

Poisson 方程 Dirichlet 边值问题的五点差分法

阙嘉豪¹

(1. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875)

1 模型问题

考虑 $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$ 上的 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & \forall (x, y) \in \Omega, \\ u(0, y) = u_1(y), \quad u(1, y) = u_3(y), & \forall y \in [0, 1], \\ u(x, 0) = u_2(x), \quad u(x, 1) = u_4(x), & \forall x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

2 差分逼近

2.1 差分格式

取空间步长 $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{N}$, 则由网格线

$$x_i = i\Delta x, \quad y_j = j\Delta y, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

定义的指标集为

$$J = \{(i, j) : (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}\}.$$

记 Dirichlet 边界节点指标集为

$$J_D = \{(i, j) : (x_i, y_j) \in \partial\Omega\}.$$

将函数 u, f 和网格函数 U 在节点 (x_i, y_j) 上的取值分别记为 $u_{i,j}, f_{i,j}$ 和 $U_{i,j}$.

由 Poisson 方程的五点差分格式和边值问题 (1) 给出的 Dirichlet 边界条件得到线性方程组:

$$\begin{cases} -L_h U_{i,j} := \frac{4U_{i,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j-1} - U_{i+1,j} - U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j}, & 1 \leq i, j \leq N-1, \\ u_{0,j} = u_1(jh), \quad u_{N,j} = u_3(jh), & 0 \leq j \leq N, \\ u_{i,0} = u_2(ih), \quad u_{i,N} = u_4(ih), & 0 \leq i \leq N. \end{cases}$$

整理写成矩阵形式 $L_2 U = g$, 其中

$$L_2 = \begin{pmatrix} A & -I & & & \\ -I & A & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & A & -I \\ & & & -I & A \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}_{(N-1) \times (N-1)},$$

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ \vdots \\ U_{N-1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ \vdots \\ U_{N-1,N-1} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{pmatrix}, \quad g_i = \begin{pmatrix} h^2 f_{1,i} + u_2(ih) \\ h^2 f_{2,i} \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2,i} \\ h^2 f_{N-1,i} + u_4(ih) \end{pmatrix}, \quad i = 2, \dots, N-2,$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} h^2 f_{1,1} + u_1(h) + u_2(h) \\ h^2 f_{2,1} + u_1(2h) \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2,1} + u_1((N-2)h) \\ h^2 f_{N-1,1} + u_1((N-1)h) + u_4(h) \end{pmatrix},$$

$$g_{N-1} = \begin{pmatrix} h^2 f_{1,N-1} + u_3(h) + u_2((N-1)h) \\ h^2 f_{2,N-1} + u_3(2h) \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2,N-1} + u_3((N-2)h) \\ h^2 f_{N-1,N-1} + u_3((N-1)h) + u_4((N-1)h) \end{pmatrix}.$$

2.2 相容性

假设边值问题 (1) 的真解 u 充分光滑, 则由 u 在 (x_i, y_j) 的 Taylor 展式可得

$$\begin{aligned} T_{i,j} &:= L_h u_{i,j} - (\Delta u)_{i,j} = L_h u_{i,j} + f_{i,j} \\ &= \frac{1}{12} h^2 \left(\partial_x^4 u + \partial_y^4 u \right)_{i,j} + \frac{1}{360} h^4 \left(\partial_x^6 u + \partial_y^6 u \right)_{i,j} + O(h^6), \quad \forall (i,j) \in J_\Omega. \end{aligned}$$

则对于截断误差 $T_h := \{T_{i,j}\}_{(i,j) \in \Omega}$ 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h\|_\infty = \lim_{h \rightarrow 0} \max_{(i,j) \in J_\Omega} |T_{i,j}| = 0.$$

由此知该差分格式具有相容性, 且 $\|T_h\|_\infty = O(h^2)$, 即差分格式具有二阶精度.

2.3 稳定性

记 $F := \max_{(i,j) \in J_\Omega} |f_{i,j}|$, 令 $\Phi(x, y) := \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$, 取比较函数

$$\Psi_{i,j}^\pm := \pm U_{i,j} + \frac{1}{4} F \Phi_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in J, \quad (2)$$

于是

$$L_h \Phi_{i,j}^\pm = \pm L_h U_{i,j} + \frac{1}{4} F L_h \Phi_{i,j} = \pm f_{i,j} + F \geq 0.$$

由此, 最大值原理, Φ 非负且 U 满足边界条件 $U_{i,j} = u_D(x_i, y_j)$, $(i, j) \in J_D$ 可得

$$\pm U_{i,j} \leq \pm U_{i,j} + \frac{1}{4} F \Phi_{i,j} \leq \max_{(i,j) \in J_D} |(u_D)_{i,j}| + \frac{1}{8} F, \quad \forall (i, j) \in J_\Omega.$$

进而

$$\max_{(i,j) \in J} |U_{i,j}| \leq \max_{(i,j) \in J_D} |(u_D)_{i,j}| + \frac{1}{8} F,$$

即差分格式具有稳定性.

2.4 收敛性

在 (2) 式中分别将 $U_{i,j}$ 和 F 替换为误差 $e_{i,j} := U_{i,j} - u_{i,j}$ 和 $\|T_h\|_\infty$, 则有

$$\|e\|_\infty \leq \max_{(i,j) \in J_D} |e_{i,j}| + \frac{1}{8} \|T_h\|_\infty \leq \frac{1}{96} \left(\max_{(x,y) \in J_\Omega} |\partial_x^4 u| + \max_{(x,y) \in J_\Omega} |\partial_y^4 u| \right),$$

进而 $\lim_{h \rightarrow 0} \|e\|_\infty = 0$ 且 $\|e\|_\infty = O(h^2)$, 即差分逼近解在 \mathbb{L}^∞ 意义下是二阶收敛的.

2.5 误差分析

假设误差主项的阶数为 α , 有

$$U_{h,j} = u_j + C_j h^\alpha + o(h^\alpha). \quad (3)$$

对于已知真解的情况, 只需计算 $\ln \|e\|_\infty$ 关于 $\ln h$ 的斜率即可. 对于未知真解的情况, 需在 3 式中取不同的 h , 然后做差再取对数. 如

$$U_{h,j} - U_{h/2,j} = (1 - 2^{-\alpha}) C_j h^\alpha + o(h^\alpha),$$

两边取范数并取对数得

$$\ln \|U_h - U_{h/2}\|_\infty \approx \ln \left((1 - 2^{-\alpha}) C \right) + \alpha \ln h.$$

于是计算 $\ln \|U_h - U_{h/2}\|_\infty$ 关于 $\ln h$ 的斜率可得收敛阶.

3 数值实验

分别求解下述边值问题对应的差分方程 $L_2 U = g$, 得到数值解 $U_{i,j}$.

3.1 已知真解算例

取

$$\begin{cases} f(x, y) = (\pi^2 - 1)e^x \sin(\pi y), & (x, y) \in \Omega, \\ u_1(y) = \sin(\pi y), & u_3(y) = e \sin(\pi y), \\ u_2(x) = u_4(x) = 0, \end{cases}$$

此时边值问题 (1) 的解析解为 $u(x, y) = e^x \sin(\pi y)$.

$h = 2^{-5}$ 时求得的差分逼近解如图 1 所示.

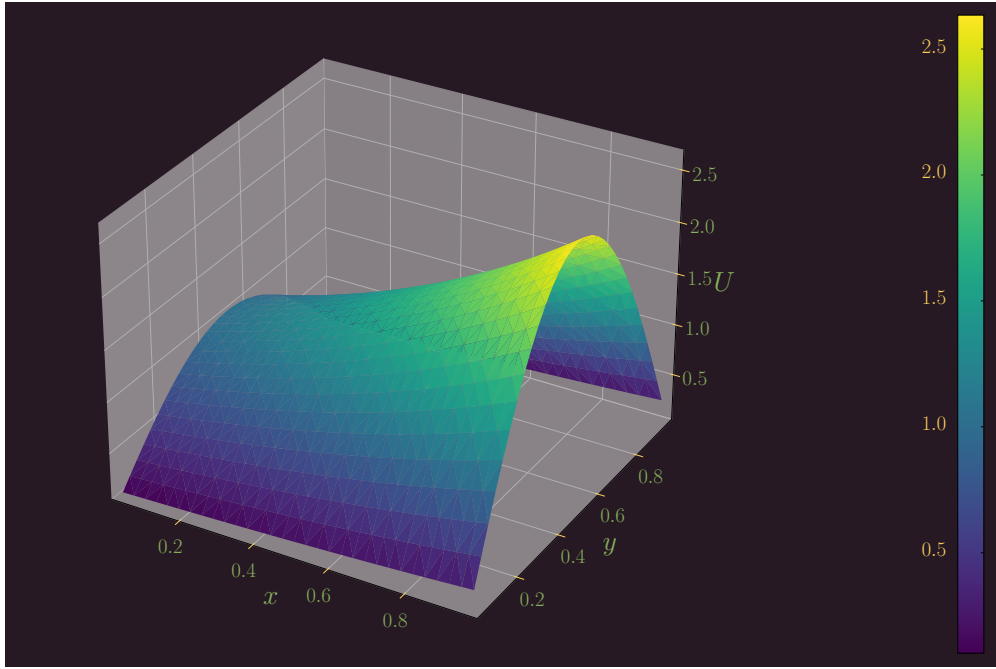


图 1: $h = 2^{-5}$ 时差分逼近解

不同步长时误差的 \mathbb{L}^∞ 范数及收敛速度如表 1 所示. 可以看出, 随着 h 的减小, 误差的 \mathbb{L}^∞ 范数逐渐减小. h 从 2^{-1} 到 2^{-9} 时, 收敛阶接近于 2, 但是再缩小网格时, 因 $\|e_h\|_\infty$ 接近于机器精度, 收敛阶又变小了.

表 1: 不同步长时误差的 \mathbb{L}^∞ 范数及收敛速度

$-\log_2 h$	$\ e_h\ _\infty$	$\log_2 \left(\ e_h\ _\infty / \ e_{h/2}\ _\infty \right)$
1	$1.94818276337851 \times 10^{-1}$	1.92405
2	$5.13373125805703 \times 10^{-2}$	1.96026
3	$1.31927593688654 \times 10^{-2}$	1.98207
4	$3.33943713696105 \times 10^{-3}$	1.99837
5	$8.35802510806616 \times 10^{-4}$	1.99841
6	$2.09181357501365 \times 10^{-4}$	1.99990
7	$5.22991071318923 \times 10^{-5}$	1.99997
8	$1.30750132527613 \times 10^{-5}$	1.99999
9	$3.26877185896635 \times 10^{-6}$	1.99997
10	$8.17209409920139 \times 10^{-7}$	1.99956
11	$2.04365120159977 \times 10^{-7}$	1.99291
12	$5.13429063708770 \times 10^{-8}$	1.89080
13	$1.38449633979576 \times 10^{-8}$	0.88309
14	$7.50680606564913 \times 10^{-9}$	

3.2 未知真解算例

取

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{\sin(4\pi xy)}{4\pi xy}, & (x, y) \in \Omega, \\ u_1(y) = u_3(y) = u_2(x) = u_4(x) = 0. \end{cases}$$

$h = 2^{-5}$ 时求得的差分逼近解如图 2 所示.

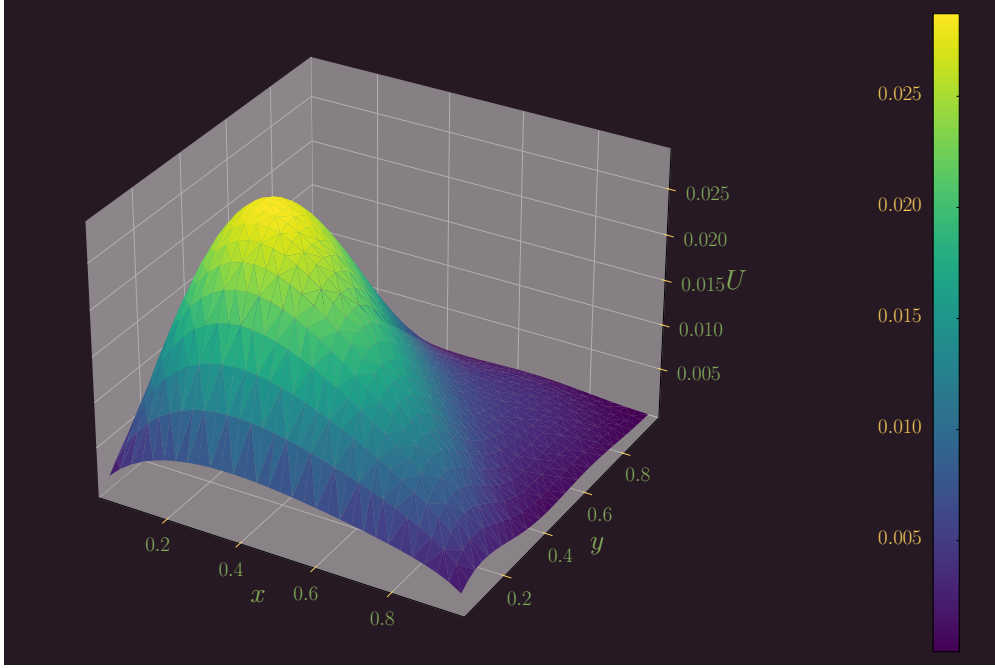


图 2: $h = 2^{-5}$ 时差分逼近解

为对其收敛速度进行分析, 计算 $-\log_2 \|U_h - U_{h/2}\|_\infty$, 如表 2 所示. 以 $-\log_2 h$ 为横坐标, 拟合得到

$$\log_2 \|U_h - U_{h/2}\|_\infty \approx 2.009181444799865 \log_2 h - 4.492800925336754,$$

拟合曲线如图 3 所示, 故差分逼近解在 \mathbb{L}^∞ 范数意义下是二阶收敛的.

表 2: 不同步长时 $-\log_2 \|U_h - U_{h/2}\|_\infty$ 的值

$-\log_2 h$	$-\log_2 \ U_h - U_{h/2}\ _\infty$
1	6.278314524587407
2	8.546061248379736
3	10.58435679097419
4	12.59155779257177
5	14.59260838416788
6	16.59059047122205
7	18.59039819231493
8	20.59026731037038
9	22.59027315438449
10	24.59025888822796
11	26.59000117687745
12	28.58588429968780
13	30.52135127239939

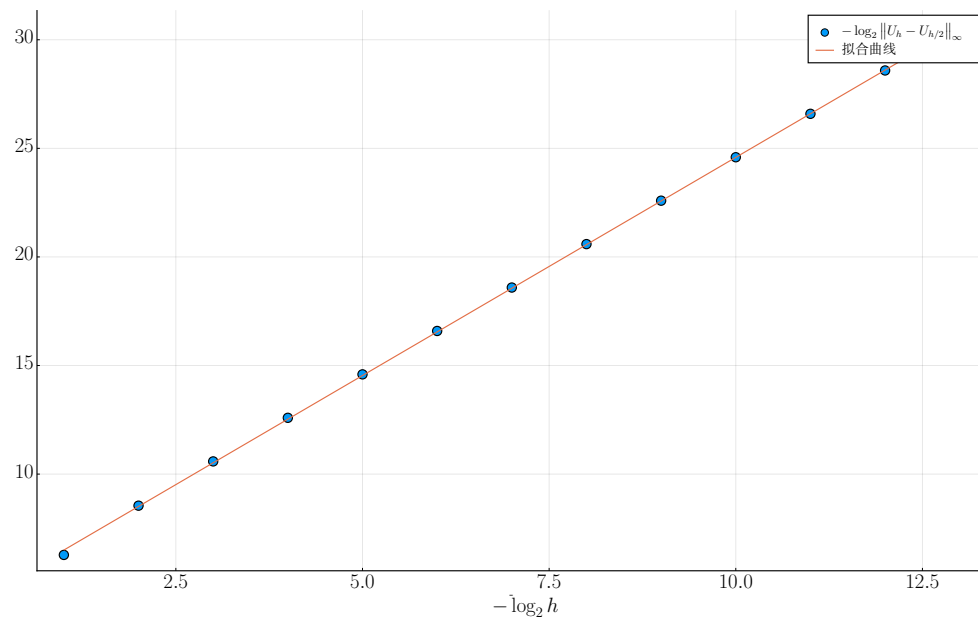


图 3: $-\log_2 \|U_h - U_{h/2}\|_\infty$ - $-\log_2 h$ 曲线

附录

数值实验源码