Course II: Quantum Computing: From qubits to qudits

Lesson #5 Qudits, Density Matrix

Prof. Alcides Montoya Cañola, Ph.D
Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Quantum computing

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Qubits: Matrices de densidad

En computación cuántica, un **estado puro** es un estado cuántico que se puede describir completamente por un solo vector de estado en el espacio de Hilbert, sin ninguna incertidumbre sobre el estado del sistema. Este estado está representado por un **ket** $|\psi\rangle$.

Ejemplo de un Estado Puro para un Qubit

Para un qubit (el sistema cuántico más básico con $d = 2$), un estado puro puede ser cualquier superposición lineal de los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Un ejemplo de un estado puro es:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

donde α y β son números complejos que satisfacen la condición de normalización:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Ejemplo específico:

Considera el siguiente estado puro de un qubit:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

En este caso:

- $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Este estado es conocido como el **estado de superposición equitativa** o el **estado de Bell** en la base de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

Matriz de Densidad del Estado Puro

Para representar este estado en forma de matriz de densidad, calculamos:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Sustituyendo el estado $|\psi\rangle$:

$$\rho = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)$$

Expandiendo esta expresión, obtenemos la matriz de densidad:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

En notación matricial, usando la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, esto se representa como:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Expansión de los términos

Cada término de la suma es un producto exterior (también llamado producto de Kronecker) entre un vector columna y un vector fila. Vamos a expandir cada uno de estos productos:

- $|0\rangle\langle 0|$ es el producto de:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Entonces:

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|0\rangle\langle 1|$ es el producto de:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Entonces:

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|1\rangle \langle 0|$ es el producto de:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Entonces:

$$|1\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|1\rangle \langle 1|$ es el producto de:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Entonces:

$$|1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sumando los términos

Ahora sumamos las matrices obtenidas:

$$|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sumando estas matrices obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Multiplicación por el factor $\frac{1}{2}$

Finalmente, multiplicamos la matriz resultante por $\frac{1}{2}$:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este es el resultado final que se muestra en la imagen. Esta matriz es la representación matricial de la matriz de densidad en la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Ejemplo de un Estado Puro para un Qutrit

Consideremos un estado puro $|\psi\rangle$ de un qutrit, que es una superposición de los tres estados base $|0\rangle$, $|1\rangle$, y $|2\rangle$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle$$

Este es un estado de superposición equitativa entre los tres estados base del qutrit. Aquí, todos los coeficientes α_i (donde $i = 0, 1, 2$) tienen la misma magnitud, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Matriz de Densidad del Estado Puro

La matriz de densidad ρ para este estado puro se calcula como:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Matriz de Densidad del Estado Puro

La matriz de densidad ρ para este estado puro se calcula como:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Sustituyendo el estado $|\psi\rangle$:

$$\rho = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 2|\right)$$

Expandiendo el producto tensorial, obtenemos:

$$\rho = \frac{1}{3}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)$$

Expandiendo el producto tensorial, obtenemos:

$$\rho = \frac{1}{3}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)$$

En notación matricial, usando la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$, la matriz de densidad se representa como:

$$\rho = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Expansión de los términos

Cada término de la suma es un producto exterior (producto de Kronecker) entre un vector columna y un vector fila. Vamos a expandir cada uno de estos productos:

- $|0\rangle\langle 0|$ es el producto de:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Entonces:

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|0\rangle\langle 1|$ es el producto de:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|0\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|0\rangle \langle 2|$ es el producto de:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|0\rangle \langle 2| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|1\rangle \langle 0|$ es el producto de:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|1\rangle\langle 1|$ es el producto de:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|1\rangle\langle 2|$ es el producto de:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|2\rangle\langle 0|$ es el producto de:

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|2\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|2\rangle\langle 1|$ es el producto de:

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $|2\rangle\langle 2|$ es el producto de:

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sumando los términos

Ahora sumamos todas las matrices obtenidas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Resultado final

Finalmente, la matriz de densidad ρ en notación matricial, utilizando la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$, es:

$$\rho = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Matriz de Densidad

- **Hermitiana:** La matriz ρ es igual a su propia conjugada transpuesta.
- **Semidefinida positiva:** Todos los autovalores de ρ son no negativos.
- **Traza igual a uno:** $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

Interpretación

Este estado de superposición equitativa en un qutrit es un ejemplo de un estado puro en un sistema cuántico con tres niveles de energía. La matriz de densidad resultante muestra que el sistema tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de los tres estados base. Si se mide este qutrit, hay una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de encontrarlo en $|0\rangle$, $\frac{1}{3}$ en $|1\rangle$, y $\frac{1}{3}$ en $|2\rangle$.

Ejemplo de un Estado Mezclado

Supongamos que tenemos un qubit que puede estar en dos estados puros diferentes:

1. $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$
2. $|\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$

donde i es la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1}$).

Ahora, consideremos un estado mezclado que es una combinación estadística de estos dos estados puros, con probabilidades $p_1 = 0.6$ y $p_2 = 0.4$, respectivamente.

Cálculo de la Matriz de Densidad del Estado Mezclado

La matriz de densidad ρ del estado mezclado se calcula como:

$$\rho = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

Primero, calculamos las matrices de densidad para los estados puros $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$.

Matriz de Densidad de $|\psi_1\rangle$:

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)$$

Expandiendo:

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Densidad de $|\psi_2\rangle$:

$$|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 0| + \frac{1}{2}\langle 1|\right)$$

Expandiendo:

$$|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Matriz de Densidad del Estado Mezclado

Ahora, sumamos las matrices de densidad ponderadas por las probabilidades p_1 y p_2:

$$\rho = 0.6 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + 0.4 \times \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Calculando cada término:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.3i \\ 0.3i & 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1\sqrt{3} \\ 0.1\sqrt{3} & 0.1 \end{pmatrix}$$

Sumando las matrices:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1\sqrt{3} - 0.3i \\ 0.1\sqrt{3} + 0.3i & 0.4 \end{pmatrix}$$

Interpretación

Esta matriz de densidad ρ describe un estado mezclado en un qubit que es una combinación de dos estados puros con valores complejos en las entradas off-diagonal. La matriz es hermitiana (ya que $\rho_{12} = \rho_{21}^*$) y tiene traza igual a 1, lo que confirma que es una matriz de densidad válida.

Interpretación

Esta matriz de densidad ρ describe un estado mezclado en un qubit que es una combinación de dos estados puros con valores complejos en las entradas off-diagonal. La matriz es hermitiana (ya que $\rho_{12} = \rho_{21}^*$) y tiene traza igual a 1, lo que confirma que es una matriz de densidad válida.

En este estado, debido a la mezcla de los estados puros $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, el sistema cuántico no se puede describir completamente por un solo vector de estado. La matriz de densidad proporciona una descripción completa del estado probabilístico del sistema.

Interpretación

Este estado de superposición equitativa $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ es un ejemplo clásico de un estado puro en computación cuántica, donde el qubit no está en un estado definido de $|0\rangle$ o $|1\rangle$, sino en una superposición de ambos. Si se mide este qubit, hay una probabilidad del 50% de obtener $|0\rangle$ y una probabilidad del 50% de obtener $|1\rangle$.

Este tipo de estados son fundamentales en la computación cuántica, ya que permiten la creación de algoritmos cuánticos que explotan la superposición y el entrelazamiento para realizar cálculos que serían ineficientes en una computadora clásica.

Las matrices de densidad son una herramienta fundamental en la mecánica cuántica, utilizadas para describir el estado de sistemas cuánticos, especialmente cuando esos sistemas no están en un estado puro. Mientras que en mecánica cuántica un estado puro se describe por un vector de estado $|\psi\rangle$, hay situaciones en las que un sistema se encuentra en una mezcla estadística de varios estados puros. En estos casos, el formalismo de vectores de estado no es suficiente, y se requiere una descripción más general: la matriz de densidad.

Concepto Básico

Una matriz de densidad ρ es una matriz hermitiana, semidefinida positiva, con traza igual a 1. Representa tanto estados puros como mezclas estadísticas de estados puros. Para un estado puro $|\psi\rangle$, la matriz de densidad se define como:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Para una mezcla estadística de estados, la matriz de densidad se expresa como una suma ponderada de los proyectores sobre los estados puros $|\psi_i\rangle$:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

donde p_i es la probabilidad de que el sistema esté en el estado $|\psi_i\rangle$.

Importancia y Aplicaciones

El uso de matrices de densidad permite describir tanto la evolución unitaria de sistemas cuánticos como el comportamiento de sistemas abiertos, donde el sistema interactúa con un entorno externo, lo que conduce a la decoherencia. Además, las matrices de densidad son esenciales en la teoría de la información cuántica, donde se utilizan para calcular cantidades como la entropía de von Neumann, que mide la mezcla de un estado cuántico.

En resumen, las matrices de densidad proporcionan una descripción completa de los sistemas cuánticos que puede manejar tanto estados puros como mezclas estadísticas, haciendo posible el estudio de una amplia gama de fenómenos cuánticos más allá de lo que es posible con el formalismo de vectores de estado.

Definición de la Matriz de Densidad para Qudits

Para un qudit de d dimensiones, la matriz de densidad ρ es una matriz de tamaño $d \times d$ que es hermitiana, semidefinida positiva y cuya traza es igual a 1:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1d} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d1} & \rho_{d2} & \cdots & \rho_{dd} \end{pmatrix}$$

Esta matriz puede describir tanto estados puros como mezclas estadísticas de estados. Si el qudit está en un estado puro $|\psi\rangle$, que se puede expresar como una superposición de los estados base $|i\rangle$ del qudit:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} c_i |i\rangle$$

entonces la matriz de densidad correspondiente será:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* & \cdots & c_0 c_{d-1}^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 & \cdots & c_1 c_{d-1}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{d-1} c_0^* & c_{d-1} c_1^* & \cdots & |c_{d-1}|^2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Matriz de Densidad para Qudits

1. **Hermitiana:** $\rho = \rho^\dagger$, es decir, la matriz es igual a su propia conjugada transpuesta.
2. **Semidefinida positiva:** Todos los autovalores de ρ son no negativos, lo que asegura que las probabilidades calculadas a partir de ρ sean reales y no negativas.
3. **Traza igual a uno:** $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$, lo que corresponde a la normalización de las probabilidades.

Estados Puros y Mezclas en Qudits

- **Estado Puro:** Para un estado puro, $\rho^2 = \rho$ y su traza al cuadrado es igual a 1 ($\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$).
- **Mezcla Cuántica:** En una mezcla estadística de estados, ρ puede expresarse como una suma ponderada de proyectores sobre diferentes estados puros $|\psi_i\rangle$:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

donde p_i son probabilidades y $\sum_i p_i = 1$. En este caso, $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$.

Aplicaciones en Sistemas de Qudits

Las matrices de densidad para qudits son útiles en varias aplicaciones avanzadas, como en la computación cuántica con qudits, donde se exploran sistemas con más de dos niveles para aumentar la capacidad de procesamiento de información cuántica. También son esenciales en el análisis de sistemas abiertos y la decoherencia cuántica, así como en la caracterización de entrelazamiento en sistemas cuánticos de mayor dimensionalidad.

En resumen, la matriz de densidad para qudits extiende el formalismo utilizado para qubits a sistemas cuánticos de mayor dimensionalidad, permitiendo una descripción completa de sus estados y propiedades estadísticas.

Ejemplo de un Sistema Mezclado en Qutrits

Supongamos que tenemos un qutrit que puede estar en los siguientes estados puros:

1. $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
2. $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}|1\rangle + \frac{1}{3}|2\rangle$
3. $|\psi_3\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|2\rangle$

donde i es la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1}$).

Consideremos que este sistema está en un estado mezclado, con probabilidades $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, y $p_3 = 0.3$ para los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, y $|\psi_3\rangle$, respectivamente.

Cálculo de la Matriz de Densidad del Estado Mezclado

La matriz de densidad ρ del sistema mezclado se calcula como una combinación ponderada de las matrices de densidad de los estados puros:

$$\rho = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + p_3|\psi_3\rangle\langle\psi_3|$$

Paso 1: Calcular las matrices de densidad para cada estado puro.

- **Para $|\psi_1\rangle$:**

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Para** $|\psi_2\rangle$**:**

$$|\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{9} & \frac{\sqrt{2}}{9} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

- **Para** $|\psi_3\rangle$**:**

$$|\psi_3\rangle\langle\psi_3| = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} & \frac{i\sqrt{2}}{3} \\ \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-i\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Paso 2: Combinar las matrices ponderadas.

Ahora combinamos estas matrices de densidad usando las probabilidades dadas $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.3$:

$$\rho = 0.4 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.3 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{9} & \frac{\sqrt{2}}{9} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} + 0.3 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} & \frac{i\sqrt{2}}{3} \\ \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-i\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Sumar las matrices.

Sumando las matrices ponderadas, obtenemos la matriz de densidad final:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.267 & 0.133(1-i) & 0.100i \\ 0.133(1+i) & 0.244 & 0.164 + 0.033i \\ -0.100i & 0.164 - 0.033i & 0.089 \end{pmatrix}$$

Interpretación

Esta matriz de densidad ρ describe un estado mezclado para un sistema qutrit, que es una combinación estadística de los tres estados puros dados. Los elementos de la matriz incluyen términos complejos debido a la naturaleza compleja de los coeficientes en los estados puros $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, y $|\psi_3\rangle$.

- **Elementos Diagonales:** Los elementos diagonales de ρ ($\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}$) representan las probabilidades de que el qutrit esté en los estados $|0\rangle$, $|1\rangle$, y $|2\rangle$, respectivamente.
- **Elementos Fuera de la Diagonal:** Los elementos fuera de la diagonal ($\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$, etc.) contienen la información sobre las coherencias cuánticas entre los diferentes estados base. Estos términos son generalmente complejos y son responsables de la interferencia cuántica.

Estado Cuántico de un Ququart

Un ququart puede estar en una superposición de los cuatro estados base $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, y $|3\rangle$. Un estado cuántico general de un ququart se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \alpha_3|3\rangle$$

donde α_0, α_1, α_2, y α_3 son números complejos que representan las amplitudes de probabilidad de encontrar el ququart en cada uno de los estados base $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, o $|3\rangle$. Estos coeficientes deben cumplir la condición de normalización:

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 = 1$$

Supongamos que el estado del ququart está dado por la superposición:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(2\,|0\rangle + |1\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle + \sqrt{5}\,|3\rangle\right)$$

La matriz de densidad ρ para este estado puro $|\psi\rangle$ es:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$$

Expandiendo ρ:

$$\rho = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(2\,|0\rangle + |1\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle + \sqrt{5}\,|3\rangle\right)$$

Paso 1: Escribir el estado $|\psi\rangle$ en forma de vector columna

Primero, representemos el estado $|\psi\rangle$ como un vector columna:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Este vector columna tiene cuatro componentes, correspondientes a los estados base $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$.

Paso 2: Calcular el conjugado transpuesto (bra) de $|\psi\rangle$

El siguiente paso es calcular el conjugado transpuesto de $|\psi\rangle$, conocido como $\langle\psi|$:

$$\langle\psi| = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}\right)^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Formar la matriz de densidad $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$

Para obtener la matriz de densidad, multiplicamos el vector columna $|\psi\rangle$ por su conjugado transpuesto $\langle\psi|$:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \right)$$

Multiplicando los vectores:

$$\rho = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Paso 4: Realizar la multiplicación de matrices

Ahora, efectuamos la multiplicación de la matriz 4×1 por la matriz 1×4 para obtener la matriz de densidad 4×4:

$$\rho = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times \sqrt{2} & 2 \times \sqrt{5} \\ 1 \times 2 & 1 \times 1 & 1 \times \sqrt{2} & 1 \times \sqrt{5} \\ \sqrt{2} \times 2 & \sqrt{2} \times 1 & \sqrt{2} \times \sqrt{2} & \sqrt{2} \times \sqrt{5} \\ \sqrt{5} \times 2 & \sqrt{5} \times 1 & \sqrt{5} \times \sqrt{2} & \sqrt{5} \times \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{5} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & \sqrt{10} \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{10} & 5 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Escribir la matriz de densidad completa

Finalmente, obtenemos la matriz de densidad completa:

$$\rho = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{5} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & \sqrt{10} \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{10} & 5 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de densidad que describe el estado cuántico $|\psi\rangle$ para un ququart. Esta matriz tiene todas las propiedades requeridas de una matriz de densidad: es hermitiana, tiene traza igual a 1 y es positiva semidefinida (todos sus autovalores son no negativos).

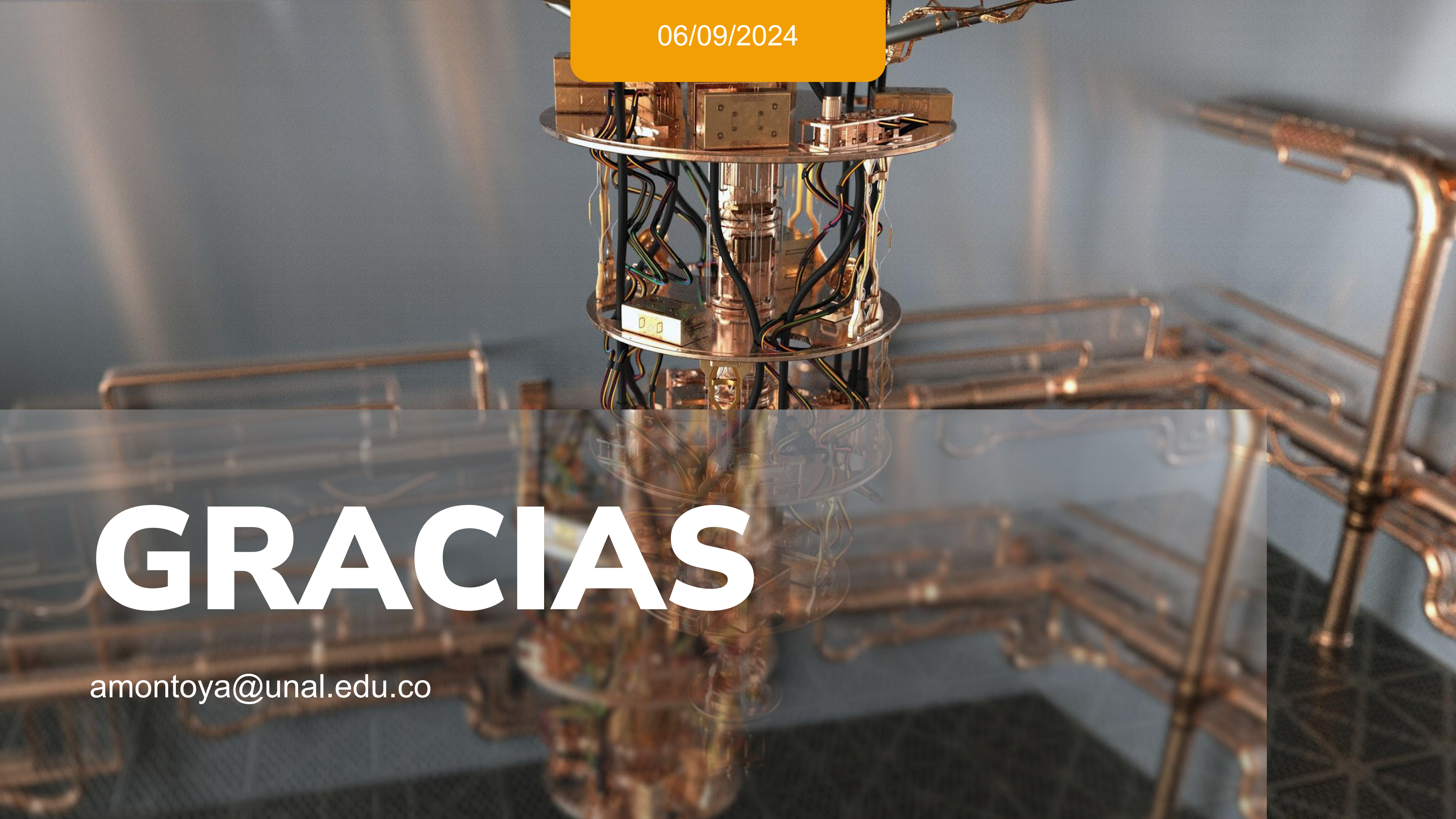
Esto da lugar a la siguiente matriz de densidad:

$$\rho = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{5} \\ 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{10} \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{10} & 5 \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz de densidad para un ququart en un estado puro. La matriz cumple con las propiedades de una matriz de densidad:

1. **Hermitiana**: $\rho = \rho^\dagger$.
2. **Trazabilidad**: $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.
3. **Positividad**: Todos los autovalores de ρ son no negativos.

En este caso, hemos tomado un estado puro, pero podrías tener un estado mixto, en cuyo caso la matriz de densidad sería una combinación convexa de matrices de densidad de estados puros.



06/09/2024

GRACIAS

amontoya@unal.edu.co