

# Wprowadzenie do metod numerycznych i modelowania matematycznego dla uczniów szkół średnich

Jakub Lewandowski

Marzec 2022

## 1 Wstęp

Wiele zjawisk występujących w naturze najprościej jest opisać i zaobserwować stosując pochodne. Dla przykładu, ustalenie położenia statku na środku oceanu to duże wyzwanie, ale bez większego problemu możemy zmierzyć jego prędkość. Prędkość to inaczej zmiana położenia w czasie, czyli pochodna drogi po czasie  $s'(t)$ . Zatem mając zapis prędkości statku możemy uzyskać informację o przebytej przez niego drodze.

W związku z tym, że czasem prościej zaobserwować zmianę jakiegoś zjawiska zamiast samo zjawisko to często w naukach przyrodniczych i fizycznych możemy spotkać równanie postaci

$$y'(x) = f(x) \tag{1}$$

gdzie pochodna  $y'(x)$  to na przykład prędkość, pęd (prędkość na jednostkę masy), przyrost populacji, a  $f(x)$  to obserwacja, której dokonaliśmy.

Chcąc poznać wartość funkcji  $y(x)$ , która opisuje nasze właściwe zjawisko, dla prostych funkcji  $f(x)$  możemy obliczyć całkę

$$y(x) = \int f(x)dx \tag{2}$$

Jednak dla skomplikowanych funkcji (lub gdy nie mamy wzoru  $f(x)$ , a jedynie jej wartości) obliczenie tej całki może okazać się niemożliwe. W takim przypadku niezmiernie przydatne okazują się numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych (w skrócie, metody numeryczne).

## 2 Metoda Eulera

Aby rozwiązać równanie postaci  $y'(x) = f(x)$ , gdy nie jesteśmy w stanie obliczyć całki  $f(x)$  zaczniemy od przypomnienia sobie definicji pochodnej.

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad (3)$$

Z tej definicji wiemy, że gdy  $h$  jest niejako równe 0 to  $y(x+h) - y(x)/h$  daje nam pochodną funkcji  $y(x)$ . Z doświadczenia z granicami wiemy jednak, że dla bardzo małego  $h$  wartość funkcji wewnątrz granicy jest bliska prawdziwej wartości po lewej stronie równania (tutaj  $y'(x)$ ).

Możemy to zatem zapisać definicję naszej pochodnej jako:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h) \quad (4)$$

gdzie  $O(h)$  reprezentuje różnicę między wartością  $y(x+h) - y(x)/h$  a prawdziwą wartością  $y'(x)$  - czyli po prostu błąd jakim obarczona jest nasza metoda liczenia pochodnej. W metodach numerycznych do podawania błędu stosuje się notację "duże O" (dobrze znaną informatykom), która pozwala ocenić jak precyzyjna jest dana metoda.

Równanie (4) to najprostsza metoda numeryczna (Metoda Eulera), która pozwala nam obliczyć wartość równania zawierającego w sobie pochodną. Zwróćmy uwagę, że metody numeryczne nie pozwalają nam uzyskać wzoru rozwiązwanego równania, a jedynie jego numeryczną wartość - stąd ich nazwa.

Spróbujmy zatem zastosować metodę Eulera do rozwiązania przytoczonego na początku równania  $y'(x) = f(x)$ . Aby to zrobić wystarczy, że zastąpimy pochodną po lewej stronie równania wzorem metody z Eulera.

Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x) \\ \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= f(x) + O(h) \\ y(x+h) - y(x) &= hf(x) + O(h) \\ y(x+h) &= y(x) + hf(x) + O(h) \end{aligned} \quad (5)$$

W dalszych obliczeniach zignorujemy błąd, ale nie zapominajmy, że przy stosowaniu metod numerycznych jest on zawsze obecny. Uprośćmy teraz nieco notację (przy okazji czyniąc ją łatwiejszą do przekształcenia w program komputerowy) według poniższego wzoru:

$$\begin{aligned}h &= \Delta x \\x_i &= x \\x_{i+1} &= x + \Delta x \\y_i &= y(x_i) \\y_{i+1} &= y(x + \Delta x)\end{aligned}\tag{6}$$

Zatem wzór pozwalający rozwiązać równanie  $y'(x) = f(x)$  metodą Eulera prezentuje się następująco:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i)\Delta x\tag{7}$$

Widzimy, że z wykorzystaniem tej metody, posiadając wzór funkcji  $f(x)$  oraz wartość  $y(x)$  w punkcie  $(x_i, y_i)$  jesteśmy w stanie wyliczyć wartość  $y(x)$  w punkcie  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

Spróbujmy zastosować metodę Eulera dla prostej funkcji  $f(x) = -x/10$ . Po podstawieniu otrzymujemy:

$$y_{i+1} = y_i + -\frac{x_i}{10}\Delta x\tag{8}$$

Jak widać, pojawia się problem, gdzie zacząć, gdyż żeby poznać  $y_{i+1}$  musimy znać  $y_i$ .

### 3 Stała całkowania i warunek początkowy

Jeśli przypomnimy sobie właściwości pochodnych to zauważymy pewną właściwość:

$$(x^2 + 3)' = 2x \qquad (x^2 + 1)' = 2x \qquad (x^2 + 4)' = 2x\tag{9}$$

Pochodna ze stałej to 0. Dlatego wyrażenie  $2x$  jest pochodną nieskończenie wielu wyrażeń postaci  $x^2 + c$ . W przypadku całkowania zapisujemy:

$$\int 2x dx = x^2 + c\tag{10}$$

gdzie  $c$  jest "stałą całkowania".

W przypadku używania metod numerycznych nie jesteśmy w stanie zapisać stałej całkowania jako symbolu. Dlatego zawsze musimy znać jedną wartość funkcji, której szukamy - jest to tzw. warunek początkowy (ang. initial condition).<sup>1</sup> Warunkiem początkowym może być na przykład położenie statku, którego prędkość mierzymy.

Jeżeli w równaniu (10) przyjmiemy, że  $x = 0 \Rightarrow x^2 + c = 0$  to łatwo zauważyć, że  $c = 0$ .

Wracając do naszego problemu z równania (8), w całości zapiszemy go jako:

$$y'(x) = -\frac{x}{10} \quad y(0) = 6 \quad (11)$$

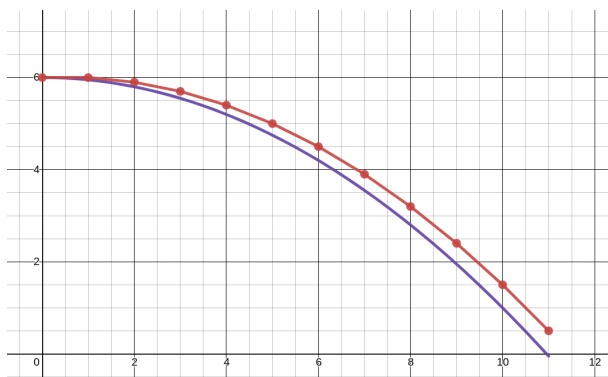
Przyjmując  $\Delta x = 1$  możemy ten problem rozwiązać metodą Eulera:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{x_i}{10} \Delta x \quad (12)$$

Najprościej do tego celu wykorzystać tabelę:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8
y(x)	6	6	5.9	5.7	5.4	5.0	4.5	3.9	3.2

Jako, że znamy analityczne rozwiązanie powyższego problemu ( $y(x) = -x^2/20 + 6$ ) to możemy narysować oba rozwiązania i porównać je.



Czerwona linia to rozwiązanie wyliczone metodą Eulera, fioletowa - rozwiązanie analityczne. Jak widać te dwa rozwiązania różnią się - ta różnica to właśnie błąd występujący przy wykorzystywaniu metod numerycznych, który pomineliśmy wcześniej.

<sup>1</sup>Zależnie od złożoności problemu możemy potrzebować więcej niż jednego warunku początkowego. Zawsze jednak musimy dokładnie określić ile jest ich potrzebnych, gdyż przyjęcie zbyt wielu warunków początkowych jest równie problematyczne co przyjęcie za małej ilości.

## 4 Rodzaje błędów w modelach numerycznych

Różnica między rozwiązaniem numerycznym a analitycznym zwana błędem ma dwa źródła. Pierwszym jego źródłem jest błąd metody (błąd obcięcia, ang. truncation error), który wcześniej oznaczyliśmy dla metody Eulera jako  $O(\Delta x)$ . Przyjmując metodę Eulera jako przybliżenie pochodnej zaakceptowaliśmy, że nasz wynik będzie się nieznacznie różnił od rzeczywistego. Notacja "duże O" wskazuje na to, że wielkość tego błędu zależy od parametru  $\Delta x$ .

Spójrzmy na różnicę w dokładności rozwiązania numerycznego zależnie od wartości  $\Delta x$ .



*niebieski - rozwiązanie analityczne, zielony -  $\Delta x = 0.5$ ,  
pomarańczowy -  $\Delta x = 1.0$ , czerwony -  $\Delta x = 2.0$*

Wyraźnie widać, że im większa wartość  $\Delta x$  tym mniej dokładne jest nasze przybliżenie. Jednak nie możemy swobodnie zmniejszyć  $\Delta x$  dla poprawy dokładności, gdyż użycie mniejszego  $\Delta x$  wymaga wykonania większej ilości obliczeń dla przybliżenia funkcji w danym przedziale. Na rysunku powyżej, rozwiązanie z  $\Delta x = 2$  ma 6 punktów, a rozwiązanie z  $\Delta x = 0.5$  już ma punktów 24.

Pokazany tutaj w uproszczeniu problem doboru parametru  $\Delta x$  ma bardzo istotne implikacje w rzeczywistych zastosowaniach. Większa dokładność przewidywań numerycznych wymaga większych nakładów obliczeniowych. Jako, że moc komputerów na świecie jest ograniczona dokładność prognozy pogody (przy której tworzeniu intensywnie wykorzystuje się metody numeryczne) też jest ograniczona.

Drugim źródłem błędów w metodach numerycznych jest stosowanie zaokrągleń. Dla przykładu powszechnie występująca w matematyce liczba  $\pi$  ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Jednak na komputerze (i na kartce, gwoli ścisłości)

jesteśmy w stanie zapisać tylko skończoną ilość cyfr liczby  $\pi$ . Dlatego wszystkie obliczenia wykorzystujące  $\pi$  w metodach numerycznych są z góry obciążone błędem zaokrąglenia.

Co więcej, błąd zaokrąglenia się akumuluje - każda operacja jaką wykonujemy na zaokrąglonej liczbie zmienia wielkość tego błędu. Przykładowo, przybliżenie  $\pi$  do 6 miejsc dziesiętnych daje błąd wielkości  $\approx 6 \cdot 10^{-7}$ . Po przemnożeniu tej zaokrąglonej wartości razy 4, błąd zwiększy się do  $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ . Nawet przy bardzo dokładnych przybliżeniach, błąd zaokrąglenia z czasem narasta.

Dodatkowo, przybliżenia (podobnie jak parametru  $\Delta x$ ) nie można poprawiać do woli, gdyż obliczenia z większą ilością miejsc dziesiętnych wymagają większej mocy obliczeniowej. Dlatego przy stosowaniu metod numerycznych preferuje się te pozwalające błędowi zaokrąglenia narastać jak najwolniej.

## 5 Metoda Eulera w równaniach różniczkowych

Do tej pory stosowaliśmy metodę Eulera jedynie dla prostych równań w postaci:

$$y'(x) = f(x) \quad (13)$$

Jednak równania różniczkowe opisujące zjawiska naturalne charakteryzują się tym, że występują w nich także wyrażenia ze zmienną zależną (tutaj  $y$ ) a nawet inne pochodne (co zostanie omówione później). Analityczne rozwiązywanie takich równań wykracza daleko poza program liceum, a czasem jest nawet całkowicie niemożliwe. W tym miejscu, metody numeryczne pokazują swoją największą zaletę pozwalając rozwiązać problemy, dla których metody analityczne są niewystarczające.

Prostym przykładem równania różniczkowego w postaci  $y'(x) = f(x, y)$  jest prawo stygnięcia Newtona:

$$T'(t) = -k(T - T_r) \quad (14)$$

Równanie to opisuje jak zmienia się w czasie temperatura ciała w otoczeniu o danej temperaturze  $T_r$ . Stała  $k$  reprezentuje jak efektywnie dane ciało wymienia ciepło z otoczeniem. Jak widać, równanie to jest postaci bardzo podobnej do równania analizowanego w poprzednich sekcjach. Metoda Eulera pozwala nam rozwiązać równania postaci  $y'(x) = f(x, y)$  w sposób identyczny jak poprzednio. Spróbujmy ją więc zastosować dla prawa stygnięcia Newtona.

$$T'(t) = -k(T - T_r) \quad (15)$$

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = -k(T_i - T_r) + O(h) \quad (16)$$

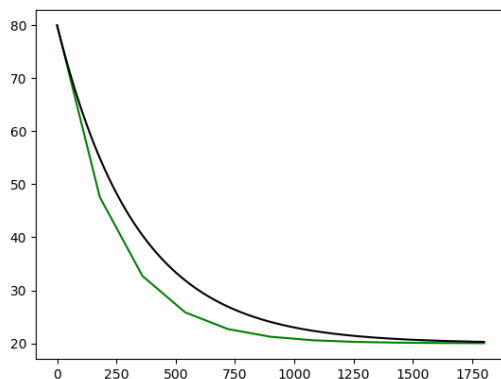
$$T_{i+1} \approx T_i - k(T_i - T_r)\Delta t \quad (17)$$

Stosując te same przekształcenia i notację co wcześniej uzyskujemy wyrażenie, które pozwala obliczyć nam wartość  $T_{i+1}$  przy znanym  $T_i$ .

Możemy zatem wykorzystać prawo stygnięcia Newtona i metodę Eulera do symulowania (modelowania) na przykład temperatury kubka z herbatą. Kubek o temperaturze początkowej  $T(t = 0) = 80^\circ\text{C}$  stoi w pokoju o temperaturze  $T_r = 20^\circ\text{C}$  i jest stosunkowo złym przewodnikiem ciepła, więc przyjmijmy  $k = 0.003$ . Mamy zatem:

$$T'(t) = -0.003(T - 20) \qquad T(0) = 80 \qquad (18)$$

Wykorzystując równanie (17) wynik obliczeń naszego modelu dla  $\Delta t = 180\text{s}$  prezentuje się następująco:



*czarny - rozwiązanie analityczne, zielony - rozwiązanie numeryczne*

Jak widać, nasz model w miarę realistycznie przewiduje temperaturę kubka - początkowo spada ona szybko, a z czasem co raz wolniej, co obserwujemy też w rzeczywistości. Metoda Eulera w tym wypadku nawet dla stosunkowo dużego  $\Delta t$  sprawdza się stosunkowo dobrze.

Widzimy tutaj też jakie wyzwania rodzi stosowanie modeli numerycznych w rzeczywistych problemach. Czas stygnięcia kubka to prawie pół godziny, w związku z czym zwiększenie  $\Delta t$  dla uzyskania większej precyzji znacząco zwiększa ilość potrzebnych obliczeń.

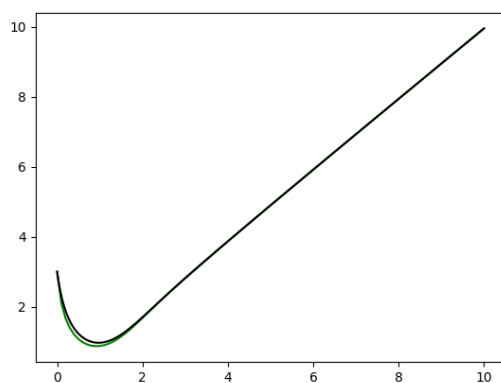
Uważny czytelnik zauważy jednak, że w przykładzie powyżej tak naprawdę rozwiązaliśmy równanie  $y'(x) = f(y)$ . Spróbujmy zatem faktycznie wykorzystać metodę Eulera do rozwiązywania równania  $y'(x) = f(x, y)$ . Jako  $f(x, y)$  użyjemy wzoru na hiperbolę paraboliczną, co daje nam problem w postaci:

$$y'(x) = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 3 \qquad (19)$$

To pozornie proste równanie ma bardzo skomplikowane rozwiązanie analityczne, którego nie będę tutaj przytaczał, i którego implementacja mogłaby okazać się dużym wyzwaniem (nie wspominając o jego znalezieniu). Natomiast użycie metody Eulera jest równie proste co w poprzednich przypadkach:

$$y_{i+1} \approx y_i + (x_i^2 - y_i^2)\Delta x \quad (20)$$

Dla  $\Delta x = 0.1$  wynik naszych obliczeń wygląda następująco:



*czarny - rozwiązanie analityczne<sup>2</sup>, zielony - rozwiązanie numeryczne*

W tym przykładzie widzimy wyraźnie, że nawet dla stosunkowo niewielkiego  $\Delta x = 0.1$  obecny jest zauważalny błąd, co sugeruje, że model w tym wypadku nie radzi sobie tak dobrze jak poprzednio. Wciąż pozwala nam obliczyć rozwiązanie bliskie analitycznemu, ale wymagane do tego jest znacząco więcej mocy obliczeniowej.

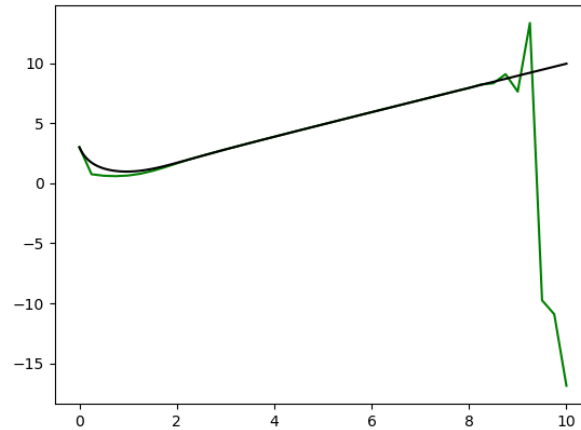
---

<sup>2</sup>W przypadku tego rozwiązania skorzystałem z niewielkiego triku - czarna linie nie jest tak naprawdę rozwiązaniem analitycznym, a rozwiązaniem numerycznym z bardzo małym  $\Delta t$ , które w tym wypadku jest wystarczająco zbliżone do rozwiązania analitycznego.



## 6 Stabilność modeli numerycznych

Sprawdźmy co się stanie jeśli zwiększymy  $\Delta x$  do 0.25.



czarny - rozwiązanie analityczne, zielony - rozwiązanie numeryczne

Tym razem, wyniki naszych obliczeń są bardzo ciekawe. Na początku przedziału nasz model obliczył wartość rozwiązania stosunkowo dobrze, jednak w pewnym punkcie rozwiązanie numeryczne zaczęło drastycznie odchodzić od analitycznego. Jest to przykład sytuacji, w której nasz model numeryczny stał się *niestabilny*.

Pojęcie stabilności modeli numerycznych nie jest precyzyjnie zdefiniowane i zależy od kontekstu. W uproszczeniu, stabilność modelu numerycznego to "zdolność" danej modelu do tłumienia omówionych wcześniej błędów i obliczenia poprawnego rozwiązania. Modele niestabilne amplifikują błędy zamiast je tłumić w wyniku czego w pewnym punkcie zaczynają odbiegać od poprawnego rozwiązania.

Modele numeryczne mogą cechować się jednym z trzech typów stabilności.

- Modele *bezw warunkowo niestabilne* to takie, które niezależnie od przyjętych parametrów zawsze będą niestabilne, i które nie są szczególnie użyteczne.
- Modele *bezw warunkowo stabilne* są zawsze stabilne i w dużej mierze pożądane, jednak zazwyczaj są też bardzo skomplikowane co może je dyskwalifikować w niektórych zastosowaniach.
- Modele *warunkowo stabilne* są stabilne jedynie dla pewnych wartości  $\Delta x$  (zazwyczaj bardzo małych) i mogą być preferowane tam, gdzie potrzebny jest mało skomplikowany model a wydajność obliczeniowa nie ma aż tak dużego znaczenia.

Stabilność modelu numerycznego zależy zarówno od rozwiązywanego problemu jak i wykorzystywanej metody numerycznej. Model wykorzystujący tę samą metodę numeryczną może być dla jednego problemu warunkowo stabilny, a dla

drugiego bezwarunkowo niestabilny. W rzeczywistych zastosowaniach ustalenie stabilności modelu jest bardzo istotne. Jednak analiza stabilności modelu jest bardzo skomplikowanym zadaniem. Dlatego czasem (zwłaszcza dla bardzo rozbudowanych problemów) najlepszą techniką ustalenia stabilności modelu jest wyliczenie modelu dla wielu różnych wartości  $\Delta x$  i obserwacja zachowania modelu.

Stosowana przez nas do tej pory metoda Eulera w wielu przypadkach skutkuje powstaniem modelu bezwarunkowo niestabilnego lub warunkowo stabilnego. Co więcej, jest ona metodą bardzo mało precyzyjną. Jeśli chcemy uzyskać dokładne wyniki bez znacznego zmniejszenia  $\Delta x$  to musimy poszukać innych metod.

## 7 Szereg Taylora i metoda różnic skończonych

Omawiana do tej pory metoda Eulera jest najprostszym i szczególnym przypadkiem metody różnic skończonych (ang. finite difference method). Metoda różnic skończonych pozwala nam znaleźć przybliżenie numeryczne pochodnej dowolnego rzędu i dowolnych zmiennych. Po czym zastąpić nim pochodną występującą w równaniu różniczkowym, tak jak to robiliśmy do tej pory z pochodną po lewej stronie równania w przypadku metody Eulera.

Zobaczmy zatem jak możemy znaleźć przybliżenie pochodnej drugiego rzędu. Pochodne drugiego rzędu są niezwykle przydatne w problemach fizycznych, gdyż można z ich użyciem reprezentować przyspieszenie, a więc także siły działające na obiekty.

Znalezienie przybliżenia zaczniemy od zapisania funkcji  $f(x+h)$  oraz  $f(x-h)$  w postaci szeregu Taylora.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (21)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (22)$$

Szukamy przybliżenia pochodnej w postaci:

$$f''(x) \approx Af(x+h) + Bf(x) + Cf(x-h) \quad (23)$$

Wykorzystując szereg Taylora możemy je zapisać jako:

$$\begin{aligned} Af(x+h) + Bf(x) + Cf(x-h) &= \\ &= Af(x) + Ahf'(x) + A\frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots \\ &+ Bf(x) \\ &+ Cf(x) - Chf'(x) + C\frac{h^2}{2!}f''(x) - \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Chcemy, żeby prawa strona tego równania była równa  $f''(x)$ . Musimy w tym celu pominąć wyrażenia szeregu Taylora po wielokropku (co będzie skutkowało wprowadzeniem błędu metody). Dzięki czemu możemy to równanie przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} Af(x+h) + Bf(x) + Cf(x-h) &= \\ &= f(x)(A+B+C) \\ &+ hf'(x)(A-C) \\ &+ \frac{h^2}{2}f''(x)(A+C) \end{aligned} \quad (25)$$

Co pokazuje, że dodatkowo potrzebujemy ustalić wartości  $A, B, C$  tak, żeby:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-C &= 0 \\ A+C &= \frac{2}{h^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy:

$$A = \frac{1}{h^2} \quad B = -\frac{2}{h^2} \quad C = \frac{1}{h^2} \quad (27)$$

W związku z tym pochodną drugiego rzędu funkcji  $f(x)$  możemy zapisać jako:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (28)$$

To przybliżenie numeryczne ma błąd drugiego rzędu (a więc "lepszy" niż metoda Eulera), gdyż w szeregu Taylora użyliśmy wyrażen maksymalnie rzędu drugiego. Pozwala nam ono rozwiązać numerycznie równania różniczkowe zawierające drugą pochodną.

W podobny sposób możemy znaleźć przybliżenie dowolnej pochodnej, z błędem dowolnego rzędu. Co więcej, nie musimy tego robić ręcznie, gdyż jest dostępna jest strona internetowa pozwalająca znaleźć przybliżenie metody różnic całkowitych.

Dlatego, chcąc ulepszyć dokładność stosowanej przez nas do tej pory metody Eulera moglibyśmy zastąpić ją poniższym przybliżeniem, które cechuje się ("lepszym") błędem wyższego rzędu:

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} \quad (29)$$

Jednak ta metoda wykorzystuje trzy punkty zamiast dwóch, co jest niepożądane, gdyż powoduje różne skutki uboczne<sup>3</sup>. Spróbujmy zatem poszukać metody o mniejszym błędzie, ale wykorzystującej tylko dwa punkty.

## 8 Metoda Heuna i Runge-Kutta

Wróćmy do przykładu z początku tego opracowania (równanie 11:  $y'(x) = -x/10$ ) i wprowadźmy drobną modyfikację do metody, którą je rozwiązaliśmy.

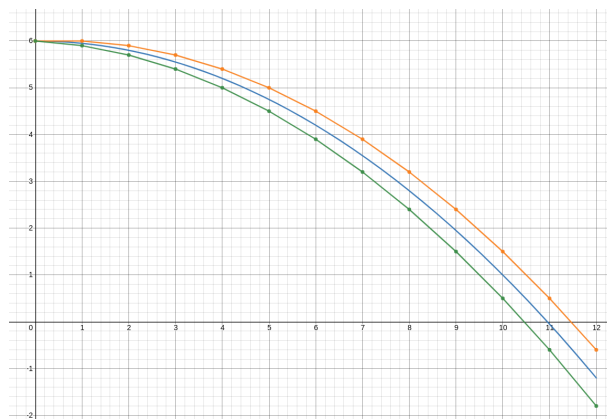
Rozwiązanie metodą Eulera miało postać:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{x_i}{10} \Delta x \quad (30)$$

Zamieńmy w powyższym równaniu  $x_i$  na  $x_{i+1}$  (którego wartość znamy):

$$y_{i+1} = y_i - \frac{x_{i+1}}{10} \Delta x \quad (31)$$

I zobaczymy czym te dwa rozwiązania się różnią:



*pomarańczowy - metoda Eulera, zielony - zmodyfikowana metoda  
niebieski - rozwiązanie analityczne*

<sup>3</sup>Głównie chodzi tutaj o nadmierne "rozmycie" rozwiązywanej funkcji. W miejscach, gdzie rozwiązanie gwałtownie zmienia wartość ta metoda traci na precyzji i wymaga zmniejszenia  $\Delta x$ . Dodatkowo, to przybliżenie podobnie jak metoda Eulera nie gwarantuje stabilności rozwiązania numerycznego

Widzimy, że rozwiązanie analityczne leży dokładnie pomiędzy dwoma rozwiązaniami numerycznymi. Można by zatem policzyć średnią z obu rozwiązań numerycznych, żeby uzyskać jedno znacznie dokładniejsze rozwiązanie. Niestety, w praktyce ten pomysł by nie zadziałał, gdyby po prawej stronie rozwiązywanego równania występowało  $y$ , gdyż nie znamy wartości  $y_{i+1}$ .<sup>4</sup>

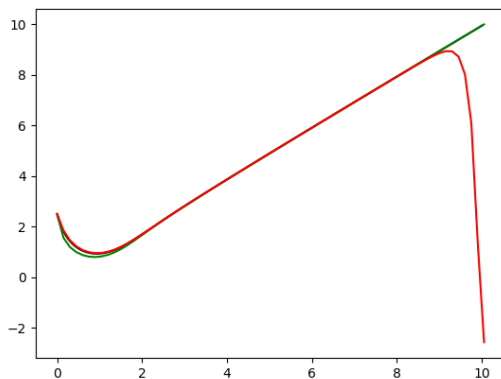
Znamy jednak wartość  $y_{i+1}$  przewidzianą metodą Eulera, którą możemy wykorzystać do zmniejszenia błędu rozwiązania numerycznego. Taki sposób rozwiązania równania różniczkowego to nic innego jak metoda Heuna, która dla problemu postaci:

$$y'(x) = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (32)$$

zdefiniowana jest następująco:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \Delta x, y_i + k_1 \Delta x) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} \Delta x (k_1 + k_2) \end{aligned} \qquad (33)$$

Stosując metodę Heuna dla równania  $y'(x) = x^2 - y^2$  i  $\Delta x = 0.15$  otrzymujemy wynik:



*zielony - metoda Eulera, czerwony - metoda Heuna  
czarny - rozwiązanie analityczne*

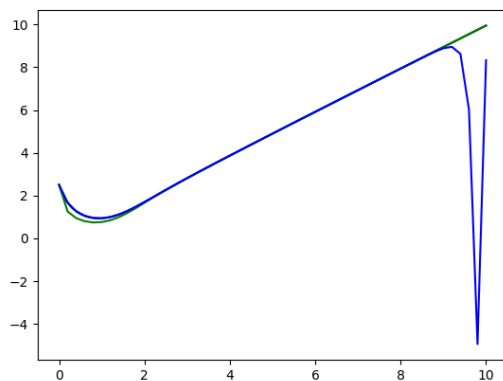
<sup>4</sup>W rzeczywistości by zadziałała. Przedstawiona modyfikacja metody Eulera to nic innego jak różnica skończona do tyłu (ang. backward finite difference). Metody "do tyłu" (ang. implicit methods) stosuje się powszechnie, gdyż przy rozwiązywaniu równań różniczkowych wielu zmiennych pozwalają one uzyskać większą dokładność i stabilność modelu. Jednak do ich obliczenia trzeba zastosować rozbudowane działania na macierzach co dalece wykracza poza materiał tego opracowania.

Widzimy, że metoda Heuna cechuje się mniejszym błędem niż metoda Eulera, wykorzystując tę samą ilość punktów. Jednak widzimy, że jest warunkowo stabilna dla mniejszych wartości  $\Delta x$  niż metoda Eulera.

Możemy spróbować poprawić stabilność (i dokładność) naszego modelu używając metodę Runge-Kutta, której szczególnym przypadkiem jest metoda Heuna. Metoda Runge-Kutta pozwala nam z wykorzystaniem dwóch punktów obliczyć przybliżenie numeryczne z dowolną dokładnością (kosztem wymaganej mocy obliczeniowej). Najczęściej spotykana jest metoda Runge-Kutta czwartego rzędu (RK4):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2} \Delta x\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2} \Delta x\right) \\ k_4 &= f(x_i + \Delta x, y_i + k_3 \Delta x) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \Delta x (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{34}$$

Dla  $\Delta x = 0.2$  metoda Runge-Kutta czwartego rzędu daje poniższy wynik:



*zielony - metoda Eulera, niebieski - metoda RK4  
czarny - rozwiązanie analityczne*

Stosując metodę Runge-Kutta dla naszego problemu widzimy, że metoda ta jest stabilna dla wyższych wartości  $\Delta x$  niż dla metody Heuna, natomiast wciąż niższych niż dla metody Eulera. Porównując wartości numeryczne dla wszystkich tych metod, widać, że metoda Runge-Kutta daje najbardziej precyzyjne przybliżenie, zgodnie z oczekiwaniami.

W wielu przypadkach metoda Runge-Kutta wykazuje większą stabilność niż metoda Eulera. Jednak jak pokazuje powyższy przykład nie jest to regułą.

Przewagą metody Runge-Kutta nad metodą różnic skończonych jest możliwość doboru jej dokładności, która pozwala na bieżąco śledzić błąd modelu numerycznego i odpowiednio zmniejszać lub zwiększać  $\Delta x$ , tak żeby model był jak najbardziej wydajny bez utraty dokładności.

## 9 Podsumowanie

W niniejszym opracowaniu pokazałem szereg dostępnych metod numerycznych pozwalających rozwiązywać równania różniczkowe i najważniejsze zagadnienia z nimi związane. Mimo tego, że ten dokument nieco się rozrósł to omawiane tematy są ledwie muśnięciem tematu. Analiza numeryczna to dziedzina niemal tak obszerna jak sam rachunek różniczkowy i równie fascynująca.

Metody numeryczne, choć pozornie proste, należą do grupy najpotężniejszych narzędzi matematycznych. Dzięki rozwojowi technologicznemu, w ostatnich dekadach stały się niezmiernie użyteczne. Pokazane tutaj metody (w nieco bardziej zaawansowanej formie) są powszechnie stosowane w zaawansowanych modelach numerycznych służących do przewidywania pogody, klimatu, zjawiska astrofizycznych, chemicznych czy sejsmologicznych.

Mam nadzieję, że udało mi się wprowadzić Ciebie drogi czytelniku w świat modeli numerycznych i zainspirować do dalszego poszukiwania wiedzy. Jeżeli dotarłeś do tego momentu, to gratuluję wytrwałości i życzę powodzenia w odkrywaniu dalszych tajników matematyki. W razie pytań można kontaktować się ze mną przez e-mail: [jak.lewand@gmail.com](mailto:jak.lewand@gmail.com).

Ten dokument publikuję na licencji Creative Commons (CC BY-NC-SA 4.0). Można go publikować i rozpowszechniać do woli, pamiętając jednak po podpisaniu autora.