Lösung des n-Damenproblems auf einem adiabatischen Quantencomputer

Jakov D. Wallbrecher (14), Paul Schappert (15), Jonathan Treffler (16) - Gymnasium der Regensburger Domspatzen, Regensburg

Beim **n-Damenproblem** müssen n Damen so auf einem n x n Schachfeld positioniert werden, dass keine Dame eine andere schlagen kann (Abb. 1). Um diese Aufgabe auf einem **Quantencomputer** zu lösen, mussten wir zuerst die Problemstellung als **mathematisches Optimierungsproblem** darstellen.

Wir haben hierfür eine **Funktion** aufgestellt, die jeder Anordnung von (beliebig vielen) Damen auf dem Schachbrett einen (Energie-)Wert zuordnet. Um das n-Damenproblem zu lösen, muss ein **globales Minimum** dieser Funktion gefunden werden. Genau das leistet ein Quantencomputer! Unser Funktionsterm lautet:

$$E = \sum_{i \le j} h_{ij} \cdot q_i \cdot q_j = \vec{q}^{\,t} \cdot H_{Problem} \cdot \vec{q}$$

(Beispiel siehe Abb. 4):

Der Vektor **q** beschreibt hier die Belegung des Schachfeldes (0=keine, 1=eine Dame). $\mathbf{h_{ij}}$ sind die Elemente der Matrix $\mathbf{H_{Problem}}$ (**Hamiltonmatrix** oder kurz **Hamiltonian**), eine Dreiecksmatrix, die die Basis der Eingabewerte für den Quantencomputer bildet. Abbildungen 2 und 3 zeigen, wie die Einträge in dieser Matrix berechnet werden: Jedem Feld des Schachbretts wird ein Buchstabe zugeordnet. Wären die Felder a und b jeweils mit einer Dame besetzt, so muss der Rückgabewert unserer Bewertungsfunktion steigen, da die Damen sich dann schlagen können. An der Position (a, b) steht daher im Hamiltonian der Wert +2 als **Strafterm**, der den Energiewert der Konstellation um 2 erhöht.

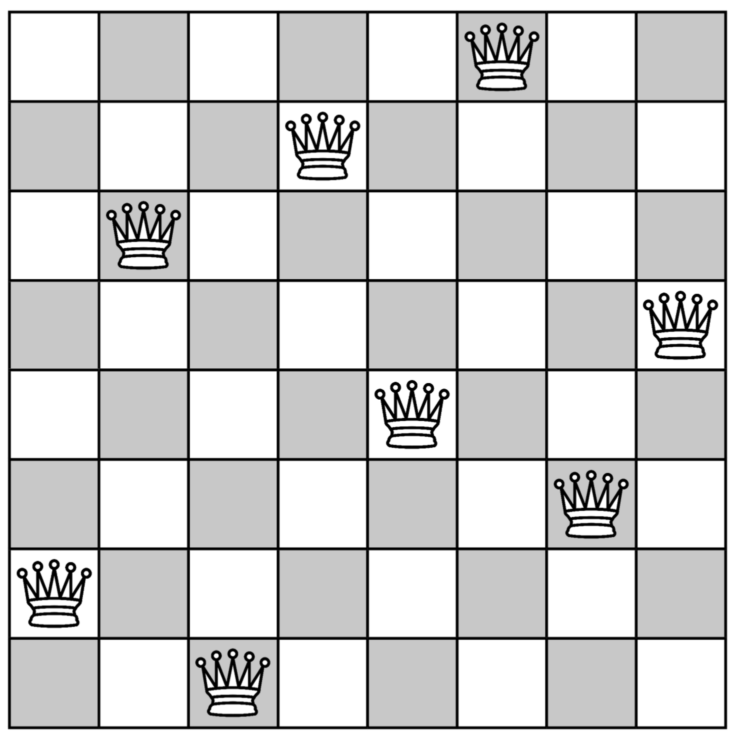


Abb. 1: Mögliche Lösung des 8 Damenproblems

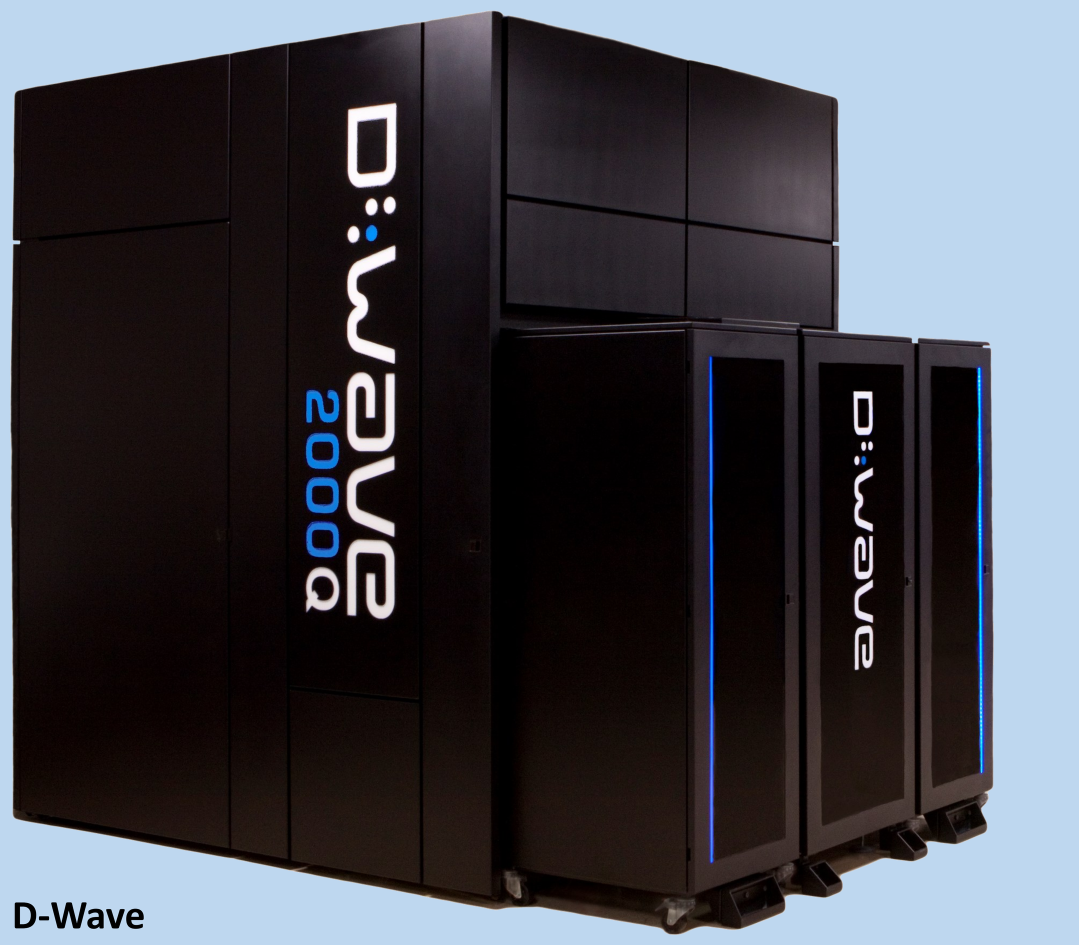
$$E = (a+b+c+d-1)^2 + (e+f+g+h-1)^2 + (i+j+k+l-1)^2 + (m+n+o+p-1)^2 + (a+e+i+m-1)^2 + (b+f+j+n-1)^2 + (c+g+k+o-1)^2 + (d+h+l+p-1)^2 + (i+n-0{,}5)^2 + (e+j+o-0{,}5)^2 + (a+f+k+p-0{,}5)^2 + (b+g+l-0{,}5)^2 + (c+h-0{,}5)^2 + (b+e-0{,}5)^2 + (c+f+i-0{,}5)^2 + (d+g+j+m-0{,}5)^2 + (h+k+n-0{,}5)^2 + (l+o-0{,}5)^2$$

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

Abb. 2: Energiefunktion des 4-Damenproblems

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
a	-2	2	2	2	2	2	0	0	2	0	2	0	2	0	0	2
b	0	-2	2	2	2	2	2	0	0	2	0	2	0	2	0	0
c	0	0	-2	2	0	2	2	2	2	0	2	0	0	0	2	0
d	0	0	0	-2	0	0	2	2	0	2	0	2	2	0	0	2
e	0	0	0	0	-2	2	2	2	2	2	0	0	2	0	2	0
f	0	0	0	0	0	-2	2	2	2	2	2	0	0	2	0	2
g	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	2	2	2	2	0	2	0
h	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	2	2	0	2	0	2
i	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	2	2	2	2	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	2	2	2	2	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	2	2	2
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	2	2
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	2	2
n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	2
o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2
p	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2

Abb. 3: Hamiltonian des 4-Damenproblems



D-Wave Quantencomputer

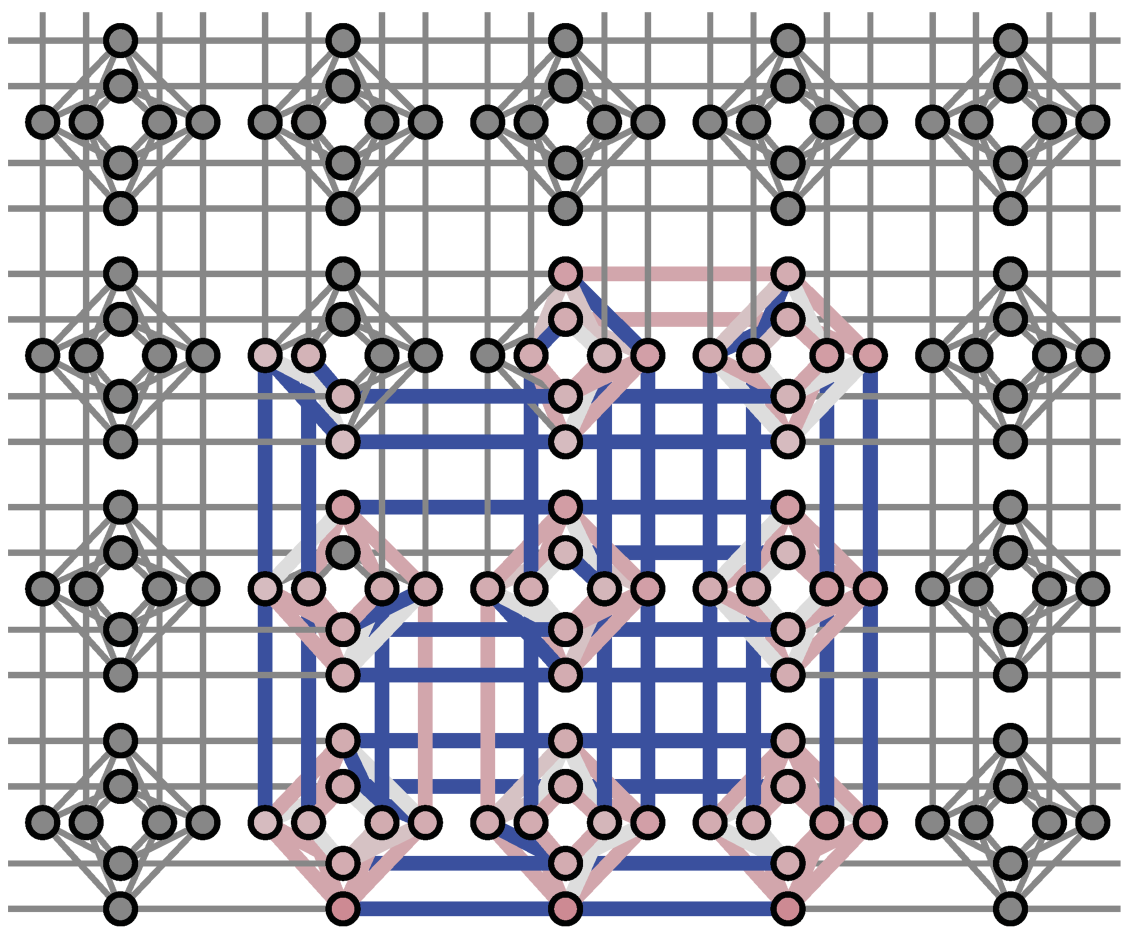
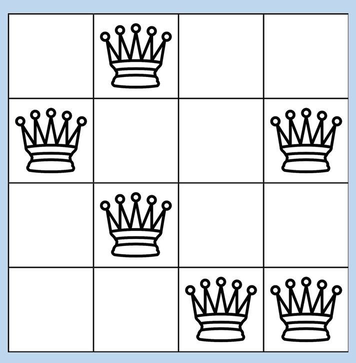
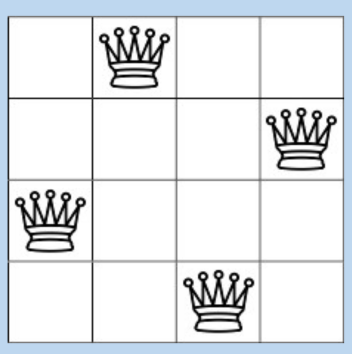


Abb 6: Chimera-Graph des 4-Damenproblems, der die Kopplungen der physikalischen Qubits auf Basis der Hamiltonmatrix zeigt.



$$\vec{q}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E(\vec{q}_A) = \vec{q}^{\,t}_A \cdot H \cdot \vec{q}_A = 4$$

Abb. 4a: Konstellation A: Schlechte Lösung (Energie = 4)



$$\vec{q}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E(\vec{q}_B) = \vec{q}^{\,t}_B \cdot H \cdot \vec{q}_B = -8$$

Abb. 4b: Konstellation B: Globales Energieminimum ≙ Lösung des 4-Damenproblems

Bevor wir versuchten, das n-Damenproblem auf einem **echten Quantencomputer** der Firma D-Wave Systems zu lösen, haben wir unseren Hamiltonian mit **klassischen Optimierungsalgorithmen** getestet. Folgende Algorithmen haben wir dabei verwendet:

1. **Greedy-Algorithmus**: Nur Ergebnisverbesserungen werden angenommen.
2. **Threshold Accepting**: Die Differenz zwischen neuer und alter Energie muss unter einem Wert liegen, der im Laufe des Programms abgesenkt wird.
3. **Simulated Annealing**: Verbesserungen werden immer angenommen, Verschlechterung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $e^{-\Delta E/T}$, wobei T ein Parameter ist, der im Laufe der Simulation auf 0 abgesenkt wird.
4. **Great Deluge Algorithmus**: Energie muss unter einem Wert liegen, der fortlaufend abgesenkt wird.

Abbildungen rechts: **Energie-Zeit Diagramme** der verschiedenen Algorithmen beim 4-Damenproblem

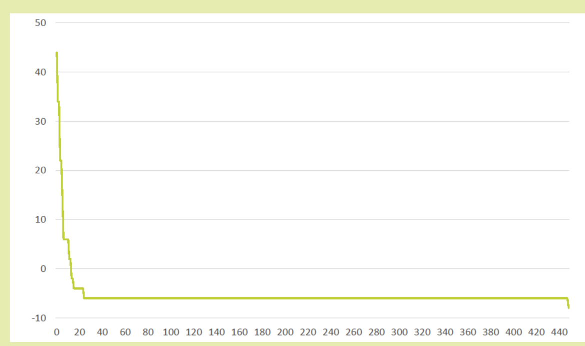


Abb. 5a: **Greedy-Algorithmus**

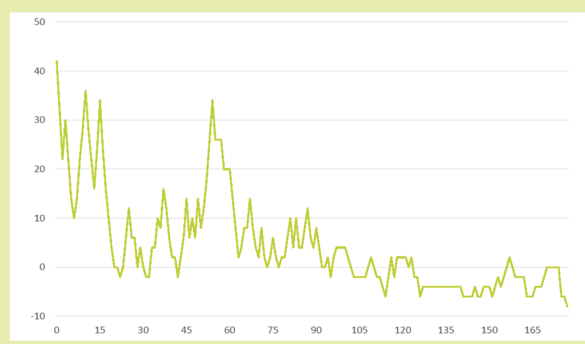


Abb. 5b: **Threshold Accepting**

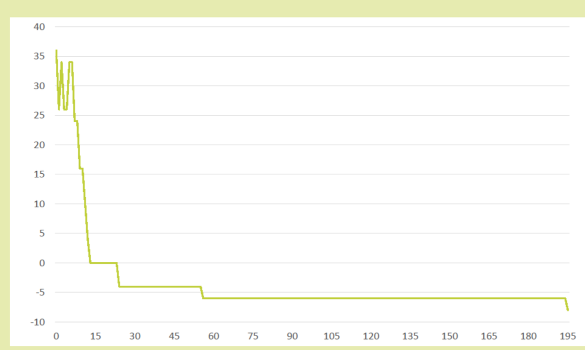


Abb. 5c: **Simulated Annealing**

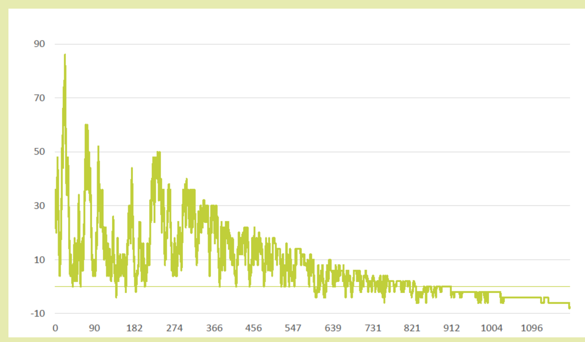


Abb. 5d: **Great-Deluge**