

实变函数笔记

阙嘉豪

最后编译时间: 2021 年 12 月 22 日 16:08

前言

本笔记以刘永平老师的实变函数课板书记录, 修改而成. 使用的教材是王昆杨老师的《实变函数论讲义》, 笔记中提到的“书上”指的是此书. 以前的笔记记在了纸上, 所有 ???? 处都是我没弄懂或者有错误的地方.

目录

第一章 用开集刻画可测集	1
第二章 可测函数	3
第三章 可测函数的结构	9
§3.1 紧集上连续函数的延拓	9
§3.2 一致收敛, 几乎处处收敛, 依测度收敛关系	11
§3.3 定理	14
第四章 Lebesgue 积分及其基本理论	17
§4.1 Lebesgue 积分的定义及基本性质	17
§4.2 积分号下取极限	22
§4.3 把多重积分化为累次积分	28
§4.4 Riemann 积分与 Lebesgue 积分关系	32
§4.5 Lebesgue 积分小结	34
第五章 一元函数的变化性态	35
§5.1 单调函数可微性	35
§5.2 有界变差函数	39
§5.3 绝对连续函数	41
§5.4 Cantor 集与 Cantor 函数	44
5.4.1 Cantor 集的构造	44
5.4.2 Cantor 函数	45
§5.5 一些例子	46

第一章 用开集刻画可测集

定理 1.1 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. E 可测当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得 $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$.

证明 必要性.

设 E 可测. $m(E) < \infty$ 时, 由测度定义 $m(E) = m^*(E)$, 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在可数个方块 Q_k , 使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \supset E, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m(E) + \varepsilon.$$

令 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, 则 G 是开集, 满足

$$G \supset E, \quad m(G) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m(E) + \varepsilon.$$

又因为 $G = E \cup (G \setminus E)$ 是不交并, 所以由测度的可加性得 $m(G) = m(E) + m(G \setminus E)$, 进而 $m(G \setminus E) = m(G) - m(E) < \varepsilon$.

$m(E) = \infty$ 时, 注意到

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=2}^{\infty} (B(O; k) \setminus B(O; k-1)) \cup B(O; 1),$$

设

$$E_1 = B(O; 1) \cap E, \quad E_k = (B(O; k) \setminus B(O; k-1)) \cap E, \quad k = 2, 3, \dots,$$

有

$$E = E \cap \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left((B(O; k) \setminus B(O; k-1)) \cap E \right) \cup (B(O; 1) \cap E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

$\{E_k\}$ 两两不交, 可测且 $m(E_k) < \infty, k \in \mathbb{N}_+$. 由已经证明的 $m(E) < \infty$ 的情况, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_k \supset E_k$, 使得 $m(G_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. 令 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 G 是开集, 且 $G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$. 又

$$G \setminus E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(G_k \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus E_k),$$

得

$$m(G \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

充分性.

对于每个 $\varepsilon_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}_+$, 存在开集 $G_k \supset E$, 使得 $m^*(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$. 令 $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, 则有

$$H \setminus E \subset G_k \setminus E, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

进而

$$m^*(H \setminus E) \leq m^*(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

所以 $m^*(H \setminus E) = 0$. 令 $Z = H \setminus E$, 注意到 $E \subset H$, 所以 $E = H \setminus Z$ 是两可测集之差, E 是可测集. \square

例 1.1 设 $\{E_k\}$ 是一列可测集.

(i) 若 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset \cdots$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)$.

(ii) 若 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$, 且 $m(E_1) < \infty$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)$.

证明 (i) 若 $m(E_k) < \infty, \forall k \in \mathbb{N}_+$. 记

$$B_1 = E_1, \quad B_k = E_k \setminus E_{k-1}, \quad k = 2, 3, \cdots,$$

则有 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $\{B_k\}$ 两两不交且可测. 进而

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m(B_k) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(m(E_1) + \sum_{k=2}^N (m(E_k) - m(E_{k-1})) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N). \end{aligned}$$

若存在 k_0 使 $m(E_{k_0}) = \infty$, 则由 $\{E_k\}$ 单调性可得, 任意 $k \geq k_0$ 都有 $m(E_k) = \infty$, 进而 $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = \infty$.

又因为 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \supset E_k$, 所以 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \infty$.

(ii) $\{E_1 \setminus E_k\}$ 是单增集列, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_1 \setminus E_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k)\right)$. 由 $m(E_1) < \infty, E_k \subset E_1$, 所以 $m(E_1 \setminus E_k) = m(E_1) - m(E_k)$. 进而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k) = E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k)\right) = m(E_1) - m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right). \quad \square$$

注 1.1 例 1.1 (ii) 去掉条件 $m(E_{k_1}) < \infty$ 时, 结论不再成立. 如 $E_k = (k, +\infty), k = 1, 2, \cdots$.

定义 1.1 (内测度) 设 $m_*(E) = \sup\{m(F) : F \subset E, F \text{ 是闭集}\}$, 称 $m^*(E)$ 为 E 的内测度. 可以证明 E 可测当且仅当 $m^*(E) = m_*(E)$.

第二章 可测函数

定义 2.1 (广义实函数) E 可测, 记 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. 称 $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 为广义实函数.

命题 2.1

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[c + \frac{1}{k}, +\infty \right] = (c, +\infty], \quad [c, +\infty] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(c - \frac{1}{k}, +\infty \right).$$

命题 2.2 零测集上的函数可测.

证明 设 E 是零测度及 $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. 对于任意的 $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $E(f > c)$ 是零测集, 故 f 是可测的. \square

命题 2.3 设 $E_1 \subset E$, E_1, E 可测, f 在 E 上可测, 则 f 在 E_1 上可测.

证明 $\forall c \in \mathbb{R}, E_1(f > c) = E_1 \cap (E(f > c))$. \square

命题 2.4 设 $\{E_k\}$ 是一个可测集列, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 若 $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f 在 $E_k, k = 1, 2, \dots$ 上可测, 则 f 在 E 上可测.

证明 $\forall c \in \mathbb{R}, E(f > c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k(f > c)$. \square

命题 2.5 设 E 可测, 若 $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 连续, 则 f 是可测函数.

证明 由可测集的结构, 存在闭集列 $\{F_k\}$ 及一个零测集 E_0 , 使得 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \cup E_0$. 若 f 在 E 上连续, 则 f 在 F_k 上是连续的.

下面证明: 任意 $c \in \mathbb{R}, F_k(f \geq c)$ 是闭集. 由极限点的定义可得

$$\forall y \in (F_k(f \geq c))', \quad \exists y_l \in F_k(f \geq c), \quad l = 1, 2, \dots, \quad \text{使得 } y_l \rightarrow y, \quad l \rightarrow \infty.$$

由 $y_l, l \in \mathbb{N}_+$ 的取法, $f(y_l) \geq c, l \in \mathbb{N}_+$. 因为 F_k 是闭集, 所以 $y \in F_k$. 注意到 f 的连续性, 有 $f(y) \geq c$, 故 $y \in F_k(f \geq c)$.

综上所述, $E(f \geq c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(f \geq c) \cup E_0(f \geq c)$ 可测, 进而 f 是可测函数. \square

命题 2.6 可测集的特征函数是可测的.

证明 $\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) > c\} = \begin{cases} \emptyset, & c \geq 1, \\ E, & 0 < c \leq 1, \\ \mathbb{R}^n, & c < 0. \end{cases}$ \square

定理 2.1 设 f, g 在 E 上可测, 不会同时取无穷值. 若 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f + \beta g$ 可测, 且 fg 可测.

证明 先证 $f + g$ 可测.

$E(f = +\infty), E(g = +\infty)$ 可测. 事实上,

$$E(f = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > k), \quad E(g = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E(g > k)$$

可测. 记 $E_1 = E \setminus (E(f = +\infty) \cup E(g = +\infty))$. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$, 都有

$$E(f + g > c) = E_1(f + g > c) \cup (E(f = +\infty) \cup E(g = +\infty)).$$

设 $\mathbb{Q} = \{r_k\}$, 下面证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E_1 : f(x) > r_k > c - g(x)\} = E_1(f + g > c). \quad (2.0.1)$$

任意的 $x \in E_1(f + g > c)$ 都有 $f(x) + g(x) > c, f(x) > c - g(x)$. 存在 k 使得 $f(x) > r_k > c - g(x)$ 于是 $x \in \{x \in E_1 : f(x) > r_k > c - g(x)\}$, 进而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E_1 : f(x) > r_k > c - g(x)\} \supset E_1(f + g > c).$$

另一方面, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$\{x \in E_1 : f(x) > r_k > c - g(x)\} \subset \{x \in E_1 : f(x) > c - g(x)\} = E_1(f + g > c).$$

于是证得 (2.0.1) 式.

由 E_1 的可测性, 有

$$E_1(f + g > c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_1(f > r_k > c - g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1(f > r_k) \cap E_1(g > c - r_k)),$$

故 $E_1(f + g > c)$ 可测, 进而 $E(f + g > c)$ 可测.

再证任意 $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f$ 可测. 事实上

$$E(\alpha f > c) = \begin{cases} E\left(f > \frac{c}{\alpha}\right), & \alpha > 0, \\ E\left(f < \frac{c}{\alpha}\right), & \alpha < 0, \\ E, & \alpha = 0, c < 0, \\ \emptyset, & \alpha = 0, c \geq 0. \end{cases}$$

下面给出证明 fg 可测的提示.

$$f = g \text{ 时, } E(fg > c) = E(f^2 > c) = \begin{cases} E(f > \sqrt{c}) \cup E(f < -\sqrt{c}), & c > 0, \\ E, & c < 0. \end{cases}$$

$$f \neq g \text{ 时, } fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}.$$

□

定理 2.2 设 E 是可测集, $f_k, k \in \mathbb{N}_+$ 在 E 上可测, 则

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$$

在 E 上可测.

证明 注意到 $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \inf_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} f_j(x)$, 由书上 49 页定理 2.3 前两式可得 $\sup_{j \geq k} f_j(x), k \in \mathbb{N}_+$ 可测, 进而 $\inf_{k \rightarrow \infty} \sup_{j \geq k} f_j(x)$ 可测, 即 $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$ 可测, $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ 的情形同理. \square

推论 2.1 若 E 上的可测函数列 $\{f_k\}$ 满足

$$f(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x),$$

则 $f(x)$ 在 E 上可测.

定理 2.3 设 f 定义在可测集 E 上, 定义

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0),$$

分别称之为 f 的正部和负部函数. 显然有

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x), \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

若 f 在 E 上可测, 则 $f^+(x), f^-(x)$ 在 E 上可测.

例 2.1 设 $E_1, \dots, E_m \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $\varphi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{E_j}$ 是一个简单函数.

命题 2.7 可测集 E 上任意两个简单函数的和, 差, 积是简单函数.

例 2.2 设

$$\varphi = 2\chi_{(0,1]} + 4\chi_{[0,3]} - 5\chi_{(-1,2]},$$

$$\psi = \chi_{(0,2]} + 2\chi_{[1,3]} - \chi_{(-1,1)},$$

求 $\varphi + \psi$.

解 记

$$E = (-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\} \cup (1, 2] \cup (2, 3],$$

则有

$$\varphi + \psi = -6\chi_{(-1,0)} - 2\chi_{\{0\}} + \chi_{(0,1)} + 4\chi_{\{1\}} + 2\chi_{(1,2]} + 6\chi_{(2,3]}.$$

\square

可用归纳法证明: 设 φ 是 E 上一个简单函数, 其中 $E = \bigcup_{j=1}^m E_j$, E_1, E_2, \dots, E_m , 两两不交, 则有

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{E_j}(x). \text{ 提示: } m=2 \text{ 时,}$$

$$\varphi(x) = c_1 \chi_{E_1}(x) + c_2 \chi_{E_2}(x) = c_1 \chi_{E_1 \setminus E_2} + c_2 \chi_{E_2 \setminus E_1} + (c_1 + c_2) \chi_{E_1 \cap E_2}(x).$$

定理 2.4 设 E 可测, f 在 E 上可测, 并且 $f \geq 0$. 那么, 存在非负简单函数 φ_k , $k \in \mathbb{N}_+$, 使得

$$\forall k \in \mathbb{N}_+, \quad 0 \leq \varphi_k \leq \varphi_{k+1}, \quad \forall x \in E, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = f(x).$$

证明 设 f 在可测集上, 非负可测. 对每个 $m \in \mathbb{N}_+$, 都有

$$E = \bigcup_{i=1}^{m2^m} E \left(\frac{i-1}{2^m} \leq f < \frac{i}{2^m} \right) \cup E(f \geq m),$$

定义

$$\varphi_m(x) = \sum_{i=1}^{m2^m} \frac{i-1}{2^m} \chi_{E \left(\frac{i-1}{2^m} \leq f < \frac{i}{2^m} \right)}(x) + m \chi_{E(f \geq m)}(x).$$

下证 $\varphi_m(x) \leq \varphi_{m+1}(x)$, $\forall x \in E$. 注意到

$$\begin{aligned} \varphi_{m+1} &= \sum_{i=1}^{(m+1)2^{m+1}} \frac{i-1}{2^{m+1}} \chi_{E \left(\frac{i-1}{2^{m+1}} \leq f < \frac{i}{2^{m+1}} \right)} + (m+1) \chi_{E(f \geq m+1)}(x), \\ E(f \geq m) &= E(f \geq m+1) \cup E \left(\frac{m2^{m+1}}{2^{m+1}} \leq f < \frac{m2^{m+1}+1}{2^{m+1}} \right) \\ &\quad \cup \dots \cup E \left(\frac{(m+1)2^{m+1}-1}{2^{m+1}} \leq f < \frac{(m+1)2^{m+1}}{2^{m+1}} \right). \end{aligned}$$

$x \in E(f \geq m)$ 时, $\varphi_m(x) = m$. 若 $x \in E(f \geq m+1)$, 则有

$$\varphi_{m+1}(x) = m+1 \geq m = \varphi_m(x).$$

若

$$x \in E \left(\frac{m2^{m+1}+j}{2^{m+1}} \leq f < \frac{m2^{m+1}+j+1}{2^{m+1}} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2^{m+1}-1,$$

则有

$$\varphi_m(x) = m \leq \frac{m2^{m+1}+j}{2^{m+1}} = \varphi_{m+1}(x).$$

$x \in E \left(\frac{i-1}{2^m} \leq f < \frac{i}{2^m} \right)$, $i = 1, \dots, m2^m$ 时, $\varphi_m(x) = \frac{i-1}{2^m}$. 注意到

$$E \left(\frac{i-1}{2^m} \leq f < \frac{i}{2^m} \right) = E \left(\frac{2(i-1)}{2^{m+1}} \leq f < \frac{2i-1}{2^{m+1}} \right) \cup E \left(\frac{2i-1}{2^{m+1}} \leq f < \frac{2i}{2^{m+1}} \right),$$

有

$$\varphi_m(x) = \frac{i-1}{2^m} \leq \varphi_{m+1}(x) = \begin{cases} \frac{2(i-1)}{2^{m+1}}, & x \in E \left(\frac{2(i-1)}{2^{m+1}} \leq f < \frac{2i-1}{2^{m+1}} \right), \\ \frac{2i-1}{2^{m+1}}, & x \in E \left(\frac{2i-1}{2^{m+1}} \leq f < \frac{2i}{2^{m+1}} \right). \end{cases}$$

下证 $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. 若 $f(x) = +\infty$, 则 $x \in E(f \geq m)$, $\forall m \in \mathbb{N}_+$, 进而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = +\infty = f(x).$$

若 $f(x)$ 有限, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $0 \leq f(x) < N$. $m > N$ 时, 存在 $i \in \{1, 2, \dots, m2^m\}$, 使得

$$x \in E \left(\frac{i-1}{2^m} \leq f < \frac{i}{2^m} \right).$$

此时,

$$\varphi_m(x) = \frac{i-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{i}{2^m}, \quad 0 \leq f(x) - \varphi_m(x) < \frac{1}{2^m}, \quad m > N.$$

因此 $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = f(x)$. □

推论 2.2 设 E 可测, f 在 E 上可测, 则存在两个简单函数列 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$, 满足

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots, \quad 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots, \quad \varphi_k(x)\psi_k(x) = 0, \quad x \in E, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k(x) - \psi_k(x)) = f(x).$$

证明 设 $f = f^+ - f^-$, 则 $f^+(x)f^-(x) = 0$. 由定理 2.4, 存在两个非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$, 满足

$$0 \leq \varphi_k \nearrow f^+(k \rightarrow \infty), \quad 0 \leq \psi_k \nearrow f^-(k \rightarrow \infty).$$

若 $f^+(x) > 0$,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_k(x) \rightarrow f^+(x) \\ \psi_k(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_k(x) - \psi_k(x) \rightarrow f^+(x) = f(x).$$

若 $f^-(x) > 0$,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_k(x) = 0 \\ \psi_k(x) \rightarrow f^-(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_k(x) - \psi_k(x) \rightarrow -f^-(x) = f(x). \quad \square$$

第三章 可测函数的结构

§3.1 紧集上连续函数的延拓

定义 3.1 (几乎处处连续) 若函数不连续点的集合是零测集, 则称这样的函数为几乎处处连续函数.

定义 3.2 (几乎处处收敛) $\{f_k\}$ 是 E 上的一个函数列. 若 $\{f_k\}$ 不收敛的点集是零测集, 则称 $\{f_k\}$ 在 E 上几乎处处收敛.

定义 3.3 (几乎处处有限) $E(|f| = \infty)$ 是零测集.

定义 3.4 (本性有界) 若存在 $M > 0$, 使 $E(|f| > M)$ 是零测集, 即 $x \in E$ 上几乎处处成立 $|f(x)| \leq M$.

定义 3.5 (延拓) 设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, 若存在 $G \supset E$ 及 $F: G \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $F|_E = f$, 则称 F 是 f 从 E 到 G 的一个延拓.

引理 3.1 设 K 为 \mathbb{R}^n 的非空紧子集, F 是 \mathbb{R}^n 的非空闭子集. 若 $K \cap F = \emptyset$, 则存在 $f \in C(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\chi_K \leq f \leq \chi_{F^c}$.

证明 先考虑一个事实: 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 不空, 定义

$$d(x, A) = \inf \{|x - y| : y \in A\},$$

称之为点 x 到 A 之间的距离. $d(x, A)$ 满足

$$|d(x', A) - d(x'', A)| \leq |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}^n,$$

并且距离函数连续. 设

$$f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, K) + d(x, F)},$$

则 f 在 \mathbb{R}^n 上是良定义的 (?????书上习题 2.2 12 (3)), 并且满足 $f(x) = 1, x \in K, f(x) = 0, x \in F$. \square

推论 3.1 设 K 为 \mathbb{R}^n 的非空紧子集, F 为 \mathbb{R}^n 的非空闭子集, $a, b \in \mathbb{R}$. 若 $K \cap F = \emptyset$, 则存在 $f \in C(\mathbb{R}^n)$ 取值于 a, b 之间, 并且满足

$$\forall x \in K, f(x) = a, \quad \forall x \in F, f(x) = b.$$

证明

$$\varphi(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, K) + d(x, F)}, \quad \psi(x) = \frac{d(x, K)}{d(x, K) + d(x, F)}, \quad f(x) = a\varphi(x) + b\psi(x). \quad \square$$

定理 3.1 (延拓定理) 设 K 为 \mathbb{R}^n 的非空紧子集, $f \in C(K)$. 那么, 存在 $g \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\|g\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{C(K)}, \quad \forall x \in K, \quad g(x) = f(x).$$

证明 因为 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, $f \in C(K)$, 所以 f 在 K 上取得最大值和最小值. 记

$$M_0 = \max_{x \in K} f(x), \quad m_0 = \min_{x \in K} f(x), \quad f_0(x) = f(x) - \frac{M_0 + m_0}{2}, \quad x \in K,$$

则有

$$-\frac{M_0 - m_0}{2} \leq f_0(x) \leq \frac{M_0 - m_0}{2}.$$

记 $a_0 = \frac{M_0 - m_0}{2}$, a_0 为 f_0 在 K 上的最大值, $-a_0$ 为 f_0 在 K 上的最小值. 令

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ x \in K : -a_0 \leq f_0(x) \leq -\frac{1}{3}a_0 \right\}, \\ B_0 &= \left\{ x \in K : \frac{1}{3}a_0 \leq f_0(x) \leq a_0 \right\}, \\ C_0 &= \left\{ x \in K : -\frac{1}{3}a_0 \leq f_0(x) \leq \frac{1}{3}a_0 \right\}, \end{aligned}$$

则 A_0, B_0, C_0 都是紧的, 因为 $f \in C(K)$. 注意到 $A_0 \cap B_0 = \emptyset$, 由推论 3.1, 存在 $g_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$g_0(x) = -\frac{1}{3}a_0, \quad x \in A_0, \quad g_0(x) = \frac{1}{3}a_0, \quad x \in B_0, \quad |g_0(x)| \leq \frac{1}{3}a_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

则有

$$f_0(x) - g_0(x) \geq -\frac{2}{3}a_0, \quad x \in A_0, \quad f_0(x) - g_0(x) \leq \frac{2}{3}a_0, \quad x \in B_0, \quad -\frac{2a_0}{3} \leq f_0(x) - g_0(x) \leq \frac{2a_0}{3}, \quad x \in C_0,$$

故 $-\frac{2a_0}{3} \leq f_0(x) - g_0(x) \leq \frac{2a_0}{3}$, $x \in K$. 利用上述步骤, 存在 $g_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}a_0 \right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \max g_1(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}a_0 \right), \quad \min g_1(x) = -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}a_0 \right), \\ -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}a_0 \right) &\leq f_0(x) - g_0(x) - g_1(x) \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}a_0 \right), \quad x \in K. \end{aligned}$$

仿此继续, 存在 $C(\mathbb{R}^n)$ 中一系列函数 $\{g_k\}$ 满足:

$$(i) \quad |g_k(x)| \leq \frac{2a_0}{3^{k+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(ii) \quad \max g_k(x) = \frac{2a_0}{3^{k+1}},$$

$$(iii) \quad \min g_k(x) = -\frac{2a_0}{3^{k+1}},$$

$$(iv) \quad \left| f_0(x) - \sum_{j=0}^k g_j(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{k+1} a_0, \quad x \in K.$$

故 $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上一致收敛, 并且

$$f(x) = \frac{M_0 + m_0}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x), \quad \forall x \in K.$$

设

$$g(x) = \frac{M_0 + m_0}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

则 g 是连续函数且满足 $m_0 \leq g \leq M_0$. □

§3.2 一致收敛, 几乎处处收敛, 依测度收敛关系

定理 3.2 (定理) 设 $m(E) < \infty$, f_k, f 在 E 上几乎处处有限, $k \rightarrow \infty$ 时, 在 E 上几乎处处有 $f_k(x) \rightarrow f(x)$. 则任意 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$ 使得 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ 且 $\{f_k\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f .

例 3.1

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k, & 0 \leq x < 1, \\ (x-1)^k, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0 = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x < 2} |f_k(x) - f(x)| = 1.$$

证明 不妨设 $\{f_k\}$ 在 E 上处处收敛于 f . 由书上习题 3.1 的 14 题¹ 可得

$$\begin{aligned} E &= A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} E \left(|f_j - f| < \frac{1}{m} \right), \\ &\Rightarrow \emptyset = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E \left(|f_j - f| \geq \frac{1}{m} \right), \\ &\Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E \left(|f_j - f| \geq \frac{1}{m} \right), \quad \forall m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

记 $B_i(m) = \bigcup_{j=i}^{\infty} E \left(|f_j - f| \geq \frac{1}{m} \right)$, 则

$$B_1(m) \supset B_2(m) \supset \dots \supset B_i(m) \supset \dots$$

于是由例 1.1 可得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |B_i(m)| = \left| \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i(m) \right| = 0, \quad \text{因为 } B_1(m) \subset E, |E| < \infty.$$

对于任意的 $\delta > 0$, $m = 1$ 时, 取 i_1 使得 $|B_{i_1}(1)| < \frac{\delta}{2}$. $m = 2$ 时, 取 $i_2 > i_1$ 使得 $|B_{i_2}(2)| < \frac{\delta}{2^2}$. 用归纳

¹书上 53 页“我们知道”一句证明了.

法, 若已取出 i_1, i_2, \dots, i_k 满足

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad |B_{i_l}(l)| < \frac{\delta}{2^l}, \quad l = 1, 2, \dots, k,$$

再由 $\lim_{i \rightarrow +\infty} |B_i(k+1)| = 0$, 可取 $i_{k+1} > i_k$, 使得 $|B_{i_{k+1}}(k+1)| < \frac{\delta}{2^{k+1}}$. 仿此继续, 可以得到一个严格递增的正整数列 $\{i_k\}$ 满足 $|B_{i_k}(k)| < \frac{\delta}{2^k}, k = 1, 2, \dots$. 于是

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{i_k}(k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=i_k}^{\infty} E \left(|f_j - f| \geq \frac{1}{k} \right), \quad |B| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \bigcup_{j=i_k}^{\infty} E \left(|f_j - f| \geq \frac{1}{k} \right) \right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

下面验证 $\{f_k\}$ 在 $E \setminus B$ 上一致收敛于 f . 注意到

$$E \setminus B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=i_k}^{\infty} E \left(|f_j - f| < \frac{1}{k} \right),$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $k \in \mathbb{N}_+$, $\frac{1}{k} < \varepsilon$, 由

$$E \setminus B \subset \bigcap_{j=i_k}^{\infty} E \left(|f_j - f| < \frac{1}{k} \right),$$

当 $j \geq i_k$ 时, 任意 $x \in E \setminus B$, 都有 $x \in E \left(|f_j - f| < \frac{1}{k} \right)$, 即 $|f_j - f| < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

综上所述, 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $i_k \in \mathbb{N}_+$, 使得 $j \geq i_k$ 时, 有 $|f_j - f| < \varepsilon, \forall x \in E \setminus B$. 故 $\{f_k\}$ 在 $E \setminus B$ 上一致收敛. \square

定义 3.6 设函数列 $\{f_k\}$ 及函数 f 定义在可测集 E 上, 且几乎处处有限. 若

$$\forall \sigma > 0, \quad \left| E(|f_k - f| \geq \sigma) \right| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

则 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f , 记为 $f_k \xrightarrow{m} f$ 在 E 上.

例 3.2

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k, & 0 \leq x < 1, \\ (x-1)^k, & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0 = f(x)$, 而 $\sup |f_k(x) - f(x)| = 1$. 令

$$E \setminus E_\delta = [0, 2) \setminus \left[1 - \frac{\delta}{2}, 1 \right) \setminus \left[2 - \frac{\delta}{2}, 2 \right),$$

有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \setminus E_\delta} |f_k(x) - f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right)^k = 0, \quad 0 < \delta < 1.$$

命题 3.1 (简单性质) 若 $f_k \xrightarrow{m} f, g_k \xrightarrow{m} g$ 在 E 上, 则 $f_k + g_k \xrightarrow{m} f + g$ 在 E 上, 且任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f_m \xrightarrow{m} \alpha f$ 在 E 上.

证明提示: $E\left(|f_k + g_k - (f + g)| \geq \sigma\right) \subset E\left(|f_k - f| \geq \frac{\sigma}{2}\right) \cup E\left(|g_k - g| \geq \frac{\sigma}{2}\right).$

定理 3.3 设 $|E| < \infty$, f_k, f 在 E 上可测并且都取有限值. 如果在集合 E 上 $f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $f_k \xrightarrow{m} f$.

证明 由定理, 任意的 $\sigma > 0, \delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$, 使得 $|E \setminus E_\delta| < \delta$, 且 $\{f_k\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f . 这样的话, 对于上述 $\sigma > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $k > N$ 时, 对于任意的 $x \in E_\delta$ 成立 $|f_k(x) - f(x)| < \sigma$. 进而 $k > N$ 时, 有

$$E(|f_k - f| \geq \sigma) \subset E \setminus E_\delta, \quad |E(|f_k - f| \geq \sigma)| \leq |E \setminus E_\delta| < \delta.$$

所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} |E(|f_k - f| \geq \sigma)| = 0$. □

例 3.3 记 $I = [0, 1]$, 设

$$f_1(x) = \chi_{[0,1]}(x), \quad f_2(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x), \quad f_3(x) = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}, \quad \cdots, \quad f_{\frac{k(k-1)}{2}+j} = \chi_{[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]}.$$

得到一个函数列 $\{f_k\}$. 取 $f = 0$, 对于任意的 $\sigma > 0$, 有

$$E\left(\left|f_{\frac{k(k-1)}{2}+j} - f\right| \geq \sigma\right) = \begin{cases} \emptyset, & \sigma > 1, \\ \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right], & 0 < \sigma \leq 1. \end{cases}$$

进而

$$\left|E\left(\left|f_{\frac{k(k-1)}{2}+j} - f\right| \geq \sigma\right)\right| \leq \frac{1}{k}, \quad j = 1, \cdots, k,$$

故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left|E\left(\left|f_{\frac{k(k-1)}{2}+j} - f\right| \geq \sigma\right)\right| = 0,$$

即 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 0. 任意 $x \in [0, 1]$, 有无穷多 $f_k(x) = 0$, 有无穷多 $f_k(x) = 1$. 所以 $\{f_k(x)\}$ 不收敛, 进而 $\{f_k\}$ 在 E 上不收敛.

定理 3.4 (F. Riesz 定理) 设在可测集 E 上, $f_k \xrightarrow{m} f, k \rightarrow \infty$, 则 $\{f_k\}$ 有子列 $\{f_{n_j}\}$ 在 E 上几乎处处收敛.

证明 由测度收敛定义, 对于每一个 $l \in \mathbb{N}_+$ 都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left|E\left(|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\right)\right| = 0.$$

这样的话, 可以取到一个严增的正整数列 $\{k_j\}$, 使得 $k \geq k_j$ 时, 有

$$\left|E\left(|f_k - f| \geq \frac{1}{j}\right)\right| < \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \cdots.$$

记

$$E_0 = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=l}^{\infty} E\left(|f_{k_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right),$$

有

$$\begin{aligned}
 |E_0| &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{j=l}^{\infty} E \left(|f_{k_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \right| \\
 &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=l}^{\infty} \left| E \left(|f_{k_j} - f| \geq \frac{1}{j} \right) \right| \\
 &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=l}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{l-1}} = 0, \\
 E \setminus E_0 &= \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=l}^{\infty} E \left(|f_{k_j} - f| < \frac{1}{j} \right).
 \end{aligned}$$

下证 $\{f_{k_j}\}$ 在 $E \setminus E_0$ 上收敛于 f . 对于任意的 $x \in E \setminus E_0$, 存在 $l_0 \in \mathbb{N}_+$, 使得

$$x \in \bigcap_{j=l_0}^{\infty} E \left(|f_{k_j} - f| < \frac{1}{j} \right).$$

故 $j \geq l_0$ 时,

$$x \in E \left(|f_{k_j} - f| < \frac{1}{j} \right),$$

即 $|f_{k_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$, 进而 $\lim_{j \rightarrow \infty} (f_{k_j}(x) - f(x)) = 0$. 因此, $\{f_{k_j}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f . \square

注 3.1 上述证明约定: 相减时不会同时取无穷大.

总结:

- 一致收敛 \rightarrow 几乎处处收敛.
- 几乎处处收敛 $\xrightarrow{|E|<\infty, \text{定理条件}}$ 一致收敛.
- 几乎处处收敛 $\xrightarrow{|E|<\infty}$ 依测度收敛.
- 依测度收敛 $\xrightarrow{\text{某子列上成立}}$ 几乎处处收敛.

§3.3 定理

引理 3.2 设 ϕ 为 E 上的简单函数. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $\phi \in C(F)$ 且 $|E \setminus F| < \varepsilon$.

证明 设 $\phi(x) = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}(x)$. 其中 $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, 可测集 E_1, E_2, \dots, E_k 两两不交, $E = \bigcup_{j=1}^k E_j$.

利用开集刻画可测集定理 1.1, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_j \subset E_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, 使得 $|E_j \setminus F_j| < \frac{\varepsilon}{k}$. 记

$F = \bigcup_{j=1}^k F_j$, F 是闭集, 有

$$|E \setminus F| = \left| \bigcup_{j=1}^k E_j \setminus \bigcup_{j=1}^k F_j \right| = \left| \bigcup_{j=1}^k (E_j \setminus F_j) \right| < \varepsilon.$$

下证 ϕ 在 F 上相对连续. 对于任意的 $x \in F$, 存在 $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 $x \in F_j, x \notin F_i, i \neq j, \phi(x) = c_j$. 由 $x \in \left(\bigcup_{i \neq j} F_i\right)^c$ 且 $\left(\bigcup_{i \neq j} F_i\right)^c$ 是开集, 存在 x 的一个邻域 $B(x, \delta) \subset \left(\bigcup_{i \neq j} F_i\right)^c$, 即 $B(x, \delta) \cap F_j \subset F_j$. 进而 $\phi(x) \equiv c_j, x \in B(x, \delta) \cap F_j$, 故 x 是 ϕ 相对 F_j 的连续点. \square

定理 3.5 (定理) 设 f 为 E 上的可测函数且几乎处处有限, 那么, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $f \in C(F)$ 且 $|E \setminus F| < \varepsilon$.

证明 不妨认为 f 在 E 上处处有限. 利用简单函数与可测函数的关系, 存在一个简单函数列 $\{\phi_k\}$ 在 E 上处处收敛于 f . $|E| < \infty$ 时, 先用 定理, 使 $\{\phi_k\}$ 在 E_0 上一致收敛于 f 且 $|E \setminus E_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. 次之, 由引理 3.2, 对于每个 k , 存在闭集 $F_k \subset E_0$, 使得 $\phi_k|_{F_k}$ 相对于 F_k 连续且 $|E_0 \setminus F_k| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

记 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \cap E_0$. 于是

$$E \setminus F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus F_k) \cup (E \setminus E_0), \quad |E \setminus F| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

此时, $\{\phi_k\}$ 在 F 上一致收敛于 f 且对于每个 $k \in \mathbb{N}_+$, $\phi_k|_F$ 相对于 F 连续. 由一致收敛函数列的连续性定理, $f|_F$ 在 F 上相对连续.

$|E| = \infty$ 时, 对每个 $k \in \mathbb{N}_+$, 记 $E_k = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : k-1 \leq |x| < k\}$. $\{E_k\}$ 是两两不交, 测度有限的可测集列, 且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 对每个 E_k 用前面证实的结果: 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $G_k \subset E_k$, 使得 $|E_k \setminus G_k| < \frac{\varepsilon}{2^k}$, $f|_{G_k}$ 相对于 G_k 连续.

记 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. 下面说明:

- (i) G 是闭集,
- (ii) $|E \setminus G| < \varepsilon$,
- (iii) $f|_G$ 相对于 G 是连续的.

任意 $x \in \overline{G}$, 在 G 中存在一个点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x_k - x| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. 存在 $r \in \mathbb{N}_+$ 使得 $|x| < r$. 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = |x| < r$. 当 k 充分大时, $|x_k| < r$. 此时, $x_k \in \bigcup_{j=1}^r G_j$. 因为 $\bigcup_{j=1}^r G_j$ 是闭集, 所以 $x_k \rightarrow x \in \bigcup_{j=1}^r G_j$, $k \rightarrow \infty$, 进而 $x \in G$. 故 $\overline{G} \subset G$, G 是闭集.

因为 $\{E_k\}$ 两两不交且 $G_k \subset E_k, k \in \mathbb{N}_+$, 所以

$$E \setminus G = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus G_k).$$

进而

$$|E \setminus G| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k \setminus G_k| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

下证 $f|_G$ 相对于 G 是连续的. 对于任意的 $x \in G$, 因为 $\{G_k\}$ 是两两不交的闭集列, 所以存在唯一

个 G_k , 使得 $x \in G_k$. 容易说明²

$$\delta_x := d(x, G_l) > 0, \quad l \neq k, \quad (B(x, \delta_x) \cap G_k) \cap G_l = \emptyset, \quad l \neq k.$$

由 $f|_{G_k}$ 相对于 G_k 连续, 任意 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$, $|y - x| < \delta$ 且 $y \in G_k$ 时, $|f|_{G_k}(x) - f|_{G_k}(y)| < \eta$. 于是

$$y \in B(x, \min\{\delta, \delta_x\}) \cap G \subset B(x, \delta_x) \cap G_k \Rightarrow |f|_G(y) - f|_G(x)| = |f|_{G_k}(y) - f|_{G_k}(x)| < \eta.$$

故 $f|_G$ 相对于 G 是连续的. \square

推论 3.2 设 f 在 E 上有界, 可测且几乎处处有限. 则任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C(\mathbb{R}^n)$ 使得 $|E(f \neq g)| < \varepsilon$ 且 $|g(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x)|$.

证明 $|E| < \infty$ 时, 令 $E_k = E \cap B(O; k)$, $\forall k \in \mathbb{N}_+$. 由 $|E| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 k_0 使得 $|E| < |E_{k_0}| + \frac{\varepsilon}{2}$, 即 $|E \setminus E_{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. 由定理, 存在闭集 $F \subset E_{k_0}$, 使 $|E_{k_0} \setminus F| < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $f|_F$ 相对于 F 连续. 此时 F 是紧的且

$$|E \setminus F| \leq |E \setminus E_{k_0}| + |E_{k_0} \setminus F| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

再用延拓定理 (定理 3.1), 存在 $g \in C(\mathbb{R}^n)$ 使 $g|_F = f$ 且 $|g(y)| \leq \sup_{x \in F} |f(x)|, \forall y \in \mathbb{R}^n$. 此时有

$$|E(f \neq g)| \leq |E \setminus F| < \varepsilon, \quad |g(y)| \leq \sup_{x \in F} |f(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

$|E| = \infty$ 时, 提示如下.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n : k-1 \leq |x| < k\}, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

故 $\{E_k\}$ 两两不交. 令

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k, \quad \lambda_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \lambda_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_2, \\ 0, & |x| \leq 1, |x| > 2, \end{cases} \quad \dots,$$

其中 K_k 是由定理取得的 E_k 中的闭集. \square

²书上 30 页 12 题 (3).

第四章 Lebesgue 积分及其基本理论

§4.1 Lebesgue 积分的定义及基本性质

例 4.1 零测集 E 上的任何函数的积分均为 0.

证明 设 $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, |E| = 0$. 任取一个非负简单函数, 使得 $0 \leq \varphi \leq f^+$. 则记

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}(x), \quad E = \bigcup_{j=1}^k E_j.$$

E_1, E_2, \dots, E_k 两两不交且为零测集. 于是

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^k c_j |E_j| = 0.$$

故

$$\int_E f^+ = \sup \left\{ \int_E \varphi : 0 \leq \varphi \leq f^+, \varphi \text{ 是简单函数} \right\} = 0.$$

同理 $\int_E f^- = 0$. 故 $f \in L(E)$, 且 $\int_E f = 0$. □

例 4.2 设 f, g 是 E 上的非负可测函数且 $0 \leq g \leq f$. 若 $f \in L(E)$, 则 $g \in L(E)$.

证明 按积分定义

$$\begin{aligned} \int_E f &= \sup \left\{ \int_E \varphi : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ 是简单函数} \right\}, \\ \int_E g &= \sup \left\{ \int_E \varphi : 0 \leq \varphi \leq g, \varphi \text{ 是简单函数} \right\}, \\ \left\{ \int_E \varphi : 0 \leq \varphi \leq g, \varphi \text{ 是简单函数} \right\} &\subset \left\{ \int_E \varphi : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ 是简单函数} \right\}. \end{aligned}$$
 □

引理 4.1 (简单函数积分的良好定义) 非负简单函数的积分与它的表示无关.

证明 设

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}(x), \quad E = \bigcup_{j=1}^k E_j, \quad E_1, \dots, E_k \text{ 两两不交且可测}, \\ \varphi(x) &= \sum_{i=1}^l d_i \chi_{F_i}(x), \quad E = \bigcup_{i=1}^l F_i, \quad F_1, \dots, F_l \text{ 两两不交且可测}. \end{aligned}$$

下面说明 $\sum_{j=1}^k c_j |E_j| = \sum_{i=1}^l d_i |F_i|$. 注意到 $E = E \cap E = \bigcup_{j=1}^k \bigcup_{i=1}^l (E_j \cap F_i)$ 为不交并, 以及 $E_j \cap F_i \neq \emptyset$ 时, $c_j = d_i$. 因为 $E_j = E_j \cap E = \bigcup_{i=1}^l (E_j \cap F_i)$ 为不交并, 所以

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^k c_j |E_j| = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l c_j |E_j \cap F_i|.$$

进一步,

$$\begin{aligned} \int_E \varphi &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k c_j |E_j \cap F_i| = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k d_i |E_j \cap F_i| \\ &= \sum_{i=1}^l d_i \sum_{j=1}^k |E_j \cap F_i| = \sum_{i=1}^l d_i |F_i|, \end{aligned}$$

其中用到了 $F_i = \bigcup_{j=1}^k (E_j \cap F_i)$ 是不交并. □

引理 4.2

(1) 设 φ 为 E 上非负简单函数, $e \subset E$ 可测, 则 $0 \leq \int_e \varphi \leq M|e|$, 其中 $M = \sup_{x \in E} \varphi(x)$.

(2) 若 $\int_E \varphi = +\infty$, 则任意 $N > 0$, 存在 $A \subset E$ 可测且 $|A| < \infty$, 使 $\int_A \varphi > N$.

引理 4.3 (基本引理) 设 f 在 E 上非负可测, φ_m 是简单函数且 $0 \leq \varphi_m \leq \varphi_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}_+$. 如果对于任意的 $x \in E$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x) = f(x)$ 成立, 那么 $\int_E f = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E \varphi_m$.

证明 $\int_E f = 0$ 显然.

$\int_E f > 0$ 时, 由

$$0 \leq \int_E \varphi_k \leq \int_E f, \quad \int_E \varphi_k \leq \int_E \varphi_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k \leq \int_E f$.

下面证明 $\int_E f \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k$. 这个事实等价于任意 $a > 0$, $a < \int_E f$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k > a$. 设 $a > 0$, $a < \int_E f$. 由积分定义, 存在非负简单函数 φ 满足 $0 \leq \varphi \leq f$, $\int_E \varphi > a$. 定义 $\{\min(\varphi_k, \varphi)\}$, 满足

$$0 \leq \min(\varphi_k, \varphi) \leq \min(\varphi_{k+1}, \varphi), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \min(\varphi_k, \varphi) = \min(f, \varphi) = \varphi.$$

$\int_E \varphi < +\infty$ 时, 记 $A = \{x \in E : \varphi(x) > 0\}$. 由 φ 是 E 上的简单函数, 存在 $c > 0, M > 0$ 使得

$$0 < c \leq \varphi(x) \leq M, \quad x \in A, \quad \varphi(x) = 0, \quad x \in E \setminus A,$$

显然 $|A| < \infty$. 由定理, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 A 的一个可测子集 A_0 , 使得 $|A \setminus A_0| < \varepsilon$ 且 $\{\min(\varphi_k, \varphi)\}$ 在 A_0 上一致收敛于 φ . 对于上述 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛的定义, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}_+$, $k \geq k_0$ 时,

$|\min(\varphi_k(x), \varphi(x)) - \varphi(x)| < \varepsilon$ 对一切 $x \in A_0$ 成立. 这样的话, $k > k_0$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \int_E \min(\varphi_k, \varphi) - \int_E \varphi \right| &= \left| \int_A \min(\varphi_k, \varphi) - \int_A \varphi \right| \\ &= \left| \int_{A_0} (\min(\varphi_k, \varphi) - \varphi) + \int_{A \setminus A_0} (\min(\varphi_k, \varphi) - \varphi) \right| \\ &\leq \int_{A_0} |\min(\varphi_k, \varphi) - \varphi| + \int_{A \setminus A_0} |\min(\varphi_k, \varphi) - \varphi| \\ &\leq \varepsilon |A_0| + 2M |A \setminus A_0| < \varepsilon |A_0| + 2M\varepsilon = \varepsilon (|A| + 2M). \end{aligned}$$

由 ε 的任意性, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \min(\varphi_k, \varphi) = \int_E \varphi$. 于是

$$a < \int_E \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \min(\varphi_k, \varphi) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k.$$

$\int_E \varphi = +\infty$ 时, 记 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{E_j}(x)$, $x \in E$, 其中 $E = \bigcup_{j=1}^l E_j$, E_1, \dots, E_l 两两不交并且可测, c_1, \dots, c_l 为非负实数, 此时

$$\int_E \varphi = \sum_{j=1}^l c_j |E_j| = +\infty.$$

于是存在 j_0 , 使得 $c_{j_0} |E_{j_0}| = +\infty$. 存在可测集 F , $F \subset E_{j_0}$, 使得 $c_{j_0} |F| > a$, 此时 F 的测度有限. 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} \min(\varphi_k, \varphi) = \varphi$, 在 F 上也有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \min(\varphi_k(x), \varphi(x)) = \varphi(x)$. 由定理, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 F 的可测子集 F_0 , 使得 $|F \setminus F_0| < \varepsilon$, 且 $\{\min(\varphi_k, \varphi)\}$ 在 F_0 上一致收敛于 φ . 记 $c = c_{j_0}$, $M = \max_{x \in F} \varphi(x)$. 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}_+$, 当 $k \geq k_0$ 时, 对任意 $x \in F$ 成立

$$|\min(\varphi_k(x), \varphi(x)) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_F \varphi - \int_F \min(\varphi_k, \varphi) = \int_{F_0} (\varphi - \min(\varphi_k, \varphi)) + \int_{F \setminus F_0} (\varphi - \min(\varphi_k, \varphi)) \\ &< \varepsilon |F_0| + 2M |F \setminus F_0| < \varepsilon (|F| + 2M). \end{aligned}$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_F \min(\varphi_k, \varphi) = \int_F \varphi$, 进而

$$a < \int_F \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F \min(\varphi_k, \varphi) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_F \varphi_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k.$$

综上所述, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k > a$. 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k \geq \int_E f$. □

注 4.1

- (i) 设 $f \in L(E)$, 则 f 在 E 上几乎处处有限.
- (ii) 若 $f, g \in L(E)$, 约定

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} f(x) + g(x), & f(x), g(x) \text{ 不是异号无穷大,} \\ 0, & f(x), g(x) \text{ 是异号无穷大.} \end{cases}$$

证明 (i) 不妨设 $f \geq 0$,

$$\begin{aligned} E(f > 1) \supset E(f > 2) \supset \cdots \supset E(f > k) \supset \cdots, \\ k |E(f > k)| &\leq \int_E f \chi_{E(f > k)} \leq \int_E f < +\infty, \quad \Rightarrow \quad |E(f > k)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ E(f = +\infty) &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E(f > k) \subset |E(f > 1)| < \infty \quad \Rightarrow \quad |E(f = +\infty)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E(f > k)| = 0. \quad \square \end{aligned}$$

引理 4.4 设 $f \geq 0, f \geq 0$ 可测. 则 $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$.

证明 f 是 E 上的非负简单函数时, 设 $f = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}, E = \bigcup_{j=1}^k E_j, E_1, \dots, E_k$ 两两不交且可测. $\alpha > 0$ 时, 有

$$\alpha f = \sum_{j=1}^k \alpha c_j \chi_{E_j}, \quad \int_E \alpha f = \sum_{j=1}^k \alpha c_j |E_j| = \alpha \sum_{j=1}^k c_j |E_j| = \alpha \int_E f.$$

f 是 E 上的非负可测函数时, 存在一个非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 使得 $0 \leq \varphi_k \nearrow f$, 则 $\{\alpha \varphi_k\}$ 也是非负简单函数并且 $\alpha \varphi_k \nearrow \alpha f, k \rightarrow \infty$, 进而

$$\int_E \alpha f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \alpha \varphi_k = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k = \alpha \int_E f. \quad \square$$

定理 4.1 设 $f, g \in L(E), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f + \beta g \in L(E)$ 且 $\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$.

证明 先证 $f + g \in L(E)$. 此时 $f^+, f^-, g^+, g^- \in L(E)$, 先说明 $(f + g)^+, (f + g)^- \in L(E)$. 因为 $(f + g)^+ = \max(f + g, 0)$, 所以 $f + g \leq f^+ + g^+$, 进而 $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+$. 由例 4.2 可得 $(f + g)^+ \in L(E)$, 同理 $(f + g)^- \in L(E)$. 由

$$f^+ + g^+ - f^- - g^- = f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-,$$

可得

$$\begin{aligned} (f + g)^+ + f^- + g^- &= f^+ + g^+ + (f + g)^-, \\ \int_E (f + g)^+ + \int_E f^- + \int_E g^- &= \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E (f + g)^-. \end{aligned}$$

上式各项有限, 移项

$$\begin{aligned} \int_E (f + g)^+ - \int_E (f + g)^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^-, \\ \int_E f + g &= \int_E f + \int_E g. \end{aligned}$$

再证对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha f \in L(E)$. $\alpha > 0$ 时, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+, (\alpha f)^- = \alpha f^-$. 由引理 4.4, 有

$$\int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)^+ - \int_E (\alpha f)^- = \int_E \alpha f^+ - \int_E \alpha f^- = \alpha \int_E f^+ - \alpha \int_E f^- = \alpha \int_E f.$$

$\alpha \leq 0$ 时, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-, (\alpha f)^- = -\alpha f^+$. 由引理 4.4, 有

$$\int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)^+ - \int_E (\alpha f)^- = \int_E (-\alpha) f^- - \int_E (-\alpha) f^+ = -\alpha \int_E f^- + \alpha \int_E f^+ = \alpha \int_E f. \quad \square$$

定理 4.2 (积分的绝对连续性) 设 $f \in L(E)$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $A \subset E$, A 可测并且 $|A| \leq \delta$, 就有 $\int_A |f| < \varepsilon$.

证明 由积分定义可得 $|f| \in L(E)$. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在简单函数 φ , 满足

$$0 \leq \varphi \leq |f|, \quad \int_E |f| < \int_E \varphi + \frac{\varepsilon}{2},$$

此时 $\int_E |f| - \int_E \varphi < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于任意可测子集 $A \subset E$, 都有

$$\int_A (|f| - \varphi) \leq \int_E (|f| - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

存在 $M > 0$, 使得 $0 \leq \varphi \leq M$, 此时

$$\int_A |f| \leq \int_A \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \leq M|A| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, 当 $A \subset E$ 可测且 $|A| < \delta$ 时, 都有

$$\int_A |f| \leq \int_A \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \leq M|A| + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

定理 4.3 设 f 是 E 上的非负可测函数, 且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k 两两不交. 若 f 在 E 上非负可测, 则

$$\int_E f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

证明¹ 先设 f 为非负简单函数, 即 $f(x) = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{F_j}$, $E = \bigcup_{j=1}^l F_j$, 其中 F_1, \dots, F_l 两两不交, 于是

$$\int_E f = \sum_{j=1}^l c_j |F_j|. \text{ 又有}$$

$$E = E \cup E = \left(\bigcup_{j=1}^l F_j \right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \bigcup_{j=1}^l \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_j \cap E_k),$$

¹此证明后半部分不完整.

注意到 $F_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_j \cap E_k)$ 且 $\{F_j \cap E_k\}$ 两两不交, 可得 $|F_j| = \sum_{k=1}^{\infty} |F_j \cap E_k|$, 进而

$$\int_E f = \sum_{j=1}^l c_j |F_j| = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{\infty} c_j |F_j \cap E_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^l c_j |F_j \cap E_k| \right).$$

又因为 $f\chi_{E_k} = \sum_{j=1}^l c_j \chi_{F_j \cap E_k}$, 所以

$$\int_{E_k} f = \int_E f\chi_{E_k} = \sum_{j=1}^l c_j |F_j \cap E_k|.$$

于是 $\int_E f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f$.

f 是 E 上的非负可测函数时, 存在一个非负简单函数列 $\{\varphi_j\}$, 使得 $\varphi_j \nearrow f$, 有 (????证明有问题)

$$\int_E f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E \varphi_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} \varphi_j = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_k} \varphi_j \geq \sum_{k=1}^m \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_k} \varphi_j = \sum_{k=1}^m \int_{E_k} f. \quad \square$$

§4.2 积分号下取极限

数分中, Riemann 可积函数列 $\{f_k\}$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上, 存在如下问题.

(i) $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ 未必 Riemann 可积.

(ii) $\{f_k\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 f , 则 $f \in \mathcal{R}[a, b]$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx$.

定理 4.4 (单调极限定理, Levi 定理) 设函数 f_n 在 E 上可测且 $0 \leq f_n \leq f_{n+1}, n \in \mathbb{N}_+$, 那么

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

证明 对每个 $k \in \mathbb{N}_+$, 取一个简单函数列 $\{\varphi_{kl}\}_{l=1}^{\infty}$ 满足 $0 \leq \varphi_{kl} \nearrow f_k, l \rightarrow \infty$. 令

$$\psi_k = \max \{\varphi_{lk} : 1 \leq l \leq k\},$$

则有

$$0 \leq \psi_k \leq \psi_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \varphi_{lk} \leq \psi_k \leq f_k, \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_+. \quad (4.2.1)$$

后一式对 k 取极限可得

$$f_l = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{lk} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

再对 l 取极限可得

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_l \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

又因为 $\{\psi_k\}$ 是简单函数列, 则由基本引理可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \psi_k = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k. \quad (4.2.2)$$

由 (4.2.1) 式可得

$$\int_E \varphi_{lk} \leq \int_E \psi_k \leq \int_E f_k, \quad k \in \mathbb{N}_+, \quad 1 \leq l \leq k. \quad (4.2.3)$$

由 (4.2.3) 式及 $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_k \leq \cdots \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \psi_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \leq \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k. \quad (4.2.4)$$

最后, 由 (4.2.2), (4.2.4) 式可得 $\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k$. □

推论 4.1 设 $\{u_k\}$ 是在 E 上非负可测函数列, 则 $\int_E \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k$.

证明 令 $f_k = \sum_{l=1}^k u_l, k \in \mathbb{N}_+$. 则 $0 \leq f_k \leq f_{k+1} \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_E u_j = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k,$$

且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \quad \square$$

下面利用推论 4.1 给出定理 4.3 的另一种证明方法.

证明 由 $f = \sum_{j=1}^{\infty} f \chi_{E_j}$ 及 $\{f \chi_{E_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 为非负可测函数列, 用推论 4.1, 得

$$\int_E f = \int_E \sum_{j=1}^{\infty} f \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f. \quad \square$$

推论 4.2 设 $f \in L(E)$, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $\{E_j\}$ 两两不交的可测集列, 有 $\int_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f$.

证明 记 $f = f^+ - f^-$. 由 $f \in L(E)$ 得 $f^+, f^- \in L(E)$ 且非负, 则

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f^+ - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f^-.$$

注意到 $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f^+$, $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f^-$ 是两个正项级数且分别收敛于 $\int_E f^+$, $\int_E f^-$. 故由收敛级数的性质, 得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f^+ - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f^- = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} (f^+ - f^-) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f. \quad \square$$

定理 4.5 (Fatou 引理) 设 $\{f_k\}$ 是一个在 E 上非负可测函数列, 则

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

证明 由 $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_k \inf_{j \geq k} f_j$. 记 $g_k = \inf_{j \geq k} f_j$. 因此 $\{g_k\}$ 非负可测, 且 $0 \leq g_k \nearrow \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$. 由单调极限定理得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k.$$

另一方面

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \inf_{j \geq k} f_j \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

故

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k. \quad \square$$

推论 4.3

- (i) 设 $f \in L(E)$, f_k 可测且几乎处处成立 $f_k \geq f$, 那么 $\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k$.
- (ii) 设 $g \in L(E)$, g_k 可测且几乎处处成立 $g_k \leq g$, 那么 $\int_E \limsup_{k \rightarrow \infty} g_k \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k$.

证明 (i) 令 $g_k = f_k - f, k \in \mathbb{N}_+$, g_k 是在 E 上几乎处处非负的可测函数列. 用 Fatou 引理

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k$$

因为 $(f_k - f) + f = f_k$, 有 $\int_E (f_k - f) + \int_E f = \int_E f_k$, f 可积, 留作作业 (????不知道留作作业是什么).

$$\int_E g_k = \int_E (f_k - f) = \int_E f_k - \int_E f.$$

因此

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k - \int_E f = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k \geq \int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k = \int_E \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k - f \right) = \int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k - \int_E f.$$

两端同加有限值 $\int_E f$, 得

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k. \quad \square$$

定理 4.6 (Lebesgue 控制收敛定理) 设 $\{f_k\}$ 在可测集 E 上可测, 若存在 $g \in L(E)$ 使得

- (i) $|f_k| \leq g$, a.e. $x \in E$,
(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, a.e. $x \in E$.

则 $f \in L(E)$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$.

证明

法一:

由条件 (i), $-g \leq f_k \leq g$, $k \in \mathbb{N}_+$ 及 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} \int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k, \\ \int_E \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k. \end{aligned}$$

又由条件 (ii), 不妨设 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. 于是

$$\int_E f \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \leq \int_E f.$$

因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k$ 存在且等于 $\int_E f$.

由条件 (i), $|f| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k| \leq g$ 及 f 的可测性 (可测函数极限可测), 得到 $|f|$ 可测. 由 $g \in L(E)$ 可得 $|f| \in L(E)$. 因为 f 可测, 所以 $f \in L(E)$.

法二:

可用直接估值的方法证明.

$|E| = \infty$ 时, 利用²

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B(0, r)} g = \int_E g.$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 r_0 使得 $r \geq r_0$ 时, 有

$$0 \leq \int_E g < \int_{E \cap B(0, r)} g + \varepsilon.$$

此时

$$\int_{E \setminus E \cap B(0, r)} |f_k - f| \leq 2 \int_{E \setminus E \cap B(0, r)} g < 2\varepsilon.$$

再由 $\{f_k\}$ 在 $E \cap B(0, r)$ 上几乎处处收敛于 f 及 $|E \cap B(0, r)| < \infty$, 利用 定理, 对任意的 $\delta > 0$, 都有 $E_0 \subset E \cap B(0, r)$ 可测且 $|E \cap B(0, r) \setminus E_0| < \delta$. 且 $\{f_k\}$ 在 E_0 上一致收敛.

由 $g \in L(E)$, 对上述 $\varepsilon > 0$, 利用积分的绝对连续性, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得任意可测集 $F \subset E$, 只要 $|F| < \delta$ 就有 $\int_F g < \varepsilon$.

对于对应 $\delta(\varepsilon)$ 的 E_0 , 由 $\{f_k\}$ 在 E_0 的一致收敛性, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $k \geq k_0$ 时, 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|E_0| + 1}, \quad \forall x \in E_0.$$

²书上 68 页定理 3.6 的推论 2.

因此, 当 $k \geq k_0$ 时, 有

$$\int_E |f_k - f| = \int_{E_0} |f_k - f| + \int_{E \cap B(0, r_0) \setminus E_0} |f_k - f| + \int_{E \setminus E \cap B(0, r_0)} |f_k - f| < \frac{\varepsilon |E_0|}{|E_0| + 1} + \varepsilon + 2\varepsilon < 4\varepsilon.$$

$|E| < \infty$ 时, 上述证明中用 $E \cap B(0, r_0)$ 代替 E 即可. \square

定理 4.7 设 $g \in L(E)$, $|f_k| \leq g$, $k \in \mathbb{N}_+$. 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

证明 ³ 先说明 $f \in L(E)$.

用 Riesz 定理, $f_k \xrightarrow{m} f$, 则 $\{f_k\}$ 有子列 $\{f_{k_l}\}$ 几乎处处收敛于 f . 再利用 $|f_{k_l}| \leq g$, $l \in \mathbb{N}_+$, 在 $x \in E$ 上几乎处处成立 $|f| \leq g$. 由 Lebesgue 控制收敛定理可得 $f \in L(E)$. 下证 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f$, 只需证

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

利用 $|f_k| \leq g$, 知

$$\left| \int_E f_k \right| \leq \int_E |f_k| \leq \int_E g, \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

$\left\{ \int_E f_k \right\}$ 是一个有界数列, 故存在 $\left\{ \int_E f_k \right\}$ 的一个子列 $\left\{ \int_E g_k \right\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

存在 $\left\{ \int_E f_k \right\}$ 的一个子列 $\left\{ \int_E h_k \right\}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

由 $f_k \xrightarrow{m} f$, 故 $g_k \xrightarrow{m} f$, 利用 Riesz 定理, 存在 $\{g_k\}$ 的子列 $\{g_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ 使得 $g_{k_j} \rightarrow f$. 又由 $|g_{k_j}| \leq g$, $j \in \mathbb{N}_+$, a.e. $x \in E$, 利用 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\int_E f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E g_{k_j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

同理, 取 $\{h_k\}$ 几乎处处收敛的子列 $\{h_{k_j}\}$,

$$\int_E f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E h_{k_j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k$ 存在且等于 $\int_E f$. \square

³书上 76 页定理 3.14 的证明好像更简单些.

定理 4.8 (可微性) 设 E 可测, I 是一个开区间. 任意 $x \in I$, 若 $f(t, x)$ 作为 t 的函数在 E 上可积且

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq g(t), \quad t \in E, \quad x \in I,$$

其中 $g \in L(E)$, 则 $\frac{d}{dx} \int_E f(t, x) dt = \int_E \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt$.

证明 提示: $x, x + \Delta x \in I$,

$$\begin{aligned} \frac{\int_E f(t, x + \Delta x) dt - \int_E f(t, x) dt}{\Delta x} &= \int_E \frac{\partial f(t, x + \theta \Delta x)}{\partial x} dt, \quad \theta = \theta(t, x, \Delta x) \in (0, 1), \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_E \frac{f(t, x + \Delta x) - f(t, x)}{\Delta x} dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \frac{f(t, x + a_k) - f(t, x)}{a_k} dt, \end{aligned}$$

其中 $\{a_k\}$ 是任何一个趋于 0 的非零数列. □

注 4.2 先承认下述事实.

- (i) I 是有界矩形, f 在 I 上有界, 则 f 在 I 上 Riemann 可积可推出 Lebesgue 可积且积分值相等.
- (ii) I 是无界区间, f 在 I 上广义绝对 Riemann 可积可推出 Lebesgue 可积且积分值相等.

例 4.3 将 $[0, 1]$ 中的有理数排成一列 $\{r_k\}$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \sqrt{|x - r_k|}}$, $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ 在 $[0, 1]$ 几乎处处收敛.

证明 用 Levi 定理的推论可得

$$\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \sqrt{|x - r_k|}} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{|x - r_k|}} dx.$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{|x - r_k|}} dx &= \left(\int_{[0, r_k)} + \int_{[r_k, 1]} \right) \frac{1}{\sqrt{|x - r_k|}} dx \\ &= -2 \sqrt{r_k - x} \Big|_0^{r_k} + 2 \sqrt{x - r_k} \Big|_{r_k}^1 = 2\sqrt{r_k} + 2\sqrt{1 - r_k} \leq 4, \end{aligned}$$

所以 $\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dx}{2^k \sqrt{|x - r_k|}} \leq 4$. □

例 4.4 计算 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{kx^{\frac{1}{2}} \sin x}{1 + k^2 x^2} dx$.

解 记 $f_k(x) = \frac{kx^{\frac{1}{2}} \sin x}{1 + k^2 x^2}$, 有 $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$, $0 \leq x \leq 1$. 因为 $1 + k^2 x^2 \geq 2kx$, $0 \leq x \leq 1$, 所以

$$f_k(x) \leq g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

由 g 在 $[0, 1]$ 上广义绝对 Riemann 可积可得 g 在 $[0, 1]$ 上 Lebesgue 可积. 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{kx^{\frac{1}{2}} \sin x}{1+k^2x^2} dx = \int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kx^{\frac{1}{2}} \sin x}{1+k^2x^2} dx = \int_0^1 0 dx = 0. \quad \square$$

例 4.5 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$.

解 由 Taylor 级数,

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad 0 \leq x < 1, \quad \frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k}, \quad 0 < x < 1.$$

由于 $\frac{x^{k-1}}{k} \geq 0, x \in (0, 1], \forall k \in \mathbb{N}_+$, 利用 Levi 定理推论

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

§4.3 把多重积分化为累次积分

定理 4.9 (Tonelli 定理) 设 f 是 \mathbb{R}^{m+n} , $m, n \in \mathbb{N}_+$ 上的非负可测函数, 那么成立等式

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy. \quad (4.3.1)$$

证明 证明将按如下过程.

方块的特征函数 \Rightarrow 开集的特征函数
零测集的特征函数 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{方块的特征函数} \\ \text{开集的特征函数} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow$ 可测集的特征函数 \Rightarrow 简单函数列 $\Rightarrow f$ 非负可测.

(1) $f = \chi_Q, Q = [a, b] \times [c, d], [a, b] \in \mathbb{R}^m, [c, d] \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) &= |Q|_{m \times n} = |[a, b]|_m |[c, d]|_n = \int_{\mathbb{R}^n} |[a, b]|_m \chi_{[c, d]}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_{[a, b]}(x) dx \right) \chi_{[c, d]}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_{[a, b]}(x) \chi_{[c, d]}(y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy.$$

(2) $f = \chi_G, G$ 为开集. 由开集的半开区间分解定理知, 存在可数个左开右闭方块列 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, Q_k$ 两两不交. 此时 $f(x, y) = \chi_G(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k}(x, y)$, 则有

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{Q_k}(x, y) d(x, y).$$

利用 (1),

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{Q_k}(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_k} dy.$$

再用两次 Levi 定理, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{Q_k}(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_k} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

故

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy,$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx.$$

(3) $f = \chi_E$, $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$ 为可测集.

(i) $|E|_{m+n} < \infty$ 时, 对于 $\varepsilon_l = \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}_+$, 存在开集 $G_l \supset E$, 使得 $|G|_{m+n} < |E|_{m+n} + \varepsilon_l$, 进而

$$\left| \bigcap_{l=1}^{\infty} G_l \setminus E \right| = 0. \text{ 记}$$

$$H = \bigcap_{l=1}^{\infty} G_l, \quad H_k = \bigcap_{l=1}^k G_l.$$

H_k 是开集且 $H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_k \supset \cdots$, 于是

$$\chi_{H_k} \geq \chi_{H_{k+1}} \geq \cdots, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{H_k} = \chi_H, \quad \chi_H \in L(\mathbb{R}^{m+n}).$$

$|E|_{m+n} = 0$ 时, $0 \leq \chi_E \leq \chi_H$ 且

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_H = \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{H_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{H_k} \stackrel{(2)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy.$$

又有如下条件

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_{k+1}}(x, y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_1}(x, y) dy \in L(\mathbb{R}^m),$$

故由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_H = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy \right) dx.$$

注意到

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_H = |H|_{m+n} = |E|_{m+n} = 0,$$

于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^m.$$

记 $Z_m \subset \mathbb{R}^m$, $|Z_m|_m = 0$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m.$$

又

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_H(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{H_k}(x, y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m,$$

即任意的 $x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m$, $\chi_H(x, y)$ 作为 y 的函数在 \mathbb{R}^n 上几乎处处为 0.

因此再由 $0 \leq \chi_E \leq \chi_H$, 知对于任意的 $x \in \mathbb{R}^m \setminus Z_m$ 作为 y 的函数 $\chi_E(x, y)$ 在 \mathbb{R}^n 上几乎处处为 0. 故 $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dy = 0$. 进一步, $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dy$ 作为 x 的函数几乎处处为 0. 故

$$\int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dy = 0,$$

且

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dy = 0.$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x, y) dx = 0.$$

$|E|_{m+n} < \infty$ 时. $H = E \cup Z$, $E \cap Z = \emptyset$, $|Z|_{m+n} = 0$. 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{H_k}(x, y) = \chi_H(x, y) = \chi_E(x, y) + \chi_Z(x, y).$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E &= \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_H - \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_Z = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{H_k} - \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_Z \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy - \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z dy, \\ (\text{Lebesgue 控制收敛定理}) &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{H_k}(x, y) dy \right) dx - \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z dy, \\ (\text{Lebesgue 控制收敛定理}) &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{H_k}(x, y) dy \right) dx - \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_H(x, y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Z(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\chi_H(x, y) dy - \chi_Z(x, y) dy) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x, y) dx \right) dy.$$

(ii) $|E|_{m+n} = \infty$ 时, 有

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \quad |E_j|_{m+n} < \infty, \quad j \in \mathbb{N}_+, \quad \chi_E(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}(x, y),$$

其中 $\{E_j\}$ 两两不交且可测. 用 Levi 定理, 有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E &= \sum_{j=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j}(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}(x, y) \right) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dy \right) dx.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x, y) dx \right) dy.$$

(4) 设 $f = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}(x, y)$, 其中 E_1, \dots, E_k 可测且两两不交, $c_j \geq 0, j = 1, \dots, k$. 则有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f &= \sum_{j=1}^k c_j |E_j|_{m+n} = \sum_{j=1}^k c_j \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_{E_j} \stackrel{(3)}{=} \sum_{j=1}^k c_j \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j}(x, y) dy \right) dx \\ &\stackrel{\text{运算性质}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\sum_{j=1}^k c_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j}(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^k c_j \chi_{E_j}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \chi_E = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_E(x, y) dx \right) dy.$$

(5) 设 f 在 \mathbb{R}^{m+n} 中非负可测的, 利用定理 2.4, 存在非负简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 满足

$$0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_k \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = f.$$

利用 Levi 定理, 有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f &= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} dx \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx. \quad \square$$

定理 4.10 (Fubini 定理) 设 $f \in L(\mathbb{R}^{m+n})$, 那么 (4.3.1) 式对于 f 成立.

证明 将 f 写成 $f = f^+ - f^-$, 其中 f^+, f^- 分别是 f 的正部和负部. 则

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f &= \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f^+ - \iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f^- \stackrel{\text{定理 3.15}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x, y) dy - \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} dx \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x, y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x, y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} (f^+(x, y) - f^-(x, y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx. \quad \square$$

§4.4 Riemann 积分与 Lebesgue 积分关系

定义 4.1 f 在 E 上相对于 E 连续, 等价于任意 $x \in E, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $y \in E$ 且 $|x - y| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

例 4.6 Dirichlet 函数 $f, f|_{\mathbb{Q}}$ 相对于 \mathbb{Q} 连续, $f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ 相对于 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 连续.

定理 4.11 $\mathcal{R}(D) \subset L(D)$, 其中 D 是 \mathbb{R}^n 中的矩形.

证明 先证任意 $f \in \mathcal{R}(D)$, f 都可测. 由 $f \in \mathcal{R}(D)$ 的性质, f 在 D 上有界且几乎处处连续. 即存在零测集 $E_0 \subset D, \forall x \in D \setminus E_0$ 都是 f 相对于 D 的连续点, 也是 f 相对于 $D \setminus E_0$ 的连续点. 由命题 2.5, 知 f 在 $D \setminus E_0$ 上可测. 因为 E_0 为零测集, 所以 f 在 E_0 上可测. 故 f 在 $D = (D \setminus E_0) \cup E_0$ 上可测.

再利用 f 的有界性, 即存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$. 因为 D 是长方体, $|D| < \infty$, 所以 M 作为一个常函数在 D 上 Lebesgue 可积. 又有 f 可测, 因此 $|f| \in L(D)$ 可以推出 $f \in L(D)$. \square

定理 4.12 设 $f \in \mathcal{R}(D)$ 则

$$(R) \int_D f(x) dx = (L) \int_D f,$$

其中, $(R) \int_D f(x)$ 表示 f 的 Riemann 积分, $(L) \int_D f$ 表示 f 的 Lebesgue 积分.

证明之前回忆 Riemann 积分定义. 将 D 分成有限个闭长方块

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k, \quad \bigcup_{l=1}^k \Delta_l = D, \quad i \neq j, \quad \overset{\circ}{\Delta}_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset.$$

任取 $\xi_l \in \Delta_l, l = 1, 2, \dots, k$, 若存在 $I \in \mathbb{R}$ 使得当 $\lambda := \max_{1 \leq l \leq k} (\text{diam } \Delta_l) \rightarrow 0$ 时, $\sum_{l=1}^k f(\xi_l) |\Delta_l|$ 有极限 I , 则称 f 在 D 上 Riemann 可积. I 是 f 在 D 上的积分, 记 $I =: (R) \int_D f$. 有如下结论.

(i) $f \in \mathcal{R}(D) \Rightarrow f$ 有界.

(ii) $S(f) := \sum_{l=1}^k M_l |\Delta_l|, s(f) := \sum_{l=1}^k m_l |\Delta_l|$, 其中 $M_l := \sup_{x \in \Delta_l} f(x), m_l := \inf_{x \in \Delta_l} f(x)$, 有

$$f \in \mathcal{R}(D) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S(f) - s(f)) = 0.$$

(iii) 分划加细 (略).

下面证明定理 4.12.

证明 取 D 的一列分划 $T_k = \{\Delta_{1k}, \dots, \Delta_{N_k k}\}$, 其中 Δ_{jk} , $j = 1, 2, \dots, N_k$ 是闭长方形, $D = \bigcup_{j=1}^{N_k} \Delta_{jk}$, 且 $\mathring{\Delta}_{jk} \cap \mathring{\Delta}_{ik} = \emptyset$, $i \neq j$. 对每个 k , T_{k+1} 是 T_k 的加细. 此时有

$$S(f, T_{k+1}) \leq S(f, T_k), \quad s(f, T_{k+1}) \geq s(f, T_k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (S(f, T_k) - s(f, T_k)) = 0. \quad (4.4.1)$$

定义

$$f_{T_k}^+(a) = \sum_{l=1}^{N_k} M_{lk} \chi_{\Delta_{lk}}(x), \quad f_{T_k}^-(a) = \sum_{l=1}^{N_k} m_{lk} \chi_{\Delta_{lk}}(x), \quad (4.4.2)$$

其中 $M_{lk} = \sup_{x \in \Delta_{lk}} f(x)$, $m_{lk} = \inf_{x \in \Delta_{lk}} f(x)$. 则有

$$\int_D f_{T_k}^+ = S(f, T_k), \quad \int_D f_{T_k}^- = s(f, T_k), \quad f_{T_k}^+ \geq f_{T_{k+1}}^+, \quad f_{T_k}^- \leq f_{T_{k+1}}^-, \quad \text{a.e. } x \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

事实上记 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \partial \Delta_{lk}$, 则 $|E| = 0$. 任意 $x \in D \setminus E$, 都有 $x \in \mathring{\Delta}_{lk}, x \in \mathring{\Delta}_{l, k+1}$. 再由 T_{k+1} 是 T_k 的加细, 则

$$f_{T_{k+1}}^+(x) = M_{l', k+1} \leq M_{lk} = f_{T_k}^+(x),$$

同理 $f_{T_{k+1}}^-(x) \geq f_{T_k}^-(x)$. 再由

$$f_{T_k}^-(x) \leq f(x) \leq f_{T_k}^+(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}_+,$$

可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{T_k}^-(x) \leq f(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_{T_k}^+(x), \quad x \in D \setminus E.$$

由 (4.4.1), (4.4.2) 式可得

$$\int_D (f_{T_k}^+(x) - f_{T_k}^-(x)) dx = S(f, T_k) - s(f, T_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

即

$$\int_D \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{T_k}^+(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f_{T_k}^-(x) \right) dx = 0.$$

进而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{T_k}^-(x) = f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{T_k}^+(x), \quad \text{a.e. } x \in D \setminus E,$$

所以

$$(R) \int_D f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (R) \int_D f_{T_k}^+(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_D f_{T_k}^+(x) dx = (L) \int_D f(x) dx. \quad \square$$

定理 4.13 无界区域上的广义 Riemann 可积函数为 Lebesgue 可积函数的充要条件是它为广义绝对 Riemann 可积函数.

证明 为了简明, 只证一元且区间为 $[a, +\infty)$ 的情形.

设 f 在 $[a, +\infty) \subset \mathbb{R}$ 上广义 Riemann 可积, 则 $f \in L([a, +\infty))$ 可以推出 $|f|$ 在 $[a, +\infty)$ 上广义 Riemann 可积. 下证充分性. 由定理 4.12 可得

$$(R) \int_a^k |f(x)| dx = (L) \int_a^k |f(x)| dx, \quad \forall k \geq a.$$

令 $k \rightarrow +\infty$, 有

$$\begin{aligned} (R) \int_a^{+\infty} |f(x)| dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (R) \int_a^k |f(x)| dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} (L) \int_a^k |f(x)| dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} (L) \int_a^{+\infty} |f(x)| \chi_{[a, k]}(x) dx \\ &\quad \left(\{ |f(x)| \chi_{[a, k]} \} \text{ 是增列} \right) = (L) \int_a^{+\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} |f(x)| \chi_{[a, k]}(x) dx = (L) \int_a^{+\infty} |f| < +\infty. \end{aligned}$$

因此 $f \in L([a, +\infty))$. □

§4.5 Lebesgue 积分小结

- 积分定义
 - 非负简单函数
 - 非负可测函数
 - 一般可测函数
- 性质
 - $L(E)$ 是线性空间
 - 绝对连续性
 - 单调性
- 积分号下取极限
 - 基本引理
 - 单调收敛定理
 - Fatou 引理
 - Lebesgue 控制收敛定理
- (广义) Riemann 可积与 Lebesgue 可积
- 把重积分化为累次积分

第五章 一元函数的变化性态

- 定义域: 区间
- 单调函数可微性
- 单调函数导数在区间可积
- 有界变差函数
- 绝对连续函数

§5.1 单调函数可微性

定理 5.1 设 f 在 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上单调, 则 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处可微 (可导), 且

$$\int_{[a,b]} |f'| \leq |f(a) - f(b)|.$$

注 5.1 当 f 在 $[a, b]$ 上单调不减, 此时 $[a, b]$ 上几乎处处有 $f'(x) \geq 0$, 且 $\int_{[a,b]} f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$.
当 f 在 $[a, b]$ 上单调不增, 此时 $[a, b]$ 上几乎处处有 $f'(x) \leq 0$. 由 $-f$ 单调不减可得

$$-\int_{[a,b]} f'(x) dx = \int_{[a,b]} (-f)'(x) dx \leq (-f)(b) - (-f)(a) = -(f(b) - f(a)),$$

进而 $\int_{[a,b]} f'(x) dx \geq f(b) - f(a)$.

证明 设 f 单调不减. 第一步证明 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处可导, 第二步证明 $\int_{[a,b]} f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$.

第一步比较复杂, 先证第二步, f 的可微性质后面再证. 设 f 在 $[a, b]$ 上单调不减, 在 f 几乎处处可微已知的情况下, 下证 $\int_{[a,b]} f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$. 不妨设任意 $x > b$ 都有 $f(x) = f(b)$ 及

$$F_k(x) = k(f(x + k^{-1}) - f(x)), \quad x \in [a, +\infty).$$

则由承认的事实知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = f'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, +\infty).$$

由 Fatou 引理及 $F_k, k \in \mathbb{N}_+$ 的可测性 (可测函数线性组合, 极限仍是可测函数) 得

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f'(x)dx &= \int_{[a,b]} \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)dx = \int_{[a,b]} \liminf_{k \rightarrow \infty} F_k(x)dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} F_k(x)dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} k \left(\int_a^b f(x+k^{-1})dx - \int_a^b f(x)dx \right) = \liminf_{k \rightarrow \infty} k \left(\int_{a+k^{-1}}^{b+k^{-1}} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} k \left(\int_b^{b+k^{-1}} f(x)dx - \int_a^{a+k^{-1}} f(x)dx \right) \leq f(b) - f(a),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到 $f(x) \geq f(a), \forall x \geq a$. □

注 5.2 $\int_{[a,b]} f' \leq f(b) - f(a)$ 中的不等号有时是严格的, 即存在增函数 f , 使得 $\int_{[a,b]} f' < f(b) - f(a)$.

注 5.3 书上 127 页定义 1.1, 1.2 注意区分左右导数及导数左右极限.

例 5.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$f'(x+0), f'(x-0)$ 不存在但左右导数 $f'_+(x), f'_-(x)$ 存在.

定义 5.1 (数分中的覆盖) $E \subset \mathbb{R}, \mathcal{F} = \{G : G \subset \mathbb{R} \text{ 是开集}\}$. 若任意 $x \in E$, 存在 $G \in \mathcal{F}$ 使得 $x \in G$, 则称 \mathcal{F} 是 E 的一个开覆盖.

定义 5.2 (Vitali 覆盖) 设 $E \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{A}$ 是一族直径大于零的方块. 若任意 $x \in E, \delta > 0$, 存在 $Q \in \mathcal{A}$, 使得 $x \in Q$ 且 $\text{diam}(Q) < \delta$, 那么就称 \mathcal{A} 是 E 的 Vitali 覆盖.

例 5.2 令 $\mathcal{A} = \left\{ \left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} \right) \right\}, k \in \mathbb{N}_+$, 有 $(0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} \right)$, 但 \mathcal{A} 不是 Vitali 覆盖.

例 5.3 令

$$\mathcal{A} = \left\{ \left(x, x + \frac{1}{k} \right), k \in \mathbb{N}_+, x \in (0, 1] \right\},$$

则 \mathcal{A} 是 $(0, 1]$ 的一个 Vitali 覆盖. 事实上, 任意 $x \in (0, 1], \delta > 0$, 存在 k , 使得 $x \in \left[x, x + \frac{1}{k} \right)$ 且 $\frac{1}{k} < \delta$.

引理 5.1 (Vitali 覆盖引理)¹ 设 $E \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{Q}$ 是 E 的 Vitali 覆盖, 则 \mathcal{Q} 中存在至多可数个两两不交的元素 $Q_k, k \in \mathbb{N}_+$ (角标 k 不必跑满 \mathbb{N}_+), 使得

$$\left| E \setminus \bigcup_k Q_k \right| = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}_+, \quad E \setminus \bigcup_k \bar{Q}_k \subset \bigcup_{k \geq m} Q'_k,$$

其中 Q'_k 是 Q_k 的同心 4 倍扩大 (如果不存在 Q_k 满足 $k \geq m$, 则视 $\bigcup_{k \geq m} Q'_k$ 为空集).

¹我上课没听懂 Vitali 覆盖引理以及用 Vitali 引理证明单调函数几乎处处可微的证明, 所以证明参见课本.

定义 5.3 (函数上下极限) 设 $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, 下极限定义为

$$\liminf_{h \rightarrow 0+} \varphi(h) := \lim_{h \rightarrow 0+} \inf_{x < t < x+h} \varphi(t),$$

上极限可类似地定义.

显然有如下等价关系.

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0+} \varphi(h) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \inf_{x < t < x+h} \varphi(t) < \lambda, \\ \iff \exists \delta > 0, \text{ 使 } h \in (0, \delta) \text{ 时, } \inf_{x < t < x+h} \varphi(t) < \lambda, \\ \iff \exists \delta > 0, \text{ 对 } \forall h \in (0, \delta) \text{ 都有 } t \in (x, x+h) \text{ 使得 } \varphi(t) < \lambda, \\ \iff \exists \delta > 0, \exists t_k \in (x, x+\delta), k = 1, 2, \dots, t_k \rightarrow x+, k \rightarrow \infty, \varphi(t_k) < \lambda. \end{aligned}$$

证明 下证书上 128 页定理 1.1 的证明中, 集

$$E_{uv} = \{x \in (a, b) : D_- f(x) < u < v < D^+ f(x)\}$$

为零测集, 分两步.

第一步.

$$E_u = \{x \in (a, b) : D_- f(x) < u\} \supset E_{uv}.$$

任意 $x \in E_u$, 有

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} &< u \\ \iff \exists \delta > 0, \forall h \in (0, \delta), \exists t \in (0, h) \text{ 使 } \frac{f(x) - f(x-t)}{t} &< u. \end{aligned}$$

令

$$\mathcal{F}_u = \{[t, s] \subset (a, b) : f(s) - f(t) < u(s-t)\}, \quad (5.1.1)$$

则 \mathcal{F}_u 是 E_u 的一个 Vitali 覆盖, 也是 E_{uv} 的一个 Vitali 覆盖. 由 Vitali 覆盖引理, 存在一族至多可数的区间 $I_k \in \mathcal{F}_u$ 两两不交, 使得 $\left| E_{uv} \setminus \bigcup_k I_k \right| = 0$. 记 $\dot{I}_k = (a_k, b_k), A_k = \dot{I}_k \cap E_{uv}, k = 1, 2, \dots$. 若 $A_k \neq \emptyset$, $\forall x \in A_k$, 则

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > v \\ \iff \exists \delta > 0, \forall h \in (0, \delta), \exists t \in (a, b) \text{ 使 } \frac{f(x+t) - f(x)}{t} &> v. \end{aligned}$$

令

$$\mathcal{F}_{vk}^* = \{[t, s] \subset \dot{I}_k : f(s) - f(t) > v(s-t)\}.$$

\mathcal{F}_{vk}^* 是 A_k 的一个 Vitali 覆盖. 由 Vitali 覆盖引理, 存在一族至多可数的区间 $J_{kl} \in \mathcal{F}_{vk}^*$ 两两不交, 使得

$\left| A_k \setminus \bigcup_l J_{kl} \right| = 0$. 利用 f 的单增性, 记 $J_{kl} = [a_{kl}, b_{kl}]$, $l \in N_k \subset \mathbb{N}_+$, N_k 是有限集或 \mathbb{N}_+ , $J_{kl} \subset \overset{\circ}{I}_k$, 有

$$f(b_k) - f(a_k) \geq \sum_{l \in N_k} (f(b_{kl}) - f(a_{kl})).$$

又 $f(b_{kl}) - f(a_{kl}) > v(b_{kl} - a_{kl}), \forall l \in N_k$, 故

$$\begin{aligned} f(b_k) - f(a_k) &> v \sum_{l \in N_k} (b_{kl} - a_{kl}) = v \sum_{l \in N_k} |J_{kl}| \geq v |A_k|, \\ A_k = \overset{\circ}{I}_k \cap E_{uv} &= \left(\overset{\circ}{I}_k \cap E_{uv} \setminus \left(\bigcup_{l \in N_k} J_{kl} \cap E_{uv} \right) \right) \cup \left(\bigcup_{l \in N_k} J_{kl} \cap E_{uv} \right). \end{aligned}$$

任意 $\varepsilon > 0$, 取开集² $G \supset E_{uv}$, 使得 $I_k \subset G$ 且 $|G| \leq |E_{uv}| + \varepsilon$, 有

$$\begin{aligned} v|E_{uv}| &\leq v \left| \bigcup_k (\overset{\circ}{I}_k \cap E_{uv}) \right| = v \left| \bigcup_k A_k \right| \leq v \sum_k |A_k| \\ &< \sum_k (f(b_k) - f(a_k)) < \sum_k u(b_k - a_k) = u \sum_k |I_k| \leq u|G| < u(|E_{uv}| + \varepsilon), \end{aligned}$$

即 $v|E_{uv}| < u(|E_{uv}| + \varepsilon)$. 由 ε 的任意性, $v|E_{uv}| \leq u|E_{uv}|$. 因为 $u < v$, 所以 $|E_{uv}| = 0$. \square

定理 5.2 (Fubini 逐项求导定理) 设 $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 单调不减, 若任意的 $x \in [a, b]$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 收敛于 $f(x)$, 则几乎所有的 $x \in [a, b]$, 有 $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$.

证明 记 $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}_+$. 因 f_k 单调不减, 故存在 $f'_k(x)$, a.e. $x \in [a, b]$ 且 $f'_k(x) \geq 0$, 有

$$0 \leq \int_a^b f'_k(x) dx \leq f_k(b) - f_k(a), \quad \forall k \in \mathbb{N}_+,$$

于是

$$\int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} f'_k(x) dx \xrightarrow{\text{Levi 定理}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_a^b f'_k(x) dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (f_k(b) - f_k(a)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

又

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} f'_k(x) &\geq \sum_{k=n+2}^{\infty} f'_k(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} f'_k(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} f'_k(x) dx = 0, \end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f'_k(x) dx \rightarrow 0, \quad \text{a.e. } x \in [a, b], \quad n \rightarrow \infty.$$

²这个 G 能取到好像不是那么显然, 应该要对 (5.1.1) 式中集合包含于 G 做些说明.

又 $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) + r_n(x)$, 所以

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x) + r'_n(x), \quad r'_{n+1} = r'_n(x) + f_n(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

因为 $r_n(x)$ 单调不减, 所以

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n(x) dx = \int_a^b \liminf_{n \rightarrow \infty} r'_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b r'_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (r_n(b) - r_n(a)).$$

因此 $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$, a.e. $x \in [a, b]$. □

§5.2 有界变差函数

命题 5.1

- (i) 若 $f \in \text{BV}[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界.
- (ii) 若 $f, g \in \text{BV}[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f + \beta g \in \text{BV}[a, b]$.
- (iii) $f \in \text{BV}[a, b] \Leftrightarrow \forall c \in (a, b), f \in \text{BV}[a, c] \cap \text{BV}[c, b]$, 同时 $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.
- (iv) 若 $f \in \text{BV}[a, b]$, 则 $f = \varphi - \psi$, 其中 $\varphi(x) = \frac{1}{2} (V_a^x(f) + f(x))$, $\psi(x) = \frac{1}{2} (V_a^x(f) - f(x))$ 为两个单调不减函数.

证明 (i) 因为 $f \in \text{BV}[a, b]$, 任意 $x \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \\ &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \\ &= \begin{cases} |f(a)| + V(f, a, x, b), & a < x < b, \\ |f(a)| + V(f, a, b), & x = a \text{ 或 } x = b, \end{cases} \\ &\leq |f(a)| + V_a^b(f) < +\infty. \end{aligned}$$

故 f 在 $[a, b]$ 上是有界的.

(ii) 由有界变差函数的定义, 对于任意一组节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, 有

$$V(f, x_0, x_1, \cdots, x_n) \leq V_a^b(f) < +\infty, \quad V(g, x_0, x_1, \cdots, x_n) \leq V_a^b(g) < +\infty,$$

故

$$\begin{aligned} V(\alpha f + \beta g, x_0, x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{j=1}^n |(\alpha f + \beta g)(x_j) - (\alpha f + \beta g)(x_{j-1})| \\ &\leq |\alpha| \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |\beta| \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| \\ &\leq |\alpha| V_a^b(f) + |\beta| V_a^b(g) < +\infty. \end{aligned}$$

所以就有

$$V_a^b(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha|V_a^b(f) + |\beta|V_a^b(g) < +\infty,$$

即 $\alpha f + \beta g \in \text{BV}[a, b]$.

(iii) 必要性. 若 $f \in \text{BV}[a, b]$, 下证 $f \in \text{BV}[a, c]$.

对于任意节点组 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c$, 都有

$$V(f, x_0, x_1, \cdots, x_m) = \sum_{j=1}^m |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^m |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(b) - f(c)|.$$

又 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c < b = x_{m+1}$ 是 $[a, b]$ 的一组节点, 故

$$V(f, x_0, x_1, \cdots, x_m) \leq V(f, x_0, x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}) \leq V_a^b(f) < +\infty.$$

因此, $f \in \text{BV}[a, c]$, 类似可证 $f \in \text{BV}[c, b]$.

充分性. 任取 $[a, b]$ 的一组节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 当 $c = x_i$ (对某个 i) 时, 有

$$V(f, x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^i |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sum_{j=i+1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty,$$

所以 $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, 即 $f \in \text{BV}[a, b]$. 当存在 i , 使得 $x_{i-1} < c < x_i$ 时, 有

$$\begin{aligned} & V(f, x_0, x_1, \cdots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{j=i+1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |f(c) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(c)| + \sum_{j=i+1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &= V(f, x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, c) + V(f, c, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \\ &\leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty, \end{aligned}$$

所以 $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) < +\infty$, 即 $f \in \text{BV}[a, b]$. 下证 $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由变差定义, 存在 $[a, c]$ 的一组节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c$, 使 $V(f, x_0, x_1, \cdots, x_m) > V_a^c(f) - \frac{\varepsilon}{2}$, 存在 $[c, b]$ 的一组节点 $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b$, 使 $V(f, y_0, y_1, \cdots, y_k) > V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} & V(f, x_0, x_1, \cdots, x_m = c = y_0, y_1, \cdots, y_k) \\ &= V(f, x_0, x_1, \cdots, x_m) + V(f, y_0, y_1, \cdots, y_k) > V_a^c(f) + V_c^b(f) - \varepsilon, \end{aligned}$$

故 $V_a^c(f) + V_c^b(f) - \varepsilon < V_a^b(f)$ 对于任意 $\varepsilon > 0$ 成立. 由 ε 的任意性可得 $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$. 所以 $V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f)$.

(iv) 全变差函数 $V_a^x(f)$, $a \leq b$ 在 $[a, b]$ 上是单调不减的, 由变差定义可得

$$|f(x) - f(a)| \leq V_a^x(f). \quad (5.2.1)$$

下证 φ, ψ 单调不减. 当 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 时, 不妨设 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned}\varphi(x_2) - \varphi(x_1) &= \frac{1}{2} (V_a^{x_2}(f) + f(x_2)) - \frac{1}{2} (V_a^{x_1}(f) + f(x_1)) \\ &= \frac{1}{2} (V_{x_1}^{x_2} + (f(x_2) - f(x_1))) \geq 0, \quad (\text{由 (5.2.1) 可得}).\end{aligned}\quad \square$$

推论 5.1

- (i) 若 $f \in \text{BV}[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上的不连续点至多可数且 f Riemann 可积.
(ii) 若 $f \in \text{BV}[a, b]$, 则 f 几乎处处有有限导数, 且 $f' \in L([a, b])$ (由命题 5.1 (iv)).

例 5.4 若 f 在 $[a, b]$ 上单调, 则 $f \in \text{BV}[a, b]$.

证明 不妨设 f 在 $[a, b]$ 上单调不减, 任取 $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 有

$$V(f, x_0, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|.$$

因为 f 单调不减, $f(x_j) - f(x_{j-1}) \geq 0, j = 1, \cdots, n$, 所以

$$V(f, x_0, \cdots, x_n) = \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) - f(x_{j-1}) \right| = f(b) - f(a). \quad (5.2.2) \quad \square$$

例 5.5 $f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x} \in \text{BV}[0, 1]$.

证明 任意的点组 $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| &= |f(x_1) - f(0)| + \sum_{j=2}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(t) dt \right| \quad (\text{Newton-Leibniz 公式}) \\ &\leq |f(x_1)| + \sum_{j=2}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f'(t)| dt \\ &= |f(x_1)| + \int_{x_1}^1 |f'(t)| dt \\ &= |f(x_1)| + \int_{x_1}^1 \left| 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right| \\ &\leq 1 + \int_{x_1}^1 (2 + 1) dx \leq 4.\end{aligned}\quad \square$$

§5.3 绝对连续函数

例 5.6 设 $g \in L([a, b])$, 定义 $f(x) = \int_{[a, x]} g(t) dt$ 则对任意非空开集 $G \subset [a, b], G = \bigcup_k (a_k, b_k)$, 其中 (a_k, b_k) 至多可数且两两不交.

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_k \left| \int_{(a_k, b_k)} g(t) dt \right| \leq \sum_k \int_{(a_k, b_k)} |g(t)| dt = \int_{\bigcup_k (a_k, b_k)} |g(t)| dt = \int_G |g(t)| dt,$$

即 $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leq \int_G |g(t)| dt$. 所以任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $|G| < \delta$ 就有 $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

命题 5.2 (绝对连续函数的性质)

- (i) $f \in AC[a, b] \Rightarrow f \in BV[a, b] \cap C[a, b]$.
- (ii) $f, g \in AC[a, b] \Rightarrow \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in AC[a, b]$.
- (iii) $f, g \in AC[a, b] \Rightarrow fg \in AC[a, b]$.
- (iv) $f \in AC[a, b] \Leftrightarrow \exists g \in L([a, b])$ 使得 $f(x) = \int_{[a, x]} g(t) dt + C$.

证明 (i) $f \in C[a, b]$ 显然, 下证 $f \in BV[a, b]$. 取 $\varepsilon = 1$, 对应定义中的 $\delta_0 > 0$, 使得任意开集 $G \subset [a, b]$, $G(f) < \varepsilon = 1$. 将 $[a, b]$ 分成有限个长度小于 δ_0 的区间 $[a_{j-1}, a_j]$, 其中

$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b, \quad j = 1, \cdots, k, \quad a_j - a_{j-1} < \delta_0.$$

对每个 $j, 1 \leq j \leq k$, 任给 $[a_{j-1}, a_j]$ 的一组分点 $a_{j-1} = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = a_j$. 记 $G = \bigcup_{l=1}^m (x_{l-1}, x_l)$, 则 G 为 $[a, b]$ 的一个开子集, 且 $|G| = x_m - x_0 = a_j - a_{j-1} < \delta_0$, 进而 $G(f) = \sum_{l=1}^m |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \varepsilon$. 由有界变差函数定义, 知 f 在 $[a_{j-1}, a_j]$ 上是有界变差的且 $V_{a_{j-1}}^{a_j}(f) \leq 1$ 进而 $V_a^b(f) \leq k$, 即 $f \in BV[a, b]$.

(ii), (iii) 自行证明. (iv) 课上还没证. \square

定理 5.3 若 $f \in AC[a, b]$ 且几乎处处成立 $f'(x) = 0$, 则 f 是 $[a, b]$ 上的常函数.

证明 由绝对连续定义, 若 $f \in AC[a, b]$, 则任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要非空开集 $G \subset [a, b]$ 满足 $|G| < \delta$, 就有 $G(f) < \varepsilon$. 记 $E = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$, 则有 $|E| = b - a$. 对任意 $x \in E$, 由导数定义, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

则对上述 ε , 存在 $\eta > 0$, 只要 $h \in (0, \eta)$, 就有

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \varepsilon, \quad [x, x+h] \subset (a, b).$$

记

$$\mathcal{H} = \left\{ [x, x+h] \subset (a, b) : |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon h \right\},$$

则 \mathcal{H} 是 E 的一个 Vitali 覆盖. 由 Vitali 覆盖引理, 存在至多可数个互不相交的闭区间 $B_k \in \mathcal{H}$, $k \in N \subset \mathbb{N}_+$, 使得 $\left| E \setminus \bigcup_k B_k \right| = 0$. 由 $|E| = b - a$ 可得 $\sum_k |B_k| \geq b - a$. 对于上述 $\delta > 0$, 不妨设 $\delta < b - a$, 存在 $m \in \mathbb{N}_+$ 使得 $\sum_{k=1}^m |B_k| > b - a - \delta$, 记 $G = (a, b) \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k$. 则 G 是开集且 $|G| < \delta$, $G(f) < \varepsilon$. 记 $B_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \cdots, m$, 则有

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{k=1}^m |f(b_k) - f(a_k)| + G(f) < \varepsilon \sum_{k=1}^m (b_k - a_k) + \varepsilon < \varepsilon(b - a + 1).$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可得 $f(b) = f(a)$.

把上述过程用在任何闭子区间 $[a, x]$ 上, 就有 $f(x) = f(a)$, 即 f 在 $[a, b]$ 上是常函数. \square

定理 5.4 设 $f \in L([a, b])$ 且 $F(x) = \int_{[a, x]} f(t)dt$, 则在 (a, b) 上几乎处处成立 $F'(x) = f(x)$.

证明 若 f 是有界的函数. 设 $|f(x)| \leq B < +\infty$, $x \in [a, b]$. 令 $f(x) = 0$, $x \notin [a, b]$, $x > b$ 时, 有 $F(x) = F(b)$. 令

$$f_k(x) = \frac{F(x + k^{-1}) - F(x)}{k^{-1}}, \quad x \in [a, b],$$

有

$$|f_k(x)| = k \left| \int_{[x, x+k^{-1}]} f(t)dt \right| \leq B < +\infty,$$

且 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ 几乎处处存在 (???? 为什么存在没搞懂). 则

$$\begin{aligned} \int_{[a, x]} F'(t)dt &= \int_{[a, x]} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)dt \\ (\text{Lebesgue 控制收敛定理}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, x]} f_k(t)dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\int_{a+k^{-1}}^{x+k^{-1}} F(t)dt - \int_a^x F(t)dt \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\int_x^{x+k^{-1}} F(t)dt - \int_a^{a+k^{-1}} F(t)dt \right). \end{aligned}$$

因为 $F \in AC[a, b]$ 所以 $F \in C[a, b]$, 进而³

$$\int_{[a, x]} F'(t)dt = F(x) - F(a) = F(x).$$

即 $\int_{[a, x]} (f(t) - F'(t))dt = 0$, $\forall x \in [a, b]$. 由例 5.10 知在 (a, b) 上几乎处处成立 $F'(t) = f(t)$.

对于一般情形. 不妨设几乎处处有 $f \geq 0$, 此时 F 单调不减. 令 $f_n = f\chi_{(f < n)}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 且令 $G_n(x) = \int_{[a, x]} (f - f_n)$. G_n 单调不减且有 $f - f_n = f(1 - \chi_{f < n})$. 此时, $G_n(x) = F(x) - \int_{[a, x]} f_n(t)dt$. 由前面所证可得几乎处处有 $F' = G'_n + f_n \geq f_n$. 在不等式 $F' \geq f_n$ 的两端, 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $f \leq F'$, 进而

$$F(x) = \int_{[a, x]} f(t)dt \leq \int_{[a, x]} F'(t)dt.$$

由 F 单调不减, 有

$$\int_{[a, x]} F'(t)dt \leq F(x) - F(a) = F(x).$$

故 $\int_{[a, x]} F'(t)dt = F(x)$. 进一步 $\int_{[a, x]} (f(t) - F'(t))dt = 0$, 所以几乎处处成立 $f(t) = F'(t)$. \square

定理 5.5 (微积分基本定理, Newton-Leibniz 公式) 设 $f \in AC[a, b]$, 则 $\int_{[a, b]} f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

³应该要用到中值定理.

证明 由

$$\left(f(x) - \int_{[a,x]} f'(t)dt\right)' = f'(x) - f'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [a, b]$$

及定理 5.3 可得 $f(x) - \int_{[a,x]} f'(t)dt = C$, C 为常数. 令 $x = a$ 可得 $C = f(a)$, 推出结论. \square

§5.4 Cantor 集与 Cantor 函数

定义 5.4 (稀疏集) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 非空, 若任意区间 $I \subset \mathbb{R}$, 都存在子区间 $J \subset I$, 使得 $I \cap E = \emptyset$, 称 E 是稀疏集.

定义 5.5 (奇异函数) 若函数 r 几乎处处有 $r'(x) = 0$, 则称 r 为奇异函数. 若奇异函数 r 连续, 则称 r 是连续的奇异函数.

5.4.1 Cantor 集的构造

记 $I = [0, 1]$. 将 I 三等分成三个区间, 去掉中间的开区间 $I_{11} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 将 $I \setminus I_{11}$ 的两个闭区间, 再分别三等分, 分别去掉其中间的开区间 $I_{21} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $I_{22} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. 如此继续, 到第 n 步, 去掉 2^{n-1} 个长为 3^{-n} 的开区间, 剩下的是长为 3^{-n} 的 2^n 个闭区间. 无限步地进行下去, 去掉的开区间 I_{nj} , $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 长为 3^{-n} , 且这些开区间两两不交. 记 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{nj}$, 则 G 是开集, 且

$$|G| = \sum_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} |I_{nj}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

记 $P = [0, 1] \setminus G$, G 是开集. 称 P 是 Cantor 集, 有 $|P| = 0$.

命题 5.3 (Cantor 集 P 的性质)

- (i) P 是稀疏的.
- (ii) P 是没有孤立点的闭集 (完全集).
- (iii) P 的基数是 \aleph (与 $[0, 1]$ 等势).

证明 (i) 任意区间 $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. $(\alpha, \beta) \cap [0, 1] = \emptyset$ 时, 显然有 (α, β) 的一个子区间 J , 使得 $J \cap E = \emptyset$. $(\alpha, \beta) \cap [0, 1] \neq \emptyset$ 时, 有 $(\alpha, \beta) \cap (0, 1) \neq \emptyset$. 记 $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta) \cap (0, 1)$, 则 $(\alpha', \beta') \cap G \neq \emptyset$, 否则 $(\alpha', \beta') \subset P$, 这是不可能的, 因为 $|P| = 0$, $\beta' - \alpha' > 0$. 由 $(\alpha', \beta') \cap G \neq \emptyset$, 存在 $x_0 \in (\alpha', \beta') \cap G$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (\alpha', \beta') \cap G$, 进而 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap P \neq \emptyset$.

(ii) 提示: 要证 $x \in P$ 不是孤立点, 即证 x 不是 $P^c = G \cup (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的两个构成区间的端点.

(iii) 任意 $x \in [0, 1]$, x 的三进制表示为

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \quad x_0 = 0, 1, \quad x_k \in \{0, 1, 2\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

约定不会出现存在 $N, k > N, x_k = 2$ 的情况. 上述表法唯一, 记为 $x = {}_3x_0.x_1x_2 \cdots x_n \cdots$. x 也可写成二进制小数

$$x = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k}, \quad y_k \in \{0, 1\},$$

约定不会出现存在 $N, k > N, y_k = 1$ 的情形, 此时记 $x = {}_2y_0.y_1y_2 \cdots y_n \cdots$.

再看 Cantor 集的构造过程. 第一步去掉的区间

$$I_{11} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \forall x \in I_{11}, \quad x = \frac{1}{3} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x_j}{3^j},$$

x_2, \cdots, x_k, \cdots 不能全为 0, 不能从某项开始全为 2, $x = {}_30.1x_2 \cdots x_k \cdots$. 第二步去掉的区间

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \quad x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \quad x = {}_30.01x_3 \cdots, \quad x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \quad x = {}_30.21x_3 \cdots.$$

将去掉的区间用三进制表示, 有

$$\begin{aligned} I_{11} &= {}_3(0.1, 0.2), \\ I_{21} &= {}_3(0.01, 0.02), \\ I_{22} &= {}_3(0.21, 0.22), \\ &\vdots \\ I_{nj} &= {}_3(0.x_1 \cdots x_{n-1}1, 0.x_1 \cdots x_{n-1}2), \quad x_1, \cdots, x_{n-1} \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

于是任意 $x \in G$ 可表示为

$$x = {}_30.x_1 \cdots x_m 1x_{m+2} \cdots, \quad x_1, \cdots, x_m \in \{0, 2\}, \quad x_k \in \{0, 1, 2\},$$

并且不会出现 $k > N \in \mathbb{N}_+$ 时, $x_k \equiv 2$ 的情形. 则任意 $x \in P$ 可表示为 $x = 1.0$ 或

$$x = {}_30.x_1x_2 \cdots x_k \cdots, \quad x_j \in \{0, 2\},$$

并且不会出现 $k > N \in \mathbb{N}_+$ 时, $x_k \equiv 2$ 的情形. 任意 $x \in P$, 设

$$Tx = {}_20.y_1y_2 \cdots y_k \cdots, \quad y_j = \begin{cases} 0, & x_j = 0, \\ 1, & x_j = 2, \end{cases} \quad T_1 = 1.$$

易证 $T: P \rightarrow [0, 1]$ 是一个一一对应, 进而 P 的势与 $[0, 1]$ 的势相同. □

5.4.2 Cantor 函数

设

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, & 1, & x = 1, \\ \frac{2j-1}{2^n}, & x \in I_{nj}, \quad 1 \leq j \leq 2^{n-1}, & n \in \mathbb{N}_+, \\ \sup_{y < x, y \in G} \theta(y), & x \in P, \quad x \neq 0, 1. \end{cases}$$

有如下性质.

- (i) $\theta \in C([0, 1])$.
- (ii) θ 单调不减.
- (iii) $\theta(0) = 1, \theta(1) = 1$ 且几乎处处有 $\theta'(x) = 0$.
- (iv) $\int_{[0,1]} \theta'(x) dx = 0 < \theta(1) - \theta(0) = 1$.
- (v) θ 是一个连续的奇异函数.

定理 5.6 设 f 在 $[a, b]$ 上为有界变差函数, 则 $\varphi(x) = f(x) - \int_{[a,x]} f'$ 是一个奇异函数. 称

$$f(x) = \int_{[a,x]} f'(x) + \varphi(x)$$

为 f 的绝对连续奇异函数分解. $f \in AC[a, b]$ 时, $\varphi(x) \equiv$ 常数.

§5.5 一些例子

例 5.7 设 $f \in BV[a, b]$. 则 f 在 x 点连续, 当且仅当 $V_a^x(f)$ 在 x 点连续.

证明 充分性. 设 $x + \Delta x, x \in [a, b], \Delta x > 0$ 时,

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leq V_{x+\Delta x}^{x+\Delta x}(f) = V_a^{x+\Delta x}(f) - V_a^x(f).$$

因为 $V_a^x(f)$ 在 x 点连续, 所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} V_a^{x+\Delta x}(f) = V_a^x(f)$, 因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} f(x + \Delta x) = f(x)$. 类似地, $\Delta x < 0$ 时, 由

$$|f(x) - f(x + \Delta x)| \leq V_{x+\Delta x}^x(f) = V_a^x(f) - V_a^{x+\Delta x}(f)$$

及 $V_a^x(f)$ 在 x 点的连续性知 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x + \Delta x) = f(x)$. 综上所述, f 在 x 点连续.

必要性. 设 f 在 x 连续, 下证 $V_a^x(f)$ 在 x 连续. 由 $f \in BV[a, b]$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个分点组 $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 使得

$$V_a^b(f) < V(f, x_0, x_1, \cdots, x_n) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $x \in (a, b)$, 令

$$s = \max \{x_j : x_j < x\}, \quad t = \min \{x_j : x_j > x\},$$

有

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &= V_a^s(f) + V_s^t(f) + V_t^b(f) < V(f, x_0, \cdots, x_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq V(f, x_0, x_1, \cdots, s) + V(f, t, \cdots, x_n) + \frac{\varepsilon}{2} + |f(x) - f(s)| + |f(t) - f(x)| \\ &\leq V_a^s(f) + V_t^b(f) + |f(x) - f(s)| + |f(t) - f(x)| + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

故

$$V_s^t(f) \leq |f(x) - f(s)| + |f(t) - f(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 f 的连续性, 对于上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $y \in [a, b]$ 且 $|y - x| < \delta$, 就有 $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. 此时不妨认为 x_0, x_1, \dots, x_n 满足 $|x_{j+1} - x_j| < \delta, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$. 此时 $|t - x| < \delta, |s - x| < \delta$, 必有 $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, |f(x) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{4}$, 进而 $V_s^t(f) < \varepsilon$. 故 $|\Delta x| < \delta$ 时,

$$\left| V_a^{x+\Delta x}(f) - V_a^x(f) \right| = \begin{cases} V_x^{x+\Delta x}, & \Delta x > 0, \\ V_{x+\Delta x}^x, & \Delta x < 0, \end{cases} < \varepsilon. \quad \square$$

例 5.8 $f \in \text{AC}[a, b] \Leftrightarrow V_a^x(f) \in \text{AC}[a, b]$.

证明 充分性. 由 $V_a^x(f) \in \text{AC}[a, b]$, 按定义, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要 $[a, b]$ 的一组至多可数个互不相交的开区间 $\{(a_v, b_v)\}$ 满足 $\sum_v |b_v - a_v| < \delta$, 就有

$$\sum_v \left| V_a^{b_v}(f) - V_a^{a_v}(f) \right| < \varepsilon,$$

即此时 $\sum_v V_{a_v}^{b_v}(f) < \varepsilon$. 因此

$$\sum_v |f(b_v) - f(a_v)| \leq \sum_v V_{a_v}^{b_v} < \varepsilon.$$

所以 $f \in \text{AC}[a, b]$.

必要性. $f \in \text{AC}[a, b]$, 则

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} f'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

由此, 对 $[a, b]$ 的任何一个子区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 都有 $V_\alpha^\beta(f) \leq \int_{[\alpha, \beta]} |f'(t)| dt$. 事实上, 对 $[\alpha, \beta]$ 的任何一组分点 $\alpha = t_0 < \dots < t_m = \beta$, 都有

$$\sum_{v=1}^m |f(t_v) - f(t_{v-1})| = \sum_{v=1}^m \left| \int_{[t_{v-1}, t_v]} f'(t) dt \right| \leq \sum_{v=1}^m \int_{[t_{v-1}, t_v]} |f'(t)| dt = \int_{[\alpha, \beta]} |f'(t)| dt.$$

由有界变差函数的定义可得 $V_\alpha^\beta(f) \leq \int_{[\alpha, \beta]} |f'(t)| dt$. 再由积分的绝对连续性, $f' \in L([a, b])$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要可测集 $A \subset [a, b], |A| < \delta$, 就有 $\int_A |f'| < \varepsilon$. 若 $A = \bigcup_v (\alpha_v, \beta_v)$, 其中 $\{(\alpha_v, \beta_v)\}$ 是 $[a, b]$ 的一族互不相交至多可数个开区间. 只要 $\sum_v (b_v - a_v) < \delta$ 就有

$$\sum_v \left| V_a^{\beta_v}(f) - V_a^{\alpha_v}(f) \right| = \sum_v V_{\alpha_v}^{\beta_v}(f) \leq \sum_v \int_{[\alpha_v, \beta_v]} |f'(t)| dt = \int_{\bigcup_v [\alpha_v, \beta_v]} |f'(t)| dt < \varepsilon.$$

因此, $V_a^x(f)$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数. □

注 5.4 若 $f \in \text{AC}[a, b]$, 则

$$V_a^x(f) = \int_{[a, x]} |f'(t)| dt, \quad a \leq x \leq b,$$

即几乎处处成立 $\frac{d}{dx}V_a^x(f) = |f'(x)|$, 这是因为

$$\frac{1}{\Delta x}V_{x+\Delta x}^x(f) = \frac{1}{\Delta x} \int_{[x, x+\Delta x]} |f'(t)| dt.$$

例 5.9 设 $\alpha, \beta > 0$ 且

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, & 0 < x < +\infty, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

问, α, β 满足什么条件时 $f_{\alpha, \beta} \in \text{BV}[0, 1]$, 满足什么条件时 $f_{\alpha, \beta} \in \text{AC}[0, 1]$.

解 (?????这题好像还是算错了.) 由于 $f_{\alpha, \beta} \in \text{AC}[0, 1]$ 的必要条件是 $f_{\alpha, \beta} \in L([0, 1])$, 故首先求出 $f'_{\alpha, \beta}$.

$$f'_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \alpha > 1, \\ \text{不存在}, & x = 0, \alpha \leq 1. \end{cases}$$

(1) $\left| \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta} \right| \leq \alpha x^{\alpha-1}, 0 < x \leq 1$. $\alpha \geq 1$ 时, $\alpha x^{\alpha-1}$ 在 $[0, 1]$ 是广义绝对 Riemann 可积的, $\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^\beta}$ 在 $(0, 1]$ 是 Riemann 可积的, 故这项是 Lebesgue 可积的.

(2)

$$\int_0^1 \left| x^{\frac{\alpha-\beta-1}{\beta}} \cos \frac{1}{x^\beta} \right| dx = \frac{1}{\beta} \int_1^{+\infty} t^{\beta+1-\alpha} |\cos t| t^{-\frac{1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \int_1^{+\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}} |\cos t| dt$$

收敛, 当且仅当 $\frac{\alpha}{\beta} > 1$.

$f'_{\alpha, \beta} \in L([0, 1]) \Leftrightarrow \alpha > \beta$. 故 $\alpha \leq \beta$ 时, $f_{\alpha, \beta} \notin \text{BV}[0, 1]$.

当 $\alpha > \beta$ 时, 可得

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \int_{[0, x]} f'_{\alpha, \beta}(t) dt + f_{\alpha, \beta}(0), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

所以 $f_{\alpha, \beta} \in \text{AC}[0, 1] \subset \text{BV}[0, 1]$.

下证 $\alpha > \beta$ 时, $f_{\alpha, \beta} \in \text{AC}[0, 1]$. 首先 $f_{\alpha, \beta} \in C([0, 1])$, 下证 $f_{\alpha, \beta} \in \text{AC}[0, 1]$. 只须证 $f_{\alpha, \beta}(x) = f_{\alpha, \beta}(0) + \int_{[a, x]} f'_{\alpha, \beta}(t) dt, x > 0, f(0) = 0$.

注意到对于任意的 $\varepsilon \in (0, x)$, $f_{\alpha, \beta}$ 在 $[a, x]$ 有连续导数, 则有分析中 Newton-Leibniz 公式,

$$f_{\alpha, \beta}(x) - f_{\alpha, \beta}(\varepsilon) = \int_{[\varepsilon, x]} f'_{\alpha, \beta}(t) dt.$$

由于 $\alpha > \beta$ 时, $f'_{\alpha, \beta} \in L([0, 1])$ 及 $f \in C([0, 1])$, 故 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(\varepsilon) = 0$ 及

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{[\varepsilon, x]} f'_{\alpha, \beta}(t) dt = \int_{[0, x]} f'_{\alpha, \beta}(t) dt \quad (\text{积分绝对连续性}),$$

进一步

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \int_{[0, x]} f'_{\alpha, \beta}(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1],$$

所以 $f_{\alpha, \beta} \in \text{AC}[0, 1]$. □

例 5.10 若 $f \in L([a, b])$ 且对于任意的 $x \in [a, b]$, 都有 $\int_a^x f(t)dt = 0$, 则几乎处处成立 $f(x) = 0$.

证明 对于任意的 $\alpha, \beta \in [a, b], \alpha < \beta$, 有

$$\int_{(\alpha, \beta)} f = \int_a^\beta f - \int_a^\alpha f = 0.$$

若 $G \subset [a, b]$ 是非空开集, 由开集结构性质 $G = \bigcup_{k \in J} (\alpha_k, \beta_k)$, 其中 (α_k, β_k) 为至多可数个开区间, 有

$$\int_G f = \int_{\bigcup_{k \in J} (\alpha_k, \beta_k)} f = \sum_{k \in J} \int_{(\alpha_k, \beta_k)} f = 0.$$

设 $E \subset [a, b]$ 为可测集, $E \setminus \{a, b\}$ 可测. 存在一列开集列 $\{G_k\}$, 使得

$$E \setminus \{a, b\} \subset G_k \subset (a, b), \quad \left| \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus (E \setminus \{a, b\}) \right| = 0,$$

于是

$$\int_E f = \int_{E \setminus \{a, b\}} f = \int_{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k} f - \int_{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus (E \setminus \{a, b\})} f = \int_{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k} f.$$

又因为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f \chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k} = f \chi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k}, \quad |f \chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k}| \leq |f| \in L([a, b]),$$

所以由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\int_{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k} f = \int_{[a, b]} f \chi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k} = \int_{[a, b]} \lim_{N \rightarrow \infty} f \chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f \chi_{\bigcap_{k=1}^N G_k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} f.$$

因 $\bigcap_{k=1}^N G_k, N \in \mathbb{N}_+$ 是开集, 所以 $\int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} f = 0$, 进而 $\int_{\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k} f = 0$, 所以 $\int_E f = 0$. 取

$$E_1 = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}, \quad E_2 = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\},$$

由 $0 = \int_{E_1} f$ 可得 $|E_1| = 0$. 事实上, 令

$$E_k = \left\{x \in [a, b] : f(x) > \frac{1}{k}\right\}, \quad k = 3, 4, \dots,$$

有

$$0 = \int_{E_k} f \geq \frac{1}{k} |E_k|, \quad E_1 = \bigcup_{k=3}^{\infty} E_k,$$

所以 $|E_1| = 0$. 进而几乎处处成立 $f(x) \leq 0$, 同理几乎处处成立 $f(x) \geq 0$. 所以几乎处处成立 $f(x) = 0$. \square

例 5.11 设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测且测度有限. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |\sin nx| dx$.

解 (1) $E = (\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ 时, 有

$$\int_E |\sin nx| dx = \frac{1}{n} \int_{n\alpha}^{n\beta} |\sin t| dt = \frac{1}{n} \int_{n\alpha}^{[\frac{n\alpha}{\pi}] \pi + \pi} |\sin t| dt + \frac{1}{n} \sum_{k=[\frac{n\alpha}{\pi}]+1}^{[\frac{n\beta}{\pi}]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt + \frac{1}{n} \int_{[\frac{n\beta}{\pi}] \pi}^{n\beta} |\sin t| dt.$$

又因为 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \int_{n\alpha}^{[\frac{n\alpha}{\pi}] \pi + \pi} |\sin t| dt \right| &\leq \frac{2}{n} \rightarrow 0, \\ \left| \frac{1}{n} \int_{[\frac{n\beta}{\pi}] \pi}^{n\beta} |\sin t| dt \right| &\leq \frac{2}{n} \rightarrow 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=[\frac{n\alpha}{\pi}]+1}^{[\frac{n\beta}{\pi}]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt &= \frac{2}{n} \left(\left[\frac{n\beta}{\pi} \right] - 1 - \left[\frac{n\alpha}{\pi} \right] \right) \rightarrow \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} |\sin nx| dx = \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi}.$$

(2) 设 $G = \bigcup_{k=1}^m (\alpha_k, \beta_k)$, $|G| < \infty$, (α_k, β_k) 两两不交, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |\sin nx| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_{(\alpha_k, \beta_k)} |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) = \frac{2|G|}{\pi}.$$

(3) $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$, $|G| < \infty$, (α_k, β_k) 两两不交时, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, $k > N$ 时,

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) < \varepsilon, \text{ 令 } G_{N+1} = \bigcup_{k=1}^{N+1} (\alpha_k, \beta_k), \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} \int_G |\sin nx| dx &= \int_{G_{N+1}} |\sin nx| dx + \int_{G \setminus G_{N+1}} |\sin nx| dx, \\ \int_{G \setminus G_{N+1}} |\sin nx| dx &\leq |G \setminus G_{N+1}| < \varepsilon, \\ \int_{G_{N+1}} |\sin nx| dx &\leq \int_G |\sin nx| dx \leq \int_{G_{N+1}} |\sin nx| dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

对于任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\frac{2|G_{N+1}|}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_{N+1}} |\sin nx| dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_G |\sin nx| dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_G |\sin nx| dx \leq \frac{2|G_{N+1}|}{\pi} + \varepsilon.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 有

$$\frac{2|G|}{\pi} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_G |\sin nx| dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_G |\sin nx| dx \leq \frac{2|G|}{\pi} + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G |\sin nx| dx$ 存在且等于 $\frac{2|G|}{\pi}$.

(4) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测且 $|E| < \infty$. 存在一列开集 $\{G_k\}$ 使得

$$G_k \supset E, \quad \left| \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \setminus E \right| = 0, \quad |G_k| < \infty, \quad k \in \mathbb{N}_+,$$

有

$$\int_E |\sin nx| dx = \int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} |\sin nx| dx - \int_{\bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E} |\sin nx| dx.$$

由于 $\left\{ \bigcap_{k=1}^N G_k \right\}_{N=1}^{\infty}$ 是单减集列且 $|G_1| < \infty$, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \bigcap_{k=1}^N G_k \right| = \left| \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \right| = |E|,$$

故

$$\left| \bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E \right| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

又

$$\int_{\bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E} |\sin nx| dx \leq \left| \bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E \right|,$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 使得 $N > N_0$ 时有 $\left| \bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E \right| < \varepsilon$. 所以对每个 $N > N_0$, 有

$$\int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} |\sin nx| dx - \left| \bigcap_{k=1}^N G_k \setminus E \right| \leq \int_E |\sin nx| dx \leq \int_{\bigcap_{k=1}^N G_k} |\sin nx| dx,$$

进而

$$\frac{2}{\pi} \left| \bigcap_{k=1}^N G_k \right| - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E |\sin nx| dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |\sin nx| dx \leq \frac{2}{\pi} \left| \bigcap_{k=1}^N G_k \right|.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 有

$$\frac{2|E|}{\pi} - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E |\sin nx| dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |\sin nx| dx \leq \frac{2|E|}{\pi}.$$

由 ε 的任意性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |\sin nx| dx$ 存在且等于 $\frac{2|E|}{\pi}$. □

例 5.12 设 $M > 0$. $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in [a, b] \Leftrightarrow f \in \text{AC}[a, b]$ 且 $|f'(x)| \leq M, \text{ a.e. } x \in [a, b]$.

证明 只给出提示. 设 f 在 $x_0 \in (a, b)$ 处有导数, 有 $\left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right| \leq M$, 进而 $|f'(x_0)| \leq M$. 反之, 若 $|f'| \leq M$, 则有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f', \quad |f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f' \right| \leq M|x - y|. \quad \square$$