Cálculo I

Derivadas de ordem Superior

Dada uma função f(x) e sua derivada f'(x). Se calcularmos a derivada de f'(x) e ela existir, podemos chamar de f''(x) ou derivada de segunda ordem. De modo análogo podemos repetir o processo pela terceira ou quarta vez e teremos as derivadas de terceira e quarta ordem.

E assim sucessivamente a derivada de ordem n, será representada por $f^{(n)}$(x) para evitar o acúmulo de linhas.

Exemplo: Considere a função f(x)= $4x^3-2x^2+6x-4$ então:

f'(x)= $12x^2-4x+6$

f''(x)= $24x-4$

f'''(x)= 24

$f^{(4)}$(x)=0

Exercícios

1 . Obtenha a derivada terceira das funções:

a) $f(x) = 6x^3 - 4x^2 - 10$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = \text{sen } x$

e) $f(x) = \ln x$

f) $f(x) = \text{sen } x + \cos x$

g) $f(x) = e^x + e^{-x}$

Máximos e Mínimos por meio da segunda derivada

Definição: Se existe um ponto c no domínio de f(x) tal que $f'(c)=0$ esse ponto pode ser de máximo ou de mínimo.

A dúvida é, se $f'(c)=0$ como saber se esse é um ponto de máximo, de mínimo ou nenhum dos dois?

A segunda derivada indica se o ponto em questão é de máximo ou de mínimo

- Sendo c um ponto de máximo, $f''(c) < 0$
- Sendo c um ponto de mínimo, $f''(c) > 0$

Máximos e Mínimos por meio da segunda derivada

Exemplo: Considere a função $f(x)=x^2 - 4x$

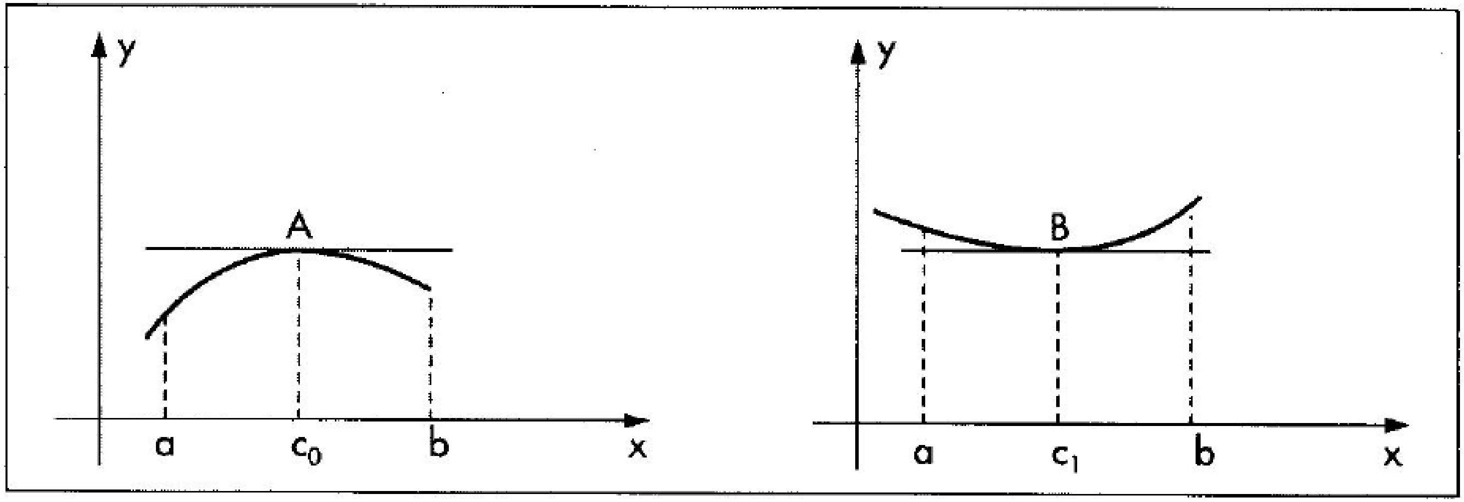
logo $f'(x)=2x-4$

$2x-4=0 \rightarrow x=2$ então se $x=2$ é um candidato a ponto de máximo ou mínimo

$f''(x)=2 \rightarrow$ logo 2 é ponto de mínimo

Máximos e Mínimos por meio da segunda derivada

Suponha que c0 é um ponto de máximo e c1 é um ponto de mínimo



Sendo c0 um ponto de máximo, nas vizinhanças de c0 a função é côncava pra baixo, logo $f''(c)<0$
De forma análoga, c1 um ponto de mínimo, nas vizinhanças de c1 a função é côncava pra cima, logo $f''(c)>0$.

Obs. Se o domínio for o intervalo [a,b] , os pontos extremos do domínio, a e b, devem ser analisados a parte. O raciocínio vale para pontos internos do domínio.

Máximos e Mínimos por meio da segunda derivada

Exemplo: Encontre, se houver, os pontos de máximo e mínimo da função:

f(x)= $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}$ +4x +3

f′(x)= $x^2 - 5x$ +4 fazendo f′(x)=0

calculando a equação as raízes são x=1 ou x=4

f″ (x)=2x-5 f″(1)=-3 <0 x= 1 é ponto de máximo
f″ (x)=2x-5 f″(4)=3 >0 x= 4 é ponto de mínimo

Exercícios

1 Obtenha os pontos de máximo ou de mínimo (quando existirem) das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

b) $f(x) = 6x - x^2$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{7}{2}x^2 + 6x + 5$

d) $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 4x + 6$

e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

2. Dada a função receita $R(x) = -2x^2 + 10x$, obtenha o valor de x que a maximiza.

Exercícios

a) $f(x)=x^2 - 4x + 5$

$f'(x)= 2x-4$ $f'(x)=0 \rightarrow 2x-4=0$ $x=2$

$f''(x)=2$ $f''(x)>0$

Ponto de mínimo =2

b) $f(x)=6x-x^2$

$f'(x)=6-2x$ $f'(x)=0 \rightarrow 6-2x=0$ $x=3$

$f''(x)=-2$ $f''(x)<0$

Ponto de máximo =3

c) $f(x)=x^3/3 - 7x^2/2 + 6x + 5$

$f'(x)=x^2 - 7x + 6$

$f'(x)=0 \rightarrow$ raízes 1 e 6

$f''(x)=2x-7$ para $x=1$ $f''(x)=2.1-7= -5$ $f''(x)<0$

para $x=6$ $f''(x)=2.6-7= 5$ $f''(x)>0$

Ponto de máximo =1 Ponto de mínimo =6

Exercícios

d) $f(x)=- x^3/3 +4x +6$
$f'(x)=-x^2+4$
$f'(x)=-x^2+4 =0$ $x^2=4 \rightarrow$ raízes -2 e 2
$f'' (x)=-2x$ para $x=-2$ $f''(x)=4$ $f''(x)>0$
para $x=2$ $f''(x)=-4$ $f''(x)<0$
Ponto de máximo =2 Ponto de mínimo =-2

e) $f(x)=x +1/x$
$f'(x)=1-1/x^2$
$f'(x)= 1-1/x^2 =0$ $1/x^2=1 \rightarrow x^2=1$ raízes -1 e 1
$f'' (x)=2/x^3$ para $x=-1$ $f''(x)=-2$ $f''(x)<0$
para $x=1$ $f''(x)=2$ $f''(x)>0$
Ponto de máximo =-1 Ponto de mínimo =1