Consultoria Especializada de Apoio ao Projeto Integrado: Matemática

Propriedades dos Limites

Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, então:

a) Propriedade da soma: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

b) Propriedade da diferença: $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

c) Propriedade do produto: $\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\lim_{x \to a} g(x)$

d) Propriedade do quociente: se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, então: o limite do quociente é a razão de cada limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Propriedades dos Limites

Exemplo1: f(x)=x^3
g(x)=$-3x+1$

Calcular

$$\lim_{x\to 2}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] =$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$\lim_{x\to 2} \boldsymbol{x^3-3x+1} = \lim_{x\to 2} \boldsymbol{x^3} + \lim_{x\to 2} \boldsymbol{3x+1}$$

ou ainda

$$\lim_{x\to 2} \boldsymbol{x^3} + \lim_{x\to 2} \boldsymbol{3x} + \lim_{x\to 2} \boldsymbol{1}$$

Substituindo x por 2

$$\lim_{x\to 2}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] = 2^3\text{-}3.2+1 = 3$$

Propriedades dos Limites

Exemplo2: f(x)=4

g(x)=x^2

Calcular

$\lim\limits_{x \to 3} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] =$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to 3} g(x)$

$\lim\limits_{x \to 3} 4\boldsymbol{x}^2 = \lim\limits_{x \to 3} 4 \,.\, \lim\limits_{x \to 3} \boldsymbol{x}^2$

Substituindo x por 3

$\lim\limits_{x \to 3} [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] = 4.\ 3^2 = 36$

Propriedades dos Limites

Exemplo3: $f(x)=3x^2-8$
$g(x)=x-2$

Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$$

$$\frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-8}{x-2} =$$

Para x=0 → x-2 $\neq$ 0 logo é só substituir

Substituindo x por 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{3.0^2-8}{0-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Limites Infinitos

$$\lim_{x \to 4} \frac{2}{x-4}$$

Verificar se a regra do limite do quociente se aplica, ou seja, se o limite do denominador é diferente de zero: $\lim_{x \to 4} x - 4 = 4 - 4 = 0$

Como o limite do denominador é igual a zero, quando x tende a 4, não podemos usar a regra do limite do quociente.

Como calcular esse limite?

Calcular os limites laterais e verificar se o limite global existe.

Limites Infinitos

Limite lateral pela direita: $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2}{x-4}$

$f(x) = \dfrac{2}{x-4}$

$f(4{,}1) = 20$

$f(4{,}01) = 200$

$f(4{,}001) = 2000$

$f(4{,}0001) = 20000$

x	y
4,1	20
4,01	200
4,001	2000
4,0001	20000
(...)	(...)

=> as respectivas imagens (ou respectivos de y) estão cada vez maiores, ou seja, y tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{x-4} = +\infty$$

Limites Infinitos

Limite lateral pela esquerda: $\lim_{x \to 4^-} \frac{2}{x-4}$

f(x) = $\frac{2}{x-4}$

f(3,9) = -20

f(3,99) = -200

f(3,999) = -2000

f(3,9999) = -20000

x	y
3,9	-20
3,99	-200
3,999	-2000
3,9999	-20000
(...)	(...)

=> as respectivas imagens (ou respectivos de y) estão cada vez maiores, ou seja, y tende a $+\infty$:

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{2}{x-4} = -\infty$$

Formas indeterminadas

São expressões impossíveis de serem calculadas

Exemplos:

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Nestes casos torna-se necessário simplificar algebricamente a função para calcular o limite desejado. Utiliza-se técnicas de fatoração

$$0.\infty$$

$$1^{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0^{0}$$

Formas indeterminadas

- Exemplo 1: Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ quando x tende a 3:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$$

$\Rightarrow$ Se substituirmos x = 3 para calcular o limite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{3-3}{3^2-9} = \frac{0}{0}$$ => **forma indeterminada**

Fatorando

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-3^2} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3}$$

$\Rightarrow$ Substituindo x = 3 para calcular o limite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{\lim_{x \to 3} 1}{\lim_{x \to 3} (x+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Formas indeterminadas

- Exemplo 2: Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x^2+10x}{2x}$ quando x tende a 0: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+10x}{2x}$

$\Rightarrow$ Se substituirmos x = 0 para calcular o limite: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+10x}{2x} = \frac{\lim_{x\to 0}(x^2+10x)}{\lim_{x\to 0} 2x} = \frac{0^2+10.0}{2.0} = \frac{0}{0}$

formaindeterminada

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+10x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(x+10)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+10)}{2}$

$\Rightarrow$ substituirmos x = 0, $\lim_{x\to 0} \frac{(x+10)}{2} = \frac{\lim_{x\to 0}(x+10)}{\lim_{x\to 0} 2} = \frac{(0+10)}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Formas indeterminadas

- Exemplo 3: Calcule o limite da função $f(x) = \frac{x^2-14x+49}{x-7}$ quando x tende a 7:

$\lim_{x\to 7} \frac{x^2-14x+49}{x-7}$ = $\frac{0}{0}$ **=> forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim_{x\to 7} \frac{x^2-14x+49}{x-7}$ = $\lim_{x\to 7} \frac{(x-7)^2}{x-7}$ = $\lim_{x\to 7}$ (x-7)

$\Rightarrow$ substituirmos x = 7, $\lim_{x\to 7}$ (x-7) = 7 – 7 = **0**

Na função de segundo grau do numerador as raízes são 7 e 7 logo em cima é (x-7).(x-7)

Formas indeterminadas

- Exemplo 4: Calcule o limite da função $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ quando x tende a 2:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{0}{0}$$ **=> forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x - 3)$

$\Rightarrow$ substituirmos x = 2, $\lim\limits_{x\to 2} x - 3 = 2 - 3 = -1$

Formas indeterminadas - Fatoração

- $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$;
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$;
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ em que x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$;
- $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
- $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Formas indeterminadas

- Exemplo 5: Calcule o limite da função $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x + 10$ quando x tende a ∞:

$$\lim_{x \to \infty} 2x^3 + 2x^2 - 8x + 10$$

=> Substituindo x = ∞:

$2(\infty)^3 + 2(\infty)^2 - 8(\infty) + 10$ = 2. ∞ + 2. ∞ - ∞ = ∞ + ∞ - ∞ = ∞ - ∞ **=> forma indeterminada**

$\Rightarrow$ Fatorando a função: $\lim_{x \to \infty} x^3(2 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{10}{x^3})$

$\Rightarrow$ substituirmos x = ∞, $(\infty)^3(2 + \frac{2}{\infty} - \frac{8}{(\infty)^2} + \frac{10}{(\infty)^3})$ **=** $\infty(2 + \frac{2}{\infty} - \frac{8}{\infty} + \frac{10}{\infty})$ **=** $\infty(2 + 0 - 0 + 0) = \infty$

Formas indeterminadas

- **Exemplo 6**: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} == \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} x^3+2x^2}{\lim\limits_{x \to -\infty} x^2-2x} = \frac{(-\infty)^3+2(-\infty)^2}{(-\infty)^2-2(-\infty)} = \frac{-\infty+\infty}{\infty}$ forma indeterminada
- Colocar x de maior expoente em evidência no numerador e no denominador:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3(1+\frac{2}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{(1-\frac{2}{x})} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} x(1+\frac{2}{x})}{\lim\limits_{x \to -\infty} (1-\frac{2}{x})} = \frac{(-\infty)(1+\frac{1}{-\infty})}{(1-\frac{2}{-\infty})} = \frac{(-\infty)(1-0)}{(1+0)} = \frac{(-\infty)}{(1)} = -\infty$$

- **Exemplo 7**: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} == \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} x^3+2x^2}{\lim\limits_{x \to +\infty} x^2-2x} = \frac{(\infty)^3+2(\infty)^2}{(\infty)^2-2(\infty)} = \frac{\infty}{\infty-\infty}$ forma indeterminada

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(1+\frac{2}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{(1-\frac{2}{x})} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} x(1+\frac{2}{x})}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1-\frac{2}{x})} = \frac{(\infty)(1+\frac{1}{\infty})}{(1-\frac{2}{\infty})} = \frac{(\infty)(1-0)}{(1-0)} = \frac{(\infty)}{(1)} = \infty$$

Limite exponencial fundamental

Definição do número e (número de Euler) ≅ 2,718281...

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

OU

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

x	$(1+1/x)^x$
1	2
2	2,25
5	2,48
10	2,59
100	2,704
1.000	2,7169
100.000	2,718268
1.000.000	2,718280
(...)	(...)

x	$(1+1/x)^x$
-1	2
-2	2,25
-5	2,48
-10	2,59
-100	2,704
-1.000	2,7169
-100.000	2,718268
-1.000.000	2,718280
(...)	(...)

Execícios

1) Obtenha os limites:

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3}{2x^2 - x}$

i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

l) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\lim_{x \to -7} \dfrac{49 - x^2}{7 + x}$

f) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

j) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

m) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1}$

2) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}$

i) $\lim_{x \to \infty} (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

q) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$

j) $\lim_{x \to -\infty} (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

r) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{25x - 2}{16x - 3}$

c) $\lim_{x \to \infty} x^4$

k) $\lim_{x \to \infty} (2x^5 - 3x^2 + 6)$

s) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 - 5x}$