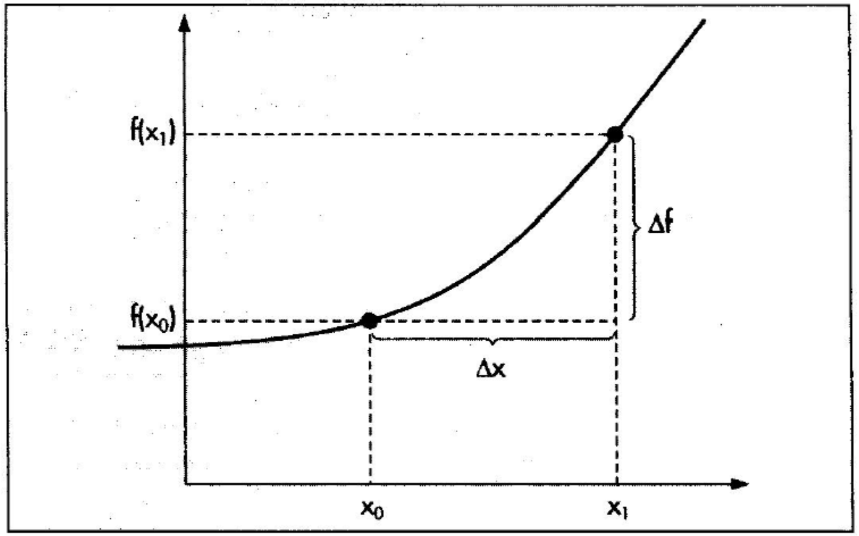
Cálculo I

Derivadas - Introdução

A ideia de derivada surgiu preliminarmente na física e foi incorporada em outras áreas de conhecimento. Na Economia e Administração o conceito de derivada é utilizado principalmente no estudo de gráficos determinação de máximo e mínimo e cálculo de taxas de variação de funções.

Introdução

Considere uma função f(x) e x_0 e x_1 dois pontos dentro do domínio da função. Sejam f(x_0) e $f(x_1)$ as correspondentes imagens, conforme o gráfico.



Podemos chamar a taxa de variação de f para x variando entre x_0 e x_1 de

$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ usamos a notação Δ para representar diferença daí $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

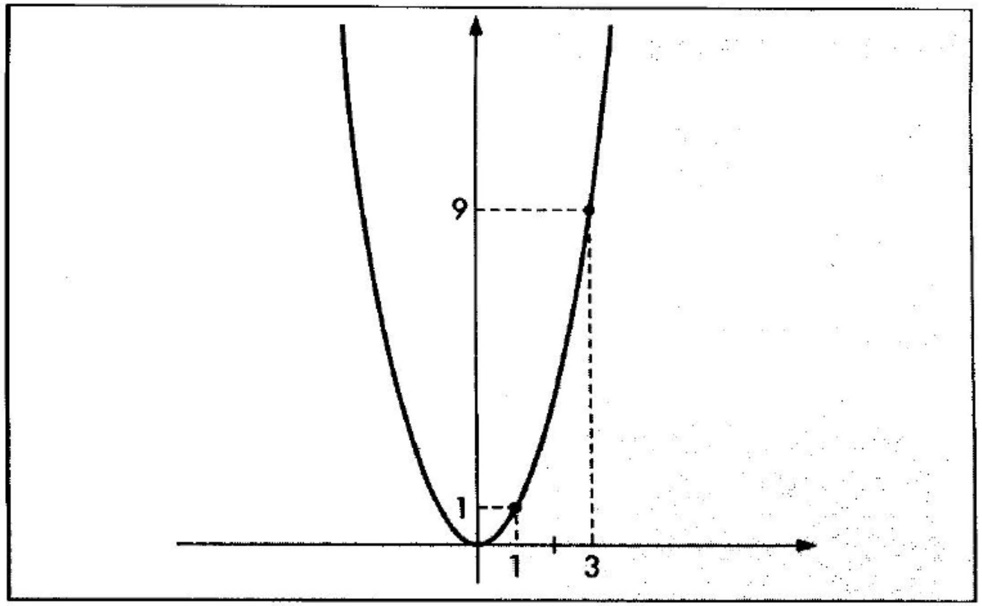
Introdução

Exemplo: Considere a função $f(x) = x^2$ sabendo que $x_0 = 1$ e $\Delta x=2$, determine a taxa média de variação destes valores.

Se $x_0 = 1$ e $\Delta x=2$ então $\Delta x= x_1 - x_0 \rightarrow x_1 = 3$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{3^2 - 1^2}{3-1} = 4$$

Isso significa que se x variar duas unidades, a partir de $x_0 = 1$, a variação de f será 4 vezes maior



Introdução

Exemplo2: Considere a função f(x) = x^2 considere agora um ponto genérico que $x_0 = \mathrm{x}$ e uma variação genérica $\Delta \mathrm{x}$, determine a taxa média de variação destes valores.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2\mathrm{x}\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = 2\mathrm{x} + \Delta x$$

x1=x0+Δx

Δf = f(x1) - f(x0)

$$= \frac{f(x+\Delta x\ ) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivada de uma função em um ponto

Seja f(x) uma função e x_0 um ponto em seu domínio, chamamos de derivada de f no ponto x_0 , se existir e for finito, o limite dado por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Indica-se derivada de f(x) no ponto x_0 por f'(x_0) ou $\frac{df}{\mathrm{d}x}(x_0)$ ou $\frac{dy}{\mathrm{d}x}(x_0)$

Derivada de uma função em um ponto

Exemplo 1: Qual a derivada do ponto x_0 =3 para a função f(x)=x² ?

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9+6\Delta x+\Delta x^2-9}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} 6 + \Delta x \qquad = 6$$

Derivada de uma função em um ponto

Exemplo2: Qual a derivada do ponto x_0 =-2 para a função f(x)=x² ?

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$$

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - (-2)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} -4 + \Delta x \qquad = -4$$

Derivada de uma função em um ponto

Exemplo 3: Existe a derivada da função |x| no ponto x_0 =0 ?

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Como nesse caso o limite tende a 1 quando Δx tende a 0 pela direita e tende a -1 quando Δx tende a 0 pela esquerda, os limites laterais são diferentes. Nesse caso não existe a derivada no ponto x_0 =0

Função Derivada

Dada a função f(x), podemos calcular a derivada de f(x) num ponto genérico ao invés de calcular num ponto específico x_0. Essa derivada é chamada de função derivada de f(x); o domínio dessa função é o conjunto de valores de x para os quais existe a derivada f(x)

Exemplo qual a derivada da função f(x)=x²?

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \qquad = 2x$$

Exercícios

1. Para cada função $f(x)$, determine a derivada $f'(x_0)$ no ponto x_0 indicado:

a) $f(x) = x^2$ $\qquad x_0 = 4$

b) $f(x) = 2x + 3$ $\qquad x_0 = 3$

c) $f(x) = -3x$ $\qquad x_0 = 1$

d) $f(x) = x^2 - 3x$ $\qquad x_0 = 2$

e) $f(x) = x^2 - 4$ $\qquad x_0 = 0$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad x_0 = 2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad x_0 = 5$

h) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ $\qquad x_0 = 6$

2. Determine a função derivada para cada função do exercício anterior.

Derivada das principais funções elementares

Derivada da função constante

Se f(x)= c (onde c é uma constante) então f'(x)= 0 para todo x.

Demonstração

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

Derivada das principais funções elementares

Derivada da função potência

Se f(x)= x^n então f'(x)= $n\,x^{n-1}$

Demonstracão

$$\Delta f = (x + \Delta x)^n - x^n,$$

e usando a fórmula do Binômio de Newton,

$$\Delta f = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot (\Delta x)^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}.$$

Para Δx tendendo a zero, todos os termos do 2º membro tendem a zero, exceto o 1º. Portanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \binom{n}{1} x^{n-1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

Derivada das principais funções elementares

Derivada da função potência

Exemplos

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2,$$

$$f(x) = x^8 \Rightarrow f'(x) = 8x^7,$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3 \cdot x^{-4} = \frac{-3}{x^4};$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivada das principais funções elementares

Derivada da função logarítmica

Se f(x)= ln(x) então f′(x)= $\frac{1}{x}$ para todo x > 0.

Demonstração

$$\Delta f = \ln(x + \Delta x) - \ln x,$$

$$= \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

Derivada das principais funções elementares

Derivada da função logarítmica

Fazendo $m = \dfrac{\Delta x}{x}$, então quando Δx tende a 0, m também tende a 0.

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{m \to 0} \ln(1 + m)^{\frac{1}{mx}}$$

$$= \lim_{m \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln(1 + m)^{\frac{1}{m}} \right]$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{m \to 0} \ln(1 + m)^{\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{1}{x} \ln \lim_{m \to 0} (1 + m)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\lim_{m \to 0} (1 + m)^{\frac{1}{m}} = e,$$

$$\frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

Derivada das principais funções elementares

Derivada da função seno e cosseno

Se $f(x)= sen(x)$ então $f'(x)=cos(x)$ para todo x real.
Se $f(x)= cos(x)$ então $f'(x)=-sen(x)$ para todo x real.

Derivada das principais funções elementares

Propriedades Operatórias

Derivada do produto por escalar

$f(x) = k.g(x) \rightarrow f'(x) = k.g'(x)$

Derivada da soma

$f(x) = g(x)+h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)+h'(x)$

Derivada da diferença

$f(x) = g(x)-h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)-h'(x)$

Derivada do produto

$f(x) = g(x).h(x) \rightarrow f'(x) = g(x).h'(x)+g'(x).h(x)$

Derivada da divisão

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x).g'(x)-h'(x).g(x)}{h^2(x)}$$

Exemplos

Calcule as derivadas

1) $f(x) = 3x^3$

2**) $f(x) = 3x + 5x^3$**

3) $f(x) = 3x - 5x^3$

Exemplos

Calcule as derivadas

1) $f(x) = 3x^3$

$f'(x)= 3.\ 3x^2 = 6x^2$

2**) $f(x) = 3x + 5x^3$**

$f(x)=g(x)+h(x) \rightarrow f'(x)=g'(x)+h'(x)$

$g(x)=3x \rightarrow g'(x)=3 \qquad h(x)=5x^3 \rightarrow h'(x)=15x^2$

$f(x)= 3+15x^2$

3) $f(x) = 3x - 5x^3$

$f(x)=g(x)-h(x) \rightarrow f'(x)=g'(x)- h'(x)$

$g(x)=3x \rightarrow g'(x)=3 \qquad h(x)=5x^3 \rightarrow h'(x)=15x^2$

$f(x)= 3-15x^2$

Exemplos

Calcule as derivadas

4) $f(x) = 3x \cdot 5x^3$

5) $f(x) = 10x^2/x$

Exemplos

Calcule as derivadas

4) $f(x) = 3x \,.\, 5x^3$

$f(x)=g(x).h(x) \rightarrow f'(x)=g'(x)h(x)+h'(x)$

$g(x)=3x \rightarrow g'(x)=3 \quad h(x)=5x^3 \rightarrow h'(x)=15x^2$

$f(x)= 3.5x^3+3x.15x^2 =15x^3+45x^3= 60x^3$

5) $f(x) = 10x^2/x$

$f(x)=g(x)/h(x)$

$g(x)=10x^2 \rightarrow g'(x)=20x \quad h(x)=x \rightarrow h'(x)=1 \quad h^2(x)=x^2$

$$f(x)= \frac{x.20x-10x^2.\,1}{x^2} = \frac{20x^2-10x^2}{x^2} = 10$$

Exercícios

3 Obtenha a derivada de cada função a seguir

a) $f(x) = 10$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = 10x^5$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

e) $f(x) = x^2 + x^3$

f) $f(x) = 10x^3 + 5x^2$

g) $f(x) = 2x + 1$

h) $f(t) = 3t^2 - 6t - 10$

i) $f(u) = 5u^3 - 2u^2 + 6u + 7$

m) $f(x) = x \cdot \text{sen } x$

n) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

o) $f(x) = (2x^2 - 3x + 5)(2x - 1)$

p) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x^2}$

q) $f(x) = \text{tg} x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$