实变函数习题答案

2019 级 郁正浩

作者想说的话

因为课本没有自带习题答案，而我在网上搜到的又有不少错误，于是我就随手打的一份习题答案，可能会有不少错误，如有问题欢迎指出。另外有些题目我也不会，还希望各位能提供一份正确答案，以备更正。

在此特别感谢李胤基同学，为我提供了相当多题目的答案.

同时感谢阙嘉豪师兄为我提供的 LaTeX 模板.

本答案初稿完成于 2021 年 5 月 30 日.

免责声明: 本 PDF 只供内部传阅, 不作商业用途.

目录

第一部分 习题一

1. **分析:** 这种问题基本都是根据数学分析中学习的关于极限的定义, 写成任意、存在的形式, 然后将 $\forall$ 换为 $\cap$,$\exists$ 换为 $\cup$. 注意, 这种方法里,$\varepsilon > 0, \delta > 0$ 之类的将会换成 $\frac{1}{k}$ 之类的形式。

所以 $\{x : \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\}$ 由定义, 可以表示为:

$$\exists k \in \mathbb{N}*, \forall n \in \mathbb{N}*, \exists j > n, f_j(x) > \frac{1}{k}$$

也即:

$$\{x : \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\{x : f_j(x) > \frac{1}{k}\}$$

2. 本题已默认 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 此时有:

$$\begin{aligned}
x \in \lim_{n\to\infty} E_n &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} E_n \\
&\Longleftrightarrow \exists N, n > N\text{时}x \in E_n \\
&\Longleftrightarrow \exists N, n > N\text{时}f(x) \geqslant \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) \geqslant \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) = 1 \\
&\Longleftrightarrow x \in [a, b]\backslash E
\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = [a, b]\backslash E$

3. 只需用 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n$

(1)

$$\begin{aligned}
x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \bigcup B_n &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left(A_n \bigcup B_n\right) \\
&\Longleftrightarrow \forall N, \exists n > N, x \in A_n \bigcup B_n \\
&\Longleftrightarrow \forall N, \exists n > N, x \in A_n\text{或}x \in B_n \\
&\Longleftrightarrow \forall N, \exists n > N, x \in A_n\text{或}\forall N, \exists n > N, x \in B_n \\
&\Longleftrightarrow x \in (\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)\bigcup(\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n)
\end{aligned}$$

(2) 在 (1) 中用 A_n^c 代替 A_n,B_n^c 代替 B_n 再取补集即可

4. 本题用集合元素相同来证明.

(1)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \backslash B) &\Longleftrightarrow f(x) \in Y \backslash B \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in Y \text{且} f(x) \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \text{且} x \notin f^{-1}(B) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(B) \end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(Y \backslash B) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(B)$

(2) 结论是否定的.
取 $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}, X = \mathbb{R}, A = \{0\}$, 不难验证结论错误

5. 定义 $f : [0,1] \to [0,1), f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, x = \dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{N}* \\ x, \text{otherwise} \end{cases}$, 不难验证这是一一映射. 所以 $(r, \theta) \to \ (f(r), \theta)$(极坐标表示), 即为一种一一映射.

6. 我觉得这个题是错的, 比如取 Dirichlet 函数 $D(x), f(x) = D(x) + 1$, 满足所有条件但不满足结论.

7. 设 $A_n = \{x : f(x) > \dfrac{1}{n}\}, B_n = \{x : f(x) < -\dfrac{1}{n}\}$, 由已知条件不难验证:
$|A_n| < +\infty, |B_n| < +\infty$,
所以 $E = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \bigcup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$

8. **分析:** 此题主要目的是建立一个 $E \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 的单射.

由条件知 $\forall y \in E, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f(x) \geqslant f(x_0) = y_0$, 则 $\exists p, q \in \mathbb{Q}, x_0 - \delta < p < x_0 < q < x_0 + \delta$, 做映射 $g : y \to (p, q)$, 下证这是单射. 否则若 $g(y_1) = (p_1, q_1) = (p_2, q_2) = g(y_2)$, 由 (p, q) 的生成规则知, 存在 $x_1, x_2 \in [p_1, q_1] = [p_2, q_2]$

对 $[p_1, q_1]$, 有 $f(x) \geqslant f(x_1)$ 特别的 $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, 反之可得 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, 故有 $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, 故为单射, 因此 E 的基数为 $\aleph_0$

9. **分析:** 本题的要点是降低维数, 同时要使用一个重要的结论: 可数个可数集的并依然是可数集.

反证: 若有不可数个点, 则设 $\{r_n\} = \mathbb{Q}$, 从 E 中取定一点 P_0, 则有:

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{P:|P-P_0|=r_n\}\supset E$, 故 $\exists n,\{P:|P-P_0|=r_n\}\bigcap E$ 为不可数集.

再从 $\{P:|P-P_0|=r_n\}\bigcap E$ 中取定一点 P_1, 重复上述操作可得,$\exists m,\{P:|P-P_1|=r_m\}\bigcap\{P:|P-P_0|=r_n\}\bigcap E$ 为不可数集.

再在这个集合中取一点 P_2 重复上述操作得 $\exists k,\{P:|P-P_2|=r_k\}\bigcap\{P:|P-P_1|=r_m\}\bigcap\{P:|P-P_0|=r_n\}\bigcap E$ 是不可数集. 显然, 这个集合至多有两个点, 这是不可能的.

注: 实际上, 归纳可以得到结论对 $\mathbb{R}^n$ 成立. 这个题的一维情况是显然的, 但也可以通过画一画二维的情况来得到思路。

10. 设 $E_1=\{x:\exists a\in\mathbb{R},(x,a)\in E\},E_2=\{y:\exists b\in\mathbb{R},(b,y)\in E\}$, 则 E_1,E_2 可数.

设 $E_1=\{x_n\},E_2=\{y_n\},M=E_1\times E_2=\{(x,y):x\in E_1,y\in E_2\}$, 则 $E\subset M$.

设 $A_0=\{(x_m,y_n):m,n\in\mathbb{N}*,m\leqslant n\},B_0=\{(x_m,y_n):m,n\in\mathbb{N}*,m>n\}$.

令 $A=A_0\bigcap E,B=B_0\bigcap E$ 则 A,B 满足条件.

11. 设 $E=\{r_n\}$, 则存在函数列 $\{f_{1,n}\}$ 在 r_1 处收敛, 然后可以在此子列中取 $\{f_{2,n}\}$ 在 r_2 处收敛, 重复上述过程可以得到 $\{f_{k,n}\}_{k,n\in\mathbb{N}*}$.

取 $\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}*}$ 即可在 E 上得任何一个点收敛.

12. **分析:** 此题只需注意到 $[0,1]^\infty$ 的基数也是 c 即可.

不妨设 $E=[0,1]^\infty$(否则可通过映射映到这个集合),$A_k\subset[0,1]^\infty$. 由 $\overline{\overline{A_n}}<c$ 可知,$\exists x_n\in[0,1]$, 使得 A_n 中不存在第 n 个分量是 x_n 的元素, 故 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\notin\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 也即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq E$

13. 本题中, 我默认“递增”是指“非严格递增”。

只需证明 E^c 是开集.(下用定义证明)

$\forall x_0\notin E,\exists\varepsilon_0>0,f(x_0+\varepsilon_0)=f(x_0-\varepsilon_0)$, 由 f 递增知,$\forall x\in(x_0+\varepsilon_0,x_0-\varepsilon_0),f(x)=f(x_0)$, 取 ε 满足 $x_0-\varepsilon_0<x-\varepsilon<x+\varepsilon<x_0+\varepsilon+0$ 可得 $f(x-\varepsilon)=f(x+\varepsilon)$ 也即 $x\in E^c$, 故 $(x_0+\varepsilon_0,x_0-\varepsilon_0)\subset E^c$, 故 E^c 为开集也即 E 为闭集.

14. 有界点列必有收敛子列, 故 $E'\neq\Phi$, 由 F 是闭集知 $E'\subset F$, 故 $E'\bigcap F\neq\Phi$.

反之, 先证明这种 F 有界. 否则 $\forall n\in\mathbb{N}*,\exists x_n\in F$ 使得 $|x_n|>n$, 令 $E=\{x_n\}$, 则 $E\subset F$,E 为无限集且 $E'=\Phi$, 与条件矛盾. 故 F 有界.

下面证明 F 是闭集. 否则存在 $x_0\in F'\backslash F$ 和点列 $\{x_n\}\subset F,x_n\to x_0$, 取 $E=\{x_n\}$ 即可得到与题设矛盾. 故 F 为闭集. 综上即得结论.

15. 只需用定义证明,E 的任何一个聚点都在 E 中.

$\forall t_0 \in E', \exists \{t_n\} \subset E, t_n \to t_0, \exists \{x_n\}, |x_n - t_n| = r$. 不妨设 $|t_n - t_0| < 1$, 则 $|x_n - t_0| < r+1$, 故 $\{x_n\}$ 有界, 故存在收敛子列, 不妨设 $x_n \to x_0$, 对 n 取极限可得 $|t_0 - x_0| = |t_n - x_n| = r$, 由 F 是闭集知 $x_0 \in F$, 故 $t_0 \in E$. 即证.

16. 只需注意到 $(\overline{A} \times B') \bigcup (A' \times \overline{B}) = (A' \times B') \bigcup (A' \times B) \bigcup (A \times B')$ 每一部分均 $\subset (A \times B)'$, 只需证明 $(A \times B)'$ 的点必定属于上述三类之一即可.(略)

17. 本题是错误的. 反例:$E = \{(x,y) : xy = 1\}$, 则 E 是闭集, 但 $E_y = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ 不是闭集.

18. 只需注意到,$\mathbb{R}^n$ 上的紧集就是有界闭集 (反之亦然).

显然 $\forall k, f(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k) \subset f(F_k)$, 故有 $f(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$

$\forall y_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k), \forall k \in \mathbb{N}*, \exists x_k \in F_k, f(x_k) = y_0$, 由 $\{x_k\}$ 存在收敛子列, 不妨设 $x_k \to x_0$, 则 $f(x_0) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = y_0$, 此时注意到 $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 故 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k) \subset f(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k)$.

综上可知结论成立.

19. 由连续点的定义知, 若 $f \notin C(\mathbb{R}), \exists x_0, w_f(x_0) > 0$, 设 $w_f(x_0) = w_0$.

取 $p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}$ 且 $f(x_0) - \dfrac{w_0}{2} < p < f(x_0) < q < f(x_0) + \dfrac{w_0}{2}, \forall n \in \mathbb{N}*, \exists x_n \in B(x_0, \dfrac{1}{n}), f(x_n) > q \ or \ f(x_n) < p$, 由 f 的介值性,$\exists y_n \in B(x_0, \dfrac{1}{n}), f(y_n) = q \ or f(y_n) = p$。

结合 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0, \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) \neq f(x_0)$, 这与 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = p \ or \ f(x) = q\}$ 为闭集矛盾.

20. 注意到 $\overline{E_1} + E_2' = (E_1 + E_2') \bigcup (E_1' + E_2')$ 再证明这两部分均为 $(E_1 + E_2)'$ 的子集即可 (略).

21. 若 $\partial A = \Phi$ 注意到 $\overline{A} = \partial A \bigcup \mathring{A} = \mathring{A}$ 故 $\overline{A}$ 为开集. 由 $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ 可知 $\mathring{A} = A = \overline{A}$, 故 A 既为开集又为闭集, 不难验证这种集合仅有 $\mathbb{R}^n \& \Phi$

22. 反证: 若 $\exists x \in G_1 \bigcap \overline{G_2}$, 则 $\exists \delta, B(x, \delta) \subset G_1$, 且 $B(x, \delta) \bigcap G_2 \neq \Phi$

这与 $G_1 \bigcap G_2 = \Phi$ 矛盾.

23. 取 $E = G^c$ 显然.

24. 若 a, b, c, d 不全为 0, 猜一猜可以知道没有.

否则, 设 $P_0 = (x_0, y_0)$ 为内点, 可得 $z = P(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 某邻域内的任意点的的各个方向的方向导度为 0. 取方向 $y = x$ 可得

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$$

对某个关于 x 的开区间成立, 故必为零多项式也即 $a=b=c=d=0$

25. 设 $F(x,y)=f(x)-y$, 结论显然.

26. 注意到 $\mathbb{R}$ 中任何开集都可以写成两两不交的开区间的并, 也即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ 的形式. 其中 $a_k,b_k\in\mathbb{R}$, 定义 $f:\{\mathbb{R}\text{中所有开集}\}\to\mathbb{R}^{\infty}$,$f(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_k,b_k))=(a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots)$ 显然这是单射. 注意到 $\overline{\overline{\mathbb{R}^{\infty}}}=c$, 故 $\overline{\overline{\{\mathbb{R}\text{中所有开集}\}}}\leqslant c$, 由显然 $\{(-\infty,x):x\in\mathbb{R}\}$ 中每个元素都是开集且 $\overline{\overline{\{(-\infty,x):x\in\mathbb{R}\}}}=c$

综上可知 $\overline{\overline{\{\mathbb{R}\text{中所有开集}\}}}=c$

27. 若结论不成立, 则 $\bigcap\limits_{\alpha}F_\alpha=\Phi$ 则 $\bigcup\limits_{\alpha}F_\alpha^c=\mathbb{R}$, 故存在可数个 F_α^c 并为 $\mathbb{R}$, 设 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\Phi$ 设 $A_m=\bigcap\limits_{n=1}^{m}F_n$ 为非空有界单调递减闭集, 故 $\exists x_m\in A_m$, 故 $\{x_m\}$ 存在收敛子列, 设极限点为 x_0, 则 $x_0\in\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A_m=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\Phi$, 这是不可能的.

28. 在上题中用 $F_\alpha\backslash G$ 代替 F_α, 即为逆否命题.

29. 只需注意到存在有限个开球可以覆盖掉 K. 且找出的这个开覆盖 M 的并是开集. 只需证明结论: 若闭集 A,B 交为空, 则 $d(A,B)>0$. 这个结论是显然的. 故取 $\varepsilon=d(M^c,K)$ 即可.

30. 注意到 f' 具有介值性, 故只需要用 19 题的结论即可.

31. 不难验证 f 是单射, 结合 f 连续可知 f 单调, 不妨设 f 单调递增, 则 $f(x)>f(0)+ax(x>0),f(x)<f(0)+ax(x<0)$, 结合介值性可知值域为 $\mathbb{R}$

32. 请参考本书 P_{13} 例 13.

33. 否则存在 $(m,n)\subset[a,b],f'$ 在 (m,n) 上存在且连续. 由 f' 不恒为 0 知,$\exists x_0\in(m,n),f'(x_0)\neq 0$, 不妨设 $f'(x_0)>0$, 则 $\exists\delta>0,\forall x\in B(x_0,\delta),f'(x)>0$, 故 f 在这个区间内没有极值点, 与 f 极值点稠密矛盾.

34. 只需注意到连续点集为 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x:w_f(x)<\dfrac{1}{n}\}$ 是 G_δ 集, 而 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集即可.

这个结论的证明可参考本书 P_{43} 例 13,$\{x:w_f(x)<\frac{1}{n}\}$ 是开集的证明可参考本书 P_{34} 例 7.

35. 自己试试吧, 作者自己肯定是不会.

36. $\forall x \in \partial E, \varepsilon > 0, [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \bigcap \overline{E}$ 是完全集. 因此 $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ 中除了 E 中至多可列个点, 还有不可列个 $\overline{E}$ 中的点, 结合 ε 任意性知 ∂E 在 $\overline{E}$ 中稠密.

37. 由 P_{34} 定理 1.19(ii) 可得任意开集是 F_σ 集, 取补集得任意闭集是 G_δ 集.

38. $\forall x_0 \in [0,1]$, 若 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在, 则取点列 $\{x_n\}, x_n \to x_0$ 则有 $(x_n, f(x_n)) \to (x_0, z_0)$, 必有 $z_0 = f(x_0)$.

若 $f(x)$ 在 x_0 处极限不存在, 则存在两组点列 $\{x_n\}\{y_n\}$, $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = z_2$ 且 $z_1 \neq z_2$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, f(x_n)) = (x_0, z_1) \neq (x_0, z_2) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n, f(y_n))$ 不可能同时属于 G_f, 这与 G_f 是闭集矛盾.

39. 反证, 若 F 不为闭集, 则 $\exists x_0 \notin F, \exists \{x_n\} \subset F, x_n \to x_0$, 则令 $f(x) = \dfrac{1}{x - x_0}$ 即无法连续延拓.

40. 设 $G_A = \bigcup\limits_{x\in A}\{y : d(y,B) < \dfrac{d(x,B)}{2}\}, G_B = \bigcup\limits_{x\in B}\{y : d(y,A) < \dfrac{d(x,A)}{2}\}$. 只需注意到 $\forall x \in A, d(x,B) > 0$ 以及任意个开集的并是开集即可. 不难验证这个构造满足结论.

41. 不难验证下面这个函数满足结论:

$$\frac{d(x, F_1 \bigcup F_2) + d(x, F_1 \bigcup F_3)}{d(x, F_1 \bigcup F_2) + 2d(x, F_1 \bigcup F_3) + d(x, F_2 \bigcup F_3)}$$

注: 我配系数随手凑了一个:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{4}\left(\frac{3d(x,F_1)}{d(x,F_1) + d(x, F_2 \bigcup F_3)}\right. \\ & + \frac{d(x,F_2)}{d(x,F_2) + d(x, F_1 \bigcup F_3)} \\ & \left. - \frac{d(x,F_3)}{d(x,F_3) + d(x, F_2 \bigcup F_1)}\right) \end{aligned}$$

符合第二个条件且 $\leqslant 1$。但我证明不了满足非负也推翻不了, 希望各位能够指出这个构造的正确与否.

第二部分　习题二

1. 若 $m^*(E)>0$, 则由定义, 存在开区间 $\{J_n\}$, 使得 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J_n$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(J_n)<\dfrac{m^*(E)}{q}$.

由题设条件可知,$\forall n,\exists\{I_{n,k}\},E\cap J_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_{n,k}$, 且有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(I_{n,k})<qm(J_n)$。

对所有的 n 取并可得:$E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{n,k}$.

但 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{n,k})<q\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(J_n)<m^*(E)$, 这是不可能的.

2. 取 A_2 的等测包 G(无条件存在), 则 $m(G)=m(A_1)$, 故 $\forall T\subset\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
m^*(T\bigcap A_2)+m^*(T\bigcap A_2^c)&\leqslant m^*(T\bigcap G)+m^*(T\bigcap A_1^c)\\
&\leqslant m^*(T\bigcap G)+m^*(T\bigcap G^c)+m^*(T\bigcap A_1^c\backslash G^c)\\
(\text{由}G\text{可测})&\leqslant m^*(T)+m^*(A_1^c\backslash G^c)\\
&=m^*(T)
\end{aligned}$$

故 $m^*(T\bigcap A_2)+m^*(T\bigcap A_2^c)=m^*(T)$ 即 A_2 可测.

3. 本题可以去掉一个条件. 只需要 B 可测即可得到目标结论.

由 B 可测, 用 $A,A\bigcup B$ 做试验集可得:

$$\begin{cases}
m^*(A)=m^*(A\bigcap B)+m^*(A\bigcap B^c)\\
m^*(A\bigcup B)=m^*((A\bigcup B)\bigcap B)+m^*((A\bigcup B)\bigcap B^c)=m^*(B)+m^*(A\bigcap B^c)
\end{cases}$$

两式作差即得答案.

4. 答案是否定的.

考虑 $G=(a,b)\backslash F$ 是开集且 $m(G)=0$, 若 $\exists x_0\in G$, 则 $\exists\delta>0,(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset G$, 故 $0=m^*(G)\geqslant m^*\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\big)=2\delta$ 矛盾!

上述矛盾说明 $(a,b)\subset F$, 取闭包即得 $[a,b]=F$

5. 设 $\mathbb{Q}=\{r_n\}$, 取 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(r_n-\dfrac{1}{2^n},r_n+\dfrac{1}{2^n})$ 为开集, 则 $\mathbb{Q}\bigcap A^c=\Phi$, 且 $m(A^c)=\infty$, 且 A^c 为闭集. 故 A^c 满足条件.

6. 只需注意到 $\forall x\in[0,\dfrac{\pi}{6}],\{y\in[0,1]:\cos(x+y)\in\mathbb{Q}\}$ 可数即可.(下略)

7. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$,$m(\bigcap\limits_{n=1}^{m}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k)=m(\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}E_k)\geqslant\sup\limits_{k\geqslant m}m(E_k)$, 对 m 取极限得:

$$\lim_{m\to\infty} m(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_k) \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, m(E_k).$$

结合 $m(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k)$ 有限且 $\bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E_k$(关于 m) 单调递减可知:

$\lim\limits_{m\to\infty} m(\bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E_k) = m(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k) = m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, E_k)$, 综上可知结论成立.

8. 设 $F_k = [0,1]\backslash E_k$, 则 $m(F_k) = 0$, 则 $m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k) = 0$.

取补集得:$m([0,1]\backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k) = 1$, 即 $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$

9. 不难证明 $k \geqslant 2$ 时 $(k-1)m(\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i) + m(\bigcap\limits_{i=1}^{k} E_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} m(E_i)$, 由此立得结论.

(用 Venn 图直观理解，这个结论是显然的)

10. (本题的提示好像有点多余了)

由 $A\backslash C \subset (A\backslash B)\bigcup(B\backslash C)$ 可知:

$m(A\backslash C) \leqslant m(A\backslash B) + m(B\backslash C) \leqslant m(A \triangle B) + m(B \triangle C) = 0$ 故 $m(A\backslash C) = 0$

同理 $m(C\backslash A) = 0$, 故 $m(A \triangle C) = 0$

11. 存在有界闭集 $K \subset G, m(K) > \lambda$, 故存在有限个开球可以覆盖 K, 设 $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$

再在 $\bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ 中取直径最大者并令后继者与前者均不相交. 这种取法必定在有限次内结束. 下证这种取法满足条件.

由取法可知互不相交. 现以每一个开球的球心为中心，该球的半径的三倍为半径作球. 只需证明 K 被这组新开球覆盖即可. 否则设 x_0 未被覆盖, 则 x_0 到每个开球 $B(x_i,r_i)$ 的球心 x_i 距离大于 $3r_i$, 而由 K 可以被有限覆盖可知 x_0 在某个开球 $B(y,r)$ 中, 因 $B(y,r)$ 未被上述取法取到, 故 $B(y,r)$ 与某个 $B(x_m,r_m)$ 交非空, 并不妨设 m 是最小的与 $B(y,r)$ 相交的 $B(x_m,r_m)$ 下标. 此时有 $2r + r_m > d(y,x_m) > 3r_m$ 得到 $r > r_m$, 这与 r_m 的取法相矛盾.

12. **法一**: 取 A 的等测包 G, 则 G 可测且测度有限. 设 $B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ 则有 $m^*(E_k) =$

$m^*(A\cap B_k)\geqslant m^*(A\cap B)=m^*(E)$, 故有 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)\geqslant m^*(E)$. 同时由:

$$
\begin{aligned}
m^*(A\cap B_k) &\leqslant m^*(A\bigcap(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)) + m^*(A\bigcap(B_k\backslash\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)) \\
&\leqslant m^*(A\bigcap(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)) + m^*(G\bigcap(B_k\backslash\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)) \\
&= m^*(A\bigcap(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)) + m^*((G\bigcap B_k)\backslash\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n))
\end{aligned}
$$

而 $G\bigcap B_k$ 单调递减且可测, 又有 $m^*(G\bigcap B_1)<\infty$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*((G\bigcap B_k)\backslash\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n))=0$.

因此可以得到 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)=\lim\limits_{k\to\infty} m^*(A\cap B_k)\leqslant m^*(A\bigcap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n))=m^*(E)$

综上可知 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)=m^*(E)$

法二: 显然 $m^*(E_k)=m^*(A\cap B_k)\geqslant m^*(A\cap B)=m^*(E)$, 故有 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)\geqslant m^*(E)$. 设 $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, 则 B 可测. 取 A 的等测包 G, 则由 B 可测知:

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant m^*(G\bigcap B_k) - m^*(A\bigcap B_k) \\
(\text{由 } B_k \text{ 可测}) &= m^*(G) - m^*(G\bigcap B_k^c) - m^*(A\bigcap B_k) \\
(\text{由等测包}) &= m^*(A) - m^*(G\bigcap B_k^c) - m^*(A\bigcap B_k) \\
(\text{由 } B_k \text{ 可测}) &= m^*(A\bigcap B_k^c) - m^*(G\bigcap B_k^c) \\
&\leqslant 0
\end{aligned}
$$

故有 $m^*(G\bigcap B_k)=m^*(A\bigcap B_k)$. 同理可知这个结论对 B 也成立. 注意到 $m^*(G\bigcap B_1)<\infty$ 且 $G\bigcap B_k$ 单调递减, 故有到 $\lim\limits_{k\to\infty} m^*(E_k)=\lim\limits_{k\to\infty} m^*(A\cap B_k)=\lim\limits_{k\to\infty} m^*(G\cap B_k)=m^*((G\cap\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k))=m^*(G\bigcap B)=m^*(A\bigcap B)=m^*(E)$

13. 否则取 E 的等测包 G, 则 $H\backslash G$ 可测, 但我们可以得到:

$m^*(H\backslash G)\geqslant m^*(H)-m^*(G)=m^*(H)-m^*(E)>0$ 矛盾!

14. 必要性由 P_{80} 定理 2.13 是显然的. 下证充分性.

$\forall T\subset\mathbb{R}^n,\forall\varepsilon>0,\exists$ 开集 G_1,G_2, 使得 $E\subset G_1,E^c\subset G_2,m(G_1\bigcap G_2)<\varepsilon$. 故有:

$$\begin{aligned}
m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)&\leqslant m^*(T\cap G_1)+m^*(T\cap G_2)\\
&\leqslant m^*(T\cap G_1)+m^*(T\cap G_1^c)+m^*(T\cap G_2\backslash G_1^c)\\
(\text{由 } G_1 \text{ 可测})&\leqslant m^*(T)+m^*(G_2\backslash G_1^c)\\
&=m^*(T)+m^*(G_2\cap G_1)\\
&<m^*(T)+\varepsilon
\end{aligned}$$

由 ε 任意性可知 $m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\leqslant m^*(T)$

进而有 $m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*(T)$, 由 T 的任意性可知 E 可测.

15. 注意到 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m(E-\{x_k\})>2$ 且 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}(E-\{x_k\})\subset[-1,1]$, 故 $\exists i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ $(E-\{x_i\})\bigcap(E-\{x_j\})\neq\Phi$, 也即 $\exists y_1,y_2\in E,y_1-x_1=y_2-x_2,y_1-y_2=x_1-x_2$. 即证.

16. 否则 $\forall n\in\mathbb{N}*,\exists E_n\subset[0,1],m(E_n)\geqslant 1-\dfrac{1}{n},W\bigcap E_n$ 可测.

故有 $W\bigcap(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(W\bigcap E_n)$ 可测.

注意到 $m^*(W\bigcap([0,1]\backslash\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))=0$ 故 $W\bigcap([0,1]\backslash\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$ 可测.

此时有 $W=\left(W\bigcap([0,1]\backslash\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\right)\bigcup\left(W\bigcap(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\right)$ 可测, 矛盾!

第三部分　习题三

1. 答案是否定的，比如我们可以取一个不可测集 $G \subset \mathbb{R}^n, I = G, f_\alpha(x) = \chi_{\{\alpha\}}(x)$, 则有 $S(x) = \sup\{f_\alpha(x), \alpha \in I\} = \chi_G(x)$ 不是可测函数.

2. 注意到 $\forall t, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < t\}$ 是开集.

由 P_{34} 定理 1.19 可知, 上述开集可写成可列个半开闭方体的并.

设为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k \times J_k$

故 $\{x \in \mathbb{R} : f(g_1(x), g_2(x)) < t\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\{x \in \mathbb{R} : g_1(x) \in I_k\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g_2(x) \in J_k\})$

故 $\{x \in \mathbb{R} : f(g_1(x), g_2(x)) < t\}$ 是可测集. 由 t 任意性即证.

3. 只需注意到 $f'_+(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ 及可测函数取极限封闭即可.

4. 由 $m(E) < +\infty$ 及 f 几乎处处有限可知 $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{x : |f(x)| > k\}) = 0$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists n, m(\bigcap\limits_{k=1}^{n}\{x : |f(x)| > k\}) < \varepsilon$

故此时令 $g(x) = \begin{cases} n, f(x) > n \\ -n, f(x) < -n \\ f(x), \text{otherwise} \end{cases}$ 即可.

5. 设 $M = \{x \in A : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$, 由条件易知,$\forall \varepsilon > 0, m^*(M) < \varepsilon$ 即 $m(M) = 0$.

6. 必要性由 P_{112} 引理 3.11 显然.

充分性: 由题意易知 $\lim\limits_{j\to\infty} m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k\geqslant j}^{\infty}\{x \in E : |f_k(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}) = 0$

故 $m(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k\geqslant j}^{\infty}\{x \in E : |f_k(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}) = 0$

$\forall x \notin \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k\geqslant j}^{\infty}\{x \in E : |f_k(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}, \exists j > 0, \forall n \in \mathbb{N}*, \forall k \geqslant j, |f_k(x)| < \frac{1}{n}$ 故收敛.

故 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0 \quad (\text{a.e.} x \in E)$

7. $\forall n \in \mathbb{N}*$, 由 Eropob 定理 (俄文我打不出来),$\exists E_n \subset [a,b], m([a,b]\backslash E_n) < \frac{1}{n}, f_k(x)$ 在 E_n 上一致收敛.

此时显然也有 $m([a,b]\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$

8. $\forall\varepsilon>0$, 由依测度收敛的定义可知

$\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|>\dfrac{\varepsilon}{2}\})=0, \lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in E:|g_n(x)-g(x)|>\dfrac{\varepsilon}{2}\})=0$

注意到 $\{x\in E:|f_n(x)+g_n(x)-g(x)-f(x)|>\varepsilon\}\subset$

$\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|>\dfrac{\varepsilon}{2}\}\bigcup\{x\in E:|g_n(x)-g(x)|>\dfrac{\varepsilon}{2}\}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in E:|f_n(x)+g_n(x)-g(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$, 即证.

9. 必要性: 若 $f_k(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$, 故 $\forall\alpha>0,\exists N,\forall n>N, m(\{x\in E:,|f_k(x)-f(x)|>\alpha\})<\alpha$

故有:$\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E:,|f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{\alpha>0}\{2\alpha\}=0.$

必要性得证.

充分性反证: 否则 $\exists\varepsilon, \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, m(\{x\in E:,|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}=\delta>0$

$\alpha\geqslant\varepsilon$ 时,$\alpha+m(\{x\in E:,|f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\geqslant\varepsilon$

$\alpha<\varepsilon$ 时,$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\big(\alpha+m(\{x\in E:,|f_k(x)-f(x)|>\alpha)\}\big)\geqslant\delta,$

故 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E:,|f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}\geqslant\min\{\varepsilon,\delta\}>0$ 矛盾!

10. 反证:$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x_0)\neq f(x_0), \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x_0)\neq f(x_0)$ 至少有一个成立. 不妨设前者成立.

若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x_0)<f(x_0)$, 由 $f(x)$ 在 x_0 处连续可知,$\exists\delta>0,\varepsilon>0,\forall x_0-\delta<x<x_0, f(x)>\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x_0)+2\varepsilon$

由下极限定义可知,$\forall N>0,\exists k>N, f_k(x_0)<\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x_0)+\varepsilon$

结合 $f_k(x_0)$ 单调递增 $f_k(x)<\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x)+\varepsilon\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x_0)+\varepsilon<f(x)-\varepsilon$

故 $m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})>\delta$, 与 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$ 矛盾.

同理, 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x_0)>f(x_0)$, 考虑区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 即可 (略)

注: 本题实际上可以得到 $f_n(x)\to f(x)$,a.e.$x\in[0,1]$, 方法是首先可得一个子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 容易得到除去一个零测集外,$f(x)$ 单调, 所以 $f(x)$(在除去这个零测集后的定义域内) 几乎处处连续, 此时再由本题结论可知到 $f_n(x)\to f(x)$,a.e.$x\in[0,1]$.

11. 本题是 14 题的特例, 请参考 14 题证明.

12. $\forall\varepsilon>0,\{x\in E:|f_k(x)g_k(x)|>\varepsilon\}\subset\{x\in E:|f_k(x)|>\varepsilon\}\bigcup\{x\in E:|g_k(x)|>1\}$

且显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in E:|g_k(x)|>1\})=0, \lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in E:|f_k(x)|>\varepsilon\})=0$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in E:|f_k(x)g_k(x)|>\varepsilon\})=0$, 即证.

13. $\forall\delta_0>0$, 由 $f(x)$ 几乎处处有限及 $m([a,b])<+\infty$ 可知:

$\exists M>0, m(\{x\in[a,b]:|f(x)|>M\})<\delta_0$,

注意到 g 在 $[-2M,2M]$ 上一致连续, 故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall|x_1-x_2|<\delta$ 且 $-2M<x_1,x_2<2M$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} m(\{x\in[a,b]:|g(f_k(x))-g(f(x))|>\varepsilon\})\\
\leqslant& m(\{x\in[a,b]:|f(x)|>M\})+\\
&\lim_{n\to\infty} m(\{x\in[a,b]:|f(x)|\leqslant M,|g(f_k(x))-g(f(x))|>\varepsilon\})\\
\leqslant&\delta_0+\lim_{n\to\infty} m(\{x\in[a,b]:|f(x)|<M,|f_k(x)-f(x)|>\delta\})\\
=&\delta_0
\end{aligned}
$$

由 δ_0 任意性可知 $\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x\in[a,b]:|g(f_k(x))-g(f(x))|>\varepsilon\})=0$

由 ε 任意性,$g(f_k(x))$ 依测度收敛于 $g(f(x))$.

结论对 $[0,+\infty)$ 不成立.

取 $f_k(x)=x+\dfrac{1}{k}, f(x)=x, g(x)=x^2$, 即可.

14. $\forall\varepsilon>0,\exists F, m(E\backslash F)<\varepsilon$ 且 $f\in C(F)$.

此时 $\forall T\subset\mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
&m^*(\{x\in E:f(x)<t\}\bigcap T)+m^*(\{x\in E:f(x)<t\}^c\bigcap T)\\
\leqslant& m^*(\{x\in F:f(x)<t\}\bigcap T)+\varepsilon+m^*(\{x\in E:f(x)<t\}^c\bigcap T)\\
\leqslant& m^*(\{x\in F:f(x)<t\}\bigcap T)+\varepsilon+m^*(\{x\in F:f(x)<t\}^c\bigcap T)\\
&(\text{注意到}\{x\in F:f(x)<t\}\text{可测})\\
=&m^*(T)+\varepsilon
\end{aligned}
$$

由 ε 任意性可知:

$m^*(\{x\in E:f(x)<t\}\bigcap T)+m^*(\{x\in E:f(x)<t\}^c\bigcap T)=m^*(T)$

即 $\{x\in E:f(x)<t\}$ 是可测集，再由 t 任意性可得 $f(x)$ 是可测函数.

15. 只需注意到存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$ 即可.

16. $\forall\delta>0$ 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n},\exists j_n\in\mathbb{N}, m(\bigcup\limits_{k=j_n}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\dfrac{1}{n}\})<\dfrac{\delta}{2^n}$

对 n 取并集可知 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j_n}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\dfrac{1}{n}\})<\delta$, 设这个集合为 e

此时 $\forall \varepsilon > 0, \exists n, \varepsilon > \dfrac{1}{n}$, 此时 $\forall k > j_n, \forall x \in E \backslash e, |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, 即证.

第四部分　习题四

1. 设 $E_n=\{x\in E:f(x)>\dfrac{1}{n}\}$, 则有 $m(E)=m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)$ 且 $E_n\subset E$, 故 $\forall n\in\mathbb{N}*$

$$0=\int_E f(x)dx\geqslant\int_{E_n}f(x)dx\geqslant\frac{1}{n}m(E_n)$$

所以 $m(E_n)=0$, 故有 $m(E)=m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=0$

2. 由 $f'(0)$ 存在可知 $\exists\delta>0,\forall x\in[0,\delta),f(x)<(f'(0)+1)x$, 故有:

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty)}\frac{f(x)}{x}dx&=\int_{[0,\delta)}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{[\delta,+\infty)}\frac{f(x)}{x}dx\\&\leqslant\int_{[0,\delta)}(f'(0)+1)dx+\frac{1}{\delta}\int_{[\delta,+\infty)}f(x)dx<+\infty\end{aligned}$$

由此即得结论.

3. 令 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k,f_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)$ 则 $m(E\backslash F)=0,f_k(x)\to f(x)$a.e.$x\in E$

由 Riesz 定理, 存在子列 $\{f_{k_n}\}$,$\lim_{n\to\infty}f_{k_n}(x)=f(x)$,a.e.$x\in E$

由 Fatou 引理,$\displaystyle\int_F f(x)dx=\int_F\lim_{n\to\infty}f_{k_n}(x)dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_F f_{k_n}(x)dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{E_{k_n}}f(x)dx$

由极限 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)dx$ 存在知 $\displaystyle\int_F f(x)dx<+\infty$.

结合 $m(E\backslash F)=0$ 可知 $\displaystyle\int_E f(x)dx=\int_{E\backslash F}f(x)dx+\int_F f(x)dx<+\infty$

4. 注意到 $F(x)$ 非负且单调递增.

若 $\exists x_0,F(x_0)>0$, 则 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}F(x)dx\geqslant\int_{(x_0,+\infty)}F(x)dx=+\infty$ 与 $F(x)\in L(\mathbb{R})$ 矛盾.

故有 $F(x)\equiv0$, 立得 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=0$

5. 只需证明:$f_k(x)\leqslant f(x)$,a.e.$x\in\mathbb{R}^n$, 而这个由条件反证是显然的.

(剩下的就是体力活了

否则 $\exists E_0\subset\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{N}*,m(E_0)>0,\forall x\in E_0,f_k(x)>f_{k+1}(x)$.

故 $\exists n>0,m(\{x\in E_0:f_k(x)-f_{k+1}(x)>\dfrac{1}{n}\})>0$, 设这个集合为 F, 则:

$$\int_F f_k(x)dx > \int_F f_{k+1}(x)dx - \frac{m(F)}{n}$$

与条件矛盾.

再由 P_{135} 定理 4.4 可得目标结论.

6.

$$\int_E f(x)dx \int_E g(x)dx \geqslant \left(\int_E \sqrt{f(x)g(x)}dx\right)^2 \geqslant \left(\int_E dx\right)^2 = m^2(E) = 1$$

7. 由条件可知,$\forall n \in \mathbb{N}*, \exists g_n(x), h_n(x) \in L(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x)$$

且

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h_n(x) - g_n(x))dx < \frac{1}{n}$$

并不妨设 $g_n(x)$ 关于 n 单调递增 (否则令 $g_n(x) = \max\{g_n(x), g_{n-1}(x)\}$)

$\frac{1}{n} \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} (h_n(x) - g_n(x))dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - g_n(x))dx$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g_n(x)|dx = 0$

故 $g_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$, 故存在子列 $\{g_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 再结合 $|g_n(x)| \leqslant |h_1(x)| + |g_1(x)|, \forall n$ 且 $|h_1(x)| + |g_1(x)| \in L(\mathbb{R}^n)$ 并由控制收敛定理 (P_{154}) 即得:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_{n_k}(x)dx$$

综上即证.

8. 我们先声明一个命题:$m(\{x \in \mathbb{R}^n : (f(x) - 1)(f(x) - 0) \neq 0\}) = 0$

由这个命题立得结论.

我们可以写成 $\{x \in \mathbb{R}^n : (f(x) - 1)(f(x) - 0) \neq 0\} =$

$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\} \bigcup \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < f(x) < 1\} \bigcup \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 1\}$

若 $m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}) > 0, \exists k \in \mathbb{N}*, m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < -\frac{1}{k}\}) > 0$, 设为 A 则 $\forall$ 可测集 E 有:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E(x) - f(x)|dx \geqslant \int_A |\chi_E(x) - f(x)|dx \geqslant \int_A |f(x)|dx \geqslant \frac{m(A)}{k} > 0$$

与条件矛盾. 同理可证明另外那两个集合测度为 0. 即证.

注:$\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < f(x) < 1\} = \bigcup_{k=2}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{k} < f(x) < 1 - \frac{1}{k}\}$

9. 设 $A = [0,t] \backslash E, B = [0,t] \cap E, C = E \backslash [0,t]$

则有 $\int_E f(x)dx = \int_B f(x)dx + \int_C f(x)dx \geqslant \int_B f(x)dx + \int_C f(t)dx = \int_B f(x)dx + \int_A f(t)dx \geqslant \int_B f(x)dx + \int_A f(x)dx = \int_{[0,t]} f(x)dx$

10. 由 $f \in L(\mathbb{R}^n)$ 知,$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,R)} |f(x)|dx < \varepsilon$

由 E 是紧集知, 此时 $\exists R_2, \forall |y| > R_2, E + \{y\} \bigcap B(0,R) = \Phi,$

此时即有 $\int_{E+\{y\}} |f(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(0,R)} |f(x)|dx < \varepsilon$, 即证.

11. (1) 设 $f_n(x) = x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nx} (> 0)$, 则 $\int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$

则有 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,+\infty)} |f_n(x)|dx < +\infty$ 由 P_{160}. 推论 4.16 可知:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(0,+\infty)} \frac{x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x - 1} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(0,+\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

(2) 设 $f_n(x) = \sin ax \mathrm{e}^{-nx}$, 则 $\int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx = \frac{a}{a^2+n^2}$

则有 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,+\infty)} |f_n(x)|dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,+\infty)} ax\mathrm{e}^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2} < +\infty$

由 P_{160} 推论 4.16 可知:

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{\sin ax}{\mathrm{e}^x - 1} dx = \int_{(0,+\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$$

12. 注意到:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{[0,a]} \left| f(\frac{x}{a} + n) \right| dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \int_{[n,n+1]} |f(x)|dx = \frac{1}{a} \int_{(-\infty,+\infty)} |f(x)|dx < +\infty$$

故 $\int_{[0,a]} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f(\frac{x}{a} + n) \right| dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{[0,a]} \left| f(\frac{x}{a} + n) \right| dx < +\infty$

故 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(\frac{x}{a} + n)| < +\infty$,a.e.$x \in [0,a]$, 又显然是以 a 为周期的周期函数. 故对 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立, 也即几乎处处绝对收敛.

由上述证明也可知 $\int_{[0,a]}|S(x)|dx<+\infty$ 故 $S(x)\in L([0,a])$ 且 $S(x)$ 以 a 为周期.

13. 设 $f_n(x)=\dfrac{f(nx)}{n^p}$, 则 $\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|dx=\dfrac{\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx}{n^{p+1}}$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|dx<+\infty$

故有 $\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|dx<+\infty$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$,a.e.$x\in\mathbb{R}$

故有 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(nx)}{n^p}=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$,a.e.$x\in\mathbb{R}$

14. 不妨设 $f(x)\geqslant 0$, 否则可设 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$, 证明方法相同.

注意到 $x^uf(x)\leqslant x^sf(x)+x^tf(x)\in L((0,\infty))$ 故 $x^uf(x)\in L((0,\infty))$

现固定 $u\in(s,t)$, 则 $\int_{(0,\infty)}(x^{u+\Delta u}-x^u)dx=\int_{(0,1)}(x^{u+\Delta u}-x^u)dx+\int_{(1,\infty)}(x^{u+\Delta u}-x^u)dx$

注意到 $x\in(0,1)$ 时 $x^u(x^{\Delta u}-1)$ 一致收敛于 $0(\Delta u\to 0)$.

故 $\lim_{\Delta u\to 0}\int_{(0,1)}(x^{u+\Delta u}-x^u)dx=0$

注意到 $x\in(1,+\infty)$ 时 $(x^{u+\Delta u-t}-x^{u-t})$ 一致收敛于 $0(\Delta u\to 0)$ 及 $x^tf(x)\in L((1,+\infty))$

故 $\lim_{\Delta u\to 0}\int_{(1,+\infty)}x^tf(x)(x^{u+\Delta u-t}-x^{u-t})dx=0$

综合上述结论, $\lim_{\Delta u\to 0}\int_{(0,+\infty)}\Big(f(x)x^{u+\Delta u}-f(x)x^u\Big)dx=0$, 故连续.

15. 首先证明 $m(\{x\in(0,1):f(x)>1\})=0$, 证明过程同第 8 题.

此时 $0\leqslant 1-f(x)^n$ 且关于 n 单调递增, 由 P_{135} 定理 4.4(Levi 引理) 可知:

$$1-c=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)}(1-f(x)^n)dx=\int_{(0,1)}\lim_{n\to\infty}(1-f(x)^n)dx=1-m(\{x\in(0,1):f(x)=1\})$$

在条件中取 $n=1$ 得 $\int_{(0,1)}f(x)dx=c=m(\{x\in(0,1):f(x)=1\})$ 即有:

$$m(\{x\in(0,1):0<f(x)<1\})=0$$

由此即得结论.

另外, 去掉 $f(x)$ 非负这一条件后, 设 $g(x)=f(x)^2$, 则 $g(x)$ 非负且满足:

$$\int_{(0,1)}g(x)^ndx=c,\forall n\in\mathbb{N}*$$

所以设 $g(x)=\chi_E(x)$, 再由 $\int_{(0,1)}(g(x)-f(x))dx=0$ 易得 $f(x)=g(x)$,a.e.$x\in(0,1)$

16. 只需注意到 $n\ln(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2})\leqslant n\frac{|f(x)|}{n}=|f(x)|$, 再由控制收敛定理即得结论.

17. $\displaystyle\int_{E_k}f(x)dx=\int_{E_1}f(x)\chi_{E_k}(x)dx=:\int_{E_1}f_k(x)dx$ 则 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\chi_E(x)$,a.e.$x\in E_1$

显然 $|f_k(x)|\leqslant|f_1(x)|\in L(E_1)$, 故由控制收敛定理得:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{E_1}f_k(x)dx=\int_{E_1}\lim_{k\to\infty}f_k(x)dx=\int_{E_1}f(x)\chi_E(x)dx=\int_E f(x)dx$$

18. 当 $m(E)<+\infty$ 时, 由 $f\in L(E)$,

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta\in(0,1),m(\{x\in E:\delta<f(x)<\frac{1}{\delta}\})>m(E)-\varepsilon.$

设这个集合为 A, 则 $\forall 0<a<1<b<+\infty$,$\exists N,k>N$ 时 $\forall x\in A,a<f(x)^{\frac{1}{k}}<b$ 故 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x)^{\frac{1}{k}}=1,x\in A$, 由 ε 任意性, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x)^{\frac{1}{k}}=1$,a.e.$x\in E$

结合 $f(x)^{\frac{1}{k}}\leqslant\max\{f(x),1\}\leqslant f(x)+1\in L(E)$ 并由控制收敛定理可知:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E(f(x))^{\frac{1}{k}}dx=\int_E\lim_{k\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{k}}dx=m(E)$$

综上可得结论对 $m(E)<+\infty$ 时成立.

$m(E)=+\infty$ 时, 上式对 E 的任意测度有限的子集成立. 故

$$\lim_{k\to\infty}\int_E(f(x))^{\frac{1}{k}}dx>M,\forall M>0$$

由此即得结论.

19. 本题条件给少了一条，需要加上条件:$f\in L([0,1])$, 否则有反例:$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n}\\ \frac{1}{1-x},1-\frac{1}{n}<x<1-\frac{1}{n^2}\\ 0,\text{otherwise}\end{cases}$$

此时显然有 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)dx=+\infty=\int_{[0,1]}f(x)dx$$

但取 $E=[\frac{1}{2},1]$,$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_E f_n(x)dx=+\infty>\int_E f(x)dx$, 与条件矛盾.

接下来在加上这个条件的情况下证明这个命题.

$\forall\varepsilon>0$, 设 $E_n=\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=1$

此时 $\displaystyle\int_{[0,1]}(f_n(x)-f(x))dx=\int_{E_n}(f_n(x)-f(x))dx+\int_{[0,1]\setminus E_n}(f_n(x)-f(x))dx$

由左侧极限为 0 且 $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_{E_n}(f_n(x)-f(x))dx\right|<\varepsilon$ 可知:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_{[0,1]\setminus E_n}(f_n(x)-f(x))dx\right|<\varepsilon$$

由积分的绝对连续性可知:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]\setminus E_n}f(x)dx=0$$

故有:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_{[0,1]\setminus E_n}f_n(x)dx<\varepsilon$$

下面这个式子是显然的:

$$\int_E(f_n(x)-f(x))dx=\int_{E\cap E_n}(f_n(x)-f(x))dx+\int_{E\cap E_n^c}(f_n(x)-f(x))dx$$

由前述易知:$\displaystyle\int_{E\cap E_n}|f_n(x)-f(x)|dx<\varepsilon$, 且有:

$$\int_{E\cap E_n^c}|f_n(x)-f(x)|dx<\int_{E\cap E_n^c}f_n(x)dx+\int_{E\cap E_n^c}f(x)dx$$

注意到 $\displaystyle\int_{E\cap E_n^c}f_n(x)dx<\varepsilon,\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap E_n^c}f(x)dx=0$

所以 $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_E(f_n(x)-f(x))dx\right|<2\varepsilon$, 由 ε 任意性即得结论.

20. 设 $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{f_k(x)\}=g_n(x)$, 则 $g_n(x)$ 关于 n 递增. 且 $\displaystyle\int_E g_n(x)dx\leqslant M$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$, 由 P_{135} 定理 4.4(Levi 引理) 可知

$$\int_E g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx\leqslant M$$

故有 $g(x)\in L(E)$, 此时由 $|f_k(x)|\leqslant g(x)$ 并由控制收敛定理即得:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=0$$

21. 只考虑 $m(E)<+\infty$ 的情况，否则 E 可写为可列个两两不交的测度有限区间的并.

若 $f\in L(E)$,$\forall\varepsilon>0$, 设 $E_n=\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=m(E)$, 因此:

$$\begin{aligned}\int_E(f(x)-f_n(x))dx&=\int_{E_n}(f(x)-f_n(x))dx+\int_{E\setminus E_n}(f(x)-f_n(x))dx\\&<\varepsilon m(E)+\int_{E\setminus E_n}f(x)dx\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $f_n(x)\geqslant 0$.

由 $f\in L(E)$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E\setminus E_n}f(x)dx=0$. 结合 ε 任意性可知:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E(f(x)-f_n(x))dx\leqslant 0$$

故有:

$$\int_E f(x)dx\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx$$

当 $\int_E f(x)dx=+\infty$ 时, 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=+\infty$

注意到 $f(x)\geqslant 0$,a.e.$x\in E$ 且下列结论由 Lebesgue 积分定义, 是显然的:

$$\forall M>0,\exists\delta>0,\forall m(E\setminus A)<\delta\text{且}A\subset E,\text{有}\int_A f(x)dx>M$$

$f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$,$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,m(\{x\in E:|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\})<\delta$

此时有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx>M-\varepsilon m(E)$ 由 M,ε 任意性即得结论.

22. 略.

23. 同第 5 题可知 $f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)$,a.e.$x\in\mathbb{R}^n$ 可得 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$ 几乎处处存在 ($+\infty$ 也视为存在). 设 $g(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$

由 5 结论知 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E g(x)dx$

故 $\int_E(f(x)-g(x))dx=0$ 对任意 $E\subset\mathbb{R}^n$ 成立.

故有 $f(x)=g(x)$,a.e.$x\in\mathbb{R}^n$ 即 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,a.e.$x\in\mathbb{R}^n$

24. 注意到 $|f_k(x)-f(x)|\leqslant g(x)+g_k(x)$

由 P_{139}Fatou 引理可知:

$$\begin{aligned}&\varliminf_{k\to\infty}\int_E (g_k(x)+g(x)-|f_k(x)-f(x)|)dx\\ \geqslant&\int_E \lim_{k\to\infty}\left(g_k(x)+g(x)-|f_k(x)-f(x)|\right)dx=2\int_E g(x)dx\end{aligned}$$

注意到 $\varliminf_{k\to\infty}\int_E (g_k(x)+g(x))dx=2\int_E g(x)dx$

故有 $\varlimsup_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|)dx\leqslant 0$, 故等号成立.

此时即有 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$

25. 由条件知 D 的极限点只有可列个，故 D 只有可列个点. 故 $m(D)=0$

故有 $\int_{[a,b]} w_f(x)dx=\int_D w_f(x)dx=0$. 故 $f(x)$ 黎曼可积.

26. 由条件可得 $w_f(x)=0$,a.e.$x\in\mathbb{R}$ 故对任意 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 黎曼可积.

27. 只需注意到 $\{x:w_{\chi_E}(x)=1\}=\overline{E}\backslash\mathring{E}$ 即可.

28. 由 $f\in R([0,1])$ 可得 f 有界. 设 $|f|\leqslant M$

由 $\int_{[0,1]} f(x^2)dx=\int_{[0,1]}\frac{f(x)}{2\sqrt{x}}dx$, 设 $g(x)=\frac{f(x)}{2\sqrt{x}}$, 则 $w_g(x)=\frac{w_f(x)}{2\sqrt{x}}$.

则有 $|w_f(x)|\leqslant 2M$. 此时 $\forall\delta>0$

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} w_g(x)dx&=\int_{(0,\delta)} w_g(x)dx+\int_{(\delta,1)} w_g(x)dx\\ &\leqslant\int_{(0,\delta)}\frac{2}{\sqrt{x}}\dot{2}Mdx+\int_{(\delta,1)}\frac{2}{\delta}w_f(x)dx\\ &\leqslant 2M\sqrt{\delta}+\frac{2}{\delta}\int_{[0,1]} w_f(x)dx\\ &=2M\sqrt{\delta}\end{aligned}$$

由 δ 任意性, 可得 $\int_{[0,1]} w_g(x)dx=0$, 即证.

29. 由 $f(x)+g(y)\in L(R\times R)$, 由 P_{181}Fubini 定理知, 对于几乎处处 $x, f(x)+g(y)$ 在 $y\in E$ 可积.

此时有 $\int_E (f(x)+g(y))dy=m(E)f(x)+\int_E g(y)dy$ 故必有 $g(y)\in L(E)$

同理有 $f(x)\in L(E)$.

30. (1) 注意到 $\dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ 非负可测, 由 P_{178}Tonelli 定理知:

$$\begin{aligned}\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} &= \int_{y>0}\left(\int_{x>0}\frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)}\right)dy\\ &= \int_{y>0}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}dy = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

(2) 注意到 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx = \int_{+\infty}^1\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}d\frac{1}{x} = \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx &= 2\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}dx = -2\int_0^1\ln x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}dx\\ &= -2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

31. 设 $g(x,t)=f(x-t)\chi_E(t)$ 非负可测, 由 P_{178}Tonelli 定理可知:

$$\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}g(x,t)dt)dx = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}g(x,t)dx)dt = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}f(x)\chi_E(t)dx)dt = m(E)\int_{\mathbb{R}}f(x)dx$$

结合 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}g(x,t)dt)dx = \int_{\mathbb{R}}F(x)dx < +\infty$ 和 $m(E)<+\infty$ 可知:

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)dx < +\infty$, 即 $f\in L(\mathbb{R})$

32. 由 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)dx = 0$ 可知,$\forall t$, $\displaystyle\left|\int_{(-\infty,t)}f(x)dx\right| = \left|\int_{(t,+\infty)}f(x)dx\right|$

此时

$$\int_{\mathbb{R}}|F(x)|dx = \int_{(-\infty,0)}\left|\int_{(-\infty,x)}f(t)dt\right|dx + \int_{(0,+\infty)}\left|\int_{(x,+\infty)}f(t)dt\right|dx$$

设 $g(t)=|tf(t)|$, 则 $g(t)\in L(\mathbb{R}), g(t)\geqslant 0$. 由 P_{181}Fubini 定理知:

有

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)}\left|\int_{(x,+\infty)}f(t)dt\right|dx &\leqslant \int_{(0,+\infty)}\left(\int_{(x,+\infty)}\frac{g(t)}{t}dt\right)dx\\ &= \int_{(0,+\infty)}\left(\int_{(0,t)}\frac{g(t)}{t}dx\right)dt = \int_{(0,+\infty)}g(t)dt < +\infty\end{aligned}$$

同理 $\int_{(-\infty,0)}\left|\int_{(-\infty,x)}f(t)dt\right|dx<+\infty$

故有 $\int_{\mathbb{R}}|F(t)|dt<+\infty$ 即 $F\in L(\mathbb{R})$

33. 设 $f_n(x)=\cos x\arctan nx$ 则 $f_n(x)$ 非负且关于 n 单调. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\cos x$, 故有:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\arctan nxdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1$$

34. 当 $f(t)\geqslant 0$ 时,$\dfrac{f(t)}{t}\chi_{\{t:t>x\}}(t)$ 非负可测, 由 P_{178}Tonelli 定理知:

$$\begin{aligned}\int_0^a g(x)dx&=\int_0^a(\int_0^a\frac{f(t)}{t}\chi_{\{t:t>x\}}(t)dt)dx=\int_0^a(\int_0^t\frac{f(t)}{t}dx)dt\\&=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$

对于一般情况，只需考虑 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ 即可.

第五部分　习题五

由于本部分的部分习题过难, 作者自己也不会, 或者用了一些很困难的结论, 所以这些题目的答案就不写了.

这些很困难的结论 (看看就好) 包括:

$\frac{d\bigvee_a^x(f)}{dx}=f'(x)$; 处处可微的函数必定绝对连续.

1.

2. 令 $f_n(x)=\dfrac{\chi_{\{x>x_n\}}}{2^n},f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$. 由柯西收敛准则知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处有定义, 由 $f_n(x)$ 均递增可知 $f(x)$ 递增.

(若要严格递增, 只需设 $g(x)=f(x)+x$ 即可)

3. 注意到 $f'(x)$ 几乎处处存在. 故若结论不成立, 则 $\exists\delta_0>0,\varepsilon_0>0,m(\{x\in E:f'(x)>\delta_0\})>\varepsilon_0$, 设这个集合为 F, 则 $\forall(a_i,b_i)\in(a,b)(i=1,2,\cdots)\&\bigcup\limits_i(a_i,b_i)\supset E$,, 有 $\bigcup\limits_i(a_i,b_i)\supset F$, 故有 $\sum\limits_i[f(b_i)-f(a_i)]>\varepsilon_0\delta_0$, 令 $\varepsilon=\varepsilon_0\delta_0$ 即得矛盾.

4. 先证明一个结论:

引理 1 若 $g(x)$ 单调递增, 则 $F(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$ 在 $x>0$ 时单调递增.

证明 $\forall 0 < x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} F(x_2)-F(x_1) =& \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2} g(x)dx - \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1} g(x)dx \\ =& \frac{1}{x_2}\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx - \frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\int_0^{x_1} g(x)dx \\ \geqslant& \frac{1}{x_2}\int_{x_1}^{x_2} g(x_1)dx - \frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\int_0^{x_1} g(x)dx \\ \geqslant& \frac{x_2-x_1}{x_2}g(x_1) - \frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\int_0^{x_1} g(x)dx \\ \geqslant& \frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\int_0^{x_1}(g(x_1)-g(x))dx \\ \geqslant& 0 \end{aligned}$$

即证 □

由 $f(x) \in BV([0,a])$ 设 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, 其中 $f_i(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增 $(i=1,2)$ 故 $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_1(t)dt - \frac{1}{x}\int_0^x f_2(t)dt$ 是两个递增函数的差, 即得 $f(x) \in BV([a,b])$.

5. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 可知,$\forall a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = b, \exists N, \forall n > N, \forall i \in \{0,1,\cdots,m+1\}, |f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{m+1}$

故有 $\sum\limits_{i=0}^{m} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \sum\limits_{i=0}^{m} |f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| + \varepsilon \leqslant \bigvee\limits_a^b f_n(x) + \varepsilon \leqslant M + \varepsilon$

由 ε 任意性可知结论成立.

6. 由 $f(x) \in BV([a,b])$ 可知存在递增函数 $f_1(x), f_2(x), f(x) = f_1(x) - f_2(x)$

设 $g_1(x) = \begin{cases} f_1(x), a \leqslant x < x_0 \\ \lim\limits_{t\to x_0-} f(t), x = x_0 \\ f_1(x) - \lim\limits_{t\to x_0+} f(t) + \lim\limits_{t\to x_0-} f(t), x > x_0 \end{cases}$, 则 $g_1(x)$ 显然 $g_1(x)$ 单调递增且在 x_0 处连续.

设 $g_2(x) = f(x) - g_1(x)$, 注意到 $x > x_0$ 时 $g_2(x)$ 单调递增,$x < x_0$ 时 $g_2(x)$ 单调递增, 且 x_0 处 $g_2(x)$ 连续, 故有 $g_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增.

此时 $g_1(x), g_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增且在 x_0 处连续, 故 $\bigvee\limits_a^x (f_1), \bigvee\limits_a^x (f_2)$ 在 x_0 处连续, 故有 $\bigvee\limits_a^x (f)$ 在 x_0 处连续.

7.

8. 由 $|\int_a^b f(x)dx|^2 \leqslant (g(b)-g(a))(b-a)$ 可知:

$$|\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}|^2 \leqslant \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

固定 a 并令 $b \to a$ 可得:$f^2(x) \leqslant g'(x)$, a.e.

由 $\int_a^b g'(x)dx \leqslant g(b)-g(a)$ 知 $g'(x) \in L([a,b])$ 故 $f^2(x) \in L([a,b])$

9. 首先，$[a,b]$ 上得绝对连续函数必定有界, 设 $f(x) \leqslant M$, 故 $\forall x_1, x_2 \in [a,b], |f^p(x_1) - f^p(x_2)| \leqslant pM^{p-1}|f(x_1) - f_(x_2)|$ 由此及绝对连续函数的定义, 立得结论.

10. $\forall x \in [a,b], \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(x) + f(x) - f(a) \geqslant \int_a^x f'(t)dt + \int_x^b f'(t)dt = \int_a^b f'(t)dt$, 故等号必定取到, 故有 $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$. 故 $f(x) \in AC([a,b])$.

11.

12.

13.

14. 由 $f'_y(x,y) \in L([a,b]\times[c,d])$ 及 $Fubini$ 定理可知:

$\int_c^y (\int_a^b f'_y(x,t)dx)dt = \int_a^b (\int_c^y f'_y(x,t)dt)dx = \int_a^b (\int_c^y f'_y(x,t)dt)dx = \int_a^b (f'_y(x,y) - f'_y(x,c))dx = F(y) - F(c)$

故有 $F(y) \in AC([c,d])$ 且有 $F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dt$

15.

16. $f(x) = |x|$

17. 注意到 $|g'_k(x)| \leqslant F(x) \in L(E)$, 由控制收敛定理:

$$g(x) - g(a) = \lim_{k\to\infty}(g_k(x) - g_k(a)) = \lim_{k\to\infty}\int_a^x g'_k(t)dt = \int_a^x \lim_{k\to\infty} g'_k(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

故有 $g'(x) = f(x)\text{a.e.}x \in [a,b]$.

18.

19. 只需注意到 $\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in [a,b], |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| \leqslant L|g(x_1) - g(x_2)|$ 即可.

第六部分 习题六

由于本部分的部分习题过难, 且作者水平有限, 学习进度不足, 所以大部分题目的答案就不写了.

1.

2.

3.

4. 由赫尔德不等式:

$$\begin{aligned} g^2(x) &= (\int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt)^2 \leqslant \int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt \int_0^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt \\ &= (2\sqrt{x}+2\sqrt{1-x})\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt \leqslant 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dt, \end{aligned}$$

代入目标式即有:

$$\int_0^1 g^2(x)dx \leqslant 2\sqrt{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{f^2(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dtdx = 2\sqrt{2}\int_0^1 f^2(t)dt\int_0^1 \frac{1}{|x-t|^{\frac{1}{2}}}dx \leqslant 8\int_0^1 f^2(t)dt$$

开平方即得结论.

5. 若存在, 则在 L^2 空间中,$d(f(x),\sin x) \leqslant \frac{2}{3}, d(f(x),\cos x) \leqslant \frac{1}{3}$, 但 $d(\sin x,\cos x) = \sqrt{\pi}$, 与三角不等式矛盾.

6. 由赫尔德不等式:

$$\int_x^{x+h} |f(t)|dt \leqslant (\int_x^{x+h} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}(\int_x^{x+h} dt)^{\frac{1}{p'}} = (\int_x^{x+h} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}|h|^{\frac{1}{p'}}$$

由 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 可知 $\lim\limits_{h\to 0}(\int_x^{x+h} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = 0$

即有 $\dfrac{\int_x^{x+h} |f(t)|dt}{|h|^{\frac{1}{p'}}} \to 0, h \to 0$

结合 $|F(x+h)-F(x)| \leqslant \int_x^{x+h} |f(t)|dt$ 即得:

$|F(x+h)-F(x)| = o(|h|^{\frac{1}{p'}})$

7. 注意到 $||g_k(x)||_q = 1$ 由赫尔德不等式:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)f(x)dx = \int_{E_k} g_k(x)f(x)dx \leqslant ||g_k(x)||_q(\int_{E_k} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} = (\int_{E_k} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

结合 $m(E_k) \to 0, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 即得:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)f(x)dx = 0$$