Poisson 方程 Dirichlet 边值问题的五点差分法

阙嘉豪[1]

(1. 北京师范大学 数学科学学院, 北京　100875)

1　模型问题

考虑 $\Omega := (0,1)\times(0,1)$ 上的 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & \forall (x,y)\in\Omega, \\ u(0,y)=u_1(y), \quad u(1,y)=u_3(y), & \forall y\in[0,1], \\ u(x,0)=u_2(x), \quad u(x,1)=u_4(x), & \forall x\in[0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

2　差分逼近

2.1　差分格式

取空间步长 $\Delta x = \Delta y = h = \dfrac{1}{N}$, 则由网格线

$$x_i = i\Delta x, \quad y_j = j\Delta y, \quad i,j = 0,1,\cdots,N$$

定义的指标集为

$$J = \left\{(i,j) : (x_i,y_j)\in\overline{\Omega}\right\}.$$

记 Dirichlet 边界节点指标集为

$$J_D = \left\{(i,j) : (x_i,y_j)\in\partial\Omega\right\}.$$

将函数 u, f 和网格函数 U 在节点 (x_i,y_j) 上的取值分别记为 $u_{i,j}$, $f_{i,j}$ 和 $U_{i,j}$.

由 Poisson 方程的五点差分格式和边值问题 (1) 给出的 Dirichlet 边界条件得到线性方程组:

$$\begin{cases} -L_hU_{i,j} := \dfrac{4U_{i,j}-U_{i-1,j}-U_{i,j-1}-U_{i+1,j}-U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}, & 1\leqslant i,j\leqslant N-1, \\ u_{0,j}=u_1(jh), \quad u_{N,j}=u_3(jh), & 0\leqslant j\leqslant N, \\ u_{i,0}=u_2(ih), \quad u_{i,N}=u_4(ih), & 0\leqslant i\leqslant N. \end{cases}$$

整理写成矩阵形式 $L_2U = g$, 其中

$$L_2 = \begin{pmatrix} A & -I & & & \\ -I & A & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & A & -I \\ & & & -I & A \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}_{(N-1)\times(N-1)},$$

$$U=\begin{pmatrix}U_{1,1}\\U_{2,1}\\\vdots\\U_{N-1,1}\\U_{1,2}\\U_{2,2}\\\vdots\\U_{N-1,N-1}\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}g_1\\\vdots\\g_{N-1}\end{pmatrix},\quad g_i=\begin{pmatrix}h^2f_{1,i}+u_2(ih)\\h^2f_{2,i}\\\vdots\\h^2f_{N-2,i}\\h^2f_{N-1,i}+u_4(ih)\end{pmatrix},\quad i=2,\cdots,N-2,$$

$$g_1=\begin{pmatrix}h^2f_{1,1}+u_1(h)+u_2(h)\\h^2f_{2,1}+u_1(2h)\\\vdots\\h^2f_{N-2,1}+u_1((N-2)h)\\h^2f_{N-1,1}+u_1((N-1)h)+u_4(h)\end{pmatrix},$$

$$g_{N-1}=\begin{pmatrix}h^2f_{1,N-1}+u_3(h)+u_2((N-1)h)\\h^2f_{2,N-1}+u_3(2h)\\\vdots\\h^2f_{N-2,N-1}+u_3((N-2)h)\\h^2f_{N-1,N-1}+u_3((N-1)h)+u_4((N-1)h)\end{pmatrix}.$$

2.2 相容性

假设边值问题 (1) 的真解 u 充分光滑, 则由 u 在 (x_i,y_j) 的 Taylor 展式可得

$$\begin{aligned}T_{i,j}:&=L_hu_{i,j}-(\Delta u)_{i,j}=L_hu_{i,j}+f_{i,j}\\&=\frac{1}{12}h^2\left(\partial_x^4u+\partial_y^4u\right)_{i,j}+\frac{1}{360}h^4\left(\partial_x^6u+\partial_y^6u\right)_{i,j}+O\left(h^6\right),\quad\forall(i,j)\in J_\Omega.\end{aligned}$$

则对于截断误差 $T_h:=\left\{T_{i,j}\right\}_{(i,j)\in\Omega}$ 有

$$\lim_{h\to0}\|T_h\|_\infty=\lim_{h\to0}\max_{(i,j)\in J_\Omega}\left|T_{i,j}\right|=0.$$

由此知该差分格式具有相容性, 且 $\|T_h\|_\infty=O\left(h^2\right)$, 即差分格式具有二阶精度.

2.3 稳定性

记 $F:=\max\limits_{(i,j)\in J_\Omega}\left|f_{i,j}\right|$, 令 $\Phi(x,y):=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$, 取比较函数

$$\Psi_{i,j}^{\pm}:=\pm U_{i,j}+\frac{1}{4}F\Phi_{i,j},\quad\forall(i,j)\in J,\tag{2}$$

于是

$$L_h\Psi_{i,j}^{\pm}=\pm L_hU_{i,j}+\frac{1}{4}FL_h\Phi_{i,j}=\pm f_{i,j}+F\geqslant0.$$

由此, 最大值原理, Φ 非负且 U 满足边界条件 $U_{i,j}=u_D\left(x_i,y_j\right)$, $(i,j)\in J_D$ 可得

$$\pm U_{i,j}\leqslant \pm U_{i,j}+\frac{1}{4}F\Phi_{i,j}\leqslant \max_{(i,j)\in J_D}\left|\left(u_D\right)_{i,j}\right|+\frac{1}{8}F,\quad \forall (i,j)\in J_\Omega.$$

进而

$$\max_{(i,j)\in J}\left|U_{i,j}\right|\leqslant \max_{(i,j)\in J_D}\left|\left(u_D\right)_{i,j}\right|+\frac{1}{8}F,$$

即差分格式具有稳定性.

2.4 收敛性

在 (2) 式中分别将 $U_{i,j}$ 和 F 替换为误差 $e_{i,j}:=U_{i,j}-u_{i,j}$ 和 $\|T_h\|_\infty$, 则有

$$\|e\|_\infty\leqslant \max_{(i,j)\in J_D}\left|e_{i,j}\right|+\frac{1}{8}\|T_h\|_\infty\leqslant \frac{1}{96}\left(\max_{(x,y)\in J_{\overline{\Omega}}}\left|\partial_x^4 u\right|+\max_{(x,y)\in J_{\overline{\Omega}}}\left|\partial_y^4 u\right|\right),$$

进而 $\lim\limits_{h\to 0}\|e\|_\infty=0$ 且 $\|e\|_\infty=O\left(h^2\right)$, 即差分逼近解在 $\mathbb{L}^\infty$ 意义下是二阶收敛的.

2.5 误差分析

假设误差主项的阶数为 α, 有

$$U_{h,\boldsymbol{j}}=u_{\boldsymbol{j}}+C_{\boldsymbol{j}}h^\alpha+o\left(h^\alpha\right). \tag{3}$$

对于已知真解的情况, 只需计算 $\ln\|e\|_\infty$ 关于 $\ln h$ 的斜率即可. 对于未知真解的情况, 需在 3 式中取不同的 h, 然后做差再取对数. 如

$$U_{h,\boldsymbol{j}}-U_{h/2,\boldsymbol{j}}=\left(1-2^{-\alpha}\right)C_{\boldsymbol{j}}h^\alpha+o\left(h^\alpha\right),$$

两边取范数并取对数得

$$\ln\left\|U_h-U_{h/2}\right\|_\infty\approx \ln\left(\left(1-2^{-\alpha}\right)C\right)+\alpha\ln h.$$

于是计算 $\ln\left\|U_h-U_{h/2}\right\|_\infty$ 关于 $\ln h$ 的斜率可得收敛阶.

3 数值实验

分别求解下述边值问题对应的差分方程 $L_2U=g$, 得到数值解 $U_{i,j}$.

3.1 已知真解算例

取

$$\begin{cases} f(x,y) = \left(\pi^2 - 1\right) \mathrm{e}^x \sin(\pi y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u_1(y) = \sin(\pi y), \quad u_3(y) = \mathrm{e} \sin(\pi y), \\ u_2(x) = u_4(x) = 0, \end{cases}$$

此时边值问题 (1) 的解析解为 $u(x,y) = \mathrm{e}^x \sin(\pi y)$.

$h = 2^{-5}$ 时求得的差分逼近解如图 1 所示.

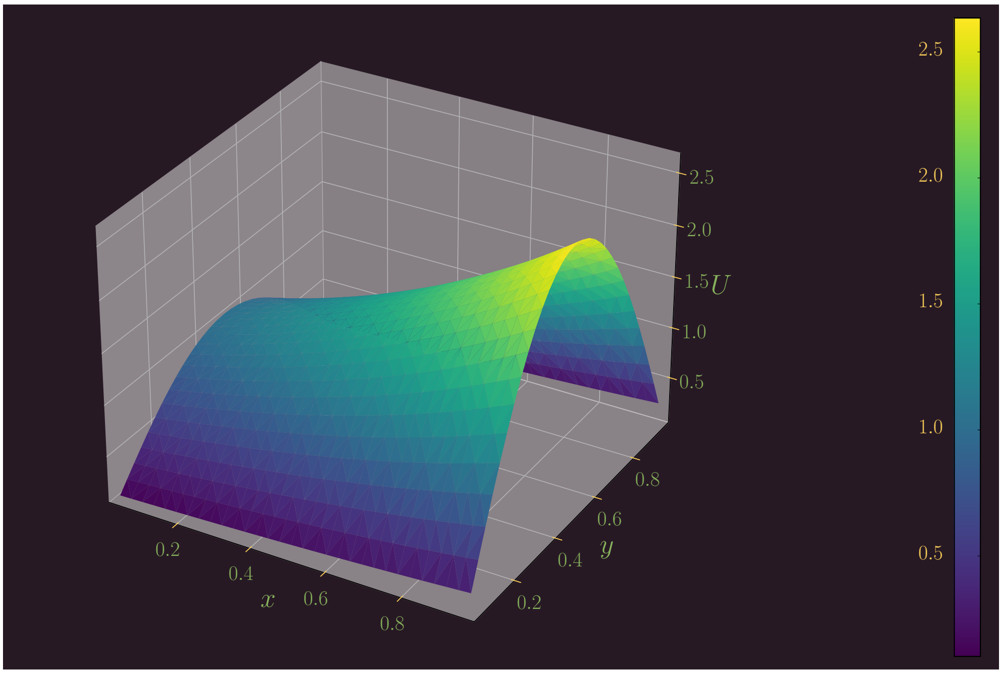

图 1: $h = 2^{-5}$ 时差分逼近解

不同步长时误差的 $\mathbb{L}^\infty$ 范数及收敛速度如表 1 所示. 可以看出, 随着 h 的减小, 误差的 $\mathbb{L}^\infty$ 范数逐渐减小. h 从 2^{-1} 到 2^{-9} 时, 收敛阶接近于 2, 但是再缩小网格时, 因 $\|e_h\|_\infty$ 接近于机器精度, 收敛阶又变小了.

表 1: 不同步长时误差的 $\mathbb{L}^\infty$ 范数及收敛速度

$-\log_2 h$	$\|e_h\|_\infty$	$\log_2\left(\|e_h\|_\infty / \|e_{h/2}\|_\infty\right)$
1	$1.94818276337851 \times 10^{-1}$	1.92405
2	$5.13373125805703 \times 10^{-2}$	1.96026
3	$1.31927593688654 \times 10^{-2}$	1.98207
4	$3.33943713696105 \times 10^{-3}$	1.99837
5	$8.35802510806616 \times 10^{-4}$	1.99841
6	$2.09181357501365 \times 10^{-4}$	1.99990
7	$5.22991071318923 \times 10^{-5}$	1.99997
8	$1.30750132527613 \times 10^{-5}$	1.99999
9	$3.26877185896635 \times 10^{-6}$	1.99997
10	$8.17209409920139 \times 10^{-7}$	1.99956
11	$2.04365120159977 \times 10^{-7}$	1.99291
12	$5.13429063708770 \times 10^{-8}$	1.89080
13	$1.38449633979576 \times 10^{-8}$	0.88309
14	$7.50680606564913 \times 10^{-9}$	

3.2 未知真解算例

取

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin(4\pi xy)}{4\pi xy}, & (x,y) \in \Omega, \\ u_1(y) = u_3(y) = u_2(x) = u_4(x) = 0. \end{cases}$$

$h = 2^{-5}$ 时求得的差分逼近解如图 2 所示.

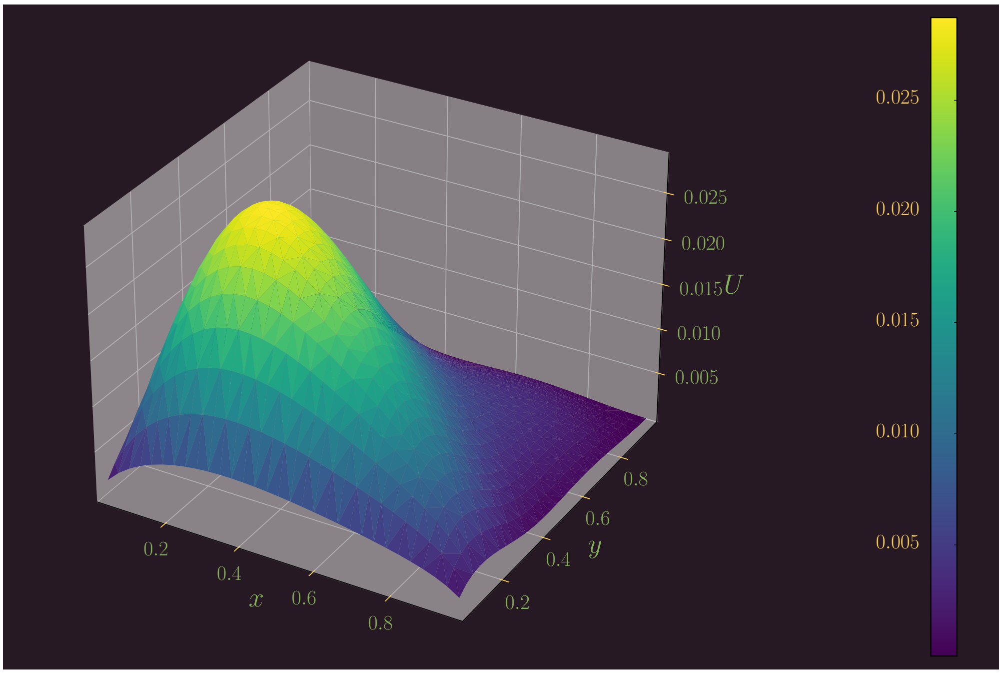

图 2: $h = 2^{-5}$ 时差分逼近解

为对其收敛速度进行分析, 计算 $-\log_2 \left\|U_h - U_{h/2}\right\|_\infty$, 如表 2 所示. 以 $-\log_2 h$ 为横坐标, 拟合得到

$$\log_2 \left\|U_h - U_{h/2}\right\|_\infty \approx 2.009181444799865 \log_2 h - 4.492800925336754,$$

拟合曲线如图 3 所示, 故差分逼近解在 $\mathbb{L}^\infty$ 范数意义下是二阶收敛的.

表 2: 不同步长时 $-\log_2 \left\|U_h - U_{h/2}\right\|_\infty$ 的值

$-\log_2 h$	$-\log_2 \left\|U_h - U_{h/2}\right\|_\infty$
1	6.278314524587407
2	8.546061248379736
3	10.58435679097419
4	12.59155779257177
5	14.59260838416788
6	16.59059047122205
7	18.59039819231493
8	20.59026731037038
9	22.59027315438449
10	24.59025888822796
11	26.59000117687745
12	28.58588429968780
13	30.52135127239939

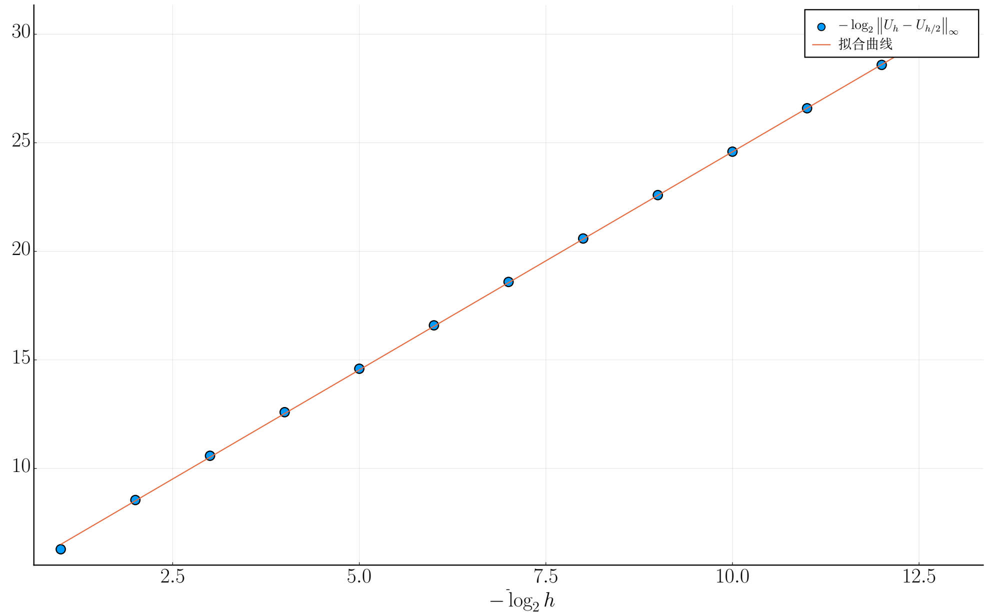

图 3: $-\log_2 \left\|U_h - U_{h/2}\right\|_\infty$ - $-\log_2 h$ 曲线

附录

数值实验源码