6.1 Linear Systems of Differential Equations

\# 6, 7, 11

6.1.6) $\bar{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}$, $\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$ $\bar{v}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$

$\bar{x}' = A\bar{x}$

$x(t) = c_1\bar{u}(t) + c_2\bar{v}(t)$

$X(t) = [\bar{u}|\bar{v}]$

$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{u}' = \begin{bmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}$

$\bar{v}' = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix}$

$\bar{u}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4e^{3t} - e^{3t} \\ 2e^{3t} + e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}$ ✓

$\bar{v}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4e^{2t} - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} + 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix}$ ✓

Fundamental matrix: $X(t) = [u|v] = \left[\begin{array}{c|c} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{array}\right]$

General Solution: $x(t) = c_1\bar{u}(t) + c_2\bar{v}(t) = c_1\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$

$X(t) = \left[\begin{array}{c|c} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{array}\right]$

$\bar{X}(t) = c_1\begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$

6.1.7) $\bar{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\bar{x}$ $\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}$ $\bar{v}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{u}'(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$

$\bar{v}'(t) = \begin{bmatrix} 3e^{3t} \\ 6e^{3t} \end{bmatrix}$

$\bar{u}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} - 2e^{-2t} \\ 4e^{-t} \quad -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$ ✓

$\bar{v}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} + 2e^{3t} \\ 4e^{3t} + 2e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} \\ 6e^{3t} \end{bmatrix}$ ✓

$X(t) = \left[\begin{array}{c|c} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{array}\right]$ $\bar{x}(t) = c_1\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$

6.1.11) $\bar{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\bar{x}$ $\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$ $\bar{v}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{u}'(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$

$\bar{v}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}$

$\bar{u}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$ ✓

$\bar{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}$ ✓