# Consultoria Especializada de Apoio ao Projeto Integrado: Matemática

# Função de 1º grau

Toda função do tipo

$y = ax + b$,

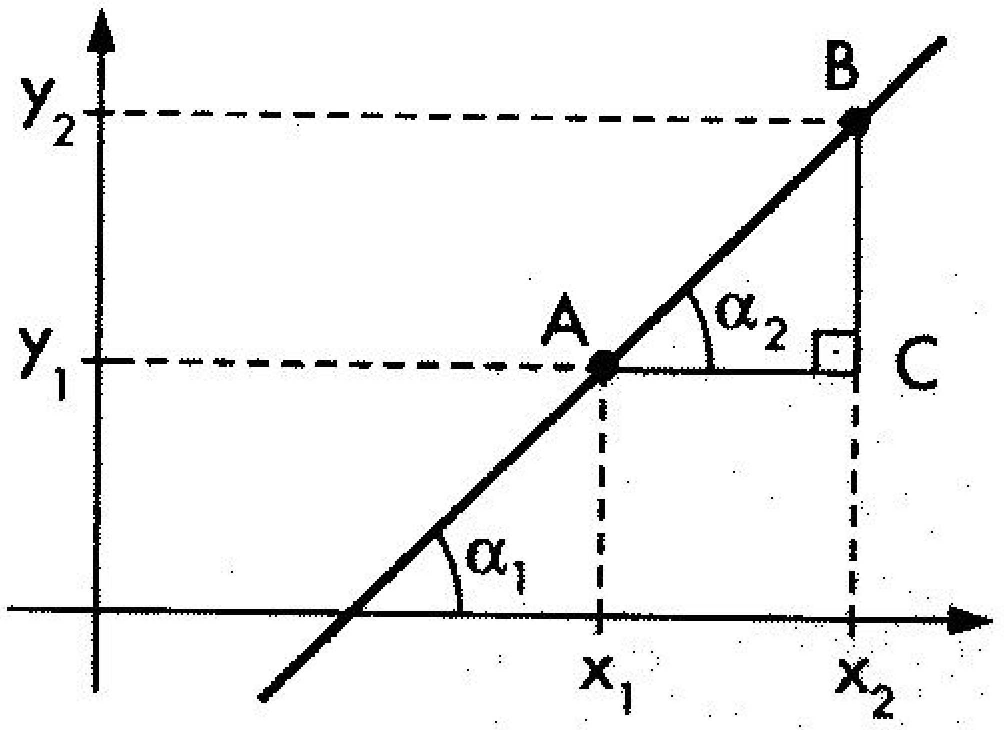
em que a e b $\epsilon$ $R$ e $a \neq 0$.

a = coeficiente angular
b = intercepto no eixo y
Ex: $y = 3x + 2 \Rightarrow a = 3$ e $b = 2$

Verifica-se que o gráfico de uma função de primeiro grau é uma reta, Assim o gráfico pode ser obtido por meio de dois pontos distintos

# Função de 1º grau

**Coeficiente angular →** a=$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



# Função de 1º grau

**Coeficiente angular →** a=$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

se $\Delta x$=1 então   a = $\Delta y$ (ou taxa média de variação da função)

- Quando a > 0 => a função de 1º grau é crescente, ou seja, x e y "andam" sempre no mesmo sentido ( se x aumenta, y aumenta e se x diminui, y diminui);

- Quando a < 0 => a função de 1º grau é decrescente , ou seja, x e y "andam" em sentidos opostos ( se x aumenta, y diminui e se x diminui, y aumenta);

- Quando a = 0 => a função de 1º grau é constante, ou seja, o valor de y será sempre o mesmo, independente do valor de x.

# Função de 1º grau

**Coeficiente angular**

Se conhecermos um ponto da função ($x_1$, $y_1$) e seu coeficiente angular (a), é possível obter a função de 1º grau.

Exemplo: seja a = 4 e ($x_1$, $y_1$) = (1,2)
4($x_2$ -1) = ($y_2$ -2)
$y_2$ = 4$x_2$ -4 + 2 = 4$x_2$ -2
Ou y = 4x –2

De forma análoga, se conhecermos dois pontos por onde passam a reta do gráfico da função de 1º grau, é possível obter a função:

Exemplo: Sejam ($x_1$, $y_1$) = (1,2) e ($x_2$, $y_2$) = (-3,6) dois pontos por onde passa a reta de uma dada função de 1º grau. Encontre a função.
a= $\frac{6-2}{-3-1}$ → a = $\frac{4}{-4}$ =-1

a=$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ sabendo que a = -1 → -1=$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ escolhendo por exemplo o primeiro par ordenado -1=$\frac{y_2-2}{x_2-1}$ = 1- $x_2$ = $y_2$ -2 logo $y_2$ = 3 - $x_2$
Generalizando para todo par (x,y)
y=3-x

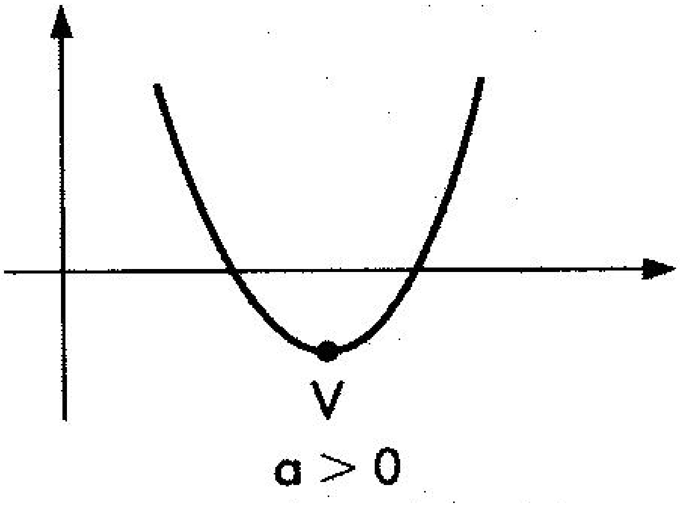
# Função de 2º grau

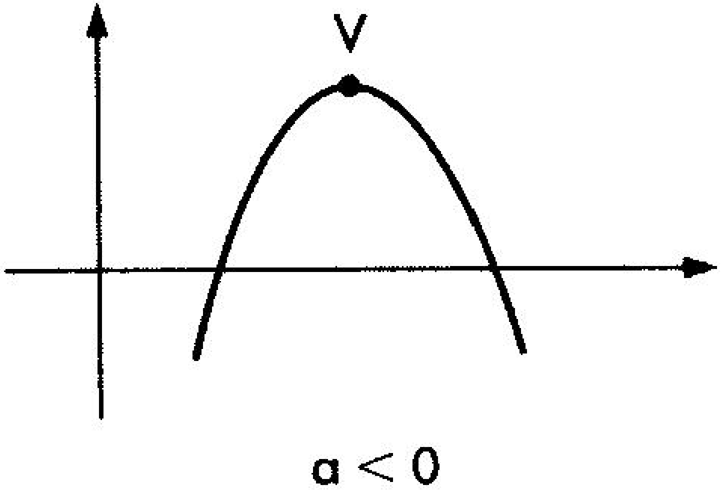
Toda função do tipo

$y = ax^2 + bx + c$ ,

em que a, b e c $\epsilon\ R$ e $a \neq 0$.

O gráfico da função de 2º grau é uma parábola com concavidade voltada para cima se $a>0$ e concavidade voltada para baixo se $a<0$.



# Função de 2º grau

As raízes ( $x_1$ $e$ $x_2$) da função de 2º grau (ou interceptos no eixo x ) podem ser encontradas utilizando Bhaskara

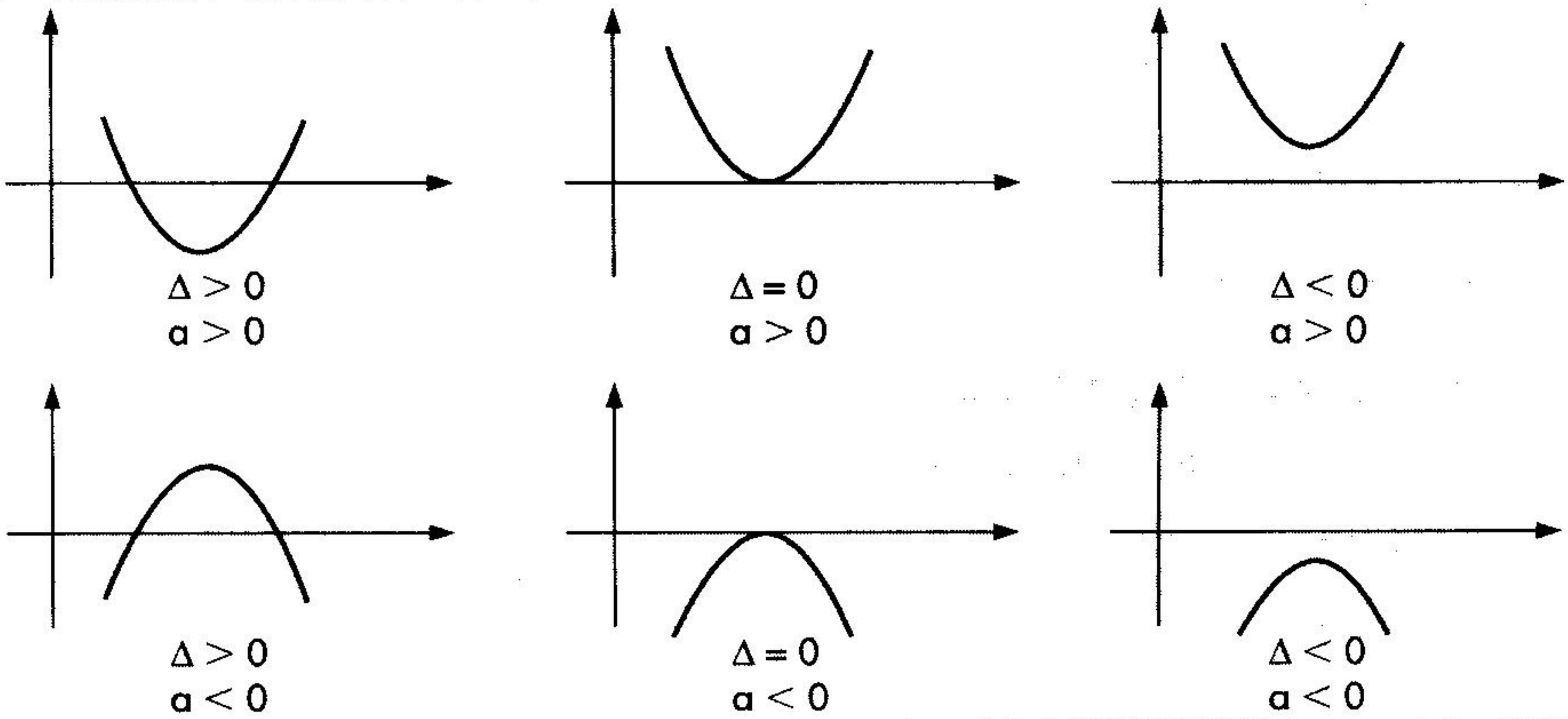
$\Delta = b^2 - 4ac$
$x_1 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a$
$x_2 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2^a$

Se $\Delta > 0$ => $x_1$ $e$ $x_2$ são diferentes (dois pontos de intersecção no eixo)

Se $\Delta = 0$ => $x_1$ $e$ $x_2$ são iguais

Se $\Delta < 0$ => não existem raízes reais (não tem intersecção no eixo x)

# Função de 2º grau



# Função Polinomial

É toda função cuja imagem é um polinômio da variável x, isto é, f(x) é uma função polinomial de grau n se:

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

em que $a_{0,}\ a_{1,..}a_n$ são números reais e $a_0 \neq 0$.

Ex: $f(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1$ : função polinomial de grau 5

**i)** função polinomial de grau zero (n=0): função constante
Exemplo: f(x) = 4 => reta horizontal paralela ao eixo x

ii) função polinomial de grau 1 (n=1): função de 1º grau
Exemplo: f(x) = 2x + 4 => gráfico é uma reta

**iii) função polinomial de grau 2 (n=2): função de 2º grau**
Exemplo: f(x) = $x^2$ + 2x –3 => gráfico é uma parábola

**iv) função polinomial de grau 3 (n=3): função de 3º grau**
Exemplo: f(x) = $2x^3 + 6x^2 - 7x + 9$ => gráfico não é feito com recursos elementares, utilizar limites e derivadas.

# Função Polinomial

É toda função cuja imagem é um polinômio da variável x, isto é, f(x) é uma função polinomial de grau n se:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

em que $a_{0,}\ a_{1,..}a_{\mathrm{n}}$ são números reais e $a_0 \neq 0$.

Ex: $f(x)= 3x^5+7x^4+2x^3+ x^2 +3x+1$ : função polinomial de grau 5

**i)** função polinomial de grau zero (n=0): função constante
Exemplo: f(x) = 4 => reta horizontal paralela ao eixo x

ii) função polinomial de grau 1 (n=1): função de 1º grau
Exemplo: f(x) = 2x + 4 => gráfico é uma reta

**iii) função polinomial de grau 2 (n=2): função de 2º grau**
Exemplo: f(x) = $x^2$+ 2x –3 => gráfico é uma parábola

**iv) função polinomial de grau 3 (n=3): função de 3º grau**
Exemplo: f(x) = 2$x^3$+ 6$x^2$−7x + 9 => gráfico não é feito com recursos elementares, utilizar limites e derivadas.

# Função Racional

É toda função cuja imagem é o quociente de dois polinômios, sendo o denominador um polinômio não nulo:

Ex: f(x)= $\frac{x-3}{x^2-3x+2}$  $Df=\{x\in R/x\neq 1 \text{ou } x\neq 2\}$

f(x)= $\frac{x-1}{x+1}$  $Df=\{x\in R/x\neq -1\}$

Nessa classe de funções tem especial interesse a função recíproca, cujo gráfico é uma **Hipérbole**

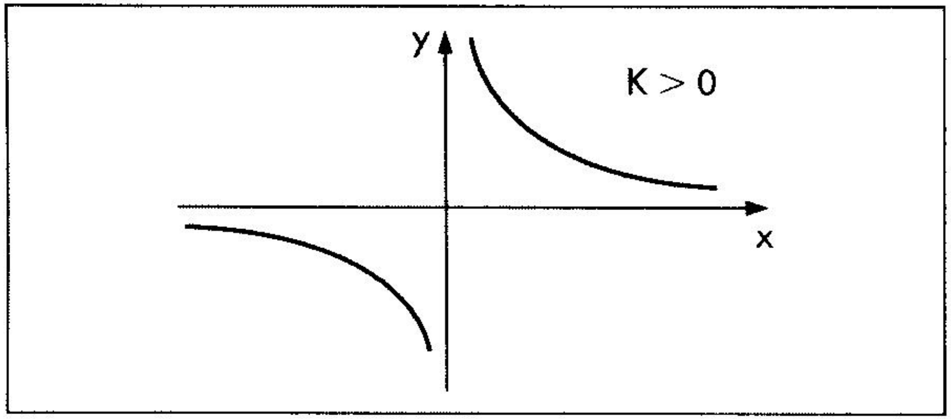
De maneira geral definida como **f(x) =** $\frac{k}{x}$ em que k é uma constante $\in R$.

# Função Racional

Podemos agrupar a análise das hipérboles de acordo com o sinal de k: a) se k > 0 ; ou, b) se k < 0.

Caso 1: K> 0 $\boldsymbol{Df} = \boldsymbol{R}^*$ (todos os reais sem incluir o zero)

Figura 3.46: Gráfico da função $f(x) = K/x$, com $K > 0$.




Domínio: $\boldsymbol{Df}=\boldsymbol{R}*$

•Interceptos: não possui interceptos:
•Intervalos de crescimento e decrescimento: f(x) é decrescente para qualquer valor de x.

•Sinal da função (ou do y): se x > 0 => y > 0 e se x < 0 => y < 0

•Gráfico: gráfico com ramos no 1º e 3º quadrantes

Gráfico com ramos no 1º e 3º quadrantes:
a medida que x aumenta, y diminui e tende a zero;
$\mathbf{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{0}$

a medida que x diminui, y aumenta e tende a zero;
$\boldsymbol{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{0}$

a medida que x se aproxima de zero por valores positivos, y fica cada vez maior (tende ao infinito positivo);
$\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{0}+ \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow +\infty$

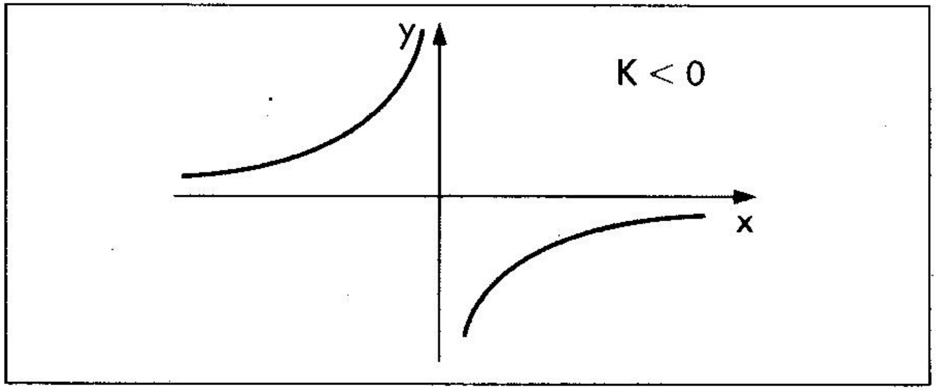
a medida que x se aproxima de zero por valores negativos, y fica cada vez menor (tende ao infinito negativo);
$\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{0}- \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow -\infty$

# Função Racional

Podemos agrupar a análise das hipérboles de acordo com o sinal de k: a) se k > 0 ; ou, b) se k < 0.

Caso 2: K< 0 $\boldsymbol{Df} = \boldsymbol{R}^*$ (todos os reais sem incluir o zero)

Figura 3.47: Gráfico da função $f(x) = K/x$, com $K < 0$.




Domínio: $\boldsymbol{Df}=\boldsymbol{R}*$

•Interceptos: não possui interceptos:
•Intervalos de crescimento e decrescimento: f(x) é crescente para qualquer valor de x.

•Sinal da função (ou do y): se x > 0 → y < 0 e se x < 0 → y >0

•Gráfico: gráfico com ramos no 2º e 4º quadrantes

Gráfico com ramos no 2º e 4º quadrantes

a medida que x aumenta, y aumenta e tende a zero;
$\mathbf{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{0}$

a medida que x diminui, y diminui e tende a zero;
$\boldsymbol{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow \mathbf{0}$

a medida que x se aproxima de zero por valores positivos, y fica cada vez menor (tende ao infinito negativo);
$\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{0}+ \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow -\infty$

a medida que x se aproxima de zero por valores negativos, y fica cada vez maior (tende ao infinito positivo);
$\boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{0}- \Rightarrow \boldsymbol{y} \rightarrow +\infty$

# Função Potência

Toda função do tipo

$$f(x) = x^n$$

em que $x$ é a base e n é o expoente.

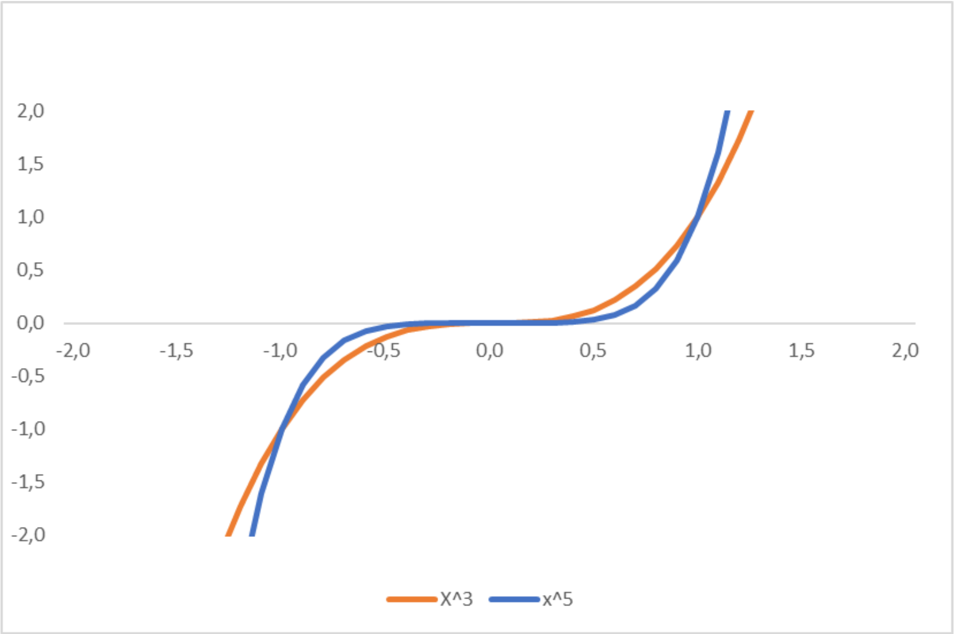
Para os casos particulares de n=0 ou n=1 ou n=2 já vimos anteriormente. Para outros valores de n o gráfico varia de acordo com a natureza de n.

Existem seis cenários de interesse

1º) n é numero natural ímpar > 1
2º) n é número natural par > 2
3º) n é ímpar negativo
4º) n é par negativo
5º) n = ½
6º) n = 1/3

# Função Potência

Cenário 1: n é numero natural ímpar > 1




- Domínio : $Df = R$

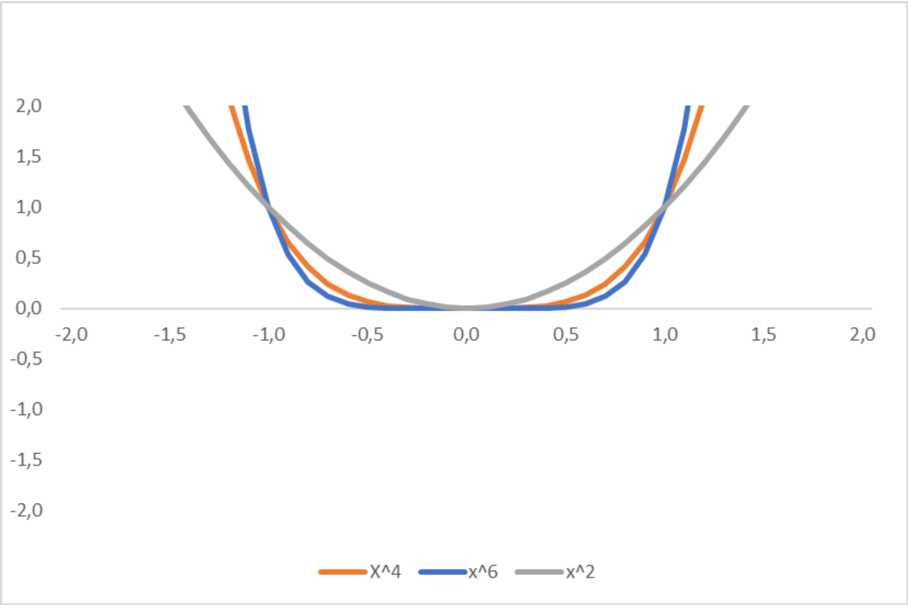
- Interceptos : Todas as funções do 1º cenário passam pela origem (0,0). Além disso, elas passam pelos pontos (1, 1) e (-1, -1)

- Intervalos de crescimento e decrescimento : f(x) é crescente para qualquer valor de x (quando x aumenta → y aumenta; quando x diminui → y diminui).

- Sinal da função : se x > 0 => y > 0 ; se x < 0 => y < 0

# Função Potência

Cenário 2: n é numero natural par ≥ 2




- Domínio : $Df=R$

- Interceptos : Todas as funções do 1º cenário passam pela origem (0,0). Além disso, elas passam pelos pontos (1, 1) e (-1, 1)

- Intervalos de crescimento e decrescimento : : se x > 0 => f(x) é crescente (quando x aumenta => y aumenta; quando x diminui → y diminui); se x < 0 → f(x) é decrescente (quando x aumenta → y diminui; quando x diminui → y aumenta);
- Sinal da função : y > 0 para qualquer valor de x

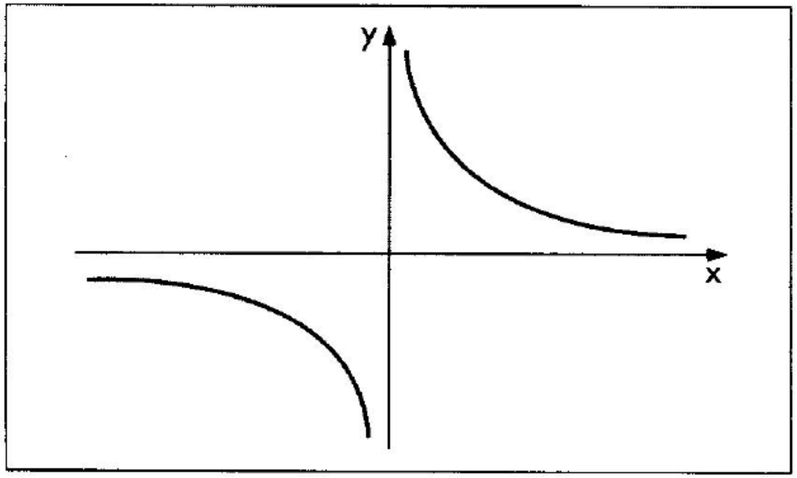
# Função Potência

Cenário 3: n é ímpar negativo

- Esse caso é uma extensão da hipérbole vista no tópico de funções racionais.

$x^{-1} = 1/x$

As regras aqui se aplicam para
Os demais valores impares negativos




Domínio: $\boldsymbol{Df} = \boldsymbol{R}*$

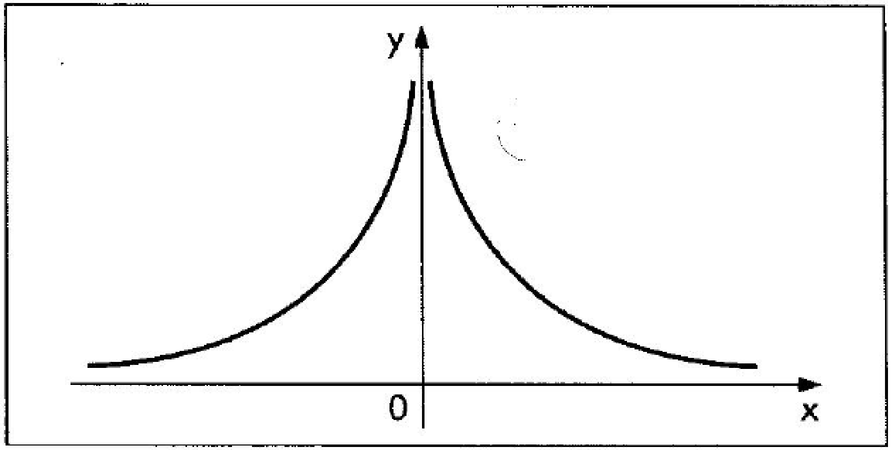
- Interceptos: não possui interceptos
- Intervalos de crescimento e decrescimento: f(x) é decrescente para qualquer valor de x.
- Sinal da função (ou do y): se x > 0 => y > 0 e se x < 0 => y < 0
- Gráfico: gráfico com ramos no 1º e 3º quadrantes

# Função Potência

Cenário 4: n é par negativo

- De forma similar ao cenário anterior,.

$x^{-2} = 1/x^{2}$




As regras aqui se aplicam para
Os demais valores pares negativos

- Domínio: $\boldsymbol{Df = R*}$

- Interceptos: não há

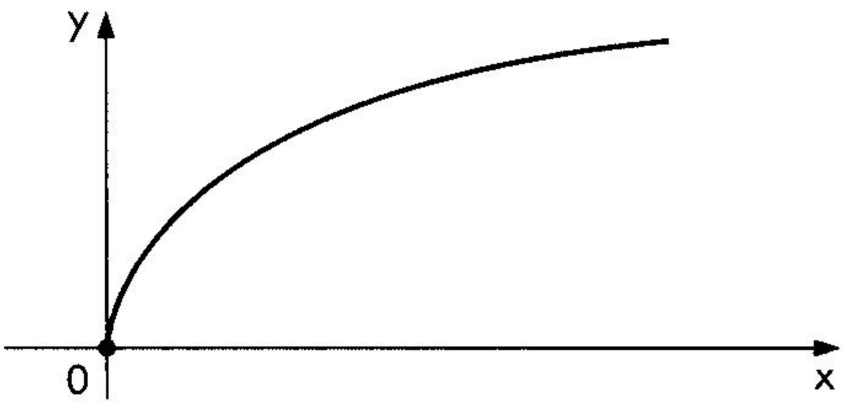
- Intervalos de crescimento e decrescimento: se x > 0 → f(x) é decrescente (quando x aumenta → y diminui; quando x diminui → y aumenta); se x < 0 → f(x) é crescente (quando x aumenta => y aumenta; quando x diminui → y diminui);

- Sinal da função: y > 0 para qualquer valor de x.

# Função Potência

Cenário 5: n = 1/2

$x^{1/2} = \sqrt{x}$

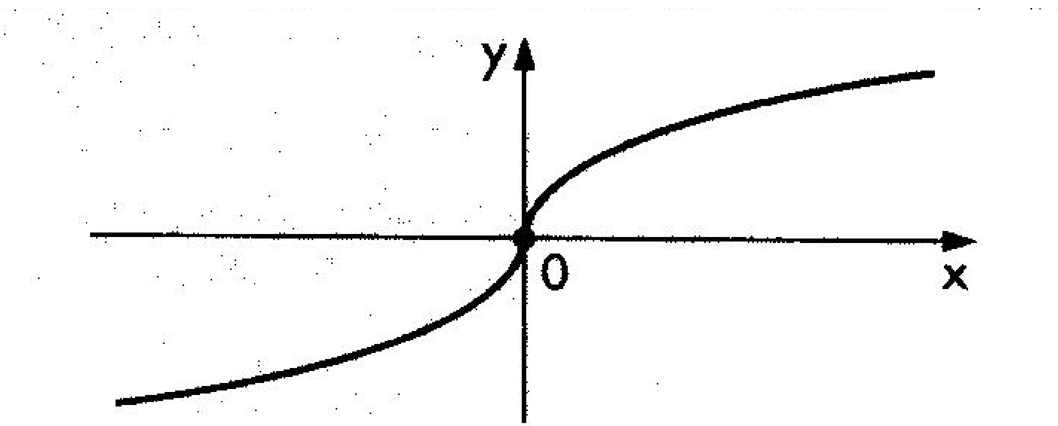



- Domínio: $\boldsymbol{Df = R+}$
- Interceptos: (0,0)
- Intervalos de crescimento e decrescimento: f(x) é crescente para qualquer valor de x (quando x aumenta → y aumenta ; quando x diminui → y diminui);
- Sinal da função: y > 0 para qualquer valor de x.

# Função Potência

Cenário 6: n = 1/3

$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$




- Domínio: $\boldsymbol{Df = R}$

- Interceptos: (0,0)

- Intervalos de crescimento e decrescimento: f(x) é crescente para qualquer valor de x (quando x aumenta → y aumenta ; quando x diminui → y diminui);

- Sinal da função: se x > 0 → y > 0 ; se x < 0 → y < 0

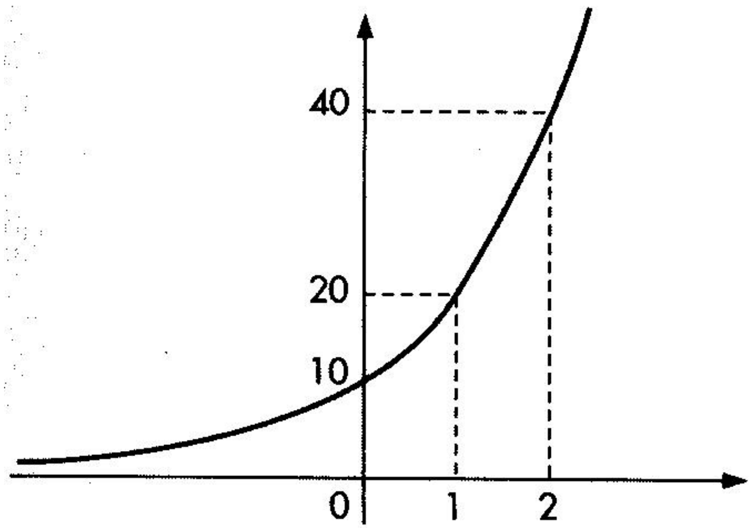
# Função Exponencial

Toda função do tipo

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = a^x$$

em que a é uma constante positiva e x é o expoente.

Para a > 1




Domínio : $Df = R$

Interceptos : (0,1)

Intervalos de crescimento e decrescimento : f(x) é crescente para qualquer valor de x (quando x aumenta → y aumenta; quando x diminui → y diminui);

Sinal da função : se x > 0 → y > 0 ; se x < 0 → y > 0, ou seja, y>0 para qualquer valor de x

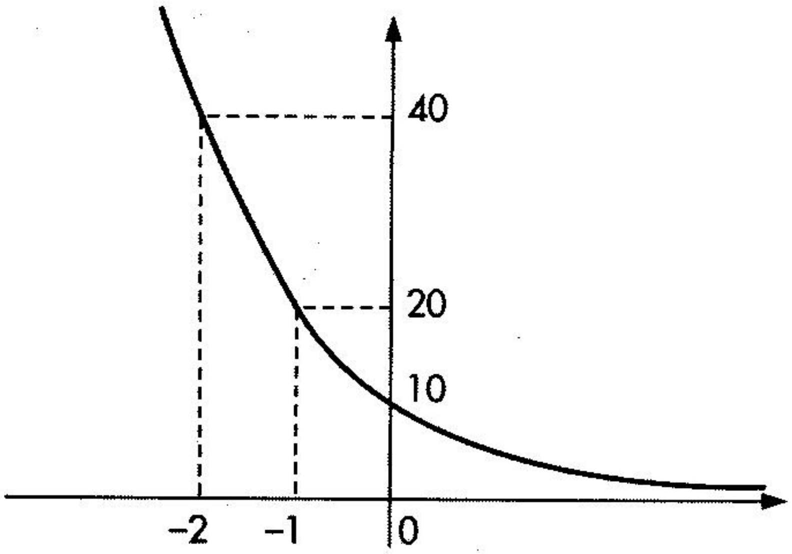
# Função Exponencial

Toda função do tipo

$$f(x) = a^x$$

em que a é uma constante positiva e x é o expoente.

Para 0< a < 1




Domínio : $Df=R$

Interceptos : (0,1)

Intervalos de crescimento e decrescimento : f(x) é decrescente para qualquer valor de x (quando x aumenta → y diminui ; quando x diminui → y aumenta);

Sinal da função : se x > 0 => y > 0 ; se x < 0 => y > 0, ou seja, y>0 para qualquer valor de x

# Função Exponencial

A função exponencial é muito usada em modelos de crescimento .
Por exemplo: Uma população tem 40.000 habitantes e cresce na taxa de 2% ao ano.

Depois de um ano a população será
$y_1 = 40.000 + 2\%. 40.000 = 40.000\ (1+0,02)$
$y_2 = y_1 + 2\%. y_1 = 40.000\ (1,02)^2$
$y_3 = y_2 + 2\%. y_2 = 40.000\ (1,02)^3$

De modo análogo, daqui x anos a população será $40.000\ (1,02)^x$

$e^x$

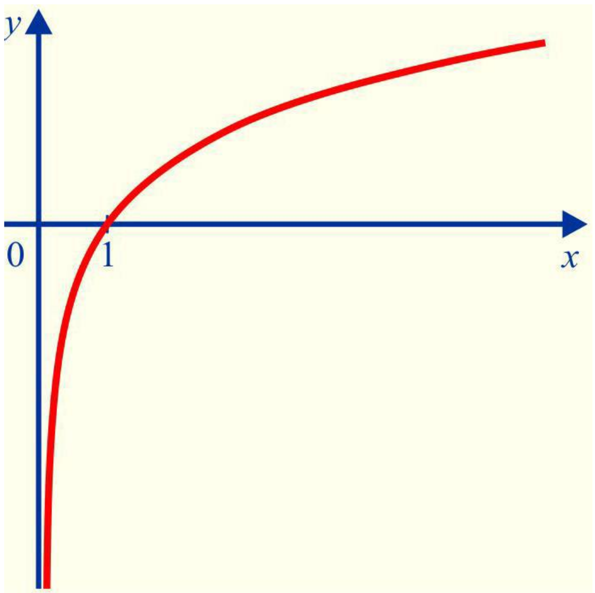
# Função Logarítmica

Toda função do tipo
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \log_a x$

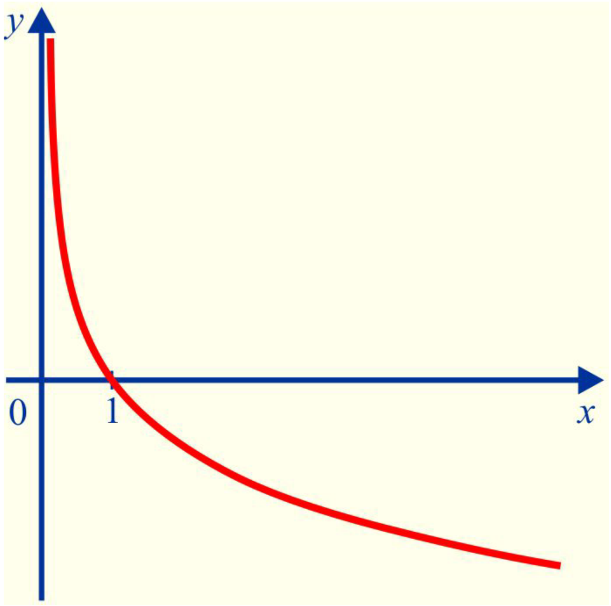
é denominada função logarítmica na base a.

As funções logarítmicas serão analisadas de acordo com

se a > 1:
função crescente

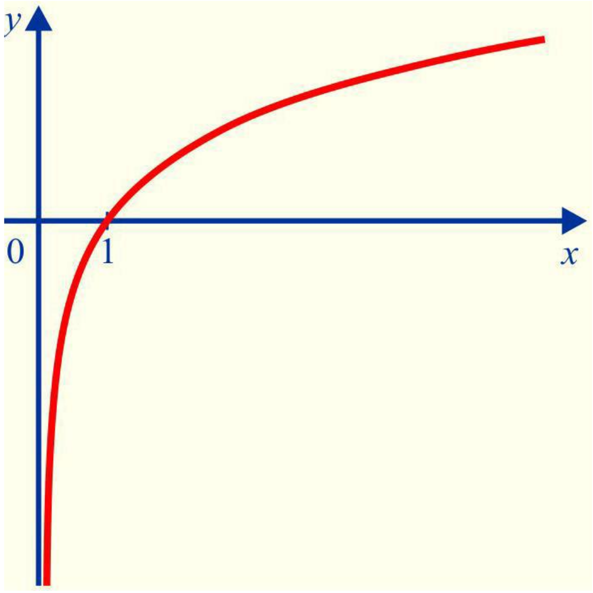



se 0 < a < 1:
função decrescente



# Função Logarítmica

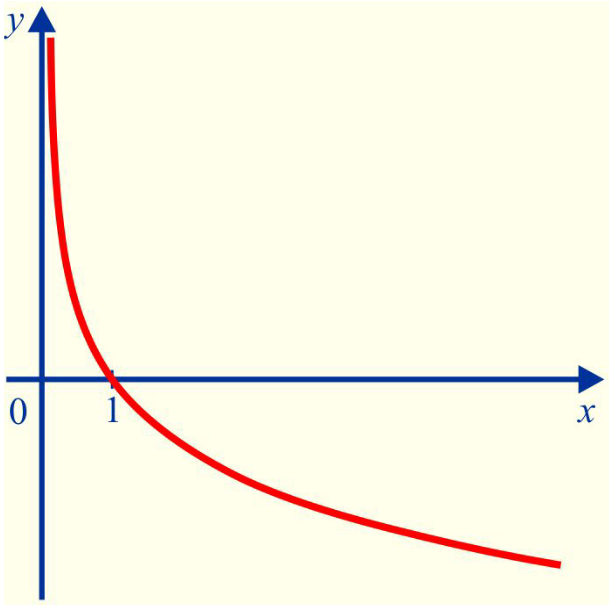
Se a>1




- Domínio: $Df = R+*$
- Interceptos: Todas as funções deste grupo passam pelo ponto (1,0). Não há intercepto no eixo y.
- Intervalos de crescimento e decrescimento: f(x) é crescente para qualquer valor de x (quando x aumenta → y aumenta; quando x diminui → y diminui).
- Sinal da função: se x > 1 → y > 0 ; se 0< x < 1 → y < 0

# Função Logarítmica

Se $0 < a < 1$




- Domínio: $Df = R+*$
- Interceptos: Todas as funções deste grupo passam pelo ponto (1,0). Não há intercepto no eixo y.
- Intervalos de crescimento e decrescimento: f(x) é decrescente para qualquer valor de x (quando x aumenta => y diminui; quando x diminui => y aumenta).
  - Sinal da função: se x > 1 → y < 0 ; se 0< x < 1 → y > 0

# Exercícios

## Função de primeiro grau

28. Obtenha o coeficiente angular da reta que passa por $A$ e $B$ nos seguintes casos:

a) $A(1, 2)$ e $B(2, 7)$

b) $A(0, 3)$ e $B(2, 5)$

c) $A(-1, 4)$ e $B(3, 5)$

d) $A(-2, 1)$ e $B(5, -2)$

29. Obtenha a equação da reta que passa por $P$ e tem coeficiente angular $m$ nos seguintes casos:

a) $P(1, 3)$ e $m = 2$

b) $P(0, 0)$ e $m = 3$

c) $P(-1, 4)$ e $m = -1$

d) $P(-1, -2)$ e $m = 2$

e) $P(0, -4)$ e $m = -3$

f) $P(-2, 0)$ e $m = -1$

# Exercícios

## Função de segundo grau

89. Estude o sinal das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x}$

90. Dê o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x^2 - 6x}}$

# Exercícios

## Função Racional e Potência

112. Obtenha o ponto de equilíbrio de mercado para as seguintes funções de demanda e oferta:

a) demanda: $p = \dfrac{10}{x}$

oferta: $p = 5x + 5$

b) demanda: $p = \dfrac{8}{x}$

oferta: $p = 6x + 2$

117. Obtenha o ponto de equilíbrio de mercado para as seguintes funções de demanda e oferta:

a) demanda: $p = \dfrac{1}{x^2}$, oferta: $p = x$;

b) demanda: $p = \dfrac{1}{x^2}$, oferta: $p = x^3$.

Observação: ponto de equilíbrio  oferta = demanda

# Exercícios

## Função exponencial

126. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 7.000 e cresce a uma taxa de 3% ao ano.

*a)* Qual o número de habitantes daqui a 8 anos?

*b)* Qual o número de habitantes daqui a 30 anos?

127. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 8.000 e cresce exponencialmente a uma taxa $k$ ao ano. Se daqui a 20 anos o número de habitantes for 16.000, qual a taxa de crescimento anual?

128. A que taxa anual deve crescer exponencialmente uma população para que dobre após 25 anos?

# Exercícios

## Função logarítimica

157. Um digitador após $t$ dias de experiência consegue digitar $p$ palavras por minuto. Suponha que $p = 60 - 55e^{-0,1t}$.

a) Quantas palavras ele digitava por minuto quando não tinha experiência?

b) Quantas palavras digitará por minuto após 20 dias de experiência?

Dado: $e^{-2} = 0,14$.

c) Quantas palavras conseguirá digitar por minuto no máximo?

d) Esboce o gráfico de $p$ em função de $t$.

152. Estudos demográficos feitos em certo país estimaram que sua população daqui a $t$ anos será $P = 40 \cdot (1,05)^t$ milhões de habitantes. Daqui a quanto tempo a população dobrará?

Observação: ponto de equilíbrio oferta = demanda