双曲型偏微分方程的差分方法

阙嘉豪[1]

(1. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875)

1 一阶双曲方程模型问题

考虑 $\Omega := (0,1)$ 上具有周期边界条件的一阶线性双曲方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & 0 < x < x_{\max},\, t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), & 0 \leqslant x \leqslant x_{\max}. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_{\max}$ 为给定的区间最大值, u^0 为给定的初值函数. 还需给定边界条件, 后面的数值算例中会分别给出. 下面分别使用迎风格式, Lax-Wendroff 格式和 Beam-Warming 格式来求解问题 (1).

2 差分逼近

2.1 迎风格式

对初值问题 (1), 用关于时间的向前差分算子 $\dfrac{\Delta_{+t}}{\Delta t}$ 逼近 $\dfrac{\partial}{\partial t}$, 用 $\dfrac{\Delta_{-x}}{\Delta x}$ 逼近 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 后得到显式差分格式:

$$\begin{cases} U_j^{m+1} = (1-\nu)U_j^m + \nu U_{j-1}^m, & 0 \leqslant j \leqslant N, \quad 0 \leqslant m \leqslant M, \\ U_j^0 = u^0(jh), & 0 \leqslant j \leqslant N, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\nu = \dfrac{\tau}{h}$, $h = \dfrac{1}{N}$, $M = \left[\dfrac{t_{\max}}{\tau}\right]$.

2.1.1 截断误差

设问题 (1) 的解 u 充分光滑, 利用 Taylor 展开式可得:

$$\begin{aligned} T_j^m &= \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{h} - \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right]_j^m \\ &= \frac{1}{2}\left[\tau u_{tt} - h u_{xx}\right]_j^m + \frac{1}{6}\left[\tau u_{ttt} + h u_{xxx}\right]_j^m + \cdots \\ &= -\left[\frac{1}{2}h(1-\nu)u_{xx} + \frac{1}{6}h^2\left(1-\nu^2\right)u_{xxx} + \cdots\right] \\ &= O(h), \end{aligned}$$

可见迎风格式的局部阶段误差只有一阶精度. 更确切地说, 只要问题 (1) 的解 u 的二阶导数有界, 就有

$$T_h = \max\left\{\left|T_j^m\right|\right\} = O(\tau + h).$$

2.1.2 稳定性, 收敛性

差分逼近解的误差 $e_j^m = U_j^m - u_j^m$ 满足方程

$$e_j^m = \left(1 - |\nu|\right) e_j^m + |\nu| e_{j-1}^m - \tau T_j^m.$$

迎风格式满足 CFL 条件时, 即 $|\nu| \leqslant 1$ 时, 格式满足最大值原理. 于是有估计:

$$\max_j \left| e_j^{m+1} \right| \leqslant \max_j \left| e_j^m \right| + \tau \max_j \left| T_j^m \right| \leqslant \max_j \left| e_j^0 \right| + t_{\max} \max_{j,m} \left| T_j^m \right|, \quad \forall (m+1)\tau \leqslant t_{\max}.$$

即 $|\nu| \leqslant 1$ 时格式 $\mathbb{L}^\infty$ 稳定.

又将 Fourier 波形 $U_j^m := \lambda_k^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}kjh}$ 代入格式, 有

$$|\lambda_k|^2 = \left(\left(1 - |\nu|\right) + |\nu| \cos kh\right)^2 + \left(|\nu| \sin kh\right)^2 = 1 - 4|\nu| \left(1 - |\nu|\right) \sin^2 \frac{1}{2} kh \leqslant 1,$$

即 $|\nu| \leqslant 1$ 时, 任取 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $|\lambda_k| \leqslant 1$, 格式 $\mathbb{L}^2$ 稳定.

从而, 当问题 (1) 的解 u 的二阶导数有界时, 沿着任意满足 CFL 条件的加密路径迎风格式为收敛的且具有一阶逼近精度.

2.2 Lax-Wendroff 格式

由 Lax-Wendroff 格式及初值问题 (1) 得到递推公式:

$$\begin{cases} U_j^{m+1} = -\dfrac{1}{2}\nu(1-\nu) U_{j+1}^m + \left(1 - \nu^2\right) U_j^m & \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}\nu(1+\nu) U_{j-1}^m, & 0 \leqslant j \leqslant N, \quad 0 \leqslant m \leqslant M, \\ \quad U_j^0 = u^0(jh), & 0 \leqslant j \leqslant N. \end{cases} \tag{3}$$

2.2.1 截断误差

由迎风格式已知

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{h} = -\frac{1}{2} h (1 - \nu) \left[u_{xx}\right]_j^m + O\left(h^2\right). \tag{4}$$

将 (4) 式中 $\left[u_{xx}\right]_j^m$ 用二阶中心差商 $\dfrac{\delta_x^2 u_j^m}{h^2}$ 替代:

$$\left[u_{xx}\right]_j^m = \frac{\delta_x^2 u_j^m}{h^2} + O\left(h^2\right),$$

则可得截断误差为二阶的 Lax-Wendroff 格式.

2.2.2 稳定性, 收敛性

易知, Lax-Wendroff 格式的 CFL 条件为 $|\nu| \leqslant 1$. 由于格式右端的系数不可能同号, Lax-Wendroff 格式不可能满足最大值原理, 故没有 $\mathbb{L}^\infty$ 稳定性.

又将 Fourier 波形 $U_j^m := \lambda_k^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}kjh}$ 代入格式, 有

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4\nu^2\left(1-\nu^2\right)\sin^4\frac{kh}{2}.$$

又 $|\nu| \leqslant 1$ 时, 任取 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $|\lambda_k|^2 \leqslant 1$. 故 $|\nu| \leqslant 1$ 时 Lax-Wendroff 格式 $\mathbb{L}^2$ 稳定.

2.3 Beam-Warming 格式

由 Lax-Wendroff 格式及初值问题 (1) 得到递推公式:

$$\begin{cases} U_j^{m+1} = \dfrac{1}{2}(1-\nu)(2-\nu)U_j^m + \nu(2-\nu)U_{j-1}^m \\ \qquad\quad - \dfrac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j-2}^m, & 0 \leqslant j \leqslant N, \quad 0 \leqslant m \leqslant M, \\ U_j^0 = u^0(jh), & 0 \leqslant j \leqslant N. \end{cases} \tag{5}$$

2.3.1 截断误差

将 (4) 式中 $[u_{xx}]_j^m$ 用二阶中心差商 $\dfrac{\delta_x^2 u_{j-1}^m}{h^2}$ 替代:

$$[u_{xx}]_j^m = \frac{\delta_x^2 u_{j-1}^m}{h^2} + O\left(h^2\right),$$

则可得截断误差为二阶的 Beam-Warming 格式.

2.3.2 稳定性, 收敛性

易知, Beam-Warming 格式的 CFL 条件为 $|\nu| \leqslant 1$. 由于格式右端的系数不可能同号, Beam-Warming 格式不可能满足最大值原理, 故没有 $\mathbb{L}^\infty$ 稳定性.

又将 Fourier 波形 $U_j^m := \lambda_k^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}kjh}$ 代入格式, 有

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4\nu(2-\nu)\left(1-\nu^2\right)\sin^4\frac{kh}{2}.$$

又 $0 \leqslant \nu \leqslant 2$ 时, 任取 $k \in \mathbb{Z}$ 都有 $|\lambda_k|^2 \leqslant 1$. 故 $|\nu| \leqslant 2$ 时 Beam-Warming 格式 $\mathbb{L}^2$ 稳定.

3 数值实验

下面用三种数值格式分别求解正弦波问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & 0 < x < x_{\max}, \quad t > 0, \\ u^0(x) = \sin(\pi x), & x_{\max} = 1, \\ u(x,t) = u\left(x_{\max}, t\right), & \qquad\qquad t > 0. \end{cases} \tag{6}$$

和方波问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \quad 0 < x < x_{\max}, t > 0, \\ u^0(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x \leqslant 3, \end{cases} \\ u(0,t) = 3, \quad u(3,t) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

解析解分别为 $u(x,t) = \sin\big(\pi(x-t)\big)$ 和

$$u(x,t) = \begin{cases} 3, & t \leqslant x \leqslant t+1, \\ 1, & t+1 < x \leqslant 3, \end{cases} \qquad t < 2.$$

3.1 迎风格式

取 $\nu = 0.5 \leqslant 1$, 满足 CFL 条件. 对正弦波问题 (6) 求解得到误差及收敛阶如表 1 所示.

表 1: 迎风格式不同步长时的 $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{L}^\infty$ 误差及收敛阶

收敛阶	$\mathbb{L}^2$ 误差	h	$\mathbb{L}^\infty$ 误差	收敛阶
	1.68359×10^{-1}	2^{-4}	2.35319×10^{-1}	
0.820918	9.53050×10^{-2}	2^{-5}	1.34378×10^{-1}	0.808319
0.904664	5.09078×10^{-2}	2^{-6}	7.19393×10^{-2}	0.901445
0.950960	2.63340×10^{-2}	2^{-7}	3.72347×10^{-2}	0.950134
0.975148	1.33958×10^{-2}	2^{-8}	1.89436×10^{-2}	0.974938
0.987492	6.75621×10^{-3}	2^{-9}	9.55461×10^{-3}	0.987439
0.993726	3.39283×10^{-3}	2^{-10}	4.79817×10^{-3}	0.993713
0.996858	1.70011×10^{-3}	2^{-11}	2.40432×10^{-3}	0.996855
0.998428	8.50984×10^{-4}	2^{-12}	1.20347×10^{-3}	0.998427

由数值结果可以看出解序列逐步收敛到模型问题的解, 收敛阶趋于 1, 与理论结果相符. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-11}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 1 所示. 可以看出 $h = 2^{-7}$ 时出现了耗散.

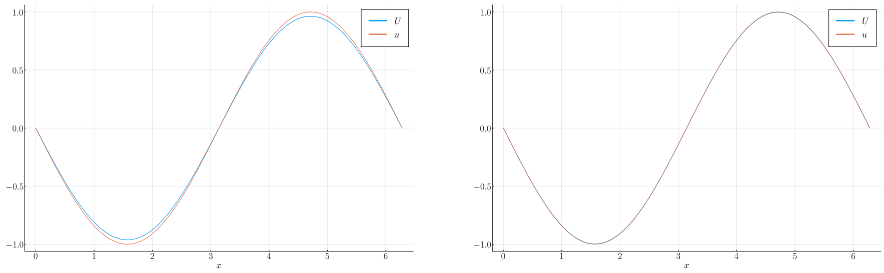

图 1: 迎风格式差分逼近解 U 与真解 u

取 $\nu = 2 \geqslant 1$, 不满足 CFL 条件. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-11}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 2 所示. 可以看到出现了震荡和错误解.

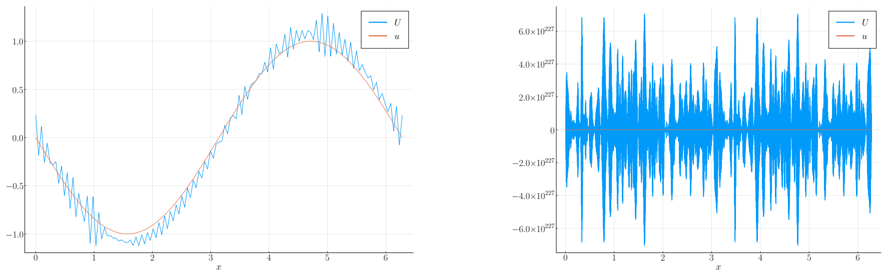

图 2: 迎风格式差分逼近解 U 与真解 u

对方波问题, 取 $\nu = 0.5$. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-11}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 3 所示, 可以看出差分逼近解在间断点附近被磨光.

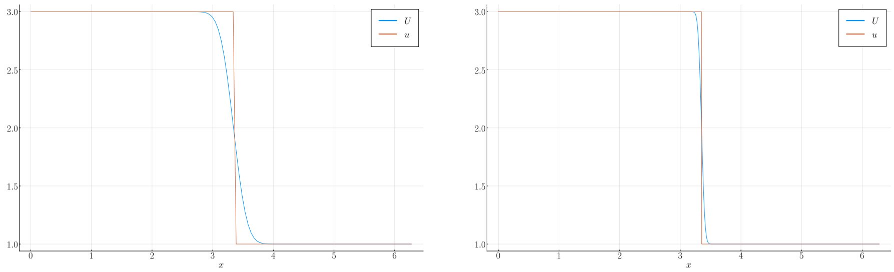

图 3: 迎风格式差分逼近解 U 与真解 u

取 $\nu = 2$, 结果如图 4 所示, 出现了错误解.

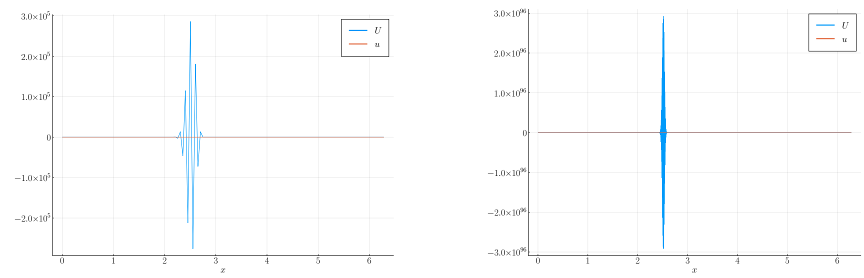

图 4: 迎风格式差分逼近解 U 与真解 u

3.2 Lax-Wendroff 格式

取 $\nu = 0.5 \leqslant 1$, 满足 CFL 条件. 对正弦波问题 (6) 求解得到误差及收敛阶如表 2 所示.

表 2: Lax-Wendroff 格式不同步长时的 $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{L}^\infty$ 误差及收敛阶

收敛阶	$\mathbb{L}^2$ 误差	h	$\mathbb{L}^\infty$ 误差	收敛阶
	7.65220×10^{-2}	2^{-4}	1.01182×10^{-1}	
1.97878	1.94140×10^{-2}	2^{-5}	2.65973×10^{-2}	1.92760
1.99863	4.85810×10^{-3}	2^{-6}	6.76359×10^{-3}	1.97542
2.00126	1.21347×10^{-3}	2^{-7}	1.70275×10^{-3}	1.98992
2.00107	3.03142×10^{-4}	2^{-8}	4.27037×10^{-4}	1.99543
2.00064	7.57519×10^{-5}	2^{-9}	1.06920×10^{-4}	1.99782
2.00035	1.89334×10^{-5}	2^{-10}	2.67498×10^{-5}	1.99894
2.00018	4.73277×10^{-6}	2^{-11}	6.68988×10^{-6}	1.99948
2.00009	1.18312×10^{-6}	2^{-12}	1.67277×10^{-6}	1.99974

由数值结果可以看出解序列逐步收敛到模型问题的解, 收敛阶趋于 1, 与理论结果相符. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-10}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 5 所示.

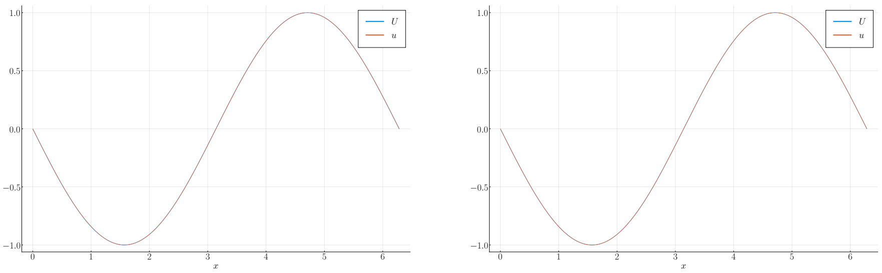

图 5: Lax-Wendroff 格式差分逼近解 U 与真解 u

取 $\nu = 2 \geqslant 1$, 不满足 CFL 条件. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-10}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 6 所示. 可以看到出现了错误解.

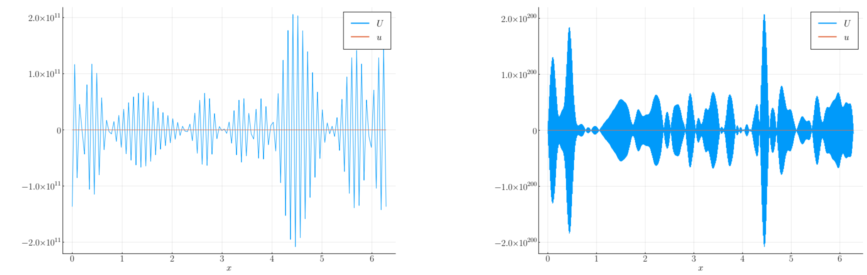

图 6: Lax-Wendroff 差分逼近解 U 与真解 u

对方波问题, 取 $\nu = 0.5$. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-11}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 7 所示. 可以看出差分逼近解在间断点左侧出现震荡.

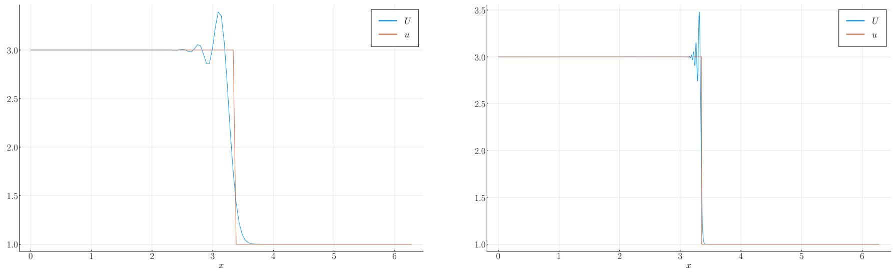

图 7: Lax-Wendroff 格式差分逼近解 U 与真解 u

取 $\nu = 2$, 结果如图 8 所示, 出现了错误解.

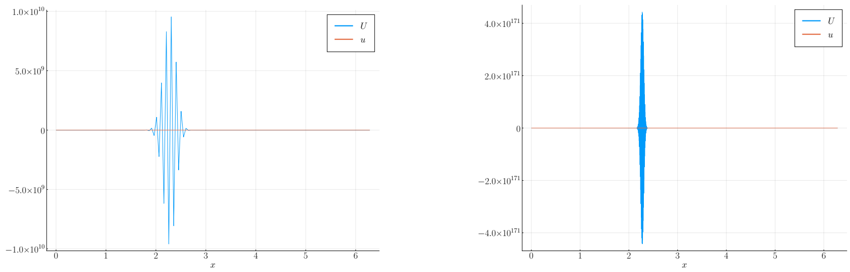

图 8: Lax-Wendroff 格式差分逼近解 U 与真解 u

3.3 Beam-Warming 格式

取 $\nu = 0.5 \leqslant 1$, 满足 CFL 条件. 对正弦波问题 (6) 求解得到误差及收敛阶如表 3 所示.

表 3: Beam-Warming 格式不同步长时的 $\mathbb{L}^2$, $\mathbb{L}^\infty$ 误差及收敛阶

收敛阶	$\mathbb{L}^2$ 误差	h	$\mathbb{L}^\infty$ 误差	收敛阶
	4.42759×10^{-3}	2^{-4}	6.26065×10^{-3}	
1.78045	1.28884×10^{-3}	2^{-5}	1.78257×10^{-3}	1.81235
1.66205	4.07259×10^{-4}	2^{-6}	5.67289×10^{-4}	1.65180
1.83690	1.14001×10^{-4}	2^{-7}	1.59987×10^{-4}	1.82613
1.92219	3.00797×10^{-5}	2^{-8}	4.23743×10^{-5}	1.91669
1.96211	7.72001×10^{-6}	2^{-9}	1.08965×10^{-5}	1.95932
1.98132	1.95516×10^{-6}	2^{-10}	2.76232×10^{-6}	1.97991
1.99072	4.91943×10^{-7}	2^{-11}	6.95373×10^{-7}	1.99002
1.99538	1.23380×10^{-7}	2^{-12}	1.74444×10^{-7}	1.99503

由数值结果可以看出解序列逐步收敛到模型问题的解, 收敛阶趋于 1, 与理论结果相符. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-11}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 9 所示.

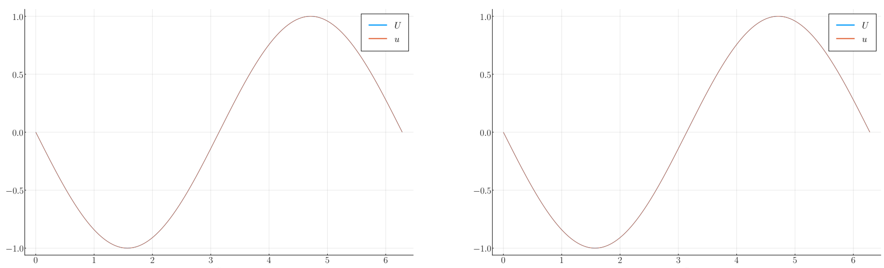

图 9: Beam-Warming 格式差分逼近解 U 与真解 u

取 $\nu = 4 \geqslant 2$, 不满足 CFL 条件. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-11}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 10 所示. 可以看到出现了错误解.

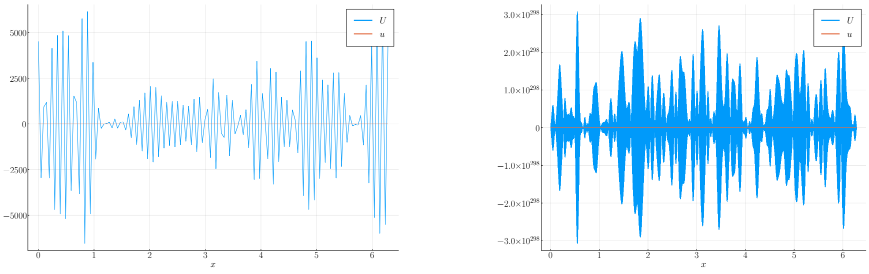

图 10: Beam-Warming 差分逼近解 U 与真解 u

对方波问题, 取 $\nu = 0.5$. $h = 2^{-7}$ 和 $h = 2^{-11}$ 时差分逼近解 U 与真解 u 在 $t = t_{\max}$ 时刻图像如图 11 所示. 可以看出差分逼近解在间断点右侧出现震荡.

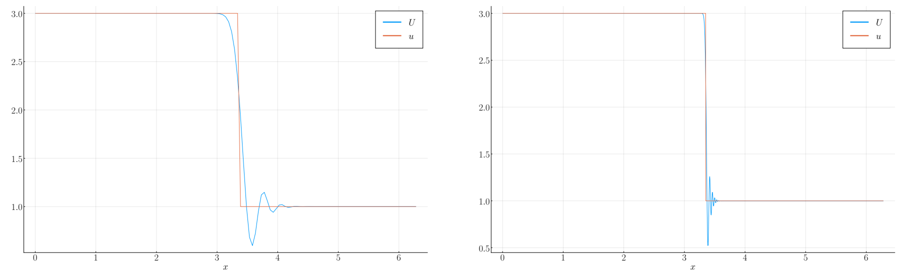

图 11: Beam-Warming 差分逼近解 U 与真解 u

取 $\nu = 4$, 结果如图 12 所示, 出现了错误解.

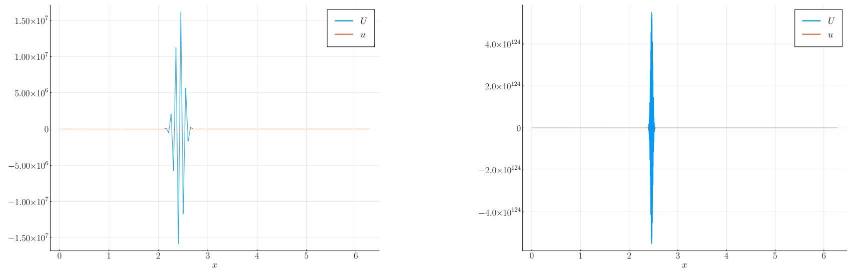

图 12: Beam-Warming 差分逼近解 U 与真解 u

4 Burgers 方程的 Riemann 问题

4.1 模型问题

$$
\begin{aligned}
u_t + \big(f(u)\big)_x &= 0, & x \in I, t > 0, \\
f(u) &= \frac{1}{2}u^2, & \\
u(x,0) &= \begin{cases} u_l, & x < x_0, \\ u_r, & x > x_0, \end{cases} & x \in I,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间. 守恒律方程加上单个间断的分片常值初值称为 Riemann 问题. 因非线性问题的特征线会相交, 故在积分形式下求弱解.

$u_l > u_r$ 时, 有唯一激波弱解

$$u(x,t)=\begin{cases} u_l, & x-x_0<st, \\ u_r, & x-x_0>st, \end{cases}$$

其中, 激波速度 $s=\dfrac{u_l+u_r}{2}$.

$u_l < u_r$ 时, 有稀疏波弱解

$$u(x,t)=\begin{cases} u_l, & x-x_0<st, \\ \dfrac{x-x_0}{t}, & u_l t \leqslant x u_r t, \\ u_r, & x-x_0>st. \end{cases}$$

上述两种弱解均为该情况下的粘性消失广义解.

4.2 有限体积格式

在 $[x_l,x_r]\times[t_a,t_b]$ 上对方程 (8) 积分, 可得积分形式的守恒律方程:

$$\int_{x_l}^{x_r} u\left(x,t_b\right)\mathrm{d}x=\int_{x_l}^{x_r} u\left(x,t_a\right)\mathrm{d}x-\left(\int_{t_a}^{t_b} f\left(u\left(x_r,t\right)\right)\mathrm{d}t-\int_{t_a}^{t_b} f\left(u\left(x_l,t\right)\right)\mathrm{d}t\right).$$

在控制体 $I_j:=\left[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}\right]$ 中, 取 $t_a=t_m$, $t_b=t_{m+1}$, 空间单元积分平均值

$$U_j^m=\frac{1}{\Delta x}\int_{I_j} u\left(x,t^m\right)\mathrm{d}x,$$

$x_{j+\frac{1}{2}}$ 上的数值通量为

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_m}^{t^{m+1}} f\left(u\left(x_{j+\frac{1}{2}},t\right)\right)\mathrm{d}t.$$

于是得到守恒差分格式

$$U_j^{m+1}=U_j^m-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}-F_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}\right).$$

其中, $F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} := F\left(U_{j+1}^m, U_j^m\right)$ 在数值方法中可以有不同的求解, 可以通过求解如下的界面两侧的 Riemann 问题确定.

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ u_r, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

其中 $x = 0$ 代表 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 界面, $u_l = U_j$, $u_r = U_{j+1}$.

4.3 非守恒形式

对于问题 (8), 从非守恒形式 $u_t + uu_x = 0$ 出发构造迎风格式

$$U_j^{m+1} \begin{cases} U_j^m - \dfrac{\tau}{h} U_j^m \left(U_j^m - U_{j-1}^m\right), & U_j^m \geqslant 0, \\ U_j^m - \dfrac{\tau}{h} U_j^m \left(U_{j+1}^m - U_j^m\right), & U_j^m < 0. \end{cases} \tag{9}$$

取初值为

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

此时 $1 =: u_l > u_r := 0$. $\tau \to 0$, $h \to 0$ 时, 数值解

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

与 Rankine-Hugoniot 间断跳跃条件下的激波解

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < \dfrac{t}{2}, \\ 0, & x \geqslant \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

矛盾.

4.4 数值实验

取 $I = [-4, 4]$, $x_0 = 0$, $t_{\max} = 2^{-5}$, $\Delta t = 2^{-6}$, 取不同的 u_l, u_r 进行数值实验.

4.4.1 激波

取 $u_l = 2$, $u_r = 1$, 此时激波速度 $s = 1.5$, 结果如图 13 所示, 可以看到是向前传播的.

取 $u_l = -1$, $u_r = -2$, 此时激波速度 $s = -2.5$, 结果如图 14 所示, 可以看到是向后传播的.

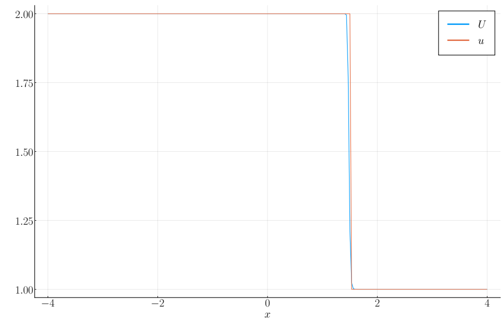

图 13: $u_l = 2$, $u_r = 1$

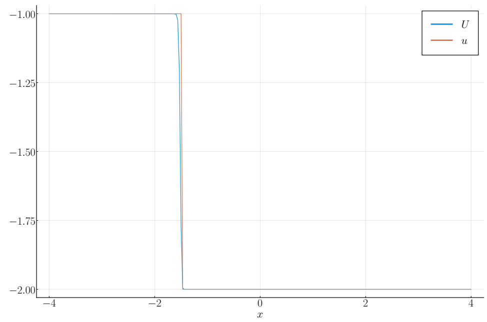

图 14: $u_l = -1$, $u_r = -2$

4.4.2 稀疏波

取 $u_l = 1$, $u_r = 2$, 结果如图 15 所示.

取 $u_l = -2$, $u_r = -1$, 结果如图 16 所示.

取 $u_l = -1$, $u_r = 2$, 结果如图 17 所示, 可以看到一个明显的转折.

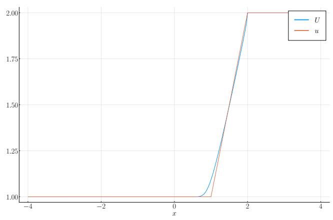

图 15: $u_l = 1$, $u_r = 2$

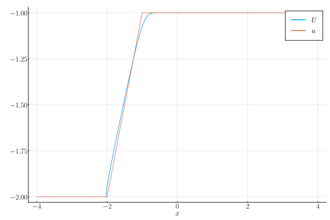

图 16: $u_l = -2$, $u_r = -1$

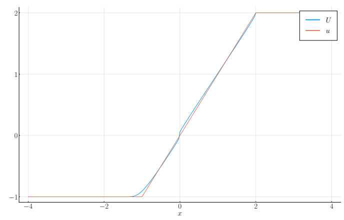

图 17: $u_l = -1$, $u_r = 2$

4.4.3 例 3.4 迎风格式与有限体积格式对比

利用迎风格式进行数值实验, 显然满足 CFL 条件, 区间及步长取法同上, 初值为

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, x < 0, \\ 0, x \geqslant 0. \end{cases}$$

结果如图 18 所示, 迎风格式得到了一个错误的解.

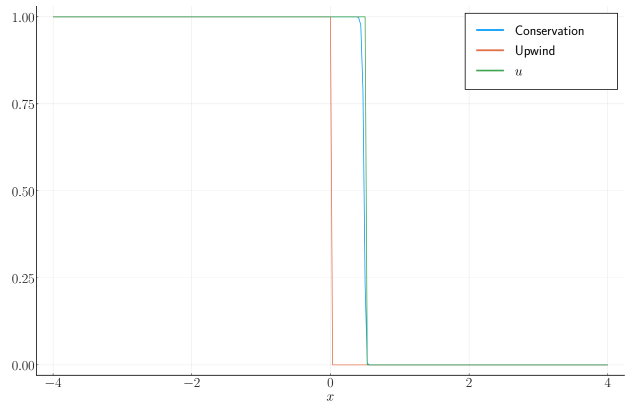

图 18: $u_l = 2$, $u_r = 1$