

# 双曲型偏微分方程的差分方法

阙嘉豪<sup>1</sup>

(1. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875)

## 1 一阶双曲方程模型问题

考虑  $\Omega := (0, 1)$  上具有周期边界条件的一阶线性双曲方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & 0 < x < x_{\max}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), & 0 \leq x \leq x_{\max}. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x_{\max}$  为给定的区间最大值,  $u^0$  为给定的初值函数. 还需给定边界条件, 后面的数值算例中会分别给出. 下面分别使用迎风格式, Lax-Wendroff 格式和 Beam-Warming 格式来求解问题 (1).

## 2 差分逼近

### 2.1 迎风格式

对初值问题 (1), 用关于时间的向前差分算子  $\frac{\Delta_{+t}}{\Delta t}$  逼近  $\frac{\partial}{\partial t}$ , 用  $\frac{\Delta_{-x}}{\Delta x}$  逼近  $\frac{\partial}{\partial x}$  后得到显式差分格式:

$$\begin{cases} U_j^{m+1} = (1 - \nu)U_j^m + \nu U_{j-1}^m, & 0 \leq j \leq N, \quad 0 \leq m \leq M, \\ U_j^0 = u^0(jh), & 0 \leq j \leq N, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\nu = \frac{\tau}{h}$ ,  $h = \frac{1}{N}$ ,  $M = \left\lceil \frac{t_{\max}}{\tau} \right\rceil$ .

#### 2.1.1 截断误差

设问题 (1) 的解  $u$  充分光滑, 利用 Taylor 展开式可得:

$$\begin{aligned} T_j^m &= \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{h} - \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^m \\ &= \frac{1}{2} [\tau u_{tt} - h u_{xx}]_j^m + \frac{1}{6} [\tau u_{ttt} + h u_{xxx}]_j^m + \cdots \\ &= - \left[ \frac{1}{2} h (1 - \nu) u_{xx} + \frac{1}{6} h^2 (1 - \nu^2) u_{xxx} + \cdots \right] \\ &= O(h), \end{aligned}$$

可见迎风格式的局部阶段误差只有一阶精度. 更确切地说, 只要问题 (1) 的解  $u$  的二阶导数有界, 就有

$$T_h = \max \left\{ |T_j^m| \right\} = O(\tau + h).$$

### 2.1.2 稳定性, 收敛性

差分逼近解的误差  $e_j^m = U_j^m - u_j^m$  满足方程

$$e_j^m = (1 - |\nu|) e_j^m + |\nu| e_{j-1}^m - \tau T_j^m.$$

迎风格式满足 CFL 条件时, 即  $|\nu| \leq 1$  时, 格式满足最大值原理. 于是有估计:

$$\max_j |e_j^{m+1}| \leq \max_j |e_j^m| + \tau \max_j |T_j^m| \leq \max_j |e_j^0| + t_{\max} \max_{j,m} |T_j^m|, \quad \forall (m+1)\tau \leq t_{\max}.$$

即  $|\nu| \leq 1$  时格式  $\mathbb{L}^\infty$  稳定.

又将 Fourier 波形  $U_j^m := \lambda_k^m e^{ikjh}$  代入格式, 有

$$|\lambda_k|^2 = \left( (1 - |\nu|) + |\nu| \cos kh \right)^2 + (|\nu| \sin kh)^2 = 1 - 4|\nu| (1 - |\nu|) \sin^2 \frac{1}{2} kh \leq 1,$$

即  $|\nu| \leq 1$  时, 任取  $k \in \mathbb{Z}$  都有  $|\lambda_k| \leq 1$ , 格式  $\mathbb{L}^2$  稳定.

从而, 当问题 (1) 的解  $u$  的二阶导数有界时, 沿着任意满足 CFL 条件的加密路径迎风格式为收敛的且具有一阶逼近精度.

## 2.2 Lax-Wendroff 格式

由 Lax-Wendroff 格式及初值问题 (1) 得到递推公式:

$$\begin{cases} U_j^{m+1} = -\frac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j+1}^m + (1-\nu^2)U_j^m \\ \quad + \frac{1}{2}\nu(1+\nu)U_{j-1}^m, & 0 \leq j \leq N, \quad 0 \leq m \leq M, \\ U_j^0 = u^0(jh), & 0 \leq j \leq N. \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2.1 截断误差

由迎风格式已知

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{h} = -\frac{1}{2}h(1-\nu)[u_{xx}]_j^m + O(h^2). \quad (4)$$

将 (4) 式中  $[u_{xx}]_j^m$  用二阶中心差商  $\frac{\delta_x^2 u_j^m}{h^2}$  替代:

$$[u_{xx}]_j^m = \frac{\delta_x^2 u_j^m}{h^2} + O(h^2),$$

则可得截断误差为二阶的 Lax-Wendroff 格式.

### 2.2.2 稳定性, 收敛性

易知, Lax-Wendroff 格式的 CFL 条件为  $|\nu| \leq 1$ . 由于格式右端的系数不可能同号, Lax-Wendroff 格式不可能满足最大值原理, 故没有  $\mathbb{L}^\infty$  稳定性.

又将 Fourier 波形  $U_j^m := \lambda_k^m e^{ikjh}$  代入格式, 有

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4\nu^2 (1 - \nu^2) \sin^4 \frac{kh}{2}.$$

又  $|\nu| \leq 1$  时, 任取  $k \in \mathbb{Z}$  都有  $|\lambda_k|^2 \leq 1$ . 故  $|\nu| \leq 1$  时 Lax-Wendroff 格式  $\mathbb{L}^2$  稳定.

### 2.3 Beam-Warming 格式

由 Lax-Wendroff 格式及初值问题 (1) 得到递推公式:

$$\begin{cases} U_j^{m+1} = \frac{1}{2}(1-\nu)(2-\nu)U_j^m + \nu(2-\nu)U_{j-1}^m \\ \quad - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j-2}^m, & 0 \leq j \leq N, \quad 0 \leq m \leq M, \\ U_j^0 = u^0(jh), & 0 \leq j \leq N. \end{cases} \quad (5)$$

#### 2.3.1 截断误差

将 (4) 式中  $[u_{xx}]_j^m$  用二阶中心差商  $\frac{\delta_x^2 u_{j-1}^m}{h^2}$  替代:

$$[u_{xx}]_j^m = \frac{\delta_x^2 u_{j-1}^m}{h^2} + O(h^2),$$

则可得截断误差为二阶的 Beam-Warming 格式.

#### 2.3.2 稳定性, 收敛性

易知, Beam-Warming 格式的 CFL 条件为  $|\nu| \leq 1$ . 由于格式右端的系数不可能同号, Beam-Warming 格式不可能满足最大值原理, 故没有  $\mathbb{L}^\infty$  稳定性.

又将 Fourier 波形  $U_j^m := \lambda_k^m e^{ikjh}$  代入格式, 有

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4\nu(2-\nu)(1-\nu^2) \sin^4 \frac{kh}{2}.$$

又  $0 \leq \nu \leq 2$  时, 任取  $k \in \mathbb{Z}$  都有  $|\lambda_k|^2 \leq 1$ . 故  $|\nu| \leq 2$  时 Beam-Warming 格式  $\mathbb{L}^2$  稳定.

### 3 数值实验

下面用三种数值格式分别求解正弦波问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & 0 < x < x_{\max}, \quad t > 0, \\ u^0(x) = \sin(\pi x), & x_{\max} = 1, \\ u(x, t) = u(x_{\max}, t), & t > 0. \end{cases} \quad (6)$$

和方波问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & 0 < x < x_{\max}, t > 0, \\ u^0(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 3, \end{cases} \\ u(0, t) = 3, \quad u(3, t) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

解析解分别为  $u(x, t) = \sin(\pi(x - t))$  和

$$u(x, t) = \begin{cases} 3, & t \leq x \leq t + 1, \\ 1, & t + 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad t < 2.$$

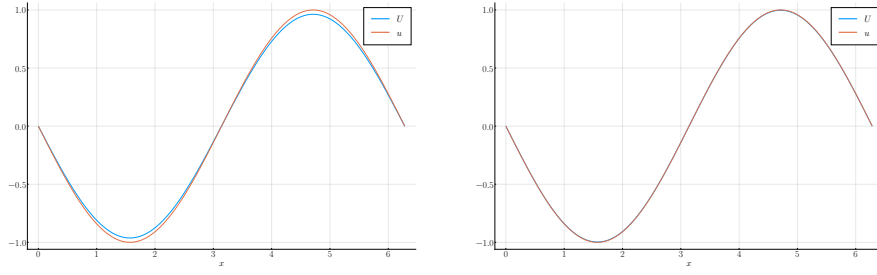
#### 3.1 迎风格式

取  $\nu = 0.5 \leq 1$ , 满足 CFL 条件. 对正弦波问题 (6) 求解得到误差及收敛阶如表 1 所示.

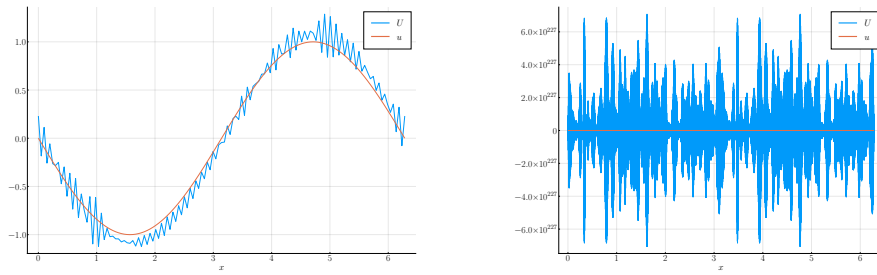
表 1: 迎风格式不同步长时的  $\mathbb{L}^2, \mathbb{L}^\infty$  误差及收敛阶

收敛阶	$\mathbb{L}^2$ 误差	$h$	$\mathbb{L}^\infty$ 误差	收敛阶
	$1.68359 \times 10^{-1}$	$2^{-4}$	$2.35319 \times 10^{-1}$	
0.820918	$9.53050 \times 10^{-2}$	$2^{-5}$	$1.34378 \times 10^{-1}$	0.808319
0.904664	$5.09078 \times 10^{-2}$	$2^{-6}$	$7.19393 \times 10^{-2}$	0.901445
0.950960	$2.63340 \times 10^{-2}$	$2^{-7}$	$3.72347 \times 10^{-2}$	0.950134
0.975148	$1.33958 \times 10^{-2}$	$2^{-8}$	$1.89436 \times 10^{-2}$	0.974938
0.987492	$6.75621 \times 10^{-3}$	$2^{-9}$	$9.55461 \times 10^{-3}$	0.987439
0.993726	$3.39283 \times 10^{-3}$	$2^{-10}$	$4.79817 \times 10^{-3}$	0.993713
0.996858	$1.70011 \times 10^{-3}$	$2^{-11}$	$2.40432 \times 10^{-3}$	0.996855
0.998428	$8.50984 \times 10^{-4}$	$2^{-12}$	$1.20347 \times 10^{-3}$	0.998427

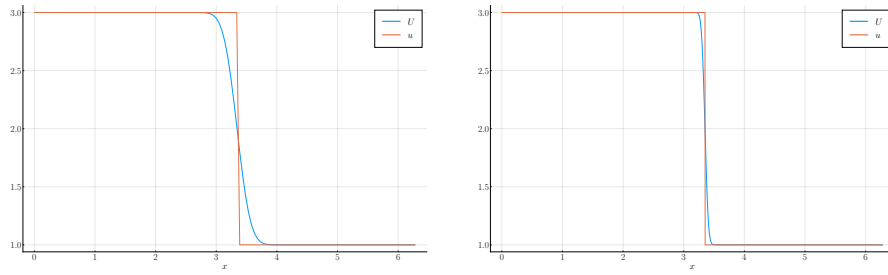
由数值结果可以看出解序列逐步收敛到模型问题的解, 收敛阶趋于 1, 与理论结果相符.  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-11}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 1 所示. 可以看出  $h = 2^{-7}$  时出现了耗散.


 图 1: 迎风格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$ 

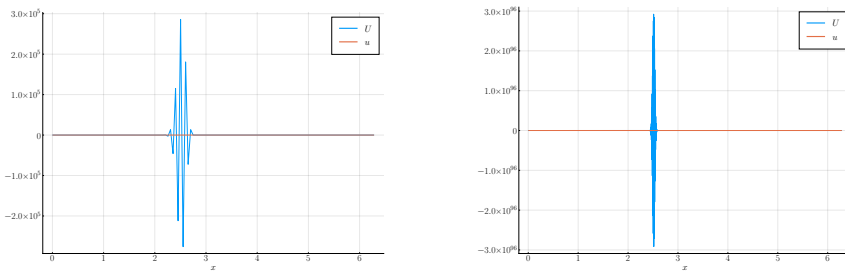
取  $\nu = 2 \geq 1$ , 不满足 CFL 条件.  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-11}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 2 所示. 可以看到出现了震荡和错误解.


 图 2: 迎风格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$ 

对方波问题, 取  $\nu = 0.5$ .  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-11}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 3 所示, 可以看出差分逼近解在间断点附近被磨光.


 图 3: 迎风格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$ 

取  $\nu = 2$ , 结果如图 4 所示, 出现了错误解.


 图 4: 迎风格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$

### 3.2 Lax-Wendroff 格式

取  $\nu = 0.5 \leq 1$ , 满足 CFL 条件. 对正弦波问题 (6) 求解得到误差及收敛阶如表 2 所示.

表 2: Lax-Wendroff 格式不同步长时的  $\mathbb{L}^2$ ,  $\mathbb{L}^\infty$  误差及收敛阶

收敛阶	$\mathbb{L}^2$ 误差	$h$	$\mathbb{L}^\infty$ 误差	收敛阶
	$7.65220 \times 10^{-2}$	$2^{-4}$	$1.01182 \times 10^{-1}$	
1.97878	$1.94140 \times 10^{-2}$	$2^{-5}$	$2.65973 \times 10^{-2}$	1.92760
1.99863	$4.85810 \times 10^{-3}$	$2^{-6}$	$6.76359 \times 10^{-3}$	1.97542
2.00126	$1.21347 \times 10^{-3}$	$2^{-7}$	$1.70275 \times 10^{-3}$	1.98992
2.00107	$3.03142 \times 10^{-4}$	$2^{-8}$	$4.27037 \times 10^{-4}$	1.99543
2.00064	$7.57519 \times 10^{-5}$	$2^{-9}$	$1.06920 \times 10^{-4}$	1.99782
2.00035	$1.89334 \times 10^{-5}$	$2^{-10}$	$2.67498 \times 10^{-5}$	1.99894
2.00018	$4.73277 \times 10^{-6}$	$2^{-11}$	$6.68988 \times 10^{-6}$	1.99948
2.00009	$1.18312 \times 10^{-6}$	$2^{-12}$	$1.67277 \times 10^{-6}$	1.99974

由数值结果可以看出解序列逐步收敛到模型问题的解, 收敛阶趋于 1, 与理论结果相符.  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-10}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 5 所示.

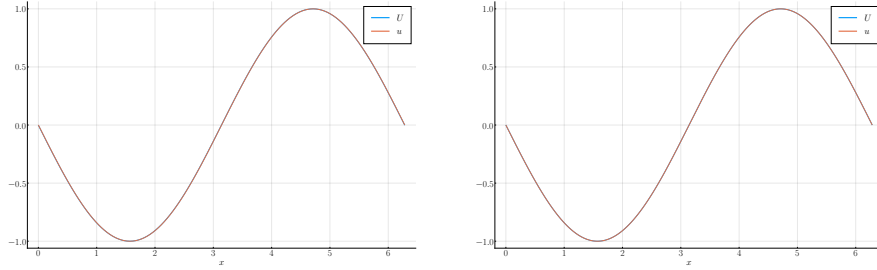


图 5: Lax-Wendroff 格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$

取  $\nu = 2 \geq 1$ , 不满足 CFL 条件.  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-10}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 6 所示. 可以看到出现了错误解.

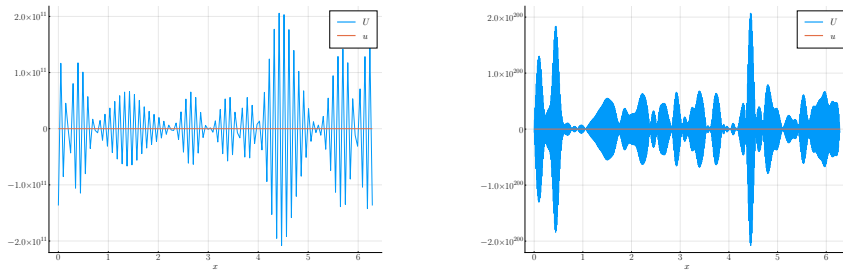
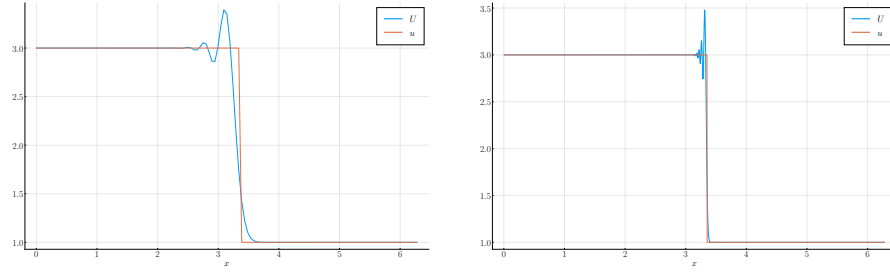
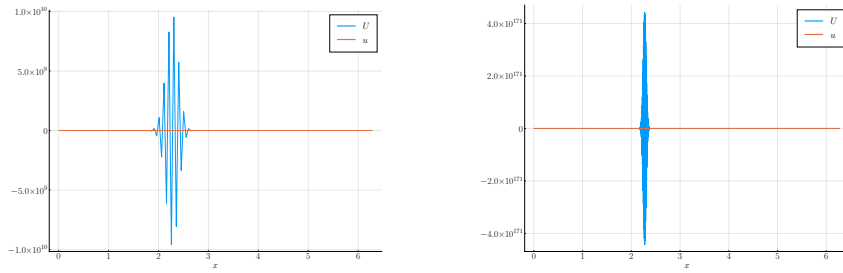


图 6: Lax-Wendroff 差分逼近解  $U$  与真解  $u$

对方波问题, 取  $\nu = 0.5$ .  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-11}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 7 所示. 可以看出差分逼近解在间断点左侧出现震荡.


 图 7: Lax-Wendroff 格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$ 

取  $\nu = 2$ , 结果如图 8 所示, 出现了错误解.


 图 8: Lax-Wendroff 格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$ 

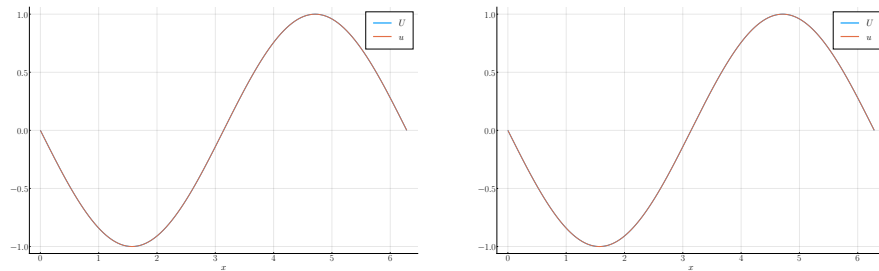
### 3.3 Beam-Warming 格式

取  $\nu = 0.5 \leq 1$ , 满足 CFL 条件. 对正弦波问题 (6) 求解得到误差及收敛阶如表 3 所示.

 表 3: Beam-Warming 格式不同步长时的  $\mathbb{L}^2$ ,  $\mathbb{L}^\infty$  误差及收敛阶

收敛阶	$\mathbb{L}^2$ 误差	$h$	$\mathbb{L}^\infty$ 误差	收敛阶
	$4.42759 \times 10^{-3}$	$2^{-4}$	$6.26065 \times 10^{-3}$	
1.78045	$1.28884 \times 10^{-3}$	$2^{-5}$	$1.78257 \times 10^{-3}$	1.81235
1.66205	$4.07259 \times 10^{-4}$	$2^{-6}$	$5.67289 \times 10^{-4}$	1.65180
1.83690	$1.14001 \times 10^{-4}$	$2^{-7}$	$1.59987 \times 10^{-4}$	1.82613
1.92219	$3.00797 \times 10^{-5}$	$2^{-8}$	$4.23743 \times 10^{-5}$	1.91669
1.96211	$7.72001 \times 10^{-6}$	$2^{-9}$	$1.08965 \times 10^{-5}$	1.95932
1.98132	$1.95516 \times 10^{-6}$	$2^{-10}$	$2.76232 \times 10^{-6}$	1.97991
1.99072	$4.91943 \times 10^{-7}$	$2^{-11}$	$6.95373 \times 10^{-7}$	1.99002
1.99538	$1.23380 \times 10^{-7}$	$2^{-12}$	$1.74444 \times 10^{-7}$	1.99503

由数值结果可以看出解序列逐步收敛到模型问题的解, 收敛阶趋于 1, 与理论结果相符.  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-11}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 9 所示.


 图 9: Beam-Warming 格式差分逼近解  $U$  与真解  $u$

取  $\nu = 4 \geq 2$ , 不满足 CFL 条件.  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-11}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 10 所示. 可以看到出现了错误解.

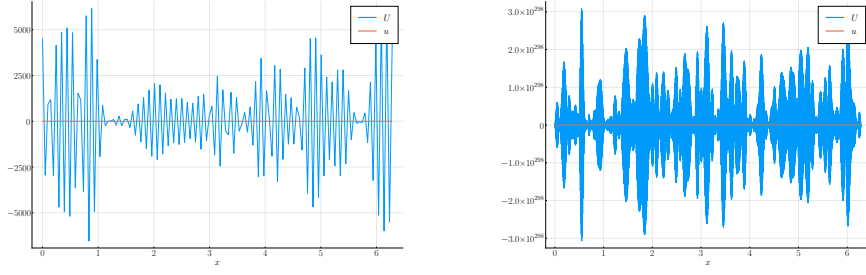


图 10: Beam-Warming 差分逼近解  $U$  与真解  $u$

对方波问题, 取  $\nu = 0.5$ .  $h = 2^{-7}$  和  $h = 2^{-11}$  时差分逼近解  $U$  与真解  $u$  在  $t = t_{\max}$  时刻图像如图 11 所示. 可以看出差分逼近解在间断点右侧出现震荡.

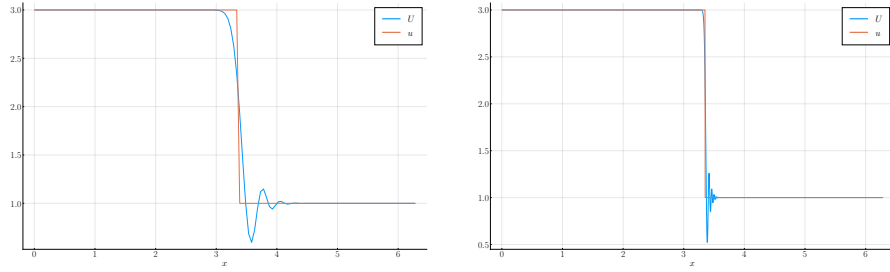


图 11: Beam-Warming 差分逼近解  $U$  与真解  $u$

取  $\nu = 4$ , 结果如图 12 所示, 出现了错误解.

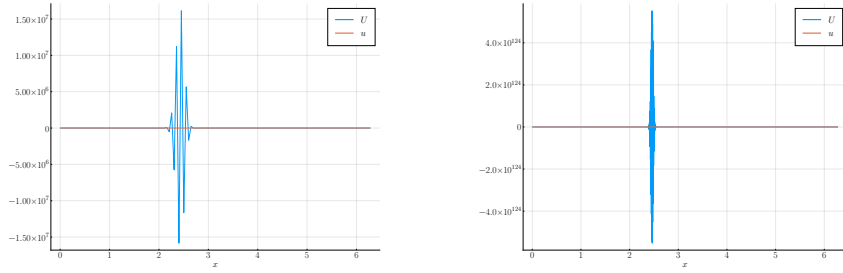


图 12: Beam-Warming 差分逼近解  $U$  与真解  $u$

## 4 Burgers 方程的 Riemann 问题

### 4.1 模型问题

$$\begin{aligned}
 u_t + (f(u))_x &= 0, & x \in I, t > 0, \\
 f(u) &= \frac{1}{2}u^2, \\
 u(x, 0) &= \begin{cases} u_l, & x < x_0, \\ u_r, & x > x_0, \end{cases} & x \in I,
 \end{aligned} \tag{8}$$



其中  $I \subset \mathbb{R}$  为开区间. 守恒律方程加上单个间断的分片常值初值称为 Riemann 问题. 因非线性问题的特征线会相交, 故在积分形式下求弱解.

$u_l > u_r$  时, 有唯一激波弱解

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x - x_0 < st, \\ u_r, & x - x_0 > st, \end{cases}$$

其中, 激波速度  $s = \frac{u_l + u_r}{2}$ .

$u_l < u_r$  时, 有稀疏波弱解

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x - x_0 < st, \\ \frac{x - x_0}{t}, & u_l t \leq x u_r t, \\ u_r, & x - x_0 > st. \end{cases}$$

上述两种弱解均为该情况下的粘性消失广义解.

#### 4.2 有限体积格式

在  $[x_l, x_r] \times [t_a, t_b]$  上对方程 (8) 积分, 可得积分形式的守恒律方程:

$$\int_{x_l}^{x_r} u(x, t_b) dx = \int_{x_l}^{x_r} u(x, t_a) dx - \left( \int_{t_a}^{t_b} f(u(x_r, t)) dt - \int_{t_a}^{t_b} f(u(x_l, t)) dt \right).$$

在控制体  $I_j := [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$  中, 取  $t_a = t_m, t_b = t_{m+1}$ , 空间单元积分平均值

$$U_j^m = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u(x, t^m) dx,$$

$x_{j+\frac{1}{2}}$  上的数值通量为

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m}^{t_{m+1}} f\left(u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt.$$

于是得到守恒差分格式

$$U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \right).$$

其中,  $F_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} := F(U_{j+1}^m, U_j^m)$  在数值方法中可以有不同求解, 可以通过求解如下的界面两侧的 Riemann 问题确定.

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ u_r, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

其中  $x = 0$  代表  $x_{j+\frac{1}{2}}$  界面,  $u_l = U_j$ ,  $u_r = U_{j+1}$ .

### 4.3 非守恒形式

对于问题 (8), 从非守恒形式  $u_t + uu_x = 0$  出发构造迎风格式

$$U_j^{m+1} \begin{cases} U_j^m - \frac{\tau}{h} U_j^m (U_j^m - U_{j-1}^m), & U_j^m \geq 0, \\ U_j^m - \frac{\tau}{h} U_j^m (U_{j+1}^m - U_j^m), & U_j^m < 0. \end{cases} \quad (9)$$

取初值为

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

此时  $1 =: u_l > u_r := 0$ .  $\tau \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  时, 数值解

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

与 Rankine-Hugoniot 间断跳跃条件下的激波解

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{t}{2}, \\ 0, & x \geq \frac{t}{2} \end{cases}$$

矛盾.

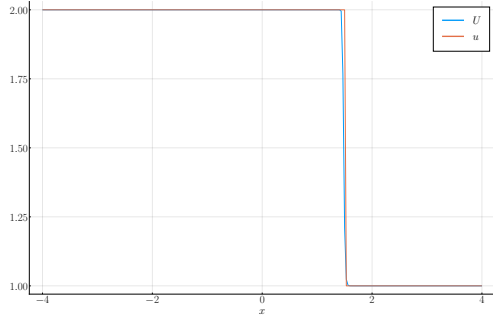
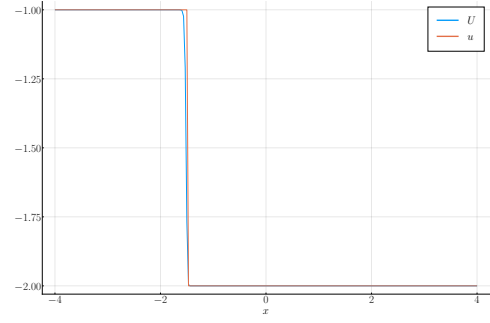
### 4.4 数值实验

取  $I = [-4, 4]$ ,  $x_0 = 0$ ,  $t_{\max} = 2^{-5}$ ,  $\Delta t = 2^{-6}$ , 取不同的  $u_l$ ,  $u_r$  进行数值实验.

#### 4.4.1 激波

取  $u_l = 2$ ,  $u_r = 1$ , 此时激波速度  $s = 1.5$ , 结果如图 13 所示, 可以看到是向前传播的.

取  $u_l = -1$ ,  $u_r = -2$ , 此时激波速度  $s = -2.5$ , 结果如图 14 所示, 可以看到是向后传播的.

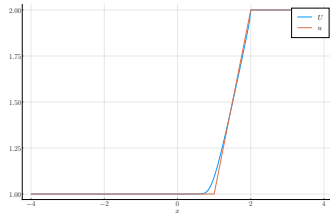
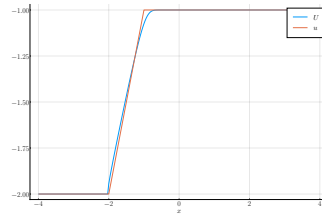
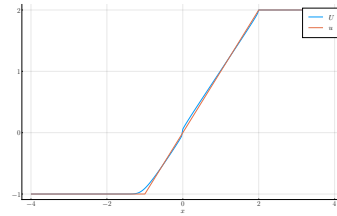

 图 13:  $u_l = 2, u_r = 1$ 

 图 14:  $u_l = -1, u_r = -2$ 

#### 4.4.2 稀疏波

取  $u_l = 1, u_r = 2$ , 结果如图 15 所示.

取  $u_l = -2, u_r = -1$ , 结果如图 16 所示.

取  $u_l = -1, u_r = 2$ , 结果如图 17 所示, 可以看到一个明显的转折.


 图 15:  $u_l = 1, u_r = 2$ 

 图 16:  $u_l = -2, u_r = -1$ 

 图 17:  $u_l = -1, u_r = 2$ 

#### 4.4.3 例 3.4 迎风格式与有限体积格式对比

利用迎风格式进行数值实验, 显然满足 CFL 条件, 区间及步长取法同上, 初值为

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

结果如图 18 所示, 迎风格式得到了一个错误的解.

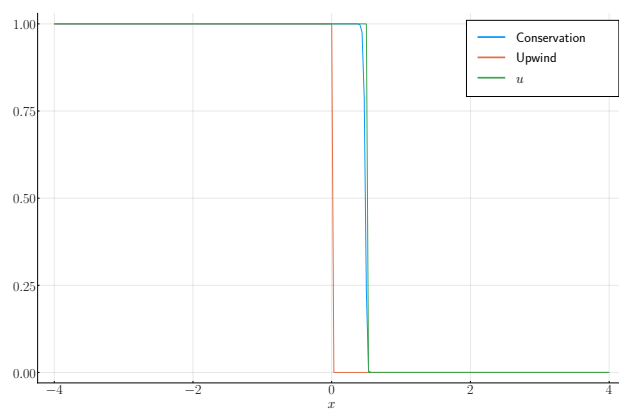


图 18:  $u_l = 2, u_r = 1$