Consultoria Especializada de Apoio ao Projeto Integrado: Matemática

Conjuntos

Um conjunto é constituído de elementos. Um conjunto é bem caracterizado quando podemos estabelecer com certeza se um elemento pertence ou não a um conjunto.

Constituem conjuntos;

- Números inteiros entre 1 e 100
- Pontos de uma reta
- Números reais entre 0 e 1, exclusive

Conjuntos

Designamos os conjuntos por letras maiúsculas: A, B, C...

Os elementos são habitualmente representados por letras minúsculas: a, b, c....

Dessa forma, se A é o conjunto de números inteiros positivos, a afirmação x pertencer ao conjunto A implica que x é um número inteiro positivo.

Escrevemos, simbolicamente $x \in A$

Por outro lado caso $x=\frac{3}{2}$, $x \notin A$ -> X não pertence a A .

$\notin$ é a negação de $\in$

Método da enumeração ou método tabular

Esse método é usado quando o número de elementos do conjunto não é grande. O método consiste em escrever os nomes dos elementos entre chaves.

Por exemplo, o conjunto de números inteiros pares positivos menores do que 12 pode ser representado por $\{2,4,6,8,10\}$

A mesma notação pode ser usada se o número de elementos for grande se escrevendo-se os primeiros elementos é possível se inferir os demais.

Por exemplo, o conjunto de números pares inteiros positivos menores do que 50 pode ser representado por $\{2,4,6,...,48\}$

Método da enumeração ou método tabular

- Conjunto A números positivos primos menores que 10

  A= {2,3,5,7}

- Conjunto B números pares positivos menores que 6

  B= {2,4}

- Conjunto C números pares positivos primos

  C= {2}

- Conjunto dos números inteiros não negativos, denotado por N

  N= {0,1,2,3,4....}

- Conjunto dos números naturais, denotado por N* é o conjunto N sem o zero   N*= {1,2,3,4....}

O conjunto B é chamado conjunto binário, o conjunto C é chamado unitário enquanto N e N* são chamados infinitos

Método da designação de uma propriedade característica dos elementos

Nem sempre é possível representar um conjunto pelo método anterior. Por exemplo, como designar os números reais entre 0 e 1.

Por exemplo, seja o conjunto P o conjunto dos fracionários entre 0 e 1, poderíamos escrever

$P=\{x \text{ tal que } x \text{ é fracionário e } 0<x<1\}$,

O símbolo | é comumente usado como "tal que"

Se chamarmos o conjunto de fracionários de F, a notação fica da seguinte forma

$P=\{x \mid x \in F \text{ e } 0<x<1\}$

Método da designação de uma propriedade característica dos elementos

São exemplos:

O conjunto D dos números inteiros não negativos menores do que 1000:

$D=\{x|x \in N \text{ e } x<1000\}$

O conjunto E de números fracionários cujos quadrados são maiores ou igual a 9:

$E=\{x|x \in F \text{ e } x^2 \geq 9\}$ ou $E=\{x \in F \mid x^2 \geq 9\}$

Subconjuntos

Dados os conjuntos

A={1,2,3} e B={1,2,3,4}

Notamos que todo elemento de A pertence a B. Dizemos que A é parte de B ou que A está contido em B.

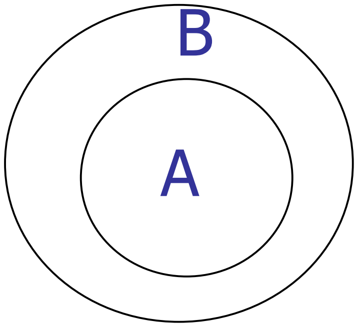
A notação será $A \subset B$, isso significa que todo elemento de A também pertence a B. Podemos dizer de forma equivalente que $B \supset A$ B contém A

Exemplos

$\{0,1,2\} \subset \{0,1,2\}$

$\{0,2\} \subset \{0,1,2\}$

$N \supset N^*$



Subconjuntos

A negação é representada pelos símbolos $\not\subset$ e $\not\supset$

A={1,2,3} e B={1,2,3,4}

$A \not\supset B$

Note que os símbolo $\subset$ mostra a relação entre conjuntos e $\in$ a relação entre um elemento e um conjunto.

$1 \in \{1,2\}$ entretanto $\{1\} \subset \{1,2\}$

Subconjuntos

Igualdade de Conjuntos se dá se e somente se todo e qualquer elemento do primeiro conjunto pertence ao segundo conjunto, ao mesmo tempo, que todo e qualquer elemento do segundo conjunto pertence ao primeiro conjunto.

$\{0,1\}=\{1,0\}$

$\{x \in N|\ 4x=0\} = \{0\}$

$\{x \in N|\ x-4=0\} = \{4\}$

$\varnothing = \{x \in F \mid x^2 +1=0\}$ $x^2 +1=0 \rightarrow x^2 =-1$

Obs: $\varnothing$ representa o conjunto vazio

$\varnothing = \{x \in N \mid x^2 > 25 \text{ e } x < 5\}$

Exercícios

1. Escreva em notação simbólica:

   a) a é elemento de A

   b) A é subconjunto de B

   c) A contém B

   d) A não está contido em B

   e) A não contém B

   f) a não é elemento de A

2. Enumere os elementos de cada um dos conjuntos:

   a) conjunto dos números naturais entre 8 e 12 (inclusive)

   b) conjunto das vogais do alfabeto

   c) conjunto dos números pares entre 0 e 18 (exclusive)

   d) conjunto dos números primos pares positivos

   e) conjunto das frações próprias positivas de denominador 7

   f) $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$

   g) $\{x \mid x$ é letra da palavra ARARA$\}$

   h) $\{x \mid x^2 = 9$ e $x - 3 = -6\}$

   i) $\{x \mid x$ é algarismo do número $2.134\}$

Exercícios

3. Escreva os conjuntos abaixo usando o método da propriedade característica:
   a) $\{1, 3, 5, 7, ...15\}$
   b) $\{1, 7\}$
   c) o conjunto dos números pares entre 5 e 21
   d) o conjunto dos números reais entre -1 e 10, incluindo -1 e excluindo o 10

4. Seja A o conjunto $\{3, 5, 7, 9, 11, 12\}$. Enumere cada um dos conjuntos abaixo:
   a) $\{x \in A \mid x^2 \neq 9\}$
   b) $\{x \in A \mid x + 9 = 16\}$
   c) $\{x \in A \mid x \text{ é primo}\}$
   d) $\{x \in A \mid x^2 - 12x + 35 = 0\}$
   e) $\{x \in A \mid x + 1 \notin A\}$

5. Se $A = \{a, e, i\}$, diga se as proposições abaixo são corretas ou não:
   a) $a \in A$ b) $a \subset A$ c) $\{a\} \in A$ d) $\{a\} \subset A$

Operações com Conjuntos

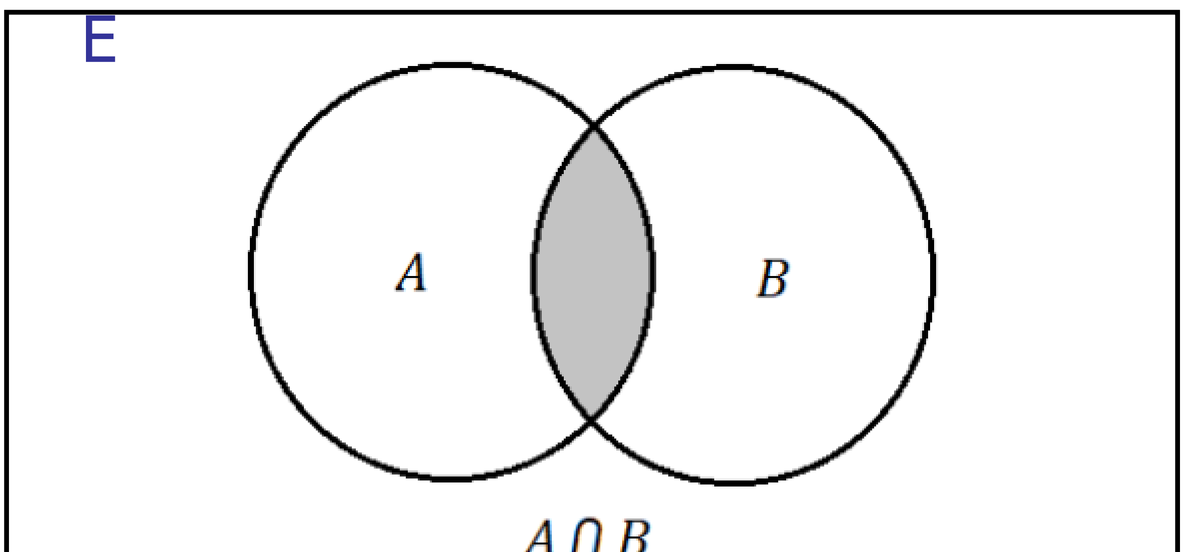
Intersecção de Conjuntos

Chama-se de intersecção de dois conjuntos A e B que pertencem a um universo E, todos aqueles elementos que pertencem simultaneamente a A e B

Indica-se a Intersecção por $A \cap B$

$A \cap B=\{x \in E \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Obs:Essa representação de conjunto é chamada de diagrama de Venn



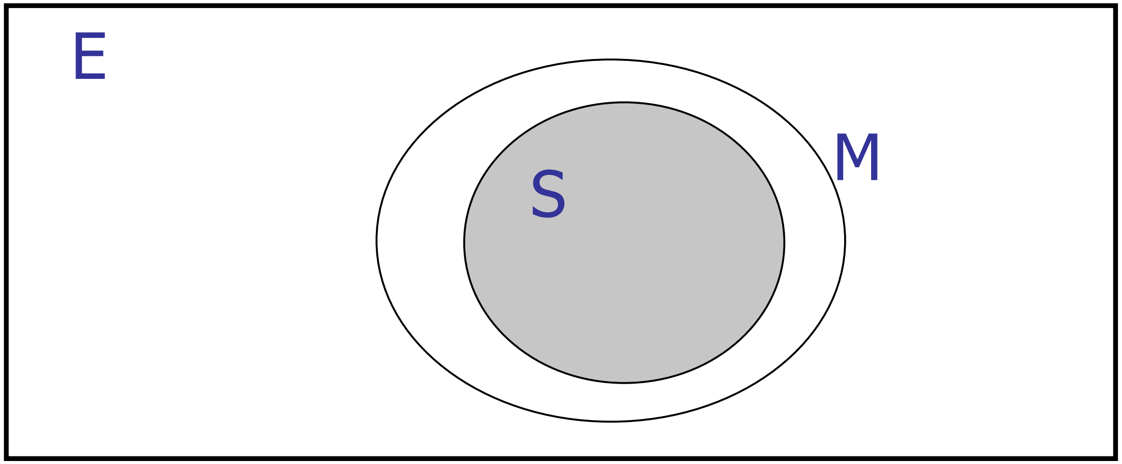
Intersecção de Conjuntos

Exemplos e propriedades

1) Sendo A= {2,3,5,7} e B= {2,4} então $A \cap B = \{2\}$

2) Sendo G= {2,4,6,8} e H= {5,7,9} então $G \cap H = \varnothing$

3) Sendo M= {1,2,3,4,5} e S= {1,2,3} então $M \cap S = S$



Ou seja, se $S \subset M$ então $M \cap S = S$

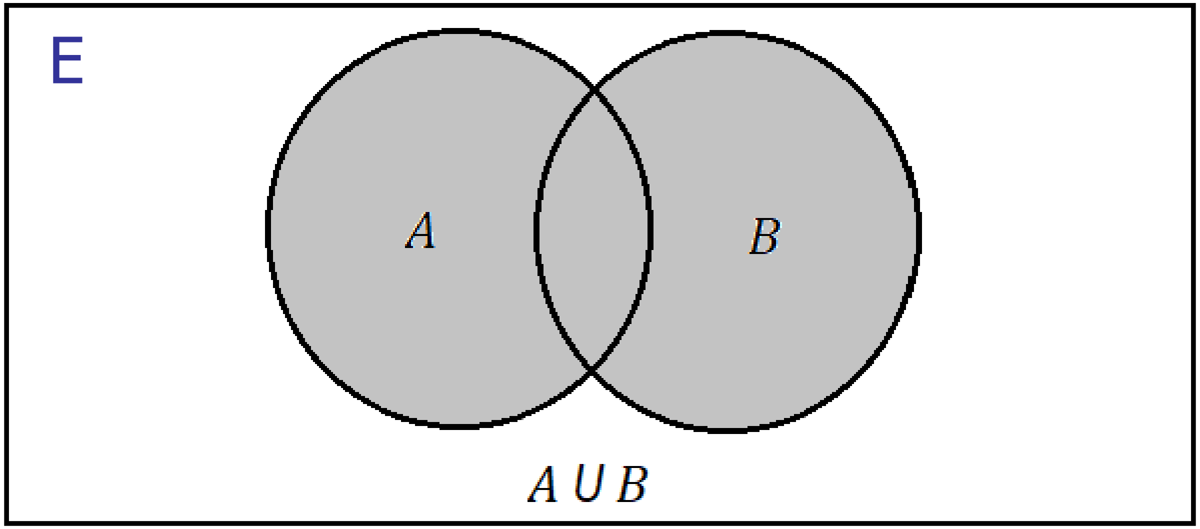
4) $\varnothing \cap A = \varnothing$ qualquer que seja o conjunto A

União de Conjuntos

Chama-se de união de dois conjuntos A e B que pertencem a um universo E, todos aqueles elementos que pertencem a A ou B (inclusivo)

Indica-se a União por $A \cup B$

$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



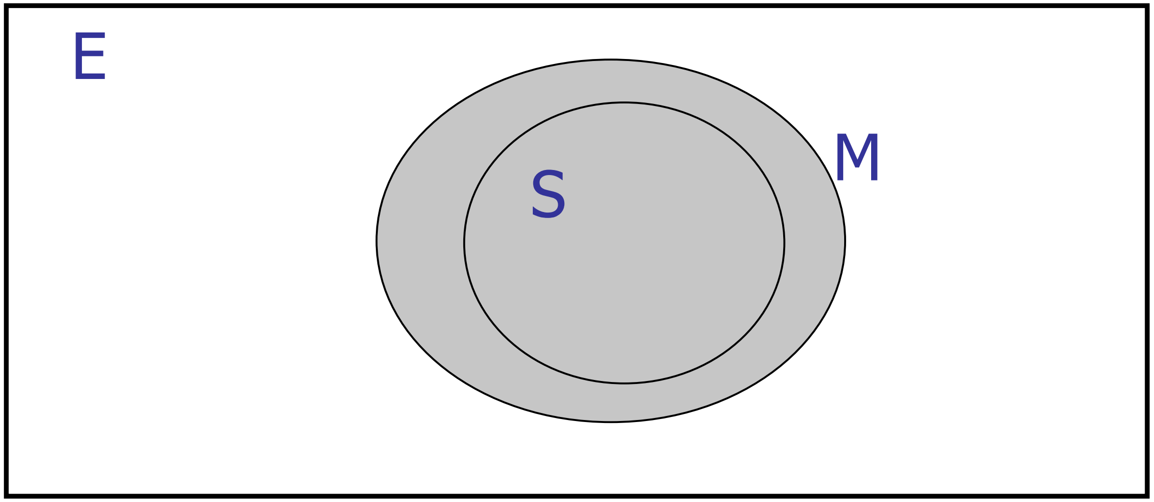
União de Conjuntos

Exemplos e propriedades

1) Sendo A= {2,3,5,7} e B= {2,4} então A ∪ B= {2,3,4,5,7}

2) Sendo G= {2,4,6,8} e H= {5,7,9} então G ∪ H= {2,4,5,6,7,8,9}

3) Sendo M= {1,2,3,4,5} e S= {1,2,3} então M ∪ S= M



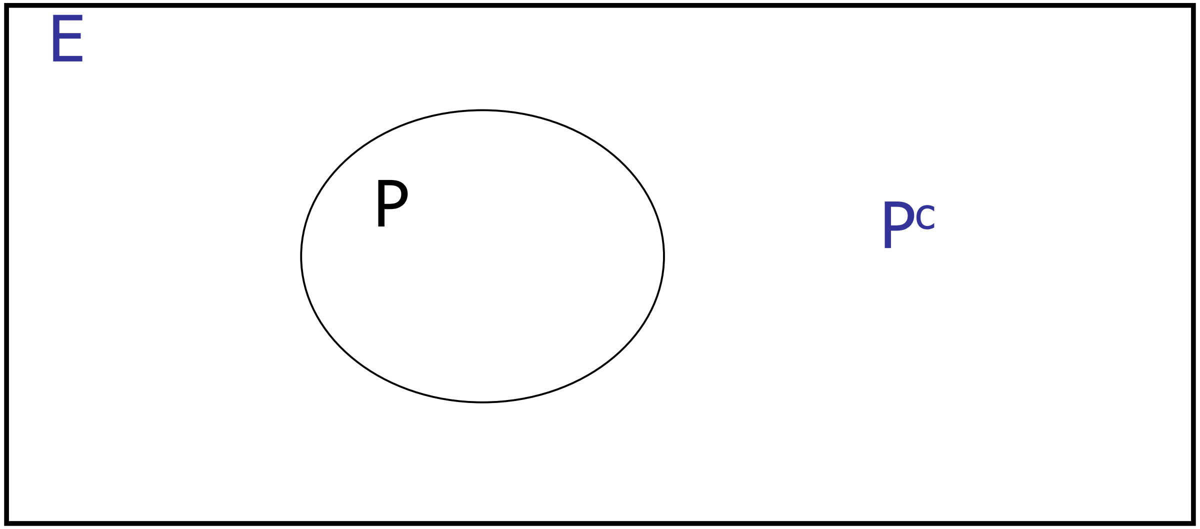
Ou seja, se $S \subset M$ então M ∪ S= M

Complementar de um Conjunto

Dado um conjunto P qualquer contido num universo E, chama-se de complementar de P , denotado por P^c

O conjunto de todos os elementos que pertencem ao universo E, mas não pertencem a P

$P^c = \{x \in E \mid x \notin P\}$



Complementar de um Conjunto

Exemplos e propriedades

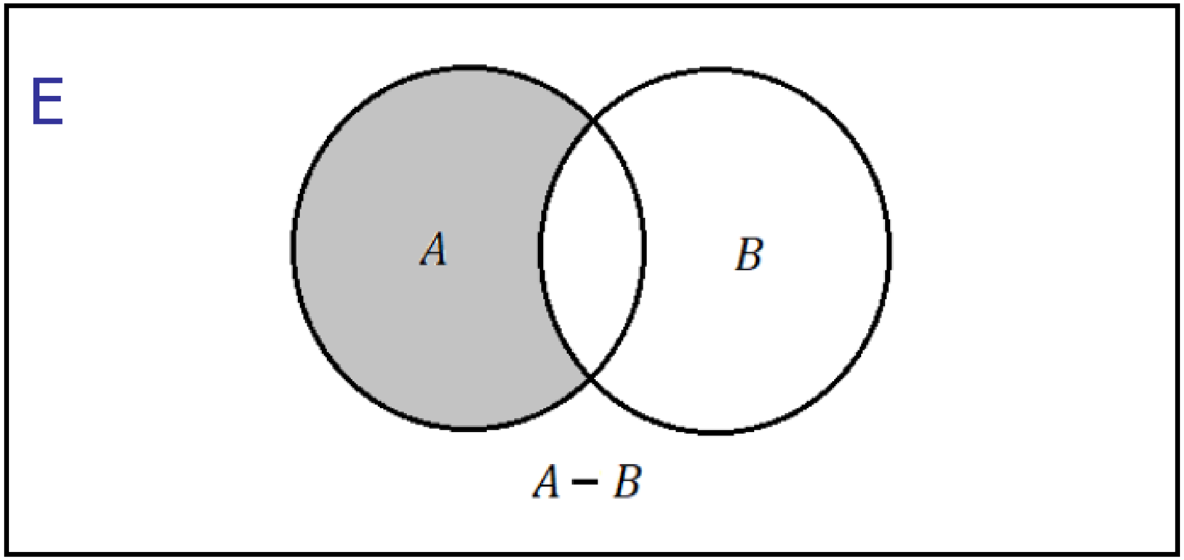
1) Sendo E= $\{2,3,5,7\}$ e P= $\{2,3\}$ então $P^c = \{5,7\}$

2) Sendo E= N e P=N^* então $P^c = \{0\}$

Diferença de Conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos contidos num universo E. Chama-se de diferença A-B o conjunto dos elementos do universo que pertencem a A, mas não pertencem a B

$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$



Diferença de Conjuntos

Exemplos e propriedades

1) Sendo A= {2,3,5,7} e B= {2,4} então A -B= {3,5,7}

2) Sendo G= {2,4,6,8} e H= {2,4,6} então G -H= {8} , H-G=∅

3) Sendo P= {2,4,6} e Q= {1,3,5} então P-Q=P

Propriedades

Considerando quaisquer conjuntos A, B e C num universo E, as seguintes propriedades são válidas

(P1) $A \cap A = A;$
$A \cup A = A.$

(P2) $A \cap B = B \cap A;$
$A \cup B = B \cup A.$

(P3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

(P4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(P5) $A \cap E = A;$
$A \cap \phi = \phi;$
$A \cup E = E;$
$A \cup \phi = A.$

(P6) $E^c = \phi;$
$\phi^c = E;$
$A \cup A^c = E;$
$A \cap A^c = \phi;$
$(A^c)^c = A.$

(P7) $A \cap (A \cup B) = A;$
$A \cup (A \cap B) = A.$

(P8) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c;$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

Execícios

10. Sendo $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule:

a) $A \cup C$
b) $B \cup C$
c) $A \cap B$
d) $A \cap C$
e) $A - C$
f) $C - A$
g) $A - B$
h) $B - A$
i) A^c
j) C^c
k) $(A \cup B)^c$
l) $(A \cap C)^c$
m) $(A - B)^c$
n) $(A - C)^c$
o) $(A - B) \cap C$
p) $(A - C) \cup (B - C)$

14. Sabendo-se que E representa o conjunto universo, determine os conjuntos:

a) $E \cup A$
b) $A \cup A$
c) ϕ^c
d) $\phi \cup A$
e) $A^c \cap A$
f) $A^c \cup A$
g) E^c
h) $E \cap A$
i) $E - A$
j) $A \cap A$
k) $A - \phi$
l) $A - E$

15. Verifique, por meio do diagrama de Venn, que:

a) $(A \cap B) \subset A$
b) $A \subset (A \cup B)$
c) $(A - B) \subset A$
d) $(A - B) \subset B^c$

17. Verifique, por meio do diagrama de Venn, que se $A \subset B$, então:

a) $A \cap B = A$
b) $A \cup B = B$