



ICEF

Applied seminar «Quantitative
analysis»

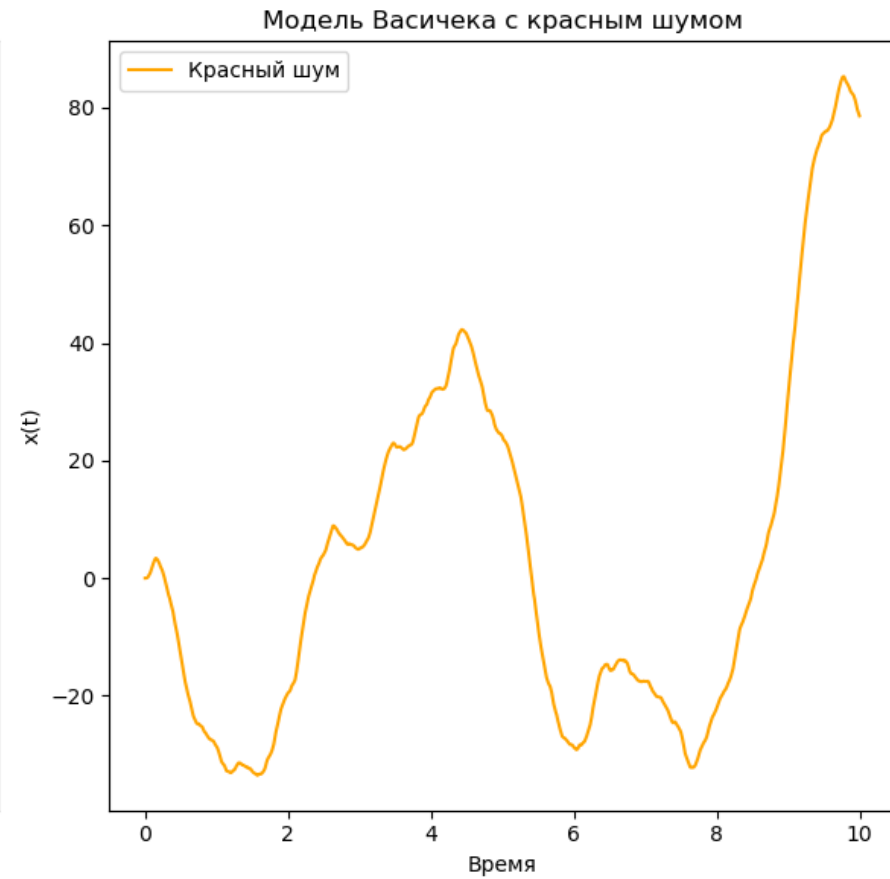
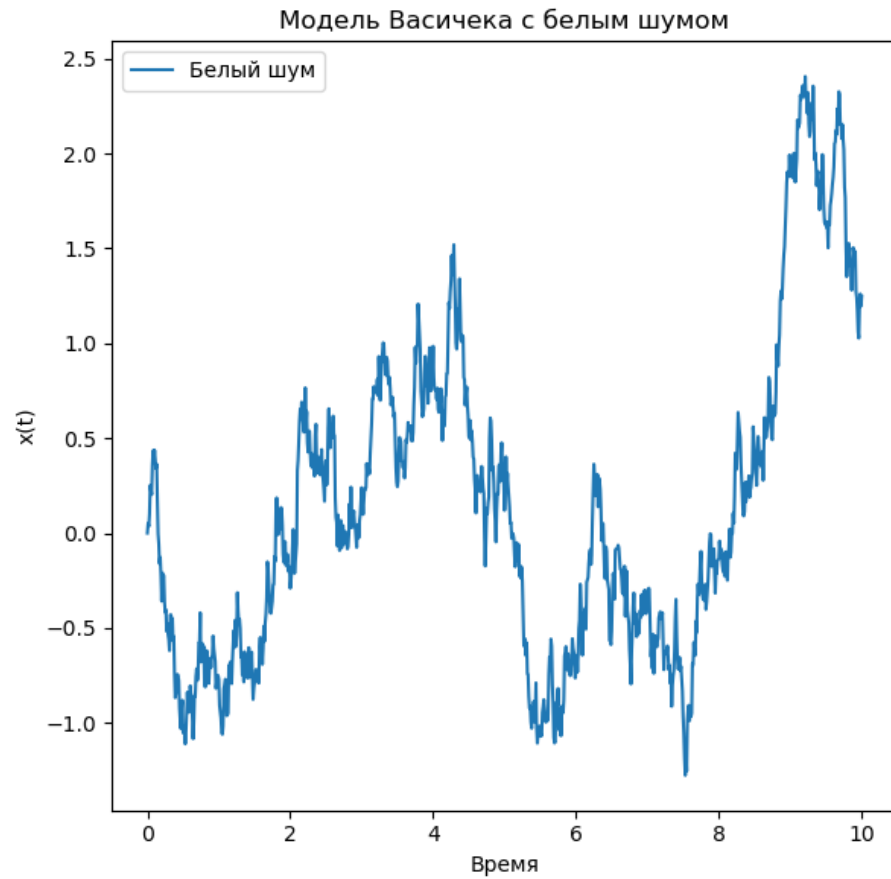
Moscow
2025

Colored Noise in Financial Time Series

Pavlova A., ICEF'26



Введение



Статистические характеристики случайного процесса

Рассмотрим **процессы** $X(t)$ и $\rho(t)$:

- $X(t)$ - стационарный **в широком смысле** процесс;
- $\langle X(t) \rangle = 0$;
- **Автокорреляционная функция** $X(t)$: $E[X(t)X(t + \tau)] = R_X(\tau)$;
- t достаточно большое ($t \rightarrow \infty$).

$$\rho(t) = \int_0^t X(s) ds$$



$$\sigma_\rho^2 = \langle \rho^2(t) \rangle = \iint_0^t R_X(s - u) ds du \approx t \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) d\tau \approx D_\rho t;$$

$$D_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) d\tau > 0 \text{ — коэффициент диффузии.}$$

В соответствии с **теоремой Винера-Хинчина**, спектральная плотность процесса представляется **интегралом Фурье**:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

тогда

$$D_\rho = 2\pi S_X(0),$$

т. е. коэффициент диффузии **пропорционален** спектральной плотности, взятой на нулевой частоте.



Спектральная плотность мощности

Спектральная плотность мощности (СПМ) – это функция, описывающая, как мощность сигнала распределена по частотам.

В финансах СПМ помогает анализировать динамику цен, объема торгов и других рыночных индикаторов:

- **Анализ волатильности** – резкие скачки на высоких частотах могут указывать на высокочастотную торговлю или рыночную турбулентность.
- **Долгосрочные тренды** – если в спектре есть мощные низкочастотные компоненты, это может указывать на фундаментальные изменения рынка.
- **Обнаружение циклов** – некоторые рынки имеют повторяющиеся паттерны, например, недельные или месячные циклы.



Белый шум

$X(t) = w(t)$ — гауссовский белый шум.

- $S_w(0) = S_w(\omega) = \textit{const}$;
- $w(t_1)$ и $w(t_2)$ некоррелированы, если $t_1 \neq t_2$;
- $\langle w(t) \rangle = 0$;
- $w(t)$ — обобщенный случайный процесс.



$w(t)$ — **обобщенный** случайный процесс.

АКФ белого шума — $R_w(t_1 - t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$, где σ^2 — интенсивность белого шума, а $\delta(t_1 - t_2)$ — **дельта-функция**.

$$\delta(\tau) = \begin{cases} +\infty, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1.$$



Винеровский процесс

$W(t)$ — винеровский процесс.

- $W_0 = 0$ почти достоверно;
- W_t — процесс с **независимыми** приращениями;
- $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$. Величину σ^2 , постоянную для процесса, будем считать равной **1**.

Из предыдущей задачи $\sigma_W^2 \approx t D_W$.

$$D_W = \int_{-\infty}^{+\infty} R_W(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \delta(\tau) d\tau = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau.$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$ и $\sigma^2 = 1$, то

$$\sigma_W^2 \approx t!$$

Дисперсия винеровского процесса растет линейно со временем.

Проблемы, связанные с белым шумом

Белый шум – математически сложный объект, поскольку его реализации (функции во времени) **не являются дифференцируемыми**. Его автокорреляционная функция представляет собой дельта-функцию, что означает бесконечную мощность на любой частоте, что невозможно в реальных системах.

В реальной практике дельта-функция, используемая в определении белого шума, заменяется на некоторую приближенную симметричную функцию $\Delta(\tau)$ с конечной шириной $2\tau_\Delta$, обладающую свойством нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\tau) d\tau = 1$.

Величина τ_Δ называется **временем корреляции** случайного процесса с АКФ $R_\Delta(\tau) = \sigma^2 \Delta(\tau)$.

Если $\tau_\Delta \rightarrow 0$, то случайный процесс превращается в белый шум, поскольку его АКФ приближается к дельта-функции.



Цветной шум

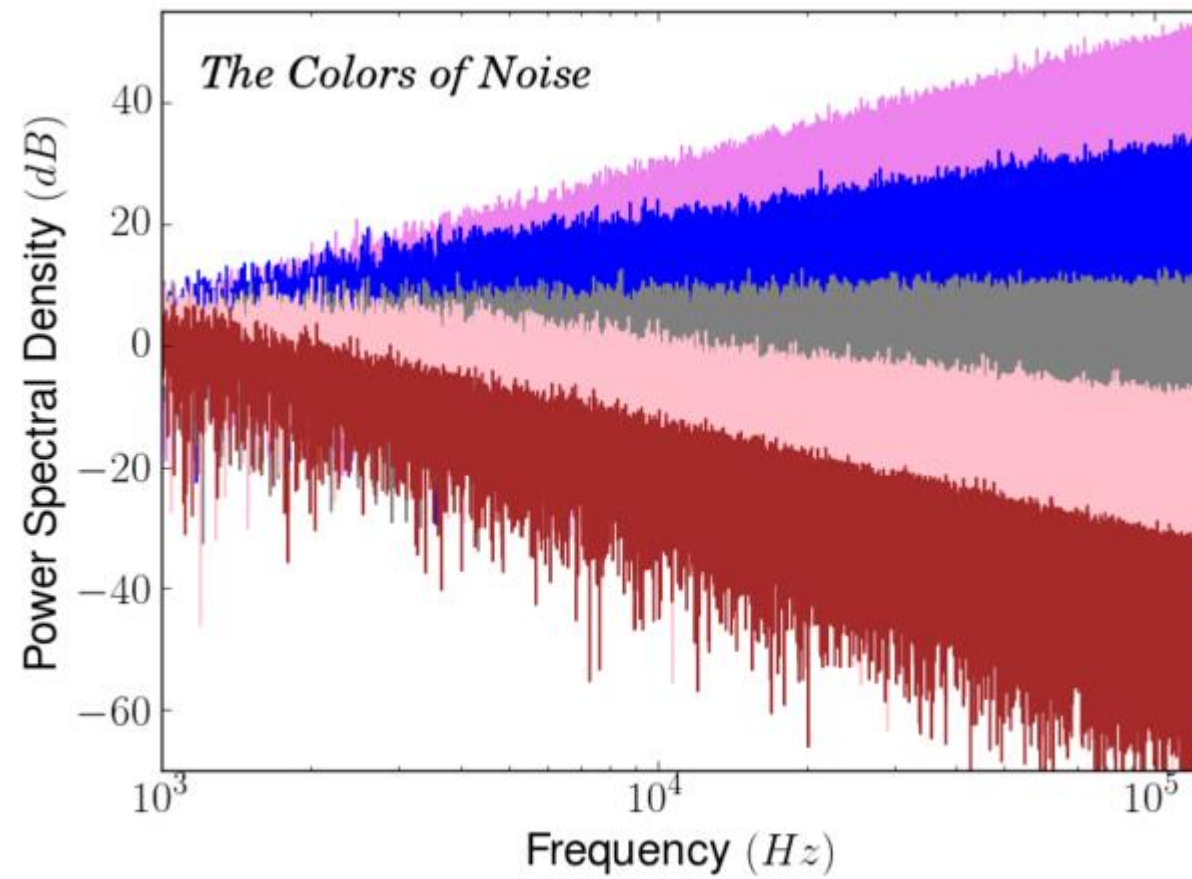
Если за интервал времени, равный времени корреляции, изменением состояния динамической системы можно пренебречь, то модель белого шума, когда $\tau_X = 0$, является удобным приближением для решения конкретных задач.

Однако, например, в статистической физике, где почти всегда необходимо учитывать инерционность динамических систем, приходится рассматривать коррелированные процессы, для которых $\tau_X \neq 0$.

Подобные шумы обычно называют **цветными**.



Название шума	СПМ
Белый	$1/f^0$
Розовый	$1/f^1$
Красный	$1/f^2$
Синий	$1/f^{-1}$
Фиолетовый	$1/f^{-2}$





Процесс Орнштейна-Уленбека

Простейшим и одним из наиболее популярных примеров окрашенного шума является известный процесс **Орнштейна – Уленбека**:

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dW_t,$$

где:

- X_t — случайный процесс;
- $\theta > 0$ — коэффициент возврата к среднему (частота затухания);
- σ — интенсивность шума;
- W_t — стандартный винеровский процесс.

В отличие от белого шума, процесс Орнштейна – Уленбека обладает **конечным временем корреляции**. Его автокорреляционная функция имеет вид

$$R_X(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta|\tau|},$$

т. е. АКФ затухает **экспоненциально** с характерным временем $\tau = \frac{1}{\theta}$.



Дисперсия процесса Орнштейна-Уленбека (АКФ при $\tau = 0$) имеет вид

$$R_X(0) = \frac{\sigma^2}{2\theta}.$$

Процесс Орнштейна – Уленбека является единственным случайным процессом, который является одновременно **гауссовским, марковским и стационарным**.



Модель Васичека

Модель Васичека (Vasicek Model) описывает эволюцию **краткосрочной процентной ставки** как стохастический процесс, управляемый уравнением типа Орнштейна-Уленбека:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

где:

- r_t — краткосрочная ставка в момент времени t ;
- κ — скорость возврата к среднему θ ;
- θ — долгосрочное среднее значение процентной ставки;
- σ — волатильность процесса;
- W_t — стандартный винеровский процесс.



Модель CIR

Модель CIR является модификацией модели Васичека и описывает динамику процентных ставок так, чтобы гарантировать их **неотрицательность**:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

В рамках исследования заменим стандартный винеровский процесс на **цветной шум**.



Влияние цветных шумов на предвидение аномалий внутри модели CIR

Noise	P = 1			P = 3			P = 5		
η	1	5	10	1	5	10	1	5	10
Accuracy									
White	0.68	0.72	0.77	0.68	0.71	0.75	0.69	0.71	0.73
Pink	0.95	0.94	0.95	0.94	0.94	0.94	0.9	0.91	0.9
Red	0.97	0.97	0.97	0.83	0.83	0.84	0.81	0.8	0.81
Balanced accuracy									
White	0.52	0.51	0.52	0.5	0.52	0.51	0.51	0.5 8	0.51
Pink	0.87	0.91	0.95	0.83	0.86	0.89	0.76	0.77	0.8
Red	0.92	0.94	0.98	0.82	0.82	0.83	0.77	0.75	0.76

Влияние цветных шумов на предвидение аномалий внутри модели CIR

Noise	P = 1			P = 3			P = 5		
η	1	5	10	1	5	10	1	5	10
Precision									
White	0.41	0.4	0.39	0.39	0.38	0.39	0.4	0.4	0.41
Pink	0.8	0.73	0.68	0.84	0.75	0.67	0.85	0.76	0.66
Red	0.88	0.83	0.79	0.86	0.82	0.77	0.86	0.82	0.77
Recall									
White	0.49	0.47	0.44	0.48	0.44	0.43	0.49	0.45	0.43
Pink	0.77	0.84	0.93	0.68	0.76	0.83	0.53	0.58	0.66
Red	0.87	0.92	0.98	0.75	0.78	0.81	0.65	0.65	0.67

Литература

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965.
2. Гуз С.А., Свиридов М.В. Теория стохастических систем, находящихся под действием широкополосного стационарного шума, фильтрованного в области низких частот: монография. – М.: Университетская книга, 2020.
3. Зотов Г.А., Лукьянченко П.П. Нейросетевой подход в задаче предвидения аномалий процентных ставок под воздействием коррелированных шумов. – М.: Докл. РАН. Матем., информ., проц., упр., 2023.
4. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. – М.: ИЛ, 1960.
5. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969.



<https://cs.hse.ru/iai/aimf/>