PUC-SP

Probabilidade

Prof . Erick Bacconi Gonçalves

Aluno: Fabiana 🚀 Campanari

EXERCÍCIO 4

Dois dados são lançados. Pede-se:

a) enumere o evento A = {a soma dos pontos é 9};
b) enumere o evento B = {a soma dos pontos é 7};
c) calcule a probabilidade do evento A;
d) calcule a probabilidade do evento B;
e) calcule a probabilidade de ocorrer A ou B;
f) calcule a probabilidade de ocorrer A e B;

Calculando as Probabilidades:

Espaço amostral: O espaço amostral de um lançamento de dois dados é composto por 36 resultados igualmente prováveis (6 faces em cada dado).

a)Evento A: Soma dos pontos é 9

- (3, 6)
- (4, 5)
- (5, 4)
- (6, 3)

- Portanto, o evento A = {(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}

b) Evento B: Soma dos pontos é 7

Para dois dados, as combinações que resultam em uma soma de 7 são:

- (1, 6)
- (2, 5)
- (3, 4)
- (4, 3)
- (5, 2)
- (6, 1)

Portanto, o evento B = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}.

c) Cálculo das probabilidades evento A:

Número total de resultados possíveis ao lançar dois dados = 6 * 6 = 36.

- Número de resultados favoráveis ao evento A = 4 (conforme a enumeração).

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111 \text{ ou } 11{,}1\%$$

Probabilidade do evento A:
- Número de casos favoráveis: 4 \
- Número total de casos possíveis: 6 x 6 = 36 (pois temos 6 possibilidades para cada dado)
- P(A) = 4/36 = 1/9 ≈ 0,111 ou 11,1%

d) Probabilidade do evento B (P(B)):

Número de resultados favoráveis ao evento B = 6 (conforme a enumeração).

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- Probabilidade do evento B:
- Número de casos favoráveis: 6
- Número total de casos possíveis (Espaço amostral): 36
- P(B) = 6/36 = 1/6 ≈ 0,167 ou 16,7%

e) Probabilidade de ocorrer A ou B (União dos eventos):

Probabilidade de ocorrer A ou B: Como A e B são eventos mutuamente exclusivos (não podem ocorrer simultaneamente), usamos a regra da adição: P(A ou B) = P(A) + P(B) = 1/9 + 1/6 = 2/18 + 3/18 = 5/18 ≈ 0,278 ou 27,8%

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} = \frac{5}{18} \approx 0{,}278 \text{ ou } 27{,}8\%$$

f) Probabilidade de ocorrer A e B (Interseção dos eventos):

Probabilidade de ocorrer A e B: Como A e B são eventos mutuamente exclusivos, (usamos a regra da interseção)é impossível que ocorram simultaneamente.

$$P(A \cap B) = 0$$

EXERCÍCIO 5

São dadas duas urnas:

Cor	Urna A	Urna B	Total
Preta	2	3	5
Branca	5	12	17
Vermelha	3	5	8
Total	10	20	30

a)Calcular a probabilidade de retirar uma bola branca da urna "A";

b) Determine a probabilidade de retirarmos uma bola branca ou vermelha da urna "A";

c) Determine a probabilidade de retirarmos uma bola branca da urna "A" e uma bola vermelha da urna "B";

d) Qual a probabilidade de serem retiradas duas bolas vermelhas da urna "A", com reposição?;

e) Qual a probabilidade de serem retiradas duas bolas pretas da urna "B"? (sem reposição);

Para resolver esse problema, vamos considerar as seguintes informações gerais (hipotéticas) sobre as urnas "A" e "B":

Urna A:
- Contém W_A bolas brancas, R_A bolas vermelhas, e B_A bolas pretas.

Urna B:
- Contém W_B bolas brancas, R_B bolas vermelhas, e B_B bolas pretas.

a) Calcular a probabilidade de retirar uma bola branca da urna "A":

A probabilidade de retirar uma bola branca da urna "A" é dada por:

$$
P(\text{Branca de A}) = \frac{W_A}{W_A + R_A + B_A}
$$

b) Determine a probabilidade de retirarmos uma bola branca ou vermelha da urna "A":

A probabilidade de retirar uma bola branca ou vermelha da urna "A" é a soma das probabilidades individuais:

$$
P(\text{Branca ou Vermelha de A}) = P(\text{Branca de A}) + P(\text{Vermelha de A})
$$

Onde:

$$
P(\text{Branca de A}) = \frac{W_A}{W_A + R_A + B_A}
$$

$$
P(\text{Vermelha de A}) = \frac{R_A}{W_A + R_A + B_A}
$$

Então:

$$
P(\text{Branca ou Vermelha de A}) = \frac{W_A + R_A}{W_A + R_A + B_A}
$$

c) Determine a probabilidade de retirarmos uma bola branca da urna "A" e uma bola vermelha da urna "B":

Assumindo que a retirada das bolas é independente, a probabilidade conjunta é o produto das probabilidades individuais:

$$
P(\text{Branca de A e Vermelha de B}) = P(\text{Branca de A}) \times P(\text{Vermelha de B})
$$

Onde:

$$
P(\text{Branca de A}) = \frac{W_A}{W_A + R_A + B_A}
$$

$$
P(\text{Vermelha de B}) = \frac{R_B}{W_B + R_B + B_B}
$$

d) Qual a probabilidade de serem retiradas duas bolas vermelhas da urna "A", com reposição?

Com reposição, cada retirada é independente. Então, a probabilidade de retirar duas bolas vermelhas é:

$$
P(\text{2 Vermelhas de A com reposição}) = P(\text{Vermelha de A}) \times P(\text{Vermelha de A})
$$

\[

P(\text{2 Vermelhas de A com reposição}) = \left(\frac{R_A}{W_A + R_A + B_A}
\right)^2
\]

e) Qual a probabilidade de serem retiradas duas bolas pretas da urna "B" sem reposição?

Sem reposição, a probabilidade do segundo evento depende do primeiro. Então, a probabilidade de retirar duas bolas pretas é:

\[
P(\text{1ª Preta de B}) = \frac{B_B}{W_B + R_B + B_B}
\]

Após a primeira retirada:

\[
P(\text{2ª Preta de B}) = \frac{B_B - 1}{W_B + R_B + B_B - 1}
\]

Então, a probabilidade de retirar duas bolas pretas sem reposição é:

\[
P(\text{2 Pretas de B sem reposição}) = \frac{B_B}{W_B + R_B + B_B} \times \frac{B_B - 1}{W_B + R_B + B_B - 1}
\]

Resumo das fórmulas:

a) \(P(\text{Branca de A}) = \frac{W_A}{W_A + R_A + B_A} \)

b) \(P(\text{Branca ou Vermelha de A}) = \frac{W_A + R_A}{W_A + R_A + B_A} \)

c) \(P(\text{Branca de A e Vermelha de B}) = \frac{W_A}{W_A + R_A + B_A} \times \frac{R_B}{W_B + R_B + B_B} \)

d) \(P(\text{2 Vermelhas de A com reposição}) = \left(\frac{R_A}{W_A + R_A + B_A} \right)^2 \)

e) \(P(\text{2 Pretas de B sem reposição}) = \frac{B_B}{W_B + R_B + B_B} \times \frac{B_B - 1}{W_B + R_B + B_B - 1} \)

Substitua os valores de \(W_A \), \(R_A \), \(B_A \), \(W_B \), \(R_B \), e \(B_B \) para obter as probabilidades numéricas específicas.

EXERCÍCIO 6

A probabilidade de o aluno "X" resolver este problema é de 3/5, e de o aluno "Y" é de 4/7. Qual a probabilidade do Problema ser Resolvido

Para calcular a probabilidade de o problema ser resolvido, devemos considerar duas possíveis situações:

1. O aluno "X" resolve o problema.
2. O aluno "Y" resolve o problema.
3. Ambos podem resolver o problema independentemente.

Essas duas probabilidades são independentes, então usamos a fórmula da **probabilidade da união de eventos independentes**:

$$
P(\text{Problema Resolvido}) = P(X \text{ resolve}) + P(Y \text{ resolve}) - P(X \text{ resolve e } Y \text{ resolve})
$$

As probabilidades são dadas como:
- $P(X \text{ resolve}) = \frac{3}{5}$
- $P(Y \text{ resolve}) = \frac{4}{7}$

A probabilidade de ambos resolverem é o produto das probabilidades individuais:

$$
P(X \text{ e } Y \text{ resolvem}) = P(X \text{ resolve}) \times P(Y \text{ resolve}) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{35}
$$

Agora, aplicamos esses valores na fórmula da união:

$$
P(\text{Problema Resolvido}) = \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{12}{35}

\]

Primeiro, precisamos encontrar o denominador comum para somar as frações:

$$
\frac{3}{5} = \frac{21}{35} \quad \text{e} \quad \frac{4}{7} = \frac{20}{35}
$$

Agora somamos:

$$
P(\text{Problema Resolvido}) = \frac{21}{35} + \frac{20}{35} - \frac{12}{35} = \frac{41}{35} - \frac{12}{35} = \frac{29}{35}
$$

Portanto, a probabilidade de o problema ser resolvido é:

$$
P(\text{Problema Resolvido}) = \frac{29}{35}
$$

EXERCÍCIO 7

Um grupo de 100 pessoas apresenta, de acordo com o sexo e qualificação a seguinte composição:

Sexo	Especializados	Não especializados	Total
Homens	21	39	60
Mulheres	14	26	40
Total	35	65	100

Calcular:

a) A probabilidade de um escolhido ser homem.
b) A probabilidade de um escolhido ser mulher e não especializada.
c) Qual a porcentagem dos não especializados?
d) Qual a porcentagem dos homens não especializados?

e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher?
f) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especia-lizado?

Vamos resolver o exercício usando as informações fornecidas na tabela:

Sexo	Especializados	Não Especializados	Total
Homens	21	39	60
Mulheres	14	26	40
Total	**35**	**65**	**100**

a) A probabilidade de um escolhido ser homem:

A probabilidade de escolher uma pessoa que seja homem é a razão entre o número de homens e o total de pessoas:

$$
P(\text{Homem}) = \frac{\text{Total de Homens}}{\text{Total de Pessoas}} = \frac{60}{100} = 0,6
$$

Portanto, a probabilidade de um escolhido ser homem é 0,6 ou 60%.

b) A probabilidade de um escolhido ser mulher e não especializada:

Para essa probabilidade, consideramos o número de mulheres que são não especializadas:

$$
P(\text{Mulher e Não Especializada}) = \frac{\text{Número de Mulheres Não Especializadas}}{\text{Total de Pessoas}} = \frac{26}{100} = 0,26
$$

Portanto, a probabilidade de um escolhido ser mulher e não especializada é 0,26 ou 26%.

c) Qual a porcentagem dos não especializados?

A porcentagem de não especializados é a razão entre o número de pessoas não especializadas e o total de pessoas, multiplicado por 100:

$$
\text{Porcentagem de Não Especializados} = \frac{\text{Total de Não Especializados}}{\text{Total de Pessoas}} \times 100 = \frac{65}{100} \times 100 = 65\%
$$

Portanto, 65% das pessoas são não especializadas.

d) Qual a porcentagem dos homens não especializados?

A porcentagem de homens não especializados é a razão entre o número de homens não especializados e o total de homens, multiplicado por 100:

$$
\text{Porcentagem de Homens Não Especializados} = \frac{\text{Número de Homens Não Especializados}}{\text{Total de Homens}} \times 100 = \frac{39}{60} \times 100 \approx 65\%
$$

Portanto, aproximadamente 65% dos homens são não especializados.

e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher?

Para calcular essa probabilidade condicional, usamos o número de mulheres especializadas sobre o total de pessoas especializadas:

$$
P(\text{Mulher | Especializado}) = \frac{\text{Número de Mulheres Especializadas}}{\text{Total de Especializados}} = \frac{14}{35} \approx 0,4
$$

Portanto, se o sorteado é especializado, a probabilidade de ser mulher é 0,4 ou 40%.

f) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especializado?

Novamente, essa é uma probabilidade condicional. Consideramos o número de homens não especializados sobre o total de homens:

$$
P(\text{Não Especializado | Homem}) = \frac{\text{Número de Homens Não Especializados}}{\text{Total de Homens}} = \frac{39}{60} = 0,65
$$

Portanto, se o sorteado for homem, a probabilidade de ser não especializado é 0,65 ou 65%.

EXERCÍCIO 8

Uma urna contém quatro bolas brancas, cinco azuis e seis pretas el uma outra temos cinco bolas brancas, seis azuis e duas pretas. Extraia-se uma bola de cada urna, na seqüência estabelecida anteriormente, qual a probabilidade:

a) de que ambas sejam da mesma cor?
b) da primeira ser azul e a segunda ser preta?
c) de uma ser azul e a outra ser preta?
d) da primeira ser branca e a segunda não ser branca?

Para resolver este problema, precisamos analisar as probabilidades em cada urna e depois calcular as probabilidades combinadas.

Informações:

- **Urna 1**:
  - 4 bolas brancas
  - 5 bolas azuis
  - 6 bolas pretas
  - **Total**: 15 bolas

- **Urna 2**:
  - 5 bolas brancas
  - 6 bolas azuis
  - 2 bolas pretas
  - **Total**: 13 bolas

a) Probabilidade de que ambas as bolas sejam da mesma cor:

Aqui, temos três casos possíveis: ambas as bolas serem brancas, ambas serem azuis, ou ambas serem pretas.

1. **Probabilidade de ambas as bolas serem brancas**:

$$
P(\text{branca na Urna 1 e branca na Urna 2}) = P(\text{branca na Urna 1}) \times P(\text{branca na Urna 2})
$$

$$
P(\text{branca na Urna 1}) = \frac{4}{15}, \quad P(\text{branca na Urna 2}) = \frac{5}{13}
$$

$$
P(\text{branca na Urna 1 e branca na Urna 2}) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{13} = \frac{20}{195} \approx 0,1026
$$

2. **Probabilidade de ambas as bolas serem azuis**:

$$
P(\text{azul na Urna 1 e azul na Urna 2}) = P(\text{azul na Urna 1}) \times P(\text{azul na Urna 2})
$$

$$
P(\text{azul na Urna 1}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \quad P(\text{azul na Urna 2}) = \frac{6}{13}
$$

$$
P(\text{azul na Urna 1 e azul na Urna 2}) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{13} = \frac{6}{39} \approx 0,1538
$$

3. **Probabilidade de ambas as bolas serem pretas**:

$$
P(\text{preta na Urna 1 e preta na Urna 2}) = P(\text{preta na Urna 1}) \times P(\text{preta na Urna 2})
$$

$$
P(\text{preta na Urna 1}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \quad P(\text{preta na Urna 2}) = \frac{2}{13}
$$

$$
P(\text{preta na Urna 1 e preta na Urna 2}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{13} = \frac{4}{65} \approx 0,0615
$$

Probabilidade total de que ambas sejam da mesma cor:

Somamos as probabilidades de todos os casos:

$$
P(\text{mesma cor}) = P(\text{branca e branca}) + P(\text{azul e azul}) + P(\text{preta e preta})
$$

$$
P(\text{mesma cor}) \approx 0,1026 + 0,1538 + 0,0615 \approx 0,3179
$$

Portanto, a probabilidade de que ambas sejam da mesma cor é aproximadamente **0,3179** ou **31,79%**.

b) Probabilidade da primeira ser azul e a segunda ser preta:

Aqui, queremos a probabilidade de tirar uma bola azul da primeira urna e uma preta da segunda urna:

$$
P(\text{azul na Urna 1 e preta na Urna 2}) = P(\text{azul na Urna 1}) \times P(\text{preta na Urna 2})
$$

$$
P(\text{azul na Urna 1}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \quad P(\text{preta na Urna 2}) = \frac{2}{13}
$$

$$
P(\text{azul na Urna 1 e preta na Urna 2}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{13} = \frac{2}{39} \approx 0,0513
$$

Portanto, a probabilidade de a primeira bola ser azul e a segunda ser preta é aproximadamente **0,0513** ou **5,13%**.

]

EXERCÍCIO 9

A probabilidade da classe "A" comprar um carro é 3/4, da "B" é 1/6 e da "C", 1/20.

A probabilidade de o indivíduo da classe "A" comprar um carro da marca "W" é 1/10; de B comprar da marca "W" é 3/5 e de C é 3/10. Em certa loja um indivíduo comprou um carro da marca "W".

Qual a probabilidade de que o indivíduo:

a) Da classe "A" o tenha comprado?
b) Da classe "B" o tenha comprado?
c) Da classe "C" o tenha comprado?

Resolvendo o Exercício - Probabilidade Condicional e o Teorema de Bayes

***Observação:* Esse tipo de problema é comum em diversas áreas, como estatística, machine learning e inteligência artificial, e é fundamental para tomar decisões com base em dados incertos.**

Entendendo o Problema: Temos três classes de consumidores (A, B e C) com diferentes probabilidades de comprar um carro e diferentes preferências de marca. Queremos saber, dado que um indivíduo comprou um carro da marca W, qual a probabilidade dele pertencer a cada classe.

Definindo os Eventos:

- **A:** O indivíduo pertence à classe A.
- **B:** O indivíduo pertence à classe B.
- **C:** O indivíduo pertence à classe C.
- **W:** O indivíduo comprou um carro da marca W.

Dados do Problema:

- P(A) = 3/4
- P(B) = 1/6
- P(C) = 1/20
- P(W|A) = 1/10
- P(W|B) = 3/5
- P(W|C) = 3/10

Utilizando o Teorema de Bayes: Assim como no exercício anterior, vamos utilizar o Teorema de Bayes para calcular as probabilidades condicionais.

Calculando P(W):

$$P(W) = P(W|A) * P(A) + P(W|B) * P(B) + P(W|C) * P(C)$$
$$P(W) = (1/10 * 3/4) + (3/5 * 1/6) + (3/10 * 1/20) = 1/4$$

Calculando as probabilidades condicionais:

- **a) Probabilidade de ser da classe A, dado que comprou um carro da marca W:**
- P(A|W) = (P(W|A) * P(A)) / P(W) = (1/10 * 3/4) / (1/4) = 3/10
- **b) Probabilidade de ser da classe B, dado que comprou um carro da marca W:**
- P(B|W) = (P(W|B) * P(B)) / P(W) = (3/5 * 1/6) / (1/4) = 1/5
- **c) Probabilidade de ser da classe C, dado que comprou um carro da marca W:**
- P(C|W) = (P(W|C) * P(C)) / P(W) = (3/10 * 1/20) / (1/4) = 3/50

Resposta:

- **a) A probabilidade de que o indivíduo seja da classe A, dado que comprou um carro da marca W,** é de 3/10.
-
- **b) A probabilidade de que o indivíduo seja da classe B, dado que comprou um carro da marca W,** é de 1/5.
-
- **- A probabilidade de que o indivíduo seja da classe C, dado que comprou um carro da marca W,** é de 3/50.
-

Conclusão: Dentre os indivíduos que compraram um carro da marca W, é mais provável que pertençam à classe A, seguido da classe B e, por último, da classe C. Isso mostra como o Teorema de Bayes nos permite atualizar nossas probabilidades à medida que recebemos novas informações (no caso, a informação de que o carro comprado foi da marca W).

Este problema também pode ser resolvido usando o **Teorema de Bayes**.

Informações do Problema:

- **Probabilidade de um indivíduo de cada classe comprar um carro**:
  - $P(A) = \frac{3}{4}$
  - $P(B) = \frac{1}{6}$
  - $P(C) = \frac{1}{20}$

- **Probabilidade de um indivíduo de cada classe comprar um carro da marca "W"**:
  - $P(W|A) = \frac{1}{10}$
  - $P(W|B) = \frac{3}{5}$
  - $P(W|C) = \frac{3}{10}$

Passos para Resolução:

1. **Calcular a probabilidade total de um carro da marca "W" ser comprado:**

$$
P(W) = P(W|A) \times P(A) + P(W|B) \times P(B) + P(W|C) \times P(C)
$$

Substituindo os valores:

$$
P(W) = \left(\frac{1}{10} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{1}{20}\right)
$$

$$
P(W) = \frac{3}{40} + \frac{3}{30} + \frac{3}{200}
$$

Primeiro, encontramos um denominador comum para somar essas frações:

$$
\frac{3}{40} = \frac{15}{200}, \quad \frac{3}{30} = \frac{20}{200}, \quad \frac{3}{200} = \frac{3}{200}
$$

Agora somamos as frações:

$$
P(W) = \frac{15}{200} + \frac{20}{200} + \frac{3}{200} = \frac{38}{200} = \frac{19}{100} = 0,19
$$

Portanto, $P(W) = 0,19$.

2. **Calcular as probabilidades condicionais usando o Teorema de Bayes**:

- **a) Probabilidade de que um indivíduo da classe "A" tenha comprado o carro:**

$$
P(A|W) = \frac{P(W|A) \times P(A)}{P(W)}
$$

Substituindo os valores:

$$
P(A|W) = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{3}{4}}{0,19} = \frac{\frac{3}{40}}{0,19} = \frac{3}{40} \times \frac{1}{0,19} = \frac{3}{40} \times \frac{100}{19} = \frac{300}{760} \approx 0,3947
$$

Portanto, $P(A|W) \approx 0,3947$ ou 39,47%.

- **b) Probabilidade de que um indivíduo da classe "B" tenha comprado o carro:**

$$
P(B|W) = \frac{P(W|B) \times P(B)}{P(W)}
$$

Substituindo os valores:

$$
P(B|W) = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{6}}{0,19} = \frac{\frac{3}{30}}{0,19} = \frac{20}{200} \times \frac{100}{19} = \frac{2000}{3800} \approx 0,5263
$$

Portanto, $P(B|W) \approx 0,5263$ ou 52,63%.

- **c) Probabilidade de que um indivíduo da classe "C" tenha comprado o carro:**

$$
P(C|W) = \frac{P(W|C) \times P(C)}{P(W)}
$$

Substituindo os valores:

$$
P(C|W) = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{20}}{0,19} = \frac{\frac{3}{200}}{0,19} = \frac{3}{200} \times \frac{100}{19} = \frac{300}{3800} \approx 0,0789
$$

Portanto, $P(C|W) \approx 0,0789$ ou 7,89%.

Resumo das respostas:

- **a) \(P(A|W) \approx 0,3947 \) ou 39,47%**
- **b) \(P(B|W) \approx 0,5263 \) ou 52,63%**
- **c) \(P(C|W) \approx 0,0789 \) ou 7,89%**

EXERCÍCIO 10

Três máquinas M,, M, e M, produzem respectivamente 40%, 50% e 10% do total de peças de uma fábrica. A porcentagem de peças defeituosa nas respectivas máquinas é 3%, 5% e 2%. Uma peça é sorteada ao acaso e verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina:

a) M,

b) M,

c) M3

Este problema pode ser resolvido usando o **Teorema de Bayes**, que nos permite calcular a probabilidade condicional de um evento, dado que outro evento ocorreu.

Informações do Problema:
- **Probabilidade de selecionar uma peça de cada máquina:**
  - \(P(M_1) = 0,4 \)
  - \(P(M_2) = 0,5 \)
  - \(P(M_3) = 0,1 \)

- **Probabilidade de uma peça ser defeituosa, dado que veio de uma máquina específica:**
  - \(P(D|M_1) = 0,03 \)
  - \(P(D|M_2) = 0,05 \)
  - \(P(D|M_3) = 0,02 \)

Passos para resolução:

1. **Calcular a probabilidade total de uma peça ser defeituosa:**

\[

$$
P(D) = P(D|M_1) \times P(M_1) + P(D|M_2) \times P(M_2) + P(D|M_3) \times P(M_3)
$$

Substituindo os valores:

$$
P(D) = (0,03 \times 0,4) + (0,05 \times 0,5) + (0,02 \times 0,1)
$$

$$
P(D) = 0,012 + 0,025 + 0,002 = 0,039
$$

Portanto, $P(D) = 0,039$.

2. **Calcular as probabilidades condicionais usando o Teorema de Bayes:**

- **a) Probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina M_1:**

$$
P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1) \times P(M_1)}{P(D)}
$$

Substituindo os valores:

$$
P(M_1|D) = \frac{0,03 \times 0,4}{0,039} = \frac{0,012}{0,039} \approx 0,3077
$$

Portanto, $P(M_1|D) \approx 0,3077$ ou 30,77%.

- **b) Probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina M_2:**

$$
P(M_2|D) = \frac{P(D|M_2) \times P(M_2)}{P(D)}
$$

Substituindo os valores:

$$
P(M_2|D) = \frac{0,05 \times 0,5}{0,039} = \frac{0,025}{0,039} \approx 0,6410
$$

Portanto, $P(M_2|D) \approx 0,6410$ ou 64,10%.

- **c) Probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina M_3:**

$$
P(M_3|D) = \frac{P(D|M_3) \times P(M_3)}{P(D)}
$$

Substituindo os valores:

$$
P(M_3|D) = \frac{0,02 \times 0,1}{0,039} = \frac{0,002}{0,039} \approx 0,0513
$$

Portanto, $P(M_3|D) \approx 0,0513$ ou 5,13%.

Resumo das respostas:

- **a) $P(M_1|D) \approx 0,3077$ ou 30,77%**
- **b) $P(M_2|D) \approx 0,6410$ ou 64,10%**
- **c) $P(M_3|D) \approx 0,0513$ ou 5,13%**