Что происходит?

Сегодня поговорим про сходимости в некоторых пространствах, зачем это надо, какие они бывают и куда их девать.

1 Прививки для туристов

Для начала давайте разберёмся в том, где мы, собственно говоря, работаем. Самое базовое понятие, это пространство, пространство X это просто множество с какими-то элементами (события, картошка, функции, буквально что угодно). $\mathcal{F}$ - некоторый набор подмножеств этого пространства. (Обычно $\mathcal{F}$ - поплукольцо, то есть
1) $\varnothing \in \mathcal{F}$,
2) $\forall A, B \subset \mathcal{F}, A \cap B \subset \mathcal{F}$,
3) $\forall A, A_1 \subset A : \exists A_2, \ldots, A_n \, s.t. \, A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n = A$)

Мерой будем называть функцию, которая умеет "измерять"эти подмножества, то бишь сопоставляет им какие-то действительные числа, формально $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$. Свойства меры:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\forall A, B \, s.t. \, A \cap B = \varnothing, \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
3. Периодически говорят о счётной аддитивности (чтобы можно было сложить элементы по порядку и никто не умер).

Меру зовут вероятностной, когда $\mathcal{F}$ это не просто набор подмножеств, а σ-алгебра. То есть

1. Само пространство $X \subset \mathcal{F}$
2. Ежели $A \subset \mathcal{F}$, то и $X \backslash A \subset \mathcal{F}$
3. Счетное объединение или пересечение множеств из $\mathcal{F}$ лежит в $\mathcal{F}$

Причём само μ теперь принимает значения от нуля до одного, то есть μ: $\mathcal{F} \to [0, 1]$ и $\mu(X) = 1$. Теперь $(X, \mathcal{F}, \mu)$ выглядит не так страшно и обозначает пространство с мерой.

2 Сходимости

В этот раз все сходимости имеют отношение к теорверу, поэтому рассмтариваются последовательности функций в вероятностных пространствах (пространствах с мерой, да не абы какой, а вероятностной!).
В этот раз будут рассмотрены

- Сходимость в L^p (при $p = 1$ она называется сходимостью в среднем, при $p = 2$ - в среднеквадратичном)
- Сходимость почти наверное
- Сходимость по вероятности (Частный случай сходимости по мере)
- Сходимость по распределению

2.1 Сходимость почти наверное

Самая сильная сходимость из всех присутствующих, поспорить с ней может только сходимость в L^p