Cálculo I

Regra da Cadeia

Considere a função $f(x)=(x^2-1)^3$ É possível achar a derivada de $f(x)$ calculando o cubo da função que está no parênteses.

Entretanto poderíamos adotar a transformação $x^2 - 1 = u$ para simplificar a conta, daí teremos que nossa função seria u^3

Dessa forma, para calcular a imagem da função seriam necessários dois passos

1) Para um dado valor de x calculamos o valor de $u = x^2-1$
2) Para o valor de u encontrado calcula-se $v=u^3$

Regra da Cadeia

Podemos então dizer que f(x) é a composição das funções u e v de forma intuitiva, temos que

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Percebe-se que quando Δx tende a 0 $\Delta \mathrm{u}$ também tende a zero

Dessa forma, f’(x)=v’(u). u’(x)

Ou seja,
f’(x)=(derivada de v em relação a u). (derivada de u em relação a x)

Essa é a chamada <u>REGRA DA CADEIA</u>

Regra da Cadeia

Voltando então ao nosso exemplo.

$f(x)=(x^2-1)^3$
$u=(x^2-1)$
$v=u^3$

$f'(x)=v'(u).\ u'(x)$
$v'(u)= 3.u^2$
$u'(x)=2x$

$f'(x)= 3.u^2\ 2x$ sabemos que $u=x^2-1$
$f'(x) = 3\ (x^2-1)^2\ 2x = 6x(x^2-1)^2$

Regra da Cadeia

Outro exemplo...

Qual a derivada de ln (3x+6)?

Regra da Cadeia

Outro exemplo...

Qual a derivada de ln (3x+6)?

Fazendo $u=3x+6$
Temos que $v=\ln(u)$

Regra da Cadeia

Outro exemplo...

Qual a derivada de ln (3x+6)?

Fazendo u=3x+6
Temos que v=ln(u)

Lembrando que f'(x)=v'(u). u'(x)

f'(x)= $\frac{1}{u}$. 3   então f'(x)= $\frac{1}{3x+6}$. 3 = $\frac{1}{x+2}$

Regra da Cadeia

Outro exemplo...

Qual a derivada de $\ln(3x+6)$?

Fazendo $u=3x+6$
Temos que $v=\ln(u)$

Lembrando que $f'(x)=v'(u).\ u'(x)$

Derivada de função Exponencial

Se f(x)= a^x então f′(x)= a^x ln a (sendo a> 0 e a ≠ 1)

Exemplo 1:

f(x)= e^x então f′(x)= e^x ln e → ln e =1 logo f′(x)= e^x

Exemplo 2:

f(x)= 3^x então f′(x)= 3^x ln 3

Derivada de função Exponencial

Exemplo 3:

f(x)= e^{x^2+3x-5} usando a regra da cadeia, fazemos u= $x^2 + 3x - 5$

v= e^u

f'(x)= v'(u). u'(x)
f'(x)= e^u ln e . (2x+3) = e^{x^2+3x-5}. (2x+3)

Exercícios

1 Obtenha a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = (2x-1)^3$

b) $f(x) = (2x-1)^4$

c) $f(x) = (5x^2 - 3x + 5)^6$

d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1\right)^3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x - 2)^5}$

f) $f(x) = \ln(3x^2 - 2x)$

g) $f(x) = e^x + 3^x$

h) $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$

Funções Marginais

Dada uma função f(x), utiliza-se o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em f(x) por uma pequena variação de x. Chama-se função marginal de f(x) à sua função derivada. Dessa forma, a função custo marginal é a derivada da função custo e a função receita marginal é a derivada em relação à receita.

Exemplo: Considere a função de custo de x unidades de produção de um produto como sendo

C(x)= $0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$

Seu custo marginal será:

C′(x)= $0{,}03x^2 - x \quad + 300$

Custo Marginal

Exemplo: Considere a função de custo de x unidades de produção de um produto como sendo

C(x)= $0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$

Seu custo marginal (C_{mg}) será:

C'(x)= $0{,}03x^2 - x \quad + 300$

Como interpretar??
Custo marginal é a variação de custo decorrente da produção de uma unidade adicional, a partir de x unidades, ou seja, para x=10 o custo marginal será

C'(10)= $0{,}03 * 10^2 - 10 \quad + 300$ =293

Isto é para a produção da 11ª unidade custaria 293 que representa aproximadamente C(11) - C(10)

Custo Marginal

C(x)= $0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$

C(11)= $0{,}01 * 11^3 - 0{,}5 * 11^2 + 300 * 11 + 100 = 3352{,}81$

C(10)= $0{,}01 * 10^3 - 0{,}5 * 10^2 + 300 * 10 + 100 =$ 3060

C(11)-C(10)=292,81

Receita Marginal

Seja R(x) a função de receita de vendas de x unidades de um produto

Receita Marginal - R_{mg} – será R'(x)

Exemplo: Considere a função de receita de x unidades vendidas um produto como sendo

$R(x) = -2x^2 + 1000x$

Sua receita marginal (R_{mg}) será:

$R'(x) = -4x \quad + 1000$

Calculando a receita marginal no ponto x=50, temos

$R_{mg}(50) = -4*50+1000=800$ ou seja a receita cresce em 800 se a empresa sair de uma venda de 50 produtos para 51.

Exercícios

Capitulo 5: MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

1 Dada a função custo $C(x) = 50x + 10.000$, obtenha o custo marginal e interprete o resultado.

2 Dada a função custo $C(x) = 0,3x^3 - 2,5x^2 + 20x + 200$, obtenha:

a) o custo marginal C_{mg};

b) $C_{mg}(5)$ e a interpretação do resultado;

c) $C_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado.

3 Dada a função receita $R(x) = 100x$, obtenha a receita marginal e interprete o resultado.

4 Dada a função receita $R(x) = -4x^2 + 500x$, obtenha:

a) a receita marginal R_{mg};

b) $R_{mg}(10)$ e a interpretação do resultado;

c) $R_{mg}(20)$ e a interpretação do resultado.