实变函数笔记

阙嘉豪

最后编译时间: 2019 年 7 月 14 日 23:07

前言

本笔记以刘永平老师的实变函数课板书记录, 修改而成. 使用的教材是王昆杨老师的《实变函数论讲义》, 笔记中提到的“书上”指的是此书. 以前的笔记记在了纸上, 所有 ????? 处都是我没弄懂或者有错误的地方.

目录

第一章 用开集刻画可测集 **1**

第二章 可测函数 **3**

第三章 可测函数的结构 **9**

§3.1 紧集上连续函数的延拓 9

§3.2 一致收敛, 几乎处处收敛, 依测度收敛关系 11

§3.3 Лузин 定理 14

第四章 Lebesgue 积分及其基本理论 **17**

§4.1 Lebesgue 积分的定义及基本性质 17

§4.2 积分号下取极限 22

§4.3 把多重积分化为累次积分 28

§4.4 Riemann 积分与 Lebesgue 积分关系 32

§4.5 Lebesgue 积分小结 34

第五章 一元函数的变化性态 **35**

§5.1 单调函数可微性 35

§5.2 有界变差函数 39

§5.3 绝对连续函数 41

§5.4 Cantor 集与 Cantor 函数 44

5.4.1 Cantor 集的构造 44

5.4.2 Cantor 函数 45

§5.5 一些例子 46

第一章　用开集刻画可测集

定理 1.1 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. E 可测当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \subset E$, 使得 $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$.

证明 必要性.

设 E 可测. $m(E) < \infty$ 时, 由测度定义 $m(E) = m^*(E)$, 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在可数个方块 Q_k, 使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \supset E, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m(E) + \varepsilon.$$

令 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, 则 G 是开集, 满足

$$G \supset E, \quad m(G) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m(E) + \varepsilon.$$

又因为 $G = E \cup (G \setminus E)$ 是不交并, 所以由测度的可加性得 $m(G) = m(E) + m(G \setminus E)$, 进而 $m(G \setminus E) = m(G) - m(E) < \varepsilon$.

$m(E) = \infty$ 时, 注意到

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=2}^{\infty} \big(B(O;k) \setminus B(O;k-1)\big) \cup B(O;1),$$

设

$$E_1 = B(O;1) \cap E, \quad E_k = \big(B(O;k) \setminus B(O;k-1)\big) \cap E, \quad k = 2, 3, \cdots,$$

有

$$E = E \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{n=2}^{\infty} \Big(\big(B(O;k) \setminus B(O;k-1)\big) \cap E\Big) \cup \big(B(O;1) \cap E\big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

$\{E_k\}$ 两两不交, 可测且 $m(E_k) < \infty, k \in \mathbb{N}_+$. 由已经证明的 $m(E) < \infty$ 的情况, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_k \supset E_k$, 使得 $m(G_k \setminus E_k) < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$. 令 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 G 是开集, 且 $G \supset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$. 又

$$G \setminus E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(G_k \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(G_k \setminus E_k\big),$$

得

$$m(G \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

充分性.

对于每个 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{k}, k\in\mathbb{N}_+$, 存在开集 $G_k\supset E$, 使得 $m^*(G_k\setminus E)<\dfrac{1}{k}$. 令 $H=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$, 则有

$$H\setminus E\subset G_k\setminus E,\quad k\in\mathbb{N}_+,$$

进而

$$m^*(H\setminus E)\leqslant m^*(G_k\setminus E)<\frac{1}{k},\quad k\in\mathbb{N}_+,$$

所以 $m^*(H\setminus E)=0$. 令 $Z=H\setminus E$, 注意到 $E\subset H$, 所以 $E=H\setminus Z$ 是两可测集之差, E 是可测集. □

例 1.1 设 $\{E_k\}$ 是一列可测集.

(i) 若 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)$.

(ii) 若 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$, 且 $m(E_1)<\infty$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)$.

证明 (i) 若 $m(E_k)<\infty,\forall k\in\mathbb{N}_+$. 记

$$B_1=E_1,\quad B_k=E_k\setminus E_{k-1},\quad k=2,3,\cdots,$$

则有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$, $\{B_k\}$ 两两不交且可测. 进而

$$\begin{aligned}m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}m(B_k)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}m(B_k)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(m(E_1)+\sum_{k=2}^{N}(m(E_k)-m(E_{k-1}))\right)=\lim_{N\to\infty}m(E_N).\end{aligned}$$

若存在 k_0 使 $m\left(E_{k_0}\right)=\infty$, 则由 $\{E_k\}$ 单调性可得, 任意 $k\geqslant k_0$ 都有 $m(E_k)=\infty$, 进而 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=\infty$. 又因为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\supset E_k$, 所以 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\infty$.

(ii) $\left\{E_1\setminus E_k\right\}$ 是单增集列, 故 $\lim\limits_{k\to\infty}m\left(E_1\setminus E_k\right)=m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_1\setminus E_k)\right)$. 由 $m(E_1)<\infty$, $E_k\subset E_1$, 所以 $m(E_1\setminus E_k)=m(E_1)-m(E_k)$. 进而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_1\setminus E_k)=E_1\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k,\quad m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E_1\setminus E_k\right)\right)=m\left(E_1\right)-m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right).$$ □

注 1.1 例 1.1 (ii) 去掉条件 $m\left(E_{k_1}\right)<\infty$ 时, 结论不再成立. 如 $E_k=(k,+\infty), k=1,2,\cdots$.

定义 1.1 (**内测度**) 设 $m_*(E)=\sup\left\{m(F):F\subset E, F\text{ 是闭集}\right\}$, 称 $m^*(E)$ 为 E 的内测度. 可以证明 E 可测当且仅当 $m^*(E)=m_*(E)$.

第二章　可测函数

定义 2.1 (广义实函数) E 可测, 记 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. 称 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 为广义实函数.

命题 2.1

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[c + \frac{1}{k}, +\infty\right] = (c, +\infty], \quad [c, +\infty] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(c - \frac{1}{k}, +\infty\right].$$

命题 2.2 零测集上的函数可测.

证明 设 E 是零测度及 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. 对于任意的 $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $E(f > c)$ 是零测集, 故 f 是可测的. □

命题 2.3 设 $E_1 \subset E$, E_1, E 可测, f 在 E 上可测, 则 f 在 E_1 上可测.

证明 $\forall c \in \mathbb{R}$, $E_1(f > c) = E_1 \cap \big(E(f > c)\big)$. □

命题 2.4 设 $\{E_k\}$ 是一个可测集列, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 若 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, f 在 E_k, $k = 1, 2, \cdots$ 上可测, 则 f 在 E 上可测.

证明 $\forall c \in \mathbb{R}$, $E(f > c) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k(f > c)$. □

命题 2.5 设 E 可测, 若 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 连续, 则 f 是可测函数.

证明 由可测集的结构, 存在闭集列 $\{F_k\}$ 及一个零测集 E_0, 使得 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k \cup E_0$. 若 f 在 E 上连续, 则 f 在 F_k 上是连续的.

下面证明: 任意 $c \in \mathbb{R}, F_k(f \geqslant c)$ 是闭集. 由极限点的定义可得

$$\forall y \in (F_k(f \geqslant c))', \quad \exists y_l \in F_k(f \geqslant c), \quad l = 1, 2, \cdots, \quad \text{使得 } y_l \to y, \quad l \to \infty.$$

由 $y_l, l \in \mathbb{N}_+$ 的取法, $f(y_l) \geqslant c, l \in \mathbb{N}_+$. 因为 F_k 是闭集, 所以 $y \in F_k$. 注意到 f 的连续性, 有 $f(y) \geqslant c$, 故 $y \in F_k(f \geqslant c)$.

综上所述, $E(f \geqslant c) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k(f \geqslant c) \cup E_0(f \geqslant c)$ 可测, 进而 f 是可测函数. □

命题 2.6 可测集的特征函数是可测的.

证明 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\big\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) > c\big\} = \begin{cases} \varnothing, & c \geqslant 1, \\ E, & 0 < c \leqslant 1, \\ \mathbb{R}^n, & c < 0. \end{cases}$ □

定理 2.1 设 f,g 在 E 上可测, 不会同时取无穷值. 若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则 $\alpha f+\beta g$ 可测, 且 fg 可测.

证明 先证 $f+g$ 可测.

$E(f=+\infty)$, $E(g=+\infty)$ 可测. 事实上,

$$E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>k),\quad E(g=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(g>k)$$

可测. 记 $E_1=E\setminus\big(E(f=+\infty)\cup E(g=+\infty)\big)$. 对于任意的 $c\in\mathbb{R}$, 都有

$$E(f+g>c)=E_1(f+g>c)\cup\big(E(f=+\infty)\cup E(g=+\infty)\big)\,.$$

设 $\mathbb{Q}=\{r_k\}$, 下面证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\big\{x\in E_1:f(x)>r_k>c-g(x)\big\}=E_1(f+g>x).\tag{2.0.1}$$

任意的 $x\in E_1(f+g>c)$ 都有 $f(x)+g(x)>c$, $f(x)>c-g(x)$. 存在 k 使得 $f(x)>r_k>c-g(x)$ 于是 $x\in\big\{x\in E_1:f(x)>r_k>c-g(x)\big\}$, 进而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\big\{x\in E_1:f(x)>r_k>c-g(x)\big\}\supset E_1(f+g>x).$$

另一方面, 对于任意的 $k\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$\big\{x\in E_1:f(x)>r_k>c-g(x)\big\}\subset\big\{x\in E_1:f(x)>c-g(x)\big\}=E_1(f+g>c).$$

于是证得 (2.0.1) 式.

由 E_1 的可测性, 有

$$E_1(f+g>c)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_1(f>r_k>c-g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_1(f>r_k)\cap E_1(g>c-r_k)),$$

故 $E_1(f+g>c)$ 可测, 进而 $E(f+g>c)$ 可测.

再证任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, αf 可测. 事实上

$$E(\alpha f>c)=\begin{cases}E\left(f>\dfrac{c}{\alpha}\right), & \alpha>0,\\ E\left(f<\dfrac{c}{\alpha}\right), & \alpha<0,\\ E, & \alpha=0,c<0,\\ \varnothing, & \alpha=0,c\geqslant 0.\end{cases}$$

下面给出证明 fg 可测的提示.

$f=g$ 时, $E(fg>c)=E(f^2>c)=\begin{cases}E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c}), & c>0,\\ E, & c<0.\end{cases}$

$f\neq g$ 时, $fg=\dfrac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$. □

定理 2.2 设 E 是可测集, $f_k, k \in \mathbb{N}_+$ 在 E 上可测, 则

$$\limsup_{k\to\infty} f_k, \quad \liminf_{k\to\infty} f_k$$

在 E 上可测.

证明 注意到 $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \inf\limits_k \sup\limits_{j\geqslant k} f_j(x)$, 由书上 49 页定理 2.3 前两式可得 $\sup\limits_{j\geqslant k} f_j(x), k \in \mathbb{N}_+$ 可测, 进而 $\inf\limits_k \sup\limits_{j\geqslant k} f_j(x)$ 可测, 即 $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$ 可测, $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$ 的情形同理. □

推论 2.1 若 E 上的可测函数列 $\{f_k\}$ 满足

$$f(x) = \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x),$$

则 $f(x)$ 在 E 上可测.

定理 2.3 设 f 定义在可测集 E 上, 定义

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0),$$

分别称之为 f 的正部和负部函数. 显然有

$$\big|f(x)\big| = f^+(x) + f^-(x), \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

若 f 在 E 上可测, 则 $f^+(x), f^-(x)$ 在 E 上可测.

例 2.1 设 $E_1, \cdots, E_m \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_i \chi_{E_j}$ 是一个简单函数.

命题 2.7 可测集 E 上任意两个简单函数的和, 差, 积是简单函数.

例 2.2 设

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\chi_{(0,1]} + 4\chi_{[0,3]} - 5\chi_{(-1,2]},\\ \psi &= \chi_{(0,2]} + 2\chi_{[1,3]} - \chi_{(-1,1)},\end{aligned}$$

求 $\varphi + \psi$.

解 记

$$E = (-1,0) \cup \{0\} \cup (0,1) \cup \{1\} \cup (1,2] \cup (2,3],$$

则有

$$\varphi + \psi = -6\chi_{(-1,0)} - 2\chi_{\{0\}} + \chi_{(0,1)} + 4\chi_{\{1\}} + 2\chi_{(1,2]} + 6\chi_{(2,3]}.$$ □

可用归纳法证明: 设 φ 是 E 上一个简单函数, 其中 $E=\bigcup_{j=1}^{m}E_j$, $E_1,E_2,\cdots,E_m$, 两两不交, 则有 $\varphi(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_{E_j}(x)$. 提示: $m=2$ 时,

$$\varphi(x)=c_1\chi_{E_1}(x)+c_2\chi_{E_2}(x)=c_1\chi_{E_1\setminus E_2}+c_2\chi_{E_2\setminus E_1}+(c_1+c_2)\chi_{E_1\cap E_2}(x).$$

定理 2.4 设 E 可测, f 在 E 上可测, 并且 $f\geqslant 0$. 那么, 存在非负简单函数 φ_k, $k\in\mathbb{N}_+$, 使得

$$\forall k\in\mathbb{N}_+,\quad 0\leqslant\varphi_k\leqslant\varphi_{k+1},\quad \forall x\in E,\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k=f(x).$$

证明 设 f 在可测集上, 非负可测. 对每个 $m\in\mathbb{N}_+$, 都有

$$E=\bigcup_{i=1}^{m2^m}E\left(\frac{i-1}{2^m}\leqslant f<\frac{i}{2^m}\right)\cup E(f\geqslant m),$$

定义

$$\varphi_m(x)=\sum_{i=1}^{m2^m}\frac{i-1}{2^m}\chi_{E\left(\frac{i-1}{2^m}\leqslant f<\frac{i}{2^m}\right)}(x)+m\chi_{E(f\geqslant m)}(x).$$

下证 $\varphi_m(x)\leqslant\varphi_{m+1}(x)$, $\forall x\in E$. 注意到

$$\begin{aligned}\varphi_{m+1}=&\sum_{i=1}^{(m+1)2^{m+1}}\frac{i-1}{2^{m+1}}\chi_{E\left(\frac{i-1}{2^{m+1}}\leqslant f<\frac{i}{2^{m+1}}\right)}+(m+1)\chi_{E(f\geqslant m+1)}(x),\\ E(f\geqslant m)=&E(f\geqslant m+1)\cup E\left(\frac{m2^{m+1}}{2^{m+1}}\leqslant f<\frac{m2^{m+1}+1}{2^{m+1}}\right)\\ &\cup\cdots\cup E\left(\frac{(m+1)2^{m+1}-1}{2^{m+1}}\leqslant f<\frac{(m+1)2^{m+1}}{2^{m+1}}\right).\end{aligned}$$

$x\in E(f\geqslant m)$ 时, $\varphi_m(x)=m$. 若 $x\in E(f\geqslant m+1)$, 则有

$$\varphi_{m+1}(x)=m+1\geqslant m=\varphi_m(x).$$

若

$$x\in E\left(\frac{m2^{m+1}+j}{2^{m+1}}\leqslant f<\frac{m2^{m+1}+j+1}{2^{m+1}}\right),\quad j=0,1,2,\cdots,2^{m+1}-1,$$

则有

$$\varphi_m(x)=m\leqslant\frac{m2^{m+1}+j}{2^{m+1}}=\varphi_{m+1}(x).$$

$x\in E\left(\frac{i-1}{2^m}\leqslant f<\frac{i}{2^m}\right)$, $i=1,\cdots,m2^m$ 时, $\varphi_m(x)=\frac{i-1}{2^m}$. 注意到

$$E\left(\frac{i-1}{2^m}\leqslant f<\frac{i}{2^m}\right)=E\left(\frac{2(i-1)}{2^{m+1}}\leqslant f<\frac{2i-1}{2^{m+1}}\right)\cup E\left(\frac{2i-1}{2^{m+1}}\leqslant f<\frac{2i}{2^{m+1}}\right),$$

有

$$\varphi_m(x)=\frac{i-1}{2^m}\leqslant\varphi_{m+1}(x)=\begin{cases}\dfrac{2(i-1)}{2^{m+1}}, & x\in E\left(\dfrac{2(i-1)}{2^{m+1}}\leqslant f<\dfrac{2i-1}{2^{m+1}}\right),\\ \dfrac{2i-1}{2^{m+1}}, & x\in E\left(\dfrac{2i-1}{2^{m+1}}\leqslant f<\dfrac{2i}{2^{m+1}}\right).\end{cases}$$

下证 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)=f(x), \forall x\in E$. 若 $f(x)=+\infty$, 则 $x\in E(f\geqslant m), \forall m\in\mathbb{N}_+$, 进而

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x)=+\infty=f(x).$$

若 $f(x)$ 有限, 存在 $N\in\mathbb{N}_+$, 使得 $0\leqslant f(x)<N$. $m>N$ 时, 存在 $i\in\{1,2,\cdots,m2^m\}$, 使得

$$x\in E\left(\frac{i-1}{2^m}\leqslant f<\frac{i}{2^m}\right).$$

此时,

$$\varphi_m(x)=\frac{i-1}{2^m}\leqslant f(x)<\frac{i}{2^m},\quad 0\leqslant f(x)-\varphi_m(x)<\frac{1}{2^m},\quad m>N.$$

因此 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi(x)=f(x)$. □

推论 2.2 设 E 可测, f 在 E 上可测, 则存在两个简单函数列 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$, 满足

$$0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots,\ 0\leqslant\psi_1\leqslant\psi_2\leqslant\cdots,\quad \varphi_k(x)\psi_k(x)=0,\ x\in E,\quad \lim_{k\to\infty}\big(\varphi_k(x)-\psi_k(x)\big)=f(x).$$

证明 设 $f=f^+-f^-$, 则 $f^+(x)f^-(x)=0$. 由定理 2.4, 存在两个非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$, 满足

$$0\leqslant\varphi_k\nearrow f^+(k\to\infty),\quad 0\leqslant\psi_k\nearrow f^-(k\to\infty).$$

若 $f^+(x)>0$,

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_k(x)\to f^+(x)\\ \psi_k(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_k(x)-\psi_k(x)\to f^+(x)=f(x).$$

若 $f^-(x)>0$,

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_k(x)=0\\ \psi_k(x)\to f^-(x)\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_k(x)-\psi_k(x)\to -f^-(x)=f(x).$$ □

第三章　可测函数的结构

§3.1　紧集上连续函数的延拓

定义 3.1 (**几乎处处连续**) 若函数不连续点的集合是零测集, 则称这样的函数为几乎处处连续函数.

定义 3.2 (**几乎处处收敛**) $\{f_k\}$ 是 E 上的一个函数列. 若 $\{f_k\}$ 不收敛的点集是零测集, 则称 $\{f_k\}$ 在 E 上几乎处处收敛.

定义 3.3 (**几乎处处有限**) $E(|f|=\infty)$ 是零测集.

定义 3.4 (**本性有界**) 若存在 $M>0$, 使 $E(|f|>M)$ 是零测集, 即 $x\in E$ 上几乎处处成立 $|f(x)|\leqslant M$.

定义 3.5 (**延拓**) 设 $f:E\to\mathbb{R}$, 若存在 $G\supset E$ 及 $F:G\to\mathbb{R}$, 使得 $F|_E=f$, 则称 F 是 f 从 E 到 G 的一个延拓.

引理 3.1 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧子集, F 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭子集. 若 $K\cap F=\varnothing$, 则存在 $f\in C(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\chi_K\leqslant f\leqslant\chi_{F^c}$.

证明 先考虑一个事实: 若 $A\subset\mathbb{R}^n$ 不空, 定义

$$d(x,A)=\inf\left\{|x-y|:y\in A\right\},$$

称之为点 x 到 A 之间的距离. $d(x,A)$ 满足

$$\left|d(x',A)-d(x'',A)\right|\leqslant\left|x'-x''\right|,\quad\forall x',x''\in\mathbb{R}^n,$$

并且距离函数连续. 设

$$f(x)=\frac{d(x,F)}{d(x,K)+d(x,F)},$$

则 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上是良定义的 (?????书上习题 2.2 12 (3)), 并且满足 $f(x)=1,x\in K,f(x)=0,x\in F$. □

推论 3.1 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧子集, F 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭子集, $a,b\in\mathbb{R}^n$. 若 $K\cap F=\varnothing$, 则存在 $f\in C(\mathbb{R}^n)$ 取值于 a,b 之间, 并且满足

$$\forall x\in K,f(x)=a,\quad\forall x\in F,f(x)=b.$$

证明

$$\varphi(x)=\frac{d(x,F)}{d(x,K)+d(x,F)},\quad\psi(x)=\frac{d(x,K)}{d(x,K)+d(x,F)},\quad f(x)=a\varphi(x)+b\psi(x).$$ □

定理 3.1 (延拓定理) 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧子集, $f\in C(K)$. 那么, 存在 $g\in C(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\|g\|_{C(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{C(K)},\quad \forall x\in K,\quad g(x)=f(x).$$

证明 因为 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集, $f\in C(K)$, 所以 f 在 K 上取得最大值和最小值. 记

$$M_0=\max_{x\in K}f(x),\quad m_0=\min_{x\in K}f(x),\quad f_0(x)=f(x)-\frac{M_0+m_0}{2},\quad x\in K,$$

则有

$$-\frac{M_0-m_0}{2}\leqslant f_0(x)\leqslant\frac{M_0-m_0}{2}.$$

记 $a_0=\dfrac{M_0-m_0}{2}$, a_0 为 f_0 在 K 上的最大值, $-a_0$ 为 f_0 在 K 上的最小值. 令

$$\begin{aligned}A_0&=\left\{x\in K:-a_0\leqslant f_0(x)\leqslant-\frac{1}{3}a_0\right\},\\ B_0&=\left\{x\in K:\frac{1}{3}a_0\leqslant f_0(x)\leqslant a_0\right\},\\ C_0&=\left\{x\in K:-\frac{1}{3}a_0\leqslant f_0(x)\leqslant\frac{1}{3}a_0\right\},\end{aligned}$$

则 A_0, B_0, C_0 都是紧的, 因为 $f\in C(K)$. 注意到 $A_0\cap B_0=\varnothing$, 由推论 3.1, 存在 $g_0\in C(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$g_0(x)=-\frac{1}{3}a_0,\quad x\in A_0,\qquad g_0(x)=\frac{1}{3}a_0,\quad x\in B_0,\qquad |g_0(x)|\leqslant\frac{1}{3}a_0,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

则有

$$f_0(x)-g_0(x)\geqslant-\frac{2}{3}a_0,x\in A_0,\quad f_0(x)-g_0(x)\leqslant\frac{2}{3}a_0,x\in B_0,\quad -\frac{2a_0}{3}\leqslant f_0(x)-g_0(x)\leqslant\frac{2a_0}{3},x\in C_0,$$

故 $-\dfrac{2a_0}{3}\leqslant f_0(x)-g_0(x)\leqslant\dfrac{2a_0}{3}$, $x\in K$. 利用上述步骤, 存在 $g_1\in C(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\begin{gathered}|g_1(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a_0\right),\quad x\in\mathbb{R}^n,\\ \max g_1(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a_0\right),\quad \min g_1(x)=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}a_0\right),\\ -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a_0\right)\leqslant f_0(x)-g_0(x)-g_1(x)\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a_0\right),\quad x\in K.\end{gathered}$$

仿此继续, 存在 $C(\mathbb{R}^n)$ 中一列函数 $\{g_k\}$ 满足:

(i) $|g_k(x)|\leqslant\dfrac{2a_0}{3^{k+1}}$, $x\in\mathbb{R}^n$,

(ii) $\max g_k(x)=\dfrac{2a_0}{3^{k+1}}$,

(iii) $\min g_k(x)=-\dfrac{2a_0}{3^{k+1}}$,

(iv) $\left|f_0(x)-\displaystyle\sum_{j=0}^{k}g_j(x)\right|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}a_0$, $x\in K$.

故 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} g_j(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛, 并且

$$f(x)=\frac{M_0+m_0}{2}+\sum_{j=0}^{\infty} g_j(x), \quad \forall x\in K.$$

设

$$g(x)=\frac{M_0+m_0}{2}+\sum_{j=0}^{\infty} g_j(x), \quad \forall x\in \mathbb{R}^n,$$

则 g 是连续函数且满足 $m_0\leqslant g\leqslant M_0$. □

§3.2 一致收敛, 几乎处处收敛, 依测度收敛关系

定理 3.2 (Егоров **定理**) 设 $m(E)<\infty$, f_k, f 在 E 上几乎处处有限, $k\to\infty$ 时, 在 E 上几乎处处有 $f_k(x)\to f(x)$. 则任意 $\delta>0$, 存在 $E_\delta\subset E$ 使得 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$ 且 $\{f_k\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f.

例 3.1

$$f_k(x)=\begin{cases} x^k, & 0\leqslant x<1,\\ (x-1)^k, & 1\leqslant x<2,\end{cases}$$

则有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=0=f(x), \quad \lim_{k\to\infty}\sup_{0\leqslant x<2}\big|f_k(x)-f(x)\big|=1.$$

证明 不妨设 $\{f_k\}$ 在 E 上处处收敛于 f. 由书上习题 3.1 的 14 题 [1] 可得

$$\begin{aligned} E=A&=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} E\left(\big|f_j-f\big|<\frac{1}{m}\right),\\ \Rightarrow \varnothing&=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} E\left(\big|f_j-f\big|\geqslant\frac{1}{m}\right),\\ \Rightarrow \varnothing&=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} E\left(\big|f_j-f\big|\geqslant\frac{1}{m}\right), \quad \forall m=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

记 $B_i(m)=\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} E\left(\big|f_j-f\big|\geqslant\frac{1}{m}\right)$, 则

$$B_1(m)\supset B_2(m)\supset\cdots\supset B_i(m)\supset\cdots.$$

于是由例 1.1 可得

$$\lim_{i\to\infty}\big|B_i(m)\big|=\left|\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i(m)\right|=0, \quad \text{因为 } B_1(m)\subset E, |E|<\infty.$$

对于任意的 $\delta>0$, $m=1$ 时, 取 i_1 使得 $\big|B_{i_1}(1)\big|<\frac{\delta}{2}$. $m=2$ 时, 取 $i_2>i_1$ 使得 $\big|B_{i_2}(2)\big|<\frac{\delta}{2^2}$. 用归纳

[1] 书上 53 页“我们知道”一句证明了.

法, 若已取出 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 满足

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad \left|B_{i_l}(l)\right| < \frac{\delta}{2^l}, \quad l = 1, 2, \cdots, k,$$

再由 $\lim\limits_{i \to +\infty} \left|B_i(k+1)\right| = 0$, 可取 $i_{k+1} > i_k$, 使得 $\left|B_{i_{k+1}}(k+1)\right| < \dfrac{\delta}{2^{k+1}}$. 仿此继续, 可以得到一个严格递增的正整数列 $\{i_k\}$ 满足 $\left|B_{i_k}(k)\right| < \dfrac{\delta}{2^k}, k = 1, 2, \cdots$. 于是

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{i_k}(k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=i_k}^{\infty} E\left(\left|f_j - f\right| \geqslant \frac{1}{k}\right), \quad |B| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|\bigcup_{j=i_k}^{\infty} E\left(\left|f_j - f\right| \geqslant \frac{1}{k}\right)\right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

下面验证 $\{f_k\}$ 在 $E \setminus B$ 上一致收敛于 f. 注意到

$$E \setminus B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=i_k}^{\infty} E\left(\left|f_j - f\right| < \frac{1}{k}\right),$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $k \in \mathbb{N}_+, \dfrac{1}{k} < \varepsilon$, 由

$$E \setminus B \subset \bigcap_{j=i_k}^{\infty} E\left(\left|f_j - f\right| < \frac{1}{k}\right),$$

当 $j \geqslant i_k$ 时, 任意 $x \in E \setminus B$, 都有 $x \in E\left(\left|f_j - f\right| < \dfrac{1}{k}\right)$, 即 $\left|f_j - f\right| < \dfrac{1}{k} < \varepsilon$.

综上所述, 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $i_k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $j \geqslant i_k$ 时, 有 $\left|f_j - f\right| < \varepsilon, \forall x \in E \setminus B$. 故 $\{f_k\}$ 在 $E \setminus B$ 上一致收敛. □

定义 3.6 设函数列 $\{f_k\}$ 及函数 f 定义在可测集 E 上, 且几乎处处有限. 若

$$\forall \sigma > 0, \quad \left|E\left(|f_k - f| \geqslant \sigma\right)\right| \to 0, \quad k \to \infty,$$

则 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 记为 $f_k \xrightarrow{m} f$ 在 E 上.

例 3.2

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k, & 0 \leqslant x < 1, \\ (x-1)^k, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

则有 $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = 0 = f(x)$, 而 $\sup\left|f_k(x) - f(x)\right| = 1$. 令

$$E \setminus E_\delta = [0, 2) \setminus \left[1 - \frac{\delta}{2}, 1\right) \setminus \left[2 - \frac{\delta}{2}, 2\right),$$

有

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in E \setminus E_\delta} \left|f_k(x) - f(x)\right| = \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^k = 0, \quad 0 < \delta < 1.$$

命题 3.1 (**简单性质**) 若 $f_k \xrightarrow{m} f, g_k \xrightarrow{m} g$ 在 E 上, 则 $f_k + g_k \xrightarrow{m} f + g$ 在 E 上, 且任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f_m \xrightarrow{m} \alpha f$ 在 E 上.

证明提示: $E\left(\left|f_k+g_k-(f+g)\right|\geqslant\sigma\right)\subset E\left(|f_k-f|\geqslant\dfrac{\sigma}{2}\right)\cup E\left(|g_k-g|\geqslant\dfrac{\sigma}{2}\right)$.

定理 3.3　设 $|E|<\infty$, f_k,f 在 E 上可测并且都取有限值. 如果在集合 E 上 $f_k\xrightarrow{\text{a.e.}}f$, 则 $f_k\xrightarrow{m}f$.

证明　由 Егоров 定理, 任意的 $\sigma>0$, $\delta>0$, 存在 $E_\delta\subset E$, 使得 $\left|E\setminus E_\delta\right|<\delta$, 且 $\{f_k\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f. 这样的话, 对于上述 $\sigma>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}_+$, 使得 $k>N$ 时, 对于任意的 $x\in E_\delta$ 成立 $\left|f_k(x)-f(x)\right|<\sigma$. 进而 $k>N$ 时, 有

$$E\left(|f_k-f|\geqslant\sigma\right)\subset E\setminus E_\delta,\quad \left|E\left(|f_k-f|\geqslant\sigma\right)\right|\leqslant\left|E\setminus E_\delta\right|<\delta.$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\left|E\left(|f_k-f|\geqslant\sigma\right)\right|=0$. □

例 3.3　记 $I=[0,1]$, 设

$$f_1(x)=\chi_{[0,1]}(x),\quad f_2(x)=\chi_{\left[0,\frac12\right]}(x),\quad f_3(x)=\chi_{\left[\frac12,1\right]},\quad\cdots,\quad f_{\frac{k(k-1)}{2}+j}=\chi_{\left[\frac{j-1}{k},\frac{j}{k}\right]}.$$

得到一个函数列 $\{f_k\}$. 取 $f=0$, 对于任意的 $\sigma>0$, 有

$$E\left(\left|f_{\frac{k(k-1)}{2}+j}-f\right|\geqslant\sigma\right)=\begin{cases}\varnothing, & \sigma>1,\\ \left[\dfrac{j-1}{k},\dfrac{j}{k}\right], & 0<\sigma\leqslant 1.\end{cases}$$

进而

$$\left|E\left(\left|f_{\frac{k(k-1)}{2}+j}-f\right|\geqslant\sigma\right)\right|\leqslant\frac{1}{k},\quad j=1,\cdots,k,$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\left|E\left(\left|f_{\frac{k(k-1)}{2}+j}-f\right|\geqslant\sigma\right)\right|=0,$$

即 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 0. 任意 $x\in[0,1]$, 有无穷多 $f_k(x)=0$, 有无穷多 $f_k(x)=1$. 所以 $\left\{f_k(x)\right\}$ 不收敛, 进而 $\{f_k\}$ 在 E 上不收敛.

定理 3.4 (F. Riesz **定理**)　设在可测集 E 上, $f_k\xrightarrow{m}f, k\to\infty$, 则 $\{f_k\}$ 有子列 $\left\{f_{n_j}\right\}$ 在 E 上几乎处处收敛.

证明　由测度收敛定义, 对于每一个 $l\in\mathbb{N}_+$ 都有

$$\lim_{k\to\infty}\left|E\left(|f_k-f|\geqslant\frac{1}{l}\right)\right|=0.$$

这样的话, 可以取到一个严增的正整数列 $\left\{k_j\right\}$, 使得 $k\geqslant k_j$ 时, 有

$$\left|E\left(|f_k-f|\geqslant\frac{1}{j}\right)\right|<\frac{1}{2^j},\quad j=1,2,\cdots.$$

记

$$E_0=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{j=l}^{\infty}E\left(\left|f_{k_j}-f\right|\geqslant\frac{1}{j}\right),$$

有

$$|E_0| = \lim_{l\to\infty}\left|\bigcup_{j=l}^{\infty} E\left(\left|f_{k_j} - f\right| \geqslant \frac{1}{j}\right)\right|$$
$$\leqslant \lim_{l\to\infty}\sum_{j=l}^{\infty}\left|E\left(\left|f_{k_j} - f\right| \geqslant \frac{1}{j}\right)\right|$$
$$\leqslant \lim_{l\to\infty}\sum_{j=l}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2^{l-1}} = 0,$$
$$E\setminus E_0 = \bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{j=l}^{\infty} E\left(\left|f_{k_j} - f\right| < \frac{1}{j}\right).$$

下证 $\{f_{k_j}\}$ 在 $E\setminus E_0$ 上收敛于 f. 对于任意的 $x\in E\setminus E_0$, 存在 $l_0\in\mathbb{N}_+$, 使得

$$x\in\bigcap_{j=l_0}^{\infty} E\left(\left|f_{k_j} - f\right| < \frac{1}{j}\right).$$

故 $j\geqslant l_0$ 时,

$$x\in E\left(\left|f_{k_j} - f\right| < \frac{1}{j}\right),$$

即 $\left|f_{k_j}(x) - f(x)\right| < \dfrac{1}{j}$, 进而 $\lim\limits_{j\to\infty}\left(f_{k_j}(x) - f(x)\right) = 0$. 因此, $\{f_{k_j}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f. □

注 3.1 上述证明约定: 相减时不会同时取无穷大.

总结:

- 一致收敛 $\to$ 几乎处处收敛.
- 几乎处处收敛 $\xrightarrow{|E|<\infty,\ \text{Егоров 定理条件}}$ 一致收敛.
- 几乎处处收敛 $\xrightarrow{|E|<\infty}$ 依测度收敛.
- 依测度收敛 $\xrightarrow{\text{某子列上成立}}$ 几乎处处收敛.

§3.3 Лузин 定理

引理 3.2 设 ϕ 为 E 上的简单函数. 任给 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, 使得 $\phi\in C(F)$ 且 $|E\setminus F|<\varepsilon$.

证明 设 $\phi(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j\chi_{E_j}(x)$. 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k\in\mathbb{R}$, 可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 两两不交, $E = \bigcup\limits_{j=1}^{k} E_j$. 利用开集刻画可测集的定理 1.1, 任意 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F_j\subset E_j$, $j = 1, 2, \cdots, k$, 使得 $|E_j\setminus F_j| < \dfrac{\varepsilon}{k}$. 记 $F = \bigcup\limits_{j=1}^{k} F_j$, F 是闭集, 有

$$\left|E\setminus F\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{k} E_j \setminus \bigcup_{j=1}^{k} F_j\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{k}\left(E_j\setminus F_j\right)\right| < \varepsilon.$$

下证 ϕ 在 F 上相对连续. 对于任意的 $x \in F$, 存在 $j \in \{1,2,\cdots,k\}$, 使得 $x \in F_j, x \notin F_i, i \neq j, \phi(x) = c_j$. 由 $x \in \left(\bigcup\limits_{i\neq j} F_i\right)^c$ 且 $\left(\bigcup\limits_{i\neq j} F_i\right)^c$ 是开集, 存在 x 的一个邻域 $B(x,\delta) \subset \left(\bigcup\limits_{i\neq j} F_i\right)^c$, 即 $B(x,\delta) \cap F_j \subset F_j$. 进而 $\phi(x) \equiv c_j$, $x \in B(x,\delta) \cap F_j$, 故 x 是 ϕ 相对 F_j 的连续点. □

定理 3.5 (Лузин **定理**) 设 f 为 E 上的可测函数且几乎处处有限, 那么, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $f \in C(F)$ 且 $|E \setminus F| < \varepsilon$.

证明 不妨认为 f 在 E 上处处有限. 利用简单函数与可测函数的关系, 存在一个简单函数列 $\{\phi_k\}$ 在 E 上处处收敛于 f. $|E| < \infty$ 时, 先用 Егоров 定理, 使 $\{\phi_k\}$ 在 E_0 上一致收敛于 f 且 $|E \setminus E_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 次之, 由引理 3.2, 对于每个 k, 存在闭集 $F_k \subset E_0$, 使得 $\phi_k|_{F_k}$ 相对于 F_k 连续且 $\big|E_0 \setminus F_k\big| < \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

记 $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \cap E_0$. 于是

$$E \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus F_k) \cup (E \setminus E_0), \quad |E \setminus F| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

此时, $\{\phi_k\}$ 在 F 上一致收敛于 f 且对于每个 $k \in \mathbb{N}_+$, $\phi_k|_F$ 相对于 F 连续. 由一致收敛函数列的连续性定理, $f|_F$ 在 F 上相对连续.

$|E| = \infty$ 时, 对每个 $k \in \mathbb{N}_+$, 记 $E_k = E \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : k-1 \leqslant |x| < k\big\}$. $\{E_k\}$ 是两两不交, 测度有限的可测集列, 且 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 对每个 E_k 用前面证实的结果: 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $G_k \subset E_k$, 使得 $|E_k \setminus G_k| < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$, $f|_{G_k}$ 相对于 G_k 连续.

记 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. 下面说明:

(i) G 是闭集,

(ii) $|E \setminus G| < \varepsilon$,

(iii) $f|_G$ 相对于 G 是连续的.

任意 $x \in \overline{G}$, 在 G 中存在一个点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x_k - x| \to 0$, $k \to \infty$. 存在 $r \in \mathbb{N}_+$ 使得 $|x| < r$. 由 $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = |x| < r$. 当 k 充分大时, $|x_k| < r$. 此时, $x_k \in \bigcup\limits_{j=1}^{r} G_j$. 因为 $\bigcup\limits_{j=1}^{r} G_j$ 是闭集, 所以 $x_k \to x \in \bigcup\limits_{j=1}^{r} G_j$, $k \to \infty$, 进而 $x \in G$. 故 $\overline{G} \subset G$, G 是闭集.

因为 $\{E_k\}$ 两两不交且 $G_k \subset E_k$, $k \in \mathbb{N}_+$, 所以

$$E \setminus G = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(E_k \setminus G_k\right).$$

进而

$$|E \setminus G| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \big|E_k \setminus G_k\big| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

下证 $f|_G$ 相对于 G 是连续的. 对于任意的 $x \in G$, 因为 $\{G_k\}$ 是两两不交的闭集列, 所以存在唯一一

个 G_k, 使得 $x \in G_k$. 容易说明 [2]

$$\delta_x := d(x, G_l) > 0, \quad l \neq k, \quad \big(B(x, \delta_x) \cap G_k\big) \cap G_l = \varnothing, \quad l \neq k.$$

由 $f|_{G_k}$ 相对于 G_k 连续, 任意 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$, $|y - x| < \delta$ 且 $y \in G_k$ 时, $\big|f|_{G_k}(x) - f|_{G_k}(y)\big| < \eta$. 于是

$$y \in B(x, \min\{\delta,\ \delta_x\}) \cap G \subset B(x, \delta_x) \cap G_k \quad \Rightarrow \quad \big|f|_G(y) - f|_G(x)\big| = \big|f|_{G_k}(y) - f|_{G_k}(x)\big| < \eta.$$

故 $f|_G$ 相对于 G 是连续的. □

推论 3.2 设 f 在 E 上有界, 可测且几乎处处有限. 则任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C(\mathbb{R}^n)$ 使得 $|E(f \neq g)| < \varepsilon$ 且 $|g(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$.

证明 $|E| < \infty$ 时, 令 $E_k = E \cap B(O; k)$, $\forall k \in \mathbb{N}_+$. 由 $|E| = \lim\limits_{k \to \infty} |E_k|$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 k_0 使得 $|E| < |E_{k_0}| + \dfrac{\varepsilon}{2}$, 即 $|E \setminus E_{k_0}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 由 Лузин 定理, 存在闭集 $F \subset E_{k_0}$, 使 $\big|E_{k_0} \setminus F\big| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $f|_F$ 相对于 F 连续. 此时 F 是紧的且

$$\big|E \setminus F\big| \leqslant |E \setminus E_{k_0}| + |E_{k_0} \setminus F| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

再用延拓定理 (定理 3.1), 存在 $g \in C(\mathbb{R}^n)$ 使 $g|_F = f$ 且 $|g(y)| \leqslant \sup\limits_{x \in F} |f(x)|$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. 此时有

$$|E(f \neq g)| \leqslant |E \setminus F| < \varepsilon, \quad |g(y)| \leqslant \sup_{x \in F} |f(x)| \leqslant \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

$|E| = \infty$ 时, 提示如下.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k = E \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : k - 1 \leqslant |x| < k\big\}, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

故 $\{E_k\}$ 两两不交. 令

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k, \quad \lambda_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \qquad \lambda_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_2, \\ 0, & |x| \leqslant 1, |x| > 2, \end{cases} \qquad \cdots,$$

其中 K_k 是由 Лузин 定理取得的 E_k 中的闭集. □

[2]书上 30 页 12 题 (3).

第四章　Lebesgue 积分及其基本理论

§4.1　Lebesgue 积分的定义及基本性质

例 4.1 零测集 E 上的任何函数的积分均为 0.

证明 设 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$, $|E| = 0$. 任取一个非负简单函数, 使得 $0 \leqslant \varphi \leqslant f^+$. 则记

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j}(x), \quad E = \bigcup_{j=1}^{k} E_j.$$

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ 两两不交且为零测集. 于是

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j |E_j| = 0.$$

故

$$\int_E f^+ = \sup\left\{\int_E \varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant f^+,\ \varphi \text{ 是简单函数}\right\} = 0.$$

同理 $\displaystyle\int_E f^- = 0$. 故 $f \in L(E)$, 且 $\displaystyle\int_E f = 0$. □

例 4.2 设 f, g 是 E 上的非负可测函数且 $0 \leqslant g \leqslant f$. 若 $f \in L(E)$, 则 $g \in L(E)$.

证明 按积分定义

$$\begin{aligned}
\int_E f &= \sup\left\{\int_E \varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant f,\ \varphi \text{ 是简单函数}\right\}, \\
\int_E g &= \sup\left\{\int_E \varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant g,\ \varphi \text{ 是简单函数}\right\}, \\
\left\{\int_E \varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant g,\ \varphi \text{ 是简单函数}\right\} &\subset \left\{\int_E \varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant f,\ \varphi \text{ 是简单函数}\right\}.
\end{aligned}$$

□

引理 4.1 (**简单函数积分的良定义**) 非负简单函数的积分与它的表示无关.

证明 设

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{E_j}(x), \quad E = \bigcup_{j=1}^{k} E_j, \quad E_1, \cdots, E_k \text{ 两两不交且可测},$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{l} d_i \chi_{F_i}(x), \quad E = \bigcup_{i=1}^{l} F_i, \quad F_1, \cdots, F_l \text{ 两两不交且可测}.$$

下面说明 $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j|E_j| = \sum\limits_{i=1}^{l} d_i|F_i|$. 注意到 $E = E \cap E = \bigcup\limits_{j=1}^{k}\bigcup\limits_{i=1}^{l}\big(E_j \cap F_i\big)$ 为不交并, 以及 $E_j \cap F_i \neq \varnothing$ 时, $c_j = d_i$. 因为 $E_j = E_j \cap E = \bigcup\limits_{i=1}^{l}\big(E_j \cap F_i\big)$ 为不交并, 所以

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j|E_j| = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l} c_j|E_j \cap F_i|.$$

进一步,

$$\begin{aligned}\int_E \varphi &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} c_j|E_j \cap F_i| = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} d_i|E_j \cap F_i| \\ &= \sum_{i=1}^{l} d_i \sum_{j=1}^{k} |E_j \cap F_i| = \sum_{i=1}^{l} d_i|F_i|,\end{aligned}$$

其中用到了 $F_i = \bigcup\limits_{j=1}^{k}\big(E_j \cap F_i\big)$ 是不交并. □

引理 4.2
(1) 设 φ 为 E 上非负简单函数, $e \subset E$ 可测, 则 $0 \leqslant \int_e \varphi \leqslant M|e|$, 其中 $M = \sup\limits_{x\in E}\varphi(x)$.
(2) 若 $\int_E \varphi = +\infty$, 则任意 $N > 0$, 存在 $A \subset E$ 可测且 $|A| < \infty$, 使 $\int_A \varphi > N$.

引理 4.3 (**基本引理**) 设 f 在 E 上非负可测, φ_m 是简单函数且 $0 \leqslant \varphi_m \leqslant \varphi_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}_+$. 如果对于任意的 $x \in E$, $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = f(x)$ 成立, 那么 $\int_E f = \lim\limits_{m\to\infty}\int_E \varphi_m$.

证明 $\int_E f = 0$ 显然.

$\int_E f > 0$ 时, 由

$$0 \leqslant \int_E \varphi_k \leqslant \int_E f, \quad \int_E \varphi_k \leqslant \int_E \varphi_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E \varphi_k \leqslant \int_E f$.

下面证明 $\int_E f \leqslant \lim\limits_{k\to\infty}\int_E \varphi_k$. 这个事实等价于任意 $a > 0$, $a < \int_E f$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E \varphi_k > a$. 设 $a > 0$, $a < \int_E f$. 由积分定义, 存在非负简单函数 φ 满足 $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, $\int_E \varphi > a$. 定义 $\big\{\min(\varphi_k, \varphi)\big\}$, 满足

$$0 \leqslant \min(\varphi_k, \varphi) \leqslant \min(\varphi_{k+1}, \varphi), \quad \lim_{k\to\infty}\min(\varphi_k, \varphi) = \min(f, \varphi) = \varphi.$$

$\int_E \varphi < +\infty$ 时, 记 $A = \big\{x \in E : \varphi(x) > 0\big\}$. 由 φ 是 E 上的简单函数, 存在 $c > 0, M > 0$ 使得

$$0 < c \leqslant \varphi(x) \leqslant M, \quad x \in A, \qquad \varphi(x) = 0, \quad x \in E \setminus A,$$

显然 $|A| < \infty$. 由 Егоров 定理, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 A 的一个可测子集 A_0, 使得 $|A \setminus A_0| < \varepsilon$ 且 $\big\{\min(\varphi_k, \varphi)\big\}$ 在 A_0 上一致收敛于 φ. 对于上述 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛的定义, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}_+$, $k \geqslant k_0$ 时,

$\Big|\min\big(\varphi_k(x),\varphi(x)\big)-\varphi(x)\Big|<\varepsilon$ 对一切 $x\in A_0$ 成立. 这样的话, $k>k_0$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\int_E \min(\varphi_k,\varphi)-\int_E\varphi\right| &= \left|\int_A \min(\varphi_k,\varphi)-\int_A\varphi\right| \\ &= \left|\int_{A_0}\big(\min(\varphi_k,\varphi)-\varphi\big)+\int_{A\setminus A_0}\big(\min(\varphi_k,\varphi)-\varphi\big)\right| \\ &\leqslant \int_{A_0}|\min(\varphi_k,\varphi)-\varphi|+\int_{A\setminus A_0}|\min(\varphi_k,\varphi)-\varphi| \\ &\leqslant \varepsilon|A_0|+2M|A\setminus A_0|<\varepsilon|A_0|+2M\varepsilon=\varepsilon\big(|A|+2M\big).\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\min(\varphi_k,\varphi)=\int_E\varphi$. 于是

$$a<\int_E\varphi=\lim_{k\to\infty}\int_E\min(\varphi_k,\varphi)\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k.$$

$\int_E\varphi=+\infty$ 时, 记 $\varphi(x)=\sum\limits_{j=1}^{l}c_j\chi_{E_j}(x)$, $x\in E$, 其中 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{l}E_j$, $E_1,\cdots,E_l$ 两两不交并且可测, $c_1,\cdots,c_l$ 为非负实数, 此时

$$\int_E\varphi=\sum_{j=1}^{l}c_j|E_j|=+\infty.$$

于是存在 j_0, 使得 $c_{j_0}|E_{j_0}|=+\infty$. 存在可测集 F, $F\subset E_{j_0}$, 使得 $c_{j_0}|F|>a$, 此时 F 的测度有限. 由 $\lim\limits_{k\to\infty}\min(\varphi_k,\varphi)=\varphi$, 在 F 上也有 $\lim\limits_{k\to\infty}\min\big(\varphi_k(x),\varphi(x)\big)=\varphi(x)$. 由 Егоров 定理, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 F 的可测子集 F_0, 使得 $|F\setminus F_0|<\varepsilon$, 且 $\big\{\min(\varphi_k,\varphi)\big\}$ 在 F_0 上一致收敛于 φ. 记 $c=c_{j_0}$, $M=\max\limits_{x\in F}\varphi(x)$. 对上述 $\varepsilon>0$, 存在 $k_0\in\mathbb{N}_+$, 当 $k\geqslant k_0$ 时, 对任意 $x\in F$ 成立

$$\Big|\min\big(\varphi_k(x),\varphi(x)\big)-\varphi(x)\Big|<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_F\varphi-\int_F\min(\varphi_k,\varphi)=\int_{F_0}\big(\varphi-\min(\varphi_k,\varphi)\big)+\int_{F\setminus F_0}\big(\varphi-\min(\varphi_k,\varphi)\big)\\ &<\varepsilon|F_0|+2M|F\setminus F_0|<\varepsilon\big(|F|+2M\big).\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_F\min(\varphi_k,\varphi)=\int_F\varphi$, 进而

$$a<\int_F\varphi=\lim_{k\to\infty}\int_F\min(\varphi_k,\varphi)\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_F\varphi_k\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k.$$

综上所述, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\varphi_k>a$. 故 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\varphi_k\geqslant\int_E f$. □

注 4.1

(i) 设 $f\in L(E)$, 则 f 在 E 上几乎处处有限.

(ii) 若 $f,\ g\in L(E)$, 约定

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} f(x)+g(x), & f(x),\ g(x)\ \text{不是异号无穷大}, \\ 0, & f(x),\ g(x)\ \text{是异号无穷大}. \end{cases}$$

证明 (i) 不妨设 $f \geqslant 0$,

$$E(f>1)\supset E(f>2)\supset\cdots\supset E(f>k)\supset\cdots,$$
$$k\left|E(f>k)\right| \leqslant \int_E f\chi_{E(f>k)} \leqslant \int_E f < +\infty, \quad \Rightarrow \quad \left|E(f>k)\right| \to 0, \quad k\to\infty,$$
$$E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty} E(f>k)\subset \left|E(f>1)\right|<\infty \quad \Rightarrow \quad \left|E(f=+\infty)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|E(f>k)\right|=0. \qquad \square$$

引理 4.4 设 $f \geqslant 0$, $f \geqslant 0$ 可测. 则 $\displaystyle\int_E \alpha f=\alpha\int_E f$.

证明 f 是 E 上的非负简单函数时, 设 $f=\displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j\chi_{E_j}$, $E=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} E_j$, $E_1,\cdots,E_k$ 两两不交且可测. $\alpha>0$ 时, 有

$$\alpha f=\sum_{j=1}^{k}\alpha c_j\chi_{E_j}, \quad \int_E \alpha f=\sum_{j=1}^{k}\alpha c_j\left|E_j\right|=\alpha\sum_{j=1}^{k}c_j\left|E_j\right|=\alpha\int_E f.$$

f 是 E 上的非负可测函数时, 存在一个非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 使得 $0\leqslant\varphi_k\nearrow f$, 则 $\{\alpha\varphi_k\}$ 也是非负简单函数并且 $\alpha\varphi_k\nearrow\alpha f$, $k\to\infty$, 进而

$$\int_E \alpha f=\lim_{k\to\infty}\int_E \alpha\varphi_k=\alpha\lim_{k\to\infty}\int_E\varphi_k=\alpha\int_E f. \qquad \square$$

定理 4.1 设 $f,g\in L(E)$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, 则 $\alpha f+\beta g\in L(E)$ 且 $\displaystyle\int_E \alpha f+\beta g=\alpha\int_E f+\beta\int_E g$.

证明 先证 $f+g\in L(E)$. 此时 f^+, f^-, g^+, $g^-\in L(E)$, 先说明 $(f+g)^+$, $(f+g)^-\in L(E)$. 因为 $(f+g)^+=\max(f+g,0)$, 所以 $f+g\leqslant f^++g^+$, 进而 $(f+g)^+\leqslant f^++g^+$. 由例 4.2 可得 $(f+g)^+\in L(E)$, 同理 $(f+g)^-\in L(E)$. 由

$$f^++g^+-f^--g^-=f+g=(f+g)^+-(f+g)^-,$$

可得

$$(f+g)^++f^-+g^-=f^++g^++(f+g)^-,$$
$$\int_E(f+g)^++\int_E f^-+\int_E g^-=\int_E f^++\int_E g^++\int_E(f+g)^-.$$

上式各项有限, 移项

$$\int_E(f+g)^+-\int_E(f+g)^-=\int_E f^+-\int_E f^-+\int_E g^+-\int_E g^-,$$
$$\int_E f+g=\int_E f+\int_E g.$$

再证对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f \in L(E)$. $\alpha > 0$ 时, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. 由引理 4.4, 有

$$\int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)^+ - \int_E (\alpha f)^- = \int_E \alpha f^+ - \int_E \alpha f^- = \alpha \int_E f^+ - \alpha \int_E f^- = \alpha \int_E f.$$

$\alpha \leqslant 0$ 时, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$, $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. 由引理 4.4, 有

$$\int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)^+ - \int_E (\alpha f)^- = \int_E (-\alpha) f^- - \int_E (-\alpha) f^+ = -\alpha \int_E f^- + \alpha \int_E f^+ = \alpha \int_E f. \qquad \square$$

定理 4.2 (**积分的绝对连续性**) 设 $f \in L(E)$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $A \subset E$, A 可测并且 $|A| \leqslant \delta$, 就有 $\displaystyle\int_A |f| < \varepsilon$.

证明 由积分定义可得 $|f| \in L(E)$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在简单函数 φ, 满足

$$0 \leqslant \varphi \leqslant |f|, \quad \int_E |f| < \int_E \varphi + \frac{\varepsilon}{2},$$

此时 $\displaystyle\int_E |f| - \int_E \varphi < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于任意可测子集 $A \subset E$, 都有

$$\int_A \big(|f| - \varphi\big) \leqslant \int_E \big(|f| - \varphi\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

存在 $M > 0$, 使得 $0 \leqslant \varphi \leqslant M$, 此时

$$\int_A |f| \leqslant \int_A \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant M|A| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, 当 $A \subset E$ 可测且 $|A| < \delta$ 时, 都有

$$\int_A |f| \leqslant \int_A \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant M|A| + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

定理 4.3 设 f 是 E 上的非负可测函数, 且 $E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k 两两不交. 若 f 在 E 上非负可测, 则

$$\int_E f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

证明 [1] 先设 f 为非负简单函数, 即 $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{l} c_j \chi_{F_j}$, $E = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{l} F_j$, 其中 $F_1, \cdots, F_l$ 两两不交, 于是 $\displaystyle\int_E f = \sum_{j=1}^{l} c_j \left|F_j\right|$. 又有

$$E = E \cup E = \left(\bigcup_{j=1}^{l} F_j\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcup_{j=1}^{l} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(F_j \cap E_k\right),$$

[1]此证明后半部分不完整.

注意到 $F_j=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(F_j\cap E_k)$ 且 $\{F_j\cap E_k\}$ 两两不交, 可得 $|F_j|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|F_j\cap E_k|$, 进而

$$\int_E f=\sum_{j=1}^{l}c_j|F_j|=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{\infty}c_j|F_j\cap E_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{l}c_j|F_j\cap E_k|\right).$$

又因为 $f\chi_{E_k}=\sum\limits_{j=1}^{l}c_j\chi_{F_j\cap E_k}$, 所以

$$\int_{E_k}f=\int_E f\chi_{E_k}=\sum_{j=1}^{l}c_j|F_j\cap E_k|.$$

于是 $\int_E f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f$.

f 是 E 上的非负可测函数时, 存在一个非负简单函数列 $\{\varphi_j\}$, 使得 $\varphi_j\nearrow f$, 有 (?????证明有问题)

$$\int_E f=\lim_{j\to\infty}\int_E\varphi_j=\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}\varphi_j=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{j\to\infty}\int_{E_k}\varphi_j\geqslant\sum_{k=1}^{m}\lim_{j\to\infty}\int_{E_k}\varphi_j=\sum_{k=1}^{m}\int_{E_k}f.$$ □

§4.2 积分号下取极限

数分中, Riemann 可积函数列 $\{f_k\}$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上, 存在如下问题.

(i) $f=\lim\limits_{k\to\infty}f_k$ 未必 Riemann 可积.

(ii) $\{f_k\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 则 $f\in\mathcal{R}[a,b]$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x$.

定理 4.4 (单调极限定理, Levi 定理) 设函数 f_n 在 E 上可测且 $0\leqslant f_n\leqslant f_{n+1}, n\in\mathbb{N}_+$, 那么

$$\int_E\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

证明 对每个 $k\in\mathbb{N}_+$, 取一个简单函数列 $\{\varphi_{kl}\}_{l=1}^{\infty}$ 满足 $0\leqslant\varphi_{kl}\nearrow f_k$, $l\to\infty$. 令

$$\psi_k=\max\{\varphi_{lk}:1\leqslant l\leqslant k\},$$

则有

$$0\leqslant\psi_k\leqslant\psi_{k+1},\quad k=1,2,\cdots,\qquad\varphi_{lk}\leqslant\psi_k\leqslant f_k,\quad\forall k,\ l\in\mathbb{N}_+.\tag{4.2.1}$$

后一式对 k 取极限可得

$$f_l=\lim_{k\to\infty}\varphi_{lk}\leqslant\lim_{k\to\infty}\psi_k\leqslant\lim_{k\to\infty}f_k.$$

再对 l 取极限可得

$$\lim_{l\to\infty}f_l\leqslant\lim_{k\to\infty}\psi_k\leqslant\lim_{k\to\infty}f_k.$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\psi_k=\lim_{k\to\infty}f_k.$$

又因为 $\{\psi_k\}$ 是简单函数列, 则由基本引理可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \psi_k = \int_E \lim_{k\to\infty}\psi_k = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k. \tag{4.2.2}$$

由 (4.2.1) 式可得

$$\int_E \varphi_{lk} \leqslant \int_E \psi_k \leqslant \int_E f_k, \quad k\in\mathbb{N}_+, \quad 1\leqslant l\leqslant k. \tag{4.2.3}$$

由 (4.2.3) 式及 $f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_k\leqslant\cdots\leqslant \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \psi_k \leqslant \lim_{k\to\infty}\int_E f_k \leqslant \int_E \lim_{k\to\infty} f_k. \tag{4.2.4}$$

最后, 由 (4.2.2), (4.2.4) 式可得 $\displaystyle\int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k$. □

推论 4.1 设 $\{u_k\}$ 是在 E 上非负可测函数列, 则 $\displaystyle\int_E\sum_{k=1}^{\infty}u_k = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k$.

证明 令 $f_k = \displaystyle\sum_{l=1}^{k} u_l, k\in\mathbb{N}_+$. 则 $0\leqslant f_k\leqslant f_{k+1}\nearrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}u_k$,

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\int_E u_j = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k,$$

且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \int_E\sum_{k=1}^{\infty}u_k. \quad □$$

下面利用推论 4.1 给出定理 4.3 的另一种证明方法.

证明 由 $f=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} f\chi_{E_j}$ 及 $\{f\chi_{E_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 为非负可测函数列, 用推论 4.1, 得

$$\int_E f = \int_E \sum_{j=1}^{\infty} f\chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\infty}\int_E f\chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f. \quad □$$

推论 4.2 设 $f\in L(E)$, $E=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$, $\{E_j\}$ 两两不交的可测集列, 有 $\displaystyle\int_E f = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f$.

证明 记 $f=f^+-f^-$. 由 $f\in L(E)$ 得 f^+, $f^-\in L(E)$ 且非负, 则

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^+ - \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^-.$$

注意到 $\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^+$, $\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^-$ 是两个正项级数且分别收敛于 $\int_E f^+$, $\int_E f^-$. 故由收敛级数的性质, 得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^+ - \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^- = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} (f^+ - f^-) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f. \qquad \square$$

定理 4.5 (Fatou **引理**) 设 $\{f_k\}$ 是一个在 E 上非负可测函数列, 则

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k.$$

证明 由 $\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_k \inf_{j\geqslant k} f_j$. 记 $g_k = \inf_{j\geqslant k} f_j$. 因此 $\{g_k\}$ 非负可测, 且 $0\leqslant g_k \nearrow \liminf_{k\to\infty} f_k$. 由单调极限定理得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k = \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k.$$

另一方面

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k = \lim_{k\to\infty}\int_E \inf_{j\geqslant k} f_j \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k.$$

故

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k. \qquad \square$$

推论 4.3

(i) 设 $f\in L(E)$, f_k 可测且几乎处处成立 $f_k\geqslant f$, 那么 $\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k$.

(ii) 设 $g\in L(E)$, g_k 可测且几乎处处成立 $g_k\leqslant g$, 那么 $\int_E \limsup_{k\to\infty} g_k \geqslant \limsup_{k\to\infty}\int_E g_k$.

证明 (i) 令 $g_k = f_k - f, k\in\mathbb{N}_+$, g_k 是在 E 上几乎处处非负的可测函数列. 用 Fatou 引理

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} g_k \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E g_k$$

因为 $(f_k - f) + f = f_k$, 有 $\int_E (f_k - f) + \int_E f = \int_E f_k$, f 可积, 留作作业 (?????不知道留作作业是什么).

$$\int_E g_k = \int_E (f_k - f) = \int_E f_k - \int_E f.$$

因此

$$\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k - \int_E f = \liminf_{k\to\infty}\int_E g_k \geqslant \int_E \liminf_{k\to\infty} g_k = \int_E \left(\liminf_{k\to\infty} f_k - f\right) = \int_E \liminf_{k\to\infty} f_k - \int_E f.$$

两端同加有限值 $\int_E f$, 得

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_k. \qquad \square$$

定理 4.6 (Lebesgue **控制收敛定理**) 设 $\{f_k\}$ 在可测集 E 上可测, 若存在 $g \in L(E)$ 使得

(i) $|f_k| \leqslant g$, a.e. $x \in E$,

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, a.e. $x \in E$.

则 $f \in L(E)$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$.

证明

法一:

由条件 (i), $-g \leqslant f_k \leqslant g$, $k \in \mathbb{N}_+$ 及 Fatou 引理可得

$$\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k,$$
$$\int_E \limsup_{k\to\infty} f_k \geqslant \limsup_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

又由条件 (ii), 不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. 于是

$$\int_E f \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k \leqslant \limsup_{k\to\infty} \int_E f_k \leqslant \int_E f.$$

因此, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k$ 存在且等于 $\int_E f$.

由条件 (i), $|f| = \lim\limits_{k\to\infty} |f_k| \leqslant g$ 及 f 的可测性 (可测函数极限可测), 得到 $|f|$ 可测. 由 $g \in L(E)$ 可得 $|f| \in L(E)$. 因为 f 可测, 所以 $f \in L(E)$.

法二:

可用直接估值的方法证明.

$|E| = \infty$ 时, 利用 [2]

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{E\cap B(0,r)} g = \int_E g.$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 r_0 使得 $r \geqslant r_0$ 时, 有

$$0 \leqslant \int_E g < \int_{E\cap B(0,r)} g + \varepsilon.$$

此时

$$\int_{E\setminus E\cap B(0,r)} |f_k - f| \leqslant 2\int_{E\setminus E\cap B(0,r)} g < 2\varepsilon.$$

再由 $\{f_k\}$ 在 $E \cap B(0,r)$ 上几乎处处收敛于 f 及 $|E \cap B(0,r)| < \infty$, 利用 Егоров 定理, 对任意的 $\delta > 0$, 都有 $E_0 \subset E \cap B(0,r)$ 可测且 $\big|E \cap B(0,r) \setminus E_0\big| < \delta$. 且 $\{f_k\}$ 在 E_0 上一致收敛.

由 $g \in L(E)$, 对上述 $\varepsilon > 0$, 利用积分的绝对连续性, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得任意可测集 $F \subset E$, 只要 $|F| < \delta$ 就有 $\int_F g < \varepsilon$.

对于对应 $\delta(\varepsilon)$ 的 E_0, 由 $\{f_k\}$ 在 E_0 的一致收敛性, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|E_0| + 1}, \quad \forall x \in E_0.$$

[2] 书上 68 页定理 3.6 的推论 2.

因此, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$\int_E |f_k - f| = \int_{E_0} |f_k - f| + \int_{E\cap B(0,r_0)\setminus E_0} |f_k - f| + \int_{E\setminus E\cap B(0,r_0)} |f_k - f| < \frac{\varepsilon|E_0|}{|E_0|+1} + \varepsilon + 2\varepsilon < 4\varepsilon.$$

$|E| < \infty$ 时, 上述证明中用 $E \cap B(0,r_0)$ 代替 E 即可. □

定理 4.7 设 $g \in L(E)$, $|f_k| \leqslant g$, $k \in \mathbb{N}_+$. 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

证明 [3] 先说明 $f \in L(E)$.

用 Riesz 定理, $f_k \xrightarrow{m} f$, 则 $\{f_k\}$ 有子列 $\{f_{k_l}\}$ 几乎处处收敛于 f. 再利用 $|f_{k_l}| \leqslant g$, $l \in \mathbb{N}_+$, 在 $x \in E$ 上几乎处处成立 $|f| \leqslant g$. 由 Lebesgue 控制收敛定理可得 $f \in L(E)$. 下证 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f$, 只需证

$$\liminf_{k\to\infty} \int_E f_k = \limsup_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

利用 $|f_k| \leqslant g$, 知

$$\left|\int_E f_k\right| \leqslant \int_E |f_k| \leqslant \int_E g, \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

$\left\{\int_E f_k\right\}$ 是一个有界数列, 故存在 $\left\{\int_E f_k\right\}$ 的一个子列 $\left\{\int_E g_k\right\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

存在 $\left\{\int_E f_k\right\}$ 的一个子列 $\left\{\int_E h_k\right\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E h_k = \limsup_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

由 $f_k \xrightarrow{m} f$, 故 $g_k \xrightarrow{m} f$, 利用 Riesz 定理, 存在 $\{g_k\}$ 的子列 $\{g_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 使得 $g_{k_j} \to f$. 又由 $|g_{k_j}| \leqslant g$, $j \in \mathbb{N}_+$, a.e. $x \in E$, 利用 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E g_{k_j} = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

同理, 取 $\{h_k\}$ 几乎处处收敛的子列 $\{h_{k_j}\}$,

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E h_{k_j} = \lim_{k\to\infty} \int_E h_k = \limsup_{k\to\infty} \int_E f_k.$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k$ 存在且等于 $\int_E f$. □

[3] 书上 76 页定理 3.14 的证明好像更简单些.

定理 4.8 (**可微性**) 设 E 可测, I 是一个开区间. 任意 $x\in I$, 若 $f(t,x)$ 作为 t 的函数在 E 上可积且

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leqslant g(t),\quad t\in E,\quad x\in I,$$

其中 $g\in L(E)$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_E f(t,x)\mathrm{d}t=\int_E\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\mathrm{d}t$.

证明 提示: $x,x+\Delta x\in I$,

$$\frac{\displaystyle\int_E f(t,x+\Delta x)\mathrm{d}t-\int_E f(t,x)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\int_E\frac{\partial f(t,x+\theta\Delta x)}{\partial x}\mathrm{d}t,\quad \theta=\theta(t,x,\Delta x)\in(0,1),$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\int_E\frac{f(t,x+\Delta x)-f(t,x)}{\Delta x}\mathrm{d}t=\lim_{k\to\infty}\int_E\frac{f(t,x+a_k)-f(t,x)}{a_k}\mathrm{d}t,$$

其中 $\{a_k\}$ 是任何一个趋于 0 的非零数列. □

注 4.2 先承认下述事实.

(i) I 是有界矩形, f 在 I 上有界, 则 f 在 I 上 Riemann 可积可推出 Lebesgue 可积且积分值相等.

(ii) I 是无界区间, f 在 I 上广义绝对 Riemann 可积可推出 Lebesgue 可积且积分值相等.

例 4.3 将 $[0,1]$ 中的有理数排成一列 $\{r_k\}$, 则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k\sqrt{|x-r_k|}}$, $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ 在 $[0,1]$ 几乎处处收敛.

证明 用 Levi 定理的推论可得

$$\int_{[0,1]}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k\sqrt{|x-r_k|}}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\int_{[0,1]}\frac{1}{\sqrt{|x-r_k|}}\mathrm{d}x.$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\frac{1}{\sqrt{|x-r_k|}}\mathrm{d}x&=\left(\int_{[0,r_k)}+\int_{[r_k,1]}\right)\frac{1}{\sqrt{|x-r_k|}}\mathrm{d}x\\&=-2\sqrt{r_k-x}\Big|_0^{r_k}+2\sqrt{x-r_k}\Big|_{r_k}^{1}=2\sqrt{r_k}+2\sqrt{1-r_k}\leqslant 4,\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\int_{[0,1]}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2^k\sqrt{|x-r_k|}}\leqslant 4.$ □

例 4.4 计算 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_0^1\frac{kx^{\frac{1}{2}}\sin x}{1+k^2x^2}\mathrm{d}x.$

解 记 $f_k(x)=\dfrac{kx^{\frac{1}{2}}\sin x}{1+k^2x^2}$, 有 $f(x)=\displaystyle\lim_{k\to\infty}f_k(x)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. 因为 $1+k^2x^2\geqslant 2kx$, $0\leqslant x\leqslant 1$, 所以

$$f_k(x)\leqslant g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由 g 在 $[0,1]$ 上广义绝对 Riemann 可积可得 g 在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可积. 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \frac{kx^{\frac{1}{2}}\sin x}{1+k^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{k\to\infty}\frac{kx^{\frac{1}{2}}\sin x}{1+k^2x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$

例 4.5 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$.

解 由 Taylor 级数,

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}, \quad 0\leqslant x<1, \qquad \frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k}, \quad 0<x<1.$$

由于 $\dfrac{x^{k-1}}{k}\geqslant 0$, $x\in(0,1]$, $\forall k\in\mathbb{N}_+$, 利用 Levi 定理推论

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x = -\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k}\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}. \qquad \square$$

§4.3 把多重积分化为累次积分

定理 4.9 (Tonelli **定理**) 设 f 是 $\mathbb{R}^{m+n}$, m, $n\in\mathbb{N}_+$ 上的非负可测函数, 那么成立等式

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{4.3.1}$$

证明 证明将按如下过程.

$$\left.\begin{array}{r}\text{方块的特征函数} \Rightarrow \text{开集的特征函数}\\ \text{零测集的特征函数}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{可测集的特征函数} \Rightarrow \text{简单函数列} \Rightarrow f \text{ 非负可测.}$$

(1) $f=\chi_Q$, $Q=[a,b]\times[c,d]$, $[a,b]\in\mathbb{R}^m$, $[c,d]\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= |Q|_{m\times n} = \big|[a,b]\big|_m\big|[c,d]\big|_n = \int_{\mathbb{R}^n}\big|[a,b]\big|_m\chi_{[c,d]}(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}\chi_{[a,b]}(x)\mathrm{d}x\right)\chi_{[c,d]}(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}\chi_{[a,b]}(x)\chi_{[c,d]}(y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) $f=\chi_G$, G 为开集. 由开集的半开区间分解定理知, 存在可数个左开右闭方块列 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$G=\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, Q_k 两两不交. 此时 $f(x,y)=\chi_G(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{Q_k}(x,y)$, 则有

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_{Q_k}(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

利用 (1),

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_{Q_k}(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{Q_k}\mathrm{d}y.$$

再用两次 Levi 定理, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_{Q_k}(x,y)\mathrm{d}(x,y)&=\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{Q_k}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{Q_k}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^m}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) $f=\chi_E$, $E\subset\mathbb{R}^{m+n}$ 为可测集.

(i) $|E|_{m+n}<\infty$ 时, 对于 $\varepsilon_l=\frac{1}{l}$, $l\in\mathbb{N}_+$, 存在开集 $G_l\supset E$, 使得 $|G|_{m+n}<|E|_{m+n}+\varepsilon_l$, 进而 $\left|\bigcap_{l=1}^{\infty}G_l\setminus E\right|=0$. 记

$$H=\bigcap_{l=1}^{\infty}G_l,\quad H_k=\bigcap_{l=1}^{k}G_l.$$

H_k 是开集且 $H_1\supset H_2\supset\cdots\supset H_k\supset\cdots$, 于是

$$\chi_{H_k}\geqslant\chi_{H_{k+1}}\geqslant\cdots,\quad\forall k\in\mathbb{N}_+,\qquad\lim_{k\to\infty}\chi_{H_k}=\chi_H,\quad\chi_H\in L(\mathbb{R}^{m+n}).$$

$|E|_{m+n}=0$ 时, $0\leqslant\chi_E\leqslant\chi_H$ 且

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_H=\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\lim_{k\to\infty}\chi_{H_k}=\lim_{k\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_{H_k}\xlongequal{(2)}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y.$$

又有如下条件

$$0\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{H_{k+1}}(x,y)\mathrm{d}y\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{H_1}(x,y)\mathrm{d}y\in L(\mathbb{R}^m),$$

故由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_H=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_H = |H|_{m+n} = |E|_{m+n} = 0,$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^m.$$

记 $Z_m \subset \mathbb{R}^m$, $|Z_m|_m = 0$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m.$$

又

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_H(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} \chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m,$$

即任意的 $x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m$, $\chi_H(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处为 0.

因此再由 $0 \leqslant \chi_E \leqslant \chi_H$, 知对于任意的 $x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m$ 作为 y 的函数 $\chi_E(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处为 0. 故 $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x,y)\mathrm{d}y = 0$. 进一步, $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x,y)\mathrm{d}y$ 作为 x 的函数几乎处处为 0. 故

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

且

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x,y)\mathrm{d}x = 0.$$

$|E|_{m+n} < \infty$ 时. $H = E \cup Z$, $E \cap Z = \varnothing$, $|Z|_{m+n} = 0$. 则

$$\lim_{k\to\infty} \chi_{H_k}(x,y) = \chi_H(x,y) = \chi_E(x,y) + \chi_Z(x,y).$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E &= \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_H - \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_Z = \lim_{k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{H_k} - \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_Z \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z \mathrm{d}y, \\
\text{(Lebesgue 控制收敛定理)} \quad &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z \mathrm{d}y, \\
\text{(Lebesgue 控制收敛定理)} \quad &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} \chi_{H_k}(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z \mathrm{d}y, \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_H(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_H(x,y)\mathrm{d}y - \chi_Z(x,y)\mathrm{d}y \right) \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

(ii) $|E|_{m+n}=\infty$ 时, 有

$$E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,\quad |E_j|_{m+n}<\infty,\quad j\in\mathbb{N}_+,\quad \chi_E(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j}(x,y),$$

其中 $\{E_j\}$ 两两不交且可测. 用 Levi 定理, 有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_E&=\sum_{j=1}^{\infty}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_{E_j}=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{E_j}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{E_j}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j}(x,y)\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_E(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_E=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}\chi_E(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

(4) 设 $f=\sum\limits_{j=1}^{k}c_j\chi_{E_j}(x,y)$, 其中 $E_1,\cdots,E_k$ 可测且两两不交, $c_j\geqslant 0$, $j=1,\cdots,k$. 则有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}f&=\sum_{j=1}^{k}c_j|E_j|_{m+n}=\sum_{j=1}^{k}c_j\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_{E_j}\xlongequal{(3)}\sum_{j=1}^{k}c_j\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{E_j}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{运算性质}}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\sum_{j=1}^{k}c_j\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{E_j}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{k}c_j\chi_{E_j}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\chi_E=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m}\chi_E(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

(5) 设 f 在 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中非负可测的, 利用定理 2.4, 存在非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 满足

$$0\leqslant\varphi_1\leqslant\cdots\leqslant\varphi_k\leqslant\cdots,\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k=f.$$

利用 Levi 定理, 有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}f&=\lim_{k\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}}\varphi_k=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

定理 4.10 (Fubini **定理**) 设 $f \in L(\mathbb{R}^{m+n})$, 那么 (4.3.1) 式对于 f 成立.

证明 将 f 写成 $f = f^+ - f^-$, 其中 f^+, f^- 分别是 f 的正部和负部. 则

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f &= \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f^+ - \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f^- \xlongequal{\text{定理 3.15}} \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x,y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x,y)\mathrm{d}y \right) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} \big(f^+(x,y) - f^-(x,y)\big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

§4.4 Riemann 积分与 Lebesgue 积分关系

定义 4.1 f 在 E 上相对于 E 连续, 等价于任意 $x \in E, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $y \in E$ 且 $|x-y| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

例 4.6 Dirichlet 函数 f, $f|_{\mathbb{Q}}$ 相对于 $\mathbb{Q}$ 连续, $f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ 相对于 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 连续.

定理 4.11 $\mathcal{R}(D) \subset L(D)$, 其中 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的矩形.

证明 先证任意 $f \in \mathcal{R}(D)$, f 都可测. 由 $f \in \mathcal{R}(D)$ 的性质, f 在 D 上有界且几乎处处连续. 即存在零测集 $E_0 \subset D$, $\forall x \in D \setminus E_0$ 都是 f 相对于 D 的连续点, 也是 f 相对于 $D \setminus E_0$ 的连续点. 由命题 2.5, 知 f 在 $D \setminus E_0$ 上可测. 因为 E_0 为零测集, 所以 f 在 E_0 上可测. 故 f 在 $D = (D \setminus E_0) \cup E_0$ 上可测.

再利用 f 的有界性, 即存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M$. 因为 D 是长方体, $|D| < \infty$, 所以 M 作为一个常函数在 D 上 Lebesgue 可积. 又有 f 可测, 因此 $|f| \in L(D)$ 可以推出 $f \in L(D)$. $\square$

定理 4.12 设 $f \in \mathcal{R}(D)$ 则

$$(R)\int_D f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_D f,$$

其中, $(R)\int_D f(x)$ 表示 f 的 Riemann 积分, $(L)\int_D f$ 表示 f 的 Lebesgue 积分.

证明之前回忆 Riemann 积分定义. 将 D 分成有限个闭长方块

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k, \quad \bigcup_{l=1}^{k} \Delta_l = D, \quad i \neq j, \quad \mathring{\Delta}_i \cap \mathring{\Delta}_j \neq \varnothing.$$

任取 $\xi_l \in \Delta_l$, $l = 1, 2, \cdots, k$, 若存在 $I \in \mathbb{R}$ 使得当 $\lambda := \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant k}(\operatorname{diam} \Delta_l) \to 0$ 时, $\sum\limits_{l=1}^{k} f(\xi_l)|\Delta_l|$ 有极限 I, 则称 f 在 D 上 Riemann 可积. I 是 f 在 D 上的积分, 记 $I =: (R)\int_D f$. 有如下结论.

(i) $f \in \mathcal{R}(D) \Rightarrow f$ 有界.

(ii) $S(f) := \sum_{l=1}^{k} M_l|\Delta_l|$, $s(f) := \sum_{l=1}^{k} m_l|\Delta_l|$, 其中 $M_l := \sup_{x\in\Delta_l} f(x)$, $m_l := \inf_{x\in\Delta_l} f(x)$, 有

$$f \in \mathcal{R}(D) \quad \Rightarrow \quad \lim_{\lambda\to 0}(S(f) - s(f)) = 0.$$

(iii) 分划加细 (略).

下面证明定理 4.12.

证明 取 D 的一列分划 $T_k = \left\{\Delta_{1k}, \cdots, \Delta_{N_k k}\right\}$, 其中 $\Delta_{jk}, j = 1, 2, \cdots, N_k$ 是闭长方块, $D = \bigcup_{j=1}^{N_k} \Delta_{jk}$, 且 $\mathring{\Delta}_{jk} \cap \mathring{\Delta}_{ik} = \varnothing$, $i \neq j$. 对每个 k, T_{k+1} 是 T_k 的加细. 此时有

$$S\left(f, T_{k+1}\right) \leqslant S\left(f, T_k\right), \quad s\left(f, T_{k+1}\right) \geqslant s\left(f, T_k\right), \qquad \lim_{k\to\infty}\left(S(f, T_k) - s(f, T_k)\right) = 0. \tag{4.4.1}$$

定义

$$f_{T_k}^{+}(a) = \sum_{l=1}^{N_k} M_{lk}\chi_{\Delta_{lk}}(x), \quad f_{T_k}^{-}(a) = \sum_{l=1}^{N_k} m_{lk}\chi_{\Delta_{lk}}(x), \tag{4.4.2}$$

其中 $M_{lk} = \sup_{x\in\Delta_{lk}} f(x)$, $m_{lk} = \inf_{x\in\Delta_{lk}} f(x)$. 则有

$$\int_D f_{T_k}^{+} = S(f, T_k), \quad \int_D f_{T_k}^{-} = s(f, T_k), \quad f_{T_k}^{+} \geqslant f_{T_{k+1}}^{+}, \quad f_{T_k}^{-} \leqslant f_{T_{k+1}}^{-}, \quad \text{a.e. } x \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

事实上记 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty} \partial\Delta_{lk}$, 则 $|E| = 0$. 任意 $x \in D \setminus E$, 都有 $x \in \mathring{\Delta}_{lk}, x \in \mathring{\Delta}_{l,k+1}$. 再由 T_{k+1} 是 T_k 的加细, 则

$$f_{T_{k+1}}^{+}(x) = M_{l',k+1} \leqslant M_{lk} = f_{T_k}^{+}(x),$$

同理 $f_{T_{k+1}}^{-}(x) \geqslant f_{T_k}^{-}(x)$. 再由

$$f_{T_k}^{-}(x) \leqslant f(x) \leqslant f_{T_k}^{+}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}_+,$$

可得

$$\lim_{k\to\infty} f_{T_k}^{-}(x) \leqslant f(x) \leqslant \lim_{k\to\infty} f_{T_k}^{+}(x), x \in D \setminus E.$$

由 (4.4.1), (4.4.2) 式可得

$$\int_D (f_{T_k}^{+}(x) - f_{T_k}^{-}(x))\mathrm{d}x = S(f, T_k) - s(f, T_k) \to 0, \quad k \to \infty,$$

即

$$\int_D \left(\lim_{k\to\infty} f_{T_k}^{+}(x) - \lim_{k\to\infty} f_{T_k}^{-}(x)\right)\mathrm{d}x = 0.$$

进而

$$\lim_{k\to\infty} f_{T_k}^{-}(x) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{T_k}^{+}(x), \quad \text{a.e. } x \in D \setminus E,$$

所以

$$(R)\int_D f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S(f,k) = \lim_{k\to\infty}(R)\int_D f_{T_k}^{+}(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(L)\int_D f_{T_k}^{+}(x)\mathrm{d}x = (L)\int_D f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

定理 4.13 无界区域上的广义 Riemann 可积函数为 Lebesgue 可积函数的充要条件是它为广义绝对 Riemann 可积函数.

证明 为了简明, 只证一元且区间为 $[a,+\infty)$ 的情形.

设 f 在 $[a,+\infty)\subset\mathbb{R}$ 上广义 Riemann 可积, 则 $f\in L\big([a,+\infty)\big)$ 可以推出 $|f|$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义 Riemann 可积. 下证充分性. 由定理 4.12 可得

$$(R)\int_a^k |f(x)|\mathrm{d}x = (L)\int_a^k |f(x)|\mathrm{d}x, \quad \forall k\geqslant a.$$

令 $k\to+\infty$, 有

$$\begin{aligned}(R)\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x &= \lim_{k\to+\infty}(R)\int_a^k|f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}(L)\int_a^k|f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}(L)\int_a^{+\infty}|f(x)|\chi_{[a,k]}(x)\mathrm{d}x \\ \Big(\big\{|f(x)|\chi_{[a,k]}\big\}\ \text{是增列}\Big) \quad &= (L)\int_a^{+\infty}\lim_{k\to+\infty}|f(x)|\chi_{[a,k]}(x)\mathrm{d}x = (L)\int_a^{+\infty}|f| < +\infty.\end{aligned}$$

因此 $f\in L\big([a,+\infty)\big)$. $\square$

§4.5 Lebesgue 积分小结

- 积分定义
  - 非负简单函数
  - 非负可测函数
  - 一般可测函数
- 性质
  - $L(E)$ 是线性空间
  - 绝对连续性
  - 单调性
- 积分号下取极限
  - 基本引理
  - 单调收敛定理
  - Fatou 引理
  - Lebesgue 控制收敛定理
- (广义) Riemann 可积与 Lebesgue 可积
- 把重积分化为累次积分

第五章　一元函数的变化性态

- 定义域: 区间
- 单调函数可微性
- 单调函数导数在区间可积
- 有界变差函数
- 绝对连续函数

§5.1　单调函数可微性

定理 5.1　设 f 在 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上单调, 则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微 (可导), 且

$$\int_{[a,b]}|f'|\leqslant|f(a)-f(b)|.$$

注 5.1　当 f 在 $[a,b]$ 上单调不减, 此时 $[a,b]$ 上几乎处处有 $f'(x)\geqslant 0$, 且 $\int_{[a,b]}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)$. 当 f 在 $[a,b]$ 上单调不增, 此时 $[a,b]$ 上几乎处处有 $f'(x)\leqslant 0$. 由 $-f$ 单调不减可得

$$-\int_{[a,b]}f'(x)\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}(-f)'(x)\mathrm{d}x\leqslant(-f)(b)-(-f)(a)=-(f(b)-f(a)),$$

进而 $\int_{[a,b]}f'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(b)-f(a)$.

证明　设 f 单调不减. 第一步证明 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导, 第二步证明 $\int_{[a,b]}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)$.

第一步比较复杂, 先证第二步, f 的可微性质后面再证. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调不减, 在 f 几乎处处可微已知的情况下, 下证 $\int_{[a,b]}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)$. 不妨设任意 $x>b$ 都有 $f(x)=f(b)$ 及

$$F_k(x)=k\left(f(x+k^{-1})-f(x)\right),\quad x\in[a,+\infty).$$

则由承认的事实知

$$\lim_{k\to\infty}F_k(x)=f'(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,+\infty).$$

由 Fatou 引理及 F_k, $k\in\mathbb{N}_+$ 的可测性 (可测函数线性组合, 极限仍是可测函数) 得

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f'(x)\mathrm{d}x &= \int_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} F_k(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \liminf_{k\to\infty} F_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_{[a,b]} F_k(x)\mathrm{d}x\\ &= \liminf_{k\to\infty} k\left(\int_a^b f(x+k^{-1})\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) = \liminf_{k\to\infty} k\left(\int_{a+k^{-1}}^{b+k^{-1}} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \liminf_{k\to\infty} k\left(\int_b^{b+k^{-1}} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{a+k^{-1}} f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant f(b)-f(a),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到 $f(x)\geqslant f(a), \forall x\geqslant a$. □

注 5.2 $\int_{[a,b]} f' \leqslant f(b)-f(a)$ 中的不等号有时是严格的, 即存在增函数 f, 使得 $\int_{[a,b]} f' < f(b)-f(a)$.

注 5.3 书上 127 页定义 1.1, 1.2 注意区分左右导数及导数左右极限.

例 5.1

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$f'(x+0)$, $f'(x-0)$ 不存在但左右导数 $f'_+(x), f'_-(x)$ 存在.

定义 5.1 (**数分中的覆盖**) $E\subset\mathbb{R}$, $\mathscr{F}=\{G: G\subset\mathbb{R}\ 是开集\}$. 若任意 $x\in E$, 存在 $G\in\mathscr{F}$ 使得 $x\in G$, 则称 $\mathscr{F}$ 是 E 的一个开覆盖.

定义 5.2 (Vitali **覆盖**) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $\mathscr{A}$ 是一族直径大于零的方块. 若任意 $x\in E$, $\delta>0$, 存在 $Q\in\mathscr{A}$, 使得 $x\in Q$ 且 $\operatorname{diam}(Q)<\delta$, 那么就称 $\mathscr{A}$ 是 E 的 Vitali 覆盖.

例 5.2 令 $\mathscr{A}=\left\{\left(\dfrac{1}{k},1+\dfrac{1}{k}\right)\right\}, k\in\mathbb{N}_+$, 有 $(0,1]\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k},1+\dfrac{1}{k}\right)$, 但 $\mathscr{A}$ 不是 Vitali 覆盖.

例 5.3 令

$$\mathscr{A}=\left\{\left(x,x+\frac{1}{k}\right), k\in\mathbb{N}_+, x\in(0,1]\right\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是 $(0,1]$ 的一个 Vitali 覆盖. 事实上, 任意 $x\in(0,1]$, $\delta>0$, 存在 k, 使得 $x\in\left[x,x+\dfrac{1}{k}\right)$ 且 $\dfrac{1}{k}<\delta$.

引理 5.1 (Vitali **覆盖引理**) [1] 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $\mathscr{Q}$ 是 E 的 Vitali 覆盖, 则 $\mathscr{Q}$ 中存在至多可数个两两不交的元素 Q_k, $k\in\mathbb{N}_+$ (角标 k 不必跑满 $\mathbb{N}_+$), 使得

$$\left|E\setminus\bigcup_k Q_k\right|=0,\quad \forall m\in\mathbb{N}_+,\quad E\setminus\bigcup_k\overline{Q}_k\subset\bigcup_{k\geqslant m}Q'_k,$$

其中 Q'_k 是 Q_k 的同心 4 倍扩大 (如果不存在 Q_k 满足 $k\geqslant m$, 则视 $\bigcup_{k\geqslant m}Q'_k$ 为空集).

[1]我上课没听懂 Vitali 覆盖引理以及用 Vitali 引理证明单调函数几乎处处可微的证明, 所以证明参见课本.

定义 5.3 (函数上下极限) 设 $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$, 下极限定义为

$$\liminf_{h\to 0+}\varphi(h):=\lim_{h\to 0+}\inf_{x<t<x+h}\varphi(t),$$

上极限可类似地定义.

显然有如下等价关系.

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0+}\varphi(h)=\lim_{h\to 0+}\inf_{x<t<x+h}\varphi(t)<\lambda,\\
\iff\ & \exists\delta>0,\ \text{使 } h\in(0,\delta) \text{ 时},\ \inf_{x<t<x+h}\varphi(t)<\lambda,\\
\iff\ & \exists\delta>0,\ \text{对 } \forall h\in(0,\delta) \text{ 都有 } t\in(x,x+h) \text{ 使得 } \varphi(t)<\lambda,\\
\iff\ & \exists\delta>0,\ \exists t_k\in(x,x+\delta),\ k=1,2,\cdots,\ t_k\to x+,\ k\to\infty,\ \varphi(t_k)<\lambda.
\end{aligned}$$

证明 下证书上 128 页定理 1.1 的证明中, 集

$$E_{uv}=\left\{x\in(a,b):D_-f(x)<u<v<D^+f(x)\right\}$$

为零测集, 分两步.

第一步.

$$E_u=\left\{x\in(a,b):D_-f(x)<u\right\}\supset E_{uv}.$$

任意 $x\in E_u$, 有

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0+}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}<u\\
\iff\ & \exists\delta>0,\ \forall h\in(0,\delta),\ \exists t\in(0,h)\ \text{使}\ \frac{f(x)-f(x-t)}{t}<u.
\end{aligned}$$

令

$$\mathscr{F}_u=\left\{[t,s]\subset(a,b):f(s)-f(t)<u(s-t)\right\}, \tag{5.1.1}$$

则 $\mathscr{F}_u$ 是 E_u 的一个 Vitali 覆盖, 也是 E_{uv} 的一个 Vitali 覆盖. 由 Vitali 覆盖引理, 存在一族至多可数的区间 $I_k\in\mathscr{F}_u$ 两两不交, 使得 $\left|E_{uv}\setminus\bigcup_k I_k\right|=0$. 记 $\mathring{I}_k=(a_k,b_k), A_k=\mathring{I}_k\cap E_{uv}$, $k=1,2,\cdots$. 若 $A_k\neq\varnothing$, $\forall x\in A_k$, 则

$$\begin{aligned}
&D^+f(x)=\limsup_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>v\\
\iff\ & \exists\delta>0,\ \forall h\in(0,\delta),\ \exists t\in(a,b)\ \text{使}\ \frac{f(x+t)-f(x)}{t}>v.
\end{aligned}$$

令

$$\mathscr{F}_{vk}^*=\left\{[t,s]\subset\mathring{I}_k:f(s)-f(t)>v(s-t)\right\}.$$

$\mathscr{F}_{vk}^*$ 是 A_k 的一个 Vitali 覆盖. 由 Vitali 覆盖引理, 存在一族至多可数的区间 $J_{kl}\in\mathscr{F}_{vk}^*$ 两两不交, 使得

$\left|A_k\setminus\bigcup_l J_{kl}\right|=0$. 利用 f 的单增性, 记 $J_{kl}=[a_{kl},b_{kl}]$, $l\in N_k\subset\mathbb{N}_+$, N_k 是有限集或 $\mathbb{N}_+$, $J_{kl}\subset\mathring{I}_k$, 有

$$f(b_k)-f(a_k)\geqslant\sum_{l\in N_k}\big(f(b_{kl})-f(a_{kl})\big).$$

又 $f(b_{kl})-f(a_{kl})>v(b_{kl}-a_{kl}),\forall l\in N_k$, 故

$$f(b_k)-f(a_k)>v\sum_{l\in N_k}(b_{kl}-a_{kl})=v\sum_{l\in N_k}|J_{kl}|\geqslant v|A_k|,$$
$$A_k=\mathring{I}_k\cap E_{uv}=\left(\mathring{I}_k\cap E_{uv}\setminus\left(\bigcup_{l\in N_k}J_{kl}\cap E_{uv}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{l\in N_k}J_{kl}\cap E_{uv}\right).$$

任意 $\varepsilon>0$, 取开集 [2] $G\supset E_{uv}$, 使得 $I_k\subset G$ 且 $|G|\leqslant|E_{uv}|+\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned}v|E_{uv}|&\leqslant v\left|\bigcup_k\left(\mathring{I}_k\cap E_{uv}\right)\right|=v\left|\bigcup_k A_k\right|\leqslant v\sum_k|A_k|\\&<\sum_k\big(f(b_k)-f(a_k)\big)<\sum_k u(b_k-a_k)=u\sum_k|I_k|\leqslant u|G|<u\big(|E_{uv}|+\varepsilon\big),\end{aligned}$$

即 $v|E_{uv}|<u\big(|E_{uv}|+\varepsilon\big)$. 由 ε 的任意性, $v|E_{uv}|\leqslant u|E_{uv}|$. 因为 $u<v$, 所以 $|E_{uv}|=0$. □

定理 5.2 (Fubini **逐项求导定理**) 设 $f_k:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调不减, 若任意的 $x\in[a,b]$, $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 收敛于 $f(x)$, 则几乎所有的 $x\in[a,b]$, 有 $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x)$.

证明 记 $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)$, $n\in\mathbb{N}_+$. 因 f_k 单调不减, 故存在 $f_k'(x)$, a.e. $x\in[a,b]$ 且 $f_k'(x)\geqslant 0$, 有

$$0\leqslant\int_a^b f_k'(x)\mathrm{d}x\leqslant f_k(b)-f_k(a),\quad\forall k\in\mathbb{N}_+,$$

于是

$$\int_a^b\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k'(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{Levi 定理}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_a^b f_k'(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\big(f_k(b)-f_k(a)\big)\to 0,\quad n\to\infty.$$

又

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k'(x)\geqslant\sum_{k=n+2}^{\infty}f_k'(x),\quad\forall n\in\mathbb{N}_+,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k'(x)\mathrm{d}x=0,$$

故

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k'(x)\mathrm{d}x\to 0,\quad\text{a.e. }x\in[a,b],\quad n\to\infty.$$

[2]这个 G 能取到好像不是那么显然, 应该要对 (5.1.1) 式中集合包含于 G 做些说明.

又 $f(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)+r_n(x)$, 所以

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k'(x)+r_n'(x), \quad r_{n+1}'=r_n'(x)+f_n(x), \quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

因为 $r_n(x)$ 单调不减, 所以

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} r_n'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \liminf_{n\to\infty} r_n'(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_a^b r'(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty}\big(r_n(b)-r_n(a)\big).$$

因此 $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$, a.e. $x\in[a,b]$. □

§5.2 有界变差函数

命题 5.1

(i) 若 $f\in \mathrm{BV}[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

(ii) 若 $f,g\in \mathrm{BV}[a,b],\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则 $\alpha f+\beta g\in \mathrm{BV}[a,b]$.

(iii) $f\in \mathrm{BV}[a,b]\Leftrightarrow \forall c\in(a,b), f\in \mathrm{BV}[a,c]\cap \mathrm{BV}[c,b]$, 同时 $V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$.

(iv) 若 $f\in \mathrm{BV}[a,b]$, 则 $f=\varphi-\psi$, 其中 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\big(V_a^x(f)+f(x)\big)$, $\psi(x)=\frac{1}{2}\big(V_a^x(f)-f(x)\big)$ 为两个单调不减函数.

证明 (i) 因为 $f\in \mathrm{BV}[a,b]$, 任意 $x\in[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(x)-f(a)+f(a)|\\&\leqslant |f(a)|+|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\\&=\begin{cases}|f(a)|+V(f,a,x,b), & a<x<b,\\ |f(a)|+V(f,a,b), & x=a \text{ 或 } x=b,\end{cases}\\&\leqslant |f(a)|+V_a^b(f)<+\infty.\end{aligned}$$

故 f 在 $[a,b]$ 上是有界的.

(ii) 由有界变差函数的定义, 对于任意一组节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n$, 有

$$V(f,x_0,x_1,\cdots,x_n)\leqslant V_a^b(f)<+\infty, \quad V(g,x_0,x_1,\cdots,x_n)\leqslant V_a^b(g)<+\infty,$$

故

$$\begin{aligned}V(\alpha f+\beta g,x_0,x_1,\cdots,x_n)&=\sum_{j=1}^{n}\big|(\alpha f+\beta g)(x_j)-(\alpha f+\beta g)(x_{j-1})\big|\\&\leqslant|\alpha|\sum_{j=1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1}))|+|\beta|\sum_{j=1}^{n}|g(x_j)-g(x_{j-1}))|\\&\leqslant|\alpha|V_a^b(f)+|\beta|V_a^b(g)<+\infty.\end{aligned}$$

所以就有

$$V_a^b(\alpha f+\beta g)\leqslant|\alpha|V_a^b(f)+|\beta|V_a^b(g)<+\infty,$$

即 $\alpha f+\beta g\in \mathrm{BV}[a,b]$.

(iii) 必要性. 若 $f\in\mathrm{BV}[a,b]$, 下证 $f\in\mathrm{BV}[a,c]$.

对于任意节点组 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=c$, 都有

$$V(f,x_0,x_1,\cdots,x_m)=\sum_{j=1}^{m}\big|f(x_j)-f(x_{j-1})\big|\leqslant\sum_{j=1}^{m}\big|f(x_j)-f(x_{j-1})\big|+|f(b)-f(c)|.$$

又 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=c<b=x_{m+1}$ 是 $[a,b]$ 的一组节点, 故

$$V(f,x_0,x_1,\cdots,x_m)\leqslant V(f,x_0,x_1,\cdots,x_m,x_{m+1})\leqslant V_a^b(f)<+\infty.$$

因此, $f\in\mathrm{BV}[a,c]$, 类似可证 $f\in\mathrm{BV}[c,b]$.

充分性. 任取 $[a,b]$ 的一组节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 当 $c=x_i$ (对某个 i) 时, 有

$$V(f,x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{i}|f(x_j)-f(x_{j-1})|+\sum_{i+1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})|\leqslant V_a^c(f)+V_c^b(f)<+\infty,$$

所以 $V_a^b(f)\leqslant V_a^c(f)+V_c^b(f)<+\infty$, 即 $f\in\mathrm{BV}[a,b]$. 当存在 i, 使得 $x_{i-1}<c<x_i$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&V(f,x_0,x_1,\cdots,x_n)\\
=&\sum_{j=1}^{i-1}|f(x_j)-f(x_{j-1})|+|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{j=i+1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})|\\
\leqslant&\sum_{j=1}^{i-1}|f(x_j)-f(x_{j-1})|+|f(c)-f(x_{i-1})|+|f(x_i)-f(c)|+\sum_{j=i+1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})|\\
=&V(f,x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},c)+V(f,c,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\\
\leqslant&V_a^c(f)+V_c^b(f)<+\infty,
\end{aligned}$$

所以 $V_a^b(f)\leqslant V_a^c(f)+V_c^b(f)<+\infty$, 即 $f\in\mathrm{BV}[a,b]$. 下证 $V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$. 对于任意的 $\varepsilon>0$, 由变差定义, 存在 $[a,c]$ 的一组节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=c$, 使 $V(f,x_0,x_1,\cdots,x_m)>V_a^c(f)-\dfrac{\varepsilon}{2}$, 存在 $[c,b]$ 的一组节点 $c=y_0<y_1<\cdots<y_k=b$, 使 $V(f,y_0,y_1,\cdots,y_k)>V_c^b(f)-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}
&V(f,x_0,x_1,\cdots,x_m=c=y_0,y_1,\cdots,y_k)\\
&\quad=V(f,x_0,x_1,\cdots,x_m)+V(f,y_0,y_1,\cdots,y_k)>V_a^c(f)+V_c^b(f)-\varepsilon,
\end{aligned}$$

故 $V_a^c(f)+V_c^b(f)-\varepsilon<V_a^b(f)$ 对于任意 $\varepsilon>0$ 成立. 由 ε 的任意性可得 $V_a^c(f)+V_c^b(f)\leqslant V_a^b(f)$. 所以 $V_a^c(f)+V_c^b(f)=V_a^b(f)$.

(iv) 全变差函数 $V_a^x(f)$, $a\leqslant b$ 在 $[a,b]$ 上是单调不减的, 由变差定义可得

$$|f(x)-f(a)|\leqslant V_a^x(f).\tag{5.2.1}$$

下证 φ, ψ 单调不减. 当 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 时, 不妨设 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned}\varphi(x_2)-\varphi(x_1) &= \frac{1}{2}\left(V_a^{x_2}(f)+f(x_2)\right)-\frac{1}{2}\left(V_a^{x_1}(f)+f(x_1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(V_{x_1}^{x_2}+(f(x_2)-f(x_1))\right)\geqslant 0, \quad (\text{由 (5.2.1) 可得}).\end{aligned}$$ □

推论 5.1

(i) 若 $f \in \mathrm{BV}[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上的不连续点至多可数且 f Riemann 可积.

(ii) 若 $f \in \mathrm{BV}[a,b]$, 则 f 几乎处处有有限导数, 且 $f' \in L([a,b])$ (由命题 5.1 (iv)).

例 5.4 若 f 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $f \in \mathrm{BV}[a,b]$.

证明 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上单调不减, 任取 $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 有

$$V(f, x_0, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n}\left|f(x_j)-f(x_{j-1})\right|.$$

因为 f 单调不减, $f(x_j)-f(x_{j-1}) \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, n$, 所以

$$V(f, x_0, \cdots, x_n) = \left|\sum_{j=1}^{n} f(x_j)-f(x_{j-1})\right| = f(b)-f(a). \tag{5.2.2}$$

□

例 5.5 $f(x) = x^2 \sin\dfrac{\pi}{x} \in \mathrm{BV}[0,1]$.

证明 任意的点组 $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})| &= |f(x_1)-f(0)| + \sum_{j=2}^{n}\left|\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(t)\mathrm{d}t\right| \quad (\text{Newton-Leibniz 公式})\\ &\leqslant |f(x_1)| + \sum_{j=2}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\\ &= |f(x_1)| + \int_{x_1}^{1}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\\ &= |f(x_1)| + \int_{x_1}^{1}\left|2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right|\\ &\leqslant 1 + \int_{x_1}^{1}(2+1)\mathrm{d}x \leqslant 4.\end{aligned}$$ □

§5.3 绝对连续函数

例 5.6 设 $g \in L([a,b])$, 定义 $f(x) = \displaystyle\int_{[a,x]} g(t)\mathrm{d}t$ 则对任意非空开集 $G \subset [a,b]$, $G = \displaystyle\bigcup_k (a_k, b_k)$, 其中 (a_k, b_k) 至多可数且两两不交.

$$\sum_k\left|f(b_k)-f(a_k)\right| = \sum_k\left|\int_{(a_k,b_k)} g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_k\int_{(a_k,b_k)}|g(t)|\mathrm{d}t = \int_{\bigcup_k(a_k,b_k)}\left|g(t)\right|\mathrm{d}t = \int_G\left|g(t)\right|\mathrm{d}t,$$

即 $\sum_k \left|f(b_k)-f(a_k)\right| \leqslant \int_G \left|g(t)\right| \mathrm{d}t$. 所以任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $|G|<\delta$ 就有 $\sum_k |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$.

命题 5.2 (**绝对连续函数的性质**)

(i) $f\in \mathrm{AC}[a,b] \Rightarrow f\in \mathrm{BV}[a,b]\cap C[a,b]$.

(ii) $f,g\in \mathrm{AC}[a,b] \Rightarrow \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha f+\beta g\in \mathrm{AC}[a,b]$.

(iii) $f,g\in \mathrm{AC}[a,b] \Rightarrow fg\in \mathrm{AC}[a,b]$.

(iv) $f\in \mathrm{AC}[a,b] \Leftrightarrow \exists g\in L([a,b])$ 使得 $f(x)=\int_{[a,x]} g(t)\mathrm{d}t+C$.

证明 (i) $f\in C[a,b]$ 显然, 下证 $f\in \mathrm{BV}[a,b]$. 取 $\varepsilon=1$, 对应定义中的 $\delta_0>0$, 使得任意开集 $G\subset[a,b]$, $G(f)<\varepsilon=1$. 将 $[a,b]$ 分成有限个长度小于 δ_0 的区间 $[a_{j-1},a_j]$, 其中

$$a=a_1<a_2<\cdots<a_k=b,\quad j=1,\cdots,k,\quad a_j-a_{j-1}<\delta_0.$$

对每个 j, $1\leqslant j\leqslant k$, 任给 $[a_{j-1},a_j]$ 的一组分点 $a_{j-1}=x_0<x_1<\cdots<x_m=a_j$. 记 $G=\bigcup_{l=1}^m (x_{l-1},x_l)$, 则 G 为 $[a,b]$ 的一个开子集, 且 $|G|=x_m-x_0=a_j-a_{j-1}<\delta_0$, 进而 $G(f)=\sum_{l=1}^m \left|f(x_j)-f(x_{j-1})\right|<\varepsilon$. 由有界变差函数定义, 知 f 在 $[a_{j-1},a_j]$ 上是有界变差的且 $V_{a_{j-1}}^{a_j}(f)\leqslant 1$ 进而 $V_a^b(f)\leqslant k$, 即 $f\in \mathrm{BV}[a,b]$.

(ii), (iii) 自行证明. (iv) 课上还没证. □

定理 5.3 若 $f\in \mathrm{AC}[a,b]$ 且几乎处处成立 $f'(x)=0$, 则 f 是 $[a,b]$ 上的常函数.

证明 由绝对连续定义, 若 $f\in \mathrm{AC}[a,b]$, 则任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$, 只要非空开集 $G\subset[a,b]$ 满足 $|G|<\delta$, 就有 $G(f)<\varepsilon$. 记 $E=\left\{x\in(a,b): f'(x)=0\right\}$, 则有 $|E|=b-a$. 对任意 $x\in E$, 由导数定义, 有

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

则对上述 ε, 存在 $\eta>0$, 只要 $h\in(0,\eta)$, 就有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\varepsilon,\quad [x,x+h]\subset(a,b).$$

记

$$\mathscr{K}=\Big\{[x,x+h]\subset(a,b): \left|f(x+h)-f(x)\right|<\varepsilon h\Big\},$$

则 $\mathscr{K}$ 是 E 的一个 Vitali 覆盖. 由 Vitali 覆盖引理, 存在至多可数个互不相交的闭区间 $B_k\in\mathscr{K}$, $k\in N\subset\mathbb{N}_+$, 使得 $\left|E\setminus\bigcup_k B_k\right|=0$. 由 $|E|=b-a$ 可得 $\sum_k |B_k|\geqslant b-a$. 对于上述 $\delta>0$, 不妨设 $\delta<b-a$, 存在 $m\in\mathbb{N}_+$ 使得 $\sum_{k=1}^m |B_k|>b-a-\delta$, 记 $G=(a,b)\setminus\bigcup_{k=1}^m B_k$. 则 G 是开集且 $|G|<\delta$, $G(f)<\varepsilon$. 记 $B_k=[a_k,b_k]$, $k=1,2,\cdots,m$, 则有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant \sum_{k=1}^m \left|f(b_k)-f(a_k)\right|+G(f)<\varepsilon\sum_{k=1}^m (b_k-a_k)+\varepsilon<\varepsilon(b-a+1).$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可得 $f(b) = f(a)$.

把上述过程用在任何闭子区间 $[a, x]$ 上, 就有 $f(x) = f(a)$, 即 f 在 $[a, b]$ 上是常函数. □

定理 5.4 设 $f \in L\big([a,b]\big)$ 且 $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\mathrm{d}t$, 则在 (a, b) 上几乎处处成立 $F'(x) = f(x)$.

证明 若 f 是有界的函数. 设 $|f(x)| \leqslant B < +\infty$, $x \in [a, b]$. 令 $f(x) = 0$, $x \notin [a, b]$, $x > b$ 时, 有 $F(x) = F(b)$. 令

$$f_k(x) = \frac{F(x+k^{-1}) - F(x)}{k^{-1}}, \quad x \in [a, b],$$

有

$$\big|f_k(x)\big| = k\left|\int_{[x,x+k^{-1}]} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant B < +\infty,$$

且 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ 几乎处处存在 (????? 为什么存在没搞懂). 则

$$\begin{aligned}
\int_{[a,x]} F'(t)\mathrm{d}t &= \int_{[a,x]} \lim_{k\to\infty} f_k(t)\mathrm{d}t \\
\text{(Lebesgue 控制收敛定理)} \quad &= \lim_{k\to\infty}\int_{[a,x]} f_k(t)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{k\to\infty} k\left(\int_{a+k^{-1}}^{x+k^{-1}} F(t)\mathrm{d}t - \int_a^x F(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} k\left(\int_{x}^{x+k^{-1}} F(t)\mathrm{d}t - \int_a^{a+k^{-1}} F(t)\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

因为 $F \in \mathrm{AC}[a, b]$ 所以 $F \in C[a, b]$, 进而[3]

$$\int_{[a,x]} F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a) = F(x).$$

即 $\int_{[a,x]} (f(t) - F'(t))\mathrm{d}t = 0$, $\forall x \in [a, b]$. 由例 5.10 知在 (a, b) 上几乎处处成立 $F'(t) = f(t)$.

对于一般情形. 不妨设几乎处处有 $f \geqslant 0$, 此时 F 单调不减. 令 $f_n = f\chi_{(f<n)}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 且令 $G_n(x) = \int_{[a,x]} (f - f_n)$. G_n 单调不减且有 $f - f_n = f\left(1 - \chi_{f<n}\right)$. 此时, $G_n(x) = F(x) - \int_{[a,x]} f_n(t)\mathrm{d}t$. 由前面所证可得几乎处处有 $F' = G' + f_n \geqslant f_n$. 在不等式 $F' \geqslant f_n$ 的两端, 令 $n \to \infty$ 得 $f \leqslant F'$, 进而

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{[a,x]} F'(t)\mathrm{d}t.$$

由 F 单调不减, 有

$$\int_{[a,x]} F'(t)\mathrm{d}t \leqslant F(x) - F(a) = F(x).$$

故 $\int_{[a,x]} F'(t)\mathrm{d}t = F(x)$. 进一步 $\int_{[a,x]} \big(f(t) - F'(t)\big)\,\mathrm{d}t = 0$, 所以几乎处处成立 $f(t) = F'(t)$. □

定理 5.5 (微积分基本定理, Newton-Leibniz 公式) 设 $f \in \mathrm{AC}[a, b]$, 则 $\int_{[a,b]} f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

[3] 应该要用到中值定理.

证明 由

$$\left(f(x)-\int_{[a,x]}f'(t)\mathrm{d}t\right)'=f'(x)-f'(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in[a,b]$$

及定理 5.3 可得 $f(x)-\displaystyle\int_{[a,x]}f(t)\mathrm{d}t=C$, C 为常数. 令 $x=a$ 可得 $C=f(a)$, 推出结论. □

§5.4 Cantor 集与 Cantor 函数

定义 5.4 (**稀疏集**) 设 $E\subset\mathbb{R}$ 非空, 若任意区间 $I\subset\mathbb{R}$, 都存在子区间 $J\subset I$, 使得 $I\cap E=\varnothing$, 称 E 是稀疏集.

定义 5.5 (**奇异函数**) 若函数 r 几乎处处有 $r'(x)=0$, 则称 r 为奇异函数. 若奇异函数 r 连续, 则称 r 是连续的奇异函数.

5.4.1 Cantor 集的构造

记 $I=[0,1]$. 将 I 三等分成三个区间, 去掉中间的开区间 $I_{11}=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. 将 $I\setminus I_{11}$ 的两个闭区间, 再分别三等分, 分别去掉其中间的开区间 $I_{21}=\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{2}{9}\right), I_{22}=\left(\dfrac{7}{9},\dfrac{8}{9}\right)$. 如此继续, 到第 n 步, 去掉 2^{n-1} 个长为 3^{-n} 的开区间, 剩下的是长为 3^{-n} 的 2^n 个闭区间. 无限步地进行下去, 去掉的开区间 I_{nj}, $j=1,2,\cdots,2^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 长为 3^{-n}, 且这些开区间两两不交. 记 $G=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{n-1}}I_{nj}$, 则 G 是开集, 且

$$|G|=\sum_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{n-1}}|I_{nj}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=1.$$

记 $P=[0,1]\setminus G$, G 是开集. 称 P 是 Cantor 集, 有 $|P|=0$.

命题 5.3 (Cantor **集** P **的性质**)

(i) P 是稀疏的.

(ii) P 是没有孤立点的闭集 (完全集).

(iii) P 的基数是 $\aleph$ (与 $[0,1]$ 等势).

证明 (i) 任意区间 $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$. $(\alpha,\beta)\cap[0,1]=\varnothing$ 时, 显然有 (α,β) 的一个子区间 J, 使得 $J\cap E=\varnothing$. $(\alpha,\beta)\cap[0,1]\neq\varnothing$ 时, 有 $(\alpha,\beta)\cap(0,1)\neq\varnothing$. 记 $(\alpha',\beta')=(\alpha,\beta)\cap(0,1)$, 则 $(\alpha',\beta')\cap G\neq\varnothing$, 否则 $(\alpha',\beta')\subset P$, 这是不可能的, 因为 $|P|=0$, $\beta'-\alpha'>0$. 由 $(\alpha',\beta')\cap G\neq\varnothing$, 存在 $x_0\in(\alpha',\beta')\cap G$, 存在 $\delta>0$ 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(\alpha',\beta')\cap G$, 进而 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap P\neq\varnothing$.

(ii) 提示: 要证 $x\in P$ 不是孤立点, 即证 x 不是 $P^c=G\cup(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的两个构成区间的端点.

(iii) 任意 $x\in[0,1]$, x 的三进制表示为

$$x=x_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{3^k},\quad x_0=0,1,\quad x_k\in\{0,1,2\},\quad k=1,2,\cdots,$$

约定不会出现存在 N, $k>N$, $x_k=2$ 的情况. 上述表法唯一, 记为 $x={}_3x_0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$. x 也可写成二进制小数

$$x=y_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{2^k},\quad y_k\in\{0,1\}\,,$$

约定不会出现存在 N, $k>N$, $y_k=1$ 的情形, 此时记 $x={}_2y_0.y_1y_2\cdots y_n\cdots$.

再看 Cantor 集的构造过程. 第一步去掉的区间

$$I_{11}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \forall x\in I_{11},\quad x=\frac{1}{3}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{x_k}{3^k},$$

$x_2,\cdots,x_k,\cdots$ 不能全为 0, 不能从某项开始全为 2, $x={}_30.1x_2\cdots x_k\cdots$. 第二步去掉的区间

$$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\quad \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\quad x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\quad x={}_30.01x_3\cdots,\quad x\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),\quad x={}_30.21x_3\cdots.$$

将去掉的区间用三进制表示, 有

$$\begin{aligned}
&I_{11}={}_3(0.1,0.2),\\
&I_{21}={}_3(0.01,0.02),\\
&I_{22}={}_3(0.21,0.22),\\
&\quad\vdots\\
&I_{nj}={}_3(0.x_1\cdots x_{n-1}1,0.x_1\cdots x_{n-1}2),\quad x_1,\cdots,x_{n-1}\in\{0,2\}\,.
\end{aligned}$$

于是任意 $x\in G$ 可表示为

$$x={}_30.x_1\cdots x_m1x_{m+2}\cdots,\quad x_1,\cdots,x_m\in\{0,2\}\,,\quad x_k\in\{0,1,2\}\,,$$

并且不会出现 $k>N\in\mathbb{N}_+$ 时, $x_k\equiv 2$ 的情形. 则任意 $x\in P$ 可表示为 $x=1.0$ 或

$$x={}_30.x_1x_2\cdots x_k\cdots,\quad x_j\in\{0,2\}\,,$$

并且不会出现 $k>N\in\mathbb{N}_+$ 时, $x_k\equiv 2$ 的情形. 任意 $x\in P$, 设

$$Tx={}_20.y_1y_2\cdots y_k\cdots,\quad y_j=\begin{cases}0, & x_j=0,\\ 1, & x_j=2,\end{cases}\quad T_1=1.$$

易证 $T:P\to[0,1]$ 是一个一一对应, 进而 P 的势与 $[0,1]$ 的势相同. □

5.4.2 Cantor 函数

设

$$\theta(x)=\begin{cases}0,\quad x=0,\qquad 1,\quad x=1,\\ \dfrac{2j-1}{2^n}, \qquad x\in I_{nj},\quad 1\leqslant j\leqslant 2^{n-1},\quad n\in\mathbb{N}_+,\\ \sup\limits_{y<x,y\in G}\theta(y),\quad x\in P,\quad x\neq 0,1.\end{cases}$$

有如下性质.

(i) $\theta \in C\big([0,1]\big)$.

(ii) θ 单调不减.

(iii) $\theta(0)=1$, $\theta(1)=1$ 且几乎处处有 $\theta'(x)=0$.

(iv) $\displaystyle\int_{[0,1]} \theta'(x)\mathrm{d}x = 0 < \theta(1)-\theta(0)=1$.

(v) θ 是一个连续的奇异函数.

定理 5.6 设 f 在 $[a,b]$ 上为有界变差函数, 则 $\varphi(x)=f(x)-\displaystyle\int_{[a,x]} f'$ 是一个奇异函数. 称

$$f(x)=\int_{[a,x]} f'(x)+\varphi(x)$$

为 f 的绝对连续奇异函数分解. $f\in \mathrm{AC}[a,b]$ 时, $\varphi(x)\equiv$ 常数.

§5.5 一些例子

例 5.7 设 $f\in \mathrm{BV}[a,b]$. 则 f 在 x 点连续, 当且仅当 $V_a^x(f)$ 在 x 点连续.

证明 充分性. 设 $x+\Delta x$, $x\in[a,b]$. $\Delta x>0$ 时,

$$\big|f(x+\Delta x)-f(x)\big| \leqslant V_x^{x+\Delta x}(f)=V_a^{x+\Delta x}(f)-V_a^x(f).$$

因为 $V_a^x(f)$ 在 x 点连续, 所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0+} V_a^{x+\Delta x}(f)=V_a^x$, 因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0+} f(x+\Delta x)=f(x)$. 类似地, $\Delta x<0$ 时, 由

$$\big|f(x)-f(x+\Delta x)\big| \leqslant V_{x+\Delta x}^x(f)=V_a^x(f)-V_a^{x+\Delta x}(f)$$

及 $V_a^x(f)$ 在 x 点的连续性知 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x+\Delta x)=f(x)$. 综上所述, f 在 x 点连续.

必要性. 设 f 在 x 连续, 下证 $V_a^x(f)$ 在 x 连续. 由 $f\in \mathrm{BV}[a,b]$, 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个分点组 $a=x_0<\cdots<x_n=b$, 使得

$$V_a^b(f)<V(f,x_0,x_1,\cdots,c_n)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $x\in(a,b)$, 令

$$s=\max\big\{x_j : x_j<x\big\},\quad t=\min\big\{x_j : x_j>x\big\},$$

有

$$\begin{aligned}
V_a^b(f)&=V_a^s(f)+V_s^t(f)+V_t^b(f)<V(f,x_0,\cdots,x_n)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant V(f,x_0,x_1,\cdots,s)+V(f,t,\cdots,x_n)+\frac{\varepsilon}{2}+|f(x)-f(s)|+|f(t)-f(x)|\\
&\leqslant V_a^s(f)+V_t^b(f)+|f(x)-f(s)|+|f(t)-f(x)|+\frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

故

$$V_s^t(f)\leqslant |f(x)-f(s)|+|f(t)-f(x)|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 f 的连续性, 对于上述的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $y\in[a,b]$ 且 $|y-x|<\delta$, 就有 $|f(y)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4}$. 此时不妨认为 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 满足 $|x_{j+1}-x_j|<\delta$, $j=0,1,2,\cdots,n-1$. 此时 $|t-x|<\delta$, $|s-x|<\delta$, 必有 $|f(t)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4}$, $|f(x)-f(s)|<\dfrac{\varepsilon}{4}$, 进而 $V_s^t(f)<\varepsilon$. 故 $|\Delta x|<\delta$ 时,

$$\left|V_a^{x+\Delta x}(f)-V_a^x(f)\right|=\begin{cases}V_x^{x+\Delta x}, & \Delta x>0,\\ V_{x+\Delta x}^x, & \Delta x<0,\end{cases}<\varepsilon. \qquad \square$$

例 5.8　$f\in\mathrm{AC}[a,b]\Leftrightarrow V_a^x(f)\in\mathrm{AC}[a,b]$.

证明　充分性. 由 $V_a^x(f)\in\mathrm{AC}[a,b]$, 按定义, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $[a,b]$ 的一组至多可数个互不相交的开区间 $\big\{(a_v,b_v)\big\}$ 满足 $\sum\limits_v|b_v-a_v|<\delta$, 就有

$$\sum_v\left|V_a^{b_v}(f)-V_a^{a_v}(f)\right|<\varepsilon,$$

即此时 $\sum\limits_v V_{a_v}^{b_v}(f)<\varepsilon$. 因此

$$\sum_v\big|f(b_v)-f(a_v)\big|\leqslant\sum_v V_{a_v}^{b_v}<\varepsilon.$$

所以 $f\in\mathrm{AC}[a,b]$.

必要性. $f\in\mathrm{AC}[a,b]$, 则

$$f(x)=f(a)+\int_{[a,x]}f'(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

由此, 对 $[a,b]$ 的任何一个子区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 都有 $V_\alpha^\beta(f)\leqslant\displaystyle\int_{[\alpha,\beta]}|f'(t)|\mathrm{d}t$. 事实上, 对 $[\alpha,\beta]$ 的任何一组分点 $\alpha=t_0<\cdots<t_m=\beta$, 都有

$$\sum_{v=1}^m\big|f(t_v)-f(t_{v-1})\big|=\sum_{v=1}^m\left|\int_{[t_{v-1},t_v]}f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\sum_{v=1}^m\int_{[t_{v-1},t_v]}|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_{[\alpha,\beta]}|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

由有界变差函数的定义可得 $V_\alpha^\beta(f)\leqslant\displaystyle\int_{[\alpha,\beta]}|f'(t)|\mathrm{d}t$. 再由积分的绝对连续性, $f'\in L([a,b])$, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要可测集 $A\subset[a,b]$, $|A|<\delta$, 就有 $\displaystyle\int_A|f'|<\varepsilon$. 若 $A=\bigcup\limits_v(\alpha_v,\beta_v)$, 其中 $\big\{(\alpha_v,\beta_v)\big\}$ 是 $[a,b]$ 的一族互不相交至多可数个开区间. 只要 $\sum\limits_v(b_v-a_v)<\delta$ 就有

$$\sum_v\left|V_a^{\beta_v}(f)-V_a^{\alpha_v}(f)\right|=\sum_v V_{\alpha_v}^{\beta_v}(f)\leqslant\sum_v\int_{[\alpha_v,\beta_v]}|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_{\bigcup_v[\alpha_v,\beta_v]}|f'(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

因此, $V_a^x(f)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. $\square$

注 5.4　若 $f\in\mathrm{AC}[a,b]$, 则

$$V_a^x(f)=\int_{[a,x]}|f'(t)|\mathrm{d}t,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

即几乎处处成立 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V_a^x(f)=|f'(x)|$, 这是因为

$$\frac{1}{\Delta x}V_x^{x+\Delta x}(f)=\frac{1}{\Delta x}\int_{[x,x+\Delta x]}|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

例 5.9 设 $\alpha,\ \beta>0$ 且

$$f_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x^\beta}, & 0<x<+\infty,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

问, $\alpha,\ \beta$ 满足什么条件时 $f_{\alpha,\beta}\in\mathrm{BV}[0,1]$, 满足什么条件时 $f_{\alpha,\beta}\in\mathrm{AC}[0,1]$.

解 (?????这题好像还是算错了.) 由于 $f_{\alpha,\beta}\in\mathrm{AC}[0,1]$ 的必要条件是 $f_{\alpha,\beta}\in L([0,1])$, 故首先求出 $f'_{\alpha,\beta}$.

$$f'_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0,\\ 0, & x=0,\ \alpha>1,\\ \text{不存在}, & x=0,\ \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

(1) $\left|\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}\right|\leqslant\alpha x^{\alpha-1},0<x\leqslant 1$. $\alpha\geqslant 1$ 时, $\alpha x^{\alpha-1}$ 在 $[0,1]$ 是广义绝对 Riemann 可积的, $\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}$ 在 $(0,1]$ 是 Riemann 可积的, 故这项是 Lebesgue 可积的.

(2)

$$\int_0^1\left|x^{\frac{\alpha-\beta-1}{\beta}}\cos\frac{1}{x^\beta}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta}\int_1^{+\infty}t^{\beta+1-\alpha}|\cos t|t^{-\frac{1}{\beta}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\beta}\int_1^{+\infty}t^{-\frac{\alpha}{\beta}}|\cos t|\mathrm{d}t$$

收敛, 当且仅当 $\dfrac{\alpha}{\beta}>1$.

$f'_{\alpha,\beta}\in L([0,1])\Leftrightarrow\alpha>\beta$. 故 $\alpha\leqslant\beta$ 时, $f_{\alpha,\beta}\notin\mathrm{BV}[0,1]$.

当 $\alpha>\beta$ 时, 可得

$$f_{\alpha,\beta}(x)=\int_{[0,x]}f'_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t+f_{\alpha,\beta}(0),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

所以 $f_{\alpha,\beta}\in\mathrm{AC}[0,1]\subset\mathrm{BV}[0,1]$.

下证 $\alpha>\beta$ 时, $f_{\alpha,\beta}\in\mathrm{AC}[0,1]$. 首先 $f_{\alpha,\beta}\in C([0,1])$, 下证 $f_{\alpha,\beta}\in\mathrm{AC}[0,1]$. 只须证 $f_{\alpha,\beta}(x)=f_{\alpha,\beta}(0)+\displaystyle\int_{[a,x]}f'_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t,x>0,f(0)=0$.

注意到对于任意的 $\varepsilon\in(0,x)$, $f_{\alpha,\beta}$ 在 $[a,x]$ 有连续导数, 则有分析中 Newton-Leibniz 公式,

$$f_{\alpha,\beta}(x)-f_{\alpha,\beta}(\varepsilon)=\int_{[\varepsilon,x]}f'_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $\alpha>\beta$ 时, $f'_{\alpha,\beta}\in L([0,1])$ 及 $f\in C([0,1])$, 故 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}f(\varepsilon)=0$ 及

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{[\varepsilon,x]}f'_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t=\int_{[0,x]}f'_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t\ (\text{积分绝对连续性}),$$

进一步

$$f_{\alpha,\beta}(x)=\int_{[0,x]}f'_{\alpha,\beta}(t)\mathrm{d}t,\quad\forall x\in[0,1],$$

所以 $f_{\alpha,\beta}\in\mathrm{AC}[0,1]$. $\square$

例 5.10 若 $f \in L\big([a,b]\big)$ 且对于任意的 $x \in [a,b]$, 都有 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = 0$, 则几乎处处成立 $f(x)=0$.

证明 对于任意的 $\alpha,\beta \in [a,b]$, $\alpha<\beta$, 有

$$\int_{(\alpha,\beta)} f = \int_a^\beta f - \int_a^\alpha f = 0.$$

若 $G \subset [a,b]$ 是非空开集, 由开集结构性质 $G = \displaystyle\bigcup_{k\in J}(\alpha_k,\beta_k)$, 其中 (α_k,β_k) 为至多可数个开区间, 有

$$\int_G f = \int_{\bigcup_{k\in J}(\alpha_k,\beta_k)} f = \sum_{k\in J}\int_{(\alpha_k,\beta_k)} f = 0.$$

设 $E\subset[a,b]$ 为可测集, $E\setminus\{a,b\}$ 可测. 存在一列开集列 $\{G_k\}$, 使得

$$E\setminus\{a,b\} \subset G_k \subset (a,b), \quad \left|\bigcap_{k=1}^\infty G_k \setminus \big(E\setminus\{a,b\}\big)\right| = 0,$$

于是

$$\int_E f = \int_{E\setminus\{a,b\}} f = \int_{\bigcap_{k=1}^\infty G_k} f - \int_{\bigcap_{k=1}^\infty G_k\setminus\left(E\setminus\{a,b\}\right)} f = \int_{\bigcap_{k=1}^\infty G_k} f.$$

又因为

$$\lim_{N\to\infty} f\chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k} = f\chi_{\bigcap_{k=1}^\infty G_k}, \quad \left|f\chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k}\right| \leqslant |f| \in L\big([a,b]\big),$$

所以由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\int_{\bigcap_{k=1}^\infty G_k} f = \int_{[a,b]} f\chi_{\bigcap_{k=1}^\infty G_k} = \int_{[a,b]}\lim_{N\to\infty} f\chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k} = \lim_{N\to\infty}\int_{[a,b]} f\chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k} = \lim_{N\to\infty}\int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} f.$$

因 $\displaystyle\bigcap_{k=1}^N G_k$, $N\in\mathbb{N}_+$ 是开集, 所以 $\displaystyle\int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} = 0$, 进而 $\displaystyle\int_{\bigcap_{k=1}^\infty G_k} f = 0$, 所以 $\displaystyle\int_E f = 0$. 取

$$E_1 = \big\{x\in[a,b] : f(x)>0\big\}, \quad E_2 = \big\{x\in[a,b] : f(x)<0\big\},$$

由 $0 = \displaystyle\int_{E_1} f$ 可得 $|E_1| = 0$. 事实上, 令

$$E_k = \left\{x\in[a,b] : f(x) > \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 3,4,\cdots,$$

有

$$0 = \int_{E_k} f \geqslant \frac{1}{k}|E_k|, \quad E_1 = \bigcup_{k=3}^\infty E_k,$$

所以 $|E_1|=0$. 进而几乎处处成立 $f(x)\leqslant 0$, 同理几乎处处成立 $f(x)\geqslant 0$. 所以几乎处处成立 $f(x)=0$. □

例 5.11 设 $E\subset\mathbb{R}$ 可测且测度有限. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E |\sin nx|\mathrm{d}x$.

解 (1) $E=(\alpha,\beta)$, $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$ 时, 有

$$\int_E|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{n\alpha}^{n\beta}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_{n\alpha}^{[\frac{n\alpha}{\pi}]\pi+\pi}|\sin t|\mathrm{d}t+\frac{1}{n}\sum_{k=[\frac{n\alpha}{\pi}]+1}^{[\frac{n\beta}{\pi}-1]}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t+\frac{1}{n}\int_{[\frac{n\beta}{\pi}]\pi}^{n\beta}|\sin t|\mathrm{d}t.$$

又因为 $n\to\infty$ 时,

$$\left|\frac{1}{n}\int_{n\alpha}^{[\frac{n\alpha}{\pi}]\pi+\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2}{n}\to 0,$$

$$\left|\frac{1}{n}\int_{[\frac{n\beta}{\pi}]\pi}^{n\beta}|\sin t|\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2}{n}\to 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=[\frac{n\alpha}{\pi}]+1}^{[\frac{n\beta}{\pi}-1]}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{2}{n}\left(\left[\frac{n\beta}{\pi}\right]-1-\left[\frac{n\alpha}{\pi}\right]\right)\to\frac{2(\beta-\alpha)}{\pi},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta|\sin nx|\mathrm{d}x=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\pi}$.

(2) 设 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k,\beta_k)$, $|G|<\infty$, (α_k,β_k) 两两不交, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_{(\alpha_k,\beta_k)}|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}(\beta_k-\alpha_k)=\frac{2|G|}{\pi}.$$

(3) $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$, $|G|<\infty$, (α_k,β_k) 两两不交时, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}_+$, $k>N$ 时, $\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j)<\varepsilon$, 令 $G_{N+1}=\bigcup\limits_{k=1}^{N+1}(\alpha_k,\beta_k)$, 有

$$\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x=\int_{G_{N+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x+\int_{G\setminus G_{N+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x,$$

$$\int_{G\setminus G_{N+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant|G\setminus G_{N+1}|<\varepsilon,$$

$$\int_{G_{N+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\int_{G_{N+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x+\varepsilon.$$

对于任意的 $n\in\mathbb{N}_+$, 有

$$\frac{2|G_{N+1}|}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\int_{G_{N+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\limsup_{n\to\infty}\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\frac{2|G_{N+1}|}{\pi}+\varepsilon.$$

令 $N\to\infty$, 有

$$\frac{2|G|}{\pi}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\limsup_{n\to\infty}\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\frac{2|G|}{\pi}+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_G|\sin nx|\mathrm{d}x$ 存在且等于 $\dfrac{2|G|}{\pi}$.

(4) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测且 $|E| < \infty$. 存在一列开集 $\{G_k\}$ 使得

$$G_k \supset E, \quad \left|\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E\right| = 0, \quad |G_k| < \infty, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

有

$$\int_E |\sin nx| \mathrm{d}x = \int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} |\sin nx| \mathrm{d}x - \int_{\bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E} |\sin nx| \mathrm{d}x.$$

由于 $\left\{\bigcap_{k=1}^{N} G_k\right\}_{N=1}^{\infty}$ 是单减集列且 $|G_1| < \infty$, 则

$$\lim_{N \to \infty} \left|\bigcap_{k=1}^{N} G_k\right| = \left|\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right| = |E|,$$

故

$$\left|\bigcap_{k=1}^{N} G_k \setminus E\right| \to 0, \quad N \to \infty.$$

又

$$\int_{\bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E} |\sin nx| \mathrm{d}x \leqslant \left|\bigcap_{k=1}^{N} G_k \setminus E\right|,$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 使得 $N > N_0$ 时有 $\left|\bigcap_{k=1}^{N} G_k \setminus E\right| < \varepsilon$. 所以对每个 $N > N_0$, 有

$$\int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} |\sin nx| \mathrm{d}x - \left|\bigcap_{k=1}^{N} G_k \setminus E\right| \leqslant \int_E |\sin nx| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} |\sin nx| \mathrm{d}x,$$

进而

$$\frac{2}{\pi}\left|\bigcap_{k=1}^{N} G_k\right| - \varepsilon \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_E |\sin nx| \mathrm{d}x \leqslant \limsup_{n \to \infty} \int_E |\sin nx| \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\bigcap_{k=1}^{N} G_k\right|.$$

令 $N \to \infty$, 有

$$\frac{2|E|}{\pi} - \varepsilon \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_E |\sin nx| \mathrm{d}x \leqslant \limsup_{n \to \infty} \int_E |\sin nx| \mathrm{d}x \leqslant \frac{2|E|}{\pi}.$$

由 ε 的任意性可得 $\lim\limits_{n \to \infty} \int_E |\sin nx| \mathrm{d}x$ 存在且等于 $\dfrac{2|E|}{\pi}$. □

例 5.12 设 $M > 0$. $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \forall x, y \in [a, b] \Leftrightarrow f \in \mathrm{AC}[a, b]$ 且 $|f'(x)| \leqslant M$, a.e. $x \in [a, b]$.

证明 只给出提示. 设 f 在 $x_0 \in (a, b)$ 处有导数, 有 $\left|\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right| \leqslant M$, 进而 $|f'(x_0)| \leqslant M$. 反之, 若 $|f'| \leqslant M$, 则有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f', \quad |f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'\right| \leqslant M|x - y|.$$ □