# 6.6 Matrix Exponential

# 1-6, 7-14

## 6.6.1

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$|A-\lambda I|$

$\begin{bmatrix}1-\lambda&0\\0&-1-\lambda\end{bmatrix}=0$

$(1-\lambda)(-1-\lambda)$

$-1+\lambda^2=0$

$\lambda=\pm 1$

$\lambda=1$

$\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-2\\0&0\end{bmatrix}$ $-2y=0$, $x=$ free $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=-1$

$\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}\to$ $2x=0$, $y=$ free $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$x(t)=c_1e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2e^{-t}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$X(t)=\begin{bmatrix}e^t&0\\0&-e^{-t}\end{bmatrix}$

$X^{-1}(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

$X(t)\cdot X(0)=\begin{bmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{bmatrix}$

$e^{At}=x(t)x^{-1}(0)$

$e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{bmatrix}$

## 6.6.3

$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$

$\left|\begin{bmatrix}1-\lambda&0\\1&-\lambda\end{bmatrix}\right|=0$

$(1-\lambda)(-\lambda)-0(1)=0$

$(1-\lambda)(-\lambda)=0$

$\lambda=1,0$

$\lambda=0$

$\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}:v_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=1$

$\begin{bmatrix}0&0\\1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}:v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c|cc}0&1&&1&0\\1&1&&0&1\end{array}\right]$

$x(t)=c_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_2e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$X(t)=\begin{bmatrix}0&e^t\\1&e^t\end{bmatrix}$

$X(0)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1\\e^{-t}&0\end{bmatrix}$

$e^{At}=\begin{bmatrix}0&e^t\\1&e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&0\end{bmatrix}$

$e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&0\\-1+e^t&1\end{bmatrix}$

$e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&0\\e^t-1&1\end{bmatrix}$

## 6.6.5

$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

$e^{At}=x(t)x^{-1}(0)$

$e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{bmatrix}$

$0\cdot(-1)^{3+1}(0)+0\cdot(-1)^{3+2}(0)+(3-\lambda)(-1)^{3+3}\big((1-\lambda)(2-\lambda)\big)$

$(\lambda-3)(1-\lambda)(2-\lambda)$

$\lambda=1,2,3$

$x(t)=c_1e^{t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3e^{3t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\lambda=1$ $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$X(t)=\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$

$\lambda=2$ $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$X^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $x(t)x(0)=\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{3t}\end{bmatrix}$

$\lambda=3$ $\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

**6.6.7)** $x' = x$, $y' = y$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$

$\left|\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0$

$(1-\lambda)(1-\lambda)$

$\lambda = 1$

special case when $A = I$

$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

**6.6.9)** $x' = x + y$, $y' = x$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ not Diagonizable

$\left|\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0$

$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1(0)$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1$

$\lambda = 1, 1 \; : e^t, te^t$

$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^t$

**6.6.11)** $x' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$

$\left|\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0$

$(-1-\lambda)(2-\lambda)$

$-2 - \lambda + \lambda^2$

$\lambda^2 - \lambda - 2$

$(\lambda - 2)(\lambda + 1)$

$\lambda = -1, 2$

$\lambda = -1$

$(A - \lambda I)u_1$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2$

$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

$X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} (0) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}\bar{f}(s)\,ds$

$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds$

$\begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{s} \\ 0 \end{bmatrix} ds$

$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\int_0^t \begin{bmatrix} se^s \\ se^{-2s} \end{bmatrix} ds$

$u = s \quad dv = e^s$

$du = 1 \quad v = e^s$

$*\; se^s - e^s$

$u = s \quad dv = e^{-2s}$

$du = 1 \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2s}$

$*\; -\frac{1}{2}se^{-2s} + \frac{1}{4}e^{-2s}$

$\begin{bmatrix} se^s - e^s \\ \frac{1}{4}(-2e^{-2s} + e^{-2s}) \end{bmatrix}\Bigg|_0^t$

$\begin{bmatrix} te^t - e^t \\ \frac{1}{4}(-2e^{-2t} + e^{-2t}) \end{bmatrix}$

6.6.12

$$\bar{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$e^{At}\bar{c} + e^{At}\int_0^t e^{-AS}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$6 - 5\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

$$\lambda = 2, 3$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} e^{2t} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{e^{2t}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{e^{3t}} \end{array}\right]$$

$$e^{At}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{-At}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} & 0 \\ 0 & e^{-3s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 6e^{-3s} \end{bmatrix} ds$$

$$-2e^{-3s}\Big|_0^t = -2e^{-3t}$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2e^{-3t} - 2 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 - 2e^{3t} \end{bmatrix}$$