

Course II

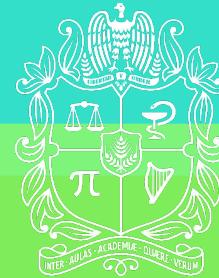
Quantum

Computing: From

qubits to qudits

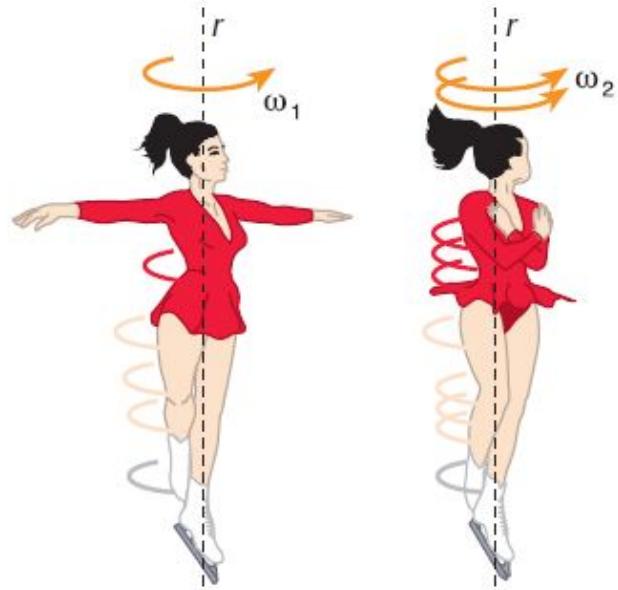
Prof. Alcides Montoya Cañola, Ph.D
Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia Sede
Medellín

Sesión 6: Momento angular orbital -
Experimento de Stern-Gerlach - Matrices
de Pauli



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Qubits: Física - repaso del concepto de Momento lineal, angular y otros



1. Momento Lineal

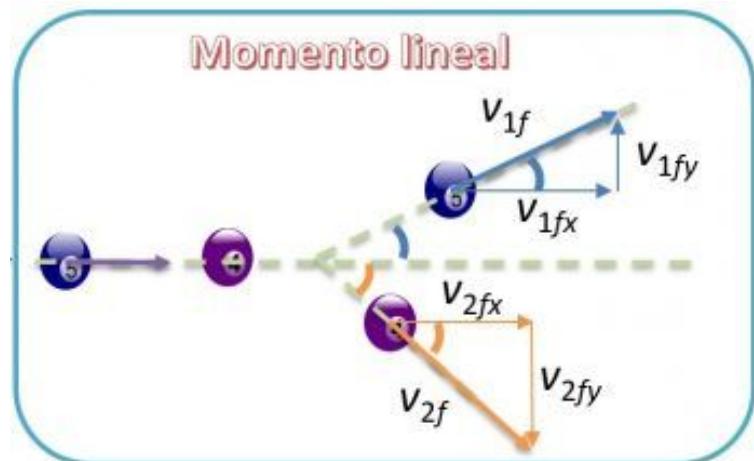
1.1. Desarrollo Clásico

El concepto de **momento lineal** (también llamado **cantidad de movimiento**) fue formulado por primera vez de manera explícita por **Isaac Newton** en su obra *Principia Mathematica* en 1687. Newton definió el momento lineal como el producto de la masa de un cuerpo y su velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

donde:

- **p** es el momento lineal.
- **m** es la masa del objeto.
- **v** es la velocidad.



1.2. Segunda Ley de Newton

El momento lineal fue fundamental para la formulación de la **Segunda Ley de Newton**, que establece que la fuerza neta que actúa sobre un objeto es igual al cambio en su momento lineal respecto al tiempo:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

En el caso de masa constante, esta ecuación se reduce a la conocida:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

donde \mathbf{a} es la aceleración del objeto.

1.3. Conservación del Momento Lineal

Uno de los principios más importantes relacionados con el momento lineal es la **conservación del momento lineal**. En ausencia de fuerzas externas, el momento lineal total de un sistema aislado permanece constante:

$$\sum \mathbf{p}_{\text{inicial}} = \sum \mathbf{p}_{\text{final}}$$

Este principio se derivó de las leyes de Newton y fue una piedra angular para el desarrollo de la mecánica clásica.

2. Momento Angular

2.1. Origen Clásico

El concepto de **momento angular** es una extensión del momento lineal para describir el movimiento de rotación. Apareció en la obra de Newton, pero fue formalizado más tarde en el siglo XVIII en estudios sobre dinámica de cuerpos rígidos y movimientos orbitales.

El momento angular de una partícula con respecto a un punto fijo se define como el producto vectorial del vector de posición **r** y el momento lineal **p**:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

donde:

- **L** es el momento angular.
- **r** es el vector de posición.
- **p** = $m\mathbf{v}$ es el momento lineal.

2.2. Segunda Ley de Newton para la Rotación

La dinámica de rotación se describe mediante una forma análoga a la segunda ley de Newton para el momento angular. El **torque** τ , o momento de fuerza, es la tasa de cambio del momento angular con el tiempo:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Este concepto es esencial para describir sistemas que involucran rotación, como órbitas planetarias, movimiento de cuerpos rígidos y sistemas atómicos.

2.3. Conservación del Momento Angular

En sistemas donde no actúan torques externos, el momento angular total se conserva:

$$\mathbf{L}_{\text{inicial}} = \mathbf{L}_{\text{final}}$$

Este principio de conservación es crucial en la mecánica clásica, y también es central en la mecánica cuántica y relativista.

3. Momento Magnético

3.1. Introducción en Electrodinámica Clásica

El concepto de **momento magnético** surgió en el siglo XIX en el contexto de la electrodinámica.

Se descubrió que las corrientes eléctricas generan campos magnéticos, y el momento magnético es una medida de la capacidad de un sistema de generar un campo magnético.

Para una partícula cargada en movimiento, el momento magnético asociado con su órbita es proporcional al momento angular orbital:

$$\mu_L = \frac{q}{2m} \mathbf{L}$$

donde:

- μ_L es el momento magnético orbital.
- q es la carga de la partícula.
- m es la masa.
- \mathbf{L} es el momento angular orbital.

En el caso del electrón, el momento magnético orbital es:

$$\mu_L = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}$$

Este concepto fue fundamental para entender fenómenos como el **magnetismo de los materiales** y la interacción de los electrones con campos magnéticos.

1. Momento Angular Orbital en Mecánica Cuántica

El momento angular clásico de una partícula cargada en movimiento alrededor de un centro está dado por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

donde:

- \mathbf{r} es el vector de posición de la partícula.
- $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es el momento lineal de la partícula, con m como la masa y \mathbf{v} la velocidad.

En mecánica cuántica, el momento angular orbital se representa por el operador \hat{L} , con componentes:

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

donde \hbar es la constante reducida de Planck.

El cuadrado del momento angular total es:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

El cuadrado del momento angular total es:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

y sus valores propios son:

$$\hat{L}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle$$

$$\hat{L}_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle$$

donde l es el número cuántico del momento angular y m es el número cuántico magnético, que toma valores desde $-l$ hasta l .

2. Momento Magnético Orbital

Para una partícula cargada con carga q , el **momento magnético orbital** está relacionado con el momento angular orbital a través de:

$$\mu_L = \frac{q}{2m} \mathbf{L}$$

En el caso del electrón, que tiene carga $q = -e$, se tiene:

$$\mu_L = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}$$

Este resultado muestra que el momento magnético es proporcional al momento angular orbital, pero tiene una orientación opuesta debido a la carga negativa del electrón.

3. Momento Magnético Espínico

En mecánica cuántica, además del momento angular orbital, las partículas como los electrones también tienen una propiedad intrínseca llamada **espín**. El espín es un tipo de momento angular interno, independiente del movimiento de la partícula en el espacio.

El espín de una partícula también está asociado a un momento magnético. Para el electrón, el momento magnético espínico es:

$$\mu_s = -g_s \frac{e}{2m_e} \mathbf{S}$$

donde:

- \mathbf{S} es el operador de espín.
- g_s es el **factor de Landé** o **factor giromagnético** para el espín, cuyo valor para el electrón es aproximadamente $g_s \approx 2.002319$.

Este momento magnético debido al espín se deriva de las propiedades relativistas del electrón y se calcula mediante la ecuación de Dirac.

4. Momento Magnético Total

El momento magnético total de una partícula es la suma de los momentos magnéticos orbital y espínico:

$$\mu = \mu_L + \mu_S$$

Para el electrón, el momento magnético total se expresa en función del momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. El valor del momento magnético total es proporcional al operador de momento angular total, y su magnitud se puede escribir como:

$$|\mu| = g_j \mu_B \sqrt{j(j+1)}$$

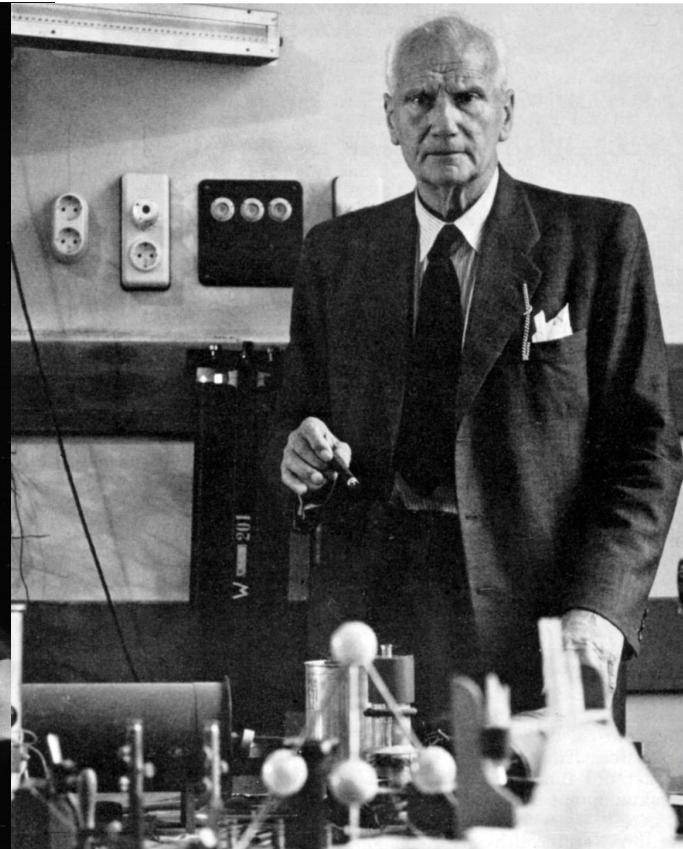
donde:

- g_j es el **factor de Landé efectivo** para el momento angular total.
- $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ es el **magnetón de Bohr**, que es la unidad del momento magnético.
- j es el número cuántico del momento angular total.

Qubits: Experimento de Stern-Gerlach - Pauli, compuertas



Experimento de Stern-Gerlach



Otto Stern (1888–1969) and Walther Gerlach (1889–1979)

<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.1650229>

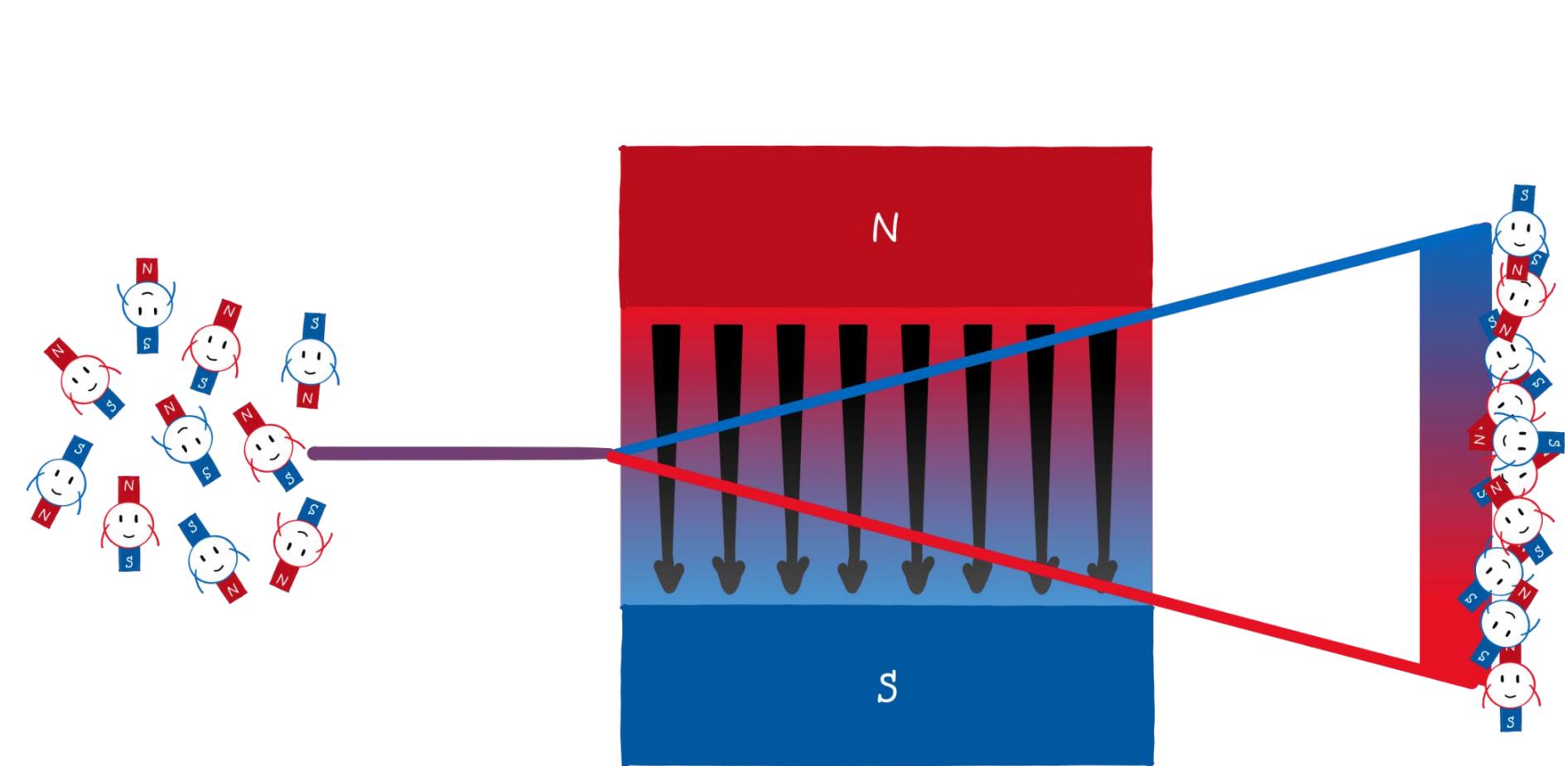
El Experimento de Stern-Gerlach: Una Demostración del Espín Cuántico

El **experimento de Stern-Gerlach**, realizado por **Otto Stern y Walther Gerlach** en 1922, es uno de los experimentos más importantes en la física cuántica. Este experimento proporcionó la primera evidencia directa de que las partículas subatómicas tienen una propiedad cuántica intrínseca llamada **espín**, la cual no tiene un análogo clásico. El experimento también mostró la naturaleza cuantizada de esta propiedad, lo que significa que el espín no puede tomar cualquier valor, sino solo ciertos valores discretos.

Motivación del Experimento

En la física clásica, se esperaba que un átomo con un momento magnético debido al movimiento de sus electrones en órbita alrededor del núcleo reaccionara de manera continua ante un campo magnético, es decir, que el momento magnético podría orientarse en cualquier dirección. Sin embargo, el experimento de Stern-Gerlach mostró que, en lugar de una distribución continua de orientaciones, el momento magnético de las partículas estaba **cuantizado**, y las partículas se alineaban en direcciones discretas.

La idea detrás del experimento fue probar si los momentos magnéticos de los átomos se orientaban de manera continua o discreta cuando se sometían a un campo magnético no uniforme.

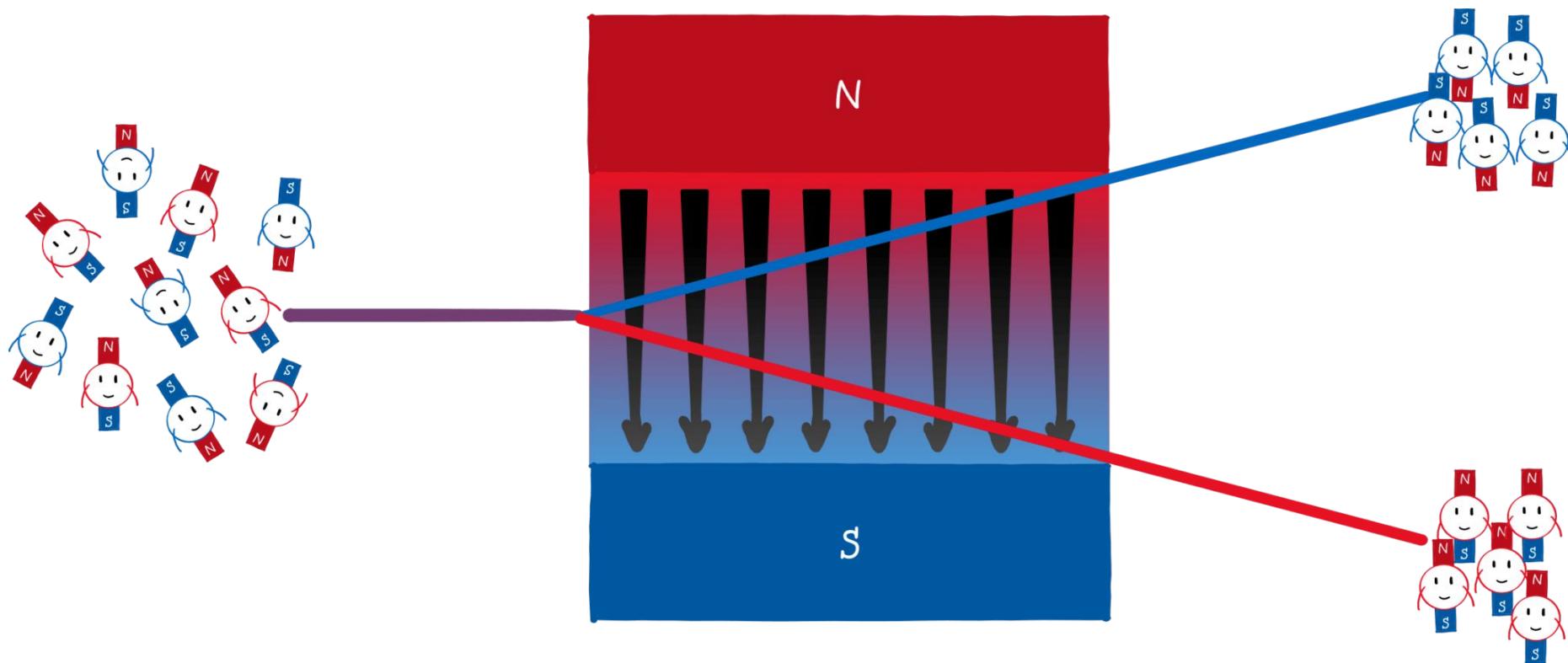


Fuente: <https://physicus-minimus.com/en/the-stern-gerlach-experiment/>

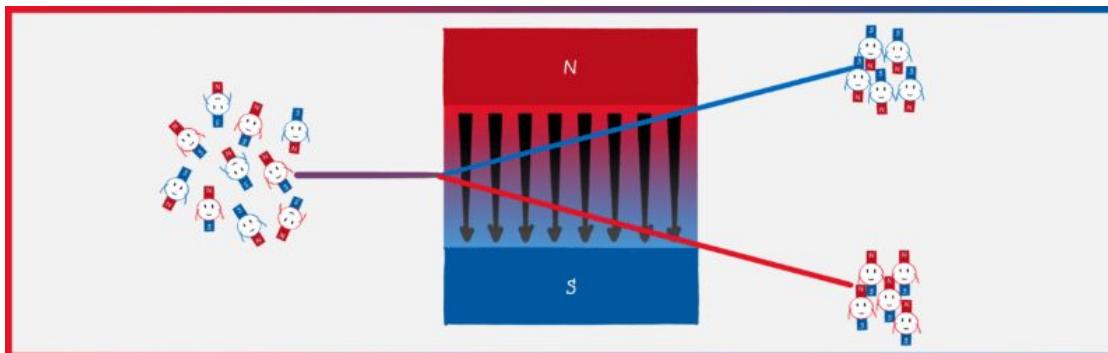
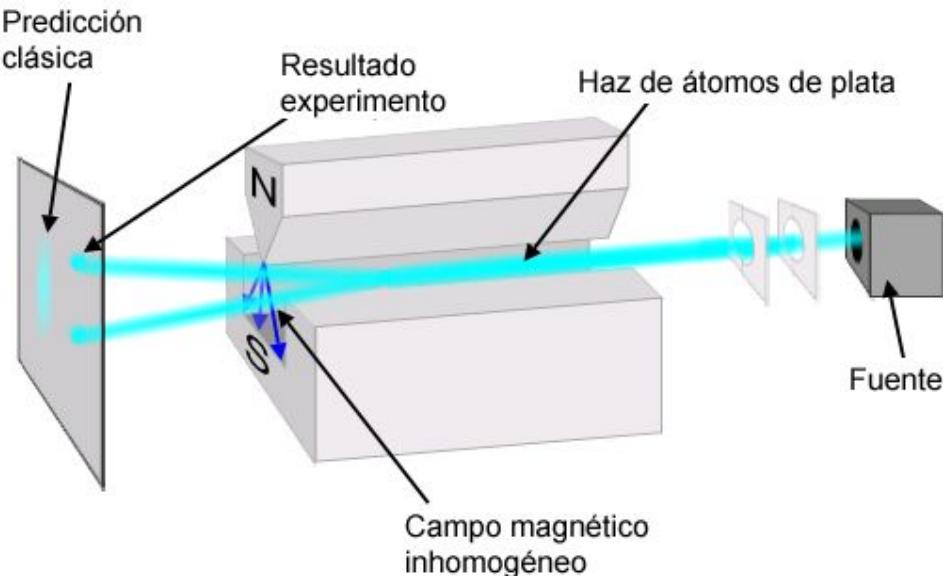
Descripción del Experimento

En el experimento original, un haz de átomos de plata (Ag) fue enviado a través de un campo magnético no homogéneo, creado por dos imanes: uno con un polo puntiagudo y otro con un polo plano. Este campo magnético varía en intensidad según la dirección del espacio.

Los átomos de plata tienen un electrón desapareado en su capa más externa, lo que les confiere un momento magnético debido al espín de este electrón. Al pasar por el campo magnético no homogéneo, los átomos de plata fueron desviados hacia diferentes posiciones en función de su espín.



Fuente: <https://physicus-minimus.com/en/the-stern-gerlach-experiment/>



Fuente: <https://physicus-minimus.com/en/the-stern-gerlach-experiment/>

2. Interacción con un Campo Magnético: Fuerza que Siente la Partícula

Cuando una partícula con momento magnético μ está en un **campo magnético externo B** , siente una **fuerza** y un **torque** debido a la interacción de su momento magnético con el campo.

2.1. Torque sobre el Momento Magnético

El **torque τ** que actúa sobre una partícula con momento magnético μ en un campo magnético \mathbf{B} está dado por:

$$\tau = \mu \times \mathbf{B}$$

Este torque tiende a alinear el momento magnético con el campo magnético. Esto es especialmente importante en sistemas como los espines electrónicos en campos magnéticos externos, donde se genera una precesión llamada **precesión de Larmor**.

2.2. Energía Potencial de una Partícula en un Campo Magnético

La energía potencial U de una partícula con momento magnético μ en un campo magnético \mathbf{B} se puede calcular como:

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B}$$

Este es un resultado fundamental, ya que indica que la energía es mínima cuando el momento magnético está alineado con el campo magnético, y es máxima cuando están anti-paralelos.

2.3. Fuerza sobre una Partícula con Momento Magnético

La fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula con momento magnético μ en un campo magnético no homogéneo está dada por:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mu \cdot \mathbf{B})$$

Esta ecuación indica que si el campo magnético \mathbf{B} es no uniforme (varía en el espacio), entonces la partícula experimentará una fuerza. Un ejemplo de este efecto es el experimento de **Stern-Gerlach**, donde se utiliza un campo magnético no homogéneo para separar partículas con diferentes orientaciones de espín.

En el experimento de Stern-Gerlach, una partícula con espín $1/2$ en un campo magnético no uniforme siente una fuerza que depende de la proyección de su momento magnético en la dirección del campo:

$$F_z = \pm \mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

3. Ejemplo: Fuerza sobre un Electrón en un Campo Magnético No Homogéneo

Supongamos que un electrón con un momento magnético μ_B está en un campo magnético no homogéneo con gradiente en la dirección z . La fuerza sobre el electrón, debido al momento magnético asociado a su espín, estará dada por:

$$F_z = \pm \mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Si el campo magnético varía a lo largo de la dirección z , el electrón experimentará una fuerza que depende de la orientación de su espín con respecto al campo magnético. Este es el principio básico detrás de la separación de partículas en un experimento de Stern-Gerlach.

Matemáticas del Experimento

Para entender el experimento en detalle, se debe considerar el comportamiento de una partícula con momento magnético en un campo magnético. El **momento magnético** $\vec{\mu}$ de una partícula en presencia de un campo magnético \vec{B} experimenta una fuerza:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

El término $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ es la interacción entre el momento magnético y el campo magnético. Si el campo magnético no es homogéneo, la partícula experimentará una fuerza que depende de la orientación de su momento magnético respecto al campo.

Momento Magnético Cuántico

Para un electrón en un átomo, el momento magnético asociado al espín está relacionado con el espín \vec{S} por la relación:

$$\vec{\mu} = -g_s \mu_B \vec{S}$$

donde:

- g_s es el factor de Landé para el espín (aproximadamente $g_s = 2$),
- μ_B es el **magnetón de Bohr**, que se define como $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$,
- \vec{S} es el vector de espín.

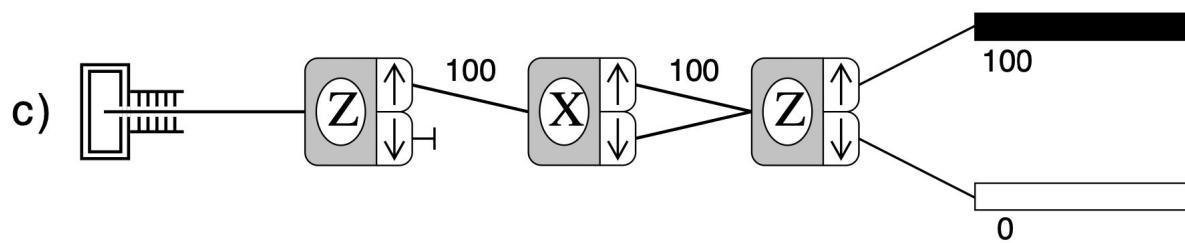
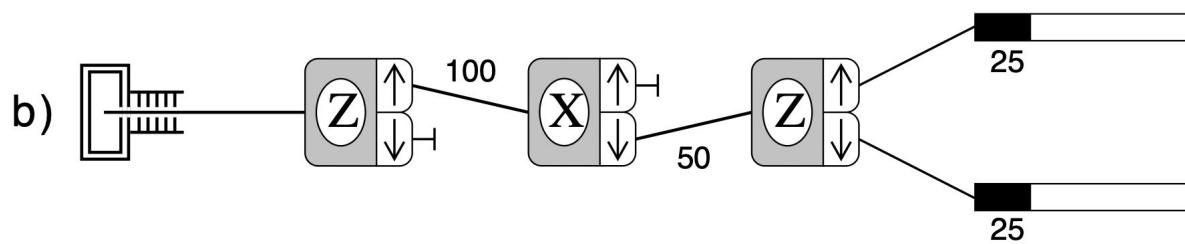
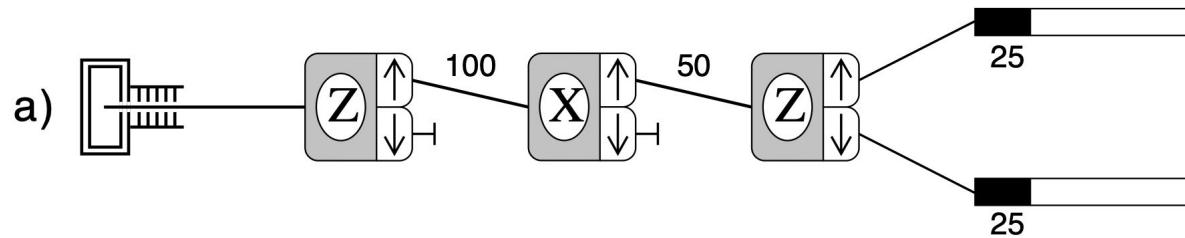
El espín de una partícula como el electrón es una propiedad cuántica intrínseca que puede tomar valores $+\frac{\hbar}{2}$ o $-\frac{\hbar}{2}$ en unidades de \hbar cuando se mide a lo largo de un eje determinado.

Desviación en el Campo Magnético

El campo magnético no homogéneo aplicado en el experimento de Stern-Gerlach genera una fuerza diferencial en función de la orientación del momento magnético. Si consideramos que el campo magnético varía en la dirección z , la fuerza en esa dirección es:

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

donde μ_z es el componente del momento magnético en la dirección z . Como el espín del electrón puede ser $+\frac{\hbar}{2}$ o $-\frac{\hbar}{2}$, el momento magnético también toma dos valores discretos. Esto significa que los átomos de plata se dividirán en dos haces separados: uno que corresponde al espín "hacia arriba" y otro al espín "hacia abajo".



La desviación Δz de los átomos en el eje z debido a la fuerza ejercida por el campo magnético no homogéneo se puede aproximar usando la segunda ley de Newton:

$$\Delta z = \frac{F_z L^2}{2mv^2}$$

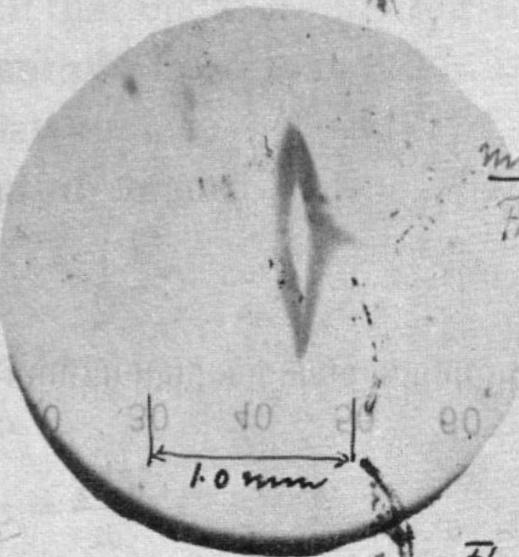
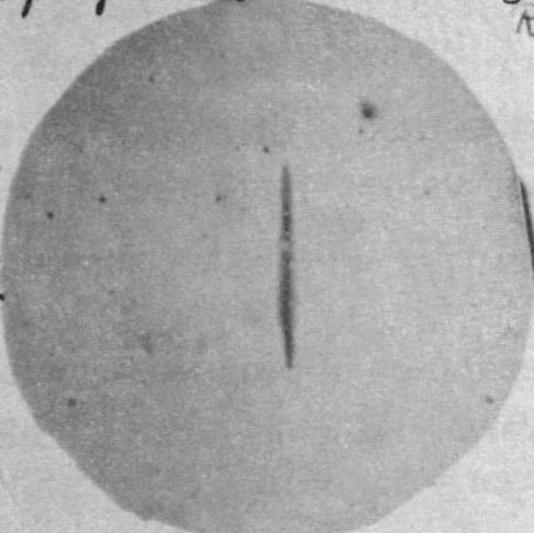
donde:

- L es la longitud del recorrido a través del campo magnético,
- m es la masa de los átomos de plata,
- v es la velocidad de los átomos.

Dado que F_z depende del espín μ_z , los átomos se separan en dos haces distintos en la pantalla, uno para $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ y otro para $S_z = -\frac{\hbar}{2}$.

He reichtest mir Bohr, auch die Fortschreitung unserer Arbeit (viele
Zeitschriften f. Physik VIII. Seite 110. 1921): Zu experimentelle Nachweis
Richtungsquantelung.

Silber.
ohne
Magnet-
Feld



Wir gratulieren zur Bestätigung Ihrer
Theorie! Mit herzhaftem Interesse
Ihr erhabenster Wissenschaftler.
Fm. 8.2.22.

Postal de Gerlach, fechada el 8 de febrero de 1922, a Niels Bohr. Muestra una fotografía de la división del haz, con el mensaje traducido: "Adjunto [está] la prueba experimental de la cuantificación direccional. Lo felicitamos por la confirmación de su teoría

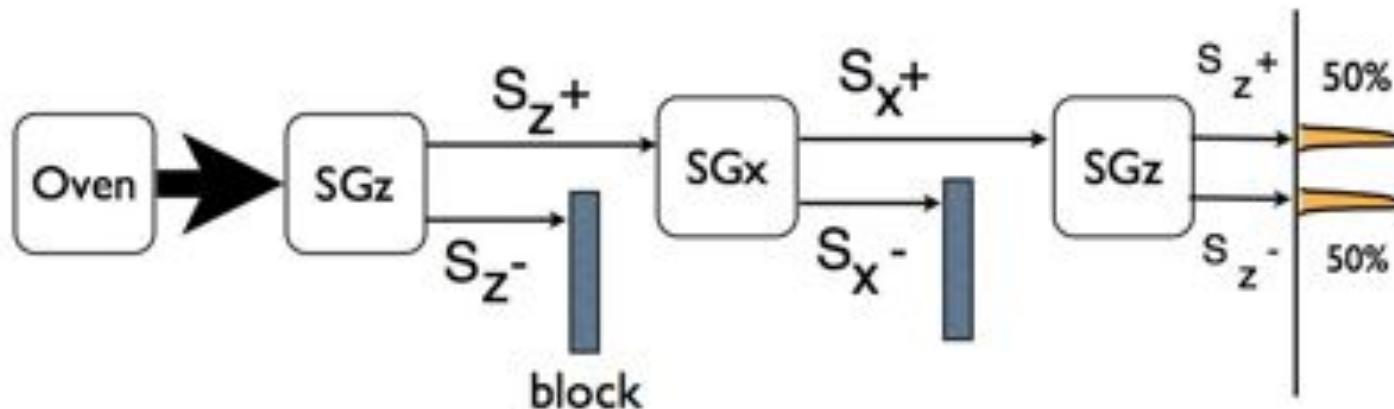
<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.1650229>



"In February 1922 ... was made the fundamental discovery of space quantization of the magnetic moments of atoms. The Stern-Gerlach experiment is the basis of important scientific and technological developments in the 20th century, such as nuclear magnetic resonance, atomic clocks, or lasers...."

Source:

<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.1650229>



Resultados del Experimento

El resultado fue sorprendente: en lugar de una distribución continua de los átomos en la pantalla, los átomos de plata se dividieron en dos grupos discretos, indicando que el momento magnético no es continuo, sino que está **cuantizado**. Esto fue una prueba directa de que los electrones tienen un momento angular intrínseco cuantizado, lo que hoy conocemos como **espín**.

Éxito y Significado del Experimento

El éxito del experimento de Stern-Gerlach radicó en que proporcionó la primera evidencia experimental de la cuantización del espín. Además, mostró que el espín es una propiedad cuántica intrínseca de las partículas, distinta de cualquier fenómeno clásico. El experimento demostró que cuando se mide el espín de una partícula en un eje específico, los posibles resultados son discretos.

Este experimento fue clave para el desarrollo de la mecánica cuántica y para la comprensión del **principio de superposición cuántica**. Antes de la medición, se puede considerar que las partículas están en una superposición de estados $+\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$, pero cuando se realiza una medición, el sistema colapsa a uno de esos dos valores posibles.

Implicaciones en la Computación Cuántica

El experimento de Stern-Gerlach es fundamental para la **computación cuántica**, ya que el espín de partículas como los electrones o los núcleos atómicos es una de las principales formas de implementar **qubits**. En un sistema cuántico, los qubits pueden representar información en estados de espín, y la capacidad de manipular y medir estos estados es esencial para los algoritmos cuánticos.

Los qubits se comportan de manera similar a los momentos magnéticos en el experimento de Stern-Gerlach, ya que pueden estar en una superposición de estados de espín hasta que son medidos. Este principio de superposición, junto con la interferencia y el entrelazamiento cuántico, permite a las computadoras cuánticas realizar cálculos que serían imposibles para las computadoras clásicas.

Qubits: Basic gates



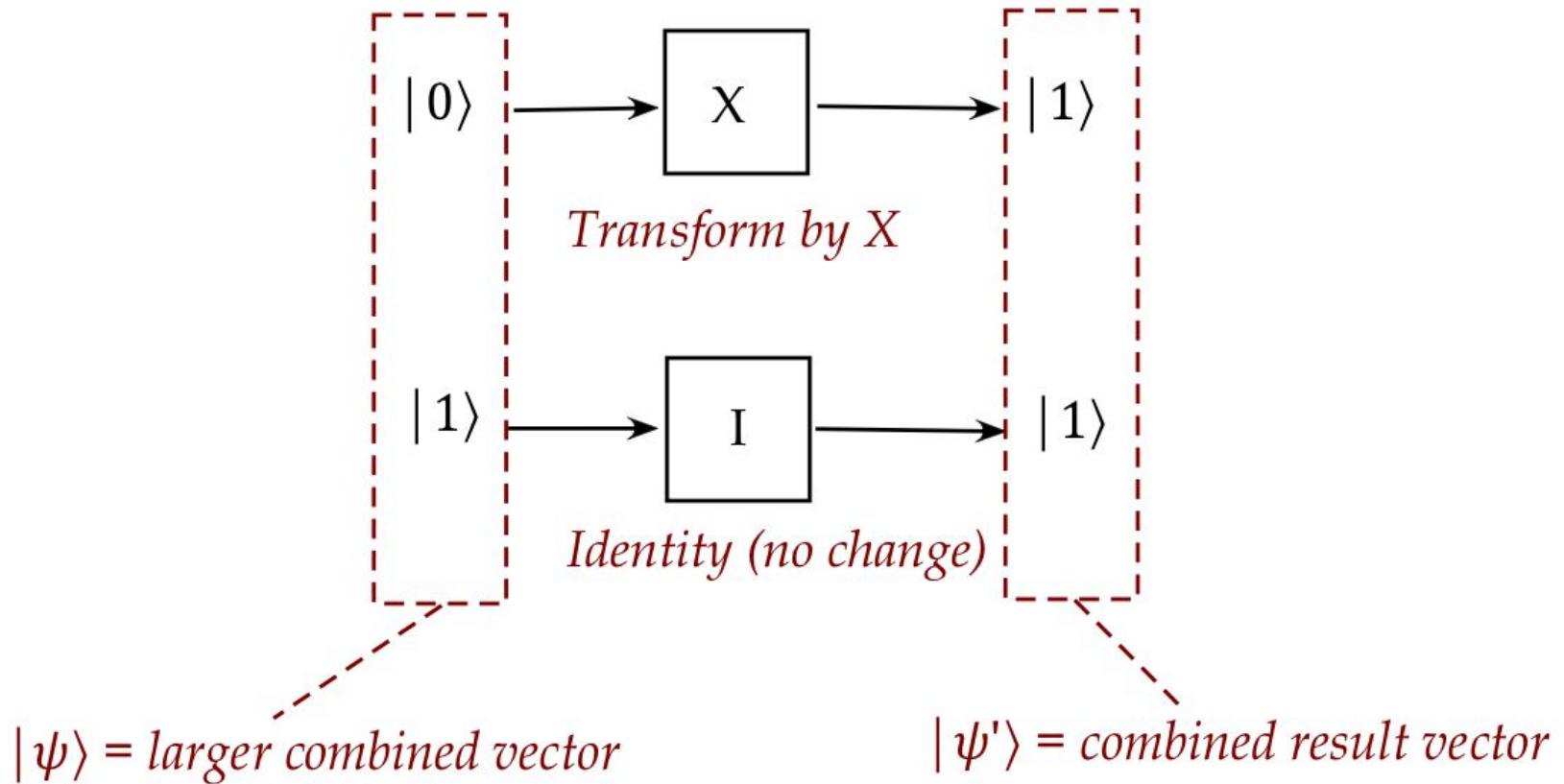
2. Compuerta Pauli-X (X)

- **Definición:** Actúa como la compuerta NOT clásica, cambiando $|0\rangle$ a $|1\rangle$ y viceversa.
- **Matriz:**

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Efecto:**

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle$$



3. Compuerta Pauli-Y (Y)

- **Definición:** Introduce una rotación en el plano $X - Z$ del Bloch.
- **Matriz:**

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- **Efecto:**

$$Y|0\rangle = i|1\rangle, \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

4. Compuerta Pauli-Z (Z)

- **Definición:** Introduce una fase de π en el estado $|1\rangle$.
- **Matriz:**

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Efecto:**

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Observables de Gell-Mann

