ჯემალ როგავა

რიცხვითი ანალიზი

II

(ლექციების კურსი)

თბილისი
2019

თავი I

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

შესავალი

ბუნებაში და საზოგადოებაში მიმდინარე მთელი რიგი პროცესების (ფიზიკური, ეკოლოგიური, ბიოლოგიური, ეკონომიკური, სოციოლოგიური და სხვა) შესწავლის ერთ-ერთ მთავრ აპარატს წარმოადგენს მათი რიცხვითი მოდელირება კომპიუტერზე, რომელიც შესაძლებელია მხოლოდ რიცხვითი ანალიზის მეთოდების საფუძველზე.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: რაში მდგომარეობს ამა, თუ იმ პროცესის შესწავლის დედააზრი? ჩვენ შევეცდებით ამ კითხვაზე პასუხი გავცეთ რამდენიმე წინადადებით. რაიმე პროცესის შესწავლა ნიშნავს ვიპოვოთ იმ პარამეტრების მნიშვნელობები, რომლებიც ახასიათებენ ამ პროცეს (ვთქვათ მაგალითად, თუ ვაკეთებთ ამინდის პროგნოზს, ეს პარამეტრები შეიძლება იყოს: ტემპერატურა, წნევა, ჰაერის ტენიანობა, ქარის სიჩქარე და ა. შ.). ხშირ შემთხვევაში საჭიროა ასევე ვიცოდეთ შესასწავლი პროცესის მახასიათებელი პარამეტრების ცვალებადობა დინამიკაში. დასმული ამოცანის გადაწყვეტისათვის ჩვენ დაგვჭირდება იმ კანონზომიერებების დადგენა, რომელიც უნდა არსებობდეს მახასიათებელ პარამეტრებს შორის. თუ შესაძლებელი გახდა მიმართება პარამეტრებს შორის აღიწეროს მათემატიკური დამოკიდებულებების საშუალებით, მაშინ ასეთ დამოკიდებულებებს უწოდებენ მათემატიკურ მოდელებს. მათემატიკური მოდელის შედგენა არის პირველი ნაბიჯი განსახილველი პროცესის შესწავლის გზაზე. მათემატიკური მოდელის ბრწყინვალე მაგალითებს წარმოადგენენ ნიუტონის კანონები. უმეტეს შემთხვევაში მათემატიკური მოდელებია: დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებები, ინტეგრო-დიფერენცილური განტოლებები, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა და უტოლობათა სისტემები (ასეთი მოდელები გვხდება ეკონომიკური პროცესების შესწავლისას) და სხვა სახის მათემატიკური ობიექტები.

შემდეგი ნაბიჯი არის მათემატიკური მოდელის ანალიზი და რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმის აგება. თუ მოდელი იმდენად რთულია, რომ მისი შესწავლა შეუძლებელია დღეს არსებული მათემატიკური აპარატით ან ჩვენს მიერ ამ მოდელისათვის აგებული რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმის კომპიუტერზე განხორციელება შეუძლებელია რეალურ დროში, დიდი მოცულობის გამოთვლების გამო, მაშინ იძულებული ვართ მოდელი გავამარტივოთ. დაწვრილებით უნდა გავაანალიზოთ თითოეული წევრი და მათი წვლილის მიხედვით ზოგი მათგანი შევინარჩუნოთ ზოგი – უგულვებელვყოთ, ამასთან პარალელურად უნდა გავამარტივოთ რიცხითი რეალიზაციის ალგორითმი იმდენად, რომ ის გახდეს კომპიუტერზე განხორციელებადი რეალურ დროში და ამ გზით შევეცადოთ განსახილველი პროცესის მახასიათებელი პარამეტრების შესახებ შეძლებისდაგვარად რეალურთან ახლოს მდგომი ინფორმაციის მიღებას.

შეიძლება მათემატიკური მოდელი პირვანდელი სახით ისეთია, რომ მისი რიცხვითი რეალიზაცია კომპიუტერზე შეუძლებელი იყოს. მაშინ მისი შეცვლა ხდება მაახლოებელი (მაპროქსიმირებელი) მოდელით, რომლისთვისაც უკვე შესაძლებელია რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმის აგება. ამასთან დაკავშირებით ისმება რამოდენიმე საკითხი: პირველი, მაპროქსიმირებელი მოდელი რამდენად ახლოს არის საწყის მოდელთან. ამ თვისების მახასიათებელ ზომას უწოდებენ აპროქციმაციის ცდომილებას. თუ ის დასაშვებზე მეტია სათუოა ველოდოთ საძებნი პარამეტრებისთვის ისეთი მნიშვნელობებს, რომლებიც ახლოსაა რეალურთან. მეორე საკითხი ეხება მაპროქსიმირებელი მოდელის მდგრადობას. ეს ნიშნავს, თუ ამოცანის გამოსავალი პარამეტრების საწყის მნიშვნელობებს მცირეთი შევცვლით, მაშინ საძებნი პარამეტრების საბოლოო მნიშვნელობები მცირეთი შეიცვლება. ამ თვისების მნიშვნელობა სრულიად ცხადია. ჯერ ერთი ის უშუალოდაა დაკავშირებული დამრგვალების ცდომილებასთან, რომელიც წარმოიშობა მაპროქსიმირებელი მოდელის კომპიუტერზე რიცხვითი რეალიზაციის დროს. მეორე ძლიერი არგუმენტი არის შემდეგი ცნობილი ფაქტი (შეიძლება ითქვას პრინციპი): მდგრადობა აპროქსიმაციასთან ერთად უზრუნველყოფს შესასწავლი პროცესის მახასიათებელი პარამეტრებისათვის რეალურთან ახლოს მდგომი მნიშვნელობების მიღებას.

დიდია ალბათობა იმისა, რომ მაპროქსიმირებელ მოდელს ჰქონდეს ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებები, თუ მისი შერჩევისას ვიხემძღვანელებთ იმ მოსაზრებით, რომ მაპროქსიმირებელ მოდელს მემკვიდრეობით გადაეცეს ყველა ძირითადი ინფორმაცია პირვანდელი მოდელის შესახებ.

ჩვენ ეხლა უკვე შეგვიძლია ვთქვათ, თუ რას წარმოადგენს დისციპლინა რიცხვითი ანალიზი. რიცხვითი ანალიზი არის გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგი, რომლის მთავარ საგანს წარმოადგენს მაპროქსიმირებელი მოდელებისა და მათი რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმების აგება და გამოკვლევა.

კარგად არის ცნობილი, რომ რიცხვითი ანალიზის მეთოდების განვითარებას მძლავრი ბიძგი მისცა სწორედ კომპიუტერის შექმნამ და შესაძლებელი გახადა უაღრესად პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა.

რიცხვითი ანალიზი, შეიძლება ითქვას, გენერირებას ახდენს სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების, თეორიული მათემატიკისა და კომპიუტერული ტექნოლოგიების საფუძველზე. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ კარგი რიცხვითი მეთოდების შექმნა შეუძლებელია თეორიული მათემატიკისა და კომპიუტერული ტექნოლოგიის მიღწევების გაუთვალისწინებლად. ძლიერი უკუკავშირის არსებობის გამო, თავის მხრივ რიცხვითი ანალიზი ბიძგს აძლევს თეორიული მათემატიკის მთელი რიგი დარგებისა და კომპიუტერული ტექნოლოგიის განვითარებას.

§1. ამოცანის დასმა

კარგად არის ცნობილი, რომ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება მთელი რიგი მექანიკური, ფიზიკური, ქიმიური და სხვა პროცესები. კონკრეტულმა გამოყენებითმა ამოცანამ შეიძლება მიგვიყვანოს ნებისმიერი რიგის დიფერენციალურ განტოლებამდე ან განტოლებათა სისტემამდე.

როგორც ცნობილია, p რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$u^{(p)}(x) = f\left(x, u, u', u'', \ldots, u^{(p-1)}\right)$$

$u^{(k)}(x) = u_k(x)$ აღნიშვნის საშუალებით შეიძლება დავიყვანოთ მის ექვივალენტურ პირველი რიგის განტოლებათა სისტემამდე:

$$u'_k(x) = u_{k+1}(x), \qquad k = 0, 1, \ldots, p-2,$$
$$u'_{p-1}(x) = f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}),$$

სადაც $u_0(x) = u(x)$. ანალოგიურად, ნებისმიერი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა შეიძლება შევცვალოთ პირველი რიგის სისტემით, ამიტომ შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ პირველი რიგის განტოლებათა სისტემებს:

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \ldots, u_p), \quad 1 \le k \le p, \tag{1.1}$$

სიმოკლისათვის ჩავწეროთ ის ვექტორული სახით:

$$u'(x) = f(x, u(x)), \tag{1.2}$$

$$u = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}, \qquad f = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$$

ცნობილია, რომ p რიგის (1.1) სისტემას გააჩნია ოჯახი ამონახსნებისა, რომელიც საზოგადოდ დამოკიდებულია $c_1, c_2, \ldots, c_p$ პარამეტრებზე. ცხადია ეს ამონახსნები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით: $u = u(x, c)$, $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$. პარამეტრების მნიშვნელობათა განსაზღვრისათვის $u_k(x)$ ფუნქციას უნდა დავადოთ დამატებითი p პირობა.

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის განასხვავებენ ამოცანების სამ ძირითად ტიპს: კოშის ამოცანას, სასაზღვრო ამოცანას და ამოცანას საკუთრივ მნიშვნელობებზე.

კოშის ამოცანას (ამოცანა საწყისი პირობებით) გააჩნია შემდეგი სახის დამატებითი პირობები:

$$u_k(x_0) = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{1.3}$$

ე.ი. მოცემულია ყველა ფუნქციის მნიშვნელობა ერთსა და იმავე $x = x_0$ წერტილში. ეს პირობები შეიძლება განვიხილოთ როგორც ინტეგრალური წირის საწყისი წერტილის $(x_0, y_1, y_2, \ldots, y_p)$ კოორდინატების მოცემა $p+1$ განზომილებიან სივრცეში. ვინაიდან, როგორც წესი, ამონახსნს ეძებენ რაიმე $x_0 \le x \le X$ (ან $X \le x \le x_0$) მონაკვეთზე, ამიტომ $x = x_0$ წერტილი შეიძლება ჩავთვალოთ მონაკვეთის საწყის წერტილად.

გავიხსენოთ, რომ თუ (1.1)-ის მარჯვენა მხარეები უწყვეტია რაიმე არეში, რომელიც მოიცავს $(x_0, y_1, y_2, \ldots, y_p)$ წერტილს და აკმაყოფილებენ ლიფშიცის პირობას $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ცვლადების მიმართ, მაშინ კოშის ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს და ის უწყვეტად არის დამოკიდებულია საწყისი წერტილის კორდინატებზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამოცანა კორექტულად არის დასმული. გარდა ამისა, თუ მარჯვენა მხარეებს აქვთ m რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები ყველა არგუმენტის მიმართ, მაშინ $u(x)$ ამონახსნს ექნება $m+1$ რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებული x-ის მიმართ.

§2. ამოხსნის მეთოდები

ისინი შეგვიძლია პირობითად დავყოთ ზუსტ, მიახლოებით და რიცხვით მეთოდებად. ზუსტს მიეკუთვნებიან ის მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი გამოვსახოთ ელემენტარული ფუნქციების ან ამ ფუნქციებიდან კვადრატურების საშუალებით. განტოლებათა კლასები, რომელთათვის დამუშავებულია ზუსტი ამონახსნის მიღების მეთოდები, შედარებით ვიწროა და მოიცავს პრაქტიკაში წამოჭრილ ამოცანათა მხოლოდ მცირე ნაწილს. მაგალითა, დამტკიცებულია, რომ

$$u'(x) = x^2 + u^2(x) \qquad (2.1)$$

მარტივი განტოლების ამონახსნი ელემენტარულ ფუნქციებში არ გამოისახება, ხოლო

$$u'(x) = \frac{u - x}{u + x} \qquad (2.2)$$

განტოლება შეგვიძლია ვაინტეგროთ და ვიპოვოთ ზოგადი ამონახსნი

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + u^2\right) + arctg\,\frac{u}{x} = c \qquad (2.3)$$

თუმცა, იმისათვის რომ შევადგინოთ u(x)-ის მნიშვნელობათა ცხრილი, უნდა ვიპოვოთ (2.3) ტრანსცენდენტული განტოლების რიცხვითი ამონახსნი. ეს ამოცანა კი შეიძლება ითქვას, არარის უფრო მარტივი, ვიდრე (2.1) განტოლების რიცხვითი ინტეგრება.

მიახლოებითს ვუწოდებთ ისეთ მეთოდს, რომელიც იძლევა საშუალებას u(x) ზუსტი ამონახსნი მივიღოთ როგორც რომელიღაც $y_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი. ამასთან $y_n(x)$ გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების ან ამ ფუნქციებიდან კვადრატურების საშუალებით. საკმარისად დიდი n-თვის $y_n(x)$-ს შეგვიძლია ვუწოდოთ მიახლოებითი ამონახსნი.

რიცხვითი მეთოდები – ეს არის u(x) ამონახსნის მიახლოებითი (ზოგჯერ ზუსტი) მნიშვნელობების გამოთვლის ალგორითმები ბადის x_n წერტილებში. რიცხვითი მეთოდები არ იძლევიან (1.1) სისტემის ზოგადი ამონახსნის მოძებნის საშუალებას. მათ შეუძლიათ მოგვცენ მხოლოდ რაიმე კერძო ამონახსნი (მაგალითად კოშის ამოცანის ამონახსნი). ეს არის რიცხვითი მეთოდების ძირითადი ნაკლი. სამაგიეროდ, ისინი გამოიყენება განტოლებათა ფართო კლასისათვის. რიცხვითი მეთოდები შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ კორექტულად დასმული ამოცანებისთვის. თუმცა შევნიშნოთ, რომ ამ მეთოდების გამოყენებისათვის კორექტულობის პირობის ფორმალური შესრულება შეიძლება საკმარისი არ აღმოჩნდეს. საჭიროა, რომ ამოცანა იყოს კარგად განპირობებული (მდგრადი), ე.ი. საწყისი პირობების მცირე შეცვლა უნდა იწვევდეს ამონახსნის საკმარისად მცირედ შეცვლას. თუ ეს პირობა შესრულებული არ არის, მაშინ რიცხვითი მეთოდის გამოყენებამ შეიძლება მკვეთრად შეცვალოს ამონახსნი.

განვიხილოთ ამოცანა:

$$u'(x) = u - x\,, \qquad 0 \le x \le 100\,, \tag{2.4}$$

$$u(0) = 1 \tag{2.5}$$

(2.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს ერთ ნებისმიერ მუდმივს, $u(x,c) = 1 + x + ce^x$. (2.5) საწყისი პირობის დროს $c = 0$, ამრიგად u(100)=101. ამ შემთხვევაში საწყისი პირობის მცირედ შეცვლა, $\bar{u}(0) = 1{,}000001$ მცირედ ცვლის მუდმივას – $\bar{c} = 10^{-6}$. მაგრამ $\bar{u}(100) \approx 2{,}7 \cdot 10^{37}$, ე.ი. ამონახსნი მკვეთრად შეიცვალა.

§3. პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების გამოსათვლელი ფორმულები

ვთქვათ მოცემულია უწყვეტი და გარკვეულ რიგამდე უწყვეტად წარმოებადი $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული $[a,b]$ შუალედზე. ავიღოთ (a,b) ღია შუალედზე რაიმე x_0 წერტილი. ვთქვათ $h>0$ ისეთია, რომ x_0+h და x_0-h წერტილები ეკუთნის $[a,b]$-ს. ჩვენი მიზანია გამოვიყვანოთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების რიცხვითი მნიშვნელობების გამოსათვლელი ფორმულები მითითებულ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობების საშუალებით. ამისთვის ჩვენ დაგვჭირდება ტეილორის ფორმულა. მას აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x), \quad (3.1)$$

სადაც

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

შევნიშნოთ, რომ $R_{n+1}(x)$ უწოდებენ ნაშთით წევრს.

(3.1) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + R_3(x_0+h) \quad (3.2)$$

და

$$f(x_0-h) = f(x_0) - \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + R_3(x_0-h), \quad (3.3)$$

სადაც

$$R_3(x_0 \pm h) = \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_0 \pm h} (x-x_0)^2 f'''(x)dx.$$

თუ (3.2) ტოლობას გამოვაკლებთ (3.3) და განვსაზღვრავთ $f'(x_0)$, მივიღებთ:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + R(h), \quad (3.4)$$

სადაც

$$R(h) = \frac{1}{2h}\big(R_3(x_0+h) - R_3(x_0-h)\big).$$

ცხადია $R(h)$ ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შეფასება

$$|R(h)| \le \frac{1}{6} c_3 h^2, \qquad (3.5)$$

სადაც

$$c_3 = \max_x |f'''(x)|, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

თუ h საკმარისად მცირეა, მაშინ (3.5) შეფასების თანახმად (3.4) ტოლობიდან გვაქვს:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}. \qquad (3.6)$$

(3.6) ფორმულა გვაძლევს $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის მიახლოებით მნიშვნელობას (საკმარისად მაღალი სიზუსტით) x_0 წერტილში მეზობელ სიმეტრიულ წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობების საშუალებით. (3.6) ფორმულას უწოდებენ პირველი რიგი წარმოებულისთვის ცენტრალურ სხვაობიან ფორმულას.

გამოვიყვანოთ ფორმულა მეორე რიგის წაროებულის გამოთვლისათვის. (3.1) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \left(R_4(x_0+h) + R_4(x_0-h)\right).$$

აქედან მიიღება

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + R(h), \qquad (3.7)$$

სადაც

$$R(h) = \frac{1}{h^2}\left(R_4(x_0+h) + R_4(x_0-h)\right).$$

ცხადია $R(h)$ ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შეფასება

$$|R(h)| \le \frac{1}{12} c_4 h^2, \qquad (3.8)$$

სადაც

$$c_4 = \max_x |f^{(IV)}(x)|, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

თუ (3.7) ფორმულაში გადავაგდებთ $R(h)$ ნაშთით წევრს, რომელიც საკმარისად მცირეა h-ის სიმცირის გამო, მაშინ მეორე რიგის წარმოებულისთვის მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ფორმულას:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}. \qquad (3.9)$$

(3.6) და (3.9) მიახლოებით ფორმულებთან დაკავშირებით მიზანშეწონილად მიგვაჩნია გავიხსენოთ მათემატიკური ანალიზიდან უსასრულო მცირე სიდიდის

რიგის ცნება. ცხადია დასახელებული ფორმულების ნაშთითი წევრი $R(h)$ უსასრულო მცირე სიდიდეა, რადგან $R(h) \to 0$, როცა $h \to 0$. მაგრამ (3.5) და (3.8) შეფასებების თანახმად $R(h)$-ის ნულისკენ მისწრაფების რიგი ორის ტოლია h-ის მიმართ. უფრო ზუსტად $\frac{R(h)}{h^2} \to c$, როცა $h \to 0$ ($c = const$). ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $R(h)$ არის მეორე რიგის უსასრულო მცირე h-ის მიმართ და წერენ $R(h) = O(h^2)$. ამრიგად (3.6) და (3.9) მიახლოებით ფორმულების ცდომილების რიგი არის $O(h^2)$.

ცხადია (3.2) და (3.3) ფორმულებიდან პირველი რიგის წარმოებულისათვის შესაბამისად მიიღება შემდეგი ფორმულები:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + O(h), \tag{3.10}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + O(h). \tag{3.11}$$

შემდგომში ჩვენ ასევე დაგვჭირდება ფორმულა

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2} + O(h^2), \tag{3.12}$$

რომელიც მიიღება (3.2) და (3.3) ფორმულებიდან. ცხადია (3.12) ფორმულა არის h-ის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტის იმ შემთხვევაში, თუ $y = f(x)$ ფუნქციას გააჩნია უწყვეტი წარმოებული მეორე რიგამდე ჩათვლით.

§4. ეილერის ცხადი სქემა

4.1. სქემის აგება

განვიხილოთ კოშის ამოცანა:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad x_0 \le x \le X, \tag{4.1}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{4.2}$$

სადაც $f(x, y(x))$ უწყვეტი ფუნქცია განსახილველ შუალედში.

როგორც ცნობილია, თუ (4.1)-ის მარჯვენა მხარე $f(x, y)$ უწყვეტია რაიმე არეში, რომელიც მოიცავს (x_0, y_0) წერტილს და აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას y ცვლადების მიმართ, მაშინ (4.1), (4.2) კოშის ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს და ის უწყვეტად არის დამოკიდებულია საწყისი წერტილის კორდინატებზე.

გავყოთ $[x_0, X]$ შუალედი $n\,(>2)$ ტოლ ნაწილად, დაყოფის წერტილები (კვანძითი წერტილები) ავღნიშნოთ x_k:

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0,1,\ldots,n, \quad h = \frac{X - x_0}{n}.$$

(4.1) განტოლება $x = x_k$ წერტილში ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = f(x_k, y(x_k)) + R_k(h), \quad k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{4.3}$$

სადაც

$$R_k(h) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - y'(x_k).$$

(3.10) ფორმულის თანახმად $R_k(h) = O(h)$. ეს ნიშნავს, თუ h მცირეა, მაშინ $R_k(h)$ ნაშთითი წევრიც მცირეა. თუ მას გადავაგდებთ (4.3)-ში, მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k), \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{4.4}$$

ჩვენ (4.4)-ში სპეციალურად დავწერეთ y_k და არა $y(x_k)$. $y(x_k)$ არის $y(x)$ ამონახსნის ზუსტი მნიშვნელობა $x = x_k$ წერტილში. ვინაიდან ჩვენ გადავაგდეთ (4.3)-ში ნაშთითი წევრი, ამიტომ მიღებულ (4.4) სისტემას არ დააკმაყოფილებს $y(x_k)$, ამიტომ ბუნებრივია, მისი ამონახსნი აღვნიშნოთ y_k-თი და

გამოვაცხადოთ იგი $y(x)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $x = x_k$ წერტილში, $y(x_k) \approx y_k$.

(4.4) სქემას უწოდებენ ეილერის სქემას. (4.4)-დან გვაქვს:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.5}$$

ვიცით რა y_0 (4.5)-დან $k=1$-თვის ცხადად ვპოულობთ y_1-ს. ანალოგიურად $k=2$-თვის (4.5)-დან y_1-ის საშუალებით ვპოულობთ y_2-ს და ა. შ. (4.5) დამოკიდებულების მთავარი განმასხვავებელი ნიშანი არის ის, რომ უცნობი სიდიდის y_{k+1}-ის განსაზღვრა ხდება ცხადად ცნობილი სიდიდეების (x_k, y_k და $f(x_k, y_k)$) საშუალებით. აქედან გამომდინარე (4.4) (იგივე (4.5)) სქემას უწოდებენ ეილერის ცხად სქემას.

4.2. სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის ცნება (ეილერის სქემის მაგალითზე)

საკითხი, რომელსაც ჩვენ ამ პარაგრაფში შევეხებით მნიშვნელოვანია. იგი რიცხვითი ანალიზის განუყოფელ ნაწილს წარმოადგენს. რიცხვითი ანალიზი I-დან კარგად არის ცნობილი, თუ როგორ უნდა მიუახლოვდეთ შუალედში უწყვეტ ფუნქციას, ვთქვათ მაგალითად ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომის საშუალებით. ამ იდეის აზრი მდგომარეობს იმაში, რომ რთულ მათემატიკურ ობიექტს ვუახლოვდებით მარტივი მათემატიკური ობიექტის საშუალებით (ამ შემთხვევაში პოლინომი არის მარტივი მათემატიკური ობიექტი. მარტივია მისი გაწარმოება, ინტეგრება და სხვა ოპერაციების ჩატარება). მაახლოებელ ობიექტს უწოდებენ სწორედ მაპროქსიმირებელ ობიექტს.

(4.1), (4.2) ამოცანას უწოდებენ უწყვეტ ამოცანას. თუ $f(x, y)$ ფუნქცია ისეთია, რომ მოვახერხეთ (4.1), (4.2) ამოცანის ამონახსნის პოვნა ანალიზური სახით, მაშინ შეგვილია გამოვითვალო მისი მნიშვნელობა $[x_0, X]$ შუალედის ყოველ ფიქსირებულ წერტილში. (4.1), (4.2) ამოცანის მაახლოებელ (4.4) განტოლებას უწოდებენ სხვაობიან განტოლებას. იგი გვაძლევს ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობებს მკაცრად განსაზღვრულ დისკრეტულ წერტილებში. აქედან გამომდინარე (4.4) სისტემას შეიძლება ვუწოდოთ დისკრეტული ამოცანა. ამრიგად უწყვეტ ამოცანას, რომელიც წარმოადგენს

დიფერენციალურ განტოლებას საწყისი პირობით, ვუახლოვდებით დისკრეტული ამოცანით, რომელიც წარმოადგენს ცხად სისტემას. ორი რადიკალურად განსხვავებული მათემატიკური ობიექტი, მაგრამ ერთმანეთან ახლოს მდგომი.

(4.4) დისკრეტულ ამოცანას უწოდებენ (4.1), (4.2) უწყვეტი ამოცანის მაპროქსიმირებელ ამოცანას. ამბობენ, რომ (4.4) ამოცანა ახდენს (4.1), (4.2) ამოცანის აპროქსიმაციას, თუ ნაშთითი წევრი $R_k(h) \to 0$, როცა $h \to 0$. ვიტყვით, რომ სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის რიგი არის $p\,(>0)$, თუ ნაშთითი წევრი არის $O(h^p)$ რიგის. (4.4) სქემისთვის $R_k(h)=O(h)$, ამიტომ მისი აპროქსიმაციის რიგი არის ერთის ტოლი.

4.3. მიახლოებითი ამონახსნი ცდომილების შეფასება ეილერის ცხადი სქემისთვის (კრებადობა)

ჩვენი მიზანია შევაფასოთ (4.4) სხვაობიანი სქემისთვის მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება. ავღნიშნოთ იგი z_k-თი, $z_k = y(x_k) - y_k$. გამოვაკლოთ (4.3) ტოლობას (4.4) ტოლობა, მივიღებთ:

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{h} = \left[f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k) \right] + R_k(h), \quad k = 0,1,\dots,n-1. \tag{4.5}$$

ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებული მეორე არგუმენტის მიმართ. მაშინ ლაგრანჟის სასრული ნაზრდის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k) = f'_y(x_k, y_k + \theta z_k) z_k, \quad \theta \in [0,1].$$

ამის გათვალისწინებით (4.5) გამომდინარეობს:

$$|z_{k+1}| \le |1+\alpha_k h| |z_k| + h |R_k(h)|, \quad k = 0,1,\dots,n-1, \tag{4.6}$$

სადაც $\alpha_k = f'_y(x_k, y_k + \theta z_k)$. თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ $-M \le f'_y \le 0$ ($M = const > 0$) და $h \le 2/M$, მაშინ (4.6)-დან გამომდინარეობს:

$$|z_{k+1}| \le |z_k| + h |R_k(h)|, \quad k = 0,1,\dots,n-1. \tag{4.7}$$

რადგან $R_k(h) = O(h)$, ამიტომ (4.7)-დან მიიღება:

$$|z_{k+1}| \le |z_k| + ch^2, \quad k = 0,1,\dots,n-1.$$

ცხადია აქედან გამომდინარეობს:

$$|z_k| \le |z_0| + c(kh^2) \le ch, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

ამრიგად მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება h-ის მიმართ არის პირველი რიგის, $y(x_k) - y_k = O(h)$.

4.4. მოდელური ამოცანისთვის ეილერის სქემის მდგრადობა

იმისათვის, რომ კარგად გავერკვეთ სხვაობიანი სქემის მდგრადობის საკითხში განვიხილოთ მარტივი მოდელური ამოცანა:

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u(t), \quad t > 0, \tag{4.8}$$

$$u(0) = u_0, \tag{4.9}$$

სადაც $\lambda > 0$.

ცხადია (4.8), (4.9) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით $u(t) = e^{-t\lambda} u_0$.

(4.8), (4.9) ამოცანისთვის ეილერის ცხად სქემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = -\lambda u_k, \quad k = 0,1,\ldots \quad . \tag{4.10}$$

აქედან გვაქვს:

$$u_{k+1} = (1 - h\lambda) u_k, \quad k = 0,1,\ldots \quad .$$

ამ რეკურენტული დამოკიდებულებიდან მიიღება:

$$u_k = (1 - h\lambda)^k u_0, \quad k = 1,2,\ldots \quad .$$

თუ $0 < h \le 2/\lambda$, მაშინ მართებულია შეფასება:

$$|u_k| \le |u_0|. \tag{4.11}$$

ეს უტოლობა გვეუბნება, თუ საწისი მონაცემი u_0 მცირედ შეშფოთდება (მცირედ შეიცვლება), მაშინ u_k მიახლოებითი ამონახსნი (ნებისმიერი k-თვის) ასევე მცირედ შეშფოთდება. მართლაც, თუ (4.11)-ში u_0-ის ნაცვლად ავიღებთ $\tilde{u}_0$-ს, მაშინ მივიღებთ ახალ მიახლოებას $\tilde{u}_k$-ს,

$$\tilde{u}_k = (1 - h\lambda)^k \tilde{u}_0, \quad k = 1,2,\ldots \quad . \tag{4.12}$$

თუ (4.11)-ს გამოვაკლებთ (4.12)-ს, მივიღებთ:

$$u_k - \tilde{u}_k = (1 - h\lambda)^k (u_0 - \tilde{u}_0), \quad k = 1,2,\ldots \quad .$$

აქედან (4.11)-ის თანახმად გამომდინარეობს:

$$|u_k - \tilde{u}_k| \le |u_0 - \tilde{u}_0|.$$

ცხადია, აქედან კი გამომდინარეობს, რომ თუ u_0 საწყისი მონაცემის შეშფოთება $u_0 - \tilde{u}_0$ მოდულით არ აღემატება $\varepsilon\,(>0)$, მაშინ u_k მიახლოებითი ამონახსნის შეშფოთება $u_k - \tilde{u}_k$ მოდულით ასევე არ აღემატება ε-ს.

სხვაობიანი სქემის ამ თვისებას უწოდებენ მდგრადობას. იგი მნიშვნელოვანია, რადგან კომპიუტერში საწყისი მონაცემები აიღება დამრგვალებით და ამასთან თვლაც მიმდინარეობს დამრგვალებით. სქემის მდგრადობა არის იმის გარანტია, რომ კომპუტერზე მიღებული რიცხვითი შედეგები საკმარისად ზუსტია, თუ საწყისი მონაცემები საკმარისად ზუსტად არის აღებული. ამ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ დისკრეტული ამოცანისთვის ადგილი აქვს აპროქსიმაციას.

თუ (4.10)-ში $h > 2/\lambda$, მაშინ $|1-\lambda h| > 1$ და $|u_k| \to \infty$, როცა $k \to \infty$. ამრიგად, თუ დარღვეულია პირობა $0 < h \le 2/\lambda$ ადგილი აქვს არამდგრადობას. აქედან გამომდინარე ეილერის ცხადი სქემა მდგრადია, თუ h (ბიჯი) აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობას. ასეთ სქემებს უწოდებენ პირობითად მდგრად სქემებს.

საბოლოოდ სხვაობიანი სქემის **მდგრადობა** მოკლედ ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: *სხვაობიან სქემას უწოდებენ მდგრადს, თუ შესაბამის დისკრეტულ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და საწყისი მონაცემების მცირედ შეშფოთება იწვევს ამონახსნის მცირედ შეშფოთებას.*

§5. ეილერის არაცხადი სქემები

5.1. პირველი რიგის არაცხადი სქემა

განვიხილოთ (4.1), (4.2) ამოცანისათვის შემდეგი სქემა:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f(x_k, y_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1}$$

ამ სქემის მისაღებად საჭიროა (4.1) განტოლებაში წარმოებული $x = x_k$ წერტილში შევცვალოთ (3.11) ფორმულით, რომლის აპროქსიმაციის რიგია $O(h)$. აქედან გამომდინარე (5.1) სხვაობიანი სქემა ახდეს (4.1), (4.2) ამოცანის აპროქსიმაციას $O(h)$ რიგით, ე. ი. ბიჯის მიმართ პირველი რიგით.

(5.1)-დან მიიღება:

$$y_k - hf(x_k, y_k) = y_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

აქედან $k=1$-თვის გვაქვს:

$$y_1 - hf(x_1, y_1) = y_0 . \qquad (5.3)$$

y_0 ცნობილია საწყისი პირობიდან. y_1, რომ ვიპოვოთ უნდა ამოვხსნათ (5.3) განტოლება. საზოგადოდ, რომ ვიპოვოთ y_k (ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნე-ლობა x_k წერტილში) უნდა ამოვხსნათ (5.2) განტოლება (იგულისხმება წინა მნიშვნელობა y_{k-1} უკვე ნაპოვნია).

(5.1) სქემას უწოდებენ არაცხადს, რადგან მისი განხორციელებისთვის ყოველ ბიჯზე გვიხდება განტოლების ამოხსნა.

გამოვიკვლიოთ (5.1) სქემის მდგრადობა (4.8) მოდელური განტოლებისთვის. ამ შემთხვევისთვის გვაქვს:

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = -\lambda u_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.4)$$

აქედან მიიღება:

$$u_k = \frac{1}{1+h\lambda} u_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

ამ რეკურენტული დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u_k = \frac{1}{(1+h\lambda)^k} u_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

რადგან პირობის თანახმად $\lambda > 0$, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს:

$$|u_k| \le |u_0|.$$

ეს ნიშნავს, რომ (5.4) სქემა მდგრადია ნებისმიერი $h > 0$-თვის. ასეთ სხვაობიან სქემას უწოდებენ უპირობოდ მდგრადს. ამრიგად, როცა $\lambda > 0$ (5.4) არაცხადი სქემა უპირობოდ მდგრადია, განსხვავებით (4.10) ცხადი სქემისგან, რომელიც პირობითად მდგრადია.

5.2. მეორე რიგის სიმეტრიული სქემა

(4.1) განტოლება $x = x_{k+1/2} = x_0 + (k+0,5)h$ წერტილში ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) + f(x_k, y(x_k)) \right] + R_k(h), \qquad (5.5)$$

სადაც $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$R_k(h) = R_{1,k}(h) + R_{2,k}(h),$$

$$R_{1,k}(h) = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - y'(x_{k+1/2}),$$

$$R_{2,k}(h) = f(x_{k+1/2}, y(x_{k+1/2})) - \frac{1}{2}\left[f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) + f(x_k, y(x_k))\right].$$

(3.4) და (3.12) ფორმულების თანახმად შესაბამისად მართებულია შეფასებები $R_{1,k} = O(h^2)$ და $R_{2,k} = O(h^2)$. ამ შეფასებებიდან გამომდინარეობს, რომ $R_k = O(h^2)$. ეს ნიშნავს, რომ $R_k(h)$ ნაშთი საკმარისად მცირეა, როცა h მცირეა. თუ მას გადავაგდებთ (5.5)-ში, მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_{k+1}, y_{k+1}) + f(x_k, y_k)\right], \quad k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{5.6}$$

ამრიგად ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ (5.6) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაციის რიგია $O(h^2)$. მას უწოდებენ სიმეტრიულ სქემას. ისევე როგორც (5.1) ეს სქემაც არაცხადია.

გამოვიკვლიოთ (5.5) სქემის მდგრადობა (4.8) მოდელური განტოლებისთვის. ამ შემთხვევისთვის გვაქვს:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = -\lambda \frac{u_{k+1} + u_k}{2}, \quad k = 0,1,\ldots \quad . \tag{5.7}$$

აქედან მიიღება:

$$u_{k+1} = \frac{1 - 0{,}5h\lambda}{1 + 0{,}5h\lambda} u_k, \quad k = 0,1,\ldots \quad .$$

ამ რეკურენტული დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u_k = \left(\frac{1 - 0{,}5h\lambda}{1 + 0{,}5h\lambda} \right)^k u_0, \quad k = 0,1,\ldots \quad .$$

რადგან პირობის თანახმად $\lambda > 0$, აიტომ აქედან გამომდინარეობს:

$$|u_k| \le |u_0|.$$

ეს ნიშნავს, რომ (5.7) სქემა მდგრადია ნებისმიერი $h > 0$-თვის. ამრიგად, როცა $\lambda > 0$ (5.4) არაცხადი სქემა უპირობოდ მდგრადია, ისევე როგორც (5.1).

§6. მწკრივთა მეთოდი

განვიხილოთ კოშის ამოცანა:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad t \in [t_0, T] \tag{6.1}$$

$$y(t_0) = y_0\,, \tag{6.2}$$

სადაც $f(t, y(t))$ ან $f(t, y)$ არის უწყვეტი და უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია გარკვეულ D არეში. უწყვეტად დიფერენცირებადობას ჩვენ ვითხოვთ იმდენ რიგამდე, რამდენიც ეს საჭიროა მეთოდის დაფუძნებისათვის (იგულისხმება აპროქსიმაცია და კრებადობა). ავიღოთ t-ს რაიმე მნიშვნელობა $t = t_0$. მივცეთ მას ნაზრდი h>0. გამოვსახოთ $y(t_0+h)$-ის მნიშვნელობა $y(t_0)$-ის საშუალებით მისი ტეილორის მწკრივად გაშლის საშუალებით. როგორც ცნობილია, გვაქვს:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \frac{h}{1!} y'(t_0) + \frac{h^2}{2!} y''(t_0) + \ldots$$

ცხადია (6.1) განტოლებიდან გვაქვს:

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$$

ამრიგად $y'(t_0)$ გამოვსახეთ ცნობილი სიდიდეების საშუალებით. ვიპოვოთ $y''(t_0)$ (6.1) განტოლების გამოყენებით. რთული ფუნქციის ვაწარმოებ წესის თანახმად გვაქვს:

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = f_t + f_y \cdot f\,, \tag{6.3}$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $t = t_0$-ს, მივიღებთ:

$$y''(t_0) = f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0) \cdot y'(t_0) = f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0) f(t_0, y_0), \qquad y_0 = y(t_0)$$

ამრიგად, $y''(t_0)$ ასევე გამოვსახეთ, ცნობილი სიდიდეების საშუალებით. ანალოგიურად ვიპოვოთ $y'''(t_0)$. (6.3) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\begin{aligned} y'''(t) &= f_{tt} + f_{ty} \cdot y'(t) + (f_{yt} + f_{yy} \cdot y'(t))y'(t) + f_y \cdot y''(t) = \\ &= f_{tt} + f_{ty} \cdot f + (f_{yt} + f_{yy} \cdot f) f + f_y \cdot y''(t) = f_{tt} + f_{ty} \cdot f + f_{yt} \cdot f + \\ &+ f_{yy} \cdot f^2 + f_y (f_t + f_y \cdot f) = f_{tt} + 2 f_{ty} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_t + f_y^2 \cdot f \end{aligned} \tag{6.4}$$

თუ ამ ფორმულაში ჩავსვამთ $t=t_0$-ს, მაშინ $y'''(t_0)$ გამოისახება ცნობილი სიდიდეებით და ა.შ. ეს პროცესი შეგვიძლია გავაგრძელოთ.

ამრიგად, ვიცით რა $y(t_0)$, ვპოულობთ $y(t_0+h)$-ს, შემდეგ ნაბიჯზე $y(t_0+h)$-ის საშუალებით ვპოულობთ $y(t_0+2h)$-ს და ა.შ.

ამ მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში ხაზი უნდა გაესვას ერთ მნიშვნელოვან ფაქტორს. კერძოდ, ჩვენ შეგვიძლია გავჩერდეთ რომელიმე წევრზე, ვთქვათ, მაგალითად, მეოთხე წევრზე (შევინარჩუნოთ ყველა წევრი $y'''(t_0)$ –ს ჩათვლით). ცხადია, გადაგდებული წევრების რიგი იქნება $0(h^4)$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ t_0 წერტილში სხვაობა ამონახსნის ზუსტ მნიშვნელობასა და მიახლოებით მნიშვნელობას შორის იქნება $0(h^4)$ რიგის. ეს არის ამონახსნის ცდომილება t_0 წერტილში, ამიტომ მას უწოდებენ ლოკალურ ცდომილებას. გლობალურ ცდომილებას უწოდებენ ლოკალური ცდომილების გავრცელებას მთელ შუალედში. როგორც წესი, გლობალური ცდომილება ერთი რიგით ნაკლებია. ეს გამოწვეულია იმით, რომ როცა ჩვენ გამოვდივართ t_0 წერტილიდან და ვაკეთებთ n ნაბიჯს $\left(n\sim\frac{1}{h}\right)$, ამ შემთხვევაში t_0 წერტილში დაშვებული ε ცდომილება იზრდება n-ჯერ. რაც შეეხება ზემოთ მოყვანილი მწკრივის კრებადობას, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ იგი კრებადია ანალიზური ფუნქციისათვის, ე.ი. როცა $f(x,y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^iy^j$. მტკიცდება, რომ მწკრივის კრებადობა გარანტირებულია, თუ $|h|\le\exp\left(-\frac{1}{2}M\right),\quad M=\max|f(x,y)|$.

§7. რუნგე-კუტას მეთოდი (ზოგადი შემთხვევა)

წინა პარაგრაფში განხილული კოშის (6.1)-(6.2) ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ერთ-ერთ ყველაზე გავრცელებულ მეთოდს წარმოადგენს რუნგე-კუტას მეთოდი. ეს მეთოდი პირველად გამოაქვეყნა 1895 წელს რუნგემ და შემდგომ XX საუკუნის დასაწყისში კუტას მიერ გამოქვეყნებულ შრომებში მოხდა მისი განვითარება, ამიტომ დღეს ამ მეთოდს ეწოდება **რუნგე-კუტას მეთოდი**.

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა ცხრილი:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
C_2 & a_{21} & & & & \\
C_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
Cs & a_{s1} & a_{s2} & \ldots\ldots & a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \ldots\ldots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

მაშინ მეთოდს, რომელიც მოიცემა შემდეგი სქემით:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_0, y_0)\\
&k_2 = f(x_0 + c_2 h,\ y_0 + h a_{21} k_1)\\
&k_3 = f(x_0 + c_3 h,\ y_0 + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2))\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_s = f(x_0 + c_s h,\ y_0 + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \ldots + a_{ss-1} k_{s-1}))\\
&y_1 = y_0 + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + b_s k_s)
\end{aligned}
$$

სადაც კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$c_i = \sum_j a_{ij},\ i = 2,3,\ldots,s, \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_s = 1,$$

უწოდებენ რუნგე-კუტას s-სტადიან (s-ეტაპიან) ცხად მეთოდს (6.1)-(6.2) ამოცანისთვის.

§8. რუნგე-კუტას II რიგის სიზუსტის მეთოდი

ცხადია (6.1)-(6.2) კოშის ამოცანა ექვივალენტური შემდეგი ინტეგრალური განტოლების:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t))dt, \qquad t \in [t_0, T] \tag{8.1}$$

$[t_0, T]$ შუალედი დავყოთ n ტოლი ნაწილად. დაყოფის წერტილები აღვნიშნოთ შესაბამისად $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ ბიჯი აღვნიშნოთ h-ით, $h = \dfrac{T - t_0}{n}, \quad n \geq 2$.

(8.1) ფორმულაში ჩავსვათ $t = t_1$, მივიღებთ:

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt \qquad (8.2)$$

(8.2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი ინტეგრალი შევცვალოთ ცენტრალური მართკუთხედის ფორმულით:

$$y(t_1) = y + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) + R(t_0, h), \qquad (8.3)$$

სადაც, როგორც ცნობილია, $R(t_0,h)=0(h^3)$ (ეს არის მართკუთხედის ფორმულის ლოკალური ცდომილების რიგი) იგულისხმება, რომ $f(t,y)$ არის საკმარისად გლუვი ფუნქცია. თუ (8.3) ფორმულაში ნაშთით წევრს გადავაგდებთ, მაშინ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$y_1 = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, \tilde{y}\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)\right) \qquad (8.4)$$

ბუნებრივია, y_1 შეგვიძლია გამოვაცხადოთ $y(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_1$ წერტილში, მაგრამ (8.4) ფორმულას ის ნაკლი აქვს, რომ მარჯვენა მხარეში შედის $\tilde{y}\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)$, რომელიც შეიძლება ითქვას, წარმოადგენს ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობას $t_0 + \frac{h}{2}$ წერტილში. გამოვთვალოთ იგი ეილერის მეთოდის გამოყენებით, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ სქემას:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_1 &= y_0 + hk_2 \end{aligned}\right\} \qquad (8.5)$$

(8.5) სქემა წარმოადგენს რუნგე-კუტას II რიგის სიზუსტის სქემას (ამას ვაჩვენებთ ქვევით). (8.5) სქემას შეესაბამება შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

§9. რუნგე-კუტას სამ ეტაპიანი III რიგის სიზუსტის სქემა

კოშის (6.1)-(6.2) ამოცანისათვის განვიხილოთ შემდეგი ცხრილით (მას უწოდებენ ბუტჩერის ცხრილს) განსაზღვრული სქემა.

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

ამ ცხრილს შეესაბამება შემდეგი სქემა:

$$k_1 = f(x_0, y_0) \tag{9.1}$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{3}h,\ y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right) \tag{9.2}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{2}{3}h,\ y_0 + \frac{2}{3}hk_2\right) \tag{9.3}$$

$$y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{4}k_1 + 0 \cdot k_2 + \frac{3}{4}k_3\right) \tag{9.4}$$

$$y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3\right)$$

გამოვიკვლიოთ ამ სქემის აპროქსიმაციის რიგი. გავშალოთ k_2 ტეილორის მწკრივად, შევინარჩუნოთ h-ის მიმართ II რიგის წევრები. ამ შემთხვევაში ნაშთითი წევრი იქნება $O(h^3)$ რიგის. (9.4) ფორმულაში ჩასმის შემდეგ მისი რიგი გახდება $O(h^4)$, რადგან მრავლდება h-ზე და საბოლოოდ მივიღებთ გაშლას, რომლის ლოკალური სიზუსტე იქნება $O(h^4)$.

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{3}h,\, y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right) = f\left(x_0,\, y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right) + \frac{1}{3}hf_x\left(x_0,\, y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right) +$$

$$+\frac{1}{18}h^2 f_{xx}\left(x_0,\, y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right) + O(h^3) =$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{1}{3}hk_1 f_y(x_0, y_0) + \frac{1}{18}h^2 k_1^2 \cdot f_{yy} +$$

$$+O(h^3) + \frac{1}{3}h\left(f_x(x_0, y_0) + \frac{1}{3}hk_1 f_{xy}(x_0, y_0) + O(h^2)\right) + \frac{1}{18}h^2\left(f_{xx}(x_0, y_0) + O(h)\right) =$$

$$= f + \frac{1}{3}h\left(k_1 f_y + f_x\right) + \frac{1}{18}h^2\left(k_1^2 f_{yy} + 2k_1 f_{xy} + f_{xx}\right) + O(h^3),$$

$$\begin{aligned} k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{3}h,\, y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right) &= f + \frac{1}{3}h\left(k_1 f_y + f_x\right) + \\ &+ \frac{1}{18}h^2\left(k_1^2 f_{yy} + 2k_1 f_{xy} + f_{xx}\right) + O(h^3) \end{aligned} \tag{9.5}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში ჩავსვათ k_1-ის მნიშვნელობა, $k_1 = f(x_0, y_0)$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{3}h,\, y_0 + \frac{1}{3}hk_1\right) &= f + \frac{1}{3}h\left(f \cdot f_y + f_x\right) + \\ \frac{1}{18}h^2\left(f^2 \cdot f_{yy} + 2f \cdot f_{xy} + f_{xx}\right) &+ O(h^3) \end{aligned} \tag{9.6}$$

გავშალოთ ანალოგიურად k_3. ამისათვის გამოვიყენოთ (9.5) გაშლა. თუ მასში h-ს შევცვლით 2h-ით და k_1-ს k_2-ით, მივიღებთ k_3-ის გაშლას:

$$k_3 = f + \frac{2}{3}h\left(k_2 \cdot f_y + f_x\right) + \frac{2}{9}h^2\left(k_2^2 \cdot f_{yy} + 2k_2 f_{xy} + f_{xx}\right) + O(h^3)$$

ჩავსვათ ამ ტოლობაში k_2-ის მნიშვნელობა და შევინარჩუნოთ h-ის მიმართ მეორე რიგის წევრები, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} k_3 &= f + \frac{2}{3}h\left[\left(f + \frac{1}{3}h\left(f \cdot f_y + f_x\right)\right)f_y + f_x\right] + \frac{2}{9}h^2\left(f^2 \cdot f_{yy} + 2f \cdot f_{xy} + f_{xx}\right) + O(h^3), \\ k_3 &= f + \frac{2}{3}h\left(f \cdot f_y + f_x\right) + \frac{2}{9}h^2\left(f \cdot f_y^2 + f_x \cdot f_y + f^2 \cdot f_{yy} + 2f \cdot f_{xy} + f_{xx}\right) + O(h^3) \end{aligned} \tag{9.7}$$

(9.4)-დან (9.7)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
&y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3\right) = \\
&y_0 + h\left\{\frac{1}{4} f + \frac{3}{4}\left[f + \frac{2}{3}h\left(f \cdot f_y + f_x\right) + \frac{2}{9}h^2\left(f \cdot f_y^2 + f_x \cdot f_y + f^2 \cdot f_{yy} + 2f \cdot f_{xy} + f_{xx}\right)\right]\right\} + O(h^4) = \\
&= y_0 + h \cdot f + \frac{1}{2}h^2\left(f \cdot f_y + f_x\right) + \frac{1}{6}h^3\left(f \cdot f_y^2 + f_x \cdot f_y + f^2 \cdot f_{yy} + 2f \cdot f_{xy} + f_{xx}\right) + O(h^4)
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

ამ ფორმულაში შემავალი f ფუნქციის და მისი წარმოებულების მნიშვნელობები აღებულია (x_0,y_0) წერტილში. $y' = f(x,y)$ განტოლებიდან (ადრინდელი აღნიშვნებში x ცვლადის ნაცვლად გვაქვს t ცვლადი) მიიღება:

$$
\begin{aligned}
&y'' = f_x + f_y \cdot f, \\
&y''' = f \cdot f_y^2 + f_x \cdot f_y + f^2 \cdot f_{yy} + 2f \cdot f_{xy} + f_{xx},
\end{aligned}
$$

(ეს ფორმულები ჩვენ მიღებული გვაქვს ადრე, მწკრივთა მეთოდის განხილვის დროს) თუ მათ ჩავსვამთ გაშლაში

$$
y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{1!}y'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + O(h^4)
$$

მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
y(x_0 + h) = y_0 + h \cdot f + \frac{1}{2}h^2\left(f \cdot f_y + f_x\right) + \\
+ \frac{1}{6}h^3\left(f \cdot f_y^2 + f_x \cdot f_y + f^2 \cdot f_{yy} + 2f \cdot f_{xy} + f_{xx}\right) + O(h^4)
\end{aligned}
\tag{9.9}
$$

(9.8) და (9.9) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $y(x_0 + h) - y_1 = O(h^4)$.

ამრიგად, ლოკალური ცდომილება განხილული მეთოდისთვის არის h-ის მიმართ მეოთხე რიგის. როგორც ადრე აღვნიშნეთ, გლობალური ცდომილებისთვის h-ის ერთი ხარისხი იკარგება და საბოლოოდ გვექნება $O(h^3)$ სიზუსტე.

რუნგე-კუტას მეორე რიგის სიზუსტის სქემის გამოკვლევა უფრო მარტივია (თქვენ თვითონ ჩაატარეთ ანალოგიურად).

§9. რუნგე-კუტას კლასიკური და ოთხ ეტაპიანი III რიგის სიზუსტის სქემა

მესამე რიგის სიზუსტის სქემას განსაზღვრავს, ასევე ბუტჩერის შემდეგი ცხრილი:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
1 & 0 & 1 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

მისი შესაბამისი სქემა იქნება შემდეგი:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_0 + h,\ y_0 + hk_2\right) \\
k_4 &= f\left(x_0 + h,\ y_0 + hk_3\right) \\
y_1 &= y_0 + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + 0 \cdot k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) \\
y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_4\right)
\end{aligned}
$$

რუნგე-კუტას კლასიკურ სქემას განსაზღვრავს ბუტჩერის შემდეგი ცხრილი:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

გაშლილი სახით გვექნება:

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$
$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}hk_2\right)$$
$$k_4 = f\left(x_0 + h,\ y_0 + hk_3\right)$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

ამ სქემის ლოკალური ცდომილება არის O(h^5), ხოლო გლობალური კი O(h^4). გლობალური ცდომილობის საკითხს ჩვენ მოგვიანებით განვიხილავთ.

§11. პიკარის მეთოდი

პიკარის მეთოდი არის მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი. იგი წარმოადგენს მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდს.

განვიხილოთ კოშის ამოცანა პირველი რიგის განტოლებისათვის:

$$u'(x) = f(x,u(x)), \qquad x_0 \le x \le X, \qquad u(x_0) = u_0. \tag{10.1}$$

თუ ვაინტეგროთ (10.1) დიფერენციალური განტოლებას x_0-დან x-მდე, მივიღებთ:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(z,u(z))dz. \tag{10.2}$$

(10.2) განტოლებას ვხსნით შემდეგი მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის გამოყენებით:

$$y_s(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, y_{s-1}(z))dz, \qquad y_0(x) \equiv u_0. \tag{10.3}$$

(10.3) იტერაციულ პროცესს უწოდებენ პიკარის იტერაციულ პროცესს.

დავამტკიცოთ მეთოდის კრებადობა. ვიგულისხმოთ, რომ რომელიღაც შემოსაზღვრულ G არეში, რომელიც მოიცავს (x_0, y_0) წერტილს (10.1)-ის მარჯვენა მხარე უწყვეტია და u ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას: $|f(x,u_1) - f(x,u_2)| \le L|u_1 - u_2|$, სადაც $L = const > 0$ (L უწოდებენ ლიპშიცის მუდმივს). რადგან G შემოსაზღვრულია, ამიტომ $|x - x_0| \le a, \quad |u - u_0| \le b$. მიახლო-

ებითი ამონახსნის ცდომილება აღვნიშნოთ $Z_s(x)$-ით, $Z_s(x) = y_s(x) - u(x)$. (10.3)-ს გამოვაკლოთ (10.2) და გამოვიყენოთ ლიპშიცის პირობა, მივიღებთ:

$$\left|Z_s(x)\right| \le L\int_{x_0}^{x}\left|Z_{s-1}(z)\right|dz\ , \qquad s = 1,\, 2, \ldots \quad .$$

თუ ამ რეკურენტულ დამოკიდებულებაში ჩავსვამთ $s = 1$ და გავთვალისწინებით, რომ $\left|Z_0(x)\right| = \left|u_0 - u(x)\right| \le b$, მაშინ მივიღებთ:

$$\left|Z_1(x)\right| \le L\int_{x_0}^{x}\left|Z_0(z)\right|dz \le bL(x - x_0)\ .$$

ანალოგიურად $s = 2$-თვის გვაქვს:

$$\left|Z_2(x)\right| \le L\int_{x_0}^{x}\left|Z_1(z)\right|dz \le bL^2\int_{x_0}^{x}(z - x_0)dz = \frac{1}{2}bL^2(x - x_0)^2\ .$$

ინდუქციით მიიღება:

$$\left|Z_s(x)\right| \le \frac{1}{s!}bL^s(x - x_0)^s\ .$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\left|Z_s(x)\right| \le \frac{b}{s!}\left(aL\right)^s \approx \frac{b}{\sqrt{2\pi s}}\left(\frac{eaL}{s}\right)^s\ . \qquad (10.4)$$

ცხადია, რომ $\max\left|Z_s(x)\right| \to 0$, როცა $s \to \infty$, ე.ი. მიახლოებითი ამონახსნი თანაბრად კრებადია ზუსტი ამონახსნისაკენ მთელ G არეში.

თავი II

მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის სხვაობიანი მეთოდები

§1 პირველი სასაზღვრო ამოცანა

განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო ამოცანა მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$u''(x) - q(x)u(x) = f(x), \qquad x \in [0;1] \tag{1.1}$$

$$u(0) = a_0, \qquad u(1) = a_1 \tag{1.2}$$

სადაც $f(x)$ და $q(x)$ $[0, 1]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციებია, ამასთან მოვითხოვოთ, რომ

$$q(x) \geq q_0 > 0, \quad x \in [0, 1].$$

როგორც ცნობილია დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიადნ, (1.1) - (1.2) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u(x) \in c^2[0;1]$ (ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი [0,1] სეგმენტზე).

დავყოთ [0,1] სეგმენტი n ტოლ ნაწილად. კვანძითი წერტილები აღვნიშნოთ x_i-თი:

$$x_i = ih, \qquad i = 0,1,\dots,n; \qquad h = \frac{1}{n}, \qquad n \geq 2.$$

$u''(x)$ $\quad x = x_i \quad (i = 1,2,\dots,n-1)$ კვანძით წერტილში შევცვალოთ ცენტრალურ სხვაობიანი ფორმულით, მივიღებთ:

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - q(x_i)u(x_i) = f(x_i) + 0(h^2), \qquad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.3}$$

სადაც $0(h^2)$ არის ნაშთითი წევრი (ის არ დაგვიწერია ცხადად). თუ (1.3) ტოლობაში ნაშთით წევრს გადავაგდებთ, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას: n-1 განტოლებას n-1 უცნობით. ჩავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$u_{i+1} - (2 + h^2 q_i)u_i + u_{i-1} = h^2 f_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{1.4}$$

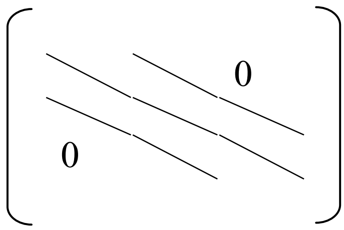
სადაც $q_i = q(x_i), \qquad f_i = f(x_i)$.

ჩვენ სპეციალურად დავწერეთ u_i და არა $u(x_i)$. $u(x_i)$ არის $u(x)$ ამონახსნის ზუსტი მნიშვნელობა $x = x_i$ წერტილში. ვინაიდან ჩვენ გადავაგდეთ ნაშთითი წევრი, ამიტომ მიღებულ (1.4) სისტემას არ დააკმაყოფილებს $u(x_i)$, ამიტომ ბუნებრივია, მისი ამონახსნი აღვნიშნეთ u_i-თი და გამოვაცხადოთ იგი $u(x)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $x = x_i$ წერტილში. u_0 და u_n მოცემულია $(u_0 = a_0, u_n = a_1)$.

(1.4) არის სპეციალური სახის სისტემა. მას უწოდებენ სამწერტილოვან განტოლებათა სისტემას. ამ სისტემას აქვს შემდეგი სტრუქტურა:

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_0 & x & x & x & & & & \\
 & & x & x & x & & & \\
 & & & x & x & x & & \\
 & & & & x & x & X & a_n
\end{array}
$$

(1.4) სისტემის შესაბამის მატრიცას უწოდებენ ლენტური ტიპის მატრიცას. მას აქვს შემდეგი სახე:



გამოსავალ (1.1)-(1.2) ამოცანას ვუწოდოთ უწყვეტი ამოცანა, (1.4) სისტემას – სხვაობიანი (დისკრეტული) ამოცანა.

ვიტყვით, რომ დისკრეტული ამოცანა ახდენს უწყვეტი ამოცანის აპროქსიმაციას და აპროქსიმაციის რიგი არის $p>0$, თუ ნაშთითი წევრის რიგი არის $0(h^p)$.

დისკრეტული ამოცანის (დისკრეტული მოდელის) განხილვისას ისმება შემდეგი საკითხები:

1. დისკრეტული ამოცანა ახდენს თუ არა უწყვეტი ამოცანის აპროქსიმაციას;
2. დისკრეტული ამოცანა არის თუ არა მდგრადი;
3. დისკრეტული ამოცანის ამონახსნი (მიახლოებითი ამონახსნი) არის თუ არა კრებადი ზუსტი ამონახსნისაკენ, როცა ბიჯი უსასრულოდ მცირდება.

დისკრეტული ამოცანა მდგრადია ნიშნავს, რომ ის უწყვეტად არის დამოკიდებული ამოცანის საწყის მონაცემებზე. მათი მცირე შეშფოთება იწვევს

ამონახსნის მცირე შეშფოთებას. ჩვენს შემთხვევაში f_i-ს, a_0-სა და a_n-ის მცირე შეშფოთება იწვევს u_i-ს მცირე შეშფოთებას.

§2. ფაქტორიზაციის მეთოდი

განვიხილოთ ზოგადი სახის სამწერტილოვანი წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = f_i, \qquad i = 1, 2, ..., n-1 \tag{2.1}$$

u_0 და u_n მოცემულია (წინა პარაგრაფში მიღებული (1.4) სისტემა წარმოადგენს (2.1)-ის კერძო შემთხვევას). გვაქვს n-1 განტოლება n-1 უცნობით. მივცეთ i-ს მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned} i &= 1, \quad a_1 u_0 + b_1 u_1 + c_1 u_2 = f_1; \\ i &= 2, \quad a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 = f_2; \\ i &= 3, \quad a_3 u_2 + b_3 u_3 + c_3 u_4 = f_3; \end{aligned}$$

პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ u_1 უცნობი:

$$u_1 = -\frac{c_1}{b_1} u_2 + \frac{f_1 - a_1 u_0}{b_1}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$L_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad K_1 = \frac{f_1 - a_1 u_0}{b_1}.$$

მაშინ

$$u_1 = L_1 u_2 + K_1.$$

ჩავსვათ u_1-ის მნიშვნელობა მეორე განტოლებაში და განვსაზღვროთ u_2:

$$\begin{aligned} &a_2 L_1 u_2 + a_2 k_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 = f_2, \\ &\left(b_2 + a_2 L_1\right) u_2 = -c_2 u_3 + \left(f_2 - a_2 f_1\right). \end{aligned}$$

აქედან

$$u_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 L_1} u_3 + \frac{f_2 - a_2 K_1}{b_2 + a_2 L_1}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$L_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 L_1}, \quad K_2 = \frac{f_2 - a_2 K_1}{b_2 + a_2 L_1}.$$

მაშინ

$$u_2 = L_2 u_3 + K_2 .$$

ჩავსვათ u_2-ის მნიშვნელობა მესამე განტოლებაში და განვსაზღვროთ u_3:

$$u_3 = L_3 u_4 + K_3 ,$$

$$L_3 = \frac{-c_3}{b_3 + a_3 L_2}, \quad K_3 = \frac{f_3 - a_3 K_2}{b_3 + a_3 L_2}.$$

ამრიგად, ინდუქციით მიიღება:

$$L_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i L_{i-1}}, \quad K_i = \frac{f_i - a_i K_{i-1}}{b_i + a_i L_{i-1}}, \quad i = 1, 2, ..., n-1,$$

$$L_0 = 0, \quad K_0 = u_0 .$$

პირდაპირი სვლის დროს, მიღებული რეკურენტული ფორმულებით ვითვლით L_i და K_i კოეფიციენტებს, უკუსვლის დროს კი – თვით ამონახსნებს ფორმულიდან

$$u_i = L_i u_{i+1} + K_i , \quad i = n-1, n-2, ..., 1.$$

ეს მეთოდი ფაქტიურად წარმოადგენს გაუსის მეთოდს.

დავითვალოთ ოპერაციათა რიცხვი, რომელიც გვჭირდება იმისათვის, რომ ვიპოვოთ u_1, u_2,...,u_n ამონახსნები. ჯერ დავითვალოთ ოპერაციათა რიცხვი, რომელიც გვჭირდება L და k კოეფიციენტების დასათვლელად, მათი რიცხვი შეადგენს 6n-ს. ამონახსნების დასათვლელად დაგვჭირდება 2n ოპერაცია, სულ – 6n+2n=8n ოპერაცია.

§3. პირველი სასაზღვრო ამოცანისთვის სხვაობიანი სქემის მდგრადობა და კრებადობა

ლემა. ვთქვათ, (3.1) სისტემის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობას:

$$|b_i| \ge |a_i| + |c_i| + \delta, \quad i = 1, 2, ..., n-1,$$

სადაც δ>0, მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$|u_i| \le \max\left(|u_0|, |u_n|, \frac{1}{\delta} \max_{1 \le k \le n-1} |f_k| \right), \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{3.1}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $|u_i|$ მაქსიმუმს აღწევს ბოლოებში, ე.ი. i=0 ან i=n, მაშინ (3.1) უტოლობა ცხადია. ვთქვათ, $i \neq 0$ და $i \neq n$. (3.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$|b_i| \cdot |u_i| = |b_i u_i| = |f_i - a_i u_{i-1} - c_i u_{i+1}| \leq |a_i| \cdot |u_{i-1}| + |c_i| \cdot |u_{i+1}| + |f_i|. \tag{3.2}$$

ვთქვათ, $|u_i|$ მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს რომელიღაც i-ურ კვანძში $1 \leq i \leq n-1$, მაშინ (3.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$|b_i| \cdot |u_i| \leq |a_i| \cdot |u_i| + |c_i| \cdot |u_i| + |f_i| = (|a_i| + |c_i|) \cdot |u_i| + |f_i|$$

ან რაც იგივეა

$$(|b_i| - (|a_i| + |c_i|))|u_i| \leq |f_i|.$$

ლემის პირობის თანახმად

$$|b_i| - (|a_i| + |c_i|) \geq \delta.$$

ამრიგად,

$$|u_i| \delta \leq |f_i|.$$

აქედან

$$|u_i| \leq \frac{1}{\delta} |f_i|.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია.

ლემის თანახმად (1.4) სისტემისთვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასება ($a_i = 1,\ b_i = 2 + q_i h^2,\ c_i = 1,\ \delta = q_0 h^2,\ f_i = h^2 f_i$):

$$|u_i| \leq \max\left(|u_0|, |u_n|, \frac{1}{q_0} \max_{1 \leq k \leq n-1} |f_k| \right). \tag{3.3}$$

(3.3) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ §1-ში განხილული სქემა მდგრადია. სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნი უწყვეტად არის დამოკიდებული მარჯვენა მხარეზე და სასაზღვრო მნიშვნელობებზე.

ვაჩვენოთ განხილული სქემის კრებადობა. ზუსტსა და მიახლოებით ამონახსნს შორის სხვაობა i-ურ კვანძში აღვნიშნოთ Z_i-თი, $Z_i = u(x_i) - u_i$. (1.3) და (1.4) სისტემიდან გამომდინარეობს:

$$Z_{i+1} - \left(2 + h^2 q_i\right) Z_i + Z_{i-1} = R_i(h), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.4}$$

სადაც $R_i(h)$ არის ნაშთითი წევრი, რომლის რიგია $0(h^2)$. ამასთან გვაქვს:

$$Z_0 = u(x_0) - a_0 = 0, \quad Z_n = u(x_n) - a_1 = 0.$$

(3.4) ტოლობიდან (3.3) უტოლობის თანახმად გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$\left|Z_i\right| \le \frac{1}{q_0} \max_{1\le k\le n-1} \left|R_k(h)\right|. \qquad (3.5)$$

თუ (1.1)-(1.2) უწყვეტი ამოცანის ამონახსნი $u(x) \in C^4[0,1]$, მაშინ გვაქვს:

$$\left|R_i(h)\right| \le ch^2, \quad c = const > 0.$$

ამრიგად

$$\max_{0\le i\le n} \left|Z_i\right| \le ch^2.$$

ეს ნიშნავს, რომ მიახლოებითი ამონახსნი კრებადია ზუსტი ამონახსნისაკენ, ამასთან კრებადობის რიგია $0(h^2)$.

§4. ნეიმანის ამოცანა მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის (მეორე სასაზღვრო ამოცანა)

ნეიმანის ამოცანას (მეორე სასაზღვრო ამოცანას) უწოდებენ შემდეგ ამოცანას:

$$u''(x) - q(x)u(x) = f(x) \qquad (4.1)$$

$$u'(0) = a_0, \quad u'(1) = a_1 \qquad (4.2)$$

სადაც f და q უწყვეტი ფუნქციებია, ამასთან $q(x) \ge q_0 > 0,$ $u(x)$ არის საძებნი ფუნქცია.

შევნიშნავთ, რომ განსხვავებით წინა შემთხვევისგან, შუალედის ბოლოებში მოცემულია საძებნი ფუნქციის წარმოებულები.

სასაზღვრო ამოცანას, როცა შუალედის ბოლოებში მოცემულია წარმოებულები უწოდებენ ნეიმანის ამოცანას. შეიძლება გვქონდეს შემთხვევა, როცა შუალედის ერთ ბოლოში მოცემულია ფუნქციის მნიშვნელობა, ხოლო მეორე ბოლოში წარმოებული. ასეთ ამოცანას უწოდებენ შერეულ ამოცანას.

ღოგორც პირველი სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში აქაც (4.1) განტოლე-ბას ვცვლით სხვაობიანი განტოლებით:

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} - q(x_k)u_k = f(x_k), \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1, \qquad (4.3)$$

სადაც $h=\frac{1}{n}$, $n\geq 2$ –ნატურალური რიცხვია, $x_k = kh$.

(4.3) სხვაობიან განტოლებას უნდა დაემატოს განტოლებები, რომელიც მიიღება (4.2) სასაზღვრო პირობებიდან სხვაობებზე გადასვლით. ცხადია, (4.2) სასაზღვრო პირობები შეგვიძლია შევცვალოთ შემდეგი პირობებით:

$$\frac{u_1-u_0}{h}=a_0\,,\quad \frac{u_n-u_{n-1}}{h}=a_1\,. \tag{4.4}$$

ცხადია, (4.4) სხვაობიანი ფორმულები ახდენენ (4.2) სასაზღვრო პირობების აპროქსიმაციას h-ის მიმართ პირველი რიგის სიზუსტით. (4.3) და (4.4) განტოლებათა სისტემები ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$u_{k+1}-\left(2+h^2q\left(x_k\right)\right)u_k+u_{k-1}=h^2 f\left(x_k\right), \tag{4.5}$$

$$u_0=u_1-a_0h,\quad u_n=u_{n-1}+a_1h,\quad k=1,2,...,n-1. \tag{4.6}$$

(4.5). (4.6) სისტემა წარმოადგენს (n-1)+2=n+1 განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას ამდენივე უცნობით.

პირველი სასაზღვრო ამოცანისაგან განსხვავებით შუალედის ბოლოებში u_0 და u_n მოცემული არ არის, მაგრამ როგორც (4.6) ტოლობებიდან ჩანს ისინი შესაბამისად შებმულია u_1 და u_{n-1} უცნობებთან. აქედან გამომდინარე ბნუებრივია (4.5) (4.6) სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი იტერაციული პროცესის გამოყენებით:

$$u_{k+1}^{(s)}-\left(2+h^2q(x_k)\right)u_k^{(s)}+u_{k-1}^{(s)}=h^2 f(x_k) \tag{4.7}$$

$$u_0^{(s)}=u_1^{(s-1)}-a_0h,\quad u_n=u_{n-1}^{(s)}+a_1h_1 \tag{4.8}$$

აქ $u_1^{(0)}$ და $u_{n-1}^{(0)}$ არის შესაბამისად u_1 და u_{n-1} უცნობების ნულოვანი მიახლოებები (ნულოვანი მიახლოებები შეგვიძლია ავიღოთ ნული). ვიცით რა $u_1^{(0)}$ და $u_{n-1}^{(0)}$ (4.7), (4.8) სისტემა უკვე წარმოადგენს დირიხლეს (პირველ სასაზ-ღვრო ამოცანას უწოდებენ ასევე დირიხლეს ამოცანას) სხვაობიან ამოცანას, რომელიც შეგვიძლია ამოვხსნათ ფაქტორიზაციით მეთოდით.

შემდეგ ნაბიჯზე მიღებული ახალი მნიშვნელობები $u_1^{(1)}$ და $u_{n-1}^{(1)}$ (პირველი მიახლოებები) გადაგვაქვს საზღვარზე (4.8) პირობების საშუალებით და ისევ ვხსნით დირიხლეს სხვაობიან ამოცანას. ამ პროცეს ვაგრძელებთ მანამდე ვიდრე ორ მომდევნო იტერაციას შორის სხვაობის მოდული ყველა კვანძით წერტილში

ნაკლები არ გახდება წინასწარ აღებულ ε დადებით რიცხვზე (ε განსაზღვრავს იტერაციის სიზუსტეს).

ამრიგად, (4.7) (4.8) იტერაციული პროცესის გამოყენებით ნეიმანის სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნა მიიყვანება დირიხლეს სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნაზე. მტკიცდება, რომ განხილული იტერაციული პროცესი კრებადია.

§5. სხვაობიანი მეთოდი არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

5.1. პირველი სასაზღვრო ამოცანა

განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო ამოცანა მეორე რიგის არაწრფივი განტოლებისათვის:

$$u''(x) = f(x,u), \qquad x \in [a,b], \tag{5.1}$$

$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta, \tag{5.2}$$

სადაც $f(x,u)$ უწყვეტია და აქვს უწყვეტი წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით. აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს უწყვეტი $u^{IV}(x)$. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$M_1 = \max|f_u|, \qquad M_2 = \max|u^{IV}|.$$

$[a,b]$ სეგმენტი დავყოთ $N(\geq 2)$ ტოლ ნაწილად და მეორე რიგის წარმოებული $x_n = nh$, $h = (b-a)/N$, წერტილში შევცვალოთ სხვაობიანი ანალოგით. მაშინ (5.1)-(5.2)-დან მივიღებთ შემდეგ არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = h^2 f(x_n y_n), \qquad 1 \leq n \leq N-1, \tag{5.3}$$

$$y_0 = \alpha, \qquad y_N = \beta. \tag{5.4}$$

(5.4) პირობები მიიღება (5.2)-დან.

დავამტკიცოთ სხვაობიანი ამონახსნის კრებადობა ზუსტი ამონახსნისაკენ. დავუშვათ, რომ $f_u \geq m_1 > 0$, რადგან, როგორც ცნობილია, სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = h^2 u''(x_n) + \frac{h^u}{12} u^{IV}(\xi_n), \qquad \xi_n \in (x_{n-1}, x_{n+1}),$$

ამიტომ ზუსტი ამონახსნი აკმაყოფილებს შემდეგ სხვაობიან განტოლებას:

$$u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = h^2 f(x_n u_n) + \frac{h^u}{12} u^{IV}(\xi_n), \qquad 1 \le n \le N-1$$
$$u_0 = \alpha, \qquad u_N = \beta.$$

თუ (5.3)-ს გამოვაკლებთ ამ განტოლებას და ცდომილებას აღვნიშნავთ $z_n = y_n - u_n$-ით და გავითვალისწინებთ, რომ $f(x_n, y_n) - f(x_n, u_n) = (f_u)_n \cdot z_n$, მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$z_{n-1} - \left(2 + h^2 f_u\right) z_n + z_{n+1} = \frac{h^u}{12} u^{'V}(\xi_n), \qquad 1 \le n \le N-1, \tag{5.5}$$

$$z_0 = 0, \qquad z_N = 0. \tag{5.6}$$

ვთქვათ, x_{n_0} არის კვანძი, რომელშიც $|z_n|$ მაქსიმალურია. ამ კვანძით წერტილში (5.5) გადავწეროთ უტოლობის სახით:

$$\left(2 + h^2 f_u\right)_{n_0} \left|z_{n_0}\right| \le \left|z_{n_{0-1}}\right| + \left|z_{n_{0+1}}\right| + \frac{h^u}{12} \left|u^{IV}\left(\xi_{n_0}\right)\right|$$

$\left|z_{n_{0\pm1}}\right|$ შევცვალოთ $\left|z_{n_0}\right|$-ით, მივიღებთ:

$$\left|z_{n_0}\right| = \left\|z_n\right\|_c \le \frac{h^2}{12} \frac{\left|u^{IV}\left(\xi_{n_0}\right)\right|}{(f_u)_{n_0}} \le \frac{h^2 M_2}{12 m_1}, \tag{5.7}$$

სადაც $\|z_n\| = \max |z_n|$. (5.7)-დან გამომდინარეობს, რომ $\|z_n\| \to 0$ როცა $h \to 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნი კრებადია ზუსტი ამონახსნისაკენ h-ის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტით.

(5.3) არაწრფივ სისტემას ვხსნით შემდეგი იტერაციის გამოყენებით:

$$y_{n-1}^{(s)} - 2y_n^{(s)} + y_{n+1}^{(s)} = h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}), \qquad 1 \le n \le N-1, \qquad s = 1, 2, \dots\ , \tag{5.8}$$

$$y_0^{(s)} = \alpha, \qquad y_N^{(s)} = \beta. \tag{5.9}$$

ცხადია იტერაციის ყოველ ბიჯზე $y_n^{(s)}$-ის განსაზღვრისათვის ვღებულობთ წრფივ სისტემას, რომელიც იხსნება ფაქტორიზაციის მეთოდით. მტკიცდება, რომ (5.8)-(5.9) იტერაცია კრებადია, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$q = \frac{1}{8}(b-a)^2 M_1 < 1, \qquad M_1 = \max\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|.$$

ამონახსნის ცდომილებისთვის მართებულია შეფასება:

$$\left\|y_n - y_n^{(s)}\right\|_c \le q^s \left\|y_n - y_n^{(0)}\right\|_c .$$

5.2. ზოგადი სასაზღვრო პირობების შემთხვევა

განვიხილოთ შემდეგი სახის მეორე რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება:

$$u''(x) = f(x,u,u'), \qquad x \in [a,b], \tag{5.10}$$

სადაც $f(x,y,z)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამასთან y და z ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას:

$$\left| f(x,y_1,z_1) - f(x,y_2,z_2) \right| \le L_1 |y_1 - y_2| + L_2 |z_1 - z_2| .$$

(5.10) განტოლებისთვის დავსვათ შემდეგი ზოგადი სასაზღვრო პირობები:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = \alpha , \\ &\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \beta , \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

სადაც $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ და β_1 არაუარყოფითი რიცხვებია, ამასთან $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \ne 0$.

დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი n ტოლ ნაწილად წერტილებით:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h.$$

შევცვალოთ (5.10), (5.11) სასაზღვრო ამოცანა $x = x_k$ წერტილში შემდეგი სხვაობიანი ანალოგიით:

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = f(x_k, u_k, \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{h}), \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{5.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 u_0 - \alpha_1 \frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha , \\ &\beta_0 u_n + \beta_1 \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \beta . \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

(5.12), (5.13) სისტემის ამონახსნს u_k-ს ვაცხადებთ (5.10), (5.11) სასაზღვრო ამოცანის ზუსტი ამონახსნის $u(x)$-ს მიახლოებით მნიშვნელობად $x = x_k$ წერტილში, $u(x_k) \approx u_k$.

(5.12), (5.13) არაწრფივი განტოლებათა სისტემა შეგვიძლია ამოვხსნათ შემდეგი იტრრაციის გამოყენებით:

$$\frac{u_{k+1}^{(s)} - 2u_k^{(s)} + u_{k-1}^{(s)}}{h^2} = f(x_k, u_k^{(s-1)}, \frac{u_{k+1}^{(s-1)} - u_{k-1}^{(s-1)}}{h}), \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{5.14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 u_0^{(s)} - \alpha_1 \frac{u_1^{(s)} - u_0^{(s)}}{h} = \alpha , \\ &\beta_0 u_n^{(s)} + \beta_1 \frac{u_n^{(s)} - u_{n-1}^{(s)}}{h} = \beta . \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

იტერაციის ყოველ ნაბიჯზე გვიხდება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სიტემის ამოხსნა ($n+1$ განტოლების ამდენივე უცნობით).

თუ ლიფშიცის მუდმივები L_1 და L_2 საკმარისად მცირეა, მაშინ მტკიც-დება, რომ (5.14), (5.15) იტერაციული მეთოდი კრებადია.

თავი III

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის კოშის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები

§ 1. თვითშეუღლებული მატრიცი, მატრიცის ნორმა. კელოგის ლემა

1.1. შესავალი

ვთქვათ, E^n არის ევკლიდეს n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე. როგორც ცნობილია E^n-ში ორი ვექტორის ჯამი. სკალარის ვექტორზე ნამრავლი და სკალარული ნამრავლი, შესაბამისად განიმარტება შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$u+v=(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n)\,,$$

$$\alpha\cdot u=(\alpha\cdot u_1,\alpha\cdot u_2,\cdots,\alpha u_n)\,,$$

$$(u,v)=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n\,,$$

სადაც $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ და $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ ($\alpha-$სკალარია).

ხაზი უნდა გაესვას იმ ფაქტს, რომ ჩვენ ამ შემთხვევაში ვიხილავთ ევკლიდეს n-განზომილებიან ნამდვილ სივრცეს (ვექტორის კომპონენტები ნამდვილი რიცხვებია).

კომპლექსური ევკლიდური სივრცის შემთხვევაში u და v ვექტორების სკალარული ნამრავლი განიმარტება შემდეგი ფორმულით (კომპლექსური ევკლიდური სივრცე აღინიშნება C^n-ით):

$$(u,v)=u_1\bar{v}_1+u_2\bar{v}_2+\cdots+u_n\bar{v}_n$$

(ხაზიანი ნიშნავს შეუღლებულს).

ასეთი განმარტება სავსებით ბუნებრივია, რადგან ვექტორის თავისთავზე სკალარული ნამრავლი, როგორც ცნობილია, არის ამ ვექტორის ნორმის კვადრატი („სიგრძის“ კვადრატი).

აქედან გამომდინარე როცა ვექტორის კომპონენტები საზოგადოდ, კომპლექსური რიცხვებია, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი იქნება არაუარყოფითი რიცხვი, თუ მათ სკალარულ ნამრავლს განვმარტავთ ზემოთ მოცემული წესით. მართლაც ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$(u,u)=u_1\bar{u}_1+u_2\bar{u}_2+\cdots+u_n\bar{u}_n=|u_1|^2+|u_2|^2+\cdots+|u_n|^2\ge 0\,.$$

ვთქვათ, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ არის n-ური რიგის კვადრატული მატრიცა, მოქმედი E^n ევკლიდეს სივრცეში (ან C^n სივრცეში) A მატრიცს ეწოდება თვითშეუღლებული, თუ სრულდება პირობა:

$$(Au,v)=(u,Av)\,,\ \ \forall u,v\in C^n\,.$$

თუ გვაქვს ნამდვილი ევკლიდური სივრცე E^n და A მატრიცის ელემენტები ნამდვილი რიცხვებია, ამ შემთხვევაში თვითშეუღლებულ მატრიცას უწოდებენ სიმეტრიულ მატრიცს. მოკლედ რომ ვთქვათ, ნამდვილი მატრიცის შემთხვევაში სიმეტრიულობა და თვითშეუღლებულობა ერთი და იგივე ცნებებია.

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ თუ $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ნამდვილი მატრიცი ისეთია, რომ $a_{ij}=a_{ji}$, მაშინ ის სიმეტრიულია. საზოგადოდ კომპლექსური ელემენტებიანი მატრიცის შემთხვევაში, სიმეტრიული მატრიცი არ არის თვითშეუღლებული.

მაგალითად:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

სიმეტრიული მატრიცა, მაგრამ ის არ არის თვითშეუღლებული.

კომპლექსურ ელემენტებიანი A მატრიცი თვითშეუღლებულია, თუ სრულდება პირობა: $A=\overline{A}^T$ (A-ს შეუღლებულის ტრანსპონირებულს).

მაგალითად: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ თვითშეუღლებულია, რადგან

$$\overline{A}^T=\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ არის მატრიცი მომქმედი C^n| კომპლექსურ ევკლიდურ სივრცეში. ადვილად მტკიცდება შემდეგი ტოლობის მართებულობა: $(Au,v)=(u,\overline{A}^T v)$.

$\overline{A}^T$-ს უწოდებენ A მატრიცის შეუღლებულს და აღნიშნავენ A^*-ით, $A^*=\overline{A}^T$.

ამრიგად, A მატრიცს ეწოდება თვითშეუღლებული, თუ ის ემთხვევა თავის შეუღლებულს, $A=A^*$.

როგორც ცნობილია ევკლიდეს n-განზომილებიან სივრცეში u ვექტორის ნორმა განიმარტება ასე: $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$.

მატრიცის ინდუცირებული ნორმა არის ინფიმუმი (ზუსტი ქვედა ზღვარი), იმ დადებით კონსტანტებს შორის, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$\|Au\|\le c\|u\| \qquad (c=const>0),$$

სადაც u ნებისმიერი ვექტორია, ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრციდან.

შეიძლება ითქვას ეს არის მატრიცის ის ნორმა, რომელიც დაბადა (წარმოქმნა) ვექტორის ევკლიდის ნორმამ.

მტკიცდება, რომ A მატრიცის ინდუცირებული ნორმისთვის სრულდება:

$$\|A\|=\sup_{u\neq 0}\frac{\|Au\|}{\|u\|}=\sup_{\|u\|\le 1}\|Au\|=\sup_{\|u\|=1}\|Au\|.$$

(ნულის ქვეშ გვესმის ნულოვანი ვექტორი).

λ რიცხვს ეწოდება A მატრიცის საკუთრივი რიცხვი, თუ არსებობს არანულოვანი u ვექტორი ისეთი, რომ $Au = \lambda u$. ამ u ვექტორს ეწოდება λ-ს საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი.

მტკიცდება, რომ თუ A მატრიცი თვითშეუღლებულია, მაშინ მისი ყველა საკუთრივი რიცხვი ნამდვილია. ცხადია, A მატრიცის საკუთრივ რიცხვებს წარმოად-გენს $|A - \lambda E| = 0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვები. მტკიცდება, რომ თვითშეუღლებული მატრიცის შემთხვევაში განსხვავებული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები ორთოგონალურია.

A თვითშეუღლებულ მატრიცს ეწოდება არაუარყოფითი, თუ სრულდება პირობა $(Au,u) \geq 0$, $\forall u$-სთვის. A თვითშეუღლებულ მატრიცს ეწოდება დადებითად განსაზ-ღვრული, თუ სრულდება უტოლობა:

$$(Au,u) \geq \alpha(u,u)$$

სადაც $\alpha = const > 0$.

თუ A არის თვითშეუღლებული მატრიცი, რომლის საკუთრივი რიცხვები λ_i ($i = 1,2,\ldots,n$) დადებითია, მაშინ ის იქნება დადებითად განსაზღვრული. ამ შემთხვევაში სრულდება უტოლობა

$$(Au,u) \geq \alpha(u,u),$$

სადაც $\alpha = \min\limits_{1 \leq i \leq n}(\lambda_i)$.

1.2. ზოგიერთი მატრიცის ნორმის შეფასება

ლემა 1: ვთქვათ, A არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული მატრიცი ($A = A^*$, $(Au,u) \geq \alpha\|u\|^2$, $\alpha > 0$), მაშინ $\forall \sigma \geq 0$-სთვის მართებულია შეფასება:

$$\left\|(E + \sigma A)^{-1}\right\| \leq 1$$

დამტკიცება: ცხადია გვაქვს,

$$\big((E + \sigma A)u,u\big) = (u + \sigma Au,u) = (u,u) + \sigma(Au,u) = \|u\|^2 + \sigma(Au,u) \geq (1 + \sigma\alpha)\|u\|^2.$$

ამრიგად, მართებულია უტოლობა:

$$\big((E + \sigma A)u,u\big) \geq (1 + \sigma\alpha)\|u\|^2, \quad \forall u \in E^n. \tag{1.1}$$

ცხადია (1.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $(E+\sigma A)$ მატრიცის შებრუნებული $(E+\sigma A)^{-1}$. მართლაც, ვთქვათ $(E+\sigma A)u=0$, მაშინ (1.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $u=0$.

(1.1) უტოლობაში ჩავსვათ $u=(E+\sigma A)^{-1}v$, მაშინ მივიღებთ:

$$\left\|(E+\sigma A)^{-1}v\right\|^2 \leq \frac{1}{1+\sigma\alpha}(v,(E+\sigma A)^{-1}v).$$

აქედან შვარცის უტოლობის თანახმად მიიღება:

კომენტარი: $\{$შვარცის უტოლობა: $|(u,v)| \leq \|u\|\,\|v\|\}$

$$\left\|(E+\sigma A)^{-1}v\right\|^2 \leq \frac{1}{1+\sigma\alpha}(v,(E+\sigma A)^{-1}v) \leq \frac{1}{1+\sigma\alpha}\|v\|\cdot\left\|(E+\sigma A)^{-1}v\right\|,$$

$$\left\|(E+\sigma A)^{-1}v\right\| \leq \frac{1}{1+\sigma\alpha}\|v\|.$$

აქედან მატრიცის ნორმის განმარტების თანახმად გამომდინარეობს:

$$\left\|(E+\sigma A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1+\sigma\alpha} \leq 1.$$

კომენტარი: $\{\|Bu\| \leq c\|u\| \Rightarrow \|B\| \leq c\}$.

ლემა 2 (კელოგი): ვთქვათ, A არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული მატრიცი, მაშინ $\forall\sigma \geq 0$-სთვის მართებულია შეფასება:

$$\left\|(E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}\right\| \leq 1.$$

დამტკიცება: მატრიცის ნორმის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\left\|(E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}\right\|^2 = \sup_{u\neq 0}\frac{\left\|(E-\sigma A)(E+\sigma A)^{-1}u\right\|^2}{\|u\|^2} =$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვათ $u=(E+\sigma A)v$-ს, მივიღებთ:

$$= \sup_{u\neq 0}\frac{\|(E-\sigma A)v\|^2}{\|(E+\sigma A)v\|^2} = \sup_{v\neq 0}\frac{((E-\sigma A)v,\ (E-\sigma A)v)}{((E+\sigma A)v,\ (E+\sigma A)v)} = \sup_{v\neq 0}\frac{(v-\sigma Av,\ v-\sigma Av)}{(v+\sigma Av,\ v+\sigma Av)} =$$

$$= \sup_{v\neq 0}\frac{\|v\|^2 - 2\sigma(Av,v) + \sigma^2\|Av\|^2}{\|v\|^2 + 2\sigma(Av,v) + \sigma^2\|Av\|^2}. \tag{1.2}$$

რადგან პირობის თანახმად $(Av,v) \geq 0$, ამიტომ (1.2) დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი შეფასება (მრიცხველი < მნიშვნელზე).

§ 2. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა და ექსპონენციალური მატრიცა ფუნქცია

განვიხილოთ I რიგის უმარტივესი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0, \qquad t > 0 & (2.1) \\ u(0) = u_0, & (2.2) \end{cases}$$

სადაც A არის სკალარი. $u(t)$ არის საძებნი ფუნქცია.

ცხადია (2.1) და (2.2) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$u(t) = e^{-tA}u_0. \tag{2.3}$$

ვთქვათ, ეხლა (2.1) განტოლება არის ვექტორული, ე.ი. (2.1) განტოლება არის I რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა A არის მატრიცის n-ური რიგის, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, ხოლო $u(t)$ არის ვექტორ ფუნქცია $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^T$. $\dfrac{du(t)}{dt}$ არის $u(t)$ ვექტორული ფუნქციის I რიგის წარმოებული:

$$\frac{du(t)}{dt} = \left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \cdots, \frac{du_n}{dt}\right)^T.$$

ცხადია, u_0 იქნება n განზომილებიანი რიცხვითი ვექტორი $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0n})^T$.

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს კოშის ამოცანა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის, ოპერატორით A, რომელიც წარმოადგენს n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცას. ცხადია, ამ შემთხვევაში (2.1), (2.2) ამოცანის ამონახსნი ფორმალურად მოიცემა (2.3) ფორმულის საშუალებით. ვამბობთ „ფორმალურად“, რადგან ექსპონენტას ხარისხში ზის მატრიცი. თუ ჩვენ განვმარტეთ ექსპონენციალური მატრიცა-ფუნქციას, რომლისთვისაც მართებულია გაწარმოების იგივე წესი, რაც ექსპონენციალური სკალარული ფუნქციისათვის, მაშინ (2.3) ფორმალური ამონახსნი გახდება რეალური ამონახსნი.

e^{-tA} ექსპონენციალურ მატრიცა-ფუნქცია მოიცემა ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით. e^x სკალარული ფუნქციის გაშლაში უნდა ჩავსვათ x ცვლადის ნაცვლად $(-tA)$.

როგორც ცნობილია, e^x-ის ტეილორის მწკრივად გაშლას აქვს სახე:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

ამ ფორმულის თანახმად e^{-tA}-სთვის გვექნება შემდეგი გაშლა:

$$e^{-tA} = E - \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 - \cdots (-1)^n \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \qquad (2.4)$$

სადაც E არის ერთეულოვანი მატრიცი n-ური რიგის (იგულისხმება, რომ თავიდან მოცემული A მატრიცი არის n-ური რიგის). (2.4) ფორმულის მარჯვენა მხარე არის ხარისხოვანი მატრიცული მწკრივი (კოეფიციენტებია სკალარები).

ვაჩვენოთ, რომ (2.4) მატრიცული მწკრივი კრებადია და მისი კრებადობის რადიუსი $R = +\infty$. ეს ფაქტი გამომდინარეობს იქიდან, რომ მანჟორანტი მწკრივი, ნორმებისგან შედგენილი, კრებადია მთელ სიბრტყეზე. მართლაც, ნორმებისგან შედგენილი მწკრივი იქნება:

$$1 + \frac{t}{1!}\|A\| + \frac{t^2}{2!}\|A^2\| + \cdots + \frac{t^n}{n!}\|A^n\| + \cdots \qquad (2.5)$$

ნორმის თვისების თანახმად (2.5)-ის მაჟორანტი მწკრივი იქნება შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივი:

$$1 + \frac{t}{1!}a + \frac{t^2}{2!}a^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}a^n + \cdots \qquad (2.6)$$

სადაც $a = \|A\|$.

ცხადია (2.6) მწკრივის ჯამი არის e^{ta}.

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ (2.4) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი მწკრივი კრებადია. მისი ნებისმიერ რიცხვჯერ გაწარმოებით მიღებული მწკრივიც ასევე კრებადი იქნება, ამიტომ ბუნებრივია (2.4) მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ $-e^{-tA}$-ით. ცხადია, ეს აღნიშვნა ერთი შეხედვით ფორმალურია, მაგრამ იმის შემდეგ რაც ჩვენ ვაჩვენეთ (2.4) მწკრივის კრებადობა, ეს აღნიშვნა იძენს შინაარსობრივ ხასიათს. კერძოდ, მისი ფორმალური გაწარმოება კანონიერია, ე.ი. მართებულია ფორმულა:

$$(e^{-tA})' = -e^{-tA}A.$$

აქედან კი მარტივად გამომდინარეობს, რომ

$$u(t) = e^{-tA}u_0 \qquad (2.7)$$

არის (2.1), (2.2) ამოცანის ამონახსნი.

§ 3. კრანკ-ნიკოლსონის სქემა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის

3.1. სქემის აგება და აპროქსიმაციის ცდომილების შეფასება

განვიხილოთ კოშის შემდეგი ამოცანა:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \qquad t \in [0, T] & (3.1) \\ u(0) = u_0, & (3.2) \end{cases}$$

სადაც $A = (a_{ij})_{n\times n}$ არის თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული მატრიცა;

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T$$

არის ცნობილი ვექტორ-ფუნქცია, ხოლო $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)\right)^T$ არის საძებნი ვექტორ-ფუნქცია. $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0n})^T$ –ცნობილი სკალარული ვექტორია. ის განსაზღვრავს სისტემის საწყის მდგომარეობას, $f(t)$ ვექტორ-ფუნქცია (მარჯვენა მხარე) ასრულებს წყაროს როლს. $[0,\ T]$ შუალედი გავყოთ $m > 1$ ტოლ ნაწილად; ბიჯი აღვნიშნოთ τ-ით, ხოლო დაყოფის წერტილები (კვანძითი წერტილები) აღვნიშნოთ t_k-ით: $t_k = k\cdot\tau$, $\tau = T/m$, $k = 0, 1, \cdots, m$.

რადგან (3.1) განტოლება კმაყოფილდება $[0,\ T]$ შუალედის ყოველ ფიქსირებულ წერტილში, ამიტომ $t = t_{k-1/2}$ წერტილისთვის მართებულია შემდეგი წარმოდგენა:

$$\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} + A\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} = f(t_{k-1/2}) + R_k(\tau), \tag{3.3}$$

სადაც

$$R_k(\tau) = -\left[\left(\frac{du(t_{k-1/2})}{dt} - \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau}\right) + A\left(u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2}\right)\right].$$

მართლაც (3.3) ტოლობა გამარტივების შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$\frac{du(t_{k-1/2})}{dt} + Au(t_{k-1/2}) = f(t_{k-1/2}).$$

ამრიგად, მივიღებთ (3.1) განტოლება $t = t_{k-1/2}$ წერტილისათვის.

შევაფასოთ $R_k(\tau)$ გამოსახულება. ტეილორის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$u(t_k) = u\left(t_{k-1/2} + \frac{\tau}{2}\right) = u(t_{k-1/2}) + \frac{\tau}{2}u'(t_{k-1/2}) + \frac{\tau^2}{8}u''(t_{k-1/2}) + R_k^{(+)}(\tau), \tag{3.4}$$

სადაც $R_k^{(+)}(\tau) = O(\tau^3)$ (უფრო ზუსტად $\left\|R_k^{(+)}(\tau)\right\| = O(\tau^3)$),

$$u(t_{k-1}) = \left(t_{k-1/2} - \frac{\tau}{2}\right) = u(t_{k-1/2}) - \frac{\tau}{2}u'(t_{k-1/2}) + \frac{\tau^2}{8}u''(t_{k-1/2}) + R_k^{(-)}(\tau), \tag{3.5}$$

სადაც $R_k^{(-)}(\tau)=O(\tau^3)$.

თუ (3.4) ტოლობას გამოვაკლებთ (3.5) ტოლობას წევრ-წევრად, მივიღებთ:

$$u(t_k)-u(t_{k-1})=\tau u'(t_{k-1/2})+(R_k^{(+)}(\tau)-R_k^{(-)}(\tau)).$$

აქედან გამომდინარეობს

$$u'(t_{k-1/2})=\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}+R_k^{(1)}(\tau), \tag{3.6}$$

სადაც

$$R_k^{(1)}(\tau)=-\frac{1}{\tau}(R_k^{(+)}(\tau)-R_k^{(-)}(\tau))=O(\tau^2).$$

ამრიგად (3.6) ფორმულის მარჯვენა მხარის I შესაკრები (სიმეტრიული სხვაობიანი ანალოგი) გვაძლევს I რიგის წარმოებულის მიახლოებით მნიშვნელობას $t=t_{k-1/2}$ წერტილში, τ-ს მიმართ II რიგის სიზუსტით ($O(\tau^2)$ რიგით).

თუ (3.4) და (3.5) ტოლობებს შევკრებთ წევრ-წევრად, მაშინ მივიღებთ:

$$u(t_k)-u(t_{k-1})=2u(t_{k-1/2})+\frac{\tau^2}{4}u''(t_{k-1/2})+(R_k^{(+)}(\tau)+R_k^{(-)}(\tau)).$$

$$u(t_{k-1/2)}=\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+R_k^{(2)}(\tau), \tag{3.7}$$

სადაც

$$R_k^{(1)}(\tau)=-\frac{\tau^2}{8}u''(t_{k-1/2})-\frac{1}{2}(R_k^{(+)}(\tau)+R_k^{(-)}(\tau))=O(\tau^2).$$

ამრიგად, (3.7) ფორმულის მარჯვენა მხარის I შესაკრები (საშუალო არითმეტიკული) გვაძლევს $u(t_{k-1/2})$-ის მიახლოებით მნიშვნელობას $O(\tau^2)$ რიგით.

(3.6) და (3.7) ფორმულების გათვალისწინებით, $R_k(\tau)$-სთვის მიიღება შემდეგი წარმოდგენა:

$$R_k(\tau)=-(R_k^{(1)}(\tau)+AR_k^{(2)}(\tau)).$$

ცხადია, აქედან გამომდინარეობს შეფასება:

$$\max_{1\le k\le m}\|R_k(\tau)\|\le c\tau^2, \qquad c=const>0. \tag{3.8}$$

ამრიგად, (3.3) განტოლებაში შემავალი ნაშთი წევრი $R_k(\tau)$ არის $O(\tau^2)$ რიგის. თუ მას გადავაგდებთ, მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+A\frac{u_k+u_{k-1}}{2}=f(t_{k-1/2}), \qquad k=1,2,\cdots,m, \tag{3.9}$$

რომელსაც უწოდებენ კრანკ-ნიკოლსონის სქემას.

3.2 კრანკ-ნიკოლსონის სქემის მდგრადობისა და კრებადობის გამოკვლევა

(3.9) სქემა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)u_k=\left(E-\frac{\tau}{2}A\right)u_{k-1}+\tau f(t_{k-1/2}),\qquad k=1,2,\cdots,m. \tag{3.10}$$

როცა $k=1$, მარჯვენა მხარეში დაგვიჯდება u_0, ხოლო მარცხენა მხარეში u_1. აქვე შევნიშნოთ, რომ (3.1), (3.2) ამოცანის $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერტილში ჩვენ ვაცხადებთ u_k-ს, $u(t_k)\approx u_k$.

u_0 სასტარტო ვექტორი ჩვენ ვიცით (3.2) საწყისი პირობიდან.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ u_1, რომელიც არის $u(t_1)$-ის მიახლოება, საჭიროა შევაბრუნოთ $(E+\tau A)$ მატრიცი. ე.ი. უნდა ამოვხსნათ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$(E+\tau A)u_1=F_1,$$

სადაც მარჯვენა მხარე F_1 არის ცნობილი ვექტორი, $F_1=(E-\tau A)u_0+\tau f(t_{1/2})$.

ცხადია პირობის თანახმად, არსებობს $(E+\tau A)$ მატრიცის შებრუნებული.

როცა $k=2$, (3.10) განტოლების მარჯვენა მხარეში დაგვიჯდება u_1, ხოლო მარცხენა მხარეში u_2. ვიცით რა u_1, ანალოგიურად ვპოულობთ u_2-ს და ა.შ.

ვაჩვენოთ, რომ (3.10) სქემა მდგრადია, ე.ი. $u_1,u_2,\ldots,u_m$-ის თვლა მდგრადი პროცესია. ეს ნიშნავს, u_0 სასტარტო ვექტორის და $f(t)$ მარჯვენა მხარის მცირე ცვლილებამ არ უნდა გამოიწვიოს $u_1,u_2,\ldots,u_m$ ამონახსნების დიდი ცვლილება.

ცხადია (3.10) განტოლებიდან გვაქვს:

$$u_k=\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}A\right)u_{k-1}+\tau\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}f(t_{k-1/2}). \tag{3.11}$$

თუ (3.11) ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ ნორმის თვისებას, მივიღებთ:

$$\|u_k\|\le\left\|\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\left(E-\frac{\tau}{2}A\right)\right\|\cdot\|u_{k-1}\|+\tau\left\|\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right\|\cdot\|f(t_{k-1/2})\|. \tag{3.12}$$

რადგან პირობის თანახმად A მატრიცი არის თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული, ამიტომ ლემა 1 და ლემა 2-ის თანახმად, მართებული იქნება შესაბამისად შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)^{-1}\right\|\le 1, \tag{3.13}$$

$$\left\| \left(E - \frac{\tau}{2} A\right)\left(E + \frac{\tau}{2} A\right)^{-1} \right\| \le 1. \tag{3.14}$$

(3.12)-დან , (3.13) და (3.14) შეფასების გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\|u_k\| \le \|u_{k-1}\| + \tau \|f(t_{k-1/2})\|, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.15}$$

ჩავსვათ (3.15)-ში $k = 1$, მივიღებთ:

$$\|u_1\| \le \|u_0\| + \tau \|f(t_{1/2})\|.$$

$k = 2$-ის შემთხვევაში (3.15)-დან მივიღებთ:

$$\|u_2\| \le \|u_1\| + \tau \|f(t_{3/2})\|.$$

აქედან წინა უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\|u_2\| \le \|u_0\| + \tau\left(\|f(t_{1/2})\| + \|f(t_{3/2})\|\right).$$

$k = 3$-ის შემთხვევაში (3.15)-დან მიიღება:

$$\|u_3\| \le \|u_2\| + \tau \|f(t_{2+1/2})\|.$$

აქედან წინა უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\|u_3\| \le \|u_0\| + \tau\left(\|f(t_{1/2})\| + \|f(t_{1+1/2})\| + \|f(t_{2+1/2})\|\right)$$

და ა.შ. ინდუქციით მიიღება:

$$\|u_k\| \le \|u_0\| + \tau\left(\|f(t_{1-1/2})\| + \|f(t_{2-1/2})\| + \cdots + \|f(t_{k-1/2})\|\right). \tag{3.16}$$

ცხადია (3.16) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\|u_k\| \le \|u_0\| + (k\tau)\max_{0 \le j \le k} \|f(t_{j-1/2})\|,$$

ან რაც იგივეა.

$$\|u_k\| \le \|u_0\| + t_k \cdot \max_{0 \le j \le k} \|f(t_{j-1/2})\|. \tag{3.17}$$

(3.17) უტოლობა ნიშნავს (3.9) სქემის მდგრადობას.

(3.17) უტოლობიდან გამომდინარეობს (3.9) სქემის მდგრადობა. მართლაც, ვთქვათ $\tilde{u}_k$ არის ამონახსნი (3.9) სხვაობიანი ამოცანის იმ შემთხვევაში, როცა სასტარტო ვექტორია $\tilde{u}_0$, ხოლო მარჯვენა მხარე $\tilde{f}(t)$.

A ოპერატორს ადიტიურობის ($A(u+v) = Au + Av, \quad \forall u, v$) ძალით (3.17) უტოლობის თანახმად $u_k - \tilde{u}_k$-თვის სამართლიანი იქნება შემდეგი შეფასება:

$$\|u_k - \tilde{u}_k\| \le \|u_0 - \tilde{u}_0\| + t_k \cdot \max_{0 \le j \le k} \left\| f(t_{j-1/2}) - \tilde{f}(t_{j-1/2}) \right\|. \tag{3.18}$$

ამრიგად, თუ საწყისი ვექტორის შეშფოთება $u_0 - \tilde{u}_0$ და მარჯვენა მხარის შეშფოთება – $(f - \tilde{f})$ ნორმით არ აღემატებიან ε, მაშინ ცხადია (3.18) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\|u_k - \tilde{u}_k\| \le (1 + t_k) \cdot \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ u_k ამონახსნის შეშფოთება მცირეა. უფრო მეტიც, თუ მარჯვენა მხარის შეშფოთება ნულია u_k ამონახსნის შეშფოთება ნებისმიერი k-სთვის ($k = 1, 2, \ldots, m$) არ აღემატება სასტარტო ვექტორის შეშფოთებას. ეს ფაქტი ძალიან მნიშვნელოვანია პრაქტიკული გათვლების თვალსაზრისით.

ცხადია, ანალოგიური მსჯელობით მიიღება, რომ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისთვის მართებულია უტოლობა:

$$\|u(t_k) - u_k\| \leq (ct_k) \cdot \tau^2 \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ მიახლოებითი ამონახსნი კრებადია ზუსტი ამონახსნისაკენ (იგულისხმება ამონახსნთა გლუვ კლასზე) ბიჯის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტით $O(\tau^2)$ რიგით).

§ 4. სტაბილიზაციის მეთოდი

მეთოდი, რომელსაც ჩვენ ამ პარაგრაფში განვიხილავთ არის გახლეჩის (დეკომპოზიციის) მეთოდი. იგი საშუალებას იძლევა მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნა დავიყვანოთ ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნაზე.

სტაბილიზაციის მეთოდს უწოდებენ მეთოდს, რომელიც მოიცემა შემდეგი სქემის საშუალებით:

$$\left(I + \frac{\tau}{2} A_2\right)\left(I + \frac{\tau}{2} A_1\right)\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_{k-1} = 0. \tag{4.1}$$

(4.1) სქემის საშუალებით მიღებული ამონახსნი u_k წარმოადგენს (3.1), (3.2) ამოცანის $(f(t) \equiv 0)$ $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობას $t = t_k$ წერტილში.

გამოვიკვლიოთ (4.1) სქემის აპროქსიმაცია და მდგრადობა. მარტივი გარდაქმნებით მიიღება:

$$\left(I + \frac{\tau}{2}(A_1 + A_2) + \frac{\tau^2}{4} A_2 A_1)\right)\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_{k-1} = 0,$$

$$\left(I + \frac{\tau}{2} A + \frac{\tau^2}{4} A_2 A_1\right)\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_{k-1} = 0,$$

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + A\frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{\tau^2}{4} A_2 A_1 \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = 0. \tag{4.2}$$

ამრიგად, (4.1) სქემა ექვივალენტურია (4.2) სქემის, რომელიც კრანკ-ნიკოლსონის სქემისაგან განსხვავდება $\frac{\tau^2}{4} A_2 A_1 \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau}$-წევრით. ეს წევრი კი არის $O(\tau^2)$-რიგის.

როგორც ადრე ვნახეთ კრანკ-ნიკოლსონის სქემის აპროქსიმაციის რიგი არის $O(\tau^2)$. აქედან წინა ფაქტის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ (4.1) ამოცანის აპროქსიმაციის რიგი იქნება $O(\tau^2)$.

დავამტკიცოთ (4.1) სქემის მდგრადობა. ჩავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_k=\left[\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)-\tau A\right]u_{k-1}. \tag{4.3}$$

მარტივი გარდაქმნით ვღებულობთ:

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)-\tau A=I+\frac{\tau}{2}(A_1+A_2)+\frac{\tau^2}{4}A_2A_1-\tau(A_1+A_2)=$$

$$=I-\frac{\tau}{2}(A_1+A_2)+\frac{\tau^2}{4}A_2A_1=\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right).$$

ამ გარდაქმნის გათვალისწინებით (4.3) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_k=\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)u_{k-1}. \tag{4.4}$$

ვთქვათ, A_1 და A_2 მატრიცები თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრულია. მაშინ (4.4)-დან გვაქვს:

$$\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_k=\left(I+\frac{\tau}{2}A_2\right)^{-1}\left(I-\frac{\tau}{2}A_2\right)\left(I-\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^{-1}\left[\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_{k-1}\right]$$

ან რაც იგივეა

$$\varphi_n=T_2T_1\varphi_{k-1}, \tag{4.5}$$

სადაც

$$\varphi_k=\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_k,\quad T_\alpha=\left(I-\frac{\tau}{2}A_\alpha\right)\left(I+\frac{\tau}{2}A_\alpha\right)^{-1},\qquad \alpha=1,2.$$

ლემა 2-ის თანახმად სამართლიანია შეფასებები:

$$\|T_\alpha\|\le 1,\qquad \alpha=1,2.$$

ამ შეფასებების გათვალისწინებით მიიღება

$$\|\varphi_k\|=\|T_2T_1\,\varphi_{k-1}\|\le\|T_2\|\cdot\|T_1\|\cdot\|\varphi_{k-1}\|\le\|\varphi_{k-1}\|. \tag{4.6}$$

ცხადია გვაქვს:

$$\|\phi_k\|^2=\left\|\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_k\right\|^2=\left(\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_k,\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)u_k\right)=$$

$$=\left(\left(I+\frac{\tau}{2}A_1\right)^2u_k,\,u_k\right)=(C_1^2\,u_k,\,u_k), \tag{4.7}$$

სადაც $\quad C_1=I+\dfrac{\tau}{2}A_1$.

(4.6) უტოლობა (4.7)-ის გათვალისწინებით მიიღებს სახეს

$$\|u_k\|_{C_1^2} \le \|u_{k-1}\|_{C_1^2}, \qquad (4.8)$$

სადაც $\|u_k\|_{C_1^2} = \sqrt{(C_1^2 u_k, u_k)}$.

ნორმა, რომელიც ფიგურირებს (4.8) შეფასებაში აკმაყოფილებს ნორმის ყველა თვისებას. მას უწოდებენ ენერგეტიკულ ნორმას. ამრიგად (4.1) სქემა მდგრადია ენერგეტიკული ნორმით.

(4.8) შეფასებიდან ავტომატურად გამომდინარეობს მიახლოებითი ამონახსნის კრებადობა ზუსტი ამონახსნისაკენ. კრებადობის სიჩქარე იგივეა, რაც კრანკ-ნიკოლსონის სქემის შემთხვევაში, რომელიც არის $O(\tau^2)$.

(4.1) სქემის პრაქტიკული რეალიზაცია შეგვიძლია მოვახდინოთ ოთხ ეტაპად:

გამოვთვალოთ $F_k = -Au_{k-1}$ — I ეტაპი

ამოვხსნათ სისტემა $\left(I + \frac{\tau}{2} A_2\right) v_k = F_k$ — II ეტაპი

ამოვხსნათ სისტემა $\left(I + \frac{\tau}{2} A_1\right) w_k = v_k$ — III ეტაპი

გამოვთვალოთ $u_k = u_{k-1} + \tau w_k$ — IV ეტაპი

II და III ეტაპზე გვიხდება წრფივ-ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, შესაბამისად A_2 და A_1 მატრიცებით, რომლებიც უფრო მარტივი სტრუქტურისაა, ვიდრე A მატრიცა $(A = A_1 + A_2)$, ხოლო I და IV ეტაპზე გვიხდება გამოთვლების ჩატარება ცხადი ფორმულების გამოყენებით.

§ 5. ამომხსნელი ოპერატორის აპროქსიმაციის მეთოდი

იბადება კითხვა: (2.7) ფორმალური ამონახსნის პრაქტიკული გამოყენება რაში გამოიხატება.

ცხადია, ჩვენ თუ გვინდა ვიპოვოთ ამონახსნის მნიშვნელობა ფიქსირებულ t_k წერტილში, ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (2.4) მწკრივის ჯამი, როცა $t = t_k$, რაც პრაქტიკულად შეუძლებელია. თუმცა აქვე უნდა დავძინოთ, რომ (2.4) მწკრივის ჯამის

გამოთვლა ფიქსირებული t-სთვის შესაძლებელია ნებისმიერი სიზუსტით, გარკვეული რაოდენობის წევრების შენარჩუნებით.

ბუნებრივია ყოველი ახალი t-თვის (2.4) მწკრივის აჯამვა არაპრაქტიკულია. მისი უარყოფითი მხარე მდგომარეობს იმაში, რომ ინფორმაცია ადრე გამოთვლილი ამონახსნების შესახებ არ გამოიყენება. (2.7) ფორმალური ამონახსნის საშუალებით, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ისეთი ალგორითმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს საკმარისად მაღალი სიზუსტით დავითვალოთ ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობა დისკრეტულ წერტილებში. ამასთან, წინა ბიჯზე ნაპოვნი ამონახსნის მნიშვნელობა გამოვიყენოთ შემდეგ ბიჯზე ამონახსნის გამოთვლისათვის.

ავიღოთ დროითი ცვლადის მიხედვით თანაბრად დაშორებული კვანძითი წერტილები: $t_k = k\tau \quad (k = 0, 1, \cdots)$, $\tau > 0$ არის დროითი ბიჯი.

ცხადია (2.7) ფორმულიდან გვაქვს:

$$u(t_k) = e^{-t_k A} u_0 = e^{-(t_{k-1}+\tau)A} u_0 = e^{-(t_{k-1}A+\tau A)} u_0 = e^{-\tau A}\left(e^{-t_{k-1}A} u_0\right) = e^{-\tau A} u(t_{k-1}) \,,$$

$$u(t_k) = e^{-\tau A} u(t_{k-1}) \,, \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{5.1}$$

ჩვენ აქ გამოვიყენეთ ფორმულა:

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \,. \tag{5.2}$$

იბადება კითხვა: (5.2) ფორმულა მართებულია, თუ არა ნებისმიერი A და B მატრიცებისათვის (ცხადია იგულისხმება A და B, ორივე n-ური რიგის კვადრატული მატრიცებია).

პასუხი შემდეგია: (5.2) ფორმულა საზოგადოდ ნებისმიერი n-ური რიგის კვადრატული მატრიცებისათვის მართებული არ არის. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ თუ A და B ერთი და იგივე რიგის კვადრატული კომუტაციური მატრიცებია, მაშინ (5.2) ფორმულა მართებულია. ჩვენ შემთხვევაში ცხადია, ეს პირობა შესრულებულია. ამრიგად, (5.1) ფორმულა მართებულია.

ვთქვათ, იდეალურ შემთხვევაში დავაფორმირეთ $e^{-\tau A}$ მატრიცი, მაშინ ამონახსნი t_k დისკრეტულ წერტილებში აიგება ცხადად. ვიცით რა, u_0 სასტარტო ვექტორი ($t = 0$ წერტილში), (5.1) ფორმულის საშუალებით ამონახსნს ვპოულობთ $t = t_1$ წერტილში. ვიცით რა, ამონახსნი $t = t_1$ წერტილში, ანალოგიურად (5.1) ფორმულის საშუალებით ამონახსნს ვპოულობთ $t = t_2$ წერტილში. პრაქტიკულად რიცხვითი გათვლების ჩატარებისთვის, ჩვენ შეგვიძლია მოვახდინოთ $e^{-\tau A}$ ოპერატორის აპროქსიმაცია, საკმარისად მაღალი სიზუსტით. კერძოდ, თუ მის გაშლაში შევინარჩუნებთ პირველ ორ წევრს, მაშინ აპროქსიმაციის სიზუსტე იქნება $O(\tau^2)$. თუ შევინარჩუნებთ პირველ სამ წევრს, მაშინ აპროქსიმაციის სიზუსტე იქნება $O(\tau^3)$.

ვთქვათ შევინარჩუნეთ პირველი სამი წევრი, მაშინ გვაქვს:

$$e^{-\tau A} = \left(E - \tau A + \frac{\tau^2}{2} A^2 \right) + R_2(\tau) . \tag{5.3}$$

ცხადია მწკრივის $R_2(\tau)$ ნაშთისთვის მართებული იქნება შეფასება:

$$\|R_2(\tau)\| = \left\| -\frac{\tau^3}{3!} A^3 + \frac{\tau^4}{4!} A^4 - \cdots + (-1)^n \frac{\tau^n}{n!} A^n + \cdots \right\| \le$$

$$\le \frac{\tau^3}{3!} \|A\|^3 + \frac{\tau^4}{4!} \|A\|^4 + \cdots + \frac{\tau^n}{n!} \|A\|^n + \cdots =$$

$$= \frac{\tau^3}{3!} \|A\|^3 \left(1 + \frac{\tau}{4} \|A\| + \cdots + \frac{\tau^{n-3}}{4 \cdot 5 \cdots n} \|A\|^{n-3} + \cdots \right) \le$$

$$\le \frac{\tau^3}{3!} \|A\|^3 \left(1 + \frac{\tau}{1!} \|A\| + \cdots + \frac{\tau^n}{n!} \|A\|^n + \cdots \right) = \frac{\tau^3}{3!} \|A\|^3 \cdot e^{\tau \|A\|} . \tag{5.4}$$

თუ გადავაგდებთ ნაშთით წევრს, მაშინ (5.1) ფორმულიდან მიიღება შემდეგი სქემა:

$$u_k = S(\tau) u_{k-1} , \qquad k = 1,2,\cdots \tag{5.5}$$

სადაც $S(\tau) = E - \tau A + \frac{\tau^2}{2} A^2$.

$S(\tau)$ მატრიცს (ოპერატორს) უწოდებენ შრიდან შრეზე გადასვლის ოპერატორს. (5.5) სქემით მიღებულ ამონახსნს ჩვენ ვაცხადებთ $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებად $t = t_k$ წერტილში. ზემოთ აღწერილ მეთოდს ბუნებრივია ვუწოდოთ ამომხსნელი ოპერატორის აპროქსიმაციის მეთოდი.

e^{-tA} ოპერატორს უწოდებენ (2.1), (2.2) ამოცანის ამომხსნელ ოპერატორს.

გამოვიკვლიოთ (5.5) სქემის მდგრადობის საკითხი. ცხადია $S(\tau)$ მატრიცისათვის მართებულია შეფასება:

$$\|S(\tau)\| = \left\| E - \tau A + \frac{\tau^2}{2} A^2 \right\| \le 1 + \tau \|A\| + \frac{\tau^2}{2} \|A\|^2 = 1 + \tau a , \tag{5.6}$$

სადაც $a = \|A\| + \frac{\tau^2}{2} \|A\|^2$.

(5.6) შეფასებიდან გამომდინარეობს (5.5) სქემის მდგრადობა. მართლაც გვაქვს:

$$\|u_k\| = \|S(\tau) u_{k-1}\| \le \|S(\tau)\| \cdot \|u_{k-1}\| \le (1 + \tau a) \cdot \|u_{k-1}\| .$$

აქედან ინდუქციით მიიღება:

$$\|u_1\| \le (1 + a\tau) \|u_0\| ,$$

$$\|u_2\| \le (1 + a\tau) \|u_1\| \le (1 + a\tau) \|u_0\| ,$$

$$\cdots$$

$$\|u_k\| \le (1 + a\tau)^k \|u_0\| \le e^{ak \cdot \tau} \|u_0\| = e^{a t_k} \|u_0\| . \tag{5.7}$$

(5.7) უტოლობა სწორედ ნიშნავს (5.5) სქემის მდგრადობას. მართლაც, ვთქვათ $\widetilde{u}_0$ არის ახალი სასტარტი ვექტორი, რომელიც არის u_0 ვექტორის შეშფოთება $\left(\|u_0-\widetilde{u}_0\|\le\varepsilon\right)$. შესაბამისი ამონახსნი აღვნიშნოთ $\widetilde{u}_k$,

$$\widetilde{u}_k = S(\tau)\widetilde{u}_{k-1}\,. \tag{5.8}$$

ცხადია (5.5) და (5.8)-დან გამომდინარეობს:

$$u_k-\widetilde{u}_k = S(\tau)(u_{k-1}-\widetilde{u}_{k-1})\,.$$

ცხადია, აქედან (5.7)-ის თანახმად გამომდინარეობს შეფასება:

$$\|u_k-\widetilde{u}_k\|\le e^{at_k}\|u_0-\widetilde{u}_0\|\le e^{at_k}\cdot\varepsilon\,.$$

ამრიგად, u_k მიახლოებითი ამონახსნის შეშფოთება $u_k-\widetilde{u}_k$ არ აღემატება $\varepsilon\cdot e^{at_k}$ რიცხვს. ეს იმას ნიშნავს, რომ (5.5) სქემა მდგრადია დროის ყოველ სასრულ შუალედში.

§ 6. ამომხსნელი ოპერატორის აპროქსიმაციის მეთოდის კრებადობა

შევაფასოთ (5.5) სქემით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება, ე.ი, $u(t_k)-u_k$.

(5.1) და (5.5) ფორმულებიდან შესაბამისად მიღება

$$u(t_k)=e^{-(k\tau)}u_0\,, \tag{6.1}$$

$$u_k = S^k(\tau)u_0\,. \tag{6.2}$$

თუ (6.1) ტოლობას გამოვაკლებთ (6.2) ტოლობას და გავითვალისწინებთ, რომ მატრიცი წრფივი ოპერატორია, მივიღებთ:

$$u(t_k)-u_k=\left((e^{-\tau A})^k-S^k(\tau)\right)u_0\,. \tag{6.3}$$

ვთქვათ A და B ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ მართებულია ფორმულა:

$$A^k-B^k=A^{k-1}(A-B)+A^{k-2}(A-B)B+A^{k-3}(A-B)B^2+\cdots+(A-B)B^{k-1}\,. \tag{6.4}$$

მართლაც გვაქვს:

$$(A^k-A^{k-1}B)+(A^{k-1}B-A^{k-2}B^2)+(A^{k-2}B^2-A^{k-3}B^3)+\cdots+AB^{k-1}-B^k=A^k-B^k\,.$$

(6.4) ფორმულის თანახმად (6.3)-დან მიიღება:

$$\begin{aligned}u(t_k)-u_k &= \left[(e^{-\tau A})^{k-1}(e^{-\tau A}-S(\tau))+(e^{-\tau A})^{k-2}(e^{-\tau A}-S(\tau))S+\cdots\right.\\ &\quad\left.+(e^{-\tau A}-(S(\tau))S^{k-1}(\tau)\right]u_0=\left[e^{-t_{k-1}A}(e^{-\tau A}-S(\tau))+\right.\\ &\quad\left.+e^{-t_{k-2}A}(e^{-\tau A}-S(\tau))S(\tau)+\cdots+(e^{-\tau A}-S(\tau))S^{k-1}(\tau)\right]u_0\,.\end{aligned} \tag{6.5}$$

თუ (6.5) ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ ნორმის თვისებას, მივიღებთ:

$$\|u(t_k)-u_k\| \le \Big(\|e^{-t_{k-1}A}\|\cdot\|e^{-\tau A}-S(\tau)\|+\|e^{-t_{k-2}A}\|\cdot\|e^{-\tau A}-S(\tau)\|\cdot\|S(\tau)\|+\cdots+$$

$$+\|e^{-\tau A}-S(\tau)\|\cdot\|S(\tau)\|^{k-1}\Big)\cdot\|u_0\|. \qquad (6.6)$$

ცხადია მართებულია შეფასება:

$$\|e^{-t_k A}\| \le e^{t_k\|A\|}. \qquad (6.7)$$

(5.4) შეფასების თანახმად გვაქვს:

$$\|e^{-\tau A}-S(\tau)\| \le \frac{\tau^3}{3!}\|A\|^3\cdot e^{\tau\|A\|}. \qquad (6.8)$$

(6.6)-დან (5.6), (6.7) და (6.8) შეფასებების თანახმად გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\|u(t_k)-u_k\| \le \frac{\tau^3}{3!}\|A\|^3\cdot e^{\tau\|A\|}\Big[e^{t_{k-1}\|A\|}+e^{t_{k-2}\|A\|}\cdot(1+\tau\cdot a)+\cdots+(1+\tau\cdot a)^{k-1}\Big]\cdot\|u_0\|. \qquad (6.9)$$

ცხადია მართებულია უტოლობა:

$$1+\tau\cdot a=1+\tau\left(\|A\|+\frac{\tau}{2}\|A\|^2\right)=1+\tau\|A\|+\frac{\tau}{2}\|A\|^2\le e^{\tau\|A\|}.$$

ამ უტოლობის გათვალისწინებით (6.9)-დან მიიღება:

$$\|u(t_k)-u_k\| \le \frac{\tau^3}{3!}\|A\|^3\cdot e^{\tau\|A\|}\Big(e^{t_{k-1}\|A\|}+e^{t_{k-1}\|A\|}+\cdots+e^{t_{k-1}\|A\|}\Big)\|u_0\|=$$

$$=\frac{k\tau^3}{3!}\|A\|^3\cdot e^{t_k\|A\|}\|u_0\|=\left(\frac{k\tau^3}{3!}\|A\|^3\cdot e^{t_k\|A\|}\right)\tau^2\|u_0\|=\left(\frac{t_k}{3!}\|A\|^3\cdot e^{t_k\|A\|}\right)\tau^2\|u_0\|.$$

ამრიგად, მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის მივიღებთ შემდეგი შეფასება:

$$\|u(t_k)-u_k\| \le \left(\frac{t_k}{3!}\|A\|^3\cdot e^{t_k\|A\|}\right)\tau^2\|u_0\|. \qquad (6.10)$$

ამ შეფასების მარჯვენა მხარეში შემავალი სიდიდეები ცნობილია. ასეთ შეფასებას უწოდებენ ცხად შეფასებას.

(6.10) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ მიახლოებითი ამონახსნი კრებადია ზუსტი ამონახსნისაკენ, ამასთან კრებადობის სიჩქარე არის $O(\tau^2)$ რიგის.

§ 7. ეილერის სქემა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის

განვიხილოთ კოშის ამოცანა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის:

$$\frac{du}{dt} + Au(t) = f(t), \quad t \ge 0, \tag{7.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{7.2}$$

სადაც $f(t)$ არის უწყვეტი ვექტორ-ფუნქცია:

$$f(t) = \left(f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)\right)^T;$$

u_0 არის ცნობილ საწყისი რიცხვითი ვექტორი:

$$u_0 = \left(u_{01}, u_{02}, \cdots, u_{0m}\right)^T;$$

$u(t) -$ საძიებელი ვექტორ-ფუნქცია:

$$u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_m(t)\right)^T;$$

A – m-ური რიგის მატრიცი: $A = (a_{ij})_{m\times m}$. .

ვთქვათ, $\tau > 0$ არის ბიჯი t-ით. $t_k = k\tau \quad (k = 0,1,\ldots)$ წერტილში (7.1) ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{\tau} + Au(t_k) = f(t_k) + \frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (u'(t) - u'(t_k))dt. \tag{7.3}$$

ამ განტოლებაში შემავალი ინტეგრალური წევრი აღვნიშნოთ $R_k(\tau)$-ით:

$$R_k(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (u'(t) - u'(t_k))dt.$$

ვთქვათ, (7.1), (7.2) ამოცანის ამონახსნი არის უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი, ამასთან $u'(t)$, აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, მაშინ $R_k(\tau)$-თვის მართებულია შეფასება:

$$\|R_k(\tau)\| \le \frac{1}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|u'(t) - u'(t_k)\| dt \le \frac{c}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k)dt \le \frac{c\tau}{2}.$$

$R_k(\tau)$-ს უწოდებან ნაშთით წევრს. თუ (7.3) ტოლობაში გადავაგდებთ ინტეგრალურ წევრს (ნაშთით წევრს), მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + Au_k = f(t_k), \qquad k = 0, 1, \cdots \tag{7.4}$$

სადაც u_k არის m კომპონენტიანი რიცხვითი ვექტორი – $u_k = (u_{1k}, u_{2k}, \cdots, u_{mk})$.

u_0 საწყისი ვექტორი ცნობილია. (7.4) განტოლებიდან დროის ყოველ შრეზე უცნობი ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა განისაზღვრება ცხადად.

მართლაც,

$$u_{k+1} = (I - \tau A)u_k + \tau f(t_k)\,, \qquad k = 0, 1, \cdots \tag{7.5}$$

(7.4) სხვაობიან სქემასთან დაკავშირებით ისმება შემდეგი საკითხები: აპროქსიმაციის, მდგრადობის და კრებადობის.

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, (7.4) სქემის აპროქსიმაციის რიგი არის $O(\tau)$. ვაჩვენოთ (7.4) სქემის მდგრადობა. თუ (7.5) ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე, მივიღებთ:

$$\|u_{k+1}\| \le \|(I - \tau A)\| \cdot \|u_k\| + \tau \| f(t_k)\|\,. \tag{7.6}$$

რადგან $\|(I - \tau A)\| \le 1 + \tau\|A\|$, ამიტომ (7.6) უტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\|u_{k+1}\| \le \left(1 + \tau\|A\|\right) \cdot \|u_k\| + \tau\| f(t_k)\|, \quad k = 0, 1, \cdots$$

აქედან ინდუქციით მიიღება:

$$\|u_1\| \le \left(I + \tau\|A\|\right) \cdot \|u_0\| + \tau\| f(t_0)\|$$

$$\|u_2\| \le \left(I + \tau\|A\|\right) \cdot \|u_1\| + \tau\| f(t_1)\| \le \left(I + \tau\|A\|\right)^2 \|u_0\| + \tau\left[\left(I + \tau\|A\|\right) \cdot \| f(t_0)\| + \| f(t_1)\|\right]$$

$$\cdots$$

$$\|u_k\| \le \left(I + \tau\|A\|\right)^k \cdot \|u_0\| + \tau\left[\left(I + \tau\|A\|\right)^{k-1} \cdot \| f(t_0)\| + \left(I + \tau\|A\|\right)^{k-2} \cdot \| f(t_1)\| + \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(I + \tau\|A\|\right) \cdot \| f(t_{k-2})\| + \| f(t_{k-1})\|\right].$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\left(I + \tau\|A\|\right)^k \le e^{k\tau\|A\|} = e^{t_k\|A\|}$$

მივიღებთ:

$$\|u_k\| \le e^{t_k\|A\|}\left(\|u_0\| + t_k \max_{0\le i\le k}\| f(t_i)\|\right). \tag{7.7}$$

კომენტარი:

$$\left\{ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \quad \text{აქედან} \quad e^x > 1 + x, \ \text{როცა} \quad x \ge 0 \right\}.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს (7.4) სქემის მდგრადობა დროის ყოველ $[0,\, T]$ სასრულ შუალედში. სასრულ შუალედში იმიტომ, რადგან აპრიორულ შეფასებაში ზის $e^{t_k\|A\|}$, რომელიც მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, როცა t_k მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. ცხადია, პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით სასურველია $[0, T]$ შუალედი არ იყოს ძალიან დიდი. სწორედ ეს უარყოფითი თვისება აქვს განხილული ცხად სქემას. (7.4) სქემას უწოდებენ ეილერის სქემას.

მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება აღვნიშნოთ z_k-ით: $z_k = u(t_k) - u_k$. თუ (7.3) ტოლობას გამოვაკლებთ (7.4) ტოლობას, მაშინ z_k-ს მიმართ მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან განტოლებას:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = R_k(\tau).$$

აქედან (7.7) უტოლობის ძალით მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\|z_k\| \le t_k e^{t_k\|A\|} \max_{0\le i\le k} \|R_i(\tau)\| \le \frac{ct_k}{2} e^{t_k\|A\|}\tau.$$

ამრიგად, მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის დროის ყოველ სასრულ შუალედში მართებულია შეფასება:

$$\|z_k\| = O(\tau).$$

ე.ი. (7.4) სქემის კრებადობის სიჩქარე არის I რიგის τ-ს მიმართ.

§ 8. დეკომპოზიციის მეთოდი

8.1. შესავალი

მიუხედავად იმისა, რომ თანამედროვე კომპიუტერების შესაძლებლობები წარმოუდგენლად გაიზარდა, მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნა კვლავ პრობლემატური რჩება.

დეკომპოზიციის მეთოდი, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისათვის. ეს მეთოდი გვაძლევს საშუალებას მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნა დავიყვანოთ ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნაზე. ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამონახსნებისაგან, შედგენილ გარკვეულ კომბინაციას ჩვენ ვაცხადებთ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად. აქედან გამომდინარე, შეიძლება ითქვას, დეკომპოზიციის მეთოდი (გახლეჩის მეთოდი) არის ერთ-ერთი უნივერსალური და ეკონომიური მეთოდი, მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისათვის. ეკონომიკური იმიტომ, რომ ერთგანზომილებიანი ამოცანების რიცხვითი რეალიზაცია მოითხოვს გაცილებით ნაკლებ ოპერატიულ მეხსიერებას და მანქანურ დროს.

დეკომპოზიციის მეთოდი ძირითადად გამოიყენება არასტაციონარული ამოცანების ამოხსნისათვის, ე.ი. ისეთი ამოცანებისათვის, რომელთა ამონახსნი დამოკიდებულია დროზე. ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ დროითი ცვლადის მიხედვით I რიგის არასტაციონარულ ამოცანას. მას ასევე უწოდებენ ევოლუციურ ამოცანას.

დეკომპოზიციის მეთოდი ევოლუციური ამოცანისათვის მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ, ევოლუციური ამოცანის ოპერატორი A წარმოდგება ორი შესაკრების ჯამის სახით: $A = A_1 + A_2$. ცხადიას იგულისხმება, რომ A_1 და A_2 უფრო მარტივი სტრუქტურისაა, ვიდრე A ოპერატორი. დროით შუალედს, სადაც ვიხილავთ ამოცანას ვყოფთ პატარა შუალედებად. იმისათვის, რომ სტარტი დავიწყოთ, საჭიროა მოცემული იყოს სისტემის საწყისი მდგომარეობა (მას უწოდებენ კოშის ამოცანას) ყოველ პატარა შუალედში (ლოკალურ შუალედში) წინა სასტარტო მდგომარეობის მიხედვით ვხნით ევოლუციურ ამოცანას A_1 ოპერატორით, შემდეგ იგივე ამოცანას A_2 ოპერატორით, მიღებული ამონახსნებისგან ვადგენთ გარკვეულ კომბინაციას და მას ვაცხადებთ თავიდან მოცემული ამოცანის ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად ლოკალური ინტერვალის მარჯვენა ბოლოში და ა.შ. ამ პროცედურის გამოყენებით გავდივართ მთელ შუალედს.

8.2. ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა წრფივი სისტემისთვის კოშის ამოცანის ამოხსნის ფორმულა

სანამ დეკომპოზიციის მეთოდზე გადავიდოდეთ გამოვიყვანოთ (7.1), (7.2) კოშის ამოცანის ამოხსნის ფორმულა.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა გვაქვს ერთგვაროვანი განტოლება $\left(f(t) \equiv 0\right)$. ანალოგიურად სკალარული ამოცანისა, (7.1)-(7.2) ამოცანის ამონახსნი, როცა $f(t) \equiv 0$ ფორმალურად მოიცემა ფორმულით:

$$u(t) = e^{-tA} u_0, \tag{8.1}$$

ვაზობთ “ფორმალურად”, რადგან ჯერჯერობით გაუგებარია რა გვესმის e^{-tA}-ს ქვეშ, როცა A არის კვადრატული მატრიცი m რიგის.

ცხადია, ფორმალურად გვაქვს:

$$u(0) = u_0, \quad u'(t) = -Ae^{-tA} u_0.$$

დავაფუძნოთ (8.1) ფორმულა (ამ ფორმულის ფრაგმეტული დაფუძნება ჩვენ უკვე ჩავატარეთ §2-ში).

როგორც ვიცით, e^x-თვის გვაქვს შემდეგი გაშლა:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

ჩავსვათ x-ის ნაცვლად $(-tA)$, მივიღებთ:

$$e^{-tA} = I - \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \cdots + (-1)^n \frac{t^n}{n!} A^n + \cdots \tag{8.2}$$

რადგან A მატრიცის ნატურალური ხარისხები განსაზღვრულია, ამიტომ (8.2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი მწკრივი კორექტულად არის განსაზღვრულ.

ვაჩვენოთ, რომ ეს მწკრივი კრებადია E^m-ში. გამოვიყენოთ მწკრივის კრებადობის დამტკიცების სტანდარტული ხერხი. პირველი n წევრის ჯამი აღვნიშნოთ S_n-ით:

$$S_n = I - \frac{t}{1!}A + \cdots + (-1)^n \frac{t^n}{n!}A^n$$

ვაჩვენოთ S_n მიმდევრობის ფუნდამენტალურობა. ამისათვის შევაფასოთ მწკრივის მონაკვეთი:

$$S_{n+m} - S_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}A^{n+1} - \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}A^{n+2} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{t^{m+n}}{(m+n)!}A^{m+n}\right].$$

გადავიდეთ ნორმებზე, მივიღებთ:

$$\|S_{n+m} - S_n\| \le \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\|A\|^n + \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\|A\|^{n+2} + \cdots + \frac{t^{m+n}}{(m+n)!}\|A\|^{m+n} =$$

$$= \frac{t\|A\|}{n+1}\left(\frac{t^n}{n!}\|A\|^n + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\|A\|^{n+1} + \cdots + \frac{t^{n+m-1}}{(m+n-1)!}\|A\|^{n+m-1}\right) \le$$

$$\le \frac{t\|A\|}{n+1}\left(1 + \frac{t}{1!}\|A\| + \cdots + \frac{t^n}{n!}\|A\|^n + \cdots\right) = \frac{t\|A\|}{n+1}e^{t\|A\|}.$$

ე.ი.

$$\|S_{n+m} - S_n\| \le \frac{t\|A\|}{n+1}e^{t\|A\|} \to 0, \text{ როცა } n \to +\infty.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ S_n მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. E^m სივრცის სისრულის ძალით S_n მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი და ეს ზღვარი აღვნიშნოთ e^{-tA}-ით:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = e^{-tA}.$$

ჩვენ ფაქტიურად ვაჩვენეთ (8.2) მატრიცული ხარისხოვანი მწკრივის თანაბარი კრებადობა. ცხადია, მისი კრებადობის რადიუსი $R = +\infty$. გაწარმოების შედეგად მიღებული მწკრივი ასევე კრებადია და მისი კრებადობის რადიუსიც $R = +\infty$. ამით ჩვენ დავაფუძნეთ ზემოთ მოყვანილი ფორმულა. აქვე აღვნიშნოთ, რომ არაერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds.$$

8.3. დეკომპოზიციის მეთოდი. კომუტაციური მატრიცების შემთხვევა

განვიხილოთ (2.1), (2.2) ამოცანა, სადაც A მატრიცი წარმოდგება ორი შესაკრების ჯამის სახით: $A = A_1 + A_2$.

$[0, T]$ შუალედი გავყოთ $m > 1$ ტოლ ნაწილად. ბიჯი აღვნიშნოთ τ-ით, ხოლო დაყოფის წერტილები (კვანძითი წერტილები) t_k-ით: $t_k = k \cdot \tau$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

(2.1), (2.2) ამოცანას $[t_{k-1}, t_k]$ შუალედში შევუსაბამოთ შემდეგი წყვილი ამოცანებისა:

$$\begin{cases} \dfrac{du_k^{(1)}(t)}{dt} + A_1 u_k^{(1)}(t) = 0, \quad t \in [t_{k-1}, t_k] & (8.3) \\ u_k^{(1)}(t_{k-1}) = u_{k-1}^{(2)}(t_{k-1}) & (8.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_k^{(2)}(t)}{dt} + A_2 u_k^{(2)}(t) = 0, \quad t \in [t_{k-1}, t_k] & (8.5) \\ u_k^{(2)}(t_{k-1}) = u_k^{(1)}(t_k) & (8.6) \end{cases}$$

სადაც $k = 1, 2, \ldots, m$, $u_1^{(1)}(t_0) = u_0^{(2)}(t_0) = u_0$.

მიახლოებითი ამონახსნია: $u(t_k) \approx u_k^{(2)}(t_k)$.

(8.3), (8.4) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$u_k^{(1)}(t) = e^{-(t-t_{k-1})A_1} u_k^{(1)}(t_{k-1}),$$

ხოლო (8.5), (8.6) ამოცანის ამონახსნი კი – ფორმულით:

$$u_k^{(2)}(t) = e^{-(t-t_{k-1})A_2} u_k^{(2)}(t_{k-1}).$$

ამ ფორმულებიდან (8.4) და (8.6)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$u_k^{(2)}(t_k) = e^{-\tau A_2} e^{-\tau A_1} u_{k-1}^{(2)}(t_{k-1}). \tag{8.7}$$

თუ A_1 და A_2 კომუტაციური, მაშინ (8.7)-დან მიიღება:

$$u_k^{(2)}(t_k) = e^{-\tau(A_1 + A_2)} u_k^{(2)}(t_{k-1}) = e^{-\tau A} u_{k-1}^{(2)}(t_{k-1}).$$

აქედან გვაქვს: $u_k^{(2)}(t_k) = e^{-t_k A} u_0$.

ამრიგად $u(t_k) = u_k^{(2)}(t_k)$, ე.ი. ზუსტი ამონახსნი დაემთხვა მიახლოებით ამონახსნს, თუ A_1 და A_2 კომუტაციურია.

8.4. დეკომპოზიციის (წილად-ბიჯიანი) მეთოდი. ზოგადი შემთხვევა

ვთქვათ, A მატრიცი წარმოადგენს A_1 და A_2 მატრიცების ჯამს: $A = A_1 + A_2$. A მატრიცის დაშლა ხდება გარკვეული ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ან

განზომილების მიხედვით. მაგალითად, ლაპლასიანის შემთხვევაში A_1 არის x-ით მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგი, ხოლო A_2 – y-ით მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგი. შეიძლება A_1 იყოს ზედა სამკუთხა მატრიცი, ხოლო A_2 – ქვედა სამკუთხა მატრიცი.

(7.1), (7.2) ამოცანას, როცა $f(t)\equiv 0$, შევუსაბამოთ შემდეგი სხვაობიანი (დისკრეტული) ამოცანა:

$$\frac{u_{k-1/2}-u_{k-1}}{\tau}+A_1u_{k-1/2}=0, \tag{8.8}$$

$$\frac{u_k-u_{k-1/2}}{\tau}+A_2u_k=0, \qquad k=1,2,\cdots \tag{8.9}$$

u_0 მოცემული ვექტორია. (8.8)-(8.9) სქემას უწოდებენ წილადბიჯიან სქემას (თუ რატომ, ცხადია).

ზემოთ მოყვანილი გახლეჩის მეთოდის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ თავიდან მოცემული ამოცანა იხლიჩება ორ ამოცანად. $k=1$ შემთხვევაში u_0-ს ვიღებთ საწყის მნიშვნელობად და ვხსნით პირველ ამოცანას A_1 ოპერატორით; შემდეგ ნაბიჯზე მიღებულ ამონახსნს ვიღებთ საწყის მნიშვნელობად და ვხსნით მეორე ამოცანას A_2 ოპერატორით, მიღებულ მნიშვნელობას კი ვაცხადებთ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად t_1 წერტილში. შემდეგი ციკლი მეორდება ანალოგიურად.

(8.8) და (8.9)-დან შესაბამისად მიიღება:

$$u_{k-1/2}=(I+\tau A_1)^{-1}u_{k-1}$$

და

$$u_k=(I+\tau A_2)^{-1}u_{k-1/2}.$$

აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ τ საკმარისად მცირეა, $1-2\tau\|A_j\|>0$, $J=1,2$.

ზედა ტოლობებიდან გვაქვს:

$$u_k=(I+\tau A_2)^{-1}(I+\tau A_1)^{-1}u_{k-1}. \tag{*}$$

მარტივი გარდაქმნით მიიღება:

$$(I+\tau A_1)^{-1}-I=\left[I-(I+\tau A_1)\right](I+\tau A_1)^{-1}=-\tau A_1(I+\tau A_1)^{-1}.$$

აქედან

$$(I+\tau A_1)^{-1}=I-\tau A_1(I+\tau A_1)^{-1}, \tag{8.10}$$

$$(I+\tau A_1)^{-1}=I-\tau A_1\left[I-\tau A_1(I+\tau A_1)^{-1}\right]=I-\tau A_1+\tau^2A_1^2(I+\tau A_1)^{-1}. \tag{8.11}$$

ცხადია, იგივე ფორმულებს ექნებათ ადგილი A_2-ის შემთხვევაში.

(8.10) და (8.11) ტოლობების გამოყენებით მიიღება:

$$(I+\tau A_2)^{-1}(I+\tau A_1)^{-1}=(I+\tau A_2)^{-1}\left[I-\tau A_1+\tau^2A_1^2(I+\tau A_1)^{-1}\right]=$$

$$=(I+\tau A_2)^{-1}-(I+\tau A_2)^{-1}\cdot\tau A_1+\tau^2A_1^2\left[(I+\tau A_1)\right]^{-2}=$$

$$= I + \tau A_2 + \tau^2 A_2^2 (I + \tau A_2)^{-1} - [I - \tau A_2 (I + \tau A_2)^{-1}]\tau A_1 + \tau^2 A_1^2 (I + \tau A_1)^{-2} =$$

$$= I - \tau(A_1 + A_2) + O(\tau^2) = I - \tau A + O(\tau^2)\,.$$

ამრიგად

$$(I + \tau A_2)^{-1}(I + \tau A_1)^{-1} - e^{-\tau A} = O(\tau^2)\,. \tag{8.12}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S = (I + \tau A_2)^{-1}(I + \tau A_1)^{-1}\,.$$

მაშინ (*) ტოლობიდან ინდუქციით მიიღება:

$$u_k = S^k u_0$$

u_k არის $u(t_k)$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც მართებულია წარმოდგენა

$$u(t_k) = e^{-t_k A} u_0 = (e^{-\tau A})^k u_0\,.$$

შევაფასოთ სხვაობა: $u(t_k) - u_k$. ცხადია, გვაქვს:

$$u(t_k) - u_k = (e^{-\tau A})^k u_0 - S^k u_0 = [(e^{-\tau A})^k - S^k] u_0\,. \tag{8.13}$$

(8.12) ტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\left\| e^{-\tau A} - S \right\| \le c\tau^2\,. \tag{8.14}$$

ვთქვათ A და B ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ მართებულია ფორმულა:

$$A^k - B^k = A^{k-1}(A-B) + A^{k-2}(A-B)B + \cdots + (A-B)B^{k-1}\,.$$

ამ ფორმულის თანახმად (8.8)-დან მიიღება:

$$u(t_k) - u_k = [(e^{-tA})^{k-1}(e^{-tA} - S) + (e^{-tA})^{k-2}(e^{-tA} - S)S +$$

$$+ \cdots + (e^{-tA} - S)S^{k-1}] u_0\,. \tag{8.15}$$

თუ (8.15) ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ ნორმის თვისებას, მივიღებთ:

$$\left\| u(t_k) - u_k \right\| \le \left(\left\| e^{-t_{k-1}A} \right\| + \left\| e^{-t_{k-2}A} \right\| \cdot \left\| S \right\| + \cdots + \left\| e^{-\tau A} \right\| \cdot \left\| S^{k-2} \right\| + \left\| S^{k-1} \right\| \right) \left\| e^{-\tau A} - S \right\| \cdot \left\| u_0 \right\|. \tag{8.16}$$

ცხადია მართებულია შეფასებები:

$$\left\| e^{-t_{k-1}A} \right\| \le e^{t_{k-1}\|A\|}, \qquad \left\| S \right\| \le e^{2\tau\|A\|}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ შეფასებებს და (8.14) შეფასებას, მაშინ (8.16) უტოლობიდან მივიღებთ:

$$\left\| u(t_k) - u_k \right\| \le c\tau \left\| u_0 \right\|.$$

ამით ზემოთ განხილული მეთოდის კრებადობა დამტკიცებულია.

თავი IV

კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები

§ 1. პუასონის განტოლებისთვის დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის სხვაობიანი მეთოდი

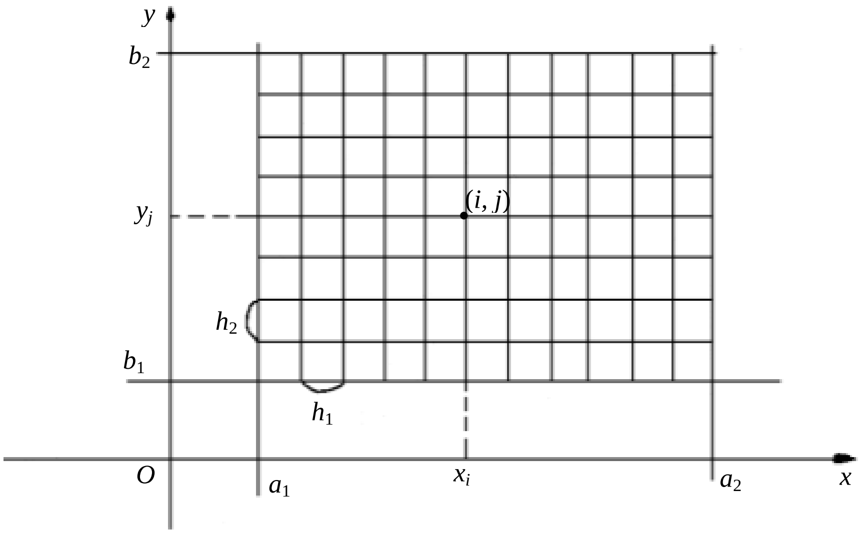
1.1. ამოცანის დასმა. სხვაობიანი მეთოდის არსი

განვიხილოთ პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანა:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y), \tag{1.2}$$

სადაც $f(x,y)$ უწყვეტი ფუნქცია Ω არის ჩაკეტვაში, $\partial\Omega$ არის Ω-ს საზღვარი, $\varphi(x,y)$ უწყვეტი ფუნქცია Ω-ს საზღვარზე.



დავფაროთ Ω არე მართკუთხოვანი ბადით. შუალედი $[a_1, a_2]$ გავყოთ n ტოლ ნაწილად, ხოლო $[b_1, b_2]$ შუალედი კი m ტოლ ნაწილად $(n \ge 2, \quad m \ge 2)$. მიღებული კვანძითი წერტილები აღვნიშნოთ $(x_i; y_j)$-ით,

$$x_i = ih_1, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad y_j = jh_2, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \quad h_1 = \frac{a_2 - a_1}{n}, \quad h_2 = \frac{b_2 - b_1}{m}.$$

სხვაობიანი მეთოდის იდეა მდგომარეობს შემდეგში. (1.1) განტოლებაში შემავალ მეორე რიგის წარმოებულების მნიშვნელობებს კვანძით წერტილებში ვცვლით ცენტრალურ სხვაობებით. შედეგად ვღებულობთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას ბადეზე. საზღვარის წერტილებში, უცნობების მნიშვნელობები განისაზღვრება

(1.2) სასაზღვრო პირობიდან. საბოლოოდ ვღებულობთ სრულ სისტემას, რომლის ამონახსნს ვაცხადებთ თავიდან მოცემული (1.1), (1.2) უწყვეტი ამოცანის ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად კვანძით წერტილებში.

1.2. სხვაობიანი სქემის აგება

როგორც უკვე ვთქვით, მეორე რიგის წარმოებულებს x-ით და y-ით ვცვლით ცენტრალურ სხვაობიანი ფორმულებით:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h_1^2} + R_{i,j}^{(1)}(h_1), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h_2^2} + R_{i,j}^{(2)}(h_2), \tag{1.4}$$

სადაც ნაშთითი წევრები $R_{i,j}^{(1)}(h_1)$ და $R_{i,j}^{(2)}(h_2)$ არის შესაბამისად $O(h_1^2)$ და $O(h_2^2)$ რიგის. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ $u(x,y)$ არის საკმარისად გლუვი ფუნქცია (მას გააჩნია მე-4 რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები, შესაბამისად x და y ცვლადების მიმართ), მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\left| R_{i,j}^{(1)}(h_1) \right| \le c_1 h_1^2$$

და

$$\left| R_{i,j}^{(2)}(h_2) \right| \le c_2 h_2^2 \ ,$$

სადაც c_1 და c_2 დადებითი მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ უწყვეტი ამოცანის ამონახსნზე.

თუ (1.1) განტოლებაში შემავალ მეორე რიგის წარმოებულებს x-ით და y-ით შესაბამისად შევცვლით (1.3) და (1.4) ფორმულების საშუალებით და გადავაგდებთ ნაშთით წევრს, მივიღებთ შემდეგი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} = f_{i,j}, \tag{1.5}$$

სადაც $i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j)$.

(1.2) სასაზღვრო პირობიდან საზღვრითი კვანძებისათვის მიიღება:

$$\begin{aligned} &u_{0,j} = \varphi(a_1, y_j), \qquad u_{n,j} = \varphi(a_2, y_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &u_{i,0} = \varphi(x_i, b_1), \qquad u_{i,m} = \varphi(x_i, b_2), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.5) და (1.6) სისტემას უწოდებენ (1.1), (1.2) უწყვეტი ამოცანის შესაბამის სხვაობიან ამოცანას. ცხადია (1.5), (1.6) სისტემა სრული სისტემაა (განტოლებათა

რიცხვი ტოლია უცნობთა რიცხვის. სულ გვაქვს $(n-1)\times(m-1)$-ზე სხვაობიანი განტოლება, ამდენივე უცნობით).

ამრიგად (1.1) დიფერენციალური განტოლება (1.2) სასაზღვრო პირობით შევცვალეთ (1.5), (1.6) სპეციალური სტრუქტურის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემით. (1.5), (1.6) სისტემის $u_{i,j}$ ამონახსნს ვაცხადებთ (1.1), (1.2) უწყვეტი ამოცანის $u(x,y)$ ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $(x,y)=(x_i,y_j)$ წერტილში $u(x_i,y_j)\approx u_{i,j}$.

1.3. სხვაობიანი სისტემის ამონახსნის ერთადერთობა. მაქსიმუმის პრინციპის სხვაობიანი ანალოგი

ვაჩვენოთ, რომ (1.5), (1.6) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ეს იგივეა, რაც შესაბამის ერთგვაროვან სისტემას აქვს მხოლოდ ტრივიალური (ნულოვანი) ამონახსნი.

ეს ფაქტი გამომდინარეობს შემდეგი ლემიდან, რომელიც წარმოადგენს მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგს სხვაობიანი ამოცანისთვის.

ლემა. ვთქვათ ნამდვილი რიცხვები $\{u_{i,j}\}$ აკმაყოფილებს შემდეგ სხვაობიან განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_2^2}=0\,,$$

სადაც $i=1,2,\dots,n-1$ და $j=1,2,\dots,m-1$, მაშინ მართებულია შეფასება

$$\left|u_{i,j}\right|\le\max_{(s,t)\in\gamma_h}\left|u_{s,t}\right|,$$

სადაც $i=0,1,\dots,n$, $j=0,1,\dots,m$, γ_h არის Ω-ს საზღვარის კვანძითი წერტილების სიმრავლე.

დამტკიცება. თუ $u_{i,j}\equiv const$, მაშინ ლემა ცხადია. ვთქვათ $u_{i,j}\ne const$. ლემა ასევე ცხადია, თუ $\left|u_{i,j}\right|$ მაქსიმუმს აღწევს γ_h-ზე. დაგვრჩა შემთხვევა, როცა $\left|u_{i,j}\right|$ მაქსიმუმს აღწევს Ω არის რომელიმე შიგა კვანძით წერტილში. ვთქვათ ეს წერტილია (k,l). ცხადია, მართებულია შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$\begin{cases}2u_{k,l}\ge u_{k+1,l}+u_{k-1,l}\\2u_{k,l}\ge u_{k,l+1}+u_{k,l-1}\end{cases}\tag{1.7}$$

ან

$$\begin{cases} 2u_{k,l} \le u_{k+1,l} + u_{k-1,l} \\ 2u_{k,l} \le u_{k,l+1} + u_{k,l-1}, \end{cases} \tag{1.8}$$

ამასთან (1.7) სრულდება, თუ (k,l) არის დადებითი მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო (1.8) შესრულდება, თუ (k,l) არის უარყოფითი მინიმუმის წერტილი. რადგან პირობის თანახმად $u_{i,j} \ne const$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (k,l) ისეთი კვანძია, რომლისთვისაც (1.7) დამოკიდებულებაში ერთერთ მათგანთან ადგილი ექნება მკაცრ მეტობას ან (1.8) დამოკიდებულებაში ერთერთ მათგანთან მკაცრ ნაკლებობას. ამის გათვალისწინებით (1.7) მიიღება:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} > 0,$$

ხოლო (1.8)-დან

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} < 0.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემას.

არაერთგვაროვანი ამოცანისთვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\left|u_{i,j}\right| \le \max_{(s,t)\in\gamma_h}\left|u_{s,t}\right| + \frac{a^2+b^2}{16}\max_{(k,l)\in\overset{0}{\Omega}_h}\left|f_{k,l}\right|, \tag{1.9}$$

სადაც $i = 0,1,\ldots,n$, $j = 0,1,\ldots,m$, $a = a_2 - a_1$, $b = b_2 - b_1$, γ_h არის Ω-ს საზღვარის კვანძითი წერტილების სიმრავლე, ხოლო $\overset{0}{\Omega}_h$ არის Ω-ს შიგა კვანძითი წერტილების სიმრავლე.

(1.5), (1.6) სხვაობიანი სისტემის ამონახსნის ერთადერთობა გამომდინარეობს ასევე (1.9) უტოლობიდან.

მართლაც, ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაში გვაქვს: $u_{s,t} \equiv 0$ და $f_{k,l} \equiv 0$. მაშინ (1.9) შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ $u_{i,j} \equiv 0$. ამით ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ (1.5), (1.6) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

1.4. მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება

შევაფასოთ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება. აღვნიშნოთ იგი $z_{i,j}$, $z_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}$. ცხადია $u(x_i, y_j)$ აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h_1^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{h_2^2} =$$

$$= f(x_i, y_j) - R_{i,j}^{(2)}(h_2) - R_{i,j}^{(1)}(h_1). \tag{1.10}$$

თუ (1.10) ტოლობას წევრ-წევრად გამოვაკლებთ (1.5) ტოლობას, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h_1^2} = -R_{i,j}^{(2)}(h_2) - R_{i,j}^{(1)}(h_1).$$

აქედან (1.9) შეფასების თანახმად მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\left|z_{i,j}\right| \le \max_{(s,t)\in\gamma_h}\left|z_{s,t}\right| + \frac{a^2+b^2}{16}\max_{(k,l)\in\overset{0}{\Omega}_h}\left(\left|R_{i,j}^{(1)}(h_1)\right| + \left|R_{i,j}^{(2)}(h_2)\right|\right) \le$$

$$\le \frac{a^2+b^2}{16}(c_1h_1^2 + c_2h_2^2).$$

მიღებული შეფასება ნიშნავს განხილული სქემის კრებადობას. როგორც შეფასებიდან ჩანს კრებადობის რიგი ორის ტოლია ბიჯის მიმართ.

1.5. სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნა ფაქტორიზაციის მეთოდის იტერაციულ მეთოდთან კომბინირებით

(1.5) სისტემა ჩვენ შეგვიძლია ამოვხსნათ OX ან OY ღერძის პარალელურ წრფეებზე ფაქტორიზაციის მეთოდის ზეიდელის ტიპის იტერაციულ მეთოდთან კომბინირებით. ამისათვის ჩავწეროთ (1.5) სისტემა შემდეგი სახით:

$$u_{i+1,j} - 2(1+\alpha^2)u_{i,j} + u_{i-1,j} = h_1^2 f_{i,j} - \alpha^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}), \tag{1.11}$$

სადაც $i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \ \alpha = \dfrac{h_1}{h_2}$.

(1.11) სისტემას ვხსნით შემდეგი იტერაციის გამოყენებით:

$$u_{i+1,j}^{(k)} - 2(1+\alpha^2)u_{i,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} = h_1^2 f_{i,j} - \alpha^2(u_{i,j+1}^{(k-1)} + u_{i,j-1}^{(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

იტერაციის პირველ ბიჯზე $(k=1)$ ვიღებთ OX ღერძის პარალელურ პირველ შრეს, რომელზეც მოთავსებილია $\overset{0}{\Omega}_h$-ის წერტილები. ამ შრის ქვედა (ნულოვან) შრეზე $u_{i,0}^{(1)}$-ის მნიშვნელობა ცნობილია სასაზღვრო პირობიდან $(u_{i,0}^{(1)} = u_{i,0} = \varphi(x_i, b_1))$. ზედა შრეზე მოთავსებული კვანძით წერტილებში $u_{i,2}^{(0)}$-ის მნიშვნელობად ვიღებთ საწყის მიახლოებას (ვთქვათ 0-ის ტოლს ან იგივეს, რაც ავიღეთ ქვედა შრეზე, ე.ი. $u_{i,0}^{(1)}$-ის ტოლს. ეს ბუნებ-რივია, რადგან $j+1$ შრე $j-1$ შრიდან დაშორებული $2h_2$-ის ტოლი მანძილით). $u_{i,1}^{(1)}$-ს ვპოულობთ (1.11) სისტემიდან ფაქტორიზაციის მეთოდით. შემდეგ გადავდივართ მომდევნო $j=2$ შრეზე. მის ზედა შრეზე $u_{i,3}^{(0)}$-ის მნიშვნელობად კვლავ ვიღებთ რაიმე საწყის მიახლოებას (იგივე წესით, რაც წინა შემთხვევაში), ხოლო ქვედა

შრეზე $u_{i,1}^{(1)}$-ის ნაცვლად ვსვამთ ადრე მიღებულ მნიშვნელობას და ა.შ. ვაგრძელებთ ამ პროცესს $j = m-1$-მდე ჩათვლით. იტერაციის შემდეგ ნაბიჯს $(k=2)$ ანალოგიურად ვატარებთ, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ ახლა ზედა შრეზე $u_{i,j+1}^{(k-1)}$-ის მნიშვნელობად ვიღებთ წინა იტერაციის დროს მიღებულ მნიშვნელობას და ა.შ. პროცესს ვაგრძელებთ მანამდე, ვიდრე ორ მომდევნო იტერაციის შესაბამის მნიშვნელობებს შორის სხვაობების მოდულის მაქსიმუმი არ გახდება ნაკლები წინასწარ მოცემულ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე.

§ 2. პუასონის განტოლება კუბური არაწრფივობით

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

$$\Delta u - u^3 = f(x,y), \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \tag{2.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.2}$$

სადაც $f(x,y)$ არის თავისი არგუმენტების მიმართ უწყვეტი ფუნქცია. ჩვენი მიზანია (2.1), (2.2) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა.

დავყოთ y-ის ცვლილების შუალედი n $(n \ge 2)$ ტოლ ნაწილად. დაყოფის წერტილები აღვნიშნოთ y_k-ით, $y_k = kh$, $k = 0,1,\cdots,n$, $h = \dfrac{1}{n}$. მეორე რიგის წარმოებული y-ით (x, y_k) წერტილში შევცვალოთ ცენტრალური სხვაობით. მაშინ მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{d^2 u_k(x)}{dx^2} + \frac{u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)}{h^2} - u_k^3(x) = f(x, y_k), \tag{2.3}$$

სადაც $k = 1,\cdots,n-1$, $u_0(x) = 0$ და $u_n(x) = 0$. ბუნებრივია (2.3) სისტემის $u_k(x)$ ამონახსნი გამოვაცხადოთ (2.1) (2.2) ამოცანის ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $(x,y) = (x, y_k)$ წერტილში. ცხადია (2.3) სისტემა წარმოადგენს სამწერტილოვან სისტემას, ამიტომ ჩავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$u_{k+1}(x) + A_h(u_k(x)) + u_{k-1}(x) = h^2 f_k(x), \quad k = 1,\cdots,n-1. \tag{2.4}$$

სადაც

$$f_k(x) = f(x, y_k), \quad A_h(u_k(x)) = -h^2 \frac{d^2 u_k(x)}{dx^2} + 2u_k(x) + h^2 u_k^3(x).$$

ვაჩვენოთ (2.4) სისტემის კორექტულობა. განვსაზღვროთ $A_h(\cdot)$ ოპერატორის განსაზღვრის არე შემდეგნაირად:

$$D(A_h(\cdot)) = \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

ცხადია $D(A_h(\cdot))$ წარმოადგენს $L_2([0,1])$-ის (კვადრატით ჯამებად ფუნქციათა სივრცის) ქვესივრცეს. ცნობილია, რომ $D(A_h(\cdot))$ მკვრივია $L_2([0,1])$-ში.

$\forall u,v \in D(A_h)$ ფუნქციებისათვის გვაქვს:

$$(A_h(u)-A_h(v),u-v) = -h^2\int_0^1 (u^{//}(x)-v^{//}(x))(u(x)-v(x))dx + \\ +2\int_0^1 (u(x)-v(x))^2dx + h^2\int_0^1 (u^3(x)-v^3(x))(u(x)-v(x))dx \tag{2.5}$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$-\int_0^1 (u^{//}-v^{//})(u-v)dx = -\int_0^1 \left\{[(u^{/}-v^{/})(u-v)]^{/} - (u^{/}-v^{/})^2\right\}dx = \\ = (u^{/}-v^{/})(u-v)\Big|_0^1 + \int_0^1 (u^{/}-v^{/})^2dx = \int_0^1 (u^{/}-v^{/})^2dx = \left\|u^{/}-v^{/}\right\|^2 \tag{2.6}$$

ცხადია ტოლობა

$$\int_0^1 (u^3-v^3)(u-v)dx = \int_0^1 (u-v)^2(u^2+uv+v^2)dx\,. \tag{2.7}$$

რადგან არასრული კვადრატი არაუარყოფითია, ამიტომ (2.7)-დან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\int_0^1 (u^3-v^3)(u-v)dx \ge 0. \tag{2.8}$$

(2.5)-დან (2.6)-ის და (2.7)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$(A_h(u)-A_h(v),u-v) \ge h^2\|u'-v'\|^2 + 2\|u-v\|^2 \ge 2\|u-v\|^2\,,$$

აქედან შვარცის უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\|A_h(u)-A_h(v)\|\cdot\|u-v\| \ge (A_h(u)-A_h(v),u-v) \ge 2\|u-v\|^2\,.$$

ცხადია აქედან გამომდინარეობს:

$$\|A_h(u)-A_h(v)\| \ge 2\|u-v\|. \tag{2.9}$$

ვთქვათ $\bar{u}_k(x)$, $k=1,\cdots,n-1$, არის (2.4) სისტემის ამონახსნი სხვა $\bar{f}_k(x)$ მარჯვენა მხარეებისათვის. ცხადია, სხვაობა $u_k(x)-\bar{u}_k(x)$ დააკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$(u_{k+1}(x)-\bar{u}_{k+1}(x))-(A_h(u_{k+1}(x)-A_h(\bar{u}_{k+1}(x))+(u_{k-1}(x)-\bar{u}_{k-1}(x)) = \\ = h^2(f_k(x)-\bar{f}_k(x))$$

ან რაც იგივეა

$$(A_h(u_{k+1}(x)-A_h(\bar{u}_{k+1}(x)) = (u_{k+1}(x)-\bar{u}_{k+1}(x))+(u_{k-1}(x)-\bar{u}_{k-1}(x)) - \\ -h^2(f_k(x)-\bar{f}_k(x)).$$

გადავიდეთ ამ ტოლობაში ნორმებზე, ცხადია მივიღებთ:

$$\|A_h(u_k)-A_h(\bar{u}_k)\|\le\|u_{k+1}-\bar{u}_{k+1}\|+\|u_{k-1}-\bar{u}_{k-1}\|+h^2\left\|f_k-\bar{f}_k\right\|.$$

აქედან (2.9)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$2\|u_k-\bar{u}_k\|\le\|u_{k+1}-\bar{u}_{k+1}\|+\|u_{k-1}-\bar{u}_{k-1}\|+h^2\left\|f_k-\bar{f}_k\right\|$$

ან რაც იგივეა

$$-\|u_{k-1}-\bar{u}_{k-1}\|+2\|u_k-\bar{u}_k\|-\|u_{k+1}-\bar{u}_{k+1}\|\le h^2\left\|f_k-\bar{f}_k\right\|. \tag{2.10}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$a_k=\|u_k-\bar{u}_k\|,\quad b_k=h^2\left\|f_k-\bar{f}_k\right\|.$$

მაშინ (2.10) უტოლობათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$-a_{k-1}+2a_k-a_{k+1}\le b_k\,.$$

აქედან ლემა 4.4-ის თანახმად გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$a_k\le\alpha_{k,1}(2)a_0+\alpha_{n-1,k}(2)a_n+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{k,i}(2)b_i+\sum_{i=k+1}^{n-1}\alpha_{i,k}(2)b_i\,. \tag{2.11}$$

ცხადია გვაქვს:

$$\alpha_{k,i}(2)=\frac{(n-k)i}{n}=\frac{(1-x_k)x_i}{h}\le\frac{1}{4h}\;. \tag{2.12}$$

(2.11)-დან (2.12)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\|u_k-\bar{u}_k\|\le\|u_0-\bar{u}_0\|+\|u_n-\bar{u}_n\|+\frac{h}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\left\|f_i-\bar{f}_i\right\|.$$

ამით ნაჩვენებია (2.4) სისტემის კორექტულობა.

§ 3. გალიორკინის მეთოდი

H ჰილბერტის სივრცეში განვიხილოთ ოპერატორული განტოლება:

$$Au=f\,,\qquad f\in H \tag{3.1}$$

სადაც f არის ცნობილი ვექტორი H-დან, ხოლო u არის საძებნი ვექტორი, A არის წრფივი ოპერატორი H-დან H-ში $(A:H\to H)$ $D(A)$ განსაზღვრის არით, რომელიც მკვრივია H-ში (ეს ნიშნავს $\overline{D(A)}=H$). A ოპერატორი საზოგადოდ არის შემოუსაზღვრელი. თუ A შემოსაზღვრულია, მაშინ $D(A)=H$.

შევნიშნოთ, რომ როცა A არის დიფერენციალური ოპერატორი (მაგ. $A=-\Delta$), მაშინ ის შემოუსაზღვრელია.

ვთქვათ H სივრცეში არსებობს

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{3.2}$$

ვექტორთა სისტემა, რომელიც სრულია. ეს ნიშნავს, რომ H-ში ნებისმიერ u ვექტორს შეგვიძლია მიუახლოვდეთ ნებისმიერი სიზუსტით (3.2) სისტემის სასრული წრფივი კომბინაციით. უფრო ზუსტად $\forall \varepsilon > 0$ ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს (მოიძებნება) ისეთი $c_1, c_2, \ldots, c_N$ რიცხვები, რომ შესრულდება უტოლობა:

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\| \le \varepsilon \,.$$

ვთქვათ ვექტორთა (3.2) სისტემა შედის A ოპერატორის განსაზღვრის არეში, მაშინ ბუნებრივია (3.1) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი კომბინაციის სახით:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \,, \tag{3.3}$$

სადაც c_k უცნობი კოეფიციენტებია. ჩავსვათ ეს კომბინაცია (3.1) განტოლებაში და მოვთხოვოთ, რომ $(Au - f)$ ვექტორი იყოს ორთოგონალური (3.2) სისტემაში შემავალი ყოველი ვექტორის.

გეომეტრიული მოსაზრება გვეუბნება, რომ თუ g ვექტორი ორთოგონალურია (3.2) სისტემის ყოველი ვექტორის (პირობის თანახმად (3.2) სისტემა სრულია), მაშინ ის წარმოადგენს ნულოვან ვექტორს.

მართლაც, ვთქვათ $g_1, g_2, \ldots, g_n \ldots$ მიმდევრობის წევრები არის g ვექტორის მიახლოებები, მაშინ პირობის თანახმად გვაქვს $(g_n, g) = 0$ $\forall n$-თვის. თუ გადავალთ ზღვარზე როცა $g_n \to g$ მივიღებთ:

$$(g, g) = \|g\|^2 = 0 \Rightarrow g = 0 \,.$$

ამ ფაქტზე დაყრდნობით ვღებულობთ:

$$\left(A\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \right) - f, \varphi_i \right) = 0 \quad i = 1,2,\ldots$$

ეს ტოლობა გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{array}{l} (A\varphi_1, \varphi_1)c_1 + (A\varphi_2, \varphi_1)c_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_1)c_n + \ldots = (f, \varphi_1), \\ (A\varphi_1, \varphi_2)c_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)c_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_2)c_n + \ldots = (f, \varphi_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (A\varphi_1, \varphi_n)c_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)c_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_n)c_n + \ldots = (f, \varphi_n). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3.4}$$

ამრიგად, c_k კოეფიციენტების მიმართ მივიღეთ (3.4) უსასრულო განტოლებათა სისტემა.

ვთქვათ (3.4) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. თუ ამ ამონახსნს ჩავსვამთ (3.3) კომბინაციაში, მაშინ აგებული u ვექტორი დააკმაყოფილებს (3.1) განტოლებას.

ცხადია, პრაქტიკულად უსასრულო სისტემის ამოხსნა (გარკვეული კერძო შემთხვევის გარდა) შეუძლებელია. ამიტომ ვიხილავთ მოჭრილ სისტემას, (3.4) უსასრულო სისტემის პირველ n განტოლებას პირველი n უცნობით:

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1,\varphi_1)\tilde{c}_1+(A\varphi_2,\varphi_1)\tilde{c}_2+\ldots+(A\varphi_n,\varphi_1)\tilde{c}_n+\ldots=(f,\varphi_1),\\
&(A\varphi_1,\varphi_2)\tilde{c}_1+(A\varphi_2,\varphi_2)\tilde{c}_2+\ldots+(A\varphi_n,\varphi_2)\tilde{c}_n+\ldots=(f,\varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(A\varphi_1,\varphi_n)\tilde{c}_1+(A\varphi_2,\varphi_n)\tilde{c}_2+\ldots+(A\varphi_n,\varphi_n)\tilde{c}_n+\ldots=(f,\varphi_n).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

რადგან (3.5) სისტემა განსხვავდება (3.4) სისტემისაგან, ბუნებრივია მისი ამონახსნი აღვნიშნოთ $\tilde{c}_k$-ით. ამ კოეფიციენტების მიხედვით აგებული ვექტორი აღვნიშნოთ $\tilde{u}_n$.

$$\tilde{u}_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$$

სავსებით ბუნებრივია $\tilde{u}_n$ ვექტორი გამოვაცხადოთ (3.1) განტოლების მიახლოებით ამონახსნად.

ზევით აღწერილ მეთოდს უწოდებენ გალიორკინის მეთოდს.

§ 4. პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა გალიორკინის მეთოდით

განვიხილოთ პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანა მართკუთხოვანი არის და მუდმივი მარჯვენა მხარის შემთხვევაში:

$$-\Delta u=q\,,\;\; q=const>0\,,\quad (x,y)\in\Omega=]0,1[\times]0,1[\,,\tag{4.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0\,.\tag{4.2}$$

(Ω არის ერთეულოვანი კვადრატი, $\partial\Omega$ არის Ω-ს საზღვარი).

ჩვენს შემთხვევაში ოპერატორი $A=(-\Delta)$, განსაზღვრის არით:

$$D(A)=\left\{u(x,y)\in C^2(\overline{\Omega}):u(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0\right\}.$$

(4.1), (4.2) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი ორმაგი მწკრივის სახით:

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n-1}^{\infty}c_{m,n}\,\varphi_{m,n}(x,y)\,,\tag{4.3}$$

სადაც

$$\varphi_{m,n}(x,y)=\frac{2}{\pi\sqrt{m^2+n^2}}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\,.$$

ცხადია $\varphi_{m,n}(x,y)$ ფუნქციები შედის A ოპერატორის განსაზღვრის არეში.

როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ $c_{m,n}$ კოეფიციენტები უნდა ვიპოვოთ პირობიდან:

$$\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j-1}^{\infty} c_{i,j}\Delta\phi_{i,j}(x,y)-q,\ \phi_{m,n}(x,y)\right)=0, \quad m,n=1,2,\dots, \tag{4.4}$$

სადაც სკალარული ნამრავლი გვესმის $L_2(\Omega)$ სივრცის აზრით. $L_2(\Omega)$ სივრცეში $u(x,y)$ და $v(x,y)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი განიმარტება ასე:

$$(u,v)=\iint_{\Omega} u(x,y)v(x,y)dxdy .$$

გამოვთვალოთ სკალარული ნამრავლი: $\left(-\Delta\varphi_{m,n}(x,y),\varphi_{m,n}(x,y)\right)$. ცხადია გვაქვს:

$$-\Delta\varphi_{m,n}(x,y)=\frac{2}{\pi\sqrt{m^2+n^2}}(m^2\pi^2+n^2\pi^2)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y) .$$

ამრიგად

$$\begin{aligned}(-\Delta\phi_{m,n}(x,y),\ \phi_{m,n}(x,y)) &= 4\iint_{\Omega}\sin^2(m\pi x)\sin^2(n\pi x)dxdy\\ &= 4\int_0^1\sin^2(m\pi x)dx\int_0^1\sin^2(n\pi y)dy.\end{aligned} \tag{4.5}$$

ცხადია გვაქვს:

$$\int_0^1\sin^2(m\pi x)dx=\int_0^1\frac{1-\cos(2m\pi x)}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dx-\frac{1}{2}\int_0^1\cos(2\pi mx)dx . \tag{4.6}$$

(4.5)-დან (4.6)-ის გათვალისწინებით მიიღება:

$$\left(-\Delta\varphi_{m,n}(x,y),\ \varphi_{m,n}(x,y)\right)=1 . \tag{4.7}$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\left(-\Delta\phi_{m,n}(x,y),\ \phi_{i,j}(x,y)\right)=0, \tag{4.8}$$

თუ $m\neq i$ ან $n\neq j$.

გამოვთვალოთ სკალარული ნამრავლი: $(q,\varphi_{i,j}(x,y))$. მარტივად მიიღება:

$$(q,\varphi_{i,j}(x,y))=q\iint_{\Omega}\varphi_{i,j}(x,y)dxdy=\frac{2q}{\pi\sqrt{m^2+n^2}}\int_0^1\sin(i\pi x)dx\int_0^1\sin(j\pi y)dy=$$

$$\frac{2q}{\pi\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\frac{1}{i\pi}\cos(i\pi x)\Big|_0^1\cdot\frac{1}{j\pi}\cos(j\pi x)\Big|_0^1=$$

$$\frac{2q}{\pi^3(i,j)\sqrt{m^2+n^2}}(1-(-1)^i)(1-(-1)^j).$$

აქედან გამომდინარეობს:

$$(q,\varphi_{i,j}(x,y))=\begin{cases}\dfrac{8q}{\pi(i\cdot j)\sqrt{m^2+n^2}}, & \text{როცა } i \text{ და } j \text{ კენტია}\\ 0, & \text{როცა } i \text{ ან } j \text{ ლუწია.}\end{cases} \tag{4.9}$$

(4.7), (4.8) და (4.9)-ის გათვალისწინებით (4.4)-დან მიიღება:

$$c_{m.n}=\frac{2q}{\pi^3(m,n)\sqrt{m^2+n^2}}, \tag{4.10}$$

სადაც m და n ორივე კენტია.

თუ ჩავსვამთ (4.10)-ს (4.3)-ში მივიღებთ:

$$u(x,y)=\frac{16q}{\pi^4}\sum_{m=1,3\ldots}\sum_{n=1,3\ldots}\frac{1}{(m\cdot n)(m^2+n^2)}\sin(m\pi x)\sin(n\pi y).$$

§ 5. სხვაობიანი მეთოდი პარაბოლური განტოლებისათვის. ცხადი სქემა

განვიხილოთ შემდეგი საწყისი-სასაზღვრო (კოში-დირიხლეს) ამოცანა:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad (x,t)\in[0,1]\times[0,T], \tag{5.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{5.2}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \tag{5.3}$$

სადაც $f(x,t)$ და $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია განსახილველ არეში.

ამასთან, $\varphi(x)$ აკმაყოფილებს შეთანხმებულობის პირობას:

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0.$$

მაშინ მტკიცდება, რომ (5.1)-(5.3) ამოცანას აქვს ერთადერთი კლასიკური ამონახსნი.

$[0,1]$ დავყოთ n ტოლ ნაწილად, ხოლო $[0,T]$ – m ტოლ ნაწილად. ბადის ბიჯი x-ის მიმართ აღვნიშნოთ h-ით, ხოლო t-ს მიმართ – τ-ით:

$$h=\frac{1}{n}, \quad \tau=\frac{T}{m}.$$

კვანძითი წერტილები x-ის მიმართ აღვნიშნოთ x_i-ით, ხოლო t-ს მიმართ – t_k-ით:

$$x_i=ih, \qquad i=0,1,\ldots,n,$$

$$t_k=k\tau, \qquad k=0,1,\ldots,m.$$

ბადის (x_i,t_k) კვანძით წერტილში (5.1) ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{u(x_i,t_k)-u(x_i,t_{k-1})}{\tau}=\frac{u(x_{i+1},t_{k-1})-2u(x_i,t_{k-1})+u(x_{i+1},t_{k-1})}{h^2}+f(x_i,t_k)+R_{ik}(\tau,h). \tag{*}$$

სადაც $R_{ik}(\tau,h)$ არის ნაშთითი წევრი. I თავის §3-ში მოცემული გაწარმოების ფორმულების თანახმად $R_{ik}(\tau,h)$-ის რიგი იქნება $O(\tau+h^2)$. თუ ნაშთით წევრს გადავაგდებთ, მაშინ მივიღებთ (5.1) განტოლებას შეესაბამებამის შემდეგი სხვაობიან სქემას:

$$\frac{u_i^k-u_i^{k-1}}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{k-1}-2u_i^{k-1}+u_{i-1}^{k-1}}{h^2}+f(x_i,t_k)\,, \qquad (5.4)$$

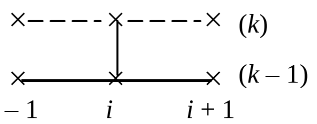
$$i=1,2,\ldots,n-1\,, \qquad j=1,2,\ldots,m-1\,.$$

ზედა ინდექსი არის დროითი ცვლადის შესაბამისი, ხოლო ქვედა – სივრცითი ცვლადის. ამასთან გვაქვს:

$$u_i^0=\varphi(x_i)\,, \qquad i=0,1,\ldots,n,$$

$$u_0^k=u_n^k=0\,, \qquad k=0,1,\ldots,m\,.$$

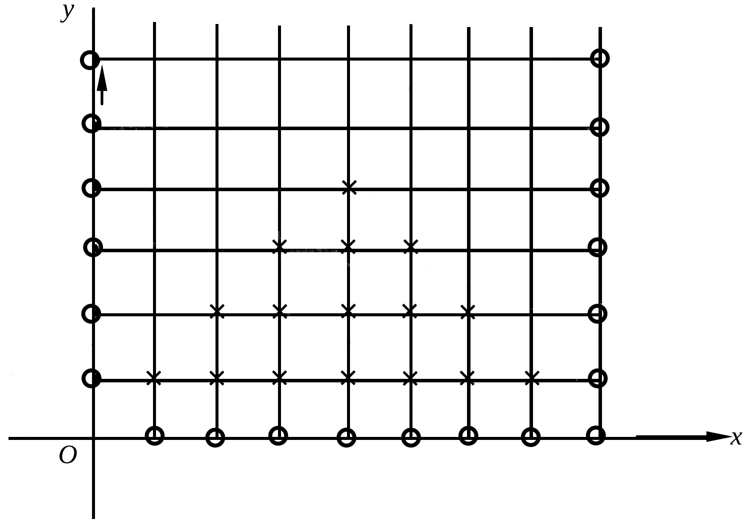
(5.4) სქემა არის ცხადი სქემა. მის შესაბამის შაბლონს აქვს სახე:



(5.4) სქემას უწოდებენ ცხად სქემას, რადგან u_i^k-ს მნიშვნელობას ვღებულობთ ცხადად. (5.1)-(5.3) უწყვეტი ამოცანის $u(x,t)$ ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად (x_i,t_k) კვანძში ვაცხადებთ u_i^k-ს,

$$u(x_i,t_k)\approx u_i^k\,.$$

გამოთვლის სქემა ნათლად ჩანს შემდეგი ნახაზიდან:



გამოვიკვლიოთ (5.4) სქემის მდგრადობა და კრებადობა.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (5.1) განტოლება ერთგვაროვანია $\left(f(x,t)\equiv 0\right)$, მაშინ (5.4)-დან მიიღება:

$$u_i^k = \frac{\tau}{h^2}u_{i+1}^{k-1} + \left(1-\frac{2\tau}{h^2}\right)u_i^{k-1} + \frac{\tau}{h^2}u_{i-1}^{k-1}\,. \tag{5.5}$$

ვთქვათ, τ და h, ისეთია რომ შესრულებულია პირობა:

$$\frac{2\tau}{h^2}\le 1.$$

მაშინ (5.5) ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$\left|u_i^k\right| \le \frac{\tau}{h^2}\left|u_{i+1}^{k-1}\right| + \left(1-\frac{2\tau}{h^2}\right)\left|u_i^{k-1}\right| + \frac{\tau}{h^2}\left|u_{i-1}^{k-1}\right| \le$$

$$\le \left[\frac{\tau}{h^2} + \left(1-\frac{2\tau}{h^2}\right) + \frac{\tau}{h^2}\right]\max_{0\le j\le n}\left|u_j^{k-1}\right| = \max_{0\le j\le n}\left|u_j^{k-1}\right|, \qquad i=1,2,\ldots,n-1\,.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\max_{0\le j\le n}\left|u_j^k\right| \le \max_{0\le j\le n}\left|u_j^{k-1}\right|, \qquad k=1,2,\ldots,m\,. \tag{5.6}$$

აქედან კი ინდუქციით მიიღება:

$$\max_{0\le j\le n}\left|u_j^k\right| \le \max_{0\le j\le n}\left|u_j^0\right|, \qquad k=0,1,\ldots,m\,. \tag{5.7}$$

ეს უტოლობა ნიშნავს მდგრადობას საწყისი პირობის მიმართ. (5.4) სხვაობიანი განტოლების ამონახსნი უწყვეტად არის დამოკიდებული საწყის მნიშვნელობებზე.

არაერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევაში ცხადია, (5.6) შეიცვლება უტოლობით:

$$\max_{0\le j\le n}\left|u_j^k\right| \le \max_{0\le j\le n}\left|u_j^{k-1}\right| + \tau\cdot\max_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le S\le m}}\left|f(x_i,t_s)\right|.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$a_k = \max_{0\le j\le n}\left|u_j^k\right|,\ \ b=\max_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le S\le m}}\left|f(x_i,t_s)\right|.$$

მაშინ

$$a_k \le a_{k-1} + \tau b\,, \quad k=1,2,\ldots,m$$

აქედან ინდუქციით მიიღება:

$$a_1 \le a_0 + \tau b$$
$$a_2 \le a_1 + \tau b \le a_0 + \tau b = a_0 + 2\tau b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k \le a_0 + (k\tau)b \le a_0 + t_k b \le a_0 + Tb.$$

ამრიგად, გვაქვს:

$$\max_{0\le j\le n}\left|u_j^k\right| \le \max_{0\le j\le n}\left|u_j^0\right| + T\cdot\max_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le S\le m}}\left|f(x_i,t_s)\right|. \tag{5.8}$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს სქემის მდგრადობა როგორც საწყისი პირობის, ასევე მარჯვენა მხარის მიმართ. (5.8) უტოლობიდან ასევე გამომდინარეობს განხილული სქემის კრებადობა.

აღვნიშნოთ z_i^k-ით მიახლოებითი ამოხსნის ცდომილება:

$$z_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k .$$

(*)-ს გამოვაკლოთ (5.4) განტოლება, მივიღებთ:

$$\frac{z_i^k - z_i^{k-1}}{\tau} = \frac{z_{i+1}^{k-1} - 2z_i^{k-1} + z_{i-1}^{k-1}}{h^2} + R_{ik}(\tau, h) .$$

აქედან, (5.8) უტოლობის თანახმად გამომდინარეობს შეფასება:

$$\max_{0\le j\le n}\left|z_j^k\right| \le \max_{0\le j\le n}\left|z_j^0\right| + T\cdot \max_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le S\le m}}\left|R_{i,s}(\tau,h)\right| .$$

რადგან $z_j^0 = 0$, ამიტომ

$$\max_{0\le j\le n}\left|z_j^k\right| = O(\tau + h^2) .$$

ცხადია, ამ შეფასებას ადგილი აქვს საკმარისად გლუვი ამონახსნისთვის. ცხად სქემას ის ნაკლი აქვს, რომ მისი მდგრადობისათვის საჭიროა შესრულდეს პირობა:

$$\frac{2\tau}{h^2} \le 1,$$

ე.ი. τ და h არ შეიძლება ნებისმიერად ვცვალოთ. ამიტომ ცხად სქემას უწოდებენ პირობითად მდგრად სქემას, რადგან ზემოთ მოყვანილი პირობა თუ დაირღვა, მაშინ განხილული სქემა არ იქნება მდგრადი.

§ 6. კრანკ-ნიკოლსონის სქემა პარაბოლური განტოლებისათვის

(5.1)-(5.3) ამოცანისათვის ჩვენ განვიხილავთ ერთ არაცხად ორშრიან სქემას, რომელსაც უწოდებენ კრანკ-ნიკოლსონის სქემას. მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{h^2}\right) + f(x_i, t_{k-1/2}) , \qquad (6.1)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1 , \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1 .$$

ამ სქემის აპროქსიმაციის რიგია $O(\tau^2 + h^2)$ ($(x_i, t_{k-1/2})$ წერტილში). მართლაც, (6.1) სქემის მარცხენა მხარეში შემავალი სხვაობიანი ანალოგი გვაძლევს t-ით პირველი რიგის წარმოებულის მიახლოებით მნიშვნელობას $(x_i, t_{k-1/2})$ წერტილში $O(\tau^2)$ სიზუსტით, ხოლო მარჯვენა მხარეში შემავალი სხვაობიანი ანალოგები – x-ით მეორე

რიგის წარმოებულის მნიშვნელობებს შესაბამისად (x_i, t_k) და (x_i, t_{k-1}) წერტილებში $O(h^2)$ სიზუსტით. ამასთან, მათი საშუალო არითმეტიკული გვაძლევს x-ით მეორე რიგის წარმოებულის მნიშვნელობას $(x_i, t_{k-1/2})$ წერტილში $O(h^2)$ სიზუსტით. (6.1) ტოლობიდან მიიღება:

$$\frac{\tau}{2h^2}u_{i+1}^k - \left(\frac{\tau}{h^2}+1\right)u_i^k + \frac{\tau}{2h^2}u_{i-1}^k = \varphi_i^{k-1}, \tag{6.2}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

სადაც

$$\varphi_i^{k-1} = -\frac{\tau}{2h^2}u_{i+1}^{k-1} - \left(\frac{\tau}{h^2}-1\right)u_i^k - \frac{\tau}{2h^2}u_{i-1}^{k-1} - \tau f(x_i, t_{k-1/2}).$$

ამრიგად, მიიღება სამწერტილოვანი განტოლებათა სისტემა, რომლის მარჯვენა მხარე φ_i^{k-1} ცნობილია. უფრო ზუსტად, $k=1$-თვის (ნულოვან შრეზე) საწყისი მნიშვნელობისა და მარჯვენა მხარის საშუალებით ვითვლით φ_i^0-ს. შემდეგ ვხსნით (6.2) სისტემას u_i^1 უცნობების მიმართ. შემდეგ ნაბიჯზე $k=2$-თვის φ_i^1-ს ვითვლით u_i^1-სა და მარჯვენა მხარის საშუალებით და ვხსნით (6.2) სისტემას u_i^2 უცნობების მიმართ და ა.შ.

მტკიცდება, რომ ეს სქემა არის უპირობოდ მდგრადი და მისი კრებადობის რიგია $O(\tau^2 + h^2)$.

(6.2) სისტემის ამოხსნისათვის ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფაქტორიზაციის მეთოდი.

დავამტკიცოთ (6.1) სქემის მდგრადობა. ჩავწეროთ ის ვექტორული სახით:

$$\frac{\vec{u}_k - \vec{u}_{k-1}}{\tau} = A\frac{\vec{u}_k + \vec{u}_{k-1}}{2} + \vec{f}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.3}$$

სადაც

$$\vec{u}_1 = (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_n^k)^T,$$

$$\vec{f}_k = (f(x_i, t_{k-1/2}), \ldots, f(x_n, t_{k-1/2})),$$

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(6.3) სისტემიდან გვაქვს:

$$\left(I - \frac{\tau}{2}A\right)\vec{u}_k = \left(I + \frac{\tau}{2}A\right)\vec{u}_{k-1} + \tau\vec{f}_k, \tag{6.4}$$

სადაც I ერთეულოვანი მატრიცია. მტკიცება, რომ (-A) მატრიცი არის არადადებითი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $\vec{u} \in E^n$-თვის $(Au,u) \le 0$, ამიტომ $\left(I - \frac{\tau}{2} A \right)$ მატრიცი შებრუნებადია. მაშინ გვაქვს:

$$\vec{u}_k = \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \left(I - \frac{\tau}{2} A \right) \vec{u}_{k-1} + \tau \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \vec{f}_k . \tag{6.5}$$

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ $\left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1}$ და $\left(I + \frac{\tau}{2} A \right)^{-1}$ მატრიცები კომუტაციურია. მაშინ (6.5) ტოლობას შეგვიძლია მივცეთ სახე:

$$\vec{u}_k = \left(I + \frac{\tau}{2} A \right) \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \vec{u}_{k-1} + \tau \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \vec{f}_k .$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გამოვიყენებთ ნორმის თვისებას, მივიღებთ:

$$\|\vec{u}_k\| \le \left\| \left(I + \frac{\tau}{2} A \right) \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \right\| \cdot \|\vec{u}_{k-1}\| + \tau \left\| \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| \vec{f}_k \right\| . \tag{6.6}$$

მტკიცდება, რომ (იხ. § 1, თავი III) მართებულია შეფასებები:

$$\left\| \left(I + \frac{\tau}{2} A \right) \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \right\| \le 1 , \qquad \left\| \left(I - \frac{\tau}{2} A \right)^{-1} \right\| \le 1 ,$$

მაშინ (6.6) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\|\vec{u}_k\| \le \|\vec{u}_{k-1}\| + \tau \left\| \vec{f}_k \right\| .$$

აქედან ინდუქციით მიიღება:

$$\|\vec{u}_1\| \le \|\vec{u}_0\| + \tau \left\| \vec{f}_1 \right\| ,$$
$$\|\vec{u}_2\| \le \|\vec{u}_1\| + \tau \left\| \vec{f}_2 \right\| \le \|\vec{u}_0\| + \tau \left(\left\| \vec{f}_1 \right\| + \left\| \vec{f}_2 \right\| \right),$$

....

$$\|\vec{u}_k\| \le \|\vec{u}_0\| + \tau \sum_{i=1}^{k} \left\| \vec{f}_i \right\| .$$

აქედან თავის მხრივ გამომდინარეობს

$$\max_{1 \le k \le m} \|\vec{u}_k\| \le \|\vec{u}_0\| + T \cdot \max_{1 \le k \le m} \left\| \vec{f}_i \right\| .$$

მიღებულ უტოლობიდან გამომდინარეობს (6.1) სქემის მდგრადობა. ზოგადი პრინციპიდან გამომდინარე, რადგან აპროქსიმაციას აქვს ადგილი, მდგრადობიდან ავტომატურად გამომდინარეობს კრებადობა. მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების რიგია $O(\tau^2 + h^2)$. ცხადია იგულისხმება, რომ (5.1)-(5.2) უწყვეტი ამოცანის ამონახსნი საკმარისად გლუვია.

§ 7. სხვაობიანი მეთოდი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის (ცხადი სქემა)

განვიხილოთ შემდეგი საწყისი-სასაზღვრო (კოში-დირიხლეს) ამოცანა:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (x,t) \in [0,1] \times [0,T], \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t'(x,0) = \varphi_1(x), \tag{7.2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{7.3}$$

სადაც $f(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია განსახილველ არეში. ამასთან, $\varphi_0(x)$ აკმაყოფილებს შეთანხმებულობის პირობას:

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0.$$

ბადე $(x,\ t)$ სიბრტყეში ავიღოთ ზუსტად ისეთი, როგორიც წინა შემთხვევაში. (7.1)-(7.3) უწყვეტ ამოცანას შევუსაბამოთ შემდეგი სხვაობიანი ამოცანა:

$$\frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + f(x_i, t_k), \tag{7.4}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

სადაც $u_0^k = u_n^k = 0$, $u_i^0 = \varphi_0(x_i)$.

რაც შეეხება u_i^1-ის – პირველ შრეზე უცნობი ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობების განსაზღვრას, ვიყენებთ ტეილორის ფორმულას:

$$u(x,\tau) = u(x,0) + \tau u'(x,0) + \frac{\tau^2}{2} u''(x,0) + O(\tau^3) =$$
$$= \varphi_0(x) + \tau\varphi_1(x) + \frac{\tau^2}{2} u''(x,0) + O(\tau^3).$$

$u_{tt}''(x,0)$-ს ვსაზღვრავთ განტოლებიდან:

$$u_{tt}''(x,0) = \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} + f(x,0) = \varphi_0''(x) + f(x,0).$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს:

$$u(x,\tau) = \varphi_0(x) + \tau\varphi_1(x) + \frac{\tau^2}{2}(\varphi_0''(x) + f(x,0)) + O(\tau^3).$$

გადავაგდოთ ნაშთითი წევრი და მიღებული გამოსახულება ავიღოთ უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობად პირველ შრეზე, ე.ი.

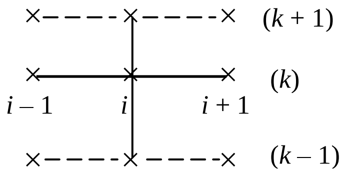
$$u_i^1 = \varphi_0(x_i) + \tau\varphi_1(x) + \frac{\tau^2}{2}(\varphi_0''(x_i) + f(x_i,0)). \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(7.4)-დან განვსაზღვროთ u_i^{k+1}:

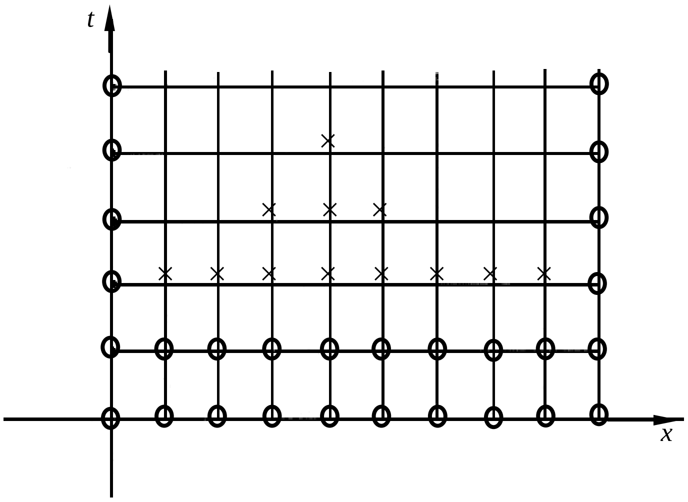
$$u_i^{k+1} = \left(\frac{\tau}{h^2} u_{i+1}^k - 2\left(\frac{\tau^2}{h^2} - 1\right) u_i^k + \frac{\tau^2}{h^2} u_{i-1}^k\right) - u_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i, t_k). \tag{7.5}$$

$k=1$ შემთხვევაში ჩავსვამთ რა ამ ფორმულაში u_i^0 და u_i^1 მნიშვნელობებს, განვსაზღვრავთ u_i^2-ს, ე.ი. ნულოვან და პირველ შრეზე მნიშვნელობების საშუალებით ცხადად განისაზღვრება მეორე შრეზე უცნობი ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობები; $k=2$ შემთხვევაში (7.5) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ვსვამთ u_i^1 და u_i^2 მნიშვნელობებს და ცხადად ვსაზღვრავთ u_i^3-ს და ა.შ.

(7.4) ამოცანის შესაბამის შაბლონს აქვს სახე:



რიცხვითი რეალიზაციის სქემა (x, t) სიბრტყეზე ასე გამოიყურება:



(7.4) სქემას უწოდებენ ცხად სქემას. ის არის სამშრიანი სქემა რადგან უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობები დაკავშირებულია ერთმანეთთან დროის სამი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის $(k-1,\ k,\ k+1)$. (7.4) სქემის აპროქსიმაციის რიგია $O(\tau^2+h^2)$. მართლაც, (7.4) ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს t-ით მეორე რიგის წარმოებულის ცენტრალურ-სხვაობიან ანალოგს (x_i,t_k) წერტილში, რომლის სიზუსტე არის $O(\tau^2)$, ხოლო მარჯვენა მხარეში შემავალი იგივე ტიპის სხვაობიანი ანალოგი წარმოადგენს x-ით მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამის სხვაობიან ანალოგს, რომლის სიზუსტე ასევე არის $O(h^2)$. საბოლოოდ, (7.4) სქემის აპროქსიმაციის რიგი იქნება $O(\tau^2+h^2)$.

(7.4) სხვაობიანი განტოლებათა სისტემა ჩავწეროთ ვექტორული სახით. ცხადია, გვაქვს:

$$\frac{\vec{u}_{k+1}-2\vec{u}_k+\vec{u}_{k-1}}{\tau^2}=A\vec{u}_k+\vec{f}_k\,, \tag{7.6}$$

სადაც

$$\vec{u}_k=(u_1^k,u_2^k,\ldots,u_{n-1}^k)^T\,,\quad \vec{f}_k=\left(f(x_1,t_k),\ldots,f(x_{n-1},t_k)\right)^T.$$

A არის იგივე $n-1$ რიგის მატრიცი, რაც პარაბოლური განტოლების შემთხვევაში. $\vec{u}_0$ და $\vec{u}_1$ მოცემული საწყისი ვექტორებია. (7.6) ტოლობიდან მიიღება:

$$\vec{u}_{k+1}=(2I+\tau^2A)\vec{u}_k-\vec{u}_{k-1}+\tau^2\vec{f}_k\,,\qquad k=1,2,\ldots,m-1. \tag{7.7}$$

იმისათვის, რომ (7.4) სქემა იყოს მდგრადი, დაცული უნდა იყოს შემდეგი პირობა: τ^2A მატრიცის სპექტრი მოთავსებული უნდა იყოს $[0,2]$ შუალედში. როგორც ყველა ცხადი სქემისათვის, ამ შემთხვევაშიც τ და h გარკვეული წესით უნდა იყოს ერთმანეთთან დაკავშირებული რომ (7.4) სქემა მდგრადი იყოს. ზოგადი პრინციპიდან გამომდინარე, რადგან აპროქსიმაციას აქვს ადგილი, მდგრადობიდან ავტომატურად გამომდინარეობს კრებადობა. ჩვენს შემთხვევაში კრებადობის რიგი იგივე იქნება, რაც აპროქსიმაციის რიგი.

§ 8. მეორე რიგის სიზუსტის არაცხადი სქემა ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

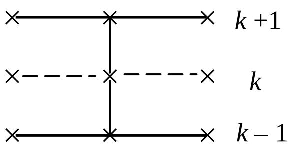
8.1. სქემის აგება და შესაბამისი სისტემის ვექტორული ჩაწერა

(7.1)-(7.3) უწყვეტ ამოცანას შევუსაბამოთ შემდეგი სხვაობიანი (დისკრეტული) ამოცანა

$$\frac{u_i^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_i^{k-1}}{\tau^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{i+1}^{k-1}-2u_i^{k-1}+u_{i-1}^{k-1}}{h^2}\right)+f(x_i,t_k)\,, \tag{8.1}$$

$$i=1,2,\ldots,n-1\,,\qquad k=1,2,\ldots,m-1.$$

ცხადია, ამ სქემის აპროქსიმაციის რიგი არის $O(\tau^2+h^2)$ (იხ. §6 და §7). (8.1) სქემა არის არაცხადი სქემა. მის შესაბამის შაბლონს აქვს შემდეგი სახე:



უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობები დაკავშირებულია ერთმანეთთან შვიდ კვანძით წერტილში. $k=1$ შემთხვევაში ნულოვან და პირველ შრეზე საძიებელი ფუნქციის მნიშვნელობები ცნობილია, ხოლო მეორე შრეზე u_i^2-ის მიმართ მიიღება

სამწერტილოვანი განტოლებათა სისტემა, რომელსაც ვხსნით ფაქტორიზაციის მეთოდით.

ჩავწეროთ განტოლებათა სისტემა $k+1$ შრეზე, რომელიც მიიღება (8.1)-დან, მას აქვს შემდეგი სახე:

$$-\frac{\tau}{2h^2}u_{i+1}^{k+1}+\left(\frac{\tau^2}{h^2}+1\right)u_i^{k+1}-\frac{\tau^2}{2h^2}u_{i-1}^{k+1}=\varphi_i^k\,,\quad i=1,2,\ldots,n-1\,,$$

სადაც

$$\varphi_i^k=2u_i^k-\left(\frac{\tau^2}{2h^2}u_{i+1}^{k-1}-\left(\frac{\tau^2}{h^2}+1\right)u_i^{k-1}\right)+\frac{\tau^2}{h^2}u_{i-1}^{k-1}+\tau^2 f(x_i,t_k)\,.$$

(8.1) სხვაობიანი განტოლება წინა შემთხვევის ანალოგიურად ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\vec{u}_{k+1}-2\vec{u}_k+\vec{u}_{k-1}}{\tau^2}=A\frac{\vec{u}_{k+1}+\vec{u}_{k-1}}{2}+\vec{f}_k\,,\qquad k=1,2,\ldots,m-1, \tag{8.2}$$

სადაც $\vec{u}_k$ და $\vec{f}_k$ ვექტორები და A მატრიცი იგივეა, რაც წინა პარაგრაფში. (8.2) ტოლობიდან მიიღება:

$$\vec{u}_{k+1}=L\vec{u}_k-\vec{u}_{k-1}+\vec{g}_k\,,\qquad k=1,2,\ldots,m-1, \tag{8.3}$$

სადაც

$$L=2\left(I-\frac{\tau^2}{2}A\right)^{-1},\quad \vec{g}_k=\frac{\tau^2}{2}L\vec{f}_k\,.$$

გამოვსახოთ $\vec{u}_k$ ვექტორი $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$ და $\vec{g}_k$ ვექტორების საშუალებით. ინდუქციით მივიღებთ (სიმარტივისათვის u_k და g_k-ს არ გავუკეთებთ ვექტორის ნიშანს):

$$u_2=Lu_1-u_0+g_1,$$

$$u_3=Lu_2-u_1+g_2=L^2u_1-Lu_0+Lg_1-u_1+g_2=$$
$$=(L^2-I)u_1-Lu_0+(Lg_1+g_2)\,,$$

$$u_4=Lu_3-u_2+g_3=(L^3-L)u_1-L^2u_0+(L^2g_1+Lg_2)-Lu_1+u_0-g_1+g_3=$$
$$=(L^3-2L)u_1-(L^2-I)u_0+[(L^2-I)g_1+Lg_2+g_3]$$

$$\ldots$$

$$u_{k+1}=U_k(L)u_1-U_{k-1}(L)u_0+\sum_{i=1}^{k}U_{k-1}g_i\,, \tag{8.4}$$

სადაც $U_k(L)$ მატრიცა-პოლინომი აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას:

$$U_{k+1}(L)=LU_k(L)-U_{k-1}(L)\,,\qquad k=1,2,\ldots$$
$$U_0=I\,,\qquad U_1=L\,.$$

8.2. დამხმარე ფაქტები

განვიხილოთ $U_k(L)$ მატრიცა-პოლინომის შესაბამისი სკალარული პოლინომი:

$$U_{k+1}(x) = xU_k(x) - U_{k-1}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$U_0(x) \equiv 1, \qquad U_1(x) = x.$$

თუ ამ დამოკიდებულებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ $2x$-ს, მივიღებთ ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომს. ადგილია აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$U_{k+1}U_{k-1} = U_k^2 - 1$$

მეორე მხრივ

$$U_{k+1} + U_{k-1} = xU_k.$$

ამრიგად, U_{k+1} და U_{k-1} ვიეტის თეორემის თანახმად აკმაყოფილებს შემდეგ კვადრატულ განტოლებას:

$$z^2 - xU_k z + (U_k^2 - 1) = 0.$$

თუ მოვითხოვთ დისკრიმინანტის არაუარყოფითობას, მივიღებთ:

$$xU_k - 4(U_k^2 - 1) \geq 0,$$

ან რაც იგივეა,

$$(4 - x^2)U_k^2 \leq 4.$$

აქედან კი გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\left|U_k(x)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}, \qquad |x| < 2. \tag{8.5}$$

$U_k(x)$ პოლინომი $[-2, 2]$ სეგმენტში თავის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს აღწევს შუალედის ბოლოებში. ზემოთ მოყვანილი რეკურენტული დამოკიდებულებიდან მიიღება:

$$U_k(\pm 2) = (-1)^k (k + 1).$$

ამრიგად, მართებულია შეფასება

$$\left|U_k(x)\right| \leq k + 1, \qquad x \in [-2;\ 2]. \tag{8.6}$$

$U_k(x)$ პოლინომების სხვაობისათვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\left|U_k(x) - U_{k-1}(x)\right| \leq \sqrt{2}, \qquad x \in [0;\ 2]. \tag{8.7}$$

აპრიორული შეფასების მისაღებად ჩვენ დაგვჭირდება ერთი შედეგი ფუნქციონალური ანალიზიდან, რომელიც ეხება ოპერატორ-პოლინომის ნორმის შეფასებას.

თეორემა. ვთქვათ, A არის წრფივი, სიმეტრიული, შემოსაზღვრული ოპერატორი H ჰილბერტის სივრცეში, მაშინ $P(A)$ ოპერატორ-პოლინომისათვის მართებულია შეფასება

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in Sp(A)} |P(\lambda)|,$$

სადაც $Sp(A)$ არის A ოპერატორის სპექტრი ($P(\lambda) -$ სკალარული პოლინომია).

სხვა სიტყვებით ეს შედეგი ასე გამოითქმის: სიმეტრიული შემოსაზღვრული ოპერატორის შემთხვევაში, ოპერატორ-პოლინომის ნორმა ტოლია შესაბამისი სკალარული პოლინომის C ნორმის სპექტრზე.

8.3. მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება

დავუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას. შევაფასოთ L მატრიცის სპექტრი. პირობის თანახმად გვაქვს:

$$\left(\left(I - \frac{\tau^2}{2}A\right)u, u\right) = (u,u) - \frac{\tau^2}{2}(Au,u) \geq (u,u) = \|u\|^2.$$

$\left(I - \frac{\tau^2}{2}A\right)$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები მეტია ან ტოლი ერთზე (რადგან სკალარული ნამრავლი მეტია ან ტოლი ერთზე). ცხადია, მისი შებრუნებული $\left(I - \frac{\tau^2}{2}A\right)^{-1}$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ნაკლები იქნება ერთზე, ამასთან მეტი ნულზე ყოველი n-სთვის.

ამრიგად, $Sp(L) \subset [0,\ 2]$, $\forall n$. მაშინ ზემოთ მოყვანილი თეორემის და (8.6), (8.7) შეფასებების თანახმად მართებულ იქნება შემდეგი შეფასებები:

$$\|U_k(L)\| \leq \max_{x \in [0,2]} |U_k(x)| = k+1, \tag{8.8}$$

$$\|U_k(L) - U_{k-1}(L)\| \leq \max_{x \in [0,2]} |U_k(x) - U_k(x)| \leq \sqrt{2}. \tag{8.9}$$

(8.4) ფორმულა ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$u_{k+1} = \tau U_k(L)\left(\frac{u_1 - u_0}{\tau}\right) + \left(U_k(L) - U_{k-1}(L)\right)u_0 + \frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{k} U_{k-i}(L)Lf_k.$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გამოვიყენებთ ნორმის თვისებას, მივიღებთ:

$$\|u_{k+1}\| = \tau\|U_k(L)\| \cdot \left\|\frac{u_1 - u_0}{\tau}\right\| + \|U_k(L) - U_{k-1}(L)\| \cdot \|u_0\| + \frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\|U_{k-i}\| \cdot \|L\| \cdot \|f_k\|.$$

აქედან (8.8) და (8.9) შეფასებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\|u_{k+1}\| \leq t_{k+1}\left\|\frac{u_1 - u_0}{\tau}\right\| + \sqrt{2}\|u_0\| + \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{k} t_{k-i+1}\|f_k\| \quad .$$

ცხადია, ნებისმიერი k-თვის აქედან გამომდინარეობს შემდეგი აპრიორული შეფასება:

$$\|\vec{u}_{k+1}\| \le T\left\|\frac{\vec{u}_1-\vec{u}_0}{\tau}\right\| + \sqrt{2}\|\vec{u}_0\| + \frac{1}{2}T^2 \max_{1\le i\le n}\|\vec{f}_k\|. \quad (8.10)$$

ეს აპრიორული შეფასება გვიჩვენებს, რომ (8.1) სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნი უწყვეტად არის დამოკიდებული საწყის $\vec{u}_0$ ვექტორზე, საწყისი სიჩქარის სხვაობიან ანალოგზე $\frac{\vec{u}_1-\vec{u}_0}{\tau}$ და მარჯვენა მხარეებზე, ე.ი. გვაქვს მდგრადობა სხვაობიანი ამოცანისთვის. (8.10)-ის ანალოგიური შეფასება მიიღება წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგისთვის. ამით ნაჩვენებია (8.1) სხვაობიანი სქემის მდგრადობა.

შევაფასოთ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება. ზუსტ ამონახსნსა და მიახლოებით ამონახსნს შორის სხვაობა აღვნიშნოთ z_i^k-ით:

$$z_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k.$$

ზუსტი ამონახსნი $u(x_i, t_k)$, ცხადია, აკმაყოფილებს (8.1) სახის განტოლებას იმ განსხვავებით, რომ მარჯვენა მხარეს დაემატება ნაშთითი წევრი $R_{i,k}(\tau, h)$, რომლის რიგი, როგორც ვიცით, არის $O(\tau^2 + h^2)$. ცხადია, z_i^k ცდომილება დააკმაყოფილებს ასევე (8.1) სახის სხვაობიან განტოლებას იმ განსხვავებით, რომ f შეიცვლება $R_{i,k}(\tau, h)$-ით. მიღებული სხვაობიანი განტოლებისათვის, (8.10) აპრიორული შეფასების თანახმად, მართებული იქნება შეფასება:

$$\|\vec{z}_{k+1}\| \le T\left\|\frac{\vec{z}_1-\vec{z}_0}{\tau}\right\| + \sqrt{2}\|\vec{z}_0\| + \frac{1}{2}T^2 \max_{1\le i\le n}\|\vec{R}_i(\tau, h)\|, \quad (8.11)$$

სადაც

$$\vec{z}_k = (z_1^k, z_2^k, \ldots, z_n^k); \quad \vec{R}_k = (R_{1k}, R_{2k}, \ldots, R_{nk}).$$

როგორც ვიცით, E^n სივრცეში ვექტორის ნორმა ტოლია მისი კომპონენტების კვადრატების ჯამიდან კვადრატული ფესვის. სწორედ ეს ნორმა ზის (8.11) აპრიორულ შეფასებაში.

რადგან $u_i^0 = u(x_i, 0),$ ამიტომ ცხადია $\|\vec{z}_0\| = 0$. ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\left\|\frac{\vec{z}_1-\vec{z}_0}{\tau}\right\| = O(\tau^2).$$

ცხადია ასევე, რომ

$$\|\vec{R}_k(\tau, h)\| = O(\tau^2 + h^2).$$

მაშინ (8.11) შეფასებიდან მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\|\vec{z}_{k+1}\| = O(\tau^2 + h^2)\,.$$

ამრიგად, განხილული სქემა მდგრადია ნებისმიერი τ და h-თვის $(\tau, h > 0)$ და მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება არის $O(\tau^2 + h^2)$ რიგის.