PROBABILIDADE

PERGUNTAS

Sábado vai chover?

PERGUNTAS

Resposta do ClimaTempo

PERGUNTAS

Por que Estatística?

Por que Probabilidade?

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Probabilidade é uma afirmação numérica sobre a possibilidade de que algo ocorra, quantifica o grau de incerteza dos eventos, variando de 0 a 1, ou 0% a 100%.

Exemplos:

Marketing: % de Retorno da Mala Direta > 3%
Economia: Taxa de Câmbio > $ 6,50 em 31/12/2024
Indústria: Tempo de Vida da Lâmpada > 3 anos

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- **Experimento Aleatório**

Um dos maiores objetivos de um estatístico é chegar a conclusões sobre certa população de objetos por meio da realização de um experimento. Um *experimento* e qualquer processo de observação. Em muitos experimentos de interesse, existe um elemento de incerteza, ou chance, que não importa quanto nos sabemos sobre o passado de outras performances deste experimento, nos essencialmente não somos capazes de predizer seu comportamento em futuras realizações.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- ## Experimento Aleatório – Características

(a) Se for possível repetir as mesmas condições do experimento, os resultados do experimento em diferentes realizações podem ser diferentes. Por exemplo, jogar uma moeda diversas vezes com bastante cuidado para que cada jogada seja realizada da mesma maneira.

(b) Muito embora não sejamos capazes de afirmar que resultado particular ocorrerá, seremos capazes de descrever o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.

(c) Quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental. Contudo, quando o experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou regularidade surgirá. É esta regularidade que torna possível construir um modelo probabilístico.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- ## Experimento Aleatório - Exemplos

E_1 : Em uma linha de produção, fabrique peças em série e conte o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.

E_2 : Uma asa de avião é fixada por um grande número de rebites. Conte o número de rebites defeituosos.

E_3 : Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.

E_4 : A resistência à tração de uma barra metálica é medida.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- **Resultado** – É a consequência de um único ensaio em um experimento probabilístico (ponto amostral). É o resultado de uma única tentativa.

  Características:
  (1) Repetido Indefinidamente,
  (2) Somos capazes de descrever os possíveis resultados,
  (3) Com Grande Repetição, regularidade/padrão surgirá.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- **Espaço Amostral** – É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento probabilístico.
- P{seleção no Espaço Amostral} = 1

> Para cada experimento aleatório E, define-se o *espaço amostral* como o conjunto formado por todos os resultados possíveis do experimento aleatório E.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- **Espaço Amostral** – É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento probabilístico.

Existem quatro pontos que são desejáveis da especificação de um espaço amostral:

1) Listar os possíveis resultados do experimento;
2) Fazê-lo sem duplicação;
3) Fazê-lo em um nível de detalhamento suficiente para os interesses desejados;
4) Especificar essa lista completamente em um sentido prático, embora usualmente não completa no que se refere a todos os resultados logicamente ou fisicamente possíveis

DEFINIÇÕES BÁSICAS

Evento – Um *evento é* um subconjunto do espaço amostral, ou seja, e um conjunto de resultados possíveis do experimento aleatório. Se ao realizarmos um experimento aleatório, o resultado pertence a um dado evento *A*, dizemos que *A ocorreu*.

Estaremos interessados no estudo da ocorrência de combinações de eventos.

Para tanto, utilizaremos as operações de conjuntos (complementar, união, intersecção, diferença) para expressar eventos combinados de interesse.

EXEMPLO

Experimento Aleatório

Jogar um dado de seis faces

Resultado

Obter um 2, {2}

Espaço Amostral (S)

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

Evento (E)

Obter um número par {2, 4, 6}

TEORIA DE CONJUNTOS

Conjuntos: Lista, coleção, agrupamento ou classe de objetos bem definidos

Todo conjunto é formado por um ou vários objetos que são denominados elementos.

De maneira geral indicamos um conjunto por uma letra maiúscula.

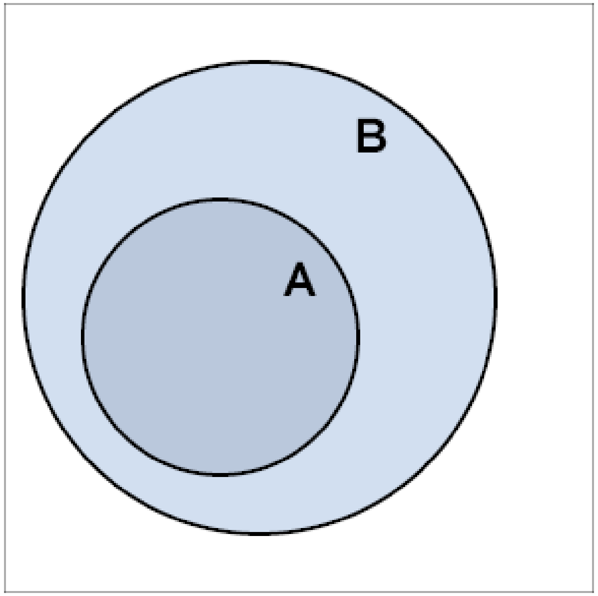
PERTINÊNCIA: O conceito de pertinência procura relacionar um elemento com um conjunto.

Para representar um elemento pertencente a um conjunto usamos o símbolo $\in$ e para indicar um elemento que não pertence a um conjunto usamos o símbolo $\notin$.

- Seja o conjunto M = {2;4;6;8;10}, complete com $\in$ ou $\notin$ as lacunas abaixo.
- 2__ M
- 5__M
- 10__M
- -8 _M

SUBCONJUNTO

- Esse conceito visa estabelecer uma relação entre dois conjuntos. Dados dois conjuntos, A e B, dizemos que A é subconjunto de B se cada elemento do conjunto A também é um elemento do conjunto B. Indica-se por:
- **A $\subset$ B (lê-se A está contido em B)**



Relação de Inclusão

- Quando relacionamos conjunto com conjunto utilizamos os símbolos de $\subset$ está contido e $\not\subset$ não está contido .
- Por Exemplo:
- $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$
- $\{1,2,0\} \not\subset \{1,2,3,4,5,7\}$

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois conjuntos A e B são ditos iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos.

Dados os conjuntos **A = {0,1,2,3,4}** e **B = {2,3,4,1,0}** como todos os elementos são iguais podemos dizer que A = B.

Conjunto vazio: O conjunto vazio corresponde a um tipo particular de conjunto, já que ele não possui elementos. Esse conjunto é usado para indicar uma situação impossível de ocorrer.

Podemos indicar um conjunto vazio por {} ou ∅

Conjunto Unitário: Corresponde a outro tipo especial de conjunto. O conjunto unitário é todo conjunto que possui apenas um elemento.

Conjunto Universo: Corresponde ao conjunto ao qual pertencem todos os elementos que fazem parte do nosso estudo.

CONJUNTO DAS PARTES

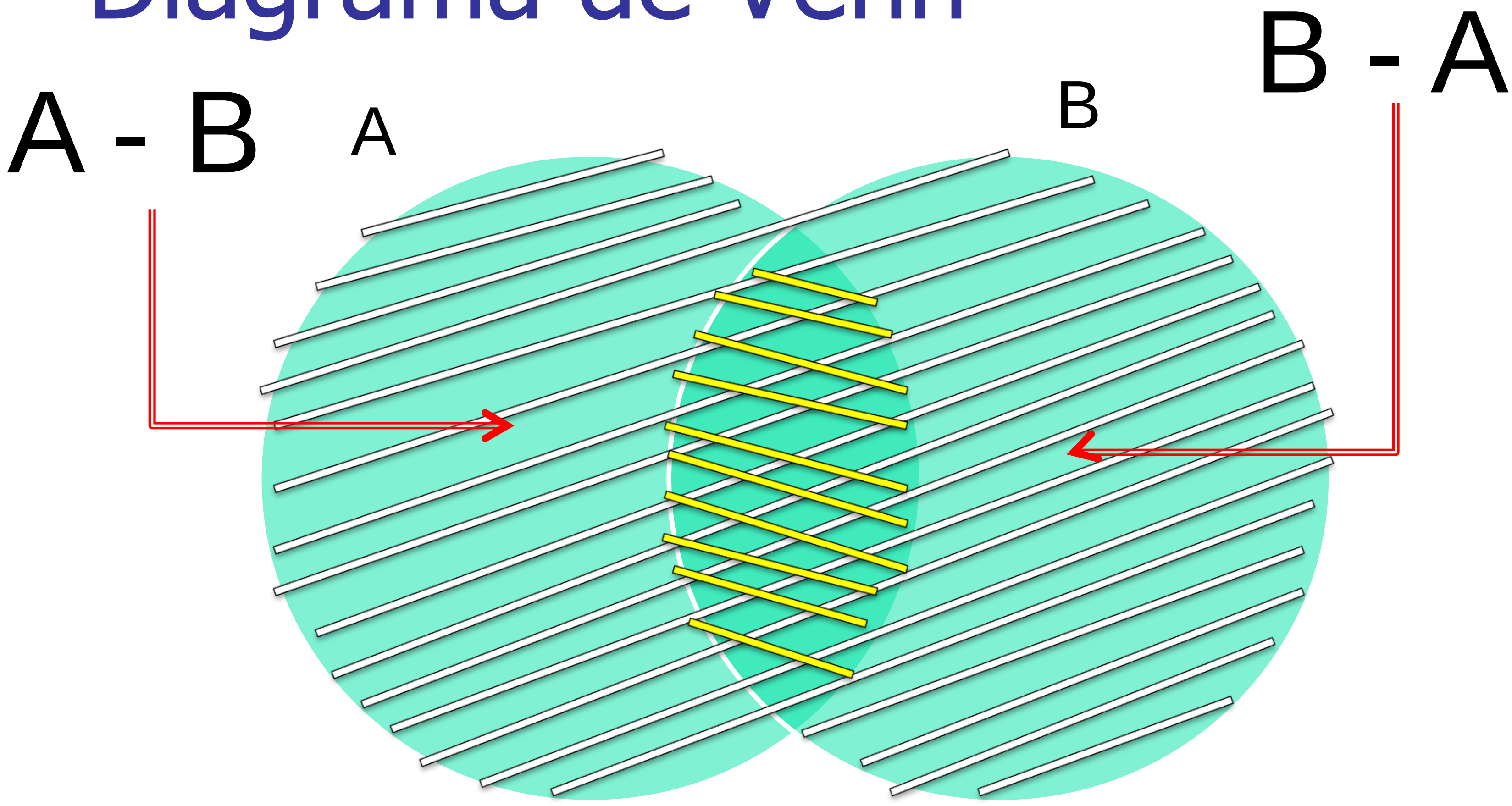
- O conjunto das partes de um conjunto é formado por todos os subconjuntos de A. Ou seja:
- $\mathbb{P}$ **(A) = {x / {x}**$\in$ **A}**
- **Exemplo:** o conjunto das partes dos conjuntos abaixo: A = {0, 1} é:
- $\mathbb{P}$ **(A) = {Ø, {0}, {1}, {0,1}}**
- Já para o conjunto B = {0, 1, 2}, o conjunto das partes será
- ***$\mathbb{P}$ (B) = {Ø, {0}, {1}, {2}, {0,1}, {1, 2}, {0, 2}, {0, 1, 2}}***

TEORIA DE CONJUNTOS

Operações com conjuntos:

- União: Os elementos pertences aos dois conjuntos.
- $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (União)
- Intersecção: Os elementos que pertencem simultaneamente a dois ou mais conjuntos.
- $A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}$
- Diferença: Os elementos pertences aos conjunto A, mas não pertence ao conjunto B.
- $A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$

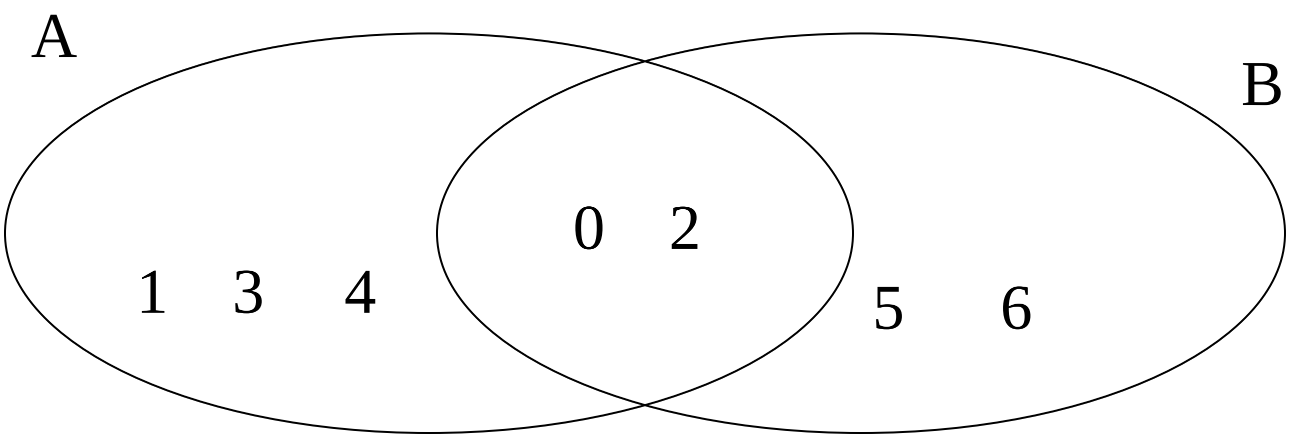
Diagrama de Venn



Exemplo

Seja o conjunto A={0, 1 ,2, 3, 4} e o conjunto B={0, 2, 5, 6}, encontre:

A) $A \cap B$ B) AUB c) A-B

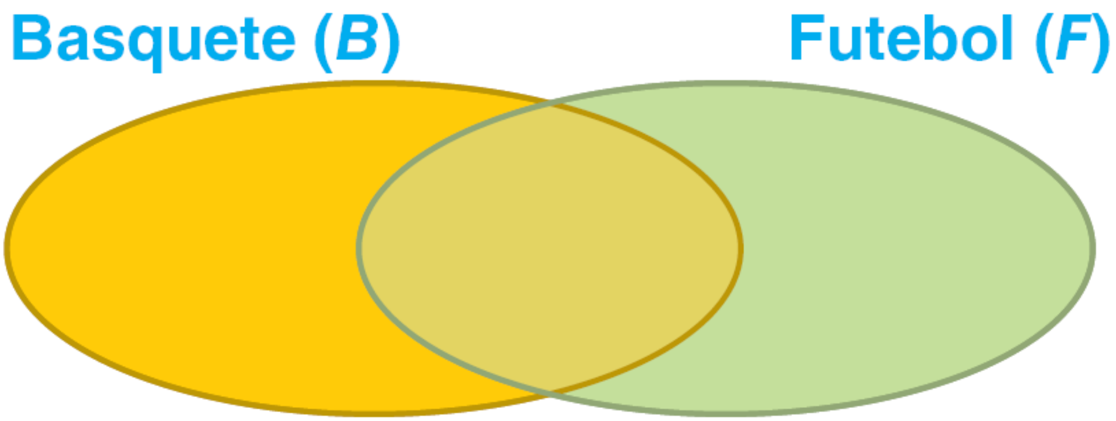


TEORIA DE CONJUNTOS

Numa sala de aula:

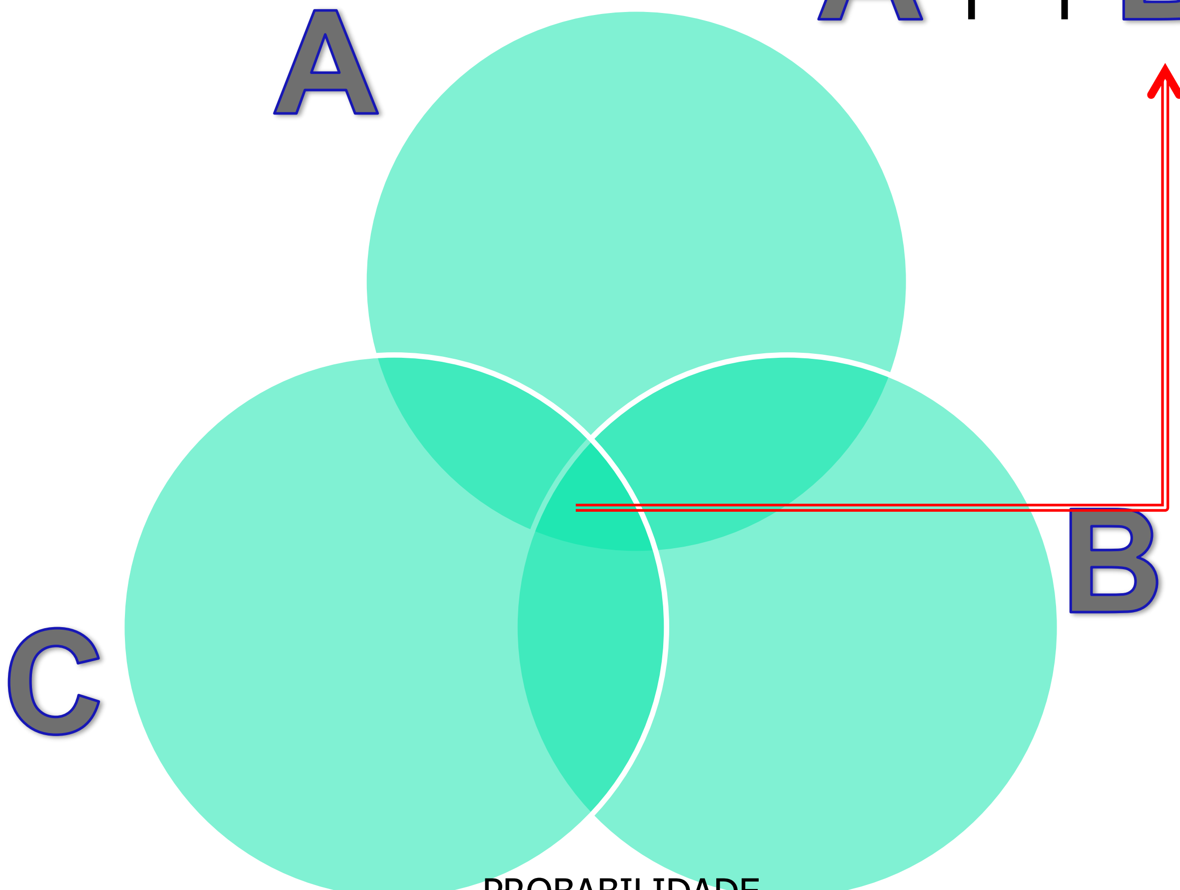
- 85 alunos jogam basquete;
- 75 jogam futebol;
- 17 praticam duas atividades: basquete e futebol.

Quantos alunos foram pesquisados, sabendo-se que todos optaram pelo menos por um dos dois esportes?



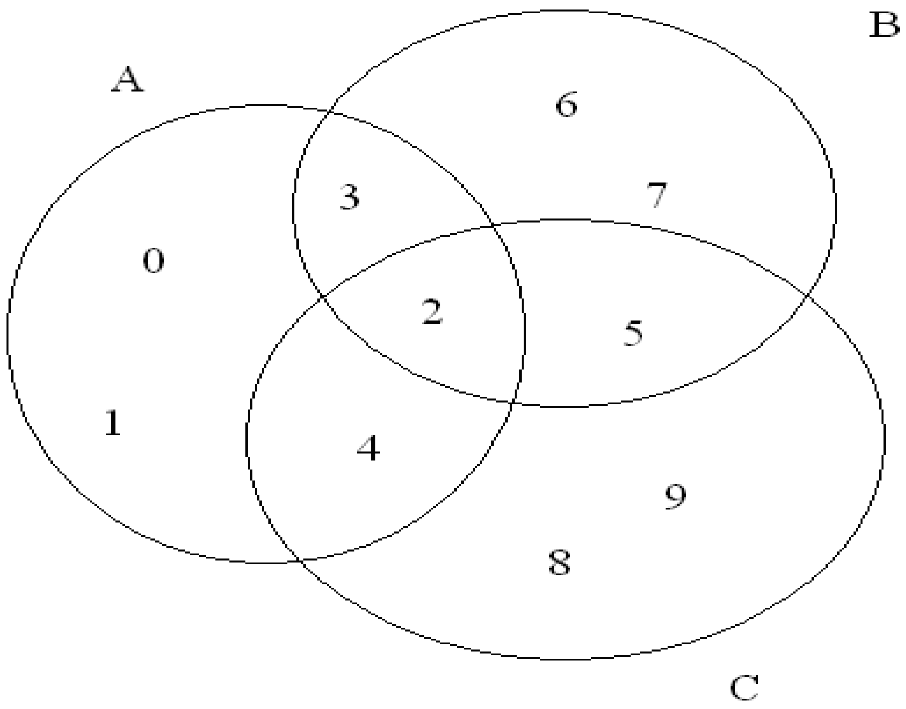
Diagramas de Venn com três conjuntos

$A \cap B \cap C$



TEORIA DE CONJUNTOS

. Observe o diagrama e responda:



a) A =
b) B =
c) C =
d) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ =
e) $(A \cap C) \cup B$=

Questões

1)Dados os conjuntos $A = \{0;1\}$, $B = \{0;2;3\}$ e $C = \{0;1;2;3\}$, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) cada afirmação abaixo:

a) (   ) $A \subset B$

b) (   ) $\{1\} \subset A$

c) (   ) $A \subset C$

d) (   ) $B \not\subset C$

e) (   ) $B \subset C$

f) (   ) $\{0;2\} \in B$

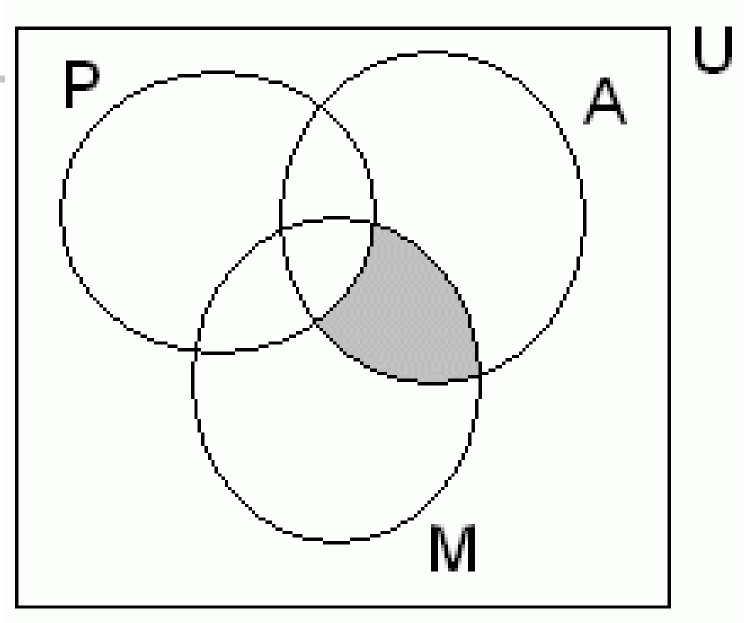
2) Uma atividade com duas questões foi aplicada em uma classe de 40 alunos. Os resultados apontaram que 20 alunos haviam acertado as duas questões, 35 acertaram a primeira questão e 25, a segunda. Faça o diagrama e calcule o percentual de alunos que acertou apenas uma questão?

3(Unifap)O dono de um canil vacinou todos os seus cães, sendo que 80% contra parvovirose e 60% contra cinomose. Determine o porcentual de animais que foram vacinados contra as duas doenças.

4 (FATEC) Para a identificação de pacientes com sintomas de gripe influenza A, a Anvisa (Agência Nacional de Vigilância Sanitária) informou hoje que os voos procedentes do Reino Unido, Espanha e Nova Zelândia também serão inspecionados por uma equipe da agência e por médicos da Empresa Brasileira de Infraestrutura Aeroportuária (Infraero). Inicialmente, apenas os voos vindos do México, Canadá e Estados Unidos eram inspecionados. A decisão foi tomada durante reunião da Anvisa com representantes das companhias aéreas, da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac) e da Infraero, no Aeroporto Internacional de Cumbica, em Guarulhos, na Grande São Paulo.
(*Adaptado de: http://noticias.uol.com.br/cotidiano/2009/04/28/ult5772u3774.jhtm, Acesso em: 09.05.2009.*)

TEORIA DE CONJUNTOS

Em um voo proveniente de Miami, a Anvisa constatou que entre todas as pessoas a bordo (passageiros e tripulantes) algumas haviam passado pela cidade do México. No diagrama, U representa o conjunto das pessoas que estavam nesse voo; P o conjunto dos passageiros; M o conjunto das pessoas que haviam passado pela cidade do México e A o conjunto das pessoas com sintomas da gripe influenza A. Considerando verdadeiro esse diagrama, conclui-se que a região sombreada representa o conjunto das pessoas que, de modo inequívoco, são aquelas caracterizadas como



(A) passageiros com sintomas da gripe que não passaram pela cidade do México.
(B) passageiros com sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.
(C) tripulantes com sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.
(D) tripulantes com sintomas da gripe que não passaram pela cidade do México.
(E) tripulantes sem sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.

5) Uma pesquisa de mercado foi realizada para verificar a audiência de três programas de televisão, 1200 famílias foram entrevistadas e os resultados obtidos foram os seguintes: 370 famílias assistem ao programa A, 300 ao programa B e 360 ao programa C. Desse total, 100 famílias assistem aos programas A e B, 60 aos programas B e C, 30 aos programas A e C e 20 famílias aos 3 programas. Com base nesses dados, determine:

a) quantas famílias não assistem a nenhum dos 3 programas?

b) quantas famílias assistem ao programa A e não assistem ao programa C?

c) qual o programa de maior fidelidade, ou seja, cujos espectadores assistem somente a esse programa?

TEORIA DE CONJUNTOS

6. Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão.

Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum, C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1.

Nessas condições, o fabricante, para a montagem dos três catálogos, necessitará de quantos originais de impressão?

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Em análise combinatória estaremos envolvidos com problemas de contagem. Esse assunto é objeto de discussão e interesse há muitos anos, principalmente entre pessoas que disputam jogos de azar e almejavam saber as chances de vitória nas partidas que disputavam. Tem larga aplicação nos estudos de probabilidade e estatística.

ANÁLISE COMBINATÓRIA - Regra da Adição

Suponha que um procedimento, designado por 1, possa ser realizado de n1 maneiras. Admita-se que um segundo procedimento, designado por 2, possa ser realizado de n2 maneiras. Além disso, suponha que não seja possível que ambos os procedimentos 1 e 2 sejam realizados em conjunto.

Então, o número de maneiras pelas quais poderemos realizar ou 1 ou 2 será n1+n2.

Exemplo: Suponha que estejamos planejando uma viagem e devamos escolher entre o transporte por ônibus ou por trem. Se existirem três rodovias e duas ferrovias, então existirão 3 + 2 = 5 caminhos disponíveis para a viagem.

ANÁLISE COMBINATÓRIA - Regra da Multiplicação

Suponha que um procedimento designado por 1 possa ser executado de n1 maneiras. Admita-se que um segundo procedimento, designado por 2, possa ser executado de n2 maneiras.

Suponha também que cada maneira de executar 1 possa ser seguida por qualquer maneira para executar 2. Então o procedimento formado por 1 seguido de 2 poderá ser executado de $n_1 \times n_2$ maneiras.

Exemplo: Uma peça manufaturada deve passar por 3 estações de controle. Em cada estação, a peça é inspecionada para determinada característica e marcada adequadamente.

Na primeira estação, três classificações são possíveis, enquanto nas duas últimas, quatro classificações são possíveis.

Consequentemente, existem $3 \times 4 \times 4 = 48$ maneiras pelas quais uma peça pode ser marcada.

Exercícios

1) Quantos números de 4 algarismos podemos formar utilizando, uma única vez, os numerais 3, 4, 5 e 6 ?

2) Quantos números de quatro algarismos podemos formar com 3, 4, 5 e 7?

3) Quantos números de três algarismos formam-se com 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

4) Quantos números de três algarismos distintos podem-se formar com 0, 3 e 6?

ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutações

- Permutações é uma técnica combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades formação de uma fila ou sequência em que não há repetição de elementos e todos esses elementos são utilizados no problema.

- Por exemplo, com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números de três algarismos distintos (isto é, sem repetição)podemos formar?

- Outro exemplo, quantos anagramas podemos formar com a palavra TRAPO?

- Para generalizar se devemos dispor n objetos em fila teremos n! (n fatorial) maneiras distintas de dispormos esses n objetos, Simbolizaremos assim: Pn n!

ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutações

A partir da palavra **NÚMEROS** (o acento sempre acompanhará a letra u), responda:

a) Quantos anagramas são possíveis de serem formados?

b) Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?

c) Quantos anagramas começam e terminam em vogal?

d) Quantos anagramas começam com n?

e) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n e u juntas e nessa ordem?

f) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras u e n juntas?

g) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m juntas e nessa ordem?

h) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras n, u e m juntas?

ANÁLISE COMBINATÓRIA - Arranjos

A ferramenta arranjos simples é utilizada quando desejamos formar filas com p elementos escolhidos a partir de um grupo de m elementos, com $p \leq m$. Se, por exemplo, de um grupo de oito (8) pessoas, devemos dispor cinco (5) delas em fila. De quantos modos podemos realizar tal processo?

Já sabemos pelo principio multiplicativo ou principio fundamental da contagem que podemos formar:

Desse modo obtemos 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 6720 filas com cinco pessoas escolhidas dentre oito.

Podemos concluir dessa maneira que Arranjos é uma aplicação do principio multiplicativo para formar filas quando for necessário escolher alguns elementos de um grupo para formar tal Fila. Simbolizaremos o resultado desse exemplo como A 8,5 (Arranjo 8 elementos tomados 5 a 5), isto é, formamos uma fila com cinco elementos selecionados de um grupo de oito.

ANÁLISE COMBINATÓRIA - Arranjos

De um grupo de 20 pessoas deseja-se formar uma fila com 5 delas. Quantas filas distintas podemos formar?

$$A_{m,p} = \frac{m!}{(m-p)!}$$

ANÁLISE COMBINATÓRIA - Arranjos

1) Um grupo de pessoas é formado por cinco homens e três mulheres. Deseja-se formar filas com 5 dessas pessoas de modo que as três mulheres ocupem sempre as três primeiras posições. Assim, de todas as filas possíveis, quantas obedecem essa restrição?

2) Numa maratona em que participam x atletas, dos quais 80% completam a prova. Se podemos formar os dois primeiros colocados de 1560 maneiras distintas, qual o valor de x?

ANÁLISE COMBINATÓRIA – Combinações

Combinação simples é uma ferramenta combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de um subgrupo de elementos a partir de um grupo dado. Em outras palavras se possuirmos um Conjunto de elementos, desejamos contar as possibilidades de formação de um subconjunto formado a partir do conjunto dado.

É crucial nessa altura notar que quando formamos um subconjunto a partir de um conjunto dado, não estamos formando filas. Dessa maneira, quando se ver diante de um problema desse tipo, não devemos utilizar qualquer ferramenta que forme ordem entre os elementos em questão.

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!};$$

Dentre 9 livros distintos que estão em oferta em uma livraria, Fátima deseja escolher 5 para comprar. De quantos modos diferentes Fátima pode escolher os 5 livros?

ANÁLISE COMBINATÓRIA – Combinações

1) Quantos resultados são possíveis na Mega-Sena?

2) Na série A do campeonato brasileiro de futebol edição 2017, 20 times disputam a competição. Nesse tipo de torneio há duas fases, e em cada uma todos os times jogam contra todos. Quem obter mais pontos vence.

a) Quantos jogos serão disputados em 2017 na primeira fase?

b) Quantos jogos serão disputados entre os times paulistas na primeira fase sabendo que há 5 times de São Paulo?

3) A partir de um grupo de 14 pessoas, quer-se formar uma comissão de oito integrantes, composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode compor essa comissão?

VOLTANDO....

Experimento Aleatório

Jogar um dado de seis faces

Resultado

Obter um 2, {2}

Espaço Amostral (S)

{1, 2, 3, 4, 5, 6}

Evento (E)

Obter um número par {2, 4, 6}

CÁLCULO DA PROBABILIDADE

A probabilidade de determinado evento é calculada pela divisão do número de resultados possíveis no evento pela quantidade de resultados do espaço amostral

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados em } E\ (E)}{\text{número total de resultados no espaço amostral } (S)}$$

No exemplo do slide anterior, qual a probabilidade do evento sortear um número par no experimento aleatório de jogar um dado?

EXERCÍCIOS

Nos experimentos aleatórios abaixo defina o espaço amostral, o evento e a probabilidade do evento.

1) Sortear um múltiplo de 3 no lançamento de um dado.

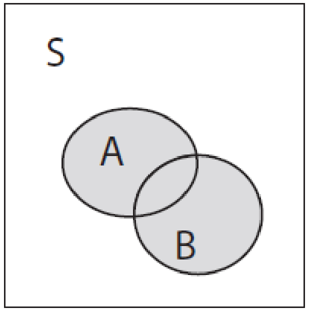
2) Sortear duas caras no lançamento de duas moedas.

3) Sortear um 6 no lançamento de 2 dados.

4) Sortear um número 7 no lançamento de um dado.

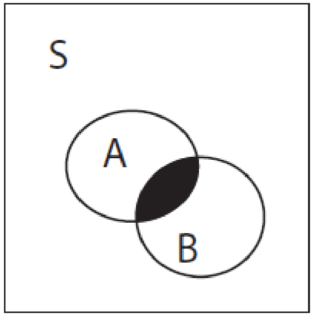
OPERAÇÕES COM EVENTOS

Diagramas de Venn



1º diagrama: União: $A \cup B$

$A \cup B$ é o evento que ocorre se A ocorrer ou B ocorrer ou ambos ocorrerem. É a união de todos os elementos que pertencem a A, pertencem a B *ou* a ambos os conjuntos.

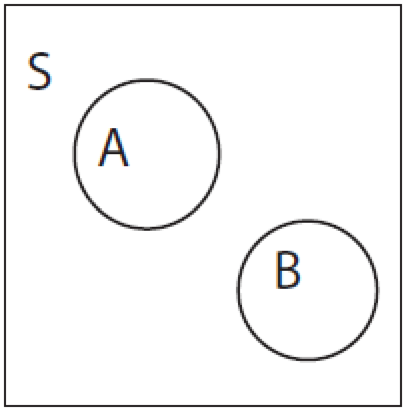


2º diagrama: Interseção: $A \cap B$

$A \cap B$ é o evento que ocorre se A e B ocorrerem. $A \cap B$ corresponde à área escura do 2º diagrama de Venn, ou seja, é um novo conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A *e* pertencem a B.

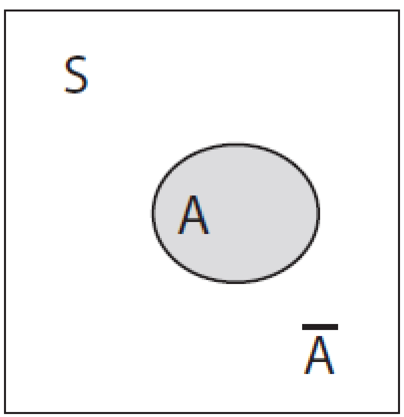
Evento Impossível: *Um evento é impossível quando a sua ocorrência não é um subconjunto do espaço amostral.*

Diagramas de Venn



3º diagrama: Exclusão: $A \cap B = \varnothing$

Eventos mutuamente exclusivos: dois eventos A e B são denominados mutuamente exclusivos se eles não puderem ocorrer simultaneamente, isto é, A interseção B = conjunto vazio. A e B são mutuamente exclusivos, pois a ocorrência de A impede a ocorrência de B e vice-versa: $A \cap B = \varnothing$ (evento impossível).



4º diagrama: Negação ou evento complementar

A negação do evento A, denotada por A^c ou $\bar{A}$ (lê-se A complementar ou A traço) é o evento que ocorre se A não ocorrer. Corresponde à área em branco do 4º diagrama.

EXEMPLO 1

1) Seja E o experimento "sortear um cartão entre dez cartões numerados de 1 a 10". Sejam os eventos $\overline{A}$ = {sair o número 7} e B = {sair um número par}, então, se $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, teremos: $A = \{7\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

$A \cup B = \{7, 2, 4, 6, 8, 10\}$; $A \cap B = \varnothing$ (evento impossível)

O complementar de A será: $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$;

O complementar de B será: $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

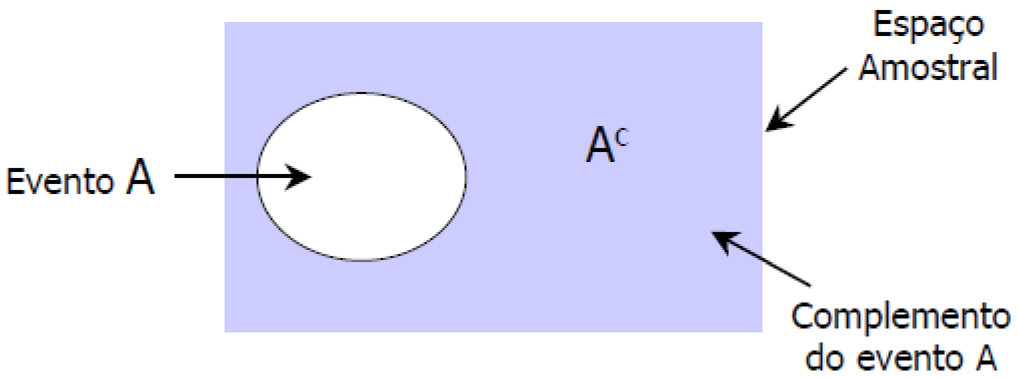
$A \cup \overline{A} = S$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $B \cup \overline{B} = S$; $B \cap \overline{B} = \varnothing$.

EXEMPLO 2

a) Para ter a certeza do nascimento de pelo menos um menino, um casal planeja ter 5 bebês. Qual a chance de sucesso?

Respondendo de forma intuitiva, a probabilidade do casal ter pelo menos 1 menino será igual a probabilidade de ter 1, 2, 3, 4 ou 5 meninos que é equivalente ao complementar da probabilidade de não ter nenhum menino, ou seja, 1 – P("5 meninas") = $1 - (1/2)^5 =$ 0,96875 ou 96,875% se presumirmos que a probabilidade de nascimento de meninos e meninas é igual.

EVENTOS COMPLEMENTARES



O complemento do evento *A* é o evento A^c, que consiste em todos os resultados do espaço amostral que *não* estejam incluídos no evento *A*.

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

A produção diária de uma montadora é de 12.000 peças, 50 dos quais são defeituosas. Se uma peça for selecionada ao acaso, determine a probabilidade de que ela não seja defeituosa.

P (defeituoso) = 50/12.000
P (não defeituoso) = 1 – 50/12.000 = 1- 0,004 = 0,996 ou 99,6%.

EXERCÍCIOS

1) Numa pesquisa de opinião, foram entrevistadas 950 pessoas das quais 190 se declararam contra a reforma agrária e os demais se colocaram a favor.

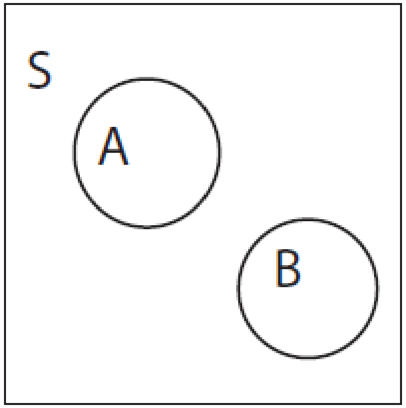
Qual a probabilidade de um respondente escolhido ao acaso ser a contra a Reforma Agrária?

E de ser favorável?

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes, ou disjuntos, se a ocorrência de um deles ocorre, implica necessariamente na não-ocorrência do outro. Não há elementos comuns entre eles.

Exemplo: Ao lançarmos uma moeda, o evento A é o resultado ser cara e o evento B é o resultado ser coroa.



EVENTOS INDEPENDENTES

Dois eventos A e B são independentes se a probabilidade de ocorrência do evento B não é afetada pela ocorrência (ou não-ocorrência) do evento A.

[1] Lê-se probabilidade de A dado que B ocorreu.

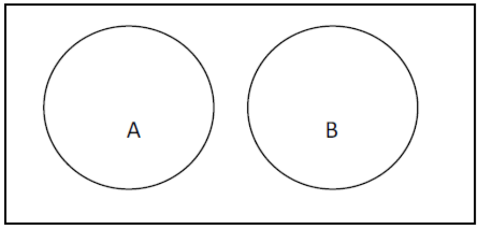
$$P(A/B)^{1} = P(A) \text{ e } P(B/A) = P(B).$$

Exemplo: No experimento aleatório de sortear um funcionário da empresa Biscobis, o evento A é o funcionário ter sangue O- e o evento B é o funcionário ter um salário mensal maior que R$ 2.000.

PROBABILIDADE DE MAIS DE UM EVENTO

- Intersecção: A e B

$$\boxed{A \cap B}$$



Para eventos independentes

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemplo: ao lançarmos dois dados, qual a probabilidade do resultado do primeiro ser ímpar e do segundo ser maior que 4?

EXERCÍCIOS

1) Qual a probabilidade de um casal de namorados fazer aniversário, ambos no mês de janeiro?

2) A probabilidade de um atirador acertar um alvo em um único tiro é 0,2. Com apenas 4 tiros, qual a probabilidade de esse atirador acertar o alvo as quatro vezes?

3) Uma empresa vai lançar três novos produtos, segundo a área de planejamento a probabilidade de sucesso em um ano de cada produto é, respectivamente, 1/2, 2/5, e 5/6. Qual a probabilidade de ao final do ano os três produtos terem fracassado?

4) Na análise econômica de uma consultoria, foi avaliado que a taxa SELIC só irá cair se a inflação cair e a Bolsa subir. A mesma análise aponta que a probabilidade da inflação subir é 0,3 e da Bolsa subir é 0,5. Com essas informações, qual a probabilidade da taxa SELIC cair? Considere que a inflação e a Bolsa são eventos independentes.

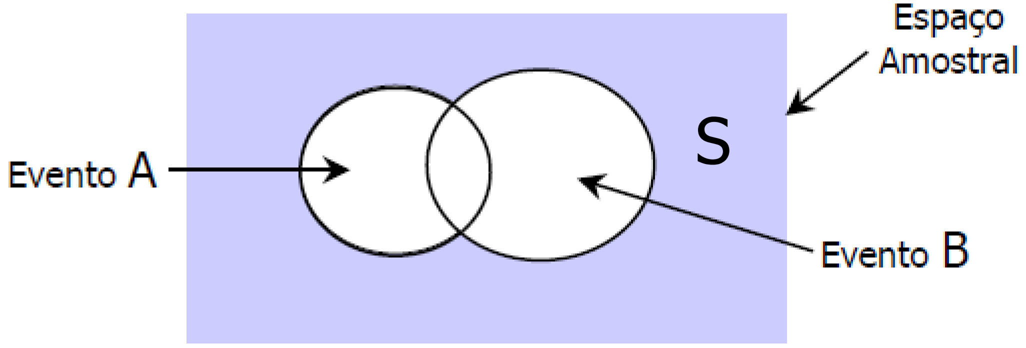
PROBABILIDADE DE MAIS DE UM EVENTO

1º diagrama: União: $A \cup B$

$A \cup B$ é o evento que ocorre se A ocorrer ou B ocorrer ou ambos ocorrerem. É a união de todos os elementos que pertencem a A, pertencem a B *ou* a ambos os conjuntos.

- União: A <u>ou</u> B

$$\boxed{A \cup B}$$



P(A ou B) =
P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A e B)

Exemplo: Ao lançarmos um dado qual a probabilidade do resultado ser ímpar ou maior que 4?

EXERCÍCIOS

1) Qual a probabilidade de um casal de namorados, ao menos um deles fazer aniversário no mês de janeiro?

Aniversário Dela		Aniversário Dele											
		JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
	JAN	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	FEV	1											
	MAR	1											
	ABR	1											
	MAI	1											
	JUN	1											
	JUL	1											
	AGO	1											
	SET	1											
	OUT	1											
	NOV	1											
	DEZ	1											

Evento Desejado = Acontece em 23 possibilidades

Espaço Amostral = Todas as possibilidades = 12 x 12 = 144 possibilidades

Então, avaliando a Tabela, concluo que a chance é de $\frac{23}{144} = 15{,}97\%$

E não $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{144} = 16{,}67\%$

Probabilidade Homem fazer aniversário em Janeiro = $\frac{1}{12} \rightarrow$ Janeiro é 1 dos Meses / Todas as possibilidades são 12 diferentes meses

Probabilidade Mulher fazer aniversário em Janeiro = $\frac{1}{12} \rightarrow$ Janeiro é 1 dos Meses / Todas as possibilidades são 12 diferentes meses

Probabilidade De Um ou Outro Fazer Aniversário em Janeiro =

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} = \frac{12 + 12 - 1}{144} = \frac{23}{144} = 15{,}97\%$$

EXERCÍCIOS

2) A probabilidade de um atirador acertar um alvo em um único tiro é 0,2. Com apenas 2 tiros, qual a probabilidade de esse atirador acertar o alvo ao menos uma vez?

		PRIMEIRO TIRO	
		ACERTA	ERRA
SEGUNDO TIRO	ACERTA	4%	16%
	ERRA	16%	64%

Probabilidade Acertar o 1o. Tiro = $\frac{20}{100}$

Probabilidade Acertar o 2o. Tiro = $\frac{20}{100}$

Evento Desejado = Acontece em 3 possibilidades, com diferentes probabilidades, pois:

Probabilidade Acertar o 1o. Tiro e o 2o Tiro = $\frac{20}{100} * \frac{20}{100} = 4\%$

Probabilidade Acertar o 1o. Tiro e Errar o 2o Tiro = $\frac{20}{100} * \frac{80}{100} = 16\%$

Probabilidade Errar o 1o. Tiro e Acertar o 2o Tiro = $\frac{80}{100} * \frac{20}{100} = 16\%$

Probabilidade Errar o 1o. Tiro e o 2o. Tiro = $\frac{80}{100} * \frac{80}{100} = 64\%$

Então, somando a Tabela, concluo que a chance é de 36% de Acertar o alvo pelo menos 1 vez.

Probabilidade De Acertar o Alvo pelo menos 1 vez = $\frac{20}{100} + \frac{20}{100} = \frac{40}{100} = 40{,}00\%$ **certo?**

Probabilidade De Acertar o Alvo pelo menos 1 vez = $\frac{20}{100} + \frac{20}{100} - \frac{4}{100} = \frac{36}{100} = 36\%$

EXERCÍCIOS

3) Uma empresa vai lançar dois novos produtos, segundo a área de planejamento a probabilidade de sucesso em um ano de cada produto é, respectivamente, 1/2 e 5/6. Qual a probabilidade de ao final do ano ao menos um deles ter sido bem sucedido?

		PRIMEIRO PRODUTO	
		SUCESSO	FRACASSO
SEGUNDO	SUCESSO	42%	42%
PRODUTO	FRACASSO	8%	8%

Probabilidade Sucesso 1o. Produto = $\frac{1}{2}$

Probabilidade Sucesso 2o. Produto = $\frac{5}{6}$

Evento Desejado = Acontece em 3 possibilidades, com diferentes probabilidades, pois:

Probabilidade Sucesso no Primeiro e no Segundo Produto = $\frac{1}{2} * \frac{5}{6} =$ 41,67%

Probabilidade Sucesso no Primeiro e Fracasso no Segundo Produto = $\frac{1}{2} * \frac{1}{6} =$ 8,33%

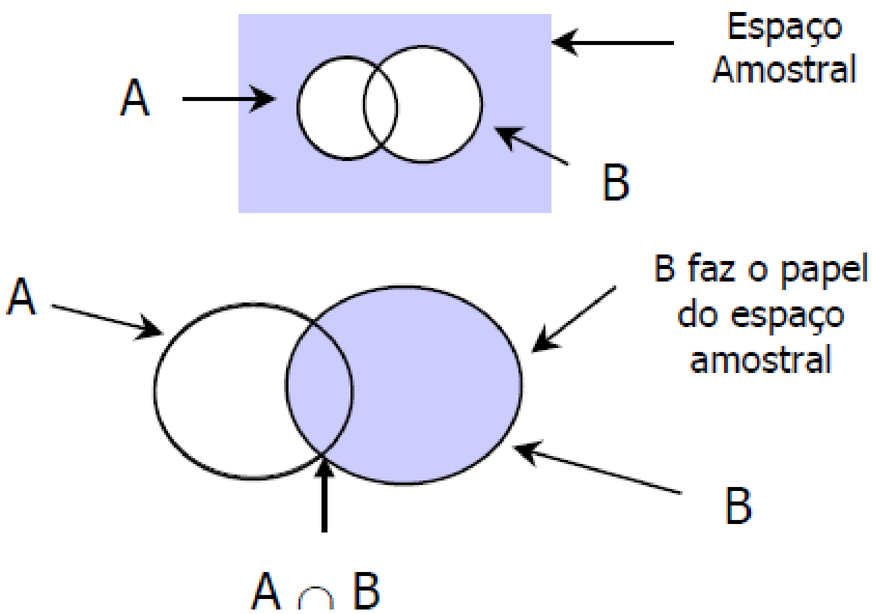
Probabilidade Fracasso no Primeiro e Sucesso no Segundo Produto = $\frac{1}{2} * \frac{5}{6} =$ 41,67%

Probabilidade Fracasso no 1o. Tiro e o 2o. Produto = $\frac{1}{2} * \frac{1}{6} =$ 8,33%

Então, somando a Tabela, concluo que a chance é de 91,67% de Acertar o alvo pelo menos 1 vez.

Probabilidade De Acertar o Alvo pelo menos 1 vez = $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{41,67}{100} = \frac{50 + 83,33 - 41,67}{100} =$ 91,66%

PROBABILIDADE CONDICIONAL



Para eventos dependentes, a probabilidade de um evento *B* ocorrer, dado (ou na condição de) que outro evento *A* já ocorreu.

Escrevemos essa situação como $P(B|A)$ e lemos "a probabilidade de B, dado A".

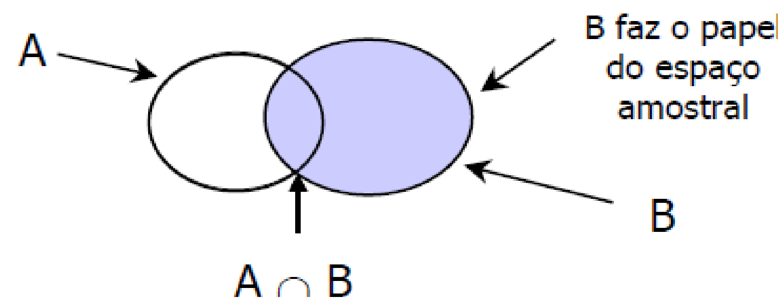
Dois carros são selecionados em uma linha de produção com 12 carros, 5 deles defeituosos. Qual é a probabilidade de o segundo carro ser defeituoso, *dado que* o primeiro carro era defeituoso?

Dado que um carro defeituoso já foi selecionado, o espaço amostral condicional possui 4 carros defeituosos entre 11. Logo, $P(B|A) = 4/11$.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

P(A|B) = a probabilidade condicional de um evento A acontecer tal que B tenha acontecido - “probabilidade de A se B”.

Se A e B são eventos de um espaço S, com P(B)<>0, então a probabilidade condicional do evento A, tendo já ocorrido o evento B, é:
Basta contarmos o Número de casos favoráveis ao evento A intersecção com B e dividirmos pelo número de casos favoráveis ao evento B.



$$p\ (A \text{ e } B) = p(A)\ p(B/A)$$

$$p(A \text{ e } B) = p(B)\ p(A/B)$$

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo: ao lançarmos um dado qual a probabilidade do resultado ser ímpar sabendo que o resultado obtido foi maior que 4?

EXEMPLO 1

1. Retira-se, sem reposição, duas peças de um lote de 10 peças, onde 4 são boas. Qual a probabilidade de que ambas sejam defeituosas ?

Solução: Sejam os eventos:

A = {a primeira peça ser defeituosa};

B = {a segunda peça ser defeituosa}.

Precisamos, então, avaliar $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = P(A).\,P(B/A) \rightarrow P(A \cap B) = 6/10\,.\,5/9 = 1/3 = 0{,}3333... \rightarrow 33{,}33\ \%$

Observe que $P(B/A)$ é a probabilidade de a segunda peça ser defeituosa, dado que a primeira foi defeituosa.

EXEMPLO 2

Dados de alta freqüência: estudo do comportamento intradiário de um ativo.

Todas as negociações das ações da IBM, na NYSE, foram registradas ao longo de 63 dias, entre 9:30 e 16:00. Foram observadas 59.837 negociações no período

Variações medidas em *ticks* (1 *tick* = 1/8 de dolar).

Probabilidade Condicional

Negociação anterior	Negociação atual			Total
	+	0	-	
+	441	5.498	3.948	**9.887**
0	4.867	29.779	5.473	**40.119**
-	4.580	4.841	410	**9.831**
Total	**9.888**	**40.118**	**9.831**	**59.837**

a. Qual é a probabilidade de termos uma valorização precedida por uma desvalorização?

b. Sabendo que houve uma desvalorização, qual é a probabilidade de que haja uma valorização na próxima negociação?

EXEMPLO 3

2. Uma urna contém cinco bolas brancas e três pretas. Duas bolas são retiradas sem reposição. Qual a probabilidade de que:

a) 1ª seja branca e a 2ª seja preta?

$P(B_1 \cap P_2) = P(B_1).P(P_2/B_1) = 5/8 \, . \, 3/7 = 15/56 = 26{,}79\%$

b) as duas sejam brancas?

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2/B_1) = 5/8 \, . \, 4/7 = 20/56 = 35{,}71\%$

c) as duas sejam pretas?

$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1).P(P_2/P_1) = 3/8 \, . \, 2/7 = 6/56 = 10{,}71\%$

d) sejam uma de cada cor?

$P(P_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap P_2) = (3/8 \, . \, 5/7) + (5/8 \, . \, 3/7) = 30/56 = 53{,}57\%$

e) sejam ambas da mesma cor?

$P(P_1 \cap P_2) + P(B_1 \cap B_2) = (3/8 \, . \, 2/7) + (5/8 \, . \, 4/7) = 26/56 = 46{,}43\%$

OUTRO PROBLEMA – EXEMPLO 4

Árvore de Probabilidades

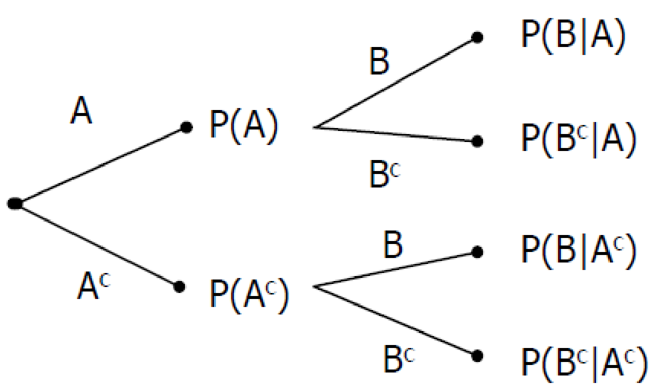
Probabilidades associadas ao problema do comportamento das ações

Empresa B	Empresa A		Total
	Sobe	Desce	
Sobe	0,44	0,13	0,57
Desce	0,10	0,33	0,43
Total	0,54	0,46	1,00

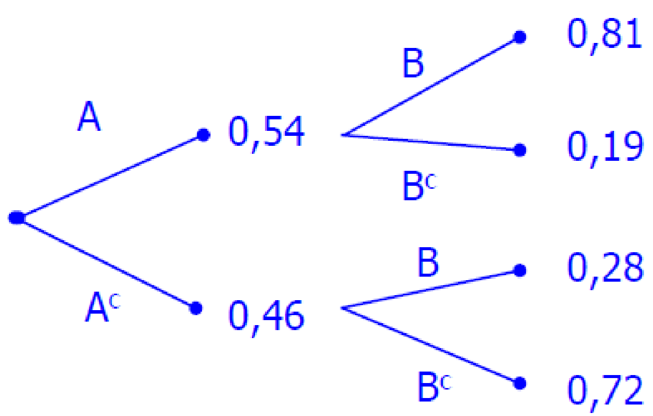
Em vermelho: probabilidades conjuntas

Em azul: probabilidades marginais

Árvore de Probabilidades

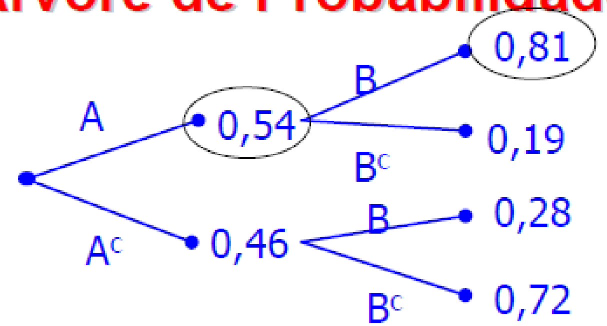


Árvore de Probabilidades



EXEMPLO 4 - CONTINUAÇÃO

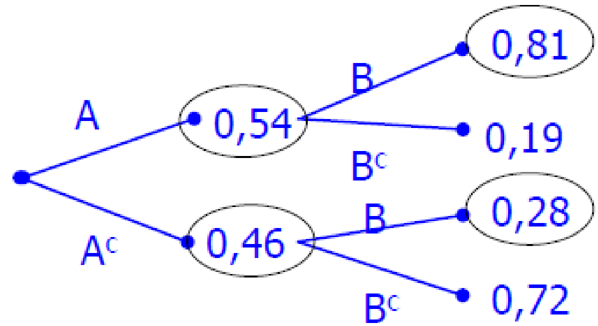
Árvore de Probabilidades



$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A) = 0{,}54 \times 0{,}81 = 0{,}44$

$P(A \cap B) = ???$

Árvore de Probabilidades



$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

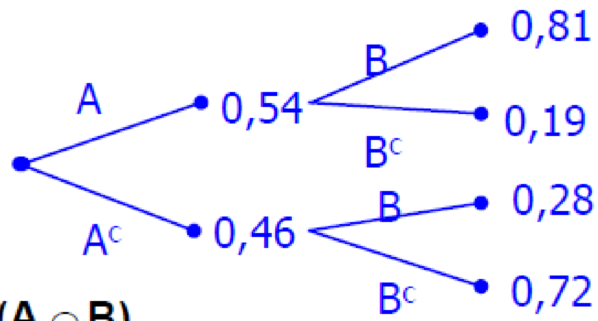
$P(B) = 0{,}54 \times 0{,}81 + 0{,}46 \times 0{,}28 = 0{,}57$

$P(B) = ???$

EXEMPLO 4 - CONTINUAÇÃO

Árvore de Probabilidades

P(A|B) = ???

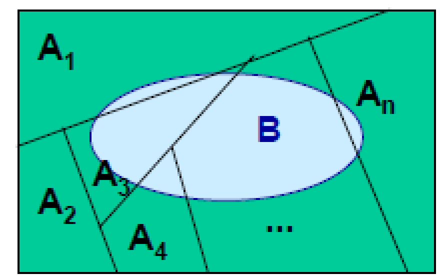


$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{0{,}54 \text{ x } 0{,}81}{0{,}54 \text{ x } 0{,}81 + 0{,}46\text{x}0{,}28}$$

Teorema da Probabilidade Total

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \mid A_i)$$



TEOREMA DE BAYES

Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, *n* eventos mutuamente exclusivos tais que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n =$ **S**. Sejam **P(A_i)** as probabilidades conhecidas de todos os eventos A_i e B um evento qualquer de **S** tal que conhecemos todas as probabilidades condicionais **P(B/A_i)**. Então para cada "i" teremos:

$$P(B \mid A_1) = \frac{P(A_1)\,P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B \mid A_i)}$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + ... + P(A_n).P(B/A_n)}$$

Relaciona as prob. A priori P[A] com probabilidades a posteriori P[B|A]

EXEMPLO DO TEOREMA DE BAYES

Cor	Urna 1	Urna 2	Urna 3	Total
Preta	3	4	2	9
Branca	1	3	3	7
Vermelha	5	2	3	10
Total	**9**	**9**	**8**	**26**

Escolheu-se uma urna ao acaso e dela extraiu-se uma bola ao acaso, verificando-se que a bola é branca. Qual a probabilidade de a bola ter vindo da urna 2?

Solução:

Probabilidades *a priori*: $P(U_1) = 1/3$; $P(U_2) = 1/3$; $P(U_3) = 1/3$;

Probabilidades *a posteriori*: $P(br/U_1) = 1/9$; $P(br/U_2) = 1/3$; $P(br/U_3) = 3/8$;

$$P(U_2/br) = \frac{P(U_2).P(br/U_2)}{P(U_1).P(br/U_1) + P(U_2).P(br/U_2) + P(U_3).P(br/U_3)} =$$

$$= \frac{1/3.1/3}{1/3.1/9 + 1/3.1/3 + 1/3.3/8} = 0{,}4067$$

TABELA DE CONTINGÊNCIA

Em uma pesquisa de Marketing perguntou-se a uma amostra de adultos em três cidades se eles gostavam de um novo suco.

	Campinas	São José	Ribeirão	Total
Sim	100	150	150	400
Não	125	130	95	350
Não sabe	75	170	5	250
Total	300	450	250	1.000

Uma das respostas é selecionada ao acaso. Determine:

1. *P*(sim)
2. *P*(São José)
3. *P*(Ribeirão ou Não sabe)
4. *P*(não, dado Ribeirão)
5. *P*(Campinas e Sim)

EXERCÍCIO 1

Foi feita uma pesquisa com funcionários de três fábricas. A pergunta era qual fator é mais importante para escolher o local de trabalho. As opções eram: proximidade da residência, salário e benefícios. As respostas seguem abaixo.

	Proximidade	Salário	Benefícios	Total
Fábrica 1	50	50	60	160
Fábrica 2	50	70	50	170
Fábrica 3	30	100	40	170
Total	130	220	150	500

Com base na tabela responda:

a) Qual a probabilidade de um funcionário selecionado ao acaso ser da fábrica 1?

b) Qual a probabilidade de um funcionário selecionado ao acaso pensar que os benefícios são o fator mais importante?

c) Qual a probabilidade de um funcionário selecionado ser da fábrica 2 e achar que o salário é o fator mais importante?

d) Qual a probabilidade de um funcionário selecionado ser da fábrica 2 ou achar que o salário é o fator mais importante?

e) Dado que foi escolhido um funcionário da fábrica 3 qual a probabilidade de ele pensar que a proximidade é o mais importante?

EXERCÍCIO 2

Foi feita uma pesquisa os alunos do período diurno e noturno da faculdade sobre as políticas econômicas adotadas no país, os resultados seguem abaixo:

Período	Sexo	Opinião sobre as políticas econômicas			
		Contra	A Favor	Sem opinião	**Total**
Diurno	Feminino	20	80	20	**120**
	Masculino	80	90	80	**250**
Noturno	Feminino	40	80	20	**140**
	Masculino	120	100	10	**230**
Total		**260**	**350**	**130**	**740**

a) Qual a chance de escolher uma pessoa do sexo masculino e sem opinião sobre as políticas econômicas?

b) Qual a chance de escolher uma mulher contrária à política econômica?

c) Dentre os estudantes do noturno, qual a chance de escolher um que seja a favor das políticas econômicas?

d) Qual a chance de escolher uma pessoa sem opinião, sabendo-se que é do sexo feminino?

EXERCÍCIO 3

Defina o espaço amostral de cada um dos seguintes experimentos:

a) lançamento simultâneo de três moedas;

b) distribuição de sexo de uma família com três filhos;

c) lançamento simultâneo de dois dados (não viciados);

d) retirada de duas cartas de um baralho com 8 cartas, sendo 4 damas e 4 valetes;

e) retirada de duas bolas sucessivamente, de uma urna com cinco bolas, sendo três brancas e duas amarelas.

EXERCÍCIO 4

Dois dados são lançados. Pede-se:

a) enumere o evento A = {a soma dos pontos é 9};

b) enumere o evento B = {a soma dos pontos é 7};

c) calcule a probabilidade do evento A;

d) calcule a probabilidade do evento B;

e) calcule a probabilidade de ocorrer A ou B;

f) calcule a probabilidade de ocorrer A e B;

EXERCÍCIO 5

São dadas duas urnas:

Cor	Urna A	Urna B	Total
Preta	2	3	5
Branca	5	12	17
Vermelha	3	5	8
Total	10	20	30

a) Calcular a probabilidade de retirar uma bola branca da urna "A";

b) Determine a probabilidade de retirarmos uma bola branca ou vermelha da urna "A";

c) Determine a probabilidade de retirarmos uma bola branca da urna "A" e uma bola vermelha da urna "B";

d) Qual a probabilidade de serem retiradas duas bolas vermelhas da urna "A", com reposição?;

e) Qual a probabilidade de serem retiradas duas bolas pretas da urna "B"? (sem reposição);

EXERCÍCIO 6

A probabilidade de o aluno "X" resolver este problema é de 3/5, e de o aluno "Y" é de 4/7. Qual a probabilidade do Problema ser Resolvido?

EXERCÍCIO 7

Um grupo de 100 pessoas apresenta, de acordo com o sexo e qualificação a seguinte composição:

Sexo	Especializados	Não especializados	Total
Homens	21	39	60
Mulheres	14	26	40
Total	**35**	**65**	**100**

Calcular:

a) A probabilidade de um escolhido ser homem.

b) A probabilidade de um escolhido ser mulher e não especializada.

c) Qual a porcentagem dos não especializados?

d) Qual a porcentagem dos homens não especializados?

e) Se o sorteado é especializado, qual a probabilidade de ser mulher?

f) Se o sorteado for homem, qual a probabilidade de ser não especializado?

EXERCÍCIO 8

Uma urna contém quatro bolas brancas, cinco azuis e seis pretas em uma outra temos cinco bolas brancas, seis azuis e duas pretas. Extrai-se uma bola de cada urna, na seqüência estabelecida anteriormente, qual a probabilidade:

a) de que ambas sejam da mesma cor?

b) da primeira ser azul e a segunda ser preta?

c) de uma ser azul e a outra ser preta?

d) da primeira ser branca e a segunda não ser branca?

EXERCÍCIO 9

A probabilidade da classe "A" comprar um carro é 3/4, da "B" é 1/6 e da "C", 1/20.

A probabilidade de o indivíduo da classe "A" comprar um carro da marca "W" é 1/10; de B comprar da marca "W" é 3/5 e de C é 3/10. Em certa loja um indivíduo comprou um carro da marca "W".

Qual a probabilidade de que o indivíduo:

a) Da classe "A" o tenha comprado?

b) Da classe "B" o tenha comprado?

c) Da classe "C" o tenha comprado?

EXERCÍCIO 10

Três máquinas M_1, M_2 e M_3 produzem respectivamente 40%, 50% e 10% do total de peças de uma fábrica. A porcentagem de peças defeituosa nas respectivas máquinas é 3%, 5% e 2%. Uma peça é sorteada ao acaso e verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina:

a) M_1

b) M_2

c) M_3