Lógica Matemática

Limites

O conceito de limite da função tem grande importância na determinação de comportamento de funções nas vizinhanças fora do domínio.

Dizemos que f(x) tem limite L quando x tende a "x0" e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Limites

Exemplo 1: Calcule o limite para $\lim_{x \to 1} (x + 1)$.

Limites

Exemplo 1: Calcule o limite para $\lim_{x \to 1} (x + 1).$

x	$x + 1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
↓	↓
1	2

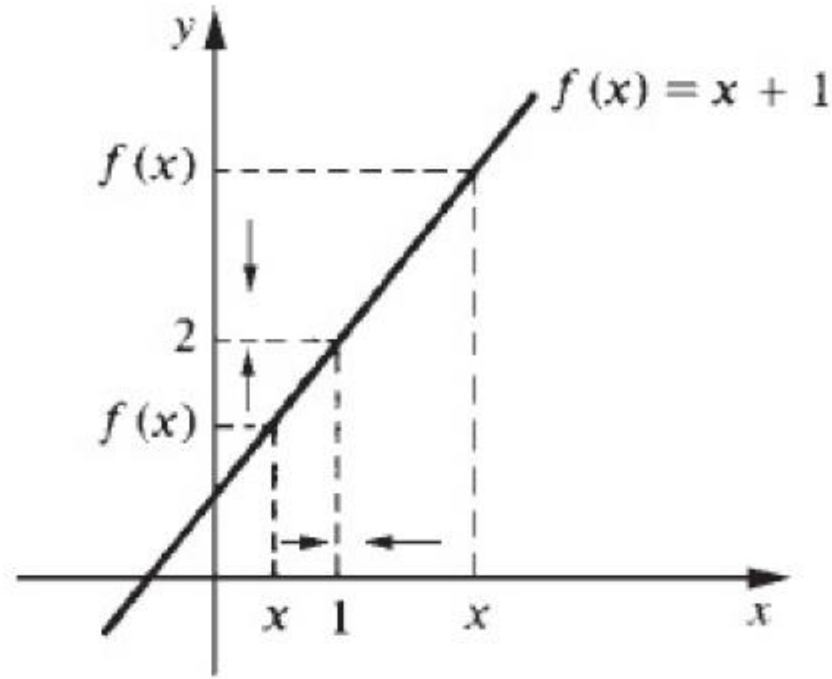
x	$x + 1$
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
↓	↓
1	2

Limites

Exemplo 1: Calcule o limite para $\lim_{x \to 1} (x + 1).$

x	$x + 1$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
↓	↓
1	2

x	$x + 1$
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
↓	↓
1	2



$$\lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Nesse caso a função é definida no ponto x0, dizemos então que a função é contínua em x0

Limites

Exemplo 2: Calcule o limite para $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Limites

Exemplo 2: Calcule o limite para $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Seja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$; f não está definida em $x = 1$.

Para $x \neq 1$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x - 1)}.(x + 1)}{\cancel{(x - 1)}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

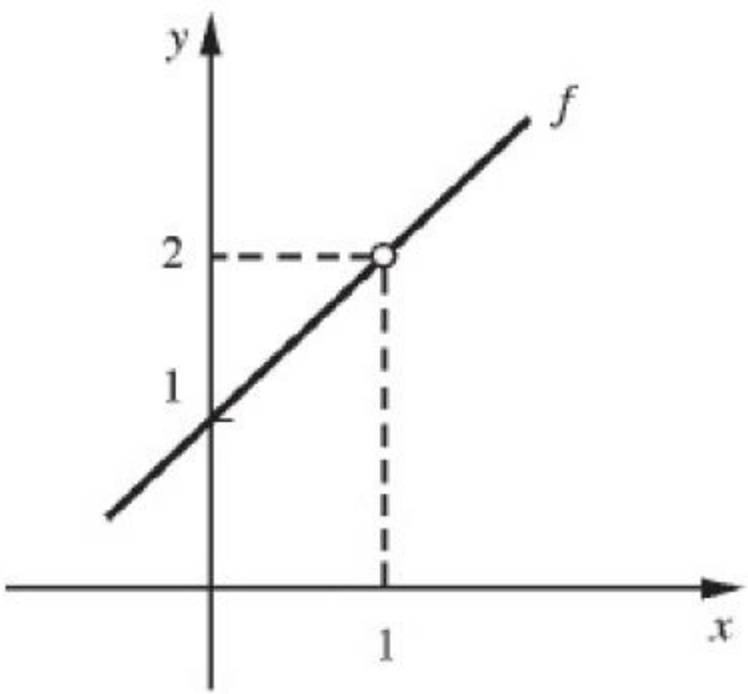
Limites

Exemplo 2: Calcule o limite para $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Seja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$; f não está definida em $x = 1$.

Para $x \neq 1$

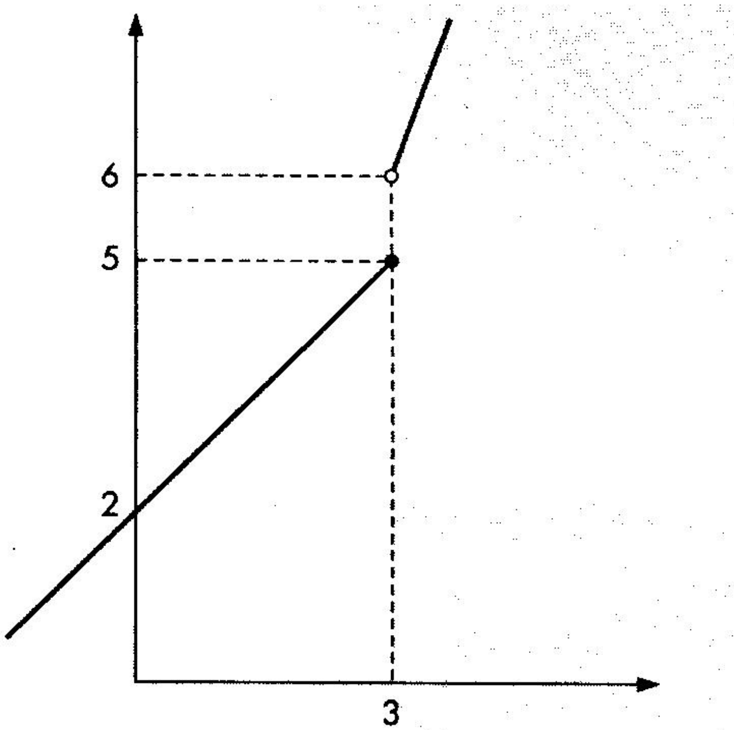
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Limites

Exemplo 3: Calcule o limite para x=3 em $f(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x \leq 3 \\ 2x, & se\ x > 3 \end{cases}$



Qual o limite??????

Limites Laterais

Exemplo 3: Calcule o limite para x=3 em $f(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x \le 3 \\ 2x, & se\ x > 3 \end{cases}$

Limite lateral pela direita: dada uma função f(x) e um ponto *b* ∈ D_f, o limite de f(x) é igual a L quando x tende a *b* pela direita (x→*b*+), ou seja , à medida que x se aproxima de *b* por valores maiores do que *b*:

$$\lim_{x \to b+} f(x) = L$$

Limite lateral pela esquerda: dada uma função f(x) e um ponto *b* ∈ D_f, o limite de f(x) é igual a M quando x tende a *b* pela esquerda (x→*b*-), ou seja , à medida que x se aproxima de *b* por valores menores do que *b*:

$$\lim_{x \to b-} f(x) = M$$

Limites Laterais

Exemplo 3: Calcule o limite para x=3 em , $f(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x \leq 3 \\ 2x, & se\ x > 3 \end{cases}$

Podemos calcular o limite lateral pela direita assumindo valores para x cada vez mais próximos de 3 "pela direita", ou seja, assumindo valores para x maiores do que 3 cada vez mais próximos de 3 e calculando o valor de y correspondente

x	$f(x)$
3,1	6,2
3,01	6,02
3,001	6,002
...	...

dessa forma, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$

Limites Laterais

Exemplo 3: Calcule o limite para x=3 em , $f(x) = \begin{cases} x+2\,, & se\ x \leq 3 \\ 2x\,, & se\ x > 3 \end{cases}$

De forma análoga, podemos calcular o limite lateral pela esquerda assumindo valores para x cada vez mais próximos de 3 “pela esquerda”, ou seja, assumindo valores para x menores do que 3 cada vez mais próximos de 3 e calculando o valor de y correspondente

x	$f(x)$
2,9	4,9
2,99	4,99
2,999	4,999
...	...

dessa forma, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$

Limites

Exemplo 4: Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$

Limites

Exemplo 4: Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$

Aqui a função não é definida para x=2. Calculando os limites laterais, temos

Limite lateral pela direita

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$f(2{,}1) = 31$

$f(2{,}01) = 301$

$f(2{,}001) = 3001$

$f(2{,}0001) = 30001$

x	y
2,1	31
2,01	301
2,001	3001
2,0001	30001
(...)	(...)

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

Limites

Exemplo 4: Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$

Limite lateral pela esquerda

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$f(1,9) = -29$

$f(1,99) = -299$

$f(1,999) = -2999$

$f(1,9999) = -29999$

x	y
1,9	-29
1,99	-299
1,999	-2999
1,9999	-29999
(...)	(...)

$$\lim_{x \to 2^{-}} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

Esse limite é chamado de **LIMITE INFINITO**

Limites

Exercícios

1) Para cada função abaixo $f(x)$ e para cada a, calcule (quando existir):

$$\lim_{x \to a^+} f(x), \quad \lim_{x \to a^-} f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} f(x).$$

a) $f(x) = x^3,\ a = 2$

b) $f(x) = 2x + 1,\ a = 3$

c) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3},\ a = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ 7, \text{ se } x > 2 \end{cases},\ a = 2$

h) $f(x) = \sqrt{3x+4},\ a = 7$

i) $f(x) = \dfrac{x-2}{x},\ a = 2$

2) Para cada função $f(x)$ abaixo, calcule $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, quando existirem:

a) $f(x) = \dfrac{4}{x-6},\ a = 6$

b) $f(x) = \dfrac{3}{1-x},\ a = 1$

i) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2},\ a = 0$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x^3},\ a = 0$