Sesión 8: Qudits, SU(3), Matrices ,Qutrits,Compuertas cuánticas

Course II Quantum Computing: From qubits to qudits

Prof. Alcides Montoya Cañola, Ph.D
Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Quantum computing

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Qudits: Matrices de Gell-man

3. Importancia de las Matrices de Gell-Mann para Qudits

Las matrices de Gell-Mann juegan un papel fundamental en la descripción de qudits porque permiten representar las operaciones y observables en un sistema cuántico de d niveles. Esto es especialmente importante para:

- **Estados cuánticos mixtos**: Las matrices de Gell-Mann permiten describir el operador de densidad de un qudit.
- **Operaciones cuánticas**: Como las matrices de Gell-Mann son generadores del grupo $SU(d)$, cualquier operación cuántica que pertenezca a este grupo puede escribirse como una combinación lineal de estas matrices.
- **Entrelazamiento en sistemas de qudits**: Estas matrices permiten estudiar y caracterizar el entrelazamiento cuántico en sistemas de qudits, generalizando los métodos que se utilizan para qubits.

4. Representación en Mecánica Cuántica

En mecánica cuántica, cualquier observable o estado en un sistema de qudits puede expresarse como una combinación de las matrices de Gell-Mann. Para un sistema cuántico de d niveles, el operador de densidad ρ puede expresarse como:

$$\rho = \frac{1}{d}I + \sum_{i=1}^{d^2-1} c_i \lambda_i$$

donde:

- I es la matriz identidad de dimensión d.
- c_i son coeficientes reales que dependen del estado del sistema.
- λ_i son las matrices de Gell-Mann.

2. Forma General de la Matriz de Densidad

La matriz de densidad se puede descomponer en términos de la **matriz identidad** y los generadores λ_i del grupo $SU(d)$. La matriz identidad I tiene traza diferente de 0, mientras que los generadores λ_i tienen traza 0.

La descomposición de ρ en términos de I y λ_i es una combinación de la matriz identidad y una suma ponderada de los generadores de $SU(d)$:

$$\rho = \frac{1}{d}I + \sum_{i=1}^{d^2-1} c_i \lambda_i$$

Donde:

- $\frac{1}{d}I$ es el término que garantiza que la traza de ρ sea 1.
- $\sum_{i=1}^{d^2-1} c_i \lambda_i$ es la contribución de los generadores del grupo $SU(d)$, donde los coeficientes c_i son parámetros que dependen del estado específico del sistema.

3. Condiciones de la Matriz de Densidad

La matriz de densidad ρ debe cumplir dos propiedades clave:

1. **Hermiticidad**: $\rho = \rho^\dagger$. Esto se garantiza automáticamente, ya que tanto I como λ_i son matrices hermíticas.
2. **Traza unitaria**: $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$. Esto se cumple debido al término $\frac{1}{d}I$, ya que $\mathrm{Tr}(I) = d$, lo que implica que la traza de la parte proporcional a la matriz identidad es $\frac{d}{d} = 1$. Dado que las matrices λ_i tienen traza 0, no contribuyen a la traza total.

4. Interpretación Física de los Coeficientes c_i

Los coeficientes c_i en la expansión de la matriz de densidad son reales y representan las **componentes del estado cuántico** en la base de los generadores de $SU(d)$. Estos coeficientes codifican la información sobre el estado cuántico del sistema, es decir, cuánta "mezcla" o "superposición" hay entre los diferentes niveles del sistema cuántico.

En el caso más simple de $d = 2$ (un qubit), la expansión se hace en términos de las matrices de Pauli, y los coeficientes c_i son los componentes del **vector de Bloch** que describen completamente el estado del qubit.

Resumen del Proceso

1. **Descomposición en una base de operadores hermíticos**: Se puede escribir cualquier operador hermítico como una combinación de la matriz identidad I y los generadores λ_i del grupo $SU(d)$.
2. **La matriz identidad asegura que la traza sea 1**, mientras que los generadores de $SU(d)$ tienen traza 0, lo que permite que la matriz de densidad tenga traza unitaria.
3. **Los coeficientes** c_i son parámetros que codifican la información sobre el estado cuántico y son reales.

Resumen

Las **matrices de Gell-Mann** son una generalización de las matrices de Pauli que se utilizan para describir sistemas cuánticos de d niveles, llamados **qudits**. Estas matrices son importantes porque forman una base para describir las operaciones y observables en el espacio de Hilbert de qudits y son los generadores del grupo de simetría $SU(d)$. Para un sistema de tres niveles (**qutrit**), hay ocho matrices de Gell-Mann, mientras que para un sistema de d niveles, se requieren $d^2 - 1$ matrices.

Aplicación en un Estado Superpuesto

Supongamos ahora que tenemos un estado superpuesto:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Aplicamos λ^1 a este estado:

$$\lambda^1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

El resultado es el mismo estado $|\psi\rangle$. Esto muestra que, para este estado específico, la aplicación de λ^1 no cambia el estado (similar a como la matriz X de Pauli no cambia un estado superpuesto de $|0\rangle$ y $|1\rangle$).

Ejemplo: Usando la Matriz λ^1

Tomemos la matriz λ^1 como ejemplo:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz actúa como una versión extendida de la matriz X de Pauli, pero en un sistema de tres niveles.

Aplicación en un Estado Base

Supongamos que tenemos un estado qutrit $|\psi\rangle = |1\rangle$, que en notación de vectores sería:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos λ^1 a este estado:

$$\lambda^1|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El resultado es el estado $|0\rangle$. Esto muestra que λ^1 intercambia los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, similar a como la matriz Pauli-X intercambia los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en un qubit.

Qubits: Hadamard Gate

Compuertas Cuánticas Básicas

1. **Compuerta Hadamard (H)**

   - **Definición**: Coloca un qubit en una superposición igual de $|0\rangle$ y $|1\rangle$.
   - **Matriz**:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   - **Efecto**:

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

1. Compuerta Hadamard en Qutrits

- **Compuerta Hadamard en Qubits**:
  - En el contexto de qubits ($d = 2$), la compuerta Hadamard es una operación fundamental que coloca un qubit en una superposición equitativa de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. La matriz de Hadamard para un qubit es:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  - Esta operación tiene la propiedad de transformar los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en una superposición de ambos.
- **Compuerta Hadamard en Qutrits**:
  - En sistemas de qutrits ($d = 3$), hay varias formas de definir una compuerta análoga a Hadamard. Una opción es aplicar una versión de Hadamard que opere en un subespacio bidimensional, similar a cómo se hace en qubits. Sin embargo, el artículo introduce una versión más general y completa, conocida como la **compuerta Clifford para qutrits** o **TH**.

2. Definición de la Compuerta TH

- **Compuerta TH**:
  - La compuerta Hadamard para qutrits que se utiliza en este artículo se define como:

$$TH = \frac{-i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

  - Donde ω es una raíz cúbica de la unidad:

$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

  - Esta matriz TH es una operación que actúa sobre los tres estados base $|0\rangle$, $|1\rangle$, y $|2\rangle$, colocando al qutrit en una superposición de estos estados, similar a lo que hace la compuerta Hadamard en el caso de qubits, pero en el espacio tridimensional.

Ejemplo Explicativo

Aplicación de la Compuerta TH en un Estado Base de Qutrit

Supongamos que comenzamos con un qutrit en el estado base $|0\rangle$:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la compuerta TH a este estado:

$$TH|\psi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es un estado en el que el qutrit está en una superposición equitativa de $|0\rangle$, $|1\rangle$, y $|2\rangle$, con un factor de fase de $\frac{-i}{\sqrt{3}}$.

Qubits Rotation

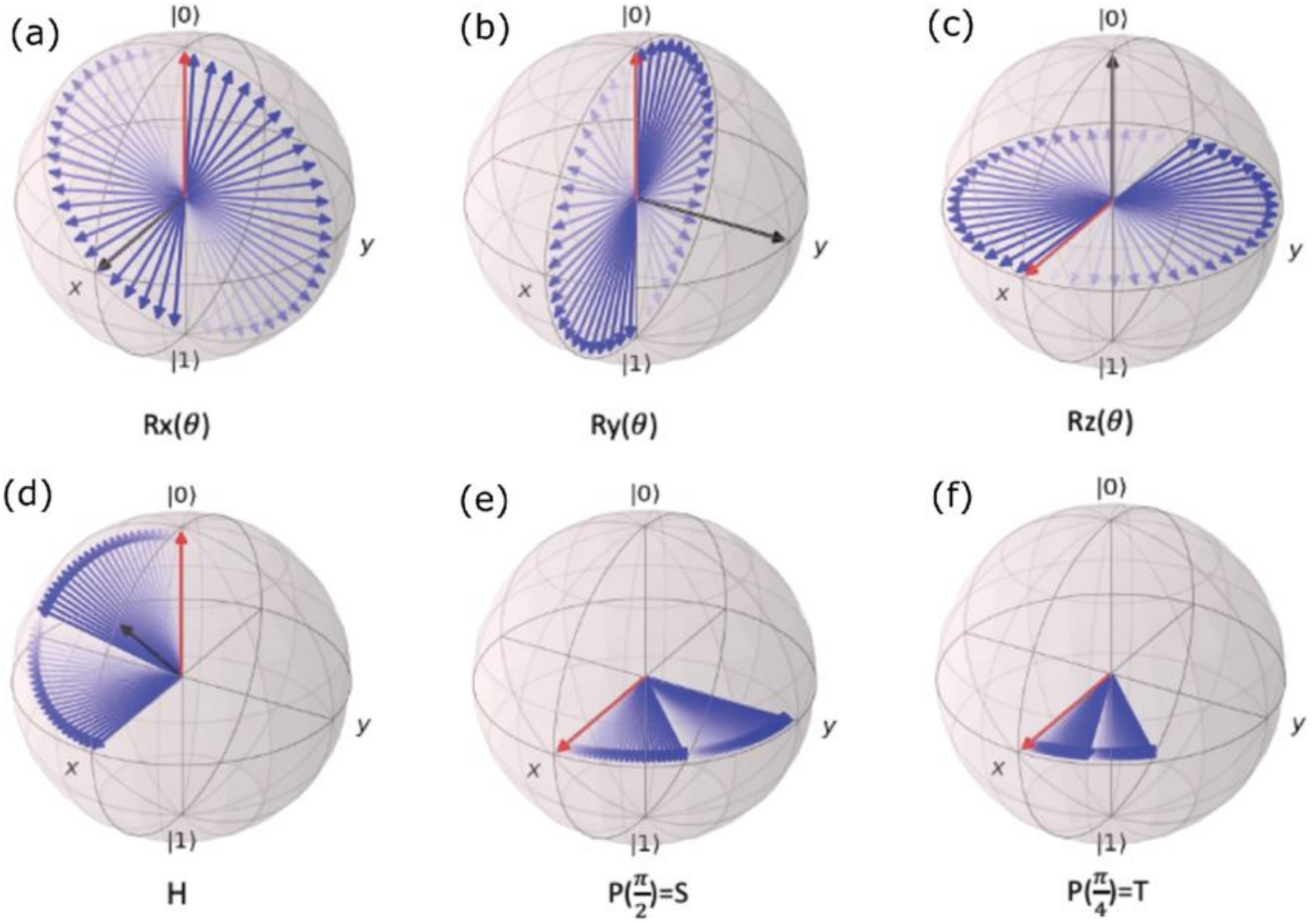
5. **Compuerta de Rotación (R)**

- **Definición**: Generaliza las rotaciones alrededor de los ejes X, Y y Z.
- **Matrices**:

$$RX(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$RY(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$RZ(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$



(a)
|0⟩
x
y
|1⟩
Rx(θ)
(b)
|0⟩
x
y
|1⟩
Ry(θ)
(c)
|0⟩
x
y
|1⟩
Rz(θ)
(d)
|0⟩
x
y
|1⟩
H
(e)
|0⟩
x
y
|1⟩
P($\frac{\pi}{2}$)=S
(f)
|0⟩
x
y
|1⟩
P($\frac{\pi}{4}$)=T

Qudits Rotation

https://arxiv.org/pdf/2308.08050

Ejemplo 1: Rotación $TRX^{(01)}(\theta)$

- **Descripción**:
  - Esta operación actúa como una rotación en el subespacio $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, análoga a la compuerta Pauli-X en qubits. La rotación se realiza en un ángulo θ, mientras que el estado $|2\rangle$ permanece inalterado.
- **Matriz**:

$$TRX^{(01)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Aplicación**:
  - Si aplicamos esta rotación a un qutrit en el estado $|0\rangle$:

$$TRX^{(01)}(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - El resultado es una superposición de $|0\rangle$ y $|1\rangle$, con el tercer estado $|2\rangle$ inalterado.

Ejemplo 2: Rotación $TRY^{(12)}(\theta)$

- **Descripción**:
  - Esta operación rota el estado en el subespacio $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, análoga a la compuerta Pauli-Y en qubits.
- **Matriz**:

$$TRY^{(12)}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

- **Aplicación**:
  - Si aplicamos esta rotación a un qutrit en el estado $|1\rangle$:

$$TRY^{(12)}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

  - El resultado es una superposición de $|1\rangle$ y $|2\rangle$, con el primer estado $|0\rangle$ inalterado.

Ejemplo 3: Rotación $TRZ^{(02)}(\theta)$

- **Descripción**:
  - Esta operación rota el estado en el subespacio $\{|0\rangle, |2\rangle\}$, análoga a la compuerta Pauli-Z en qubits.
- **Matriz**:

$$TRZ^{(02)}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

- **Aplicación**:
  - Si aplicamos esta rotación a un qutrit en el estado $|0\rangle$:

$$TRZ^{(02)}(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - El resultado es el estado $|0\rangle$ con una fase de $e^{-i\frac{\theta}{2}}$, mientras que $|1\rangle$ se mantiene inalterado.

6. **Compuerta Controlada-NOT (CNOT)**

- **Definición**: Flipa el estado del qubit objetivo si el qubit de control está en el estado $|1\rangle$.
- **Matriz**:

$$\mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Efecto**:

$$\mathrm{CNOT}|00\rangle = |00\rangle, \quad \mathrm{CNOT}|01\rangle = |01\rangle$$

$$\mathrm{CNOT}|10\rangle = |11\rangle, \quad \mathrm{CNOT}|11\rangle = |10\rangle$$

Rotaciones para Qubits

Para un qubit, las rotaciones alrededor de los ejes X, Y y Z en el espacio de Hilbert de dos dimensiones están definidas por las siguientes matrices unitarias:

- **Rotación alrededor del eje X**:

$$RX(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}X\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

- **Rotación alrededor del eje Y**:

$$RY(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}Y\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

- **Rotación alrededor del eje Z**:

$$RZ(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}Z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

Qudits : Generalization

arXiv > quant-ph > arXiv:2008.00959

Quantum Physics

[Submitted on 30 Jul 2020 (v1), last revised 11 Nov 2020 (this version, v4)]

Qudits and high-dimensional quantum computing

Yuchen Wang, Zixuan Hu, Barry C. Sanders, Sabre Kais

https://arxiv.org/abs/2008.00959

Concepto de Qudit

Definición

- **Qubit**: Un sistema cuántico de dos niveles con estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$.
- **Qudit**: Un sistema cuántico de d niveles con estados base $|0\rangle, |1\rangle, ..., |d-1\rangle$.

Notación

Un qudit en el espacio de Hilbert de dimensión d se describe como:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \cdots + \alpha_{d-1}|d-1\rangle$$

donde α_i son amplitudes complejas y $\sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2 = 1$.

Estados y Superposición

Similar a los qubits, los qudits pueden existir en una superposición de todos sus posibles estados. Para un qudit de dimensión d, su estado cuántico puede representarse como una combinación lineal de los estados base.

Ejemplo: Qudit de 3 niveles (trit)

Un trit (qudit de 3 niveles) puede estar en el estado:

$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle$

con la condición de normalización:

$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$

Operaciones en Qudits

Las operaciones cuánticas en qudits se realizan mediante matrices unitarias de dimensión $d \times d$. Estas operaciones generalizan las puertas lógicas de los qubits a sistemas de mayor dimensionalidad.

Puertas Cuánticas

- **Puerta de Pauli-X generalizada** (permuta los estados en un qudit):

  $$X_d|i\rangle = |(i+1) \mod d\rangle$$

- **Puerta de Pauli-Z generalizada** (añade una fase dependiente del estado):

  $$Z_d|i\rangle = \omega^i|i\rangle$$

  donde $\omega = e^{2\pi i/d}$ es una raíz de la unidad.

Entrelazamiento y Qudits

El entrelazamiento entre qudits sigue los mismos principios que con qubits, pero con una mayor capacidad para entrelazar estados más complejos.

Ejemplo: Par de Qudits de 3 niveles

Un estado entrelazado de dos trits podría ser:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$$

Este estado no puede descomponerse en un producto de estados individuales de cada trit, indicando entrelazamiento.

Ventajas de los Qudits

1. **Mayor Densidad de Información**: Un solo qudit puede almacenar más información que un qubit.
2. **Reducción del Número de Qubits**: Algunos algoritmos cuánticos pueden necesitar menos qudits que qubits para la misma tarea.
3. **Robustez contra Errores**: En algunos casos, los qudits pueden ser más robustos contra ciertos tipos de errores cuánticos.

Implementación Física

Los qudits pueden ser implementados en varios sistemas físicos:

- **Iones atrapados**: Utilizando múltiples niveles de energía de los iones.
- **Fotones**: Utilizando diferentes modos de frecuencia, polarización o ángulo orbital.
- **Átomos y moléculas**: Aprovechando los múltiples niveles de energía.

Definición de X_d

Para un qudit en un espacio de Hilbert de dimensión d, la operación X_d es una generalización de la puerta de Pauli-X en qubits (que intercambia los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$). En el caso de los qudits, X_d cicla a través de los estados $|0\rangle$ a $|d-1\rangle$.

La operación X_d actúa sobre un estado base $|i\rangle$ de la siguiente manera:
$$X_d|i\rangle = |(i+1) \mod d\rangle$$

1. Concepto de Aritmética Modular

La operación modular, denotada por , se refiere a encontrar el **resto** de una división. En términos formales, si a es un número entero y n es un divisor, la expresión $a \mod n$ significa el resto que se obtiene al dividir a por n.

$$a \mod n = \text{resto de dividir } a \text{ entre } n$$

Por ejemplo:

- $5 \mod 3 = 2$ (porque $5 = 1 \times 3 + 2$).
- $7 \mod 4 = 3$ (porque $7 = 1 \times 4 + 3$).

2. Aritmética Modular en Sistemas Cíclicos

En muchos contextos cuánticos, trabajamos con estados cíclicos o repetitivos, como es el caso de los **qudits**, que pueden tener d posibles estados. Estos sistemas cíclicos tienen un comportamiento donde los índices "vuelven" al principio cuando se alcanza el máximo valor. Este comportamiento es perfectamente descrito por la aritmética modular.

En un sistema de d niveles, cada estado se etiqueta como $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \ldots, |d-1\rangle$. Cuando aplicamos una operación como la compuerta X_d, que avanza de un estado a otro, si alcanzamos el último estado $|d-1\rangle$, volveremos al estado $|0\rangle$. Esto se describe usando aritmética modular.

Ejemplo con un Qudit de 4 Niveles:

Supongamos que tenemos un qudit de $d = 4$ niveles con los estados $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$. Si aplicamos la compuerta X_4, obtendremos lo siguiente:

$$X_4|0\rangle = |(0+1) \mod 4\rangle = |1\rangle$$

$$X_4|1\rangle = |(1+1) \mod 4\rangle = |2\rangle$$

$$X_4|2\rangle = |(2+1) \mod 4\rangle = |3\rangle$$

$$X_4|3\rangle = |(3+1) \mod 4\rangle = |0\rangle$$

Aquí, puedes ver que al aplicar X_4 al estado $|3\rangle$, volvemos al estado $|0\rangle$, lo que refleja el comportamiento cíclico descrito por la aritmética modular.

Ejemplo: Qudit con $d = 4$

1. **Estado $|0\rangle$**

   $$X_4|0\rangle = |(0+1) \mod 4\rangle = |1\rangle$$

2. **Estado $|1\rangle$**

   $$X_4|1\rangle = |(1+1) \mod 4\rangle = |2\rangle$$

3. **Estado $|2\rangle$**

   $$X_4|2\rangle = |(2+1) \mod 4\rangle = |3\rangle$$

4. **Estado $|3\rangle$**

   $$X_4|3\rangle = |(3+1) \mod 4\rangle = |0\rangle$$

Implementación Matricial

Para formalizar esto con una matriz, la operación X_d puede representarse como una matriz de permutación cíclica de tamaño $d \times d$. Para $d = 4$, la matriz X_4 es:

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando X_4 a los estados base:

1. **Estado** $|0\rangle$

$$X_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

2. **Estado** $|1\rangle$

$$X_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$$

3. **Estado $|2\rangle$**

$$X_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |3\rangle$$

4. **Estado $|3\rangle$**

$$X_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

Definición de Z_d

Para un qudit en un espacio de Hilbert de dimensión d, la puerta Z_d se define de la siguiente manera:

$$Z_d|i\rangle = \omega^i|i\rangle$$

donde ω es una raíz de la unidad dada por:

$$\omega = e^{2\pi i/d}$$

La raíz ω tiene la propiedad de que $\omega^d = 1$.