布是  $\psi \in \mathcal{D}(S)$  且  $\psi = \psi P$ 。换句话说,  $\psi$  是  $\psi \mapsto \psi P$  在  $\mathcal{D}(S)$  中的一个不动点。
- 在第三章中,我们研究了贝尔曼方程  $q(x) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + q(y)\}$ ,并引入了一个算子,即贝尔曼算子  $T$ ,而它的不动点恰好与贝尔曼方程的解重合。

在这些情况下,当我们介绍这些不动点问题时,我们立即需要考虑不动点的存在性和唯一性问题。现在,让我们在一个抽象的环境下,更系统地去解决这些相同问题。

### 5.1.1 压缩映射

在第二章中,我们研究了系统  $x = Ax + b$  的解,这些解是示例5.1.1中研究的  $\mathbb{R}^n$  上的仿射映射  $Fx = Ax + b$  的不动点。第11页的 Neumann 级数引理实质上是关于该映射不动点存在性和唯一性的阐述。在此,我们研究另一个不动点定理,该定理由 Stefan Banach (1892-1945) 提出,可以将其视为将 Neumann 级数引理扩展到非线性系统。

#### 5.1.1.1 压缩

令  $S$  为  $\mathbb{R}^n$  上的非空子集。如果存在一个  $\lambda < 1$  和  $\mathbb{R}^n$  上的范数  $\|\cdot\|$ ,能够使得

$$\|Fu - Fv\| \leq \lambda \|u - v\|, \quad \forall u, v \in S, \tag{5.1}$$

则将  $S$  上的自映射  $F$  称为压缩 (contracting) 映射,或者为  $\lambda$  模的压缩 (contraction of modulus  $\lambda$ )。<sup>1</sup>

练习 5.1.1. 令  $F$  为  $S$  上的  $\lambda$  模的压缩,证明:

- (1)  $F$  在  $S$  上是连续的,并且,
- (2)  $F$  在  $S$  上至多有一个不动点。

示例 5.1.1. 令  $S = \mathbb{R}^n$ ,并与欧几里得范数  $\|\cdot\|$  配对。令  $Fx = Ax + b$ ,其中  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ ,并且  $b \in \mathbb{R}^n$ 。如果  $\|A\| < 1$ ,其中  $\|\cdot\|$  是  $\mathbb{M}^{n \times n}$  上的算子范数,那么,  $F$  就是  $\|A\|$  模的压缩。因为,对于任意的  $x, y \in S$ ,都有

$$\|Ax + b - Ay - b\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|.$$

下一个示例使用了类似的思路,但使用的是不同的范数。

示例 5.1.2. 在式(2.22)中,我们研究了系统  $\rho = A^\top \rho - \varepsilon$ ,其中  $A = (a_{ij})$  是满足  $\sum_i a_{ij} = 1 - \alpha$  (其中  $\alpha \in (0, 1)$ ) 的一个系数矩阵,向量  $\varepsilon$  是给定的,  $\rho$  是未知的。解可以被视为由  $Fp = A^\top p - \varepsilon$  定义的映射  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的不动点。在范数  $\|\cdot\|_\infty$  下,  $F$  是  $\mathbb{R}^n$  上  $1 - \alpha$  模的压缩。事实上,对于任意的  $p, q \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|Fp - Fq\|_\infty = \max_j \left| \sum_{i=1}^n a_{ij} (p_i - q_i) \right| \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} |p_i - q_i|.$$

<sup>1</sup>译者注:“contraction of modulus  $\lambda$ ”完整译意为“模数为  $\lambda$  的压缩”,简化起见,我们称其为“ $\lambda$  模的压缩”。

由于  $|p_i - q_i| \leq \|p - q\|_\infty$ , 我们可以得到,

$$\|Fp - Fq\|_\infty \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \|p - q\|_\infty = (1 - \alpha) \|p - q\|_\infty.$$

再次考虑示例5.1.1, 对于仿射映射  $Fx = Ax + b$ , 用于获得压缩的条件  $\|A\| < 1$  比用于获得 Neumann 级数引理中唯一不动点的条件  $r(A) < 1$  要更强(参见练习2.3.11), 而且 Neumann 级数引理还提供了不动点的几何级数表示。但另一方面, 正如即将展示的, 当讨论的映射不是仿射映射时, 那我们就可以使用压缩性质来获得唯一不动点。

### 5.1.1.2 Banach 定理

压缩的根本重要性源于以下定理。

**定理 5.1.1** (巴拿赫压缩映射定理(Banach's contraction mapping theorem)). 如果  $S$  在  $\mathbb{R}^n$  中是闭的并且  $F$  是在  $S$  上的  $\lambda$  模的压缩, 则  $F$  在  $S$  中具有唯一的不动点  $u^*$ , 并且有,

$$\|F^n u - u^*\| \leq \lambda^n \|u - u^*\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ 以及 } u \in S. \quad (5.2)$$

特别是,  $F$  在  $S$  上是全局稳定的。

我们将分阶段完成定理5.1.1的证明。

**练习 5.1.2.** 令  $S$  和  $F$  具有定理5.1.1中所述的性质, 并令  $u_0 \in S$  以及  $u_m := F^m u_0$ 。证明: 对于所有的  $m, k \in \mathbb{N}$ , 在条件  $m < k$  下,

$$\|u_m - u_k\| \leq \sum_{i=m}^{k-1} \lambda^i \|u_0 - u_1\|$$

该式成立。

**练习 5.1.3.** 使用练习5.1.2中的结果, 证明:  $(u_m)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的柯西序列 (Cauchy sequence)(有关柯西性质的说明, 参见 §6.1.3.2)

**练习 5.1.4.** 使用练习5.1.3, 论证  $(u_m)$  存在一个极限  $u^* \in \mathbb{R}^n$ , 并证明:  $u^* \in S$ 。

**定理 5.1.1 的证明.** 在练习中, 我们证明了一个能够使  $F^m u \rightarrow u^*$  成立的点  $u^* \in S$  的存在性。现在, 由第189页的引理6.1.6和练习5.1.1可以得到的一个事实是,  $u^*$  是  $F$  的不动点。练习5.1.1暗示了该不动点存在的唯一性。在设定  $v = u^*$  的条件下, 式 (5.2)的结果来自于对压缩不等式(5.1)的迭代。□

### 5.1.1.3 最终压缩

令  $S$  为  $\mathbb{R}^n$  上的非空子集。如果存在  $k \in \mathbb{N}$ ，能够使得  $F^k$  成为  $S$  上的压缩映射，则称  $S$  上的自映射  $F$  是最终压缩(eventually contracting)的。值得注意的是，Banach 定理的大部分结论都适用于  $F$  是最终压缩的情形。

**定理 5.1.2.** 令  $F$  为  $S$  上的自映射。如果集合  $S$  是闭的，并且  $F$  是最终压缩的，那么  $F$  在  $S$  上是全局稳定的。

练习 5.1.5. 证明定理5.1.2。<sup>2</sup>

定理5.1.2和 Neumann 级数引理 (NSL) 之间有密切的联系。如果  $S = \mathbb{R}^n$  并且  $Fx = Ax + b$  (其中,  $r(A) < 1$ )，则 NSL 已经暗示了唯一的不动点。我们也可以从定理5.1.2中得到这一结果，因为对于任意的  $k \in \mathbb{N}$ ，可以有，

$$\|F^k x - F^k y\| = \|A^k x - A^k y\| = \|A^k(x - y)\| \leq \|A^k\| \|x - y\|.$$

由于  $r(A) < 1$ ，我们可以选择  $k$ ，使得  $\|A^k\| < 1$  成立(参见 §2.3.3)。因此， $F$  是最终压缩的，并且定理5.1.2适用。

如上所述，压缩和最终压缩比 NSL 具有更广泛的适用范围，因为它们可以应用于非线性环境中。同时，当 NSL 条件成立时，NSL 是首选，因为它给出了不动点的逆和幂级数表示形式。

### 5.1.1.4 最终压缩的条件

下面的结果为最终压缩的性质提供了一个有用的检验。(在下面的陈述中，向量绝对值是逐点定义的，参见 §6.1.2.2。)

**命题 5.1.3.** 令  $F$  是  $S \subset \mathbb{R}^n$  上的自映射，使得对于某些  $n \times n$  的矩阵  $A$ ，有

$$|Fx - Fy| \leq A|x - y|, \quad \forall x, y \in S.$$

此时，如果  $A \geq 0$  并且  $r(A) < 1$ ，那么， $F$  在  $S$  上就欧式范数而言是最终压缩的。

证明. 我们的第一个陈述是在命题的条件下，可以得到，

$$|F^k x - F^k y| \leq A^k |x - y|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{并且} \quad x, y \in S. \quad (5.3)$$

根据假设，这在  $k = 1$  处为真。如果在  $k - 1$  处也为真，则有

$$|F^k x - F^k y| \leq A|F^{k-1}x - F^{k-1}y| \leq AA^{k-1}|x - y|, \quad (5.4)$$

<sup>2</sup>提示：定理5.1.1是自我改进的：它暗示了这个看似更强的结果。该定理的证明并不简单，但你可以对此进行尝试。你可能已经注意到， $F^k$  在  $S$  中有唯一的不动点  $u^*$ (为什么？)。现在考虑这样一个事实： $\|Fu^* - u^*\| = \|FF^k u^* - u^*\| (\forall n \in \mathbb{N})$ 。

其中第二个不等式采用了归纳假设法和  $A \geq 0$  (因此  $u \leq v$  意味着  $Au \leq Av$ )。所以, 式(5.3)成立。

根据欧式范数的定义, 对于任意向量  $u$ , 有  $\|u\| = \|u\|_o$ 。同样的, 对于相同的范数,  $|u| \leq |v|$  意味着  $\|u\| \leq \|v\|$ 。因此, 对于所有的  $k \in \mathbb{N}$  以及  $x, y \in S$ , 可以得到,

$$\|F^k x - F^k y\| \leq \|A^k\|_o \|x - y\| \leq \|A^k\|_o \|x - y\|.$$

在第二个不等式中, 我们采用了  $\|\cdot\|_o$  作为算子范数, 并结合了  $\|Au\| \leq \|A\|_o \|u\|$  始终成立的事实(如 §2.3.2.3中所述。)

根据 Gelfand 引理 (参见第82页的练习2.3.18), 可知存在一个  $\lambda \in (0, 1)$  和  $k \in \mathbb{N}$ , 能够使得  $\|A^k\|_o \leq \lambda < 1$ 。因此, 对于这个  $k$ , 我们可以得到,

$$\|F^k x - F^k y\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

由于  $\lambda$  不依赖于  $x$  或  $y$ , 我们已经证明对于欧式范数而言,  $F$  在  $S$  上是最终压缩的。  $\square$

### 5.1.2 最短路径问题再探讨

再次考虑 §3.1中介绍的最短路径问题。在具体应用中, 有时会出现的一项改动是, 对不同节点之间的旅行考虑折现问题。例如, 如果节点都是国际港口, 旅行是通过海路进行的, 那么港口到港口的旅行时间是以周甚至月来计算的。很自然能够想到的一件事情是, 将时间折现应用到与旅行相关的未来成本上, 进而可以判别未来支付给定的美元金额是否要比现在支付更好。

**练习 5.1.6.** 假设可以以正利率  $r$  无风险地借贷资金。解释为什么在这种情况下, 现在拥有 100 美元总是要比一年后拥有 100 美元更好。

回顾一下, 在不考虑折现问题的情况下, 对于所有的  $x \in V$ , 最短路径问题中 Bellman 方程的形式为  $q(x) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + q(y)\}$ , 其中,  $c$  是成本函数,  $V$  是节点集,  $q$  是成本函数的候选(candidate)集。我们证明了, 最小成本函数  $q^*$  满足 Bellman 方程, 并且是 Bellman 算子的唯一不动点。

Bellman 方程巧妙地将问题划分为当前成本和未来成本, 前者嵌入在  $c(x, y)$  方程中, 后者嵌入在  $q(y)$  方程中。要考虑折现问题, 我们只需将  $q(y)$  进行折现。我们的做法是, 将其乘以一个折现因子(discount factor)  $\beta \in (0, 1)$ 。Bellman 方程则变为  $q(x) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + \beta q(y)\} (\forall x \in V)$ , 并且 Bellman 算子为

$$Tq(x) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + \beta q(y)\} \quad (x \in V). \quad (5.5)$$

§3.1.2中, 在没有折现的情况下, 我们必须努力证明 Bellman 算子在  $U$  中, 即在所有

$q: V \rightarrow \mathbb{R}_+$  且  $q(n) = 0$  的集合中, 具有唯一不动点。有了折现, 证明就更容易了, 因为我们可以利用 Banach 压缩映射定理。

在下文中, 我们用整数  $1, \dots, n$  来识别  $V$  中的节点, 其中,  $d$  被识别为  $n$ 。然后, 我们将  $U$  理解为在  $\mathbb{R}^n$  中的非负向量  $q$ , 其中  $q(n) = 0$ 。(我们继续将向量  $q$  中的第  $x$  个元素记为  $q(x)$ , 但现在  $x$  位于  $[n]$  中。)

练习 5.1.7. 证明:  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  上的封闭子集。

练习 5.1.8. 证明:  $T$  在  $U$  上的逐点序关系是保序的。

练习 5.1.9. 证明: 对于任意的  $q \in U$  和  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , 我们有  $T(q + \alpha \mathbf{1}) = Tq + \beta \alpha \mathbf{1}$ 。

现在, 令  $\|\cdot\|_\infty$  为  $\mathbb{R}^n$  上的上确界范数(参见 §2.3.1)。我们说,  $T$  是  $U$  上  $\beta$  模的压缩。为了证明这一点, 令  $p, q \in U$ , 逐点观察到,

$$Tq = T(p + q - p) \leq T(p + \|q - p\|_\infty \mathbf{1}) \leq Tp + \beta \|q - p\|_\infty \mathbf{1},$$

其中, 第一个不等式由  $T$  的保序得到, 第二个不等式由练习5.1.9得到。因此有,

$$Tq - Tp \leq \beta \|q - p\|_\infty \mathbf{1}.$$

颠倒  $p$  和  $q$  的角色就能得到反向不等式。因此

$$|Tq(x) - Tp(x)| \leq \beta \|q - p\|_\infty, \quad \forall x \in [n].$$

在左侧取最大值得到  $\|Tq - Tp\|_\infty \leq \beta \|q - p\|_\infty$ , 这表明了  $T$  是  $\beta$  模的压缩。因此 Banach 定理适用, 也即存在唯一的不动点。

### 5.1.3 供给约束

虽然 §2.1.2中的投入-产出模型有许多有用的应用, 但它的线性结构可能是一种负担。一个自然而然的反对意见就是供给约束: 如果部门  $j$  将部门  $i$  的订单增加一倍, 我们不能总是期望部门  $i$  能够迅速地满足这种跳跃的需求。

在本节, 我们将研究供给约束对均衡的影响。这些约束条件引入了节点间的非线性关系, 而这一关系又能够影响到均衡, 也使得分析更具挑战性。

我们回顾一下 §2.1.2,  $d_i$  是对产品  $i$  的最终需求,  $x_i$  是部门  $i$  的总销售额,  $z_{ij}$  是从部门  $i$  到部门  $j$  的产业间销售额,  $a_{ij} = z_{ij}/x_j$  则是部门  $j$  每 1 单位美元产出中来自部门  $i$  投入的美元价值。

从我们之前在投入-产出模型中的均衡公式出发, 假设在短期内, 部门  $i$  的总产值受到一个正的常数  $\bar{x}(i)$  的约束。保持价格固定(在短期内), 这意味着部门  $i$  在单位产出方面存在产能限制。在我们的模型中, 产能约束的向量  $\bar{x} := (\bar{x}(i))_{i=1}^n$  可以是  $\mathbb{R}_+^n$  中的任意向量。

对于每个部门  $i$ , 我们将第 56 页的会计恒等式(2.1) 修改为,

$$x_i = \min \left\{ \sum_{j=1}^n o_{ij} + d_i, \bar{x}(i) \right\}, \quad (5.6)$$

其中,  $o_{ij}$  是部门  $j$  向部门  $i$  提供的订单的价值。因此, 如果部门  $i$  的产能没有约束, 那么其产出就是来自其他部门的订单和来自最终消费者的订单加总。然而, 如果  $\bar{x}(i)$  小于这个加总额, 那么部门  $i$  将只能生产  $\bar{x}(i)$ 。

这一模型的均衡则是在产能约束条件下满足所有订单的均衡。订单能够被满足的事实意味着,  $o_{ij} = z_{ij} = a_{ij}x_j$ 。将该式带入到式(5.6)中, 并重写为向量等式, 式 (5.6) 可以等价的表达为:

$$x = Gx, \quad \text{其中 } Gx := (Ax + d) \wedge \bar{x}. \quad (5.7)$$

下面的练习是解决式(5.7)不动点问题的关键。

**练习 5.1.10.** 证明: 对于任意的  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$  和  $k \in \mathbb{N}$ , 我们可以得到,

$$|Gx - Gy| \leq A|x - y|. \quad (5.8)$$

我们现在准备证明, 在每个部门都具有正的增加值的假设下, 存在唯一的不动点。

**命题 5.1.4.** 如果假设 2.1.1 成立, 那么  $G$  在  $\mathbb{R}_+^n$  中是全局稳定的。特别是, 受约束的生产模型具有唯一的均衡点  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ 。

证明. 如练习 2.1.2 所示, 假设 2.1.1 能够得出  $r(A) < 1$ 。加上,  $A \geq 0$ 。因此, 通过练习 5.1.10 和命题 5.1.3, 可知  $G$  在  $\mathbb{R}_+$  上是最终压缩的。所以, 唯一的均衡解存在。  $\square$

**备注 5.1.1.** 在命题 5.1.4 中, 可以用 §2.3.4.1 中讨论的较弱的生产条件来替代假设 2.1.1, 后者要求每个部门的增加值都为正。正如 §2.3.4.1 中所解释的, 对于  $r(A) < 1$  来说, 只要每个部门的增加值是非负的, 并且每个部门都有一个具有正的增加值的上游供应商, 就足够了。

## 5.1.4 不动点和单调性

Banach 不动点定理及其扩展是纯数学和应用数学中许多核心结果的基础。然而, 并非所有由网络模型生成的映射都具有压缩性质, 因此我们需要进一步深入探索。在本节中, 我们研究两个不动点结果, 它们放弃了压缩性, 而支持单调性。

### 5.1.4.1 存在性

如果没有压缩性质, 我们甚至需要更加努力才能获得不动点的存在性, 更不用说唯一性和收敛性了。如果所讨论的映射是非连续的, 则更加如此。然而, 如果映射是保序的 (order preserving), 那么通常可以通过 Knaster-Tarski 不动点定理的一些变化来获得存在性。

这里, 我们展示存在性结果的一个版本, 该版本针对我们的设定进行了优化, 同时避免了对序理论(order theory)的不必要偏离。在陈述这个定理前, 我们回顾一下, 在  $\mathbb{R}^n$  中的闭序区间(closed order interval)是一个如下形式的集合:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$$

其中,  $a$  和  $b$  是  $\mathbb{R}^n$  中的向量。同时, 对于所有的  $k$ , 如果有  $x_k \leq x_{k+1}$  (或者  $x_k \geq x_{k+1}$ ), 我们称  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  是递增的(increasing) (或者递减的(decreasing))。

**练习 5.1.11.** 令  $[a, b]$  为  $\mathbb{R}^n$  中的闭序区间, 并令  $G$  为  $[a, b]$  上的一个保序自映射。证明:

- (1)  $(G^k a)$  是递增的,  $(G^k b)$  是递减的。
- (2) 如果  $x$  是  $G$  在  $[a, b]$  中的一个不动点, 那么对于所有的  $k \in \mathbb{N}$ , 有  $G^k a \leq x \leq G^k b$ 。

对于  $S \subset \mathbb{R}^n$  上的自映射  $G$ , 如果  $x^*$  是  $S$  集合中自映射  $G$  的一个不动点, 并且对于  $S$  中  $G$  的每一个不动点  $x$  都有  $x^* \leq x$  (或者  $x \leq x^*$ ), 我们说  $x^*$  是  $G$  在  $S$  上的一个最小不动点(least fixed point) (或者最大不动点(greatest fixed point))。最后, 我们说  $G$  是

- 下连续的(continuous from below), 如果在  $S$  中  $x_k \uparrow x$  意味着  $Gx_k \uparrow Gx$ 。
- 上连续的(continuous from above), 如果在  $S$  中  $x_k \downarrow x$  意味着  $Gx_k \downarrow Gx$ 。

这里,  $x_k \uparrow x$  表示  $(x_k)$  是递增的并且  $x_k \rightarrow x$ 。 $x_k \downarrow x$  的定义类似。在下一个定理中,  $S := [a, b]$  是  $\mathbb{R}^n$  中的闭序区间,  $G$  是  $S$  上的自映射。

**定理 5.1.5.** 如果  $G$  在  $S$  上是保序的, 那么  $G$  在  $S$  中具有最小不动点  $x^*$  和最大不动点  $x^{**}$ 。并且,

- (1) 如果  $G$  是下连续的, 那么有  $G^k a \uparrow x^*$ ;
- (2) 如果  $G$  是上连续的, 那么有  $G^k b \downarrow x^{**}$ 。

**备注 5.1.2.** 与定理5.1.5中使用的设定相比, 以上内容实际上暗示了, 我们可以在一个更一般的设定中得到保序映射的不动点结果(例如, 参见 Davey & Priestley (2002) 定理 2.35)。鉴于我们关注的主要是有限网络, 定理5.1.5对我们来说也足以满足我们的研究目的了。

**定理 5.1.5的证明.** 在上述条件下, 根据 Knaster-Tarski 不动点定理, 存在最小和最大的不动点  $x^*$  和  $x^{**}$ 。(这是因为  $[a, b]$  是一个完全格(complete lattice)。有关完全格的定义和 Knaster-Tarski 定理的证明, 参见Davey & Priestley (2002)。)

对于定理的陈述(1), 假设  $G$  是下连续的, 并考虑序列  $(x_k) := (G^k a)_{k \geq 1}$ 。由于  $G$  是保序的(应用练习5.1.11), 可知该序列是递增的, 并且以  $x^*$  为上界。由于  $\mathbb{R}$  中的有界单调序列收敛, 向量序列  $x^k$  的每个分量都会在  $\mathbb{R}$  中收敛。因此, 根据引理2.3.1, 向量序列  $x^k$  会在  $\mathbb{R}$

中收敛到某个  $\bar{x} \in [a, x^*]$ 。最后,根据下连续性,我们有,

$$\bar{x} = \lim_k G^k a = \lim_k G^{k+1} a = G \lim_k G^k a = G \bar{x},$$

所以  $\bar{x}$  是一个不动点。

现在我们已经证明,  $(G^k a)$  会收敛到  $G$  的一个不动点  $\bar{x}$  (其中,  $\bar{x} \leq x^*$ )。因为  $x^*$  是  $S$  中  $G$  的最小不动点, 所以我们也有  $x^* \leq \bar{x}$ 。因此, 得到  $\bar{x} = x^*$ 。

陈述(2)的证明与陈述(1)相似, 略之。  $\square$

**备注 5.1.3.** 在前面的定理中,  $x^*$  和  $x^{**}$  可以相等, 在这种情况下,  $G$  在  $S$  中只有一个不动点。

**练习 5.1.12.** 考虑一个受约束的生产模型中的映射  $Gx = (Ax + d) \wedge \bar{x}$ 。在 §5.1.3 中, 我们证明了当  $r(A) < 1$  时,  $G$  在  $\mathbb{R}_+^n$  中有唯一的不动点。现在证明: 即使在  $r(A) < 1$  失效的条件下,  $G$  在  $\mathbb{R}_+^n$  中也至少有一个不动点。(继续假设  $A \geq 0, d \geq 0$  以及  $\bar{x} \geq 0$ 。)

#### 5.1.4.2 Du 定理

定理5.1.5是比较有用的, 因为它的假设相对较弱。但是, 它不能保证不动点存在的唯一性。因此, 它的结论相比于我们从 §5.1.1 中由压缩性假设得到的结果, 要弱得多。

为了在不施加压缩性假设的情况下得到唯一性, 我们现在考虑保序映射具备某些特定的形状性质。在此过程中, 我们会使用到 §6.1.5.2 中的凹函数和凸函数定义。

**定理 5.1.6 (Du).** 令  $G$  为闭序区间  $S = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$  上的保序自映射。在此设定下, 如果出现下面任意一种情形,

- (1)  $G$  是凹的(*concave*) 并且  $Ga \gg a$ , 或者
- (2)  $G$  是凸的(*convex*) 并且  $Gb \ll b$ ,

则  $G$  在  $S$  上是全局稳定的。

Du (1990) 中, 定理5.1.6的证明是在一个更抽象的设定下获得的, 有兴趣的读者可以参阅。

为了说明如何应用这些结果, 请考虑一个不再假设增加值必须为正的受约束生产模型, 因而不会强制要求  $r(A) < 1$ 。在练习5.1.12中, 我们得到了存在性。有了定理5.1.6, 我们也可以证明, 只要  $d \gg 0$  以及  $\bar{x} \gg 0$ , 就具有唯一性。

事实上, 我们已经看到,  $G$  是  $S := [0, \bar{x}]$  上的自映射, 当上述后一个条件成立时, 我们可以得到  $G0 = d \wedge \bar{x} \gg 0$ 。因此, 只要我们能确定  $G$  是凹的, 则定理5.1.6的结论成立。

**练习 5.1.13.** 证明:  $G$  在  $S$  上是凹的。(提示: 回顾 §6.1.5.2。)

这是 Du 定理的一个小扩展, 很快就会证明这是有用的:

**推论 5.1.7.** 令  $G$  是  $S = [a, b]$  上的保序自映射。如果  $G$  是凹的，并且存在一个  $\ell \in \mathbb{N}$  能够使得  $G^\ell a \gg a$ ，那么， $G$  在  $S$  上是全局稳定的。

证明. 假设推论5.1.7的条件成立。由于递增的凹算子的组合也是递增并且凹的，定理5.1.6意味着  $G^\ell$  在  $[a, b]$  上是全局稳定的。用  $\bar{v}$  表示其不动点，由于  $\{G^m a\}_{m \in \mathbb{N}}$  是递增的，并且由于子序列  $\{G^{m\ell} a\}_{m \in \mathbb{N}}$  会随着  $m \rightarrow \infty$  而向上收敛到  $\bar{v}$ ，我们一定可以得到  $G^m a \rightarrow \bar{v}$ 。类似的论证可以得到  $G^m b \rightarrow \bar{v}$ 。对于任意的  $v \in [a, b]$ ，我们有  $G^m a \leq G^m v \leq G^m b$ ，所以随着  $m \rightarrow \infty$  会有  $G^m v \rightarrow \bar{v}$ 。

最后一步是证明， $\bar{v}$  是  $G$  的唯一不动点。基于定理5.1.5，我们知道至少会存在一个不动点。现在假设  $v \in [a, b]$  就是这样一个点。那么，对于所有的  $m$  有  $v = G^m v$ 。同时，根据刚才的结果，还有  $G^m v \rightarrow \bar{v}$ 。因此， $v = \bar{v}$ 。证毕。  $\square$

## 5.2 金融网络

鉴于全球金融市场危机由来已久，经济学家和商业分析师开发了许多工具来评估银行和其他金融机构的信用状况。在 2007-2008 年起源于美国次贷市场和雷曼兄弟突然倒闭的重大金融危机之后，人们清楚地认识到，不能孤立地评估单个机构的财务健康状况。相反，在一个高度关联的金融系统中，从整个债权和债务网络的角度，来综合分析金融机构的偿付能力和信用状况是至关重要的。在本节中，我们将回顾金融危机，并应用网络方法来研究它们是如何演化的。

### 5.2.1 传染

在银行部门发生的一些金融危机有明显的外部诱因。一个突出的例子是，1921-1923 年左右发生在魏玛德国(Weimar Germany)的恶性通货膨胀，其诱因是为了支付《凡尔赛条约》约定的战争赔款而大量印制纸币。在这里，货币当局发挥了核心作用，而私人银行的行为则较为被动。

在银行、对冲基金和资产市场三者之间相互作用的推动下，金融部门本身似乎也出现了其他危机。许多时候，危机发生在资产价格上涨、经济增长强劲的繁荣期之后。通常情况下，危机的种子是在这个繁荣阶段埋下的，彼时银行扩张信贷规模，企业为越来越多的投机性商业计划筹集资金。在某些时候，投资者很清楚这些项目将无法达到预期收益，从而导致投资者急于退出。

这个周期的最后阶段对金融部门来说是痛苦的，因为资产价值的迅速下跌会迫使银行和其他金融机构通过清算长期贷款（通常伴随着巨大亏损），以及出售资产（通常面临着物价下跌、现金囤积、拒绝为金融部门或其他机构提供展期或延长短期贷款的现实情境），来获取短期资本。2007-2008 年的金融危机为这些危机动态变化提供了一个教科书式的例子。

2007-2008 年金融危机以及其他类似危机发生的一个关键方式是传染(contagion)，即金融压力在金融机构网络中传播的方式。如果一个机构受到压力，这种压力通常会扩散到持有该机构债权的投资者或交易对手。这个过程的结果不容易预测，因为会像第二章中研究的生产网络中的均衡一样，存在一个追尾问题：压力从机构  $A$  传播到机构  $B, C$  和  $D$ ，这反过来可能又会增加  $A$  的压力，依此类推。

在本节中，我们从现在标准的违约级联(default cascades)模型开始，研究金融传染。

### 5.2.2 违约级联

违约级联是金融传染的一种形式，即网络中某个节点的违约会导致其部分交易对手违约，然后在整个网络中传播。下面我们提出一个违约级联模型并分析其均衡。

#### 5.2.2.1 网络估值

考虑一个金融网络  $\mathcal{G} = (V, E, w)$ ，其中， $V = [n]$  指的是  $n$  个金融机构(即银行)的列表，边  $(i, j) \in E$  表示  $j$  向  $i$  提供贷款，贷款的规模为  $w(i, j)$ 。因此边指的是负债的方向，正如第34页的图1.17 所表示的：边  $(i, j)$  指的是  $i$  的负债和  $j$  的资产。同 §1.4.1 中所描述的， $i \in V$  的所有直接前驱(direct predecessors)的集合被记为  $\mathcal{I}(i)$ ，而所有直接后继(direct successors)的集合则被记为  $\mathcal{O}(i)$ 。

网络中的银行既有内部负债(internal liabilities)和外部负债(external liabilities)，也有内部资产(internal assets)和外部资产(external assets)。内部(即银行同业)负债和资产由权重函数  $w$  给出，即  $w(i, j)$  是  $i$  的负债，也等于从  $j$  贷款的规模，因而也是  $j$  的资产。正的权重表示存在交易对手风险：当  $j$  持有账面价值为  $w(i, j)$  的资产时，贷款是否能够被全额偿还取决于对银行  $i$  的压力以及在破产情况下的债务偿还规则。

我们对模型的基本要素使用以下符号： $x_i := \sum_{j \in \mathcal{O}(i)} w(i, j)$ ，表示银行  $i$  的同业负债总额，

$$\Pi_{ij} := \begin{cases} w(i, j)/x_i & \text{如果 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5.9)$$

为银行同业间的负债矩阵， $a_i$  和  $d_i$  则分别表示银行  $i$  持有的外部资产和外部负债。

在考虑银行  $j$  的同业资产时，我们需要区分“其对其他银行债权的账面价值  $\sum_{i \in \mathcal{I}(j)} w(i, j)$ ”和“在其交易对手方  $\mathcal{I}(j)$  部分或完全违约时的实际价值”。为此，我们引入一个清算向量  $p \in \mathbb{R}_+^n$ ，它是网络中每家银行提出支付的列表清单。特别地， $p_i$  是银行  $i$  向银行业内的交易对手的总支付，在特定清算向量的选择下，银行  $j$  在其内部贷款组合中实际收到的偿还支付为  $\sum_{i \in V} p_i \Pi_{ij}$ 。

上述最后一句话是关于银行业法律框架的假设，这意味着，从  $i$  到  $j$  的实际支付  $p_i \Pi_{ij}$  等比例于  $i$  负债于  $j$  的总金额。这个想法是说，银行业中的所有交易对手都具有同等的优先

权,因此,剩余的资金根据债权的相对规模在债权人之间进行分配。

令  $\hat{p}_j$  为银行  $j$  可用于偿还其所有同业间债务和外部债务的资金总量。该数量为:

$$\hat{p}_j = \min \left\{ a_j + \sum_{i \in V} p_i \Pi_{ij}, d_j + x_j \right\}. \quad (5.10)$$

$\min$  运算符中的右边项是银行  $j$  的总债务,左边项是手头上用于偿还这些债务的总金额,包括外部资产和其他银行的偿还支付。银行的还款额以其支付能力为限,但不超过其支付能力。

假设外部负债优先于银行同业间负债,这意味着对于银行  $j$  有,

$$p_j = \max\{\hat{p}_j - d_j, 0\}. \quad (5.11)$$

因此,  $j$  对银行同业间的支付是外部债务清算后的剩余部分,如果这些债务超出了银行的支付能力,银行就会破产,同时也不会向内部债权人支付任何费用,这是有限责任的一种形式。

结合式(5.10) 和式 (5.11),稍作重新排列后可得,

$$p_j = \max \left\{ \min \left\{ a_j - d_j + \sum_{i \in V} p_i \Pi_{ij}, x_j \right\}, 0 \right\}$$

现在,我们将  $p$ ,  $a$ ,  $d$  和  $x$  作为  $\mathbb{R}^n$  中的行向量,并把这个以  $j$  为标识的方程组写成向量形式。对  $\max$  和  $\min$  逐点取值,并使用符号  $\vee$  和  $\wedge$  分别表示最大和最小,我们则可以得到,

$$p = ((a - d + p\Pi) \wedge x) \vee 0. \quad (5.12)$$

该方程的解被称为银行系统的**均衡清算向量**(equilibrium clearing vector)。

**备注 5.2.1.** 均衡清算向量能够捕捉特定银行系统内传染的影响,也就是说,它追踪了模型内银行间拆借的全部网络效应。我们将研究这种均衡,同时也要认识到该模型的局限性,因为它假定了一种特定的优先权形式,并隐含地排除了某些非线性现象。我们会在 §5.2.3中回到这个主题。

### 5.2.2.2 不动点的存在性和唯一性

为了分析均衡的存在性和唯一性,我们引入算子  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,并定义为,

$$Tp = ((e + p\Pi) \wedge x) \vee 0, \quad (5.13)$$

其中,  $e := a - d$  代表外部净资产。显然,  $p \in \mathbb{R}_+^n$  是一个均衡清算向量,当且仅当它是  $T$  的一个不动点。

**练习 5.2.1.** 证明:算子  $T$  在  $\mathbb{R}^n$  上是连续的。

使用这个算子,不管基础设定的值以及网络配置如何,对于这个模型来说,确定至少存在一个均衡清算向量是没有问题的。

**练习 5.2.2.** 证明:上述银行模型总是至少有一个均衡清算向量。在这种一般情况下,你对均衡还有什么见解?

虽然在这个模型中,存在性是显然的,但唯一性不是:

**示例 5.2.1.** 如果  $n = 2$ ,  $e = (0, 0)$  和  $(1, 1)$ ,  $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $Tp = p$  等价于

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

在  $p = (1, 1)$  和  $p = (0, 0)$  时,都能求解该方程。

有几种方法可以证明  $T$  的不动点存在的唯一性。以下是其中一个:

**练习 5.2.3.** 证明:只要  $r(\Pi) < 1$ ,则  $T$  在  $S := [0, x]$  上就是全局稳定的。<sup>3</sup>

这使我们可以得到以下结果:

**命题 5.2.1.** 令  $\mathcal{G}$  为一个金融网络。如果对于每家银行  $i \in V$ , 存在一家银行  $j \in V$  并且有  $i \rightarrow j$ , 使得  $j$  的同业负债为 0, 那么  $T$  在  $S$  上就是全局稳定的,并且  $\mathcal{G}$  具有唯一的均衡清算向量。

证明. 根据构造,矩阵  $\Pi$  是次随机(substochastic)的。假设  $\Pi$  也是弱链次随机(weakly chained substochastic)的,那么根据命题2.3.5,我们可以得到  $r(\Pi) < 1$ ,并且根据练习5.2.3,可知  $T$  在  $S$  上是全局稳定的。因此,如果我们能够证明,在上述条件下  $\Pi$  是弱链次随机的,那么证明就完成了。

为了证明这一点,令  $\mathcal{G}$  是一个满足命题5.2.1 条件的金融网络。现在令  $i \in V$ ,我们知道存在一家银行  $j \in V$  和  $i \rightarrow j$ ,且  $j$  没有银行间负债。如果  $w(i, j) > 0$ ,则  $\Pi_{ij} > 0$ ,所以有向图  $\mathcal{G}$  之下  $i \rightarrow j$  意味着  $i \rightarrow j$  在由次随机矩阵  $\Pi$  诱导的有向图之中。同时,由于  $j$  没有银行同业负债,我们有  $x_j = 0$ ,因此  $\Pi$  的  $j$  行同样为零。特别是,  $\sum_k \Pi_{jk} = 0$ 。所以,按照定义,  $\Pi$  是弱链次随机的。□

**备注 5.2.2.** 命题5.2.1的证明也表明,  $T$  是最终压缩的,所以我们也可以通过计算  $T^k p$  的极限,来获得任意选择  $p \in S$  下的唯一不动点。

关于银行网络  $\mathcal{G}$  的结构,有几种可能的假设,都暗示了命题5.2.1的条件。例如,只要  $\mathcal{G}$  是强连通的(strongly connected),并且至少有一家银行的同业负债为 0,就足够了。下面,我们研究另一个与循环性(cyclical)相关的充分条件。

<sup>3</sup>如果你卡住了,这里有一个提示:使用本章提出的一个命题,证明  $r(\Pi) < 1$  意味着  $T$  在  $[0, x]$  上是最终压缩的。

如果一个有向图  $\mathcal{D}$  不包含循环 (no cycles), 则有向图  $\mathcal{D}$  称为**有向无环图 (directed acyclic graph)**。

**练习 5.2.4.** 证明: 如果  $\mathcal{D}$  是一个有向无环图, 那么, 对于  $\mathcal{D}$  中的任意节点  $i$ , 存在一个节点  $j$  能够使得  $i \rightarrow j$  并且  $\mathcal{O}(j) = 0$ 。

**练习 5.2.5.** 令  $\mathcal{G}$  是一个金融网络, 证明: 只要  $\mathcal{G}$  是一个有向无环图, 那么  $\mathcal{G}$  就有唯一的均衡清算向量。

### 5.2.2.3 非负的外部资产

在本节中, 我们将研究以下特殊情况:

(E1) 每家银行都有非零的同业拆借债务, 所以  $\Pi$  是一个随机矩阵, 并且

(E2) 外部净资产是非负的, 也即  $e = a - d \geq 0$ 。

在 (E1) 之下, 我们不能使用命题5.2.1, 因为在  $\Pi$  是随机的情况下, 我们总有  $r(\Pi) = 1$ 。尽管如此, 在对  $e$  和网络拓扑结构作一些限制的条件下, 我们仍然可以获得全局稳定性。下面是一个相对简单的例子, 我们稍后将尝试对其进行改进。

**练习 5.2.6.** 令  $\mathcal{G}$  是一个金融网络, 使得 (E1)-(E2) 成立。使用 Du 定理(第164页), 证明: 只要  $e \gg 0$ ,  $T$  在  $S := [0, x]$  中就具有唯一不动点。

条件  $e \gg 0$  是相当严格的。幸运的是, 事实证明我们可以在明显较弱的条件下获得全局稳定性。为此, 我们引入一个概念, 如果存在一个  $i \in V$ , 使得  $i \rightarrow j$  且  $e(i) > 0$ , 则称金融系统  $\mathcal{G}$  中的节点  $j$  是现金可及的(cash accessible)。换句话说,  $j$  在负债链的下游, 其直接上游至少存在一家银行, 该银行的外部净资产是正的。

**练习 5.2.7.** 证明: 如果 (E1)-(E2) 成立, 并且  $\mathcal{G}$  中的每个节点都是现金可及的, 那么对于某些  $k \in \mathbb{N}$ , 有  $T^k 0 \gg 0$ 。(这是一个相对具有挑战性的练习。)

有了练习5.2.7 的结果, 下一个引理就很容易建立了。

**引理 5.2.2.** 如果 (E1)-(E2) 成立, 并且  $\mathcal{G}$  中的每一个节点都是现金可及的, 那么,  $T$  就是全局稳定的, 并且  $\mathcal{G}$  具有唯一的清算向量  $p^* \gg 0$ 。

**证明.** 令  $\mathcal{G}$  如上所述。根据推论5.1.7, 我们只需证明  $T$  在  $[0, x]$  上是保序且凹的自映射, 并且对于某些  $k \in \mathbb{N}$ , 有  $T^k 0 \gg 0$ 。练习5.2.6的解表明,  $T$  是保序且凹的。练习5.2.7则验证了存在  $k \in \mathbb{N}$ , 有  $T^k 0 \gg 0$ 。  $\square$

只需花费少量的精力, 即可获得更强的结果。事实上, 在 (E1)-(E2) 下, 有一个很重要的意义是, 如果我们能够进一步厘清在  $e = 0$  时发生的模糊性情况, 则我们无需任何进一步假设即可获得不动点存在的唯一性。这个模糊性将在下一个练习中讨论, 进一步可以参考 §5.3。

**练习 5.2.8.** 条件 (E1) 和 (E2) 本身并不能确定, 模型中的均衡是不是在网络中每个银行的外部净资产为零的极端情形下产生的。用一个例子来说明这一点。<sup>4</sup>

尽管练习5.2.8表明, 当  $e = 0$  时, 结果具有模糊性, 但很自然地采用这样的约定: 只要  $e = 0$ , 均衡清算向量  $p^*$  就服从  $p^* = 0$ 。如果整个银行部门的净资产不为零, 那么在没有外部资本的情况下, 就不能启动正的偿还支付序列。

在下一个练习中, 如果存在一个  $j \in U$  使得  $j$  从  $i$  是可达的 (accessible), 我们就说  $U \subset V$  从  $i \in V$  中是可达的 (accessible)。

**练习 5.2.9.** 令  $P$  为  $V$  中所有现金可及的节点的集合, 令  $A$  为集合  $P^c$  中所有节点  $m$  的集合, 节点  $m$  满足  $P$  从  $m$  中是可达的, 并令  $N$  为集合  $P^c$  中所有节点  $n$  的集合, 节点  $n$  满足  $P$  从  $n$  中是不可达的。请注意,  $V = P \cup A \cup N$ , 并且这些集合是不相交的。证明:  $N$  和  $P$  都是吸收集 (absorbing sets)。

### 5.2.3 资产: 交叉持股

在本节中, 我们分析由Elliott et al. (2014) 构建的违约级联模型。该模型与 §5.2.2中研究的模型有几个方面的不同。

一是, 金融机构是通过交叉持股联系在一起的: 对于  $i, j \in V := [n]$ , 企业  $i$  拥有企业  $j$  的一部分股权  $c_{ij}$ , 这意味着企业  $j$  的失败会降低企业  $i$  的市场价值, 这反过来又会降低其他企业的市场价值, 以此类推。

二是, 也是更重要的, 在模型中引入失败成本, 这给模型增加了重要的非线性因素。失败成本加强了每个企业失败的影响, 进而导致更大的冲击在整个网络中传播。这一特征与一个直观的想法有关, 一家企业的失败可能会引发一波破产潮。

#### 5.2.3.1 账面和市场价值

我们现在描述模型的特征。令  $C = (c_{ij})_{i,j \in V}$  表示交叉持股 (cross-holdings) 比例的矩阵, 如上所述,  $0 \leq c_{ij} \leq 1 (\forall i, j)$ 。

**假设 5.2.1.** 对于所有的  $i \in V$ , 交叉持股矩阵满足  $\sum_k c_{ki} < 1$ 。

假设5.2.1意味着企业不完全由网络中的其他企业所拥有, 即对于所有的  $i$ , 网络外的投资者至少持有企业  $i$  的一部分股权。

企业  $i$  的账面价值 (book value) 由下式给出:

$$b_i = e_i + \sum_j c_{ij} b_j \quad (i \in V) \tag{5.14}$$

<sup>4</sup>提示: 每个随机矩阵至少有一个平稳分布。

这里的第一项  $e_i \geq 0$  表示企业  $i$  的外部资产, 第二项表示企业  $i$  交叉持股的价值。用向量形式进行表达, 上式则变为  $b = e + Cb$ 。

**练习 5.2.10.** 令  $I$  为  $n \times n$  的单位阵, 证明: 在假设 5.2.1 下, 矩阵  $I - C$  是可逆的, 并且方程  $b = e + Cb$  有唯一解为,

$$b = (I - C)^{-1}e. \quad (5.15)$$

同时证明:  $b \geq 0$ 。

**练习 5.2.11.** 提出一个关于矩阵  $C$  的较弱的条件, 也能使得  $I - C$  可逆。

有一个广泛接受的观点认为, 交叉持股人为地夸大了企业价值, 因为企业的账面价值(book values)之和, 超出了底层资产价值之和(即  $\sum_i e_i$ )。下面的练习将说明这一点。

**练习 5.2.12.** 证明: 如果  $e \gg 0$  并且  $\min_{i,j} c_{ij} > 0$  成立, 则能够推出  $\sum_i b_i > \sum_i e_i$ 。

由于这种人为的夸大因素, 我们将企业的账面价值  $b_i$  与它的**市场价值**(market value)  $\bar{v}_i$  区分开, 后者被定义为  $r_i b_i$ (其中  $r_i := 1 - \sum_k c_{ki}$ )。根据假设 5.2.1, 对于所有的企业  $i$  来说,  $r_i$  的值, 即外部投资者持有企业  $i$  的份额, 都严格为正。通过构造矩阵  $R := \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ , 我们可以将市场价值的向量形式写为  $\bar{v} = Rb$ 。代入式(5.15), 可得,

$$\bar{v} := Ae, \quad \text{其中 } A := R(I - C)^{-1}. \quad (5.16)$$

### 5.2.3.2 失败成本

到目前为止, 该模型都是非常简单的, 企业的市场价值与外部资产  $e$  呈线性关系。然而, 由于破产成本很高, 因此可以合理地假设企业的失败是有代价的。此外, 当企业的市场价值大幅下降时, 企业将难以筹集短期资金, 经常需要停止创收行为, 并出售远低于其潜在价值的非流动性资产。

我们现在引入失败成本。如前所述,  $\bar{v}_i$  是没有失败成本的市场价值(见式(5.16)), 令  $v_i$  代表存在失败成本的市场价值。将企业  $i$  的失败成本模型化为一个门槛函数(threshold function):

$$f(v_i) = \beta \mathbb{1}\{v_i < \theta \bar{v}_i\} \quad (i = 1, \dots, n),$$

其中,  $\theta \in (0, 1)$  和  $\beta > 0$  为参数。因此, 当  $v_i$  较大时, 成本为 0, 而当它们低于阈值  $\theta \bar{v}_i$  时, 成本为  $-\beta$ 。特别是, 当企业价值远低于没有失败情形下的市场价值  $\bar{v}_i$  时, 会产生离散的失败成本  $-\beta$ 。 $\theta$  越大, 企业越容易失败。

式(5.14)定义了没有失败成本的企业  $i$  的账面价值, 当存在失败成本时, 企业  $i$  的账面价值被定义为,

$$b_i = e_i + \sum_j c_{ij} b_j - f(v_i).$$

将  $f$  逐点应用到向量  $v$  之上, 可以将上式写成向量形式  $b = e + Cb - f(v)$ 。求解  $b$ , 得

到  $b = (I - C)^{-1}(e - f(v))$ 。对应的市场价值为,

$$v = Rb = A(e - f(v)) \quad (5.17)$$

请注意,如果没有企业失败,则我们有  $v_i = \bar{v}_i$ 。

### 5.2.3.3 均衡

式(5.17)是一个有  $n$  个未知数的非线性方程。求解式(5.17)能够得到向量  $v \in \mathbb{R}^n$ , 当且仅当  $v$  是算子  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的不动点, 亦即,

$$Tv = A(e - f(v)) \quad (5.18)$$

下面, 我们设定  $d := A(e - \beta \mathbf{1})$  和  $S := [d, \bar{v}]$ 。

**命题 5.2.3.**  $T$  是  $S$  上的自映射, 在  $S$  中有最小不动点  $v^*$  和最大不动点  $v^{**}$ , 同时

- (1) 序列  $(T^k d)_{k \in \mathbb{N}}$  会在有限步内向上收敛到  $v^*$ , 并且
- (2) 序列  $(T^k \bar{v})_{k \in \mathbb{N}}$  会在有限步内向下收敛到  $v^{**}$ 。

请注意, 存在  $v^* = v^{**}$  的可能性, 在这种情况下,  $T$  在  $S$  中具有唯一不动点。

**练习 5.2.13.** 证明: 命题5.2.3中的第一个陈述(第一句)。

为什么  $(T^k d)_{k \in \mathbb{N}}$  会在有限步内收敛到  $v^*$ ? 首先, 正如你在练习 5.2.13的解中看到的, 映射  $T$  是  $[d, \bar{v}]$  上的一个保序自映射, 所以  $Td \in [d, \bar{v}]$ 。特别是,  $d \leq Td$ 。迭代这个不等式, 并使用保序性质得到  $d \leq Td \leq T^2d \leq \dots$ , 所以  $(T^k d)$  确实是递增的。此外,  $T$  的范围是一个有限集, 对应如下形式的所有向量:

$$u = A(e - \beta w),$$

其中,  $w$  是一个仅包含 0 和 1 的  $n$  维向量。由于长度为  $n$  的二进制序列只有有限多个, 所以有限性成立。

**练习 5.2.14.** 鉴于上述事实, 证明:  $(T^k d)_{k \in \mathbb{N}}$  在有限步内向上收敛到  $v^*$ 。

可以应用类似的逻辑来证明  $(T^k \bar{v})_{k \in \mathbb{N}}$  在有限步内向下收敛到  $v^{**}$ 。

如果我们设定  $v^0 = \bar{v}$  和  $v^{k+1} = Tv^k$ , 我们可以将估值序列  $(v^k)$  视为一个动态过程, 并且可以将目前失败企业的数量  $m^k := \sum_i \mathbf{1}\{v_i^k < \theta\}$  理解为追踪破产潮。第一波破产的企业会给其他与该企业具有联系的健康企业带来压力, 这反过来又会导致进一步的破产, 如此循环。

**练习 5.2.15.** 证明: 序列  $(m_k)$  是单调递增的。

正如命题5.2.3中所讨论的, 序列  $(v^k)$  也可以写成  $(T^k \bar{v})$ , 是逐点递减的。换句话说, 每家企业的价值都不会增加。因此, 对于某些  $k$ , 如果  $v_i^k < \theta$ , 那么对于所有的  $j \geq 0$ , 都有  $v_i^{k+j} < \theta$ 。

图5.1展示了金融网络中可能出现的越来越多的破产潮, 颜色较浅的企业拥有相对较好的资产负债表, 黑色代表企业失败。生成该图的代码以及参数的信息, 可以在代码手册中找到。

### 5.3 章节说明

[Shin \(2010\)](#) 对系统性风险和 2007-2008 年金融危机做了一个很好的概述。[Battiston et al. \(2012\)](#) 研究金融网络中的连通性, 并引入了一种名为 DebtRank 的系统性影响的测算。[Bardoscia et al. \(2015\)](#) 提出了一个与 DebtRank 有关的不稳定性动态理论。[Demange \(2018\)](#) 提出了与 Katz 中心度相关的金融网络传染的威胁指数。[Bardoscia et al. \(2019\)](#) 分析了危机期间与偿付能力传染相关的风险。[Jackson & Pernoud \(2019\)](#) 研究了在债务和股权相互依存关系的金融网络中, 银行对风险资产组合的投资行为。[Jackson & Pernoud \(2020\)](#) 分析了金融网络中的最优救助。[Amini & Minca \(2020\)](#) 介绍了清算系统的建模, 分析了网络支付和资产价格的均衡。[Jackson & Pernoud \(2021\)](#) 对金融网络和系统性风险之间的关系进行了研究。

[Eisenberg & Noe \(2001\)](#) 研究了 §5.2.2.3中的模型设定, 这是关于违约级联网络方法的第一批论文之一。有关稳定性的更多详细信息, 请参见[Stachurski \(2022b\)](#)。如前所述, §5.2.3是基于 [Elliott et al. \(2014\)](#) 的论文, 该论文还包括了一个有趣讨论, 即跨网络的集成(integration)水平如何影响均衡。[Klages-Mundt & Minca \(2021\)](#) 以[Elliott et al. \(2014\)](#) 为例, 讨论了如何通过影响力最大化方法, 实现对经济网络的最佳干预。[Acemoglu et al. \(2021b\)](#) 研究了对未来违约的预期如何导致“信用冻结”(credit freezes)。

[Goebel & Kirk \(1990\)](#) 和 [Cheney \(2013\)](#) 对压缩映射和相关不动点理论进行了一般性的讨论。关于保序算子的不动点方法的更多信息, 请参见[Guo et al. \(2004\)](#), [Zhang \(2012\)](#), [Marinacci & Montrucchio \(2019\)](#) 和 [Deplano et al. \(2020\)](#) 等等。

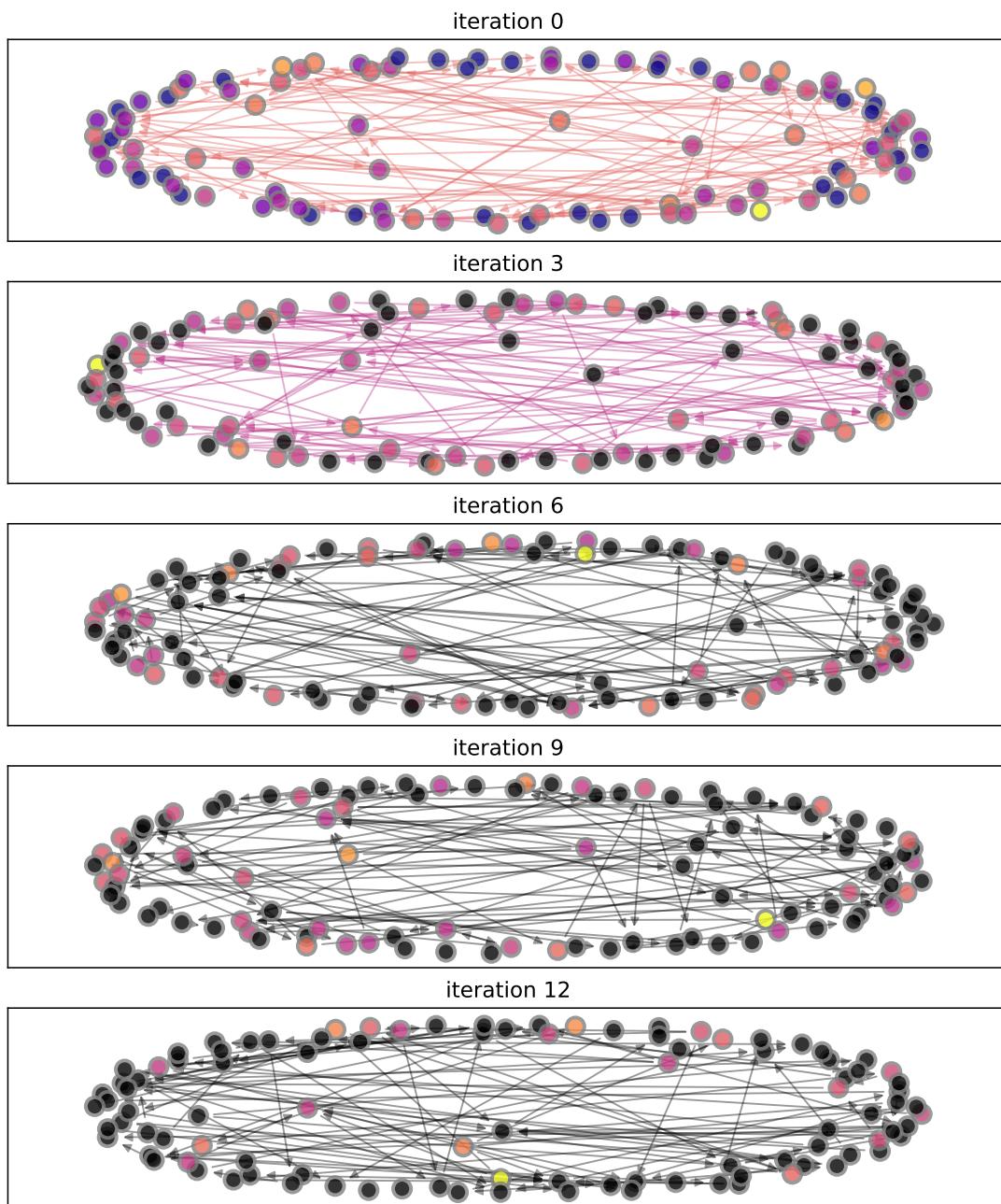


图 5.1: 金融网络中的破产潮

# 第六章 附录

## 6.1 数学回顾

本节主要对数学分析基础和线性代数的一些内容进行简要回顾。这里包含的内容应该在中级数理经济学课程中有所涉及,如果没有的话,在研究生课程刚开始的数学训练营中也会有所涉及。

(如果有人希望更详细地了解本节分析内容,我们推荐Bartle & Sherbert (2011), 该书结构严谨,文字优美。同时,适合本课程的高质量线性代数教程还包括Jänich (1994), Meyer (2000)、Aggarwal (2020) 和 Cohen (2021))。

### 6.1.1 集合和函数

第一步,我们对基本的术语和数学符号作出说明。

#### 6.1.1.1 集合

集合(set)指的是一个任意对象(objects)的汇总(collection),单个对象被称为集合的元素(elements)。我们假设读者熟悉基本的集合运算,如交集(intersections)和并集(unions)。如果  $A$  是一个有限集合,那么  $|A|$  指的是  $A$  中元素的数量。幂(power)应用到集合中表示为笛卡尔乘积(Cartesian products),因此,

$$A^2 := A \times A := \{(a, a') : a \in A, a' \in A\}, \text{ 等等。}$$

在此过程中,将  $A$  的幂集(power set)表示为  $\wp(A)$ ,也即由集合  $A$  的所有子集构成的集合。例如,

$$A = \{1, 2\} \implies \wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}.$$

设  $\mathbb{N}$  为自然数,  $\mathbb{Z}$  为整数,  $\mathbb{Q}$  为有理数,  $\mathbb{R}$  为实数(即有理数和无理数的合并)。对于  $\mathbb{R}$  中的  $x, y$ , 我们令

$$x \vee y := \max\{x, y\} \quad \text{和} \quad x \wedge y := \min\{x, y\}. \tag{6.1}$$

绝对值为  $|x| := x \vee (-x)$ 。对于  $n \in \mathbb{N}$ , 我们设定  $[n] := \{1, \dots, n\}$ 。

我们会用到如下的基本事实: 对于所有的  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

- $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;
- $(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$  和  $(a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c)$ ;
- $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$  和  $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ ;
- $|a \wedge c - b \wedge c| \leq |a - b|$ ;
- $|a \vee c - b \vee c| \leq |a - b|$ 。

其中, 第一项被称为**三角不等式**(triangle inequality)。另外, 如果  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ , 那么还有,

$$(a + b) \wedge c \leq (a \wedge c) + (b \wedge c). \quad (6.2)$$

**练习 6.1.1.** 证明: 对于所有的  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ , 我们有  $|a \wedge c - b \wedge c| \leq |a - b| \wedge c$ 。

### 6.1.1.2 等价类

令  $S$  为任意集合。 $S$  上的**关系**(relation) $\sim$  是  $S \times S$  的一个非空子集, 人们习惯将其记为  $x \sim y$ , 而不是  $(x, y) \in \sim$ , 以表示  $(x, y)$  存在  $\sim$ 。对于所有的  $x, y, z \in S$ , 如果下述情形成立,

- **自反性**(reflexivity):  $x \sim x$ ,
- **对称性**(symmetry):  $x \sim y$  意味着  $y \sim x$ ,
- **传递性**(transitivity):  $x \sim y$  和  $y \sim z$  意味着  $x \sim z$ ,

那么, 可以将  $S$  上的关系  $\sim$  称为**等价关系**(equivalence relation)。

$S$  上的任何等价关系都会将  $S$  划分为一系列互不相干的子集, 同时能够使它们的并集可以穷尽  $S$ , 这些子集也被称为**等价类**(equivalence classes)。对于每一个  $x \in S$ , 通过取所有与  $x$  等价的元素的集合, 可以构建出等价类。

**示例 6.1.1.** 令  $S$  为世界上所有的人的集合。如果  $x \sim y$  表示  $x$  和  $y$  生活在同一个国家, 那么  $\sim$  就是一个等价关系(检验公理)。等价类也即每个国家的人口。在  $S$  上划分出的分区是这些类的集合, 我们可以将其等同于世界上所有国家的集合。

### 6.1.1.3 函数

**函数**(function)  $f$  指的是从集合  $A$  到集合  $B$  的一个映射规则, 可以记为  $f: A \rightarrow B$  或者  $a \mapsto f(a)$ , 它将集合  $A$  的每个元素  $a$  与集合  $B$  中的一个且是唯一一个元素  $f(a)$  建立起

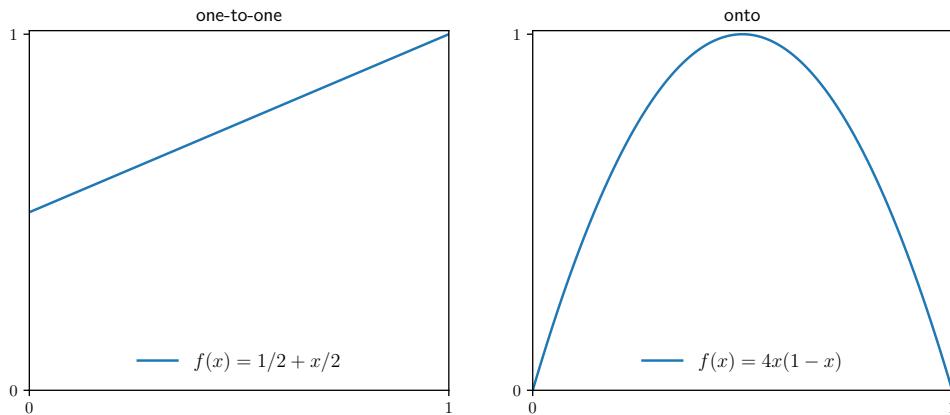


图 6.1: 在  $(0, 1)$  上的不同类型的函数

联系。集合  $A$  被称为  $f$  的**定义域(domain)**, 集合  $B$  被称为**对应域(codomain)**,  $f$  的**值域(range)**或**图像(image)**是:

$$\text{range}(f) := \{b \in B : b = f(a), \text{ 对于某些 } a \in A\}.$$

$f: A \rightarrow B$  的函数在如下不同情形下, 具有不同类型:

- 如果  $f(a) = f(a')$  意味着  $a = a'$ , 称函数是**单射的(one-to-one)**,
- 如果  $\text{range}(f) = B$ , 称函数是**满射的(onto)**,
- 如果函数同时是单射和满射的, 则可以称函数是**双射的(bijection)** 或者**一一对应的(one-to-one correspondence)**。

**示例 6.1.2.** 令  $S$  为一个非空集, 对于所有的  $x \in S$ , 如果存在一个映射  $I: S \rightarrow S$ , 能够使得  $I(x) = x$ , 那么这个映射被称为**恒等映射(identity map)**。对于任意选择的  $S$ , 恒等映射是一种双射。

图6.1的左图显示了一个在  $(0, 1)$  上的单射函数, 然而, 这个函数不是满射的。例如, 不存在任意的  $x \in (0, 1)$  有  $f(x) = 1/4$ 。右图则显示了一个满射函数, 其值域  $\text{range}(f) = (0, 1)$ , 然而, 这个函数不是单射的。例如,  $f(1/4) = f(3/4) = 3/4$ 。

图6.2的左图给出了一个既不是单射也不是满射的例子, 右图则给出了一个双射的例子。

#### 6.1.1.4 反函数

我们对函数基本性质感兴趣的一个原因是, 我们希望求解反问题。对于任意的一个非空集合  $S$  和一个函数  $f: S \rightarrow S$ , 反问题的概念就是求解  $y = f(x)$ (对于  $x \in S$ )。

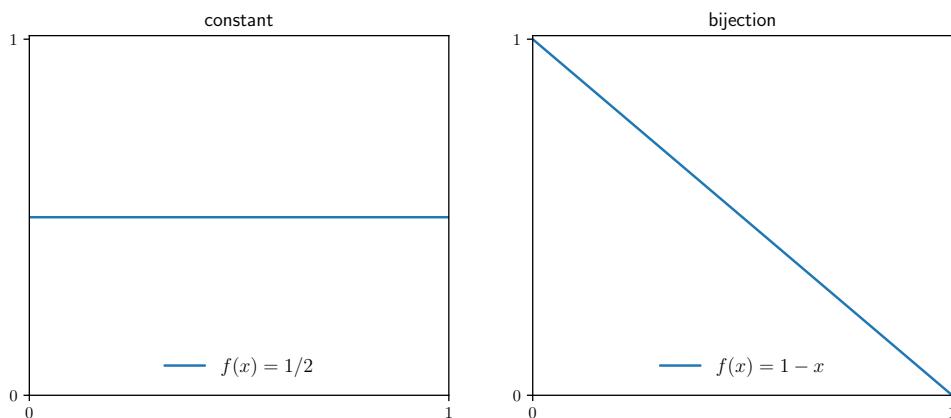


图 6.2: 双射和非双射函数的例子

在给出下一个结果之前, 我们回顾一下,  $f: S \rightarrow S$  的反函数(inverse function)指的是一个  $g: S \rightarrow S$  的函数, 该函数满足  $f \circ g = g \circ f = I$ , 其中  $I$  是  $S$  上的恒等映射。 $f$  的反函数通常记为  $f^{-1}$ 。

**引理 6.1.1.** 对于  $f: S \rightarrow S$  的映射, 以下陈述是等价的:

- (1)  $f$  是在  $S$  上的双射函数;
- (2) 对于每个  $y \in S$ , 存在唯一的  $x \in S$ , 能够满足  $f(x) = y$ ;
- (3)  $f$  在  $S$  上存在一个反函数。

**证明.** ((1)  $\implies$  (2)) 令  $y \in S$ 。由于  $f$  是满射的(onto), 即存在一个  $x \in S$ , 能够使得  $f(x) = y$ 。同时, 由于  $f$  是单射的(one-to-one), 所以最多只有一个这样的  $x$ 。

((2)  $\implies$  (3)) 令函数  $g: S \rightarrow S$  将每个  $y \in S$  映射为唯一的  $x \in S$ , 使得  $f(x) = y$ 。根据  $g$  的定义, 对于固定的  $x \in S$ , 我们有  $g(f(x)) = x$ 。此外, 对于每个  $y \in S$ , 点  $g(y)$  是  $f$  映射到  $y$  的点, 所以  $f(g(y)) = y$ 。

((3)  $\implies$  (1)) 令  $g$  为  $f$  的逆。为了证明  $f$  必须是满射的, 选择任意的  $y \in S$ , 由于  $f \circ g$  是恒等映射, 我们有  $f(g(y)) = y$ , 因此在  $S$  中存在一个点  $g(y)$ , 该点被映射到  $y \in S$  中。为了证明  $f$  是单射的, 令  $x, y \in S$ , 如果  $f(x) = f(y)$ , 那么有  $g(f(x)) = g(f(y))$ 。但由于  $g \circ f$  是恒等映射, 所以有  $x = y$ 。  $\square$

这里有一个很好的逻辑练习, 当我们解决线性反问题时, 它会变得很有用。

**练习 6.1.2.** 令  $S$  和  $T$  为非空集。对于  $f: S \rightarrow T$ , 如果存在  $g \circ f = I$ (其中  $I$  是  $S$  上的恒等映射), 则函数  $g: T \rightarrow S$  被称为  $f$  的左逆(left inverse)函数。证明: 当且仅当  $f$  存在左逆时,  $f$  是单射的。

### 6.1.1.5 实值函数

如果  $S$  是任意集合, 并且有  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们称  $f$  为**实值函数**(real-valued function)。 $S$  上所有实值函数的集合表示为  $\mathbb{R}^S$ 。当  $S$  有  $n$  个元素时,  $\mathbb{R}^S$  和  $\mathbb{R}^n$  是用不同符号表示的同一个集合。下一个引理阐明了这一点。

**引理 6.1.2.** 如果  $|S| = n$ , 那么

$$\mathbb{R}^S \ni h = (h(x_1), \dots, h(x_n)) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (6.3)$$

上式表示了  $\mathbb{R}^n$  和函数空间(function space) $\mathbb{R}^S$  之间一一对应的关系。

该引理指出, 一个函数  $h$  可以通过它在  $S$  上取值的集合来识别, 而  $S$  是实数的  $n$  元组( $n$ -tuple)。我们将在下文中经常使用这种识别方法。

将逻辑语句  $P$  的**指示函数**(indicator function) 表示为  $\mathbb{1}\{P\}$ , 如果  $P$  为真(或为假), 则取值为 1(或为 0)。

**示例 6.1.3.** 如果  $x, y \in \mathbb{R}$ , 则

$$\mathbb{1}\{x \leq y\} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \leq y \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

如果  $A \subset S$ , 其中  $S$  是任意集合, 那么对于所有的  $x \in S$ , 定义  $\mathbb{1}_A(x) := \mathbb{1}\{x \in A\}$ 。

如果一个非空集  $S$  是有限的, 或者是可以与自然数  $\mathbb{N}$  一一对应的, 则认为该非空集合是**可数的**(countable)。在第二种情形下, 我们可以通过将其写为  $\{x_1, x_2, \dots\}$  来枚举  $S$ 。任意的非空集合  $S$  如果不能被计数, 则称其是**不可数的**(uncountable)。例如,  $\mathbb{Z}$  和  $\mathbb{Q}$  是可数的, 而  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{R}$  中的每个非平凡区间(nontrivial interval)都是不可数的。

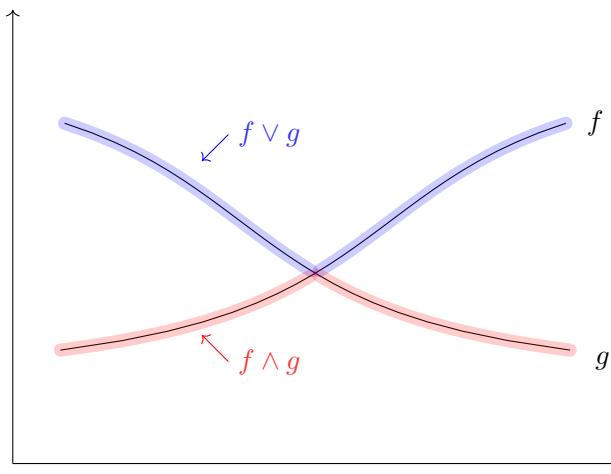
一般来说, 如果  $f$  和  $g$  是定义在某个共同集合  $S$  上的实值函数, 并且  $\alpha$  是一个标量, 那么, 每一个  $x \in S$ ,  $f + g$ 、 $\alpha f$  和  $fg$  等形式的表达式都是在  $S$  上的函数, 并且可以被定义为:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \text{等等。} \quad (6.4)$$

类似的,  $f \vee g$  和  $f \wedge g$  也是  $S$  上的函数, 并且可以被定义为:

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) \quad \text{和} \quad (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x). \quad (6.5)$$

图6.3给出了该函数的图形。

图 6.3: 在  $\mathbb{R}$  的子集上定义的函数  $f \vee g$  和  $f \wedge g$ 

如果  $f: A \rightarrow B$  和  $g: B \rightarrow C$ , 那么可以称  $g \circ f$  为  $f$  和  $g$  的复合 (composition)。它是一个将  $a \in A$  映射到  $g(f(a)) \in C$  的函数。

#### 6.1.1.6 不动点

令  $S$  为任意集合。 $S$  上的自映射 (self-map) 指的是某个函数  $G$ , 该函数能够将  $S$  映射到  $S$  本身。在处理任意集合的自映射时, 通常将  $x$  在  $G$  下的图像写成  $Gx$ , 而不是  $G(x)$ , 我们沿用这一惯例。

给定  $S$  上的自映射  $G$ , 如果有  $Gx = x$ , 则称点  $x \in S$  为  $G$  的不动点 (fixed point)。

**示例 6.1.4.** 在恒等映射  $I: x \mapsto x$  之下, 任意集合  $S$  的每一个点都是不动点。

**示例 6.1.5.** 如果  $S = \mathbb{N}$ , 并且  $Gx = x + 1$ , 那么  $G$  没有不动点。

图6.4给出了另一个例子,  $G$  为集合  $S = [0, 2]$  上的自映射。不动点指的是在  $x \in [0, 2]$  上  $G$  与 45 度线相交的数值。在该例中, 这样的点有三个。

在应用数学和数量经济学中, 求解非线性方程组最常见的技术之一就是将其转化为不动点问题, 然后运用不动点理论, 我们在本书中会看到许多这种应用。

**练习 6.1.3.** 令  $S$  为任意集合, 并令  $G$  为  $S$  上的自映射。对于所有的  $x \in S$  和  $k \geq m$ , 假设存在一个  $\bar{x} \in S$  和一个  $m \in \mathbb{N}$  能够满足  $G^k x = \bar{x}$ 。证明: 在此条件下,  $\bar{x}$  是  $G$  在  $S$  中的唯一不动点。

#### 6.1.1.7 向量

一个  $n$ -向量 ( $n$ -vector)  $x$  指的是由  $n$  个数字  $x = (x_1, \dots, x_n)$  组成的元组, 其中对于每个  $i \in [n]$  都有  $x_i \in \mathbb{R}$ 。一般来说,  $x$  既不是行向量, 也不是列向量——这与大多数科学计算

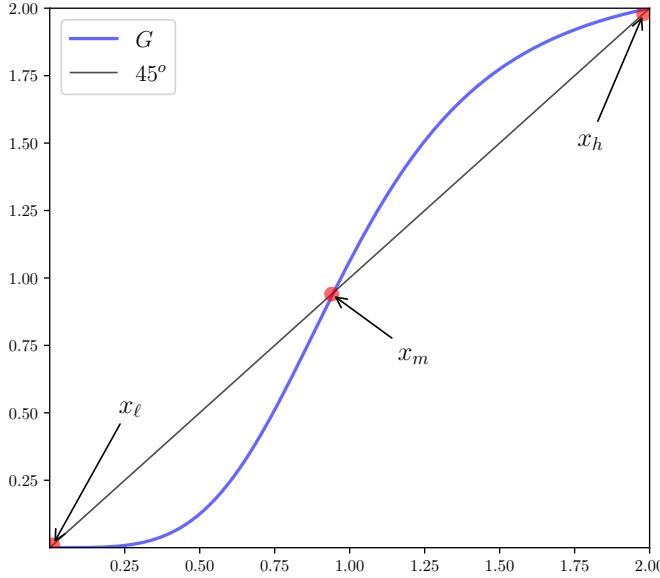


图 6.4:  $G: x \mapsto 2.125/(1+x^{-4})$  的图和不动点

环境的设定相吻合, 其中基向量结构是一个水平的数组。我们在使用矩阵代数时, 除非另有说明, 否则向量被视为列向量。

两个最基本的向量运算是向量加法和标量乘法, 这些运算是逐点展开的, 因此, 当  $\alpha \in \mathbb{R}$  和  $x, y \in \mathbb{R}^n$  时, 有

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{以及} \quad \alpha x := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

我们令  $\mathbb{R}^n$  为所有  $n$ -向量的集合,  $\mathbb{M}^{n \times k}$  为所有  $n \times k$  的矩阵。如果  $A$  是一个矩阵, 令  $A^\top$  为其转置。

- $x, y \in \mathbb{R}^n$  的内积(inner product)被定义为  $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 。
- $x \in \mathbb{R}^n$  的欧几里得范数(Euclidean norm)为  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 。

范数和内积满足三角不等式 (triangle inequality) 和柯西-施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz inequality), 它们分别表示为如下形式:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{和} \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

### 6.1.1.8 复数

我们回顾一下关于集合  $\mathbb{C}$  的一些基本事实。

$\mathbb{C}$  的每个元素都可以理解为一个点  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , 事实上,  $\mathbb{C}$  就是被赋予了一种特殊乘法形式的  $\mathbb{R}^2$ , 点  $(a, b)$  更多的时候被写成  $a + ib$ 。我们在下面进行详细说明。

$(a, b)$  的第一和第二投影被记为  $\operatorname{Re}(a, b) = a$  和  $\operatorname{Im}(a, b) = b$ , 分别称为**实部(real)**和**非实部(nonreal)**(或**虚部(imaginary)**)。符号  $i$  代表点  $(0, 1) \in \mathbb{C}$ 。根据传统做法, 在复数的背景下, 复数  $(a, 0) \in \mathbb{C}$  通常被更简化地记为  $a$ 。由于加法和标量乘法都是通过逐点定义的, 这意味着存在如下形式(也与预期相一致):

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)b = a + ib。$$

令  $z = (a, b)$ , 将  $z$  的**模(modulus)** 写成  $|z|$ , 并将其定义为元组  $(a, b)$  的欧几里得范数  $(a^2 + b^2)^{1/2}$ 。然后, 二维欧几里得空间被赋予了一个新的**乘法(multiplication)**运算形式, 被定义为

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)。 \quad (6.6)$$

注意, 根据这一规则和我们的惯例, 能够得到  $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ 。

与现实情形一致, 对于  $z \in \mathbb{C}$ , 指数  $e^z$  被定义为  $\sum_{k \geq 0} z^k / (k!)$ 。可以证明, 在这种扩展下, 指数函数依然能够保持加法性质  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ 。因此有,  $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ 。

与其提供坐标, 另一种表示向量  $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ (因而也满足  $z \in \mathbb{C}$ )的方法是提供一对  $(r, \varphi)$ , 其中, 可以将  $r > 0$  理解为向量的长度,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  则是角度。通过以下方式转化为欧几里得坐标:

$$a + ib = (a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)。$$

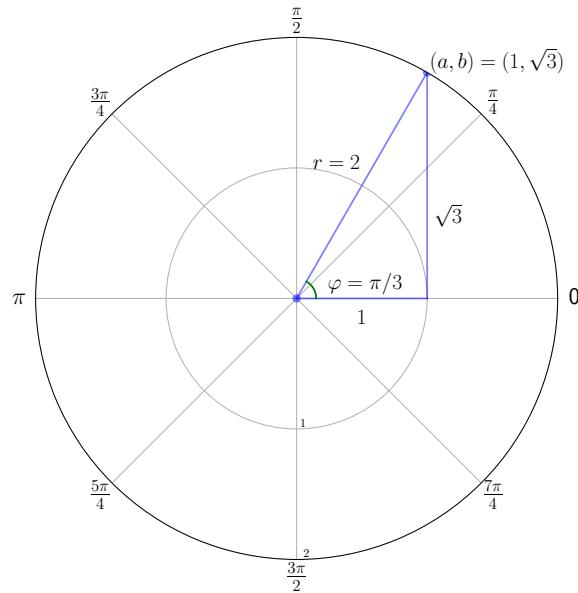
$(r, \varphi)$  的表示方式也被称为复数的**极坐标(polar form)** 形式。通过**欧拉公式(Euler's formula)**  $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$ , 我们还可以写出

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}。$$

图6.5显示了将  $\mathbb{C} \ni (1, \sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$  转化为极坐标  $2e^{i(\pi/3)}$ 。

这种表示方法的优势在我们进行交乘运算时表现得会很明显, 因为这样的规则要比式(6.6)更容易记忆和应用, 如下所示:

$$re^{i\varphi} se^{i\psi} = rs e^{i(\varphi+\psi)}。 \quad (6.7)$$


 图 6.5: 复数  $(a, b) = r e^{i\varphi}$ 

要计算“模”也很容易,因为根据三角公式,  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , 可以得到,

$$|r e^{i\varphi}| = |r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))| = r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{1/2} = r。 \quad (6.8)$$

**练习 6.1.4.** 证明:对于任意的  $u, v \in \mathbb{C}$ , 我们都有  $|uv| = |u||v|$ 。

### 6.1.2 序

序(order)结构在经济学中非常重要——通常比物理或化学等其他领域更重要。在此, 我们回顾一些基础知识。

#### 6.1.2.1 偏序

我们在序言中提到, 序理论方法构成了本书的核心部分。在本节中, 我们将介绍一些关键概念。

令  $P$  为一个非空集合。集合  $P$  上的偏序(partial order)指的是在  $P \times P$  上的关系  $\preceq$ , 对于  $P$  中任意的  $p, q, r$ , 它满足:

$$p \preceq p$$

自反性 (reflexivity)

$$p \preceq q \text{ 和 } q \preceq p \text{ 意味着 } p = q$$

反对称性 (antisymmetry)

$$p \preceq q \text{ 和 } q \preceq r \text{ 意味着 } p \preceq r$$

传递性 (transitivity)

当集合  $P$  与偏序  $\preceq$  配对时, 将集合  $P$  (或一对  $(P, \preceq)$ ) 称为偏序集 (partially ordered set)。

**示例 6.1.6.**  $\mathbb{R}$  上常见的序关系  $\leq$  就是  $\mathbb{R}$  上的偏序。与我们考虑的其他偏序不同的是, 它具有一些额外的性质, 即对于  $\mathbb{R}$  中每一个  $x, y$ , 要么存在  $x \leq y$ , 要么存在  $y \leq x$ 。因此,  $\leq$  也被称为  $\mathbb{R}$  上的全序 (total order) 关系。

**练习 6.1.5.** 令  $P$  为任意集合, 并考虑由等式所引发的关系, 即, 当且仅当  $p = q$  时,  $p \preceq q$  成立。证明: 这个关系是集合  $P$  上的偏序。

**练习 6.1.6.** 令  $M$  是任意集合。证明:  $\subset$  是  $\wp(M)$  上的偏序 (其中,  $\wp(M)$  是  $M$  的所有子集集合)。

**示例 6.1.7 (函数的逐点序).** 令  $S$  为任意集合, 对于  $\mathbb{R}^S$  上的  $f, g$ , 如果有  $f(x) \leq g(x)$ , 我们可以将其写为:

$$f \leq g \quad (\forall x \in S).$$

$\mathbb{R}^S$  上的这种  $\leq$  关系是一种偏序, 也被称为  $\mathbb{R}^S$  上的逐点序 (pointwise order)。

一个偏序集  $(P, \preceq)$  的子集  $B$  被称为:

- 递增的 (increasing), 如果  $x \in B$  和  $x \preceq y$  意味着  $y \in B$ 。
- 递减的 (decreasing), 如果  $x \in B$  和  $y \preceq x$  意味着  $y \in B$ 。

**练习 6.1.7.** 描述一下  $(\mathbb{R}, \leq)$  中递增集的集合。

**示例 6.1.8 (向量的逐点序).** 对于向量  $x = (x_1, \dots, x_d)$  和  $y = (y_1, \dots, y_d)$ , 我们说,

- 对于所有的  $i \in [d]$ , 如果  $x_i \leq y_i$ , 则记为  $x \leq y$ ,
- 对于所有的  $i \in [d]$ , 如果  $x_i < y_i$ , 则记为  $x \ll y$ 。

另外,  $x \geq y$  和  $x \gg y$  也能够进行类似定义。<sup>1</sup>  $\leq$  关系是  $\mathbb{R}^n$  上的偏序, 也称为逐点序 (pointwise order) (事实上, 本示例是示例 6.1.7 在引理 6.1.2 (第 179 页) 识别条件下的一个特例)。另一方面,  $\ll$  不是  $\mathbb{R}^n$  上的偏序 (哪条公理失效了?)。

**练习 6.1.8.** 从示例 6.1.11 可以看出,  $\mathbb{R}$  中的极限保留了弱不等式 (weak inequalities)。证明: 在  $\mathbb{R}^d$  中也是如此。特别地, 对于向量  $a, b \in \mathbb{R}^d$  和  $\mathbb{R}^d$  中的序列  $(x_n)$ , 证明: 对于所有的  $n \in \mathbb{N}$ , 如果  $a \leq x_n \leq b$  和  $x_n \rightarrow x$  成立, 则  $a \leq x \leq b$  成立。

<sup>1</sup> 向量上的符号  $x \leq y$  是标准的, 而  $x \ll y$  则不那么标准。在某些研究领域,  $n \ll k$  指的是“ $n$  远小于  $k$ ”。我们的用法与大多数关于偏序向量空间 (partially ordered vector spaces) 的文献一致。例如, 参见 Zhang (2012)。

### 6.1.2.2 向量的逐点运算

在本文中,对实数的运算,如 $|\cdot|$ 和 $\vee$ ,都能逐点应用到向量上。例如,对于 $\mathbb{R}^d$ 中的向量 $a = (a_i)$ 和 $b = (b_i)$ ,我们设定

$$|a| = (|a_i|), \quad a \wedge b = (a_i \wedge b_i) \quad \text{和} \quad a \vee b = (a_i \vee b_i)$$

(后两个是式(6.5)的特例。)

稍加思考就会发现,通过这个设定加上向量的逐点序,§6.1.1.1 中列出的序理论不等式和恒等式也适用于 $\mathbb{R}^d$ 。例如,对于任意的 $a, b, c \in \mathbb{R}^d$ ,都有 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 。

**练习 6.1.9.** 证明:如果 $B$ 是 $m \times k$ 矩阵以及 $B \geq 0$ ,那么对于所有的 $k \times 1$ 列向量 $x$ ,都有 $|Bx| \leq B|x|$ 。

### 6.1.2.3 单调性

给定两个偏序集 $(P, \preceq)$ 和 $(Q, \leq)$ ,如果下式成立,

$$p, q \in P \quad \text{和} \quad p \preceq q \quad \implies \quad Gp \leq Gq, \tag{6.9}$$

则称从 $P$ 到 $Q$ 的函数 $G$ 是保序的(order-preserving)。

**示例 6.1.9.** 令 $\mathcal{C}$ 为从 $S = [a, b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的所有连续函数,并令 $\leq$ 为 $\mathcal{C}$ 上的逐点偏序关系。定义:

$$I: \mathcal{C} \ni f \rightarrow \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

由于 $f \leq g$ 意味着 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ ,积分映射 $I$ 在 $\mathcal{C}$ 上是保序的。

**练习 6.1.10.** 令 $X$ 为一个随机变量,将 $\Omega$ 映射到有限集合 $S$ 。通过 $\ell h = \mathbb{E}h(X)$ ,定义 $\ell: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}$ 。证明:当 $\mathbb{R}^S$ 具有逐点序时, $\ell$ 是保序的。

如果 $P = Q = \mathbb{R}$ ,并且 $\preceq$ 和 $\leq$ 都等于 $\leq$ (即 $\mathbb{R}$ 中的标准序(standard order)),那么保序性质就简化为了常用的递增函数(increasing function)(即非递减函数)的概念,我们将在这种情形下互换使用“递增”和“保序”两个术语。<sup>2</sup>

此外,如果 $S = g$ 将 $A \subset \mathbb{R}$ 映射到 $\mathbb{R}$ ,那么,

- 如果 $x < y$ 意味着 $g(x) < g(y)$ ,那我们称 $g$ 是严格递增(strictly increasing)的,并且
- 如果 $x < y$ 意味着 $g(x) > g(y)$ ,那我们称 $g$ 是严格递减(strictly decreasing)的。

<sup>2</sup>文献中保序(order-preserving)的其他常用术语还包括“单调递增(monotone increasing)”、“单调(monotone)”和“保序(isotone)”。(译者注:其中,“isotone”也译为“保序”。

### 6.1.3 收敛

现在让我们回顾一下收敛性(convergence)和连续性(continuity)的基本知识。

给定任意集合  $S$ , 一个  $S$  值( $S$ -valued)序列(sequence)  $(x_n) := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  是一个从  $\mathbb{N}$  到  $S$  的函数  $n \mapsto x_n$ 。如果  $S = \mathbb{R}$ , 我们称  $(x_n)$  为实值序列(real-valued sequence)。 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  的子序列(subsequence)是一个形式为  $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  的序列, 其中,  $\sigma$  是一个从  $\mathbb{N}$  映射到其自身的严格递增函数。您可以考虑通过删除序列中的一些元素(同时仍然保留无穷多个), 来从序列中形成一个子序列。

在计算机科学和统计学中, 通常会根据序列的渐近性质对其进行分类, 这通常是通过大 O 表示法(big O notation)实现的。对于一个实值序列  $(x_n)$ , 如果存在一个非负序列  $(g_n)$  和一个常数  $M < \infty$ , 使得对所有的  $n \in \mathbb{N}$ , 有  $|x_n| \leq M g_n$ , 我们写为  $(x_n) = O(g_n)$ 。

**练习 6.1.11.** 对于所有的  $n \in \mathbb{N}$ , 令  $x_n = -5n + n^2$ , 证明:  $(x_n) = O(n^2)$  成立, 但  $(x_n) = O(n)$  不成立。

#### 6.1.3.1 实线的度量性质

以下定义对后文内容至关重要:

如果对于每个  $\varepsilon > 0$ , 存在一个  $N \in \mathbb{N}$ , 每当  $n \geq N$  时, 能够使得一个实值序列  $(x_n)$  满足  $|x_n - x| < \varepsilon$ (其中,  $x \in \mathbb{R}$ ), 那么称该实值序列  $(x_n)$  收敛(converges)到  $x$ , 并记为  $x_n \rightarrow x$ 。

**示例 6.1.10.** 如果  $x_n = 1 - 1/n$ , 则  $x_n \rightarrow 1$ 。事实上, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $|x_n - 1| < \varepsilon$  等价于  $n > 1/\varepsilon$ 。只要  $n$  足够大, 这一点显然成立。

**练习 6.1.12.** 证明: 如果  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $x_n \rightarrow a$  和  $x_n \rightarrow b$ , 则有  $a = b$ 。

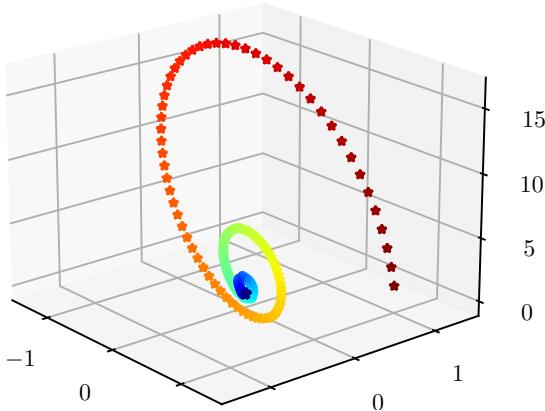
让我们陈述一些基本的极限定理, 这些定理在本书中都直接拿来使用了(你可以在Bartle & Sherbert (2011) 等资料中查看定理的证明。)

如果存在一个  $M \in \mathbb{R}$ , 使得对于所有的  $n \in \mathbb{N}$ , 有  $|x_n| \leq M$ , 则称序列  $(x_n)$  是有界(bounded)序列。同时,

- 如果对于所有的  $n \in \mathbb{N}$ , 有  $x_n \leq x_{n+1}$ , 则称该序列是单调递增(monotone increasing)的, 并且
- 如果对于所有的  $n \in \mathbb{N}$ , 有  $x_n \geq x_{n+1}$ , 则称该序列是单调递减(monotone decreasing)的。

如果该序列是单调递增或递减的, 则称该序列是单调(monotone)的。下一个有关单调序列的定理, 也是关于  $\mathbb{R}$  结构的一个深刻结果。

**定理 6.1.3.** 一个实值单调序列在  $\mathbb{R}$  中收敛, 当且仅当该序列有界。


 图 6.6:  $\mathbb{R}^3$  中向原点收敛的序列

定理6.1.3 的“当且仅当”部分的直观含义是:单调有界序列总是会收敛到  $\mathbb{R}$  中的某个点,因为  $\mathbb{R}$  中不包含间隙(gaps)。这句话与实线(real line)的“完备性”(completeness)密切相关,Bartle & Sherbert (2011) 以及许多其他关于实数分析的教程都对此进行了讨论。

接下来让我们考虑级数(series)。给定  $\mathbb{R}$  中的一个序列  $(x_n)$ , 我们令

$$\sum_{n \geq 1} x_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n \quad (\text{只要在 } \mathbb{R} \text{ 中的极限存在})。$$

更一般地说,给定任意可数  $S$  和  $g \in \mathbb{R}^S$ , 如果存在一个对  $S$  进行枚举的序列  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , 使得  $\sum_{n \geq 1} |g(x_n)|$  是有限的, 并且有  $\sum_{n \geq 1} g(x_n) = M$ , 那么, 我们记  $\sum_{x \in S} g(x) = M$ 。<sup>3</sup>

**练习 6.1.13.** 证明: 如果  $S$  是可数的,  $g \in \mathbb{R}^S$ , 并且存在  $x', x'' \in S$  能够使得  $g(x') > 0$  和  $g(x'') < 0$  成立, 则有  $|\sum_{x \in S} g(x)| < \sum_{x \in S} |g(x)|$ 。<sup>4</sup>

### 6.1.3.2 欧几里得空间的度量性质

现在我们回顾一下  $\mathbb{R}^d$  的度量性质, 对于某些  $d \in \mathbb{N}$ , 如果将向量  $x, y \in \mathbb{R}^d$  之间的距离理解为欧氏范数偏差  $\|x - y\|$ , 实值序列的收敛概念自然而然地扩展到这个环境中:如果对于每个  $\varepsilon > 0$ , 存在一个  $N \in \mathbb{N}$ , 每当  $n \geq N$  时, 能够使得  $\|x_n - x\| < \varepsilon$  成立, 则称  $\mathbb{R}^d$  中的序列  $(x_n)$  收敛(converge)到  $x \in \mathbb{R}^d$ 。在这种情形下, 我们记为  $x_n \rightarrow x$ 。图6.6显示了一个在  $\mathbb{R}^3$  中向原点收敛的序列(较“冷”的颜色在序列的后面)。

**练习 6.1.14.** 证明:  $\mathbb{R}^d$  中的极限具有唯一性。换言之, 即证明: 如果  $(x_n)$  是一个收敛到  $x \in \mathbb{R}^d$  和  $y \in \mathbb{R}^d$  的序列, 则  $x = y$ 。

<sup>3</sup>这个定义没有歧义, 因为当绝对值加总是有限值时, 每个可能的枚举都会产生相同值(例如, 参见 Bartle & Sherbert (2011) 的 §9.1 中所述的重排定理(rearrangement theorem))。

<sup>4</sup>提示: 从  $|S| = 2$  的情形开始, 论证, 在  $n$  个元素情形下的结论与该情形保持一致, 并且满足普通(弱)三角不等式  $|\sum_{x \in S} g(x)| \leq \sum_{x \in S} |g(x)|$ 。

给定任意点  $u \in \mathbb{R}^d$  和  $\varepsilon > 0$ , 定义  $u$  周围的  $\varepsilon$ -ball 空间为如下集合:

$$B_\varepsilon(u) := \{v \in \mathbb{R}^d : \|u - v\| < \varepsilon\}.$$

有了这个术语, 我们可以说, 如果序列  $(x_n)$  最终落在  $x$  周围的任意  $\varepsilon$ -ball 中, 那么  $(x_n)$  收敛到  $x \in \mathbb{R}^d$ 。

**命题 6.1.4.** 如果  $(x_n)$  和  $(y_n)$  是  $\mathbb{R}^d$  中的序列, 并且  $x_n \rightarrow x$  和  $y_n \rightarrow y$ , 那么:

- (1)  $x_n + y_n \rightarrow x + y$  和  $x_n y_n \rightarrow xy$  成立;
- (2)  $x_n \leq y_n (\forall n \in \mathbb{N})$  成立, 则意味着  $x \leq y$  成立;
- (3) 对于任意的  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha x_n \rightarrow \alpha x$  成立;
- (4)  $x_n \vee y_n \rightarrow x \vee y$  和  $x_n \wedge y_n \rightarrow x \wedge y$  成立。

如果对于所有的  $\varepsilon > 0$ , 存在一个  $N \in \mathbb{N}$ , 每当  $n, m \geq N$  时, 有  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ , 那么我们称序列  $(x_n) \subset \mathbb{R}^d$  为 **柯西(Cauchy)** 序列。

**练习 6.1.15.** 令  $d = 1$  并假定  $x_n = 1/n$ , 证明:  $(x_n)$  是 Cauchy 序列。

**练习 6.1.16.** 证明:  $\mathbb{R}^d$  中的每个收敛序列都是 Cauchy 序列。

上述练习是基于实数的公理性质分析的基本结果, 反之亦然:

**定理 6.1.5.**  $\mathbb{R}^d$  中的序列会收敛到  $\mathbb{R}^d$  中的一个点, 当且仅当该序列是 Cauchy 序列。

### 6.1.3.3 拓扑

令点  $u \in A \subset \mathbb{R}^d$ , 如果存在一个  $\varepsilon > 0$ , 使得  $B_\varepsilon(u) \subset A$  成立, 则称该点在  $A$  的**内部(interior)**。

**练习 6.1.17.** 令  $d = 1$ , 使得  $\|x - y\| = |x - y|$ 。证明: 0.5 在  $A := [0, 1)$  的内部, 但 0 不在。证明:  $\mathbb{R}$  中的有理数集  $\mathbb{Q}$  不包含内点。

令  $G$  和  $F$  都为  $\mathbb{R}^d$  的子集。如果每个  $u \in G$  都是  $G$  的内点, 则称  $G$  为**开(open)**集。对于所有的  $n \in \mathbb{N}$  以及  $F$  内的某些点  $x \in \mathbb{R}^d$ , 如果给定任意序列  $(x_n)$  满足  $x_n \in F$  和  $x_n \rightarrow x$ , 则称  $F$  为**闭(closed)**集。<sup>5</sup>换句话说, 对于在  $F$  中取值的收敛序列, 集合  $F$  包含了所有这些收敛序列的极限点。

**示例 6.1.11.** 由于在  $\mathbb{R}$  中的极限是保序的, 所以对于所有的  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \leq x_n \leq b$  和  $x_n \rightarrow x$  意味着  $a \leq x \leq b$ 。因此,  $\mathbb{R}$  中的任意闭区间  $[a, b]$  在标准(一维欧几里得)度量中都是闭集。

**练习 6.1.18.** 证明:  $G \subset \mathbb{R}^d$  是开集, 当且仅当  $G^c$  是闭集。

令  $B$  和  $K$  都为  $\mathbb{R}^d$  的一个子集。如果存在一个有限的  $M$ , 能够使得对于所有的  $b \in B$ , 有  $\|b\| \leq M$ , 则称  $B$  是**有界(bounded)**的。如果  $K$  中的每个序列都有子序列收敛到  $K$  中

<sup>5</sup>译者注: 在本书中, 有时我们也将这种集合译为“封闭集”。

的某个点,则称  $K$  是紧(compact)的。Bolzano-Weierstrass 定理告诉我们,当且仅当  $K$  是闭且有界时, $K$  是紧集。

#### 6.1.3.4 向量空间的连续性

令  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,对于每个序列  $(x_n) \subset A$  和  $x_n \rightarrow x$ ,如果在  $\mathbb{R}^k$  上  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  成立,那么我们称  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  在  $x \in A$  上是连续的(continuous)。如果  $f$  在所有的  $x \in A$  上都是连续的,那么我们称  $f$  在  $A$  上连续(continuous on  $A$ )。

示例 6.1.12. 如果  $f(x) = x^2$  是在  $A = \mathbb{R}$  上,那么  $f$  在所有的  $x \in \mathbb{R}$  上都是连续的,因为根据命题6.1.4, $x_n \rightarrow x$  意味着  $x_n^2 = x_n \cdot x_n \rightarrow x \cdot x = x^2$ 。

更一般地说,每个多项式函数在  $\mathbb{R}$  上都是连续的。初等函数  $\sin, \cos, \exp$  和  $\log$  在其定义域上都是连续的。

练习 6.1.19. 证明:如果  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,并且  $f, g$  都是将  $A \subset \mathbb{R}^d$  映射到  $\mathbb{R}^k$  的连续函数,那么, $\alpha f + \beta g$  也是连续的。

练习 6.1.20. 令  $a \in \mathbb{R}^d$ 。证明:由  $f(x) = x \wedge a$  和  $g(x) = x \vee a$  所定义的函数  $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,都是  $\mathbb{R}^d$  上的连续函数。

下一个引理有助于定位不动点。

**引理 6.1.6.** 令  $F$  为  $S \subset \mathbb{R}^d$  上的自映射。对于某些对(pair) $u, u^* \in S$ ,在  $m \rightarrow \infty$  的条件下,如果有  $F^m u \rightarrow u^*$ ,同时  $F$  在  $u^*$  上是连续的,那么  $u^*$  就是  $F$  的一个不动点。

证明. 假设引理6.1.6的条件成立。对于所有的  $m \in \mathbb{N}$ , 令  $u_m := F^m u$ 。根据连续性和  $u_m \rightarrow u^*$  我们有  $Fu_m \rightarrow Fu^*$ 。但序列  $(Fu_m)$  只是  $(u_m)$  省略了第一个元素,因此,给定  $u_m \rightarrow u^*$ ,我们一定能得到  $Fu_m \rightarrow u^*$ 。由于极限是唯一的,因此可以得出  $u^* = Fu^*$ 。□

#### 6.1.4 线性代数

接下来我们回顾线性代数的基本概念和定义。

##### 6.1.4.1 子空间和独立性

令  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个子集,如果

$$x, y \in E \quad \text{和} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha x + \beta y \in E,$$

那么,我们称  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间(linear subspace)。

换句话说, $E$  在加法和标量乘法运算下是闭(closed)的。也就是说:(1)  $\alpha \in \mathbb{R}$  和  $x \in E$  意味着  $\alpha x \in E$ , (2)  $x, y \in E$  意味着  $x + y \in E$ 。

练习 6.1.21. 令  $c \in \mathbb{R}^n$  和  $C \in \mathbb{M}^{n \times k}$ , 证明:

- $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle c, x \rangle = 0\}$  和
- $\text{range } C := \{y \in \mathbb{R}^n : y = Cx, \text{ 对于某些 } x \in \mathbb{R}^k\}$

都是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间, 并证明:  $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle c, x \rangle \geq 0\}$  不是。

集合  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $v_1, \dots, v_k$  的线性组合 (linear combination) 指的是一个形如下式的向量:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, \quad \text{其中 } (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k.$$

集合  $F \subset \mathbb{R}^n$  中元素的所有线性组合的集合称为  $F$  的张成(span), 并将其记为  $\text{span } F$ 。

示例 6.1.13. 练习6.1.21中的集合  $\text{range } C$  是矩阵  $C$  的列的张成, 被视为  $\mathbb{R}^n$  中的一组向量。集合  $\text{range } C$  也被称为  $C$  的列空间(column space)。

练习 6.1.22. 令  $F$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个非空子集。证明:

- (1)  $\text{span } F$  是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间, 并且
- (2)  $\text{span } F$  是所有线性子空间  $S \subset \mathbb{R}^n$  和  $S \supset F$  的交集。

图6.7显示了由以下三个向量所张成的线性子空间:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \text{和} \quad w = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 3 \\ -0.4 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

实际上, 这些向量所在的子空间  $H$  就是所有  $x \in \mathbb{R}^3$  的集合, 该集合满足  $\langle x, c \rangle = 0$ , 其中  $c = (-0.2, -0.1, 1)$ 。这个平面是一个二维物体。虽然我们在 §6.1.4.2中对这一术语进行了更精确的解释, 但关键思想是:

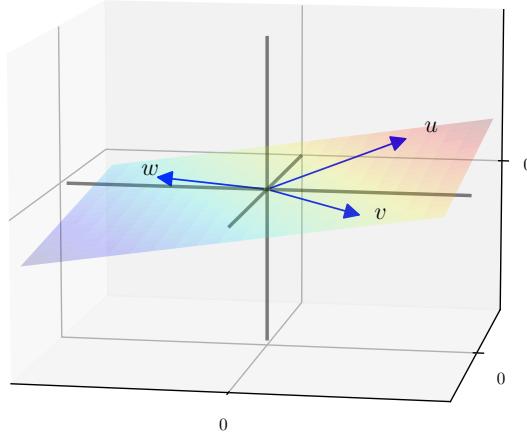
- 至少需要两个向量来张成  $H$ , 并且
- 任何额外的向量都不会增加张成。

令  $F := \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$  为一组有限向量, 如果存在一组实标量  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , 使得

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

则称  $F$  是线性无关(linearly independent)的。则如果  $F$  不是线性无关的, 称其是线性相关(linearly dependent)的。

练习 6.1.23. 证明:  $F$  是线性相关的, 当且仅当  $F$  中存在这样一个向量, 该向量可以写成  $F$  中其他向量的线性组合。


 图 6.7:  $\mathbb{R}^3$  中向量  $u, v, w$  的张成

练习 6.1.24. 证明以下内容:

- (1)  $\mathbb{R}^n$  中线性无关集合的每个子集, 也都是线性无关的。<sup>6</sup>
- (2)  $\mathbb{R}^n$  中线性相关集合的每个有限超集(superset), 也都是线性相关的。

示例 6.1.14. 很容易检验: 由

$$\delta_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \delta_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

所定义的集合  $E := \{\delta_1, \dots, \delta_n\} \subset \mathbb{R}^n$  是线性无关的。它的元素也称为  $\mathbb{R}^n$  的标准基向量 (canonical basis vectors)。

集合  $\mathbb{R}^n$  中标准基向量的张成等于所有的  $\mathbb{R}^n$ 。特别地, 每个  $x \in \mathbb{R}^n$  都可以表示为:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_i \quad \text{其中} \quad \alpha_i := \langle x, \delta_i \rangle. \quad (6.11)$$

另一方面, 我们也不能省略基向量  $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$  中的任一个元素, 并且仍然能够张成  $\mathbb{R}^n$ 。下一个定理概括了这一想法。

**定理 6.1.7.** 如果  $E = \{u_1, \dots, u_n\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中  $n$  个向量的集合, 那么当且仅当  $E$  是线性无关时, 有  $\text{span } E = \mathbb{R}^n$ 。

<sup>6</sup>根据排中律(law of excluded middle), 空集也必须是线性无关的。

例如,参见 Jänich (1994)。定理6.1.7抓住了这样一个概念:一组向量的线性无关意味着线性多样性,这也使得张成变得很大。

练习 6.1.25. 矩阵  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$  的零空间(null space)或核(kernel)指的是下述集合:

$$\text{null } A := \{x \in \mathbb{R}^k : Ax = 0\}.$$

证明:(1)  $\text{null } A$  是  $\mathbb{R}^k$  的线性子空间,以及(2)当且仅当  $A$  的列构成  $\mathbb{R}^n$  的线性无关的子集时,  $\text{null } A = \{0\}$ ,其中 0 是  $\mathbb{R}^k$  的原点。

#### 6.1.4.2 基向量和维度

令  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个线性子空间。如果集合  $B$  是线性无关的且  $\text{span } B = V$ ,则可以将集合  $B \subset V$  称为  $V$  的基(basis)。

基背后的关键思想是:如果  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  张成了某些线性子空间  $V$ ,那么  $V$  的每个元素都可以写成集合  $S$  中元素的线性组合。并且,如果  $S$  是线性无关的(因此是一个基),那么这个表达式同时也是唯一的,也即:对每个  $u \in V$ ,恰好只有一个  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ ,能够使得下式成立,

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k.$$

事实上,如果  $u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$  是另一种表示方法,那么,从上式中减去该式,我们有:

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = 0.$$

因为假设  $S$  是线性无关的,所以对于所有的  $i \in [k]$ ,会产生  $\alpha_i = \beta_i$ 。

并不奇怪,鉴于它们术语的表达,标准基向量  $E := \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$  作为整个空间  $\mathbb{R}^n$  的基,具有系数  $\alpha_i = \langle x, \delta_i \rangle$  的表达式(6.11)是唯一的。

**定理 6.1.8.** 如果  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  的非零线性子空间,那么,

- (1) $V$  至少有一个基,并且
- (2) $V$  的每个基都有相同数量的元素。

定理6.1.8是一个比较深刻的结果。例如,参见Jänich (1994)。该定理(2)中所说的基的元素的数量也被称为  $V$  的维度(dimension),记为  $\dim V$ 。

定理6.1.8中,“非零”约束是针对  $V = \{0\}$  的情况而言的,这种情形是一个没有任何基的线性子空间。同意线性子空间  $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$  的维度为 0 是明智的,并且也是标准做法。

维度是用来衡量一个线性子空间的“大小”的。为了说明这一点,考虑系统  $Ax = b$ ,其中  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$  和  $b \in \mathbb{R}^n$ 。是否存在一个  $x$  可以求解这个系统?如果  $A$  的列空间很大(见示例6.1.13),这将更有可能。当列更加线性“多样化”时,将获得较大的张成。换句话说,我

们希望在  $A$  的列中存在一个线性无关的大子集, 而当  $A$  的张成是高维 (high-dimensional) 时, 这一结果显然是成立的。

为了量化这些想法, 我们将  $A$  的秩(rank) 定义为:

$$\text{rank}A := \dim(\text{range}A) = A \text{ 的列空间的维度。}$$

**定理 6.1.9.** 对于任意矩阵  $A$ , 以下数量是相等的:

- (1)  $\text{rank}A$ ,
- (2)  $A$  的线性无关的列的最大数量,
- (3)  $A$  的线性无关的行的最大数量。

例如, 参见 Aggarwal (2020) 的第二章或 Jänich (1994) 的第五章。根据练习 6.1.26, 对于  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$ , 我们有  $\text{rank}A \leq k$ 。如果  $\text{rank}A = k$ , 则称  $A$  具有列满秩(full column rank)。

一般来说, 一个线性子空间  $V$  本身就包含了许多其他线性子空间(例如, 通过原点的平面包含许多通过原点的线, 每条线都是线性子空间)。但是, 不存在与  $V$  具有相同维度的  $V$  的适当子空间(即, 不存在包含在  $V$  中且与之不同的线性子空间)。下一个定理阐述了这一事实。

**定理 6.1.10.** 如果  $U, V$  是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间, 那么,  $U \subset V$  成立就意味着  $\dim U \leq \dim V$  成立。同时, 当且仅当  $U = V$  时, 等号成立。

**练习 6.1.26.** 令  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个线性子空间, 利用上面给出的结果, 证明:

- (1)  $\mathbb{R}^n$  的唯一  $n$  维线性子空间是  $\mathbb{R}^n$ 。
- (2) 如果  $A \subset U$  是有限的, 并且  $|A| > \dim U$ , 那么  $A$  是线性相关的。

第(2)部分与图 6.7 相关。该图中的平面是二维的(也正如我们在下面 §6.1.4.3 中确认的), 而位于该平面内的任意三个向量必然是线性相关的。

### 6.1.4.3 线性映射是矩阵

我们将在接下来的章节中看到, 许多非线性动态模型和估计问题可以用高维空间中的线性运算来表示。现在我们来说明线性映射的定义及其与矩阵的联系。

对于所有的  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  和所有的  $u, v \in \mathbb{R}^k$ , 如果有

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

则将上述从  $\mathbb{R}^k$  到  $\mathbb{R}^n$  的函数  $u \mapsto Au$  称为线性(linear) 函数。在本书中,  $A$  有时也被称为算子(operator), 而不是函数, 但它们的含义是相同的。

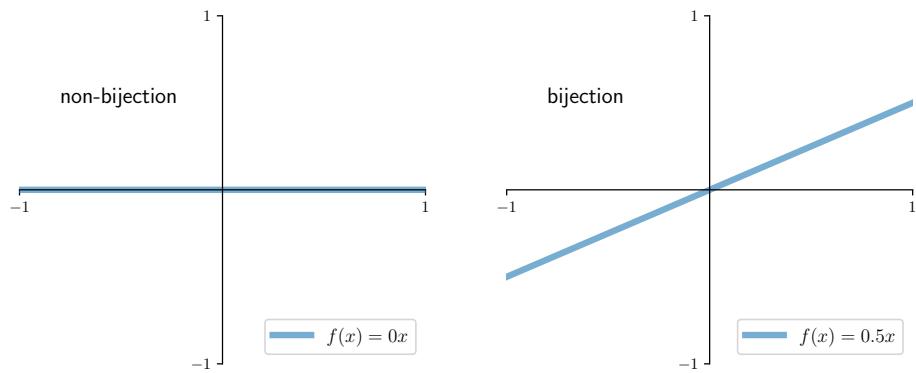


图 6.8: 单射和满射性质的等价性

**练习 6.1.27.** 令  $s, t \in \mathbb{R}$ 。证明:由  $Au = su + t$  定义的  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\mathbb{R}$  上的线性函数, 当且仅当  $t = 0$ 。

**练习 6.1.28.** 令  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为线性双射。根据引理6.1.1, 可知算子  $A$  有一个逆  $A^{-1}$ , 能够将  $\mathbb{R}^n$  映射到  $\mathbb{R}^n$  自身。证明:  $A^{-1}$  是线性的。

线性算子最引人注目和有用特性之一就是, 当定义域 (domain) 和对应域 (codomain) 一致时, 单射 (one-to-one) 和满射 (onto) 的性质是等价的。

**定理 6.1.11.** 令  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是线性的。算子  $A$  是单射函数, 当且仅当它是满射函数。

该定理的证明可以在 Jänich (1994) 或 Stachurski (2016) 中找到。图6.8在一维情形下展示了这一结果。在  $\alpha \neq 0$  的条件下, 当且仅当线性映射  $f(x) = \alpha x$  是单射的, 它才是满射的。

当矩阵  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$  将  $\mathbb{R}^k$  中的(列)向量  $u$  发送到  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $Au$  进行映射识别时, 矩阵  $A$  是从  $\mathbb{R}^k$  到  $\mathbb{R}^n$  的线性函数。事实上, 对于每个线性映射  $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 只存在唯一的  $M_A \in \mathbb{M}^{n \times k}$ , 使得

$$Au = M_A u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^k. \quad (6.12)$$

(例如, 参见 Kreyszig (1978) 的 §2.9 节)。因此, 在有限维度的设定中, 线性映射集和矩阵集是一一对应的。

#### 6.1.4.4 线性超平面

我们在练习6.1.21中已经确认了, 对于给定的非零  $c \in \mathbb{R}^n$ , 由  $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle c, x \rangle = 0\}$  定义的  $\mathbb{R}^n$  的子集是  $\mathbb{R}^n$  的一个线性子空间。任意这种形式的集合  $H$  都被称为  $\mathbb{R}^n$  中的线性超平面 (linear hyperplane)。向量  $c$  被称为超平面的法向量 (normal vector)。

**定理 6.1.12** (秩-零化度定理(Rank-Nullity Theorem)). 对于每个  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$ , 我们都有,

$$\text{rank } A + \dim(\text{null } A) = k.$$

**示例 6.1.15.** 如果  $A$  具有线性无关的列, 那么有  $\text{rank } A = k$ , 并且  $A$  也被称为具有列满秩。回顾练习6.1.25, 这也正是  $\text{null } A = \{0\}$  设定下的情形。因此,  $\dim(\text{null } A) = 0$ , 定理6.1.12成立。

在图6.7之后的讨论中, 我们说线性超平面表明  $\mathbb{R}^3$  中有一个二维的子集。下一个例子概括了这一想法。

**示例 6.1.16.** 一个线性超平面  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = 0\}$  的维度为  $n - 1$ , 其中  $c \neq 0$ 。要看到这一点, 只需将定理6.1.12中的  $A$  设定为  $c$ , 视为  $1 \times n$  的行向量。那么就有,  $H = \text{null } A$ 。并且

$$\dim H = \dim \text{null } A = n - \text{rank } A = n - 1.$$

(这里  $\text{rank } A = 1$  由定理6.1.9得到。)

#### 6.1.4.5 非奇异线性系统

应用建模中的一项关键任务是求解线性系统, 例如  $Ax = b$ , 其中,  $A$  是矩阵,  $x$  和  $b$  是可相乘的列向量。该系统可以是欠定的(underdetermined)、超定的(overdetermined)或适定的(exactly determined)(即方程数与未知数相同)。在本节中, 我们考虑最后一种情况, 该情形下的理论也是比较直接的。

令  $A$  和  $B$  在  $\mathbb{M}^{n \times n}$  中, 并假设  $AB = BA = I$ 。那么,  $B$  就可以被称为  $A$  的逆(inverse), 记为  $A^{-1}$ , 而  $A$  则可以被称为是可逆的(invertible)或非奇异的(nonsingular)。

下一个定理指出, 对于方阵, 具有左逆或右逆的性质等价于非奇异性。

**定理 6.1.13.** 给定  $\mathbb{M}^{n \times n}$  中的  $A$ , 以下陈述是等价的:

- (1) 存在一个  $L \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 能够使得  $LA = I$ ;
- (2) 存在一个  $R \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 能够使得  $AR = I$ 。

如果其中之一成立(因此两个也均成立), 那么,  $A$  就是非奇异的, 并且有  $L = R = A^{-1}$ 。

**证明.** 令  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 并假设(1)成立, 这意味着  $A$  有一个左逆。根据练习6.1.2, 映射  $x \mapsto Ax$  在  $\mathbb{R}^n$  中一定是单射的。根据定理6.1.11, 这意味着同一函数也是满射的。因此,  $x \mapsto Ax$  是一个双射映射, 因而是可逆的(根据引理6.1.1)。根据练习6.1.28, 反函数也是线性的, 因此可以用一个矩阵来表示。我们将其表示为  $A^{-1}$ 。对于左逆  $L$ , 我们有  $L = A^{-1}$ , 这是因为  $L = L(AA^{-1}) = (LA)A^{-1} = A^{-1}$ 。

现在假设存在一个  $R \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 使得  $AR = I$ 。那么,  $A$  是  $R$  的左逆, 根据前面的论证,  $R$  是可逆的, 并且有  $A = R^{-1}$ 。两边预乘  $R$  得到  $RA = I$ , 所以  $R$  也是  $A$  的左逆。现在我们

知道,这意味着  $A$  是非奇异的,并且有  $R = A^{-1}$ 。

总之,如果(1)或(2)成立,则  $A$  一定是非奇异的,并且左右逆均等于  $A^{-1}$ 。  $\square$

考虑线性系统  $Ax = b$ ,其中, $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  和  $b \in \mathbb{R}^n$ ,我们寻求的解是  $x \in \mathbb{R}^n$ 。下一个定理提供了  $x$  总是唯一确定的条件。

**定理 6.1.14.** 下列陈述是等价的:

- (1) 对于每个  $b \in \mathbb{R}^n$ ,方程  $Ax = b$  有唯一解;
- (2) $A$  的列是线性无关的;
- (3) $A$  的列构成了  $\mathbb{R}^n$  的一组基;
- (4) $\text{null } A = \{0\}$ ;
- (5) $\text{rank } A = n$ ;
- (6) $A$  是非奇异的。

符号  $\det A$  表示的是  $A$  的行列式 (determinant)。相关定义请参见 Jänich (1994) 或 Cohen (2021)。我们只关注,对于  $n \times n$  的矩阵  $A$  和  $B$ ,

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  成立,
- 对于所有的  $\alpha \in \mathbb{R}, \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$  成立,
- 只要  $A$  是非奇异的,  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$  就成立。

定理6.1.14中的大多数等价关系都可以从上面给出的结果中建立。其关键思想是,在这些等价条件下, $A$  的列构成了  $\mathbb{R}^n$  的基,因此任意  $b \in \mathbb{R}^n$  都可以唯一地表示为这些列元素的线性组合。换句话说,  $Ax = b$  中存在唯一的  $x \in \mathbb{R}^n$ 。剩下的几点只是说  $A$  的列构成了  $\mathbb{R}^n$  的基的几种等价方式。

**练习 6.1.29.** 令  $A$  和  $B$  是能够满足矩阵  $AB$  成立的两个矩阵,证明:  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank } A$ 。并证明,当且仅当  $B$  是非奇异时,两者相等。(提示:使用定理6.1.10。)

#### 6.1.4.6 正交性

我们回顾一下,如果  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $u, v$  满足  $\langle u, v \rangle = 0$ ,那么我们称  $u, v$  是正交的 (orthogonal),并记为  $u \perp v$ 。对于  $\mathbb{R}^n$  中的一个线性子空间  $L$ ,只要  $u \perp v (\forall v \in L)$ ,那么我们称  $u \in \mathbb{R}^n$  正交于  $L$  (orthogonal to  $L$ ),并记为  $u \perp L$ 。

**练习 6.1.30.** 将线性子空间  $L$  的正交补 (orthogonal complement) 定义为  $L^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp L\}$ 。证明: $L^\perp$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个线性子空间。

**练习 6.1.31.** 证明:对于任意线性子空间  $L \subset \mathbb{R}^n$ ,我们都有  $L \cap L^\perp = \{0\}$ 。

令集合  $O \subset \mathbb{R}^n$ , 如果  $O$  中任意两个不同元素是正交的, 则将向量集  $O$  称为正交集 (orthogonal set)。对于任意正交集  $O$ , 下式的毕达哥拉斯定律 (Pythagorean law) 总是成立的,

$$\left\| \sum_{u \in O} u \right\|^2 = \sum_{u \in O} \|u\|^2.$$

练习 6.1.32. 证明: 正交性意味着线性无关, 也即:

$$O \subset \mathbb{R}^n \text{ 是正交的并且 } 0 \notin O \implies O \text{ 是线性无关的。}$$

令正交集  $O \subset \mathbb{R}^n$ , 对于所有的  $u \in O$ , 如果  $\|u\| = 1$  成立, 则将正交集  $O$  称为标准正交集 (orthonormal set)。如果  $L$  是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间,  $O$  在  $L$  中是标准正交的, 并且  $\text{span}O = L$ , 那么  $O$  就被称为  $L$  的标准正交基 (orthonormal basis)。例如, 标准基向量  $\{e_1, \dots, e_n\}$  构成了  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基。

练习 6.1.33. 解释一下, 为什么子空间  $L$  的标准正交基  $O$  实际上就是  $L$  的基, 也即 §6.1.4.2 中所定义的。

对于某些  $n \in \mathbb{N}$ , 如果矩阵  $M \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 并且  $M$  的列在  $\mathbb{R}^n$  中构成了一个标准正交集, 那么矩阵  $M$  就被称为标准正交矩阵 (orthonormal matrix)。当我们分析奇异值的分解时, 这类矩阵将对我们很重要。请注意,

- 根据定义, 每个标准正交矩阵都是方阵, 并且
- $\mathbb{R}^n$  中一个标准正交矩阵  $M$  的  $n$  列, 可以构成  $\mathbb{R}^n$  的一组基, 因为它们是非零且正交的。

上述第二点告诉我们,  $M$  是非奇异的。下一个引理总结了正交矩阵的几个重要性质。

**引理 6.1.15.** 令  $M \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , 并令  $I$  为  $n \times n$  的单位阵。以下陈述是等价的。

- (1)  $M$  是一个标准正交矩阵;
- (2)  $M^\top M = I$ ;
- (3)  $MM^\top = I$ ;
- (4)  $M^\top = M^{-1}$ 。

(2) 和 (3) 的等价性是相当惊人的。它告诉我们, 具有正交列的方阵自动具有正交行。

**证明.** 显然, (1) 和 (2) 是等价的, 因为他们是同一事物的两种写法。(2) 和 (4) 的等价性由第195页的定理6.1.13得到。  $\square$

### 6.1.5 凸性和凹性

在经济学和金融学的计算以及理论方面, 凸性(convexity)和凹性(concavity)是一种具有巨大意义的结构。在本节中, 我们会给出它们的关键定义, 并提供一些有助于熟悉它们的练习。

#### 6.1.5.1 凸性和多面体

凸性在优化和不动点理论中起着核心作用。通常, 如果  $\mathbb{R}^n$  中的一个子集  $C$  满足:

$$u, v \in C \quad \text{和} \quad \lambda \in [0, 1] \implies \lambda u + (1 - \lambda)v \in C,$$

就将集合  $C$  称为凸(convex)的。

练习 6.1.34. 证明:

- (1) 集合  $\mathbb{R}^n$  中的单位单纯形是  $\mathbb{R}^n$  的一个凸子集;
- (2) 对于所有的  $a \in \mathbb{R}^n$  和  $\varepsilon > 0$ , 球体  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \varepsilon\}$  是凸的;
- (3) 集合  $\mathbb{R}^n$  中任意数量凸集的交集也是凸的。

在经济优化问题中, 我们寻求极值的凸集通常是一个多面体。 $\mathbb{R}^n$  中的多面体(polyhedron)指的是以下形式的集合:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad \text{对于某些 } A \in \mathbb{M}^{k \times n} \text{ 和 } b \in \mathbb{R}^k. \quad (6.13)$$

等价地, 如果存在标量  $b_1, \dots, b_k$  和  $n$  维向量  $a_1, \dots, a_k$ , 能够使得当且仅当  $x \in P$  时,  $a_i^\top x \leq b_i$  (其中,  $i = 1, \dots, k$ ), 那么  $P$  就是  $\mathbb{R}^n$  中的多面体。

示例 6.1.17. 某个形式为  $B = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p^\top x \leq m\}$  的预算集就是一个多面体, 其中  $m \geq 0$  并且  $p \in \mathbb{R}_+^n$ 。这里,  $p$  是价格向量,  $x$  是消费束。实际上,  $B$  可以表示为所有满足以下两个条件的  $x \in \mathbb{R}^n$  的集合:(1)  $p^\top x \leq m$ , (2) 非负性约束,  $-\delta_i^\top x \leq 0$  (其中  $i = 1, \dots, n$ ,  $\delta_i$  是  $\mathbb{R}^n$  中的第  $i$  个标准基向量)。这也符合多面体的定义。

给定  $b \in \mathbb{R}$  和非零的  $c \in \mathbb{R}^n$ ,

- $H_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top c = b\}$  被称为  $\mathbb{R}^n$  中的超平面(hyperplane), 而
- $H_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top c \leq b\}$  被称为  $\mathbb{R}^n$  中的半空间(halfspace)。

请注意我们的惯例。在 §6.1.4.4 中, 我们定义了线性超平面, 它与上述在  $b = 0$  的情形下的  $H_0$  相对应, 因此线性超平面是一种特殊的超平面。你将能够证实, 当且仅当  $b = 0$  时, 超平面  $H_0$  才是  $\mathbb{R}^n$  的一个线性子空间。

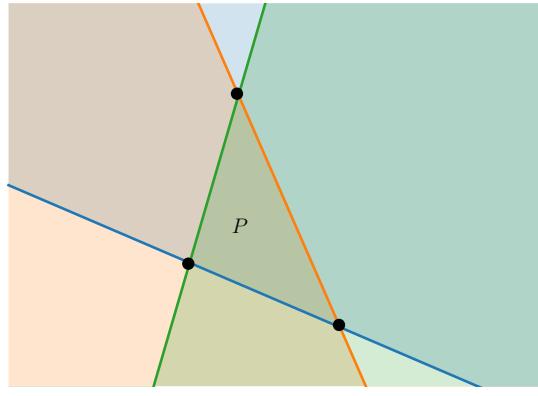


图 6.9: 表示为相交半空间的多面体  $P$

练习 6.1.35. 证明:  $H_0$  和  $H_1$  在  $\mathbb{R}^n$  中都是凸的。

从定义中可以直接看出, 对于某些  $k \in \mathbb{N}$ , 当且仅当  $P$  是  $\mathbb{R}^n$  中  $k$  个半空间的交集时,  $P \subset \mathbb{R}^n$  是一个多面体。图6.9有助于直观的展示这一想法。

多面体  $P$  的极点 (extreme point) 指的是,  $p \in P$  中无法通过其他点的凸组合而实现的那个点。换句话说, 对于某些  $\lambda \in [0, 1]$ , 我们无法找到不同于  $p$  的两个点  $x, y \in P$ , 并且满足  $\lambda x + (1 - \lambda)y = p$ 。图6.9中  $P$  的极点用黑点表示。

练习 6.1.36. 证明:  $\mathbb{R}^n$  中的每个多面体都是凸的。

$\mathbb{R}^n$  中的锥 (cone) 指的是一个  $C \subset \mathbb{R}^n$  的集合, 该集合能够使得: 对于所有的  $\alpha > 0$ ,  $x \in C$  意味着  $\alpha x \in C$ 。

练习 6.1.37. 证明:(1)任意两个锥的交集还是一个锥, 并且(2)当且仅当锥  $C \subset \mathbb{R}^n$  在加法下是闭的时(即,  $x, y \in C$  意味着  $x + y \in C$ ), 锥  $C$  是凸的(即,  $C$  是一个凸锥 (convex cone))。

练习 6.1.38.  $\mathbb{R}^n$  的正锥 (positive cone) 指的是下面的集合:

$$\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}.$$

证明:对于偏序集  $(\mathbb{R}^n, \leq)$ , 正锥是  $\mathbb{R}^n$  的一个递增子集。此外, 证明:  $\mathbb{R}_+^n$  是一个凸锥。

### 6.1.5.2 凸函数和凹函数

一个从  $\mathbb{R}^n$  的凸子集  $C$  到  $\mathbb{R}^k$  的函数  $g$ , 如果满足

$$g(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda g(u) + (1 - \lambda)g(v), \quad u, v \in C \text{ 和 } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

则将函数  $g$  称为凸(convex)函数, 将函数  $-g$  称为凹(concave)函数。 $g$  的凹性显然等价于:

$$g(\lambda u + (1 - \lambda)v) \geq \lambda g(u) + (1 - \lambda)g(v), \quad u, v \in C \text{ 和 } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

当  $k = 1$  时, 只要  $u, v$  不同并且  $0 < \lambda < 1$ , 那么不等式就会变成严格不等式, 此时函数  $g$  则分别被称为 严格凸(strictly convex) 和 严格凹(strictly concave) 函数。

**练习 6.1.39.** 给出一个从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^n$  的函数  $g$  的例子, 并保证该函数既是凸的也是凹的。

函数的这些性质与集合的凸性密切相关。例如, 同一个函数  $g$  是凸的, 当且仅当它的上图(epigraph)函数也是凸的, 即

$$\text{epi}(g) := \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in C\}.$$

**练习 6.1.40.** 如果  $C$  是  $\mathbb{R}^n$  的凸子集并且  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸的, 那么, Jensen 不等式指出, 对于任意向量  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset C$  和权重  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{R}$  (其中  $\lambda$  需满足  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  和  $\sum_i \lambda_i = 1$ ), 可以得到

$$g\left(\sum_{i=1}^k x_i \lambda_i\right) \leq \sum_{i=1}^k g(x_i) \lambda_i.$$

如果  $g$  是凹的, 则反向不等式成立。证明: 在  $k = 3$  并且  $g$  是凸函数情形下的 Jensen 不等式。

在接下来的练习中, 如果  $\{y_i\}$  是  $\mathbb{R}^k$  中一个有限的向量集合, 那么  $\max_i y_i$  指的是在  $\mathbb{R}^k$  中通过逐点取最大值得到的向量,  $\min_i y_i$  也以类似的方式定义。

**练习 6.1.41.** 令  $m \in \mathbb{N}$ , 在  $\mathbb{R}^n$  的凸子集  $C$  上, 令  $\{g_i\}_{i \in [m]}$  为  $\mathbb{R}^k$  值函数的集合。证明:

- (1) 如果  $g_i$  对于  $[m]$  中的每个  $i$  都是凸的, 那么在集合  $C$  中的每个  $x$  处, 由  $g(x) := \max_{i \in [m]} g_i(x)$  所定义的函数  $g$  在  $C$  上也是凸的, 并且
- (2) 如果  $g_i$  对于  $[m]$  中的每个  $i$  都是凹的, 那么在集合  $C$  中的每个  $x$  处, 由  $g(x) := \min_{i \in [m]} g_i(x)$  所定义的函数  $g$  在  $C$  上也是凹的。

**练习 6.1.42.** 令  $f$  和  $g$  是将  $C$  映射到  $\mathbb{R}$  的函数, 其中,  $C \subset \mathbb{R}^n$  是凸的,  $f$  和  $g$  也是凸的。证明:(1) $f + g$  是凸的, 并且(2)如果  $f$  或  $g$  是严格凸的, 那么  $f + g$  也是严格凸的。

关于凹和凸的标量值函数的重要例子, 包括某些类型的二次型(quadratic form)。令  $A$  为一个  $n \times n$  的对称矩阵, 需要记住的是,

- 对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 如果  $x^\top A x \geq 0$ , 则将  $A$  称为半正定(positive semidefinite);
- 对于任意非零的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 如果  $x^\top A x > 0$ , 则将  $A$  称为正定(positive definite);
- 对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 如果  $x^\top A x \leq 0$ , 则将  $A$  称为半负定(negative semidefinite);

- 对于任意非零的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 如果  $x^\top Ax < 0$ , 则将  $A$  称为负定(negative definite)。

重要的是要记住(但很容易忘记):这些定义中展现出了较强的对称性。你可能记得,

- 当且仅当  $A$  的所有特征值都是严格正(或者非负)时,  $A$  是正定(或者半正定)的, 并且
- $A$  是正定(或者半正定)的  $\Rightarrow$  它的行列式是严格正(或者非负)的。

上述第二个结论可以由第一个结论引出, 因为矩阵的行列式等于其特征值的乘积。

二次型(quadratic form)  $q(x) = x^\top Ax$  是

- 凸的, 当且仅当  $A$  是半正定的;
- 严格凸的, 当且仅当  $A$  是正定的;
- 凹的, 当且仅当  $A$  是半负定的;
- 严格凹的, 当且仅当  $A$  是负定的。

例如, 参见Simon (1994)。

练习 6.1.43. 令  $X$  为  $n \times k$  矩阵, 证明:

- (1)  $X^\top X$  是半正定的。
- (2) 如果  $X$  具有满列秩, 那么  $X^\top X$  是正定的。

## 6.1.6 最优化

在本节中, 我们将回顾优化理论中的一些关键问题。

### 6.1.6.1 定义和存在性

令  $A$  为  $\mathbb{R}$  的子集。如果对于每一个  $a, m \in A$ , 都有  $a \leq m$ , 那么我们将  $A$  中的数  $m$  称为  $A$  的最大值(maximum), 记为  $m = \max A$ 。如果对于每一个  $a, m \in A$ , 都有  $a \geq m$ , 则将该数称为  $A$  为最小值(minimum), 记为  $m = \min A$ 。

给定一个任意集合  $D$  和一个函数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义

$$\max_{x \in D} f(x) := \max\{f(x) : x \in D\} \quad \text{和} \quad \min_{x \in D} f(x) := \min\{f(x) : x \in D\}.$$

我们对  $x^* \in D$  进行如下定义:

- 对于所有的  $x \in D$ , 如果满足  $x^* \in D$  且  $f(x^*) \geq f(x)$ , 那么我们就将  $x^* \in D$  称为  $f$  在  $D$  上的最大值解(maximizer), 并且

- 对于所有的  $x \in D$ , 如果满足  $x^* \in D$  且  $f(x^*) \leq f(x)$ , 那么我们就将  $x^* \in D$  称为  $f$  在  $D$  上的**最小值解 (minimizer)**。

等价地,如果有  $f(x^*) = \max_{x \in D} f(x)$ ,则  $x^* \in D$  就是  $f$  在  $D$  上的最大值解;同时,如果有  $f(x^*) = \min_{x \in D}$ ,则  $x^* \in D$  就是  $f$  在  $D$  上的最小值解。我们定义

$$\operatorname{argmax}_{x \in D} f(x) := \{x^* \in D : f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D\}.$$

集合  $\operatorname{argmin}_{x \in D} f(x)$  的定义类似。

**示例 6.1.18.** 如果  $f(x) = x^2$  并且  $D = [-1, 1]$ , 那么  $\operatorname{argmax}_{x \in D} f(x) = \{-1, 1\}$ , 并且  $\operatorname{argmin}_{x \in D} f(x) = \{0\}$ 。在第二种情况下,解的集合是个单元集 (singleton),也即只有一个元素的集合,此时可以直接记为  $\operatorname{argmin}_{x \in D} f(x) = 0$ 。

**练习 6.1.44.** 令  $f: D \rightarrow A \subset \mathbb{R}$  是任意给定的函数。证明以下结论:

- (1) 如果  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  是一个严格递增函数,那么,当且仅当  $x^*$  是  $g \circ f$  在  $A$  上的最大值解时,  $x^*$  是  $f$  在  $D$  上的最大值解。
- (2) 如果  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  是一个严格递减函数,那么,当且仅当  $x^*$  是  $g \circ f$  在  $A$  上的最小值解时,  $x^*$  是  $f$  在  $D$  上的最小值解。

第(2)部分的一个重要特例是,当且仅当  $x^*$  是  $-f$  在  $D$  上的最小值解时,  $x^* \in D$  是  $f$  在  $D$  上的最大值解。因此,任何最大化问题都可以转换为最小化问题,反之亦然。

### 6.1.6.2 凸性和极值

§6.1.6.1 讨论了优化解的存在性。在本节中,我们考虑唯一性。关键的观察是,对于凸和凹的函数,局部最优解就是全局最优解。

令  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,并且  $f$  是  $C$  上的实值函数,那么,如果  $C$  中存在一个开放集  $G$ ,使得每当  $u \in G$  时,  $u^* \in G$  和  $f(u^*) \leq f(u)$  成立,那么我们称  $u^* \in C$  是  $f$  在  $C$  上的一个**局部最小值解 (local minimizer)**。**局部最大值解 (local maximizer)**的定义类似。

下一个练习强调了一个很重要的事实,即如何在实际应用中计算优化问题的解。这一问题在高维环境中特别有价值,高维环境下的优化求解问题可能非常具有挑战性。

**练习 6.1.45.** 证明:如果  $C \subset \mathbb{R}^n$  是凸的,  $f$  是凸的,且  $u^*$  是  $f$  在  $C$  上的一个局部最小值解,则  $u^*$  就是  $f$  在  $C$  上的最小值解。

同样地,如果  $f$  在  $C$  上是凹的,那么任意的局部最大值解就是全局最大值解。

### 6.1.6.3 多维二次优化

§1.4.2.3 处理了一个一维的二次优化问题。接下来我们处理相同类型的  $n$  维问题。

引理 6.1.16. 如果  $H \in \mathbb{M}^{n \times n}$  是正定的, 那么, 对于任意的  $b \in \mathbb{R}$  和  $a \in \mathbb{R}^n$ ,

$$u^* := H^{-1}a \quad \text{是} \quad q(u) := u^\top Hu - 2u^\top a + b \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 中的唯一最小值解。}$$

练习 6.1.46. 证明: 引理 6.1.16 中  $q$  的任意局部最小值解也是一个全局最小值解。(提示: 使用练习 6.1.42。)

练习 6.1.47. 为了完成引理 6.1.16 的证明, 还需证明:  $u^*$  是一个局部最小值解。只需证明  $q$  在  $u^*$  处的导数为零即可, 可使用矩阵微积分中的一个事实:

$$a \in \mathbb{R}^n \text{ 和 } H \in \mathbb{M}^{n \times n} \implies \frac{d}{du} u^\top a = a \text{ 和 } \frac{d}{du} u^\top Hu = (H + H^\top)u。$$

### 6.1.7 拉格朗日对偶

如果你在本科阶段学过经济学, 你应该会使用拉格朗日方法来求解约束优化问题。本节的目的是深入理解该方法何时以及为何起作用, 并强调原始约束问题和所谓“对偶问题”之间的联系。这种联系在经济学、金融学、统计学、人工智能和许多其他领域产生了深刻影响。

#### 6.1.7.1 理论

令  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  的一个子集, 并令  $f$  表示  $E$  到  $\mathbb{R}$  的一个映射。我们的目标是求解:

$$\min_{x \in E} f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) = 0 \quad \text{和} \quad h(x) \leq 0. \quad (6.14)$$

这里,  $g$  将  $E$  映射到  $\mathbb{R}^m$ ,  $h$  将  $E$  映射到  $\mathbb{R}^k$ 。例如,  $g(x) = 0$  中的符号 0 指的是一个零向量, 这表示对于  $i = 1, \dots, m$ , 在  $\mathbb{R}$  上都有  $g_i(x) = 0$ 。对第二个约束条件的解释与此类似。

任意满足式(6.14)中约束条件的  $x \in E$  都被称为可行解 (feasible), 令  $F(g, h)$  表示所有可行解  $x \in E$  的集合。达到式(6.14)最小值的可行解被称为优化问题的最优点 (optimal) 或最优解 (solution)。

我们的第一个推断是, 有约束的优化问题(6.14)等价于一个无约束问题:

$$P = \min_{x \in E} \max_{\theta \in \Theta} L(x, \theta) \quad (6.15)$$

其中,  $\theta := (\lambda, \mu)$ , 并且,

$$L(x, \theta) = L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^k \mu_i h_i(x). \quad (6.16)$$

这里  $\theta \in \Theta$  表示的是由拉格朗日乘子 (Lagrange multipliers)  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  和  $\mu \in \mathbb{R}_+^k$  构成的向量, 其中,  $\Theta := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^k$ 。该式又等同于:

(1)  $\hat{f}(x) := \max_{\theta \in \Theta} L(x, \theta)$  在  $F(g, h)$  上满足  $\hat{f} = f$ 。

(2)  $\hat{f} = +\infty$  在  $F(g, h)$  的补集上, 以及

(3)  $\hat{f}$  和  $f$  满足:

$$P := \min_{x \in E} \hat{f}(x) = \min_{x \in F(g, h)} \hat{f}(x) = \min_{x \in F(g, h)} f(x). \quad (6.17)$$

式(6.17)中的第一个等号是由定义决定的, 后两个则是由(2)和(1)分别得到的, 因此我们只需要验证(1)-(2)。

**练习 6.1.48.** 证明:(1)-(2)都成立。你可以假设极值存在。

我们通常将问题(6.16)中的方程  $L$  称为**拉格朗日 (Lagrangian)** 方程, 将式(6.15)中的  $P$  称为**原 (primal)** 问题。到目前为止, 我们已经证明, 最初的约束问题和原问题是等价的。下一步则是将原问题与它的**对偶 (dual)** 问题联系起来。对偶问题是通过颠倒原问题中  $\min$  和  $\max$  的顺序得到的, 也即,

$$D = \max_{\theta \in \Theta} \min_{x \in E} L(x, \theta). \quad (6.18)$$

对偶问题有两个吸引人的特点。第一, 在求解关于  $x$  的最小化时, 我们不需要关心最初的约束方程(6.14)中对  $x$  的约束。第二, 由于  $L(x, \theta)$  关于  $\theta$  是线性的, 并且由于我们正在最小化关于  $x$  的一个函数族, 所以最小值解是一个凹函数(见第200页)。凹性有助于实现最大化, 这是求解  $D$  的下一个步骤。

**练习 6.1.49.** 证明: $D \leq P$  总是成立。

练习6.1.49中的结果  $D \leq P$  被称为**弱对偶性 (weak duality)**。如果  $P = D$ , 则称为**强对偶性 (strong duality)**。与弱对偶性不同的是, 强对偶性成立需要原问题满足一定条件。

显然, 强对偶性当且仅当在以下条件下成立: 颠倒原始定义(或对偶定义)中的  $\min$  和  $\max$  的运算顺序依然是成立的。这种结果也被称为 min-max 定理, 这一定理仅在函数  $L$  的“鞍点”处成立, 下一节将对此进行解释。

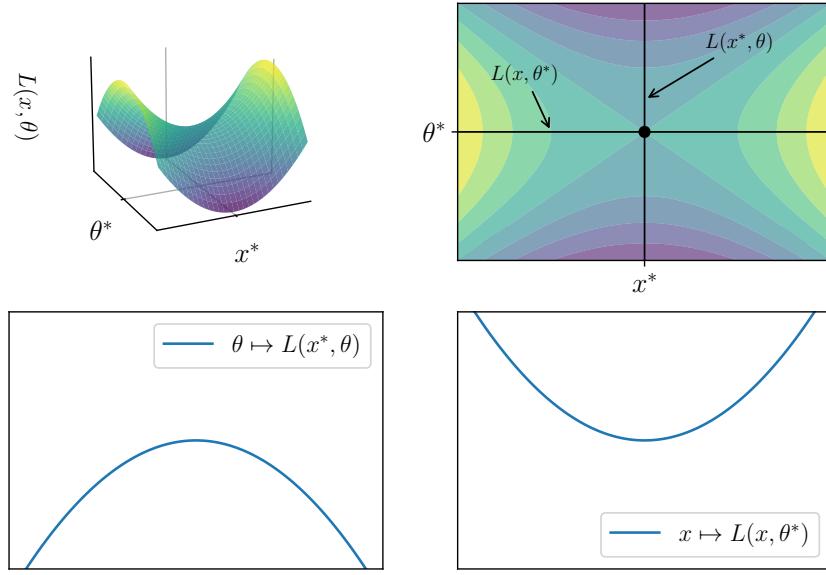
### 6.1.7.2 鞍点和对偶性

我们希望寻求强对偶性的充要条件, 这将有助于我们更加深刻地理解原始约束问题中最小值解的特征。为此, 我们再次令  $\theta := (\lambda, \mu)$  和  $\Theta := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^k$ , 因此有,

$$P = \min_{x \in E} \max_{\theta \in \Theta} L(x, \theta) \quad \text{和} \quad D = \max_{\theta \in \Theta} \min_{x \in E} L(x, \theta). \quad (6.19)$$

令  $(x^*, \theta^*)$  为  $E \times \Theta$  中的一对解, 如果满足下述条件,

$$L(x^*, \theta) \leq L(x^*, \theta^*) \leq L(x, \theta^*) \quad \forall (x, \theta) \in E \times \Theta, \quad (6.20)$$


 图 6.10: 函数  $L$  的鞍点  $(x^*, \theta^*)$ 

就将  $(x^*, \theta^*)$  称为  $L$  的鞍点(saddle point)。

图6.10显示了一个给定二元函数  $(x, \theta) \mapsto L(x, \theta) \in \mathbb{R}$  的鞍点的描述。左图是一个三维图形,右图则是同一函数的等高线图,鞍点在中心位置。

当式(6.19)中的极值存在时,我们得到如下结果:

**定理 6.1.17.** 如果  $L$  在  $E \times \Theta$  上存在一个鞍点  $(x^*, \theta^*)$ , 则强对偶性成立。此外, 还有  $P = D = L(x^*, \theta^*)$ , 并且  $x^*$  是约束优化问题(6.14)的解。

证明. 令  $(x^*, \theta^*)$  是  $L$  在  $E \times \Theta$  中的一个鞍点。对于所有的  $(x, \theta) \in E \times \Theta$ , 我们有,

$$P \leq \max_{\theta} L(x^*, \theta) \leq L(x^*, \theta^*) \leq \min_x L(x, \theta^*),$$

其中, 第一个不等式由定义得到, 后两个由鞍点的性质得到。最后一项显然是由  $D$  决定的, 所以可得  $P \leq L(x^*, \theta^*) \leq D$ 。但是, 根据弱对偶性, 我们也有  $D \leq P$ , 因此有  $P = L(x^*, \theta^*) = D$ 。

最后, 为了证实  $x^*$  能解决原来的约束问题, 我们作一个相反的假设。假设存在一个  $x_0 \in E$  满足约束条件, 并得到  $f(x_0) < f(x^*)$ 。由于在  $x_0$  和  $x^*$  处都满足约束条件, 我们可以应用第 228 页的式 (6.25), 得到  $\max_{\theta \in \Theta} L(x_0, \theta) = f(x_0)$  和  $\max_{\theta \in \Theta} L(x^*, \theta) = f(x^*)$ 。然而, 鞍点条件的第二个不等式意味着,

$$f(x^*) = \max_{\theta \in \Theta} L(x^*, \theta) \leq \max_{\theta \in \Theta} L(x_0, \theta) = f(x_0).$$

这与假设条件  $f(x_0) < f(x^*)$  相矛盾。  $\square$

定理6.1.17告诉我们, 要解决有约束的优化问题并建立强对偶性, 我们只需要获得拉格朗日方程的一个鞍点即可。

### 6.1.7.3 Karush, Kuhn 和 Tucker

对于能够明确定义的问题, 可以通过众所周知的一阶条件(也即Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件)来识别鞍点。为了说明这一点, 我们回到式(6.14)表示的问题, 并将  $\theta$  直接写为  $(\lambda, \mu)$ 。这样的话, 当下式成立时,

$$L(x^*, \lambda, \mu) \leq L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(x, \lambda^*, \mu^*) \quad \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ 和 } \mu \in \mathbb{R}_+^k,$$

那么,  $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in E \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^k$  就满足鞍点条件。同时, 如果存在  $x^* \in F(g, h)$ , 能够满足

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^k \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0 \quad \text{和} \quad (6.21)$$

$$\mu_i^* h_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in [k], \quad (6.22)$$

那么,  $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in E \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^k$  就满足 KKT 条件(KKT conditions)。

这里我们要求  $f, g, h$  在  $x^*$  处都是可微的, 并且对于一个给定的函数  $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们用  $\nabla$  来表示偏导数向量。式(6.21)要求拉格朗日方程关于  $x$  的导数在  $x^*$  处为零。第二个条件也被称为互补松弛(complementary slackness)条件。

KKT 条件不过是鞍点条件的另一种表达形式。条件(6.21)是关于  $x$  的拉格朗日方程在点  $(x^*, \theta^*)$  处的内部最小值解的一阶条件, 它试图识别的是图6.10右下方所示的局部最小值。互补松弛条件也是需要的, 因为如果在某个  $i$  处无法保证  $\mu_i^* h_i(x^*) = 0$ , 那么  $\mu_i^* h_i(x^*) < 0$  一定成立, 在这种情况下, 我们可以通过将  $\mu_i^*$  设定为 0, 来严格增大拉格朗日数值。这显然违背了鞍点性质。

如果有足够的正则条件(regularity conditions), 那么 KKT 条件就能准确地识别极值点。Matousek & Gärtner (2007) 在第八章中提供了一个例子。

**定理 6.1.18** (Karush–Kuhn–Tucker). 如果  $E$  是开集,  $f$  是连续可微且凸的, 同时  $g$  和  $h$  都是仿射函数(*affine functions*), 那么, 当且仅当存在一对  $(\lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^k$  能够使得 KKT 条件成立时,  $x^*$  是  $f$  在  $F(g, h)$  上的最小值解。

## 6.2 部分练习解答

**练习 1.2.1.** 由  $\lambda_1 = i$ , 我们可得

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1。$$

类似的, 由  $\lambda_2 = -i$ , 我们可得

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_2 e_2。$$

**练习 1.2.2.** 固定  $A$  的一个特征对  $(\lambda, e)$  和一个非零标量  $\alpha$ 。我们有,

$$A(\alpha e) = \alpha Ae = \lambda(\alpha e)。$$

因此,  $\alpha e$  是一个特征向量,  $\lambda$  是一个特征值, 问题得解。

**练习 1.2.3.** 固定  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  和  $\tau > 0$ 。如果  $\lambda \in \sigma(A)$ , 那么就有  $\tau^n \det(A - \lambda I) = 0$ , 或者  $\det(\tau A - \tau \lambda I) = 0$ 。因此,  $\tau \lambda \in \sigma(\tau A)$ 。若要证明相反的结论, 将其乘以  $1/\tau$  即可。

**练习 1.2.4.** 如果  $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$  有  $n$  个不同的根, 那么  $|\sigma(A)| = n$ 。对于每个  $\lambda_i \in \sigma(A)$ , 令  $e_i$  为相对应的特征向量, 我们只需证明  $\{e_i\}_{i=1}^n$  是线性无关即可。为此, 令  $k$  为满足  $\{e_1, \dots, e_k\}$  线性无关的最大数字。为了寻求矛盾之处, 假设  $k < n$ 。那么就存在某个合适的标量  $\{\alpha_i\}$ , 使得  $e_{k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$ 。因此, 根据  $Ae_{k+1} = \lambda_{k+1} e_{k+1}$ , 我们有

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_{k+1} e_i \iff \sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) e_i = 0。$$

对于所有的  $i$ , 由于  $\{e_1, \dots, e_k\}$  是线性无关的, 可得  $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ 。因此, 对于某些  $i \leq k$ , 至少存在一个非零的  $\alpha_i$ , 使得  $\lambda_i = \lambda_{k+1}$ 。与假设矛盾。

**练习 1.2.5.** 假设相反的情形,  $P$  中存在一个零列向量, 那么,  $P$  就不是非奇异的。与假设矛盾。

**练习 1.2.6.** 从假设  $A = PDP^{-1}$  开始。使用迹和行列式的基本性质, 我们有,

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(PDP^{-1}) = \text{trace}(DPP^{-1}) = \text{trace}(D) = \sum_i \lambda_i,$$

以及

$$\det(A) = \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(D) \det(P)^{-1} = \det(D) = \prod_i \lambda_i.$$

**练习 1.2.8.** 如果  $I$  是一个单位矩阵, 并且对于一些非零的  $e$  有  $Ie = \lambda e$ , 则可知  $e = \lambda e$  以及  $\lambda = 1$ 。因此  $\sigma(A) = \{1\}$ 。与此同时,  $I$  是可对角化的, 当  $D = I$  时, 有  $I = IDI^{-1}$ 。

**练习 1.2.19.** 固定  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  和  $b \in \mathbb{R}^n$ , 其中  $r(A) < 1$ 。我们可以将  $x = Ax + b$  写成  $(I - A)x = b$ 。由于  $r(A) < 1$ ,  $I - A$  是可逆的, 因此线性系统  $(I - A)x = b$  有唯一解  $x^* = (I - A)^{-1}b$ 。表达式  $x^* = \sum_{m=0}^{\infty} A^m b$  来自于 NSL。

**练习 1.2.20.** 下面, 式(1.2)定义了  $P_w$ , 对于任意矩阵  $Q$ , 符号  $Q(i, j)$  表示矩阵中的第  $i, j$  个元素。

((1), ( $\Rightarrow$ )) 假设  $P_w$  不可约, 但  $\alpha = 0$ 。那么, 根据  $P_w^m$  在(1.3)中的表达式, 对于所有的  $m$ , 我们都有  $P_w^m(1, 2) = 0$ 。这与不可约性相矛盾, 所以  $\alpha > 0$  必须成立。类似的论证可证明  $\beta > 0$ 。

((1), ( $\Leftarrow$ )) 如果  $\alpha, \beta > 0$ , 那么  $P_w$  的非对角线元素就严格为正。加上,  $P_w^2$  的对角线元素严格为正。因此,  $P_w + P_w^2 \gg 0$ ,  $P_w$  是不可约的。

((2), ( $\Rightarrow$ )) 假设  $P_w$  是本原的, 那么  $P_w$  就是不可约的, 所以  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  成立, 我们只需证明  $\min\{\alpha, \beta\} < 1$ 。假设具有相反条件  $\alpha = \beta = 1$ , 那么, 当  $m$  为奇数时,  $P_w^m$  的对角线元素就为 0, 而当  $m$  为偶数时,  $P_w^m$  的非对角线元素就为 0。这与矩阵的本原性质相矛盾, 所以  $\min\{\alpha, \beta\} < 1$  必须成立。

((2), ( $\Leftarrow$ )) 假设  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  以及  $\alpha < 1$ 。代数运算后可知,  $P_w^2 \gg 0$ 。同理可知  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  和  $\beta < 1$  时也是如此。因此  $P_w$  是本原的。

**练习 1.2.22.** 固定  $A \in \mathbb{M}^{n \times k}$ ,  $A \geq 0$ , 以及  $x, y \in \mathbb{R}^k$ 。从  $x \leq y$  可知  $y - x \geq 0$ , 所以  $A(y - x) \geq 0$ 。于是有,  $Ay - Ax \geq 0$  和  $Ax \leq Ay$ 。

**练习 1.3.2.** 对于第一个陈述, 固定  $x \in S$  和  $z \in (0, 1]$ 。如果  $\kappa(z) = x$ , 那么, 由于  $S$  的所有元素都是不同的,  $\kappa$  的定义意味着  $z \in I(x)$ 。相反, 如果  $z \in I(x)$ , 那么, 由于所有区间都是不相交的, 我们有  $\kappa(z) = x$ 。

对于第二个陈述, 选择任意  $x \in S$ , 并观察到, 根据第一点陈述, 当  $W \in I(x)$  时, 有  $\kappa(W) = x$ 。这一事件的概率等于区间  $I(x)$  的长度, 根据前文中的构造, 也即  $\varphi(x)$ 。因此, 对

于所有的  $x \in S$ , 我们都有  $\mathbb{P}\{\kappa(W) = x\} = \varphi(x)$ 。

**练习 1.3.3.** 固定  $j \in [n]$ 。可以观察到  $Y := \mathbb{1}\{\kappa(W) = j\}$  是伯努利(Bernoulli)随机变量。这样一个  $Y$  的期望值等于  $\mathbb{P}\{Y = 1\}$ 。由于  $\kappa(W) \stackrel{d}{=} \varphi$ , 这也即是  $\varphi(j)$ 。

**练习 1.3.5.** 在  $(0, 1]$  上均匀地抽样得到  $U$ , 如果  $U \leq \delta$ , 则将硬币设置为正面。这个结果的概率是  $\mathbb{P}\{U \leq \delta\} = \delta$ 。

**练习 1.3.6.** 对于采样方法, 我们假设  $S$  是有限的, 这个论证可以很容易地扩展到密度上。在计算机中, 我们以  $\mathbb{P}\{B = 0\} = \delta$  的概率抛出一个有偏的硬币  $B \in \{0, 1\}$ , 然后

- (1) 如果  $B = 0$ , 从  $\varphi$  中抽取  $Y$ , 或者
- (2) 如果  $B = 1$ , 从  $\psi$  抽取  $Y$ 。

有了这个设定, 根据全概率公式,

$$\mathbb{P}\{Y = s\} = \mathbb{P}\{Y = s \mid B = 0\}\mathbb{P}\{B = 0\} + \mathbb{P}\{Y = s \mid B = 1\}\mathbb{P}\{B = 1\} = \delta\varphi(s) + (1 - \delta)\psi(s)。$$

换句话说,  $Y \stackrel{d}{=} f$ 。

**练习 1.3.7.** 令  $P$  和  $Q$  如条件所述。(1) 显然,  $PQ \geq 0$ , 同时, 由于  $PQ\mathbb{1} = P\mathbb{1} = \mathbb{1}$ , 所以  $PQ$  是随机的。(2)  $r(P) = 1$  则可以直接从引理1.2.7中得到。(3) 根据 Perron–Frobenius 定理, 存在一个非零、非负的行向量  $\varphi$  满足  $\varphi P = \varphi$ 。将  $\varphi$  重新缩放为  $\varphi/(\varphi\mathbb{1})$ , 得到所需的向量  $\psi$ 。

**练习 1.3.8.** 固定  $p > 0$ , 并令  $X$  为  $LN(\mu, \sigma^2)$ 。我们有

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E}X^p = \mathbb{E}\exp(p\mu + p\sigma Z), \quad \text{对于 } Z \stackrel{d}{=} N(0, 1)。$$

由于  $p\mu + p\sigma Z \stackrel{d}{=} N(p\mu, p^2\sigma^2)$ , 我们可以应用对数正态分布均值的公式, 得到  $m_p = \exp(p\mu + (p\sigma)^2/2) < \infty$ 。

**练习 1.3.9.** 令  $X$  为一个具有尾指数  $\alpha$  的帕累托尾的随机变量, 并令  $G$  为其 CCDF。固定  $r \geq \alpha$ 。在帕累托尾的假设下, 我们可以取正常数  $b$  和  $\bar{x}$ , 使得每当  $t \geq \bar{x}$  时, 就有  $G(t) \geq bt^{-\alpha}$ 。使用式(1.14), 我们有

$$\mathbb{E}X^r = r \int_0^\infty t^{r-1}G(t)dt \geq r \int_0^{\bar{x}} t^{r-1}G(t)dt + r \int_{\bar{x}}^\infty t^{r-1}bt^{-\alpha}dt. \quad (6.23)$$

但是,只要  $r - \alpha - 1 \geq -1$ ,就会有  $\int_{\bar{x}}^{\infty} t^{r-\alpha-1} dt = \infty$ 。由于  $r \geq \alpha$ ,因而可得  $\mathbb{E}X^r = \infty$ 。

**练习 1.3.10.** 固定  $\lambda > 0$ ,假设  $X \stackrel{d}{=} \text{Exp}(\lambda)$ 。一个简单的积分练习表明,  $\mathbb{P}\{X > t\} = e^{-\lambda t}$ 。现在固定  $\alpha > 0$ 。由于  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha e^{-\lambda t} = 0$ ,随机变量  $X$  并不服从幂律。

**练习 1.3.11.** 如练习中所述,令  $p$  和常数  $\gamma, c > 0$  以及  $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ 。选取任意  $t \geq \bar{x}$ 。根据通常的积分规则,

$$\mathbb{P}\{X > t\} = c \int_t^{\infty} u^{-\gamma} du = -\frac{c}{1-\gamma} t^{1-\gamma}.$$

在  $\alpha := \gamma - 1$  的情况下,我们有  $t^\alpha \mathbb{P}\{X > t\} = c/\alpha$ 。因此,随机变量  $X$  具有尾指数为  $\alpha$  的帕累托尾。

**练习 1.4.2.** 如果  $(V, E)$  是无定向的,那么邻接矩阵就是对称的。

**练习 1.4.3.** 令  $A^\top = (a'_{ij})$ ,所以对于每个  $i, j$ ,都有  $a'_{ij} = a_{ji}$ 。根据定义,我们有

$$(j, k) \in E' \iff a'_{jk} > 0 \iff a_{kj} > 0 \iff (k, j) \in E,$$

这证明了第(1)个结论。关于(2),如果说  $k$  在  $\mathcal{G}'$  中可以从  $j$  进入,这意味着我们可以找到节点  $i_1, \dots, i_m$ ,在  $\mathcal{G}'$  下形成一条从  $j$  到  $k$  的有向路径,即在此情况下  $i_1 = j, i_m = k$ ,并且每个连续对  $(i_\ell, i_{\ell+1})$  都在  $E'$  中。但是,根据(1), $i_m, \dots, i_1$  在  $\mathcal{G}$  下同时也提供了一条从  $k$  到  $j$  的有向路径,因为每个连续对  $(i_{\ell+1}, i_\ell)$  都在  $E$  中。

**练习 1.4.4.** 回顾  $\partial/(\partial x_k)x^\top Ax = (x^\top A)_k$ , 将其他代理人行动视为给定的条件下,式(1.26)对应的一阶条件则为,

$$x_k = \alpha(x^\top A)_k + \varepsilon_k \quad (k \in n).$$

串联成行向量,然后取转置,得到  $x = \alpha Ax + \varepsilon$ 。其中,我们使用了  $A$  是对称的事实。由于  $r(\alpha A) = \alpha r(A)$ , 条件  $r(A) < 1/\alpha$  意味着  $r(\alpha A) < 1$ , 所以,根据 NSL, 唯一解是  $x^* = (I - \alpha A)^{-1}\varepsilon$ 。

**练习 1.4.5.** 当  $A$  是强连通的,Perron–Frobenius 定理告诉我们, $r(A) > 0$ ,并且  $A$  有唯一一个(取决于标度倍数的)右主特征向量,满足  $r(A)e = Ae$ 。简单整理即可得到式(1.32)<sup>7</sup>。

**练习 1.4.9.** 当  $\beta < 1/r(A)$  时,我们有  $r(\beta A) < 1$ 。因此,我们可以将式(1.36)表示为

<sup>7</sup>虽然右主特征向量只定义了一个正的缩放倍数,但这并不值得担心,因为正的缩放对排名没有影响。在大多数情况下,这个中心度排名的用户都会选择满足  $\|e\| = 1$  的主特征向量  $e$ 。

$\kappa = \mathbb{1} + \beta A \kappa$ , 并采用定理 1.2.5 来得到所述结果。

**练习 2.1.1.** 固定  $j \in [n]$ 。由于  $a_{ij} = z_{ij}/x_j$ , 我们有  $\eta_j = \frac{\sum_{i=1}^n z_{ij}}{x_j}$ 。因此, 如果  $v_j > 0$ , 则有  $\eta_j < 1$ 。

**练习 2.1.2.** 从假设 2.1.1 中容易得出  $\eta(A) < 1$ 。此外, 由于  $A \geq 0$ , §1.2.3.4 中的结果意味着,  $r(A)$  的大小取决于  $A$  的列和的最大值, 而这恰恰就是  $\eta(A)$ 。因此,  $r(A) \leq \eta(A) < 1$ 。

**练习 2.1.3.** 令  $(A, d)$  如条件所述。当  $A$  不可约时, 有  $L := \sum_{i=1}^{\infty} A^i \gg 0$ 。由于  $x^* = Ld$ , 并且  $d$  是非平凡的, 由  $L \gg 0$  和矩阵乘法的定义可以得出,  $x^* \gg 0$ 。

**练习 2.1.4.** 令  $r(A) < 1$ , 那么,  $I - A$  就是非奇异的, 但与此同时, 还要求  $(I - A)x = 0$ , 因此不存在非平凡解  $x$ 。相反, 另一方面, 如果  $r(A) = 1$ , 那么 (根据 Perron–Frobenius 定理), 由于  $r(A)$  是一个特征值, 对于某些  $x \gg 0$ , 我们可以得到  $Ax = x$ , 其唯一性由 Perron–Frobenius 定理得出。

**练习 2.1.7.** 令  $\lambda$  为  $A$  的一个特征值,  $e$  为对应的特征向量。那么, 对于所有  $i \in [n]$ , 我们有

$$\sum_j a_{ij}e_j = \lambda e_i \iff \sum_j \frac{z_{ij}}{x_j} e_j = \lambda e_i \iff \sum_j f_{ij} \frac{e_j}{x_j} = \lambda \frac{e_i}{x_i},$$

其中, 我们使用了  $x \gg 0$  的事实。由此可见,  $\lambda$  也是  $F$  的一个特征值。同样的逻辑反过来说,  $A$  和  $F$  共享特征值, 因此  $r(A) = r(F)$ 。

**练习 2.2.2.** 我们需要证明的是: 对于任意的  $m$ , 式  $\mathbb{1}^\top A^m \mathbb{1} = n(1 - \alpha)^m$  成立。通过归纳法, 注意到依据 CRS 假设,  $\mathbb{1}^\top A = (1 - \alpha)\mathbb{1}^\top$  成立。紧接着, 可得  $\mathbb{1}^\top A \mathbb{1} = n(1 - \alpha)$ 。现在假设  $\mathbb{1}^\top A^m \mathbb{1} = n(1 - \alpha)^m$  成立。那么,

$$\mathbb{1}^\top A^{m+1} \mathbb{1} = \mathbb{1}^\top A A^m \mathbb{1} = (1 - \alpha) \mathbb{1}^\top A^m \mathbb{1} = n(1 - \alpha)^{m+1},$$

其中最后一步是通过归纳假设得到的。

**练习 2.2.3.** 将式(2.18)代入式(2.19)中, 并对  $\ell_j$  和  $q_{ij}$  进行微分, 可以得到式(2.20)中的一阶条件。可以证明, 这些局部最大值解就是全局最大值解, 尽管我们省略了细节。

**练习 2.2.5.** 通过练习 2.2.1, 我们有  $r(A) < 1$ , 因此  $L = (I - A)^{-1}$  的定义是成立的。此外, 我们可以用 Neumann 级数引理求解式(2.22), 得到  $\rho = -(I - A^\top)^{-1}\varepsilon$ 。由于转置的逆等

价于逆的转置,我们可以把它写成  $\rho = -L^\top \varepsilon$ 。拆开后即可得到练习中所述方程。

**练习 2.2.7.** 式(2.24)可以表示为  $h_i = n^{-1} + \sum_j a_{ij} h_j$ 。令  $h = (h_i)$  为  $\mathbb{R}^n$  中的一个列向量,  $\mathbb{1}$  为一个 1 的列向量,这样  $n$  个方程变成  $h = n^{-1} \mathbb{1} + Ah$ 。由于  $r(A) < 1$ ,唯一解是  $h = n^{-1}(I - A)^{-1} \mathbb{1} = n^{-1}L\mathbb{1}$ 。拆开后即可得到练习结果。

**练习 2.2.8.** 利用练习 2.2.2 中的结果,我们有

$$\mathbb{1}^\top h = \frac{1}{n} \mathbb{1}^\top \sum_{m \geq 0} A^m \mathbb{1} = \frac{1}{n} \sum_{m \geq 0} \mathbb{1}^\top A^m \mathbb{1} = \frac{1}{n} n \sum_{m \geq 0} (1 - \alpha)^m。$$

最后一个表达式的值即为  $1/\alpha$ 。

**练习 2.2.9.** 这个表达式可以很容易地从方差的定义和公司层面冲击的独立性中得到,这使得方差可以通过加总来传递。

**练习 2.2.11.** 令  $h^* := \mathbb{1}/(\alpha n)$ ,要证明  $h^*$  是  $\mathbb{R}_+^n$  中在  $\sum_{i=1}^n h_i = 1/\alpha$  约束下的  $\|h\|$  的最小值解。将目标函数取平方,并通过取  $h_n = 1/\alpha - h_1 - \dots - h_{n-1}$  将约束条件代入目标中,我们就可以得到一个等价问题,即寻找下式的最小值解,

$$f(h_1, \dots, h_{n-1}) := h_1^2 + \dots + h_{n-1}^2 + \left( \frac{1}{\alpha} - h_1 - \dots - h_{n-1} \right)^2。$$

由于  $f$  是凸的,任意的局部最小值解就是全局最小值解。同时,一阶条件给出,

$$h_i = \left( \frac{1}{\alpha} - h_1 - \dots - h_{n-1} \right) = h_n, \quad \forall i。$$

因此,解向量在  $i$  上是常数。令  $c$  表示这个常数,并使用约束条件,得到  $nc = 1/\alpha$ 。证毕。

**练习 2.2.12.** 令  $h^*$  为一个  $n$  维向量,同时,令其在某个  $k$  上有  $h_k^* = 1/\alpha$ ,在其他位置则为  $h_j^* = 0$ 。显然,  $\|h^*\| = 1/\alpha$ 。因此,我们只需证明,对于任意的  $h \in \mathbb{R}_+^n$  和  $\sum_{i=1}^n h_i = 1/\alpha$ ,我们都有  $\|h\| \leq 1/\alpha$ 。

固定  $h \in \mathbb{R}_+^n$  和  $\sum_{i=1}^n h_i = 1/\alpha$ 。由于我们把  $1/\alpha$  分成  $n$  部分,我们可以把  $h$  表示为  $(w_1/\alpha, \dots, w_n/\alpha)$ ,其中,  $0 \leq w_i \leq 1$  且  $\sum_i w_i = 1$ 。根据 Jensen 不等式(练习 6.1.40),我们有,

$$\sum_i \left( \frac{w_i}{\alpha} \right)^2 \leq \left( \sum_i \frac{w_i}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}。$$

取平方根得到  $\|h\| \leq 1/\alpha$ 。证毕。

**练习 2.3.3.** 对于  $\alpha > 0$  我们总有  $\|\alpha u\|_0 = \|u\|_0$ , 这违反了正齐次性。

**练习 2.3.6.** 令  $\|\cdot\|$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个范数,  $(u_m)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个序列, 且  $u$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个点。为了证明(1)  $\Rightarrow$  (2), 我们固定  $a \in \mathbb{R}^n$ , 并观察到对于所有的  $m \in \mathbb{N}$ , 都有

$$|\langle a, u_m \rangle - \langle a, u \rangle| = |\langle a, u_m - u \rangle| \leq \|u_m - u\|_1 \max_i |a_i|.$$

因此, 在  $\ell_1$  范数中的收敛性可以推出(2)。而根据练习2.3.5, 在  $\|\cdot\|$  中收敛意味着在  $\ell_1$  中收敛, 所以可以确认(1)  $\Rightarrow$  (2)。

为了证明在第  $j$  个分量上(2)  $\Rightarrow$  (3), 我们只需将  $a$  特殊化为第  $j$  个标准基向量。最后, 为了证明(3)  $\Rightarrow$  (1), 我们首先注意到, 根据范数的等价性, 只需证明逐点收敛意味着  $\ell_1$  收敛。也即是说,

$$(3) \Rightarrow \|u_m - u\|_1 = \sum_{j \in [n]} |\langle \delta_j, u_m - u \rangle| \rightarrow 0,$$

其中,  $\delta_j$  是第  $j$  个标准基向量。为了证明这个加总收敛到零, 只需证明这个加总的每一个元素都收敛到零(见 §6.1.3.2), 而这恰好就是(3)的结论。

**练习 2.3.7.** 考虑到要证明,  $\mathbb{R}^n$  中  $u_m \rightarrow x$  和  $v_m \rightarrow y$  意味着  $u_m + v_m \rightarrow x + y$ 。我们知道这在  $n = 1$  的标量情形下显然是成立的。同时, 引理2.3.1告诉我们,  $\mathbb{R}^n$  中的收敛性成立, 当且仅当向量的逐点收敛成立(这就是标量情形)。其余的证明类似。

**练习 2.3.8.** 对于列向量和行向量来说, Frobenius 范数可以还原为欧几里得范数, 因此, 式(2.32)要求  $|\langle A, B \rangle_F| \leq \|A\|_F \|B\|_F$ 。这个约束显然是成立的, 因为它是 Cauchy–Schwarz 不等式。

**练习 2.3.9.** 令

$$a := \sup_{u \neq 0} f(u), \quad \text{其中 } f(u) := \frac{\|Au\|}{\|u\|}, \quad \text{且令 } b := \sup_{\|u\|=1} \|Au\|.$$

显然  $a \geq b$ , 因为其上确界函数在一个更大的定义域上。为了得到一个相反的情况, 固定  $\varepsilon > 0$ , 令  $u$  是一个非零向量, 使  $f(u) > a - \varepsilon$ 。并令  $\alpha := 1/\|u\|$  和  $u_b := \alpha u$ 。那么,

$$b \geq \|Au_b\| = \frac{\|Au_b\|}{\|u_b\|} = \frac{\|\alpha Au\|}{\|\alpha u\|} = \frac{\alpha}{\alpha} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = f(u) > a - \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  是任意的,所以我们有  $b \geq a$ 。

**练习 2.3.10.** 令  $A$  和  $B$  分别为矩阵  $\mathbb{M}^{n \times k}$  和矩阵  $\mathbb{M}^{n \times j}$  中的元素。固定  $v \in \mathbb{R}^n$ 。由于对于任意的向量  $u$ ,都有  $\|Au\| \leq \|A\| \cdot \|u\|$ ,因此由式(2.32)可以很容易的得到,  $\|ABv\| \leq \|A\| \cdot \|Bv\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|v\|$ 。

**练习 2.3.15.** 令  $(A_m)$  和  $(B_m)$  具有所述性质。关于(1),我们使用三角不等式性质,可以得到,

$$\|A_m - A\| = \|A_m - B_m + B_m - A\| \leq \|A_m - B_m\| + \|B_m - A\|,$$

右边的两个项都收敛为零,证毕。

关于(2),我们利用次可乘性质,得到  $\|BA_mC - BAC\| \leq \|B\|\|A_m - A\|\|C\| \rightarrow 0$ 。

**练习 2.3.17.** 令  $\|\cdot\|_a$  和  $\|\cdot\|_b$  是  $\mathbb{M}^{n \times n}$  上的两个范数。根据 §2.3.2.5中的结果,这些范数是等价的,所以存在常数  $M, N$ ,使得对于所有的  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|A^k\|_a \leq M\|A^k\|_b \leq N\|A^k\|_a$  成立。因此,

$$\|A^k\|_a^{1/k} \leq M^{1/k}\|A^k\|_b^{1/k} \leq N^{1/k}\|A^k\|_a^{1/k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

取  $k \rightarrow \infty$ ,我们可以看到谱半径的定义与选择何种范数无关。

**练习 2.3.18.** 由于  $r(A) < 1$ ,我们可以找到一个常数  $K$  和一个  $\varepsilon > 0$ ,使得  $k \geq K \implies \|A^k\| < (1 - \varepsilon)^k$ 。设  $M := \max_{k \leq K} \|A^k\|$  和  $\delta := 1 - \varepsilon$ ,即产生所需的常数。

**练习 2.3.19.** 假设  $r(A) < 1$ 。对  $x_t = Ax_{t-1} + d$  逆向迭代,得到  $x_t = d + Ad + \cdots + A^{t-1}d + A^tx_0$ 。根据 Neumann 级数引理,我们有  $x^* = \sum_{t \geq 0} A^t d$ ,所以

$$x^* - x_t = \sum_{j>t} A^j d - A^t x_0.$$

因此,用  $\|\cdot\|$  作为欧几里得向量范数和矩阵算子范数,我们有

$$\|x^* - x_t\| = \left\| \sum_{j>t} A^j d - A^t x_0 \right\| \leq \sum_{j>t} \|A^j\| \|d\| - \|A^t\| \|x_0\|.$$

再由  $r(A) < 1$ ,从练习 2.3.18 可以看出,随着  $t \rightarrow \infty$ ,可得  $\|x^* - x_t\| \rightarrow 0$ 。

**练习 2.3.20.** 我们有  $\|A^m\|_1 = n(1 - \alpha)^m$ ,所以  $\|A^m\|_1^{1/m} = n^{1/m}(1 - \alpha)$ 。取  $m \rightarrow \infty$ ,可以得到  $r(A) = 1 - \alpha$ 。

**练习 2.3.21** 令  $\|\cdot\|$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个范数。根据 Perron–Frobenius 定理(定理1.2.6),当

$A$  是本原的, 在  $m \rightarrow \infty$  下, 有  $\|r(A)^{-m}A^m x\| \rightarrow c$ , 其中, 只要  $x \gg 0$  就有  $c > 0$ 。因此,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m x\|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} r(A)^{1/m} = r(A)$ 。

**练习 2.3.22.** 我们只需要证明,  $A$  在所述条件下意味着  $A^\top$  是弱链次随机矩阵, 因为反向证明非常类似。我们设  $a'_{ij} := a_{ji}$ , 所以  $A^\top = a'_{ij}$ 。

令  $A$  具有上述性质。由于  $A$  的列和小于单位 1, 所以  $A^\top$  的行和也小于单位 1, 因而  $A^\top$  是次随机的。

现在固定  $m \in [n]$ , 取  $i \in [n]$ , 使得  $i \rightarrow m$  在  $A$  下, 有  $\sum_k a_{ki} < 1$ 。通过第 34 页的练习 1.4.3 可知, 在  $A$  下的  $i \rightarrow m$  等同于在  $A^\top$  下的  $m \rightarrow i$ 。同时,  $\sum_k a_{ki} < 1$  等同于  $\sum_k a'_{ik} < 1$ 。因此,  $A^\top$  是弱链次随机矩阵。

**练习 2.3.23.** 令  $A$  是一个投入-产出网络的邻接矩阵, 并且每个部门的增加值都是非负的。在下文中, 我们用  $a'_{ij}$  表示  $A^\top$  的第  $i, j$  个元素, 因此  $a'_{ij} = a_{ji}$ 。

如果网络中的每个部门, 都存在一个具有正的增加值的上游供应商, 我们就说  $A$  具有  $U$  性质。 $U$  性质等同于这样的描述: 对于所有的  $m \in [n]$ , 在  $A$  和  $\sum_k a_{ki} < 1$  之下, 存在一个  $i \in [n]$ , 有  $i \rightarrow m$ 。根据练习 2.3.22, 这等同于说  $A^\top$  是弱链次随机矩阵。由于  $A^\top$  是次随机的, 这又相当于说  $r(A^\top) < 1$ 。同时, 由于  $r(A) = r(A^\top)$ , 所以性质  $U$  等同于  $r(A) < 1$ 。

**练习 2.3.25.** 令  $A = \text{diag}(a, 1)$ , 其中  $0 < a < 1$ 。显然  $r(A) = 1$ 。令  $b^\top = (1, 0)$ , 且令  $x^\top = (1/(1-a), 0)$ 。简单的代数运算表明  $x = Ax + b$ 。

**练习 3.1.1.** 如果  $(\sigma^i(x))$  在  $n$  步内不能到达  $d$ , 那么, 由于  $|V| = n+1$ , 就会存在一个节点  $y \in V$  在  $(x, \sigma(x), \dots, \sigma^n(x))$  中出现两次。对于这个  $y$ , 我们就可以在  $i \leq n$  的条件下, 得到  $\sigma^i(y) = y$ 。也即, 从  $y$  回到自身的循环不包含  $d$ , 并且永远重复。因此  $(\sigma^i(x))$  永远不会到达  $d$ 。

**练习 3.1.2.** 固定  $q \in U$  和  $\sigma \in \Sigma$ 。 $T_\sigma q$  的非负性是显然的。另外,  $(T_\sigma q)(d) = c(d, d) + q(d) = 0$ , 其中第一个等式是由  $\sigma(d) = d$  得到的, 第二个是由  $q(d) = 0$  和  $c(d, d) = 0$  得到的。因此,  $T_\sigma q \in U$ , 符合要求。

**练习 3.2.1.** 由于价格是正的 (更多的产出意味着更多的收入), 我们预期两个不平等的约束 (见式(3.10)) 能够以等式的方式成立。从图中可以看出, 等式为  $2q_1 + 5q_2 = 30$  和  $4q_1 + 2q_2 = 20$ 。求解可得,  $q = (2.5, 5.0)$ 。

**练习 3.2.3.** 等式约束  $Ax = b$  可以替换为两个不等式约束  $Ax \leq b$  和  $-Ax \leq -b$ , 约束条件  $x \geq 0$  可以替换为  $-x \leq 0$ 。如果我们逐行解开这些矩阵不等式, 就会得到一个约束集合, 即在选择合适的  $h \in \mathbb{R}^n$  和  $g \in \mathbb{R}$  之下, 集合中每个约束的形式都可以是  $h^\top x \leq g$ 。根据

第198页上的多面体定义,现在可以得到练习结论了。

**练习 3.3.1.** 固定  $y \in \mathbb{Y}$ 。假设分布  $\phi$  和  $\psi$  处处为正, 所以如果式(3.18) 对  $T$  成立, 那么, 在某个位置  $x$  处, 就有  $\phi(x)\mathbb{1}\{T(x) = y\} > 0$  成立。因此, 就存在一个  $x \in \mathbb{X}$ , 使得  $T(x) = y$ 。

**练习 3.3.2.** 当  $|\mathbb{Y}| > |\mathbb{X}|$  时, 就不存在 Monge 映射。例如, 假设  $\mathbb{X} = \{x_1\}$  和  $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2\}$ , 且  $\phi(x_1) = 1$  和  $\psi(y_i) \in (0, 1)$ (其中  $i = 1, 2$ )。 $x_1$  要么被映射到  $y_1$ , 要么被映射到  $y_2$ 。无论哪种情况,Monge 映射(3.18)对于  $y_1$  和  $y_2$  都不成立。

**练习 3.3.3.** 令  $T$  是  $[n]$  上的一个自映射。如果  $T$  是 Monge 映射,那么,依据式(3.18)的定义,我们一定有  $\sum_i(1/n)\mathbb{1}\{T(i) = j\} = 1/n(\forall j)$ 。如果  $T$  不是一个双射,那么就存在指数  $i, k, j$ ,使得  $i \neq k$  和  $T(i) = T(k) = j$ 。这显然违反了前面的等式。

反过来说,如果  $T$  是  $[n]$  上的双射,那么  $T$  满足  $\sum_i(1/n)\mathbb{1}\{T(i) = j\} = 1/n(\forall j)$ 。因此,  $T$  是一个 Monge 映射。

**练习 3.3.6.** 应用第 111页的式(3.24) ,我们有

$$\psi = \text{vec}(\psi^\top) = \text{vec}(\mathbb{1}_n^\top \pi I_m) = (I_m \otimes \mathbb{1}_n^\top) \text{vec}(\pi)。$$

**练习 3.3.7.** 令  $\pi$  对于原问题是可行的,  $(w, p)$  对于对偶问题是可行的。根据对偶可行性,对于所有  $x, y$ ,我们有  $c(x, y) \geq p(y) - w(x)$ ,所以

$$\langle \pi, c \rangle \geq \sum_x \sum_y \pi(x, y)[p(y) - w(x)] = \sum_x \sum_y \pi(x, y)p(y) - \sum_x \sum_y \pi(x, y)w(x)$$

重新排列并使用原问题可行性,可以得到  $\langle \pi, c \rangle \geq \langle p, \psi \rangle - \langle w, \varphi \rangle$ 。这证明了第一个结论。

为了看到  $D \leq P$  来自于该不等式,只需固定  $\pi \in \Pi(\phi, \psi)$ ,并在所有可行的对偶对(dual pairs)上进行最大化,获得  $\langle \pi, c \rangle \geq D$ 。然后,再对  $\pi \in \Pi(\phi, \psi)$  进行最小化,得到  $D \leq P$ 。

**练习 3.3.8.** 从  $\min_{a \in A} f(a) = \max_{b \in B} g(b)$  可知,对于所有的  $(a, b) \in A \times B$ , 我们有  $f(a) \geq g(b)$ 。以  $(\bar{a}, \bar{b})$  与  $f(\bar{a}) = g(\bar{b})$  为例,对于任意给定的  $a \in A$ , 我们有  $f(\bar{a}) = g(\bar{b}) \leq f(a)$ 。可以看出, $\bar{a}$  在  $A$  上使  $f$  达到最小。对  $\bar{b}$  的论证也类似。

**练习 3.3.9.** 由于从某个节点  $i$  流出的任何资金都与流入某个节点  $j$  的资金相等,将所

有  $i \in V$  的式(3.34)两边加总, 就会得到式(3.32)。

**练习 3.3.11.** 该问题的证明与  $A$  的定义有关。固定  $i \in [n]$ , 我们有

$$(Aq)(i) = \sum_{k=1}^m a_{ik} q_k = \sum_{k=1}^m \mathbb{1}\{e_k \text{离开 } i\} q_k - \sum_{k=1}^m \mathbb{1}\{e_k \text{进入 } i\} q_k,$$

该式等于  $\sum_{j \in \mathcal{O}(i)} q(i, j) - \sum_{v \in \mathcal{I}(i)} q(v, i)$ 。证毕。

**练习 3.3.12.** 在解决示例3.3.1的代码中, 我们需要添加:

```
bounds = ((0, 5),
          (0, None),
          (0, None),
          (0, None))
```

然后将调用的函数改为:

```
result = linprog(c, A_eq=A, b_eq=b, method='highs-ipm', bounds=bounds)
print(result.x)
```

输出结果为 [5. 5. 5. 5.] , 这与我们的直觉一致。

**练习 4.1.2.** 第 (1) 点可以直接由  $F$  的定义得到。关于第 (2) 点, 根据  $q(i, j) = q(i, j-1) + P(i, j)$ , 我们可以得到  $P(i, j) = q(i, j) - q(i, j-1)$ , 这就是区间  $(q(i, j-1), q(i, j)]$  的长度。 $U_{t+1}$  落在这个区间的概率就是它的长度, 也即刚刚得到的  $P(i, j)$ 。证毕。

**练习 4.1.3.** 根据归纳法和随机矩阵集在乘法下是闭的这一事实 (见 §1.3.1.3), 可以得到, 对于所有  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P^k$  是随机的。

**练习 4.1.5.** 令  $\mathcal{M}$  如题目所述, 在这种设定下, 转移矩阵  $P$  是随机的, 这意味着  $p(x, x) = 1$  和  $P(x, y) = \mathbb{1}\{x = y\}$ 。因此  $P = I$ ,  $P$  也即  $n \times n$  的单位矩阵。对于所有的  $\psi \in \mathcal{D}(S)$  , 因为有  $\psi I = \psi$ , 故所有分布都是平稳的。

**练习 4.1.6.** 令  $G$  是一个从  $[0, 1]$  映射到自身的连续函数, 并设  $f(x) := Gx - x$ 。由于  $G$  是  $[0, 1]$  上的自映射, 我们有  $f(0) = G0 \geq 0$  和  $f(1) = G1 - 1 \leq 0$ , 因此  $f$  是  $[0, 1]$  上的连续函数, 并满足  $f(0) \geq 0$  和  $f(1) \leq 0$ 。根据中值定理, 满足  $f(x) = 0$  的  $x$  是存在的。因此, 该点  $x$  就是  $G$  的一个不动点。

**练习 4.1.7.** 令  $P$  是有限集  $S$  上的马尔可夫矩阵。特别假设  $S$  中有  $d$  个元素, 因此我们可以将  $\mathbb{R}^S$  中的函数与  $\mathbb{R}^d$  中的向量联系起来, 将  $\mathcal{D}(S)$  与  $\mathbb{R}^d$  中的单位单纯形联系起来。

集合  $\mathcal{D}(S)$  是  $\mathbb{R}^d$  的一个封闭、有界凸子集,  $P$  是一个自映射。进行线性矩阵运算, 可知映射  $\psi \mapsto \psi P$  是连续的。通过 Brouwer 不动点定理(第139页), 可以证明不动点的存在性, 进而可得练习结论。

**练习 4.2.2.** 令  $\mathcal{M}$  为一个有限马尔可夫模型, 其状态  $S = \{1, 2\}$ , 边集  $E = \{(1, 2), (2, 1)\}$ 。因此, 马尔可夫链会立即移动到状态 2 并永远停留在那里, 相应的转移矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如果  $h$  是  $P$ -harmonic, 那么  $h(x) = Ph(x) = h(2)$ , 因此  $h$  是常数, 这表明  $P$  具有遍历性。但同时,  $(S, E)$  不是强连通的。

**练习 4.2.3.** 令  $M$  和  $A$  具有题目所述性质。固定  $x \in S$ , 考虑一个从  $x$  开始的  $P$ -chain  $(X_t)$ 。根据性质(2), 存在一个  $a \in A$  和一个  $k \leq n := |S|$ , 能够使得  $\varepsilon_x := \mathbb{P}\{X_k = a\}$  严格为正。一旦  $(X_t)$  进入  $A$  就不会离开, 故  $X_k = a$  意味着  $X_n \in A$ 。因此,  $\mathbb{P}\{X_n \in A\} \geq \varepsilon_x$ 。对于任意初始条件  $x$ , 定义  $\varepsilon := \min_{x \in S} \varepsilon_x > 0$ , 那么我们就有  $\mathbb{P}\{X_n \in A\} \geq \varepsilon$ 。另一种表达方式是, 对于所有  $x \in S$ , 满足  $\sum_{y \in A^c} P^n(x, y) \leq 1 - \varepsilon$ , 第一个推断得以证明。

关于第二个证明, 固定  $\psi \in \mathcal{D}(S)$ , 并令所有  $t$  上都有  $\psi_t = \psi P^t$ 。注意, 对于固定的  $m \in \mathbb{N}$ , 我们有  $\psi_{(m+1)n} = P^n \psi_{mn}$ 。因此对  $y \in A^c$ , 我们有

$$\psi_{(m+1)n}(y) = \sum_{x \in S} P^n(x, y) \psi_{mn}(x) = \sum_{x \in A^c} P^n(x, y) \psi_{mn}(x)。$$

对  $y$  加总可以得到:

$$\sum_{y \in A^c} \psi_{(m+1)n}(y) = \sum_{y \in A^c} \sum_{x \in A^c} P^n(x, y) \psi_{mn}(x) = \sum_{x \in A^c} \left[ \sum_{y \in A^c} P^n(x, y) \right] \psi_{mn}(x)。$$

令  $\eta_t := \sum_{x \in A^c} \psi_t(x)$  是  $t$  时刻  $A^c$  上的概率质量的数值。使用第一个证明的推断和  $\eta_t$  的定义, 此时得到  $\eta_{(m+1)n} \leq (1 - \varepsilon) \eta_{mn}$ 。因此, 在  $m \rightarrow \infty$  的条件下, 有  $\eta_{mn} \rightarrow 0$ , 以及  $\psi_{mn} \rightarrow \psi^*$ , 所以:

$$\sum_{x \in A^c} \psi^*(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{x \in A^c} \psi_{mn}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_{mn} = 0。$$

第二个推断得以证明。

**练习 4.2.4.** 关于第(1)问, 根据三角不等式结合  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(S)$  的假设, 得到以下约束:

$$\sum_x |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \sum_x |\varphi(x)| + \sum_x |\psi(x)| \leq 2.$$

关于第(2)问, 如果  $P$  是一个随机矩阵, 那么有:

$$\rho(\varphi P, \psi P) = \sum_y \left| \sum_x P(x, y) \varphi(x) - \sum_x P(x, y) \psi(x) \right| \leq \sum_y \sum_x P(x, y) |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

交换求和顺序并使用  $\sum_y P(x, y) = 1$ , 即可证明问题。

**练习 4.2.7.** 给定  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(S)$ 。根据式(4.27)我们知道当  $t = 1$  时式(4.29)成立。现在假设它在  $t$  时成立, 那么, 利用式(4.27)对任何一对分布都成立的事实, 得到,

$$\rho(\varphi P^{t+1}, \psi P^{t+1}) \leq (1 - \alpha(P))\rho(\varphi P^t, \psi P^t) \leq (1 - \alpha(P))^{t+1} \rho(\varphi, \psi),$$

其中, 最后一步使用的是归纳假设。通过归纳法可知, 式(4.29)在  $t + 1$  时成立, 在所有  $t \in \mathbb{N}$  时也成立。

**练习 4.2.9.** 如果  $\mathcal{M}$  是强连通且非周期的, 那么  $P$  就是本原矩阵, 此时, 存在  $k \in \mathbb{N}$ , 有  $P^k \gg 0$ 。显然,  $\alpha(P^k) > 0$ 。

**练习 4.2.11.** 由于  $G$  的所有元素都严格为正, 因此在每对页面  $u, v \in W$  之间都存在有向边。显然, 这意味着  $G$  具有强连通性。

**练习 4.2.12.** 对任意的  $u, u', v \in W$ , 我们有  $G(u, v) \wedge G(u', v) \geq 1 - \delta$ , 从而有  $\alpha(G) \geq 1 - \delta$ 。因此根据式(4.31), 我们得到:

$$\rho(\psi G^t, g^*) \leq 2\delta^t.$$

**练习 4.2.14.** 如果  $\mathcal{S}$  具有强连通性和非周期性, 那么邻接矩阵  $T$  就是本原的, 所以存

在一个  $k \in \mathbb{N}$ , 能够使得  $T^k \gg 0$ 。因此,  $\alpha(T^k) > 0$ , 进而可以使用命题4.2.6。

**练习 5.1.3.** 在练习5.1.2中, 我们得到:

$$\|u_m - u_k\| \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \lambda^i \|u_0 - u_1\| \quad (m, k \in \mathbb{N} \text{ 并且 } m < k)。$$

因此, 如题所述,  $(u_m)$  是柯西序列。

**练习 5.1.5.** 令  $S$  是完全(complete)集,  $F$  是  $S$  上的一个自映射,  $F^k$  是一个均匀压缩(uniform contraction), 还令  $u^*$  是  $F^k$  的唯一不动点。固定  $\varepsilon > 0$ , 我们可以选择某个  $n$ , 满足  $\|F^{nk}Fu^* - u^*\| < \varepsilon$ 。但此时有,

$$\|Fu^* - u^*\| = \|FF^{nk}u^* - u^*\| = \|F^{nk}Fu^* - u^*\| < \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  是任意的, 我们有  $\|Fu^* - u^*\| = 0$ , 这意味着  $u^*$  是  $F$  的一个不动点。

关于收敛性, 固定  $u \in S$ , 给定  $n \in \mathbb{N}$ , 将存在整数  $j(n)$  和  $i(n)$ , 使得  $n = j(n)k + i(n)$ , 并且在  $n \rightarrow \infty$  的条件下有  $j(n) \rightarrow \infty$ 。因此,

$$\|F^n u - u^*\| = \|F^{j(n)k+i(n)}u - u^*\| = \|F^{j(n)k}F^{i(n)}u - u^*\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

根据对  $F^k$  的假设, 收敛性意味着不动点的唯一性。(为什么?)

**练习 5.1.6.** 如果无风险实际利率  $r$  是正的, 那么现在收到的 \$100 可以在一年内以 1 的概率转换成  $(1+r)100 > 100$  美元。

**练习 5.1.7.** 取  $q_k \rightarrow q$ , 其中,  $(q_k)$  是一个包含在  $U$  中的  $n$ -向量序列。根据第184页的练习6.1.8, 由于对于所有的  $k$  都有  $q_k \geq 0$ , 可知  $q \geq 0$ 。现在只需要证明  $q(n) = 0$ 。由于  $q_k \in U(\forall k)$ , 我们可以得到  $q_k(n) = 0(\forall k)$ 。根据引理2.3.1, 还可以得到  $q_k(n) \rightarrow q(n)$ 。因此  $q(n) = 0$ 。

**练习 5.1.8.** 我们需要证明, 如果  $p, q \in U$  并且  $p \leq q$ , 那么有  $Tp \leq Tq$ 。这从式(5.5) $T$  的定义中很容易得出。

**练习 5.1.9.** 固定  $q \in U, \alpha \in \mathbb{R}_+$  和  $x \in V$ , 根据定义有:

$$T(q + \alpha \mathbb{1})(x) = \min_{y \in \mathcal{O}(x)} \{c(x, y) + \beta q(y) + \alpha \beta\} = Tq(x) + \alpha \beta.$$

因此,  $T(q + \alpha \mathbb{1}) = Tq + \beta\alpha \mathbb{1}$  成立。

**练习 5.1.10.** 固定  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$  和  $k \in \mathbb{N}$ , 根据 §6.1.1.1 中的不等式, 逐点应用到向量上, 可得

$$|Gx - Gy| = |(Ax + d) \wedge \bar{x} - (Ag y + d) \wedge \bar{x}| \leq |Ax + d - (Ay + d)|。$$

根据练习 6.1.9,

$$|Ax + d - (Ay + d)| = |A(x - y)| \leq A|x - y|。$$

证毕。

**练习 5.1.11.** 由于  $G$  是  $[a, b]$  上的自映射, 我们有  $Ga \in [a, b]$ , 因此  $a \leq Ga$ 。由于  $G$  是保序的, 将  $G$  应用于这个不等式可以得到  $Ga \leq G^2a$ 。以这种方式迭代下去(或使用归纳法), 证明  $(G^k a)$  是递增的。对于  $(G^k b)$  的证明类似。

对于某些  $x \in [a, b]$ , 如果有  $Gx = x$ , 那么, 由于  $a \leq x$ , 因而有  $Ga \leq Gx = x$ 。对这个不等式进行迭代, 可以得到, 对所有的  $k$ , 都有  $G^k a \leq x$ 。

**练习 5.1.12.** 显然,  $G$  是  $S := [0, \bar{x}]$  上的一个自映射。由于  $A \geq 0$ , 对于所有的  $x, y \in S$ , 我们有  $Gx \leq Gy$ 。由此可知,  $G$  是保序的。此时, 定理 5.1.5 保证了至少有一个不动点存在。

**练习 5.1.13.** 根据练习 6.1.41, 两个凹函数的最小化函数还是凹的。由于  $Fx = \bar{x}$  和  $Hx = Ax + b$  都是凹的, 问题得证。

**练习 5.2.1.** 从本质上讲, 该命题是成立的, 因为连续函数的组合还是连续的。尽管如此, 接下来我们仍将进行更规范的证明。回顾 §6.1.1.1 中的不等式, 逐点应用到向量, 对任意  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , 我们有:

$$|Tp - Tq| \leq |(e + p\Pi) \wedge x - (e + q\Pi) \wedge x| \leq |(p - q)\Pi|。$$

对于欧几里得范数, 我们可知  $\|u\| = \|u\|$ , 并且在  $u, v \geq 0$  和  $u \leq v$  的条件下, 还有  $\|u\| \leq \|v\|$ 。由此, 我们可以得到  $\|Tp - Tq\| \leq \|(p - q)\Pi\| \leq \|p - q\|\|\Pi\|_o$ 。如果  $\|p_n - p\| \rightarrow 0$ , 那么  $\|Tp_n - Tp\| \rightarrow 0$  就成立, 即命题成立。

**练习 5.2.2.** 由于  $\Pi \geq 0$ , 所以只要  $p \leq q$ , 我们总是有  $p\Pi \leq q\Pi$ 。因此,  $p \mapsto a - d + p\Pi$  是保序的, 进而  $T$  也同样如此。此外, 对任意  $p \in S := [0, x]$ , 我们有  $Tp \in S$ 。因此, 根据定理 5.1.5,  $T$  在  $S$  中有一个不动点。

关于这种情况下的均衡, 我们还能说些什么? 根据同一定理,  $T$  在  $S$  中有一个最小不动

点  $p^*$  和一个最大不动点  $p^{**}$ 。此外,因为  $T$  是连续的,所以有  $T^k 0 \uparrow p^*$  和  $T^k x \downarrow p^{**}$ 。

**练习 5.2.3.** 固定  $p, q \in S$ ,利用 §6.1.1.1中的最小和最大不等式,逐点应用,我们有:

$$|Tp - Tq| \leq |e + p\Pi - (e + q\Pi)| = |(p - q)\Pi| \leq |p - q|\Pi,$$

对这个方程的两边进行转置,我们可以看到,当  $r(\Pi) < 1$  时,命题5.1.3的条件成立,证毕。(如果你愿意,可以直接使用命题5.1.3而不是采取转置的方式进行证明。但要稍作修改,以使用我们在行向量上运算的事实。)

**练习 5.2.4.** 令  $\mathcal{D}$  为一个有向无环图,并在  $\mathcal{D}$  中固定  $i$ 。假设一种相反的情形成立,即假设从节点  $i$  出发,可到达的所有节点的出度都为正。在这种情况下,我们可以从  $i$  构建一个任意长度的游走。但是  $\mathcal{D}$  只有有限的几个节点,所以任意这样的游走最终都必须循环,与题目中条件矛盾,证毕。

**练习 5.2.5.** 令  $\mathcal{G} = (V, E, w)$  为一个有向无环的金融网络。根据命题5.2.1,我们只需证明对于每家银行  $i \in V$ ,存在一家银行  $j \in V$  并且有  $i \rightarrow j$ ,使得  $j$  的同业负债为 0。为此,固定  $i \in V$ 。根据有向无环图的特性,我们知道存在一个  $j \in V$  并且有  $i \rightarrow j$ ,同时  $\mathcal{O}(j) = 0$ 。如果  $\mathcal{O}(j) = 0$ ,就意味着  $j$  就没有同业负债。证毕。

**练习 5.2.6.** 令  $\mathcal{G}$  是一个金融网络,使 (E1)-(E2) 成立。由于  $e \gg 0$ ,我们有,

$$p \in S \implies Tp := ((e + p\Pi) \wedge x) \vee 0 = (e + p\Pi) \wedge x.$$

根据第164页练习5.1.13相同的论证思路,  $T$  是  $S = [0, x]$  上的一个凹算子。显然,  $T$  是保序的。最后,根据 (E1),对于所有的  $i$ ,我们有  $x_i > 0$ ,所以  $x \gg 0$ ,因此  $T0 = e \wedge x \gg 0$ 。现在直接从“Du 定理”得出,  $T$  在  $S$  中有唯一不动点。

**练习 5.2.7.** 令  $\mathcal{G}$  中的每一个节点都是现金可及的,设:

$$\delta := \frac{1}{n^2} \cdot \min \{\{x_i : i \in V\} \cup \{e_i : i \in V \text{ s.t. } e_i > 0\}\}.$$

将  $\hat{e}$  定义为:在  $e_i > 0$  的情形下  $\hat{e}_i = 1$ ,否则为零。我们说,对于所有  $m \leq n$ ,有,

$$T^m 0 \geq \delta (\hat{e} + \hat{e}\Pi + \cdots + \hat{e}\Pi^{m-1}). \quad (6.24)$$

因为  $T0 = e \wedge x \geq \delta \hat{e}$ ,所以上式在  $m = 1$  时成立。现在假设式(6.24)在  $m \leq n - 1$  时成立,

那么,由于  $T$  是保序的,可以得到,

$$\begin{aligned} T^{m+1}0 &\geq (\delta(\hat{e} + \hat{e}\Pi + \cdots + \hat{e}\Pi^{m-1})\Pi + e) \wedge x \\ &\geq (\delta(\hat{e} + \hat{e}\Pi + \cdots + \hat{e}\Pi^m)) \wedge x \end{aligned}$$

因为  $\hat{e} + \hat{e}\Pi + \cdots + \hat{e}\Pi^m \leq n^2 \mathbb{1}$ (其中  $\mathbb{1}$  是一个 1 向量),并且因为  $(\delta n^2 \mathbb{1}) \leq x$  是由  $\delta$  所定义的,故我们有  $T^{m+1}0 \geq \delta(\hat{e} + \hat{e}\Pi + \cdots + \hat{e}\Pi^m)$ 。这证实了在  $m \leq n$  条件下,式(6.24)成立。

现在我们论证  $T^n0 \gg 0$ 。鉴于式(6.24),我们只需证明,对于任意的  $j \in V$ ,存在一个  $k < n$ ,满足  $(\hat{e}\Pi^k)(j) = \sum_{i \in V} \hat{e}_i \Pi_{ij}^k > 0$ 。因为  $S$  中的每个节点都是现金可及的,我们知道存在一个  $i \in V$ ,满足  $e_i > 0$ ,并且  $j$  从  $i$  是可达的。对于这个  $i$ ,我们可以选择  $k \in N$ ,满足  $k < n$  和  $\Pi_{ij}^k = \hat{e}_i \Pi_{ij}^k > 0$ 。即可得到结论  $T^n0 \gg 0$ ,证毕。

**练习 5.2.8.** 令  $\psi$  是矩阵  $\Pi$  的平稳分布。假设  $\lambda$  是  $[0, 1]$  中的常数,  $p = \lambda\psi$  以及  $x = \psi$ 。那么,  $e = 0$  意味着  $Tp = (e + \lambda\psi\Pi) \wedge x = (\lambda\psi) \wedge \psi = \lambda\psi = p$ 。由于  $\lambda$  在  $[0, 1]$  中是任意的,所以存在一个连续的均衡。

**练习 5.2.9.** 集合  $N$  是一个吸收集,因为根据定义,  $P$  从  $N$  中是不可达的,同时,  $A$  也不能被到达(否则  $P$  也将能够被到达)。集合  $P$  也是吸收集,因为如果  $j \in P^c$  从  $i \in P$  中是可达的,那么  $j$  就是现金可及的。但是当  $j \in P$  时,与已知条件矛盾。

**练习 5.2.10.** 由  $C \geq 0$  和引理1.2.7,我们有  $r(C) \leq \max_j \text{colsum}_j$ 。根据假设5.2.1,这个最大值会严格小于 1。因此  $r(C) < 1$ ,根据 Neumann 级数引理,  $I - C$  是可逆的,并且有  $(I - C)^{-1} = \sum_{k \geq 0} C^k$ 。最后一个等式意味着当  $b = (I - C)^{-1}e$  时,  $b \geq 0$ 。

**练习 5.2.11.** 考虑条件  $\sum_{i \in V} c_{ij} \leq 1$  ( $\forall j \in V$ ), 其中, 至少存在一个  $j$  能够满足严格不等式。由于  $C \geq 0$ , 这意味着  $C^\top$  是弱链次随机的(根据练习2.3.22)。因此, 有  $r(C) = r(C^\top) < 1$ (根据命题2.3.5),进而  $I - C$  是可逆的(根据 Neumann 级数引理)。

**练习 5.2.12.** 由于

$$\sum_i b_i = \mathbb{1}'b = \mathbb{1}'e + \mathbb{1}'Ce + \mathbb{1}'C^2e + \cdots \geq \mathbb{1}'e + \mathbb{1}'Ce.$$

因此,我们只需证明  $\mathbb{1}'Ce > 0$ 。如果  $Ce$  中至少有一列是非零项,那么命题得证。由于  $e \gg 0$ ,对于某些  $i, j$ ,我们只需要求  $c_{ij} > 0$ (符合假设),则该条件成立。

**练习 5.2.13.** 可以观察到,  $v_i \leq v'_i$  意味着  $f(v_i) \geq f(v'_i)$ 。因此,向量值映射  $v \mapsto -f(v)$

是保序的,进而  $T$  也是保序的。同时,对于  $v \in [d, \bar{v}]$ ,我们有

$$d = A(e - \beta \mathbf{1}) \leqslant Tv := A(e - f(v)) \leqslant Ae = \bar{v},$$

所以  $T$  是  $[d, \bar{v}]$  上的一个自映射。从定理5.1.5中可以直接得出,  $T$  在  $S$  中存在最小和最大的不动点。

**练习 5.2.14.** 首先,正如刚才所讨论的,  $v_k := T^k d$  是递增的。其次,因为  $T$  的范围是有限的,这个序列只能取有限的值。因为  $(v_k)$  是递增的,不能循环,所以它必须在有限步内收敛。令  $v'$  为极限值,  $K$  为由  $(v_k)$  到达  $v'$  所需要的步数。因为对所有  $k \geqslant K$ , 有  $v_k = v'$ , 我们得到

$$Tv' = TT^K v' = T^{K+1} v' = v',$$

所以,  $v'$  是  $T$  在  $S$  上的一个不动点。此外,如果  $v''$  是  $T$  在  $S$  上的任意其他不动点,那么  $d \leqslant v''$ 。因此,根据保序特性,对于所有  $k$ , 有  $v_k = T^k d \leqslant T^k v'' = v''$ , 从而  $v' \leqslant v''$ 。因此  $v'$  是  $T$  的最小不动点。

**练习 6.1.1.** 固定  $a, b \in \mathbb{R}_+$  和  $c \in \mathbb{R}$ ,根据式(6.2),我们有:

$$a \wedge c = (a - b + b) \wedge c \leq (|a - b| + b) \wedge c \leq |a - b| \wedge c + b \wedge c.$$

因此,  $a \wedge c - b \wedge c \leq |a - b| \wedge c$ 。交换  $a$  和  $b$  的角色,得到  $b \wedge c - a \wedge c \leq |a - b| \wedge c$ 。命题得证。

**练习 6.1.2.** 首先,假设  $f$  是单射的,我们按照如下方式构造一个左逆的  $g$ : 对于  $y \in \text{range}(f)$ , 令  $g(y)$  为唯一的  $x$  能够使得  $f(x) = y$  (唯一性是由单射性质决定的);对于  $y \notin \text{range}(f)$ , 令  $g(y) = \bar{x}$ , 其中  $\bar{x}$  是  $S$  中的任意点。对于任意  $x \in S$ , 因为点  $y = f(x)$  都在  $\text{range}(f)$  内, 所以函数  $g$  是  $f$  的左逆,加上  $g(y) = x$ , 因此  $g(f(x)) = x$ 。

接下来,假设  $f$  有一个左逆  $g$ ,再假设  $x$  和  $x'$  是  $S$  中的点,且满足  $f(x) = f(x')$ ,那么有  $g(f(x)) = g(f(x'))$ 。由于  $g$  是一个左逆函数,这就产生了  $x = x'$ 。因此  $f$  是单射的。

**练习 6.1.3.** 令  $G$  和  $S$  如题所述。关于唯一性,假设  $G$  在  $S$  中有两个不同的不动点  $x$  和  $y$ ,因为  $G^m x = \bar{x}$  和  $G^m y = \bar{x}$ ,所以有  $G^m x = G^m y$ 。但是,  $x$  和  $y$  又是不同的不动点,所以  $x = G^m x$  一定与  $y = G^m y$  不同。与假设矛盾。

关于  $\bar{x}$  是不动点的论证,根据条件,当  $k \geqslant m$  时,有  $G^k x = \bar{x}$ 。因此也有,  $G^m \bar{x} = \bar{x}$ ,  $G^{m+1} \bar{x} = \bar{x}$ 。那么,

$$G\bar{x} = GG^m \bar{x} = G^{m+1} \bar{x} = \bar{x},$$

因此,  $\bar{x}$  是  $G$  上的一个不动点。

**练习 6.1.4.** 在极坐标中, 我们有  $u = r\text{e}^{i\varphi}$  和  $v = s\text{e}^{i\psi}$ , 所以  $uv = rse^{i(\varphi+\psi)}$ 。因此  $|uv| = rs$  (见式(6.8)), 也即等于  $|u||v|$ 。

**练习 6.1.9.** 固定  $B \in \mathbb{M}^{m \times k}$ , 且对所有的  $i, j$ , 满足  $b_{ij} \geq 0$ 。选取任意  $i \in [m]$  和  $x \in \mathbb{R}^k$ 。根据三角不等式, 我们有  $\left| \sum_j b_{ij}x_j \right| \leq \sum_j b_{ij} |x_j|$ 。将这些不等式堆叠在一起, 即可得到  $|Bx| \leq B|x|$ 。

**练习 6.1.11.** 令  $x_n = -5n + n^2$ , 那么  $|x_n| \leq 5n + n^2 \leq 6n^2$ , 因此  $(x_n) = O(n^2)$ 。关于第二个问题, 做出相反的假设,  $(x_n) = O(n)$ 。那么我们可以取一个  $M$ , 使得对于  $n \in \mathbb{N}$ , 满足  $|x_n| \leq Mn$ 。但是, 对所有  $n$ , 需要满足  $x_n = -5n + n^2 \leq Mn$ , 不等式两边除  $n$ , 得到  $n \leq 5 + M$ , 与假设矛盾。证毕。

**练习 6.1.19.** 如果在  $\mathbb{R}^d$  中有  $x_n \rightarrow x$ , 并且  $f$  和  $g$  是连续的, 那么在  $\mathbb{R}^k$  中, 就有  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  和  $g(x_n) \rightarrow g(x)$ 。同时, 根据命题6.1.4, 在  $\mathbb{R}^k$  中的  $\alpha f(x_n) + \beta g(x_n)$  会收敛到  $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 。证毕。

**练习 6.1.20.** 下面是关于  $f$  的证明: 在  $\mathbb{R}^d$  中取  $(x_n)$  收敛于  $x$ 。将 §6.1.1.1 中的不等式逐点应用于向量, 可以得到:

$$0 \leq |f(x_n) - f(x)| = |x_n \wedge a - x \wedge a| \leq |x_n - x|.$$

在这些向量上应用欧几里得范数, 并使用  $|u| \leq |v|$ , 这意味着  $\|u\| \leq \|v\|$ , 得到  $\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0$ 。关于  $g$  的论证方法类似。

**练习 6.1.24.** 关于第一点, 令  $E = \{u_1, \dots, u_k\}$  是线性无关的。对于某些  $m < k$ , 假设  $\{u_1, \dots, u_m\}$  是线性相关的。那么我们可以找到一个非零向量  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 使得  $\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0$ 。对于  $\{m+1, \dots, k\}$  中的  $i$ , 设定  $\alpha_i = 0$ , 得到  $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0$ , 与  $E$  的线性无关性矛盾。

关于第二点, 假设  $E \subset F$  和  $E$  是线性相关的。如果  $F$  是线性无关的, 那么上述第一点就不成立, 因此,  $F$  是线性相关的。

**练习 6.1.25.** 关于(1), 如果  $Ax = Ay = 0$ , 那么  $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$ , 所以  $\text{null } A$  是一个线性子空间。关于(2), 假设  $\text{null } A = \{0\}$ 。这意味着在  $x \in \mathbb{R}^k$  中, 唯一满足

$Ax = 0$  的  $x$  只有零向量, 这相当于说  $A$  的列具有线性无关性。

**练习 6.1.26.** 对于第(1)问, 只需在定理 6.1.10 中设定  $V = \mathbb{R}^n$ , 即可得证。对于第(2)问, 令  $A$  和  $U$  如题所述, 并满足  $|A| = m > \dim U$ 。作出相反的假设, 假设  $A$  是线性无关的。那么  $A$  就是  $\text{span } A$  的一个基, 因此  $\dim \text{span } A = m > \dim U$ 。但同时, 因为  $A \subset U$  和  $U$  是一个线性子空间, 我们有  $\text{span } A \subset U$ 。因此, 根据定理 6.1.10, 我们有  $m \leq \dim U$ , 与假设条件矛盾。证毕。

**练习 6.1.28.** 利用反证法证明。令  $A$  如题所述并作出相反的假设,  $A^{-1}$  不是线性的。那么我们可以找到  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  和  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $A^{-1}(\alpha x + \beta y)$  和  $\alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y$  是不同点。由于  $A$  是一个双射, 那么两者经过  $A$  的映射也应当是不同的, 所以

$$\alpha x + \beta y \neq A(\alpha A^{-1}x + \beta A^{-1}y)。$$

但是,  $A$  是线性的, 与假设矛盾。证毕。

**练习 6.1.30.** 固定  $u, v \in L^\perp$  和  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。如果  $z \in L$ , 得到:

$$\langle \alpha u + \beta v, z \rangle = \alpha \langle u, z \rangle + \beta \langle v, z \rangle = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0,$$

因此,  $\alpha u + \beta v \in L^\perp$ 。证毕。

**练习 6.1.33.** 如果  $O$  是  $L$  的标准正交基, 那么根据定义,  $O$  可以张成  $L$ 。此外, 因为  $O$  的元素是正交和非零的, 因此它们也是独立的。

**练习 6.1.34.** 关于第(1)问, 令  $S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \mathbb{1}^\top x \leq 1\}$  为单位单纯形, 其中  $\mathbb{1}$  是 1 的列向量。固定  $u, v \in S$  和  $\lambda \in [0, 1]$ 。我们可以得到,

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \geq 0$$

和

$$\mathbb{1}^\top (\lambda u + (1 - \lambda)v) = \lambda \mathbb{1}^\top u + (1 - \lambda) \mathbb{1}^\top v \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

因此,  $S$  是一个凸集。

关于第(2)问, 固定  $u, v \in B$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  和  $\varepsilon > 0$ 。我们有,

$$\|\lambda u + (1 - \lambda)v - a\| = \|\lambda(u - a) + (1 - \lambda)(v - a)\| \leq \lambda \|u - a\| + (1 - \lambda) \|v - a\| \leq \lambda \varepsilon + (1 - \lambda) \varepsilon = \varepsilon,$$

因此,  $B$  是凸的。

关于第(3)问,对于  $i = 1, 2, \dots, n$ , 令  $(S_i)$  为凸集。固定  $u, v \in \cap_{i=1}^n S_i$  和  $\lambda \in [0, 1]$ , 可以得到,

$$z = \lambda u + (1 - \lambda)v \in S_i \quad \forall i$$

这意味着  $z \in \cap_{i=1}^n S_i$ , 因此  $\cap_{i=1}^n S_i$  是凸的。

**练习 6.1.35.** 固定  $u, v \in H_0, \lambda \in [0, 1], b \in \mathbb{R}$  和非零的  $c \in \mathbb{R}^n$ 。有,

$$(\lambda u + (1 - \lambda)v)^\top c = \lambda u^\top c + (1 - \lambda)v^\top c = \lambda b + (1 - \lambda)b = b。$$

因此,  $H_0$  是凸的。 $H_1$  为凸的证明类似。

**练习 6.1.37.** 关于问题(1), 令  $C$  和  $D$  为两个锥, 固定  $x \in C \cap D$  和  $\alpha > 0$ 。因为同时有  $x \in C$  和  $x \in D$ , 并且两个都是锥, 所以可知  $\alpha x \in C \cap D$ 。因此  $C \cap D$  也是一个锥。

关于问题(2), 首先假设  $C$  是一个凸锥, 并固定  $x, y \in C$ 。因为  $C$  是凸的, 一定有  $(1/2)(x + y) \in C$ 。同时由于  $C$  是一个锥, 我们可以在不离开  $C$  的情况下按照标量 2 进行缩放, 因此  $x + y \in C$ 。接下来论证相反的结果, 假设  $C$  是一个锥, 并且在加法下是闭的。固定  $\alpha \in (0, 1)$  和  $x, y \in C$ 。由于  $C$  是一个锥, 我们有  $\alpha x \in C$  和  $(1 - \alpha)y \in C$ 。因为  $C$  在加法下是闭的, 可以得到  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ 。因此, 锥  $C$  是凸的。

**练习 6.1.39.** 所有的线性函数既是凸的, 也是凹的。

**练习 6.1.41.** 因为向量结果只是标量情形的逐元展开, 故在标量  $n = k = 1$  下, 证明这些结果就足够了。我们重点讨论每个  $g_i$  都是凸的情况, 因为凹的情况也类似。

一般来说, 对于标量  $\{a_i\}_{i=1}^m$  和  $\{b_i\}_{i=1}^m$ , 我们总是有,

$$\max_i \{a_i + b_i\} \leqslant \max_i \{a_i\} + \max_i \{b_i\}。$$

因此, 在标量情形下, 当所有  $g_i$  都是凸的, 对于任意  $\lambda \in [0, 1]$  和  $x, y \in C$ , 我们有,

$$\max_i \{g_i(\lambda x + (1 - \lambda)y)\} \leqslant \max_i \{\lambda g_i(x) + (1 - \lambda)g_i(y)\} \leqslant \lambda \max_i g_i(x) + (1 - \lambda) \max_i g_i(y)。$$

这证明了标量的情形(以及扩展到向量的情形)。

**练习 6.1.44.** 关于问题(1), 令  $f$  和  $g$  如题所述。由于  $g$  是严格递增的, 我们有,

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in D \iff g(f(x^*)) \geq g(f(x)), \quad \forall x \in D。$$

这证明了问题(1)中所述的等价关系(请注意为什么  $g$  的严格递增性质在这里不能被削弱)。问题(2)的证明类似,只是第二个不等式是相反的。

**练习 6.1.45.** 令  $f$  和  $C$  如题所述,并令  $u^*$  为一个局部最小值解。假设与题目中的命题相反, $C$  中存在一个点  $u$ ,满足  $f(u) < f(u^*)$ 。那么,根据凸性,对于  $[0, 1]$  中的每个  $\lambda$ ,我们有,

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)u^*) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(u^*) < f(u^*)。$$

取  $\lambda \rightarrow 0$ ,我们可以找到一个点  $v := \lambda u + (1 - \lambda)u^*$  无限逼近于  $u^*$ ,并满足  $f(v) < f(u^*)$ 。这与局部最小值解的定义相矛盾。

**练习 6.1.48.** 关于问题(1),假设  $g(x) = 0$  和  $h(x) \leq 0$ ,所以  $x \in F(g, h)$ 。在这种情况下,

$$\hat{f}(x) = \max_{\theta \in \Theta} L(x, \theta) = f(x) + \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \sum_i \lambda_i g_i(x) + \max_{\mu \in \mathbb{R}_+^k} \sum_i \mu_i h_i(x) = f(x)。 \quad (6.25)$$

因此在  $F(g, h)$  上,有  $\hat{f} = f$ 。

关于问题(2),假设  $g_i(x)$  在某些  $i$  处偏离了零。那么  $\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \sum_i \lambda_i g_i(x)$  等于  $+\infty$ ,所以  $\hat{f}(x) = +\infty$ 。此外,对于某些  $i$ ,如果  $h_i(x) > 0$ ,那么有  $\max_{\mu \in \mathbb{R}_+^k} \sum_i \mu_i h_i(x) = +\infty$ ,所以,我们又一次得到  $\hat{f}(x) = +\infty$ 。可以确定,只要  $x \notin F(g, h)$ , $\hat{f} = +\infty$ 。

**练习 6.1.49.** 选取任意的  $x' \in E$  和  $\theta \in \Theta$ 。我们有  $L(x', \theta) \geq \min_x L(x, \theta)$ ,所以,

$$\max_{\theta} L(x', \theta) \geq \max_{\theta} \min_x L(x, \theta)。$$

因此有,

$$\min_x \max_{\theta} L(x, \theta) \geq \max_{\theta} \min_x L(x, \theta)。$$

## 参考文献

- Acemoglu, Daron, & Azar, Pablo D. 2020. Endogenous production networks. *Econometrica*, **88**(1), 33–82.
- Acemoglu, Daron, Carvalho, Vasco M, Ozdaglar, Asuman, & Tahbaz-Salehi, Alireza. 2012. The network origins of aggregate fluctuations. *Econometrica*, **80**(5), 1977–2016.
- Acemoglu, Daron, Ozdaglar, Asu, & Tahbaz-Salehi, Alireza. 2016. Networks, Shocks, and Systemic Risk. In: *The Oxford Handbook of the Economics of Networks*. Oxford.
- Acemoglu, Daron, Ozdaglar, Asuman, & Siderius, James. 2021a. *Misinformation: Strategic Sharing, Homophily, and Endogenous Echo Chambers*. Tech. rept. National Bureau of Economic Research.
- Acemoglu, Daron, Ozdaglar, Asuman, Siderius, James, & Tahbaz-Salehi, Alireza. 2021b. Systemic credit freezes in financial lending networks. *Mathematics and Financial Economics*, **15**(1), 185–232.
- Aggarwal, Charu C. 2020. *Linear Algebra and Optimization for Machine Learning*. Springer.
- Aliprantis, Charalambos D, & Border, Kim, C. 1999. *Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide*. 2 edn. Springer-Verlag, New York.
- Allouch, Nizar. 2015. On the private provision of public goods on networks. *Journal of Economic Theory*, **157**, 527–552.
- Amarasinghe, Ashani, Hodler, Roland, Raschky, Paul, & Zenou, Yves. 2020. *Key Players in Economic Development*. Tech. rept. IZA Discussion Paper.
- Amini, Hamed, & Minca, Andreea. 2020. Clearing financial networks: Impact on equilibrium asset prices and seniority of claims. *Tutorials in Operations Research*, 154–175.
- Antras, Pol. 2020. *Global Production: Firms, Contracts, and Trade Structure*. Princeton University Press.

- Antràs, Pol, Chor, Davin, Fally, Thibault, & Hillberry, Russell. 2012. Measuring the upstreamness of production and trade flows. *American Economic Review*, **102**(3), 412–16.
- Ascenzi, Edoardo, & Palanza, Francesca. 2021. *How to control electric autonomous taxi fleets in an energy efficient way*. Tech. rept. Chalmers University of Technology.
- Atalay, Enghin, Hortacsu, Ali, Roberts, James, & Syverson, Chad. 2011. Network structure of production. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **108**(13), 5199–5202.
- Axtell, Robert L. 2001. Zipf distribution of US firm sizes. *science*, **293**(5536), 1818–1820.
- Azimzadeh, Parsiad. 2019. A fast and stable test to check if a weakly diagonally dominant matrix is a nonsingular M-matrix. *Mathematics of Computation*, **88**(316), 783–800.
- Bala, Venkatesh, & Goyal, Sanjeev. 2000. A noncooperative model of network formation. *Econometrica*, **68**(5), 1181–1229.
- Ballester, Coralia, Calvó-Armengol, Antoni, & Zenou, Yves. 2006. Who's who in networks. Wanted: The key player. *Econometrica*, **74**(5), 1403–1417.
- Baqaei, David Rezza. 2018. Cascading failures in production networks. *Econometrica*, **86**(5), 1819–1838.
- Barabási, Albert-László, & Albert, Réka. 1999. Emergence of scaling in random networks. *science*, **286**(5439), 509–512.
- Bardoscia, Marco, Battiston, Stefano, Caccioli, Fabio, & Caldarelli, Guido. 2015. DebtRank: A microscopic foundation for shock propagation. *PloS one*, **10**(6), e0130406.
- Bardoscia, Marco, Barucca, Paolo, Codd, Adam Brinley, & Hill, John. 2019. Forward-looking solvency contagion. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **108**, 103755.
- Barrot, Jean-Noël, & Sauvagnat, Julien. 2016. Input specificity and the propagation of idiosyncratic shocks in production networks. *The Quarterly Journal of Economics*, **131**(3), 1543–1592.
- Bartle, Robert Gardner, & Sherbert, Donald R. 2011. *Introduction to real analysis*. 4 edn. Hoboken, NJ: Wiley.
- Battiston, Stefano, Puliga, Michelangelo, Kaushik, Rahul, Tasca, Paolo, & Caldarelli, Guido. 2012. Debtrank: Too central to fail? financial networks, the fed and systemic risk. *Scientific reports*, **2**(1), 1–6.

- Beiglböck, Mathias, Pammer, Gudmund, & Schachermayer, Walter. 2022. From Bachelier to Dupire via optimal transport. *Finance and Stochastics*, **26**(1), 59–84.
- Belhaj, Mohamed, & Deroïan, Frédéric. 2019. Group targeting under networked synergies. *Games and Economic Behavior*, **118**, 29–46.
- Belhaj, Mohamed, Bervoets, Sebastian, & Deroïan, Frédéric. 2016. Efficient networks in games with local complementarities. *Theoretical Economics*, **11**(1), 357–380.
- Benhabib, Jess, Bisin, Alberto, & Luo, Mi. 2019. Wealth distribution and social mobility in the US: A quantitative approach. *American Economic Review*, **109**(5), 1623–47.
- Benzi, Michele, & Klymko, Christine. 2015. On the limiting behavior of parameter-dependent network centrality measures. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **36**(2), 686–706.
- Bernard, Andrew B, Dhyne, Emmanuel, Magerman, Glenn, Manova, Kalina, & Moxnes, Andreas. 2019. *The origins of firm heterogeneity: A production network approach*. Tech. rept. National Bureau of Economic Research.
- Bertsimas, Dimitris, & Tsitsiklis, John N. 1997. *Introduction to linear optimization*. Athena Scientific.
- Blanchet, Adrien, Carlier, Guillaume, & Nenna, Luca. 2018. Computation of Cournot–Nash equilibria by entropic regularization. *Vietnam Journal of Mathematics*, **46**(1), 15–31.
- Board, Simon, & Meyer-ter Vehn, Moritz. 2021. Learning dynamics in social networks. *Econometrica*, **89**(6), 2601–2635.
- Bollobás, Béla. 1999. *Linear Analysis: An Introductory Course*. Cambridge University Press.
- Borgatti, Stephen P, Everett, Martin G, & Johnson, Jeffrey C. 2018. *Analyzing social networks*. Sage.
- Borovička, Jaroslav, & Stachurski, John. 2020. Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of recursive utilities. *The Journal of Finance*.
- Bramoullé, Yann, Galeotti, Andrea, & Rogers, Brian W. 2016. *The Oxford handbook of the economics of networks*. Oxford University Press.
- Cai, Jing, & Szeidl, Adam. 2018. Interfirm relationships and business performance. *The Quarterly Journal of Economics*, **133**(3), 1229–1282.

- Calvó-Armengol, Antoni, Patacchini, Eleonora, & Zenou, Yves. 2009. Peer effects and social networks in education. *The Review of Economic Studies*, **76**(4), 1239–1267.
- Candogan, Ozan, Bimpikis, Kostas, & Ozdaglar, Asuman. 2012. Optimal pricing in networks with externalities. *Operations Research*, **60**(4), 883–905.
- Carvalho, Vasco M. 2014. From micro to macro via production networks. *Journal of Economic Perspectives*, **28**(4), 23–48.
- Carvalho, Vasco M, & Grassi, Basile. 2019. Large firm dynamics and the business cycle. *American Economic Review*, **109**(4), 1375–1425.
- Carvalho, Vasco M, & Tahbaz-Salehi, Alireza. 2019. Production networks: A primer. *Annual Review of Economics*, **11**, 635–663.
- Carvalho, Vasco M, Nirei, Makoto, Saito, Yukiko U, & Tahbaz-Salehi, Alireza. 2021. Supply chain disruptions: Evidence from the great east japan earthquake. *The Quarterly Journal of Economics*, **136**(2), 1255–1321.
- Cheney, Ward. 2013. *Analysis for applied mathematics*. Vol. 208. Springer Science & Business Media.
- Çınlar, Erhan. 2011. *Probability and stochastics*. Vol. 261. Springer Science & Business Media.
- Cochrane, John H. 1994. Shocks. *Pages 295–364 of: Carnegie-Rochester Conference series on public policy*, vol. 41. Elsevier.
- Cohen, Mike X. 2021. *Linear Algebra: Theory, Intuition, Code*. sincXpress.
- Cook, William J. 2011. *In pursuit of the traveling salesman*. Princeton University Press.
- Coscia, Michele. 2021. The atlas for the aspiring network scientist. *arXiv preprint arXiv:2101.00863*.
- Dantzig, George B. 1951. Application of the simplex method to a transportation problem. *Activity analysis and production and allocation*.
- Dasaratha, Krishna, Golub, Benjamin, & Hak, Nir. 2022. *Learning from neighbors about a changing state*. Tech. rept. Northwestern University.
- Davey, Brian A, & Priestley, Hilary A. 2002. *Introduction to lattices and order*. Cambridge university press.

- De Masi, Giulia, Fujiwara, Yoshi, Gallegati, Mauro, Greenwald, Bruce, & Stiglitz, Joseph E. 2011. An analysis of the Japanese credit network. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, **7**(2), 209–232.
- DeGroot, Morris H. 1974. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, **69**(345), 118–121.
- Demange, Gabrielle. 2017. Optimal targeting strategies in a network under complementarities. *Games and Economic Behavior*, **105**, 84–103.
- Demange, Gabrielle. 2018. Contagion in financial networks: a threat index. *Management Science*, **64**(2), 955–970.
- Deplano, Diego, Franceschelli, Mauro, & Giua, Alessandro. 2020. A nonlinear Perron–Frobenius approach for stability and consensus of discrete-time multi-agent systems. *Automatica*, **118**, 109025.
- Dew-Becker, Ian. 2022. *Tail risk in production networks*. Tech. rept. Northwestern University.
- Di Giovanni, Julian, Levchenko, Andrei A, & Mejean, Isabelle. 2014. Firms, destinations, and aggregate fluctuations. *Econometrica*, **82**(4), 1303–1340.
- Du, Ye, Lehrer, Ehud, & Pauzner, Ady. 2015. Competitive economy as a ranking device over networks. *Games and Economic Behavior*, **91**, 1–13.
- Du, Yihong. 1990. Fixed points of increasing operators in ordered Banach spaces and applications. *Applicable Analysis*, **38**(01-02), 1–20.
- Dupor, Bill. 1999. Aggregation and irrelevance in multi-sector models. *Journal of Monetary Economics*, **43**(2), 391–409.
- Durrett, Richard. 2007. *Random graph dynamics*. Cambridge university press Cambridge.
- Easley, David, Kleinberg, Jon, et al. 2010. *Networks, crowds, and markets*. Vol. 8. Cambridge university press Cambridge.
- Eisenberg, Larry, & Noe, Thomas H. 2001. Systemic risk in financial systems. *Management Science*, **47**(2), 236–249.
- Elliott, Matthew, & Golub, Benjamin. 2019. A network approach to public goods. *Journal of Political Economy*, **127**(2), 730–776.

- Elliott, Matthew, & Golub, Benjamin. 2022. Networks and economic fragility. *Annual Review of Economics*, **14**, 665–696.
- Elliott, Matthew, Golub, Benjamin, & Jackson, Matthew O. 2014. Financial networks and contagion. *American Economic Review*, **104**(10), 3115–53.
- Erdős, Paul, & Rényi, Alfréd. 1960. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **5**(1), 17–60.
- Fajgelbaum, Pablo D, & Schaal, Edouard. 2020. Optimal transport networks in spatial equilibrium. *Econometrica*, **88**(4), 1411–1452.
- Flamary, Rémi, Courty, Nicolas, Gramfort, Alexandre, Alaya, Mokhtar Z., Boisbunon, Aurélie, Chambon, Stanislas, Chapel, Laetitia, Corenflos, Adrien, Fatras, Kilian, Fournier, Nemo, Gautheron, Léo, Gayraud, Nathalie T.H., Janati, Hicham, Rakotomamonjy, Alain, Redko, Ievgen, Rolet, Antoine, Schutz, Antony, Seguy, Vivien, Sutherland, Danica J., Tavenard, Romain, Tong, Alexander, & Vayer, Titouan. 2021. POT: Python Optimal Transport. *Journal of Machine Learning Research*, **22**(78), 1–8.
- Foss, Sergey, Korshunov, Dmitry, & Zachary, Stan. 2011. *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*. Vol. 6. Springer.
- Gabaix, Xavier. 2011. The granular origins of aggregate fluctuations. *Econometrica*, **79**(3), 733–772.
- Galeotti, Andrea, & Goyal, Sanjeev. 2010. The law of the few. *American Economic Review*, **100**(4), 1468–92.
- Galeotti, Andrea, Golub, Benjamin, & Goyal, Sanjeev. 2020. Targeting interventions in networks. *Econometrica*, **88**(6), 2445–2471.
- Galichon, Alfred. 2018. *Optimal Transport Methods in Economics*. Princeton University Press.
- Glynn, Peter W, & Desai, Paritosh Y. 2018. *A probabilistic proof of the Perron-Frobenius Theorem*. Tech. rept. arXiv preprint 1808.04964.
- Goebel, Kazimierz, & Kirk, William A. 1990. *Topics in metric fixed point theory*. Cambridge university press.
- Golub, Benjamin, & Jackson, Matthew O. 2010. Naive learning in social networks and the wisdom of crowds. *American Economic Journal: Microeconomics*, **2**(1), 112–49.

- Graham, Bryan S. 2017. An econometric model of network formation with degree heterogeneity. *Econometrica*, **85**(4), 1033–1063.
- Greinecker, Michael, & Kah, Christopher. 2021. Pairwise stable matching in large economies. *Econometrica*, **89**(6), 2929–2974.
- Guo, Dajun, Cho, Yeol Je, & Zhu, Jiang. 2004. *Partial ordering methods in nonlinear problems*. Nova Publishers.
- Häggström, Olle, et al. 2002. *Finite Markov chains and algorithmic applications*. Cambridge University Press.
- Herskovic, Bernard. 2018. Networks in production: Asset pricing implications. *The Journal of Finance*, **73**(4), 1785–1818.
- Hojman, Daniel A, & Szeidl, Adam. 2008. Core and periphery in networks. *Journal of Economic Theory*, **139**(1), 295–309.
- Holme, Petter. 2019. Rare and everywhere: Perspectives on scale-free networks. *Nature communications*, **10**(1), 1–3.
- Jackson, Matthew O. 2010. *Social and economic networks*. Princeton university press.
- Jackson, Matthew O. 2014. Networks in the understanding of economic behaviors. *Journal of Economic Perspectives*, **28**(4), 3–22.
- Jackson, Matthew O, & Pernoud, Agathe. 2019. *Investment Incentives and Regulation in Financial Networks*. Tech. rept. SSRN 3311839.
- Jackson, Matthew O, & Pernoud, Agathe. 2020. *Credit freezes, equilibrium multiplicity, and optimal bailouts in financial networks*. Tech. rept. arxiv 2012.12861.
- Jackson, Matthew O, & Pernoud, Agathe. 2021. Systemic risk in financial networks: A survey. *Annual Review of Economics*, **13**, 171–202.
- Jackson, Matthew O, & Wolinsky, Asher. 1996. A strategic model of social and economic networks. *Journal of economic theory*, **71**(1), 44–74.
- Jänich, Klaus. 1994. Linear algebra. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, **7**, 8.
- Kakutani, Shizuo. 1941. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke mathematical journal*, **8**(3), 457–459.

- Katz, Leo. 1953. A new status index derived from sociometric analysis. *Psychometrika*, **18**(1), 39–43.
- Kepner, Jeremy, & Gilbert, John. 2011. *Graph algorithms in the language of linear algebra*. SIAM.
- Kikuchi, Tomoo, Nishimura, Kazuo, Stachurski, John, & Zhang, Junnan. 2021. Coase meets Bellman: Dynamic programming for production networks. *Journal of Economic Theory*, **196**, 105287.
- Kim, Kyungsik, Kim, Soo Yong, & Ha, Deock-Ho. 2007. Characteristics of networks in financial markets. *Computer physics communications*, **177**(1-2), 184–185.
- Klages-Mundt, Ariah, & Minca, Andreea. 2021. Optimal intervention in economic networks using influence maximization methods. *European Journal of Operational Research*.
- Kolouri, Soheil, Park, Se Rim, Thorpe, Matthew, Slepcev, Dejan, & Rohde, Gustavo K. 2017. Optimal mass transport: Signal processing and machine-learning applications. *IEEE signal processing magazine*, **34**(4), 43–59.
- Kondo, Illenin O, Lewis, Logan T, & Stella, Andrea. 2020. *Heavy Tailed, but not Zipf: Firm and Establishment Size in the US*. Tech. rept. Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- Krasnoselskii, MA. 1964. *Positive solutions of operator equations*. Noordhoff, Groningen.
- Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory functional analysis with applications*. Vol. 1. wiley New York.
- Kumamoto, Shin-Ichiro, & Kamihigashi, Takashi. 2018. Power laws in stochastic processes for social phenomena: An introductory review. *Frontiers in Physics*, **6**, 20.
- Leontief, Wassily W. 1941. *The Structure of American Economy, 1919-1929*. Harvard University Press.
- Liu, Ernest. 2019. Industrial policies in production networks. *The Quarterly Journal of Economics*, **134**(4), 1883–1948.
- Ljungqvist, Lars, & Sargent, Thomas J. 2018. *Recursive macroeconomic theory*. 4 edn. MIT press.
- Lucas, RE, & Stokey, NL. 1989. *Recursive methods in dynamic economics*. Harvard University Press.

- Marinacci, Massimo, & Montrucchio, Luigi. 2019. Unique tarski fixed points. *Mathematics of Operations Research*, **44**(4), 1174–1191.
- Martin, Thorsten, & Otto, Clemens A. 2020. *The Downstream Impact of Upstream Tariffs: Evidence from Investment Decisions in Supply Chains*. Tech. rept. SSRN 2872662.
- Matousek, Jiri, & Gärtner, Bernd. 2007. *Understanding and using linear programming*. Springer Science & Business Media.
- Menczer, Filippo, Fortunato, Santo, & Davis, Clayton A. 2020. *A first course in network science*. Cambridge University Press.
- Meyer, Carl D. 2000. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Vol. 71. Siam.
- Meyer-Nieberg, Peter. 2012. *Banach lattices*. Springer Science & Business Media.
- Meyn, Sean P, & Tweedie, Richard L. 2009. *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press.
- Miller, Ronald E, & Blair, Peter D. 2009. *Input-output analysis: foundations and extensions*. Cambridge university press.
- Miranda-Pinto, Jorge. 2021. Production network structure, service share, and aggregate volatility. *Review of Economic Dynamics*, **39**, 146–173.
- Nair, Jayakrishnan, Wierman, Adam, & Zwart, Bert. 2021. *The Fundamentals of Heavy Tails: Properties, Emergence, and Estimation*. Preprint, California Institute of Technology.
- Nash, John F. 1950. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, **36**(1), 48–49.
- Newman, Mark. 2018. *Networks*. Oxford university press.
- Newman, Mark EJ. 2005. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary physics*, **46**(5), 323–351.
- Nikaido, Hukukane. 1968. *Convex structures and economic theory*. Academic Press.
- Norris, James Robert. 1998. *Markov chains*. Cambridge university press.
- Olabisi, Michael. 2020. Input–Output Linkages and Sectoral Volatility. *Economica*, **87**(347), 713–746.

- Ou, Qing, Jin, Ying-Di, Zhou, Tao, Wang, Bing-Hong, & Yin, Bao-Qun. 2007. Power-law strength-degree correlation from resource-allocation dynamics on weighted networks. *Physical Review E*, **75**(2), 021102.
- Pearce, Roger. 2017. Triangle counting for scale-free graphs at scale in distributed memory. *Pages 1–4 of: 2017 IEEE High Performance Extreme Computing Conference (HPEC)*. IEEE.
- Peyré, Gabriel, Cuturi, Marco, et al. 2019. Computational optimal transport: With applications to data science. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, **11**(5-6), 355–607.
- Privault, Nicolas. 2013. Understanding Markov Chains. *Examples and Applications*, Publisher Springer-Verlag Singapore, **357**, 358.
- Punel, Aymeric, & Ermagun, Alireza. 2018. Using Twitter network to detect market segments in the airline industry. *Journal of Air Transport Management*, **73**, 67–76.
- Quah, Danny. 1993. Empirical cross-section dynamics in economic growth. *European Economic Review*, **37**(2-3.), 426–434.
- Rybski, Diego, Buldyrev, Sergey V, Havlin, Shlomo, Liljeros, Fredrik, & Makse, Hernán A. 2009. Scaling laws of human interaction activity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **106**(31), 12640–12645.
- Schauder, Juliusz. 1930. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Math*, **2**, 71–80.
- Schrijver, Alexander. 2005. On the history of combinatorial optimization (till 1960). *Handbooks in operations research and management science*, **12**, 1–68.
- Seneta, Eugene. 2006a. Markov and the creation of Markov chains. *Pages 1–20 of: Markov Anniversary Meeting*. Citeseer.
- Seneta, Eugene. 2006b. *Non-negative matrices and Markov chains*. Springer Science & Business Media.
- Shiller, Robert J. 2020. *Narrative economics: How stories go viral and drive major economic events*. Princeton University Press.
- Shin, Hyun Song. 2010. *Risk and liquidity*. Oxford University Press.
- Simon, Carl P. 1994. *Mathematics for economists*. Norton & Company, Inc.

- Simonetto, Andrea, Monteil, Julien, & Gambella, Claudio. 2019. Real-time city-scale ridesharing via linear assignment problems. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, **101**, 208–232.
- Stachurski, John. 2016. *A Primer in Econometric Theory*. MIT Press.
- Stachurski, John. 2022a. *Economic dynamics: theory and computation*. 2 edn. MIT Press.
- Stachurski, John. 2022b. *Systemic Risk in Financial Systems: Properties of Equilibria*.
- Vershik, Anatoly Moiseevich. 2013. Long history of the Monge-Kantorovich transportation problem. *The Mathematical Intelligencer*, **35**(4), 1–9.
- Villani, Cédric. 2008. *Optimal transport: old and new*. Vol. 338. Springer Science & Business Media.
- Watts, Alison. 2001. A dynamic model of network formation. *Games and Economic Behavior*, **34**(2), 331–341.
- Zenou, Yves. 2016. Key players. *Oxford Handbook on the Economics of Networks*, 244–274.
- Zhang, Zhitao. 2012. *Variational, topological, and partial order methods with their applications*. Vol. 29. Springer.