

ANNEXE
à la LEÇON 2 de mécanique du point matériel

SECTION V.5

Le phénomène de Marées

La manifestation des marées terrestres résulte du **caractère non galiléen** du **référentiel géocentrique** $\mathcal{R}_{\text{géo}}$; en effet, ce dernier effectue, par rapport au référentiel de COPERNIC (\mathcal{R}_{Cop}), un mouvement de translation, de type elliptique en première approximation.

Or, si l'on maintient l'hypothèse selon laquelle \mathcal{R}_{Cop} constitue la meilleure réalisation de référentiel galiléen à l'échelle du système solaire, il apparaît que $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ ne peut être lui-même galiléen, du fait de cette translation elliptique. Celle-ci est interprétée comme résultant essentiellement des interactions gravitationnelles de la Terre avec le Soleil et, secondairement, à titre correctif, de celles qui impliquent tous les autres astres du système solaire. Nous verrons que, s'agissant des marées terrestres, la Lune en est la cause majeure.

En conséquence du caractère non galiléen de $\mathcal{R}_{\text{géo}}$, nous allons établir que le champ de pesanteur terrestre s'écrit comme somme du champ de gravitation terrestre et de deux termes correctifs ; l'un d'eux est déjà présent sous l'hypothèse où $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ est galiléen, mais l'autre, dénommé *terme de marées*, est spécifique au contexte de cette étude ; il apparaît, du fait de l'accélération de $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ par rapport à \mathcal{R}_{Cop} .

Dans un premier temps, nous allons établir l'expression vectorielle exacte du terme correctif de marées (§5a-5d) et, après une analyse qualitative de ses principaux effets (5e), nous en établirons une expression approchée (5f).

V.5.a – Retour sur la notion de champ de pesanteur

Rappelons que le champ de pesanteur terrestre en un point N s'écrit, et sans rien présupposer des caractéristiques dynamiques du référentiel terrestre (cf. introduction à cette section V) :

$$\vec{g}(N) = \vec{g}_{\text{Total}}(N) - \vec{a}_e(N)$$

→ Où $\vec{g}_{\text{Total}}(N)$ est le champ gravitationnel en N , lequel résulte de **toutes** les contributions envisageables, c'est-à-dire non seulement celle de la Terre, mais aussi celles de tous les autres astres du système solaire.

→ Et où $\vec{a}_e(N)$ représente l'*accélération d'entraînement* de la Terre par rapport à un référentiel galiléen, en l'occurrence \mathcal{R}_{Cop} dans notre étude. C'est encore l'accélération, par rapport à \mathcal{R}_{Cop} , du point N_T de la Terre, qui coïncide avec N .

Dans bien des circonstances, le poids est convenablement décrit en négligeant toutes les contributions gravitationnelles autres que celle de la Terre. C'était le point de vue retenu jusqu'ici ; alors $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ était tenu pour galiléen et nous avions :

$$\vec{g}(N) = \vec{G}_{\text{Terre}}(N) - \vec{a}_e(N)$$

expression où $\vec{a}_e(N)$ ne résultait que du seul mouvement de rotation sidérale de la Terre par rapport à $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ tenu pour galiléen (terme axifuge).

Nous allons maintenant adopter un point de vue plus complet, en considérant *a priori* toutes les contributions gravitationnelles des astres du système solaire, ce qui oblige en conséquence à une réécriture du terme $\vec{a}_e(N)$, laquelle doit prendre en compte que $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ ne soit plus galiléen.

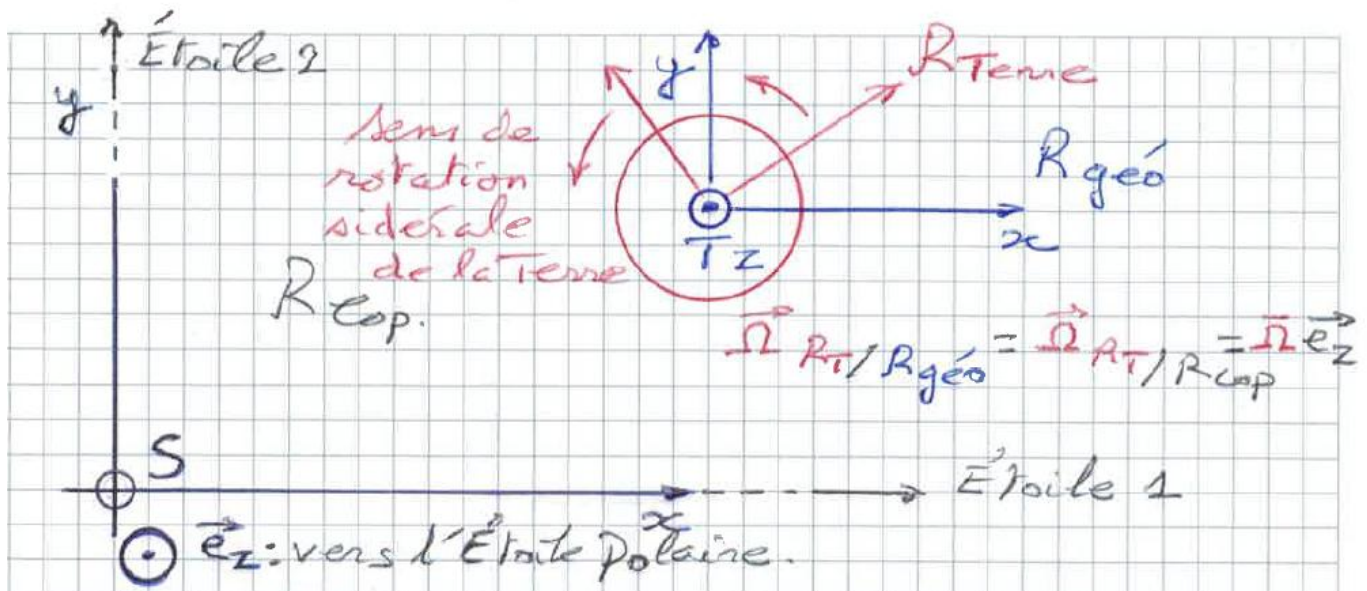
V.5.b – Accélération d'entraînement terrestre par rapport à \mathcal{R}_{Cop}

Sur la figure ci-dessous, les points S et T désignent respectivement les centres d'inertie du système solaire et de la Terre, et sont les origines des repères associés respectivement à \mathcal{R}_{Cop} et $\mathcal{R}_{\text{géo}}$. En raison du mouvement de translation de $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ par rapport à \mathcal{R}_{Cop} , les axes de ces repères sont choisis de même direction, deux à deux, la direction \vec{e}_z étant dirigée vers l'Étoile Polaire. Le plan de représentation, soit (T, x, y, z) est donc le *plan équatorial terrestre*.

Notez, qu'en raison de l'*obliquité terrestre*, le point S ne se trouve dans (T, x, y, z) qu'aux équinoxes. L'obliquité désigne l'inclinaison de l'axe polaire par rapport à la normale au plan de la trajectoire terrestre, encore appelé *plan de l'écliptique* ; cet angle est d'environ 24° . La figure présentée correspond donc à une situation particulière, seulement retenue pour éviter une représentation perspective, mais qui n'induit aucune restriction à la validité de ce qui suit.

Le mouvement de rotation uniforme du référentiel terrestre $\mathcal{R}_{\text{Terre}}$ par rapport à $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ (rotation sidérale) est associé à l'axe permanent (T, \vec{e}_z) , le vecteur instantané de rotation de la Terre s'écrivant :

$$\vec{\Omega}_{\text{Terre}/\text{géo}} = \Omega \vec{e}_z \text{ où } \Omega \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad.s}^{-1}$$



Référentiels de Copernic, géocentrique et terrestre.

L'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(N)$, qui est ici l'accélération rapport à \mathcal{R}_{Cop} du point N_T fixe dans $\mathcal{R}_{\text{Terre}}$ et coïncidant avec N , peut être obtenue en appliquant la loi de composition des accélérations entre $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ et \mathcal{R}_{Cop} .

Ces deux référentiels étant en translation l'un par rapport à l'autre, la loi de composition prend la forme très simple, réduite à deux termes :

$$[\vec{a}_e(N) \equiv \vec{a}(N_T)_{/R_{Cop}}] = \vec{a}(N_T)_{/R_{géo}} + \vec{a}(T)_{/R_{Cop}}$$

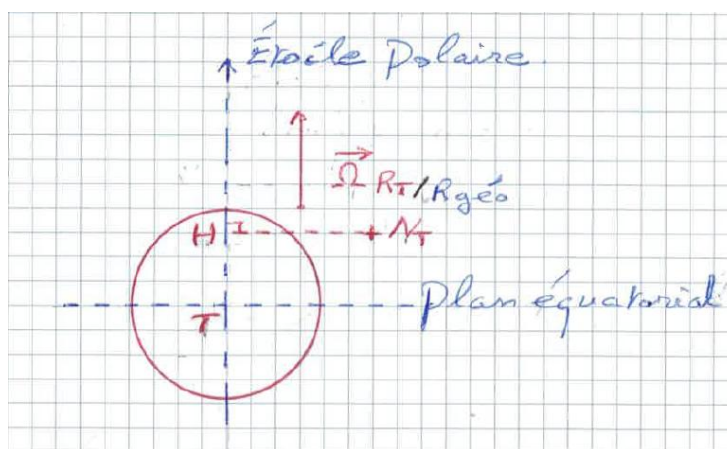
car $\vec{a}(T)_{/R_{Cop}}$ est l'accélération d'entraînement de $R_{géo}$ par rapport à R_{Cop} , ce champ étant uniforme du fait du mouvement relatif de translation des deux référentiels.

→ Commentons ce dernier résultat :

1) Nous reconnaissons dans $\vec{a}(N_T)_{/R_{géo}}$, le terme déjà introduit en première correction pour traduire le caractère non galiléen du référentiel terrestre, mais alors que $R_{géo}$ était encore supposé galiléen.

Dans le nouveau contexte retenu, l'expression de ce terme n'est pas modifiée ; le point N_T effectue encore, par rapport à $R_{géo}$, le même mouvement de rotation uniforme autour de (T, \vec{e}_z) (cf. Figure ci-dessous), et son accélération dans ce référentiel est donc :

$$\vec{a}(N_T)_{/R_{géo}} = -\Omega^2 \overrightarrow{HN}$$



Accélération d'un point de la Terre par rapport au référentiel géocentrique.

2) Apparaît un nouveau terme $\vec{a}(T)_{/R_{Cop}}$, du fait du caractère non galiléen de $R_{géo}$, et qui va permettre de rendre compte des marées, ce que nous allons expliciter.

V.5.c– Accélération de $R_{géo}$ et influence des astres autres que la Terre

La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à la Terre de masse M_T , s'écrit dans R_{Cop} ;

$$M_T \vec{a}(T)_{/R_{Cop}} = \vec{R}_{Grav \neq Terre}$$

où $\vec{R}_{Grav \neq Terre}$ représente la résultante des forces gravitationnelles exercées sur la Terre par tous les autres astres du système solaire.

Or, si l'on suppose, en première approximation, que la Terre et tous les autres astres du système solaire présentent la *symétrie matérielle sphérique*, les résultantes de leurs interactions attractives sont les mêmes que si les masses de ces divers astres étaient concentrées en leurs centres d'inertie respectifs.

Nous aurons l'occasion de revenir, lors de l'étude de l'électrostatique, sur ce résultat propre aux champs centraux variant en $1/r^2$. Pour l'instant, vous admettrez ce résultat.

Alors, la deuxième loi de Newton, appliquée à la Terre dans son mouvement par rapport à R_{Cop} prend la forme :

$$M_T \vec{a}(T)_{/R_{Cop}} = \vec{R}_{Grav \neq Terre} = M_T \vec{G}_{\neq Terre}(T)$$

où $\vec{G}_{\neq Terre}(T)$ est le champ gravitationnel que produisent en T tous les astres autres que la Terre.

V.5.d– Champ de pesanteur affecté du terme de marées

Compte tenu de ce qui précède, l'accélération d'entraînement terrestre s'explicite donc ainsi :

$$[\vec{a}_e(N) \equiv \vec{a}(N_T)_{/R_{Cop}}] = -\Omega^2 \overrightarrow{HN} + \vec{g}_{\neq Terre}(T)$$

et nous pouvons maintenant écrire le champ de pesanteur terrestre sous la forme plus explicite :

$$\vec{g}(N) = \vec{g}_{Total}(N) - \vec{a}_e(N) = \vec{g}_{Total}(N) + \Omega^2 \overrightarrow{HN} - \vec{g}_{\neq T}(T)$$

Sachant en outre que :

$$\vec{g}_{Total}(N) = \vec{g}_T(N) + \vec{g}_{\neq T}(N)$$

où $\vec{g}_T(N)$ désigne le seul champ gravitationnel terrestre,

il vient finalement l'expression finale suivante :

$\vec{g}(N) = \vec{g}_{Total}(N) - \vec{a}_e(N) = \underbrace{\vec{g}_T(N) + \Omega^2 \overrightarrow{HN}}_{\text{Champ de pesanteur si } \mathcal{R}_{\text{géo}} \text{ est galiléen}} + \underbrace{[\vec{g}_{\neq Terre}(N) - \vec{g}_{\neq Terre}(T)]}_{\text{Terme de marées}}$

Nous voyons ainsi émerger un terme additionnel au champ de pesanteur établi précédemment, sous l'hypothèse où $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ était galiléen.

Ce nouveau terme, qui rend compte des phénomènes de marées, résulte de la non uniformité du champ gravitationnel extérieur dans lequel baigne la Terre, champ qui est *a priori* celui de tous les astres environnants. En pratique, nous allons constater que seuls les astres dont les caractéristiques conjointes, de distance et de masse, sont convenables, présentent une influence non négligeable, soit notamment Lune et Soleil.

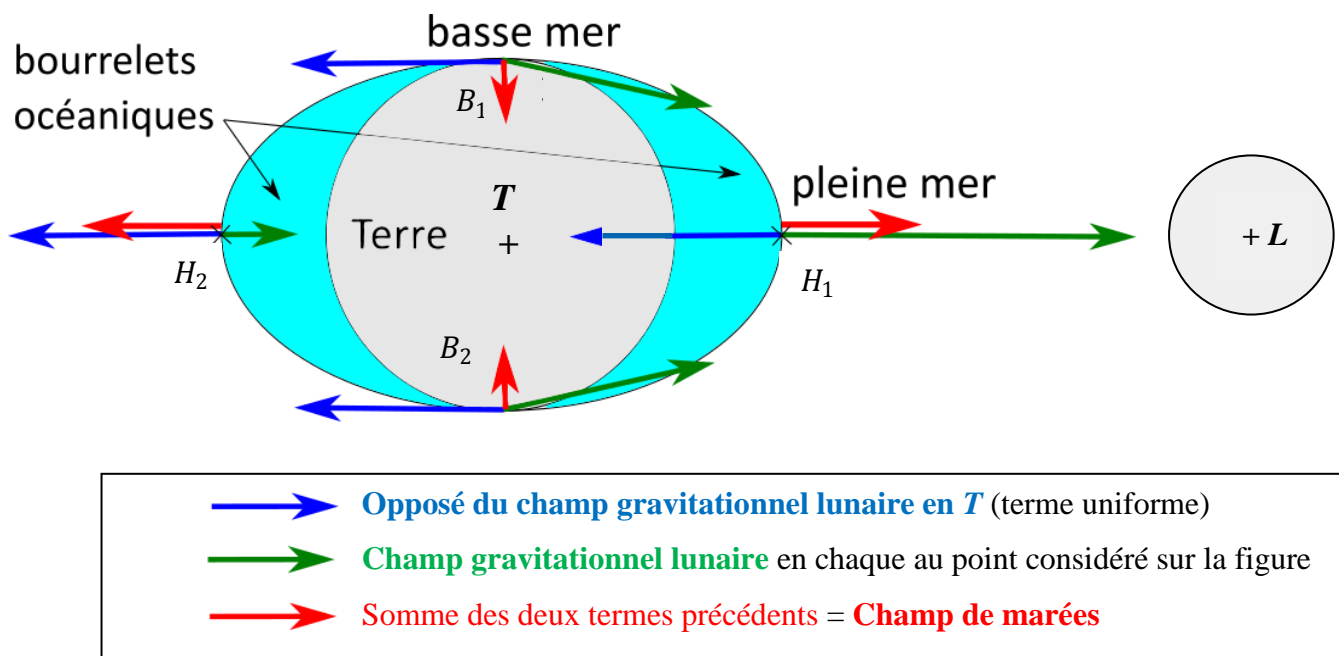
V.5.e– Interprétation qualitative du terme de marées : bourrelets océaniques

La figure ci-dessous est tracée sur la considération particulière de l'effet dû à la Lune, mais ce schéma vaut dans son principe pour n'importe quel autre astre, s'il ne s'agit que d'en examiner isolément l'effet.

Les effets conjugués de plusieurs astres, en l'occurrence Lune et Soleil, lesquels sont les deux causes dominantes des marées terrestres, se traitent en ajoutant simplement leurs champs de marées respectifs, puisque le champ de gravitation obéit au principe de superposition. Nous y revenons à la fin de cette section.

Sur le schéma représenté plus bas, ne figurent que les contributions relatives au seul terme de marées, le code de couleur étant celui qui apparaît dans l'expression ci-dessous :

$$\vec{g}(N) = \underbrace{\vec{g}_T(N) + \Omega^2 \overrightarrow{HN}}_{\text{Champ de pesanteur si Rgéo est galiléen}} + \underbrace{[\vec{g}_{\neq \text{Terre}}(N) - \vec{g}_{\neq \text{Terre}}(T)]}_{\text{Terme de marées}}$$



Champ de marées et bourrelets océaniques.

REMARQUE :

Dans un souci de clarté de la figure, l'**inhomogénéité** du **champ gravitationnel lunaire** a été exagérée, à la fois en ce qui concerne son module, et aussi en ce qui concerne sa direction, laquelle est toujours dirigée vers le centre d'inertie de la Lune, sous l'hypothèse où celle-ci est à symétrie sphérique.

Mais l'écart angulaire maximal que présentent les diverses directions du champ gravitationnel lunaire aux points de la Terre, et qui est encore l'angle apparent sous lequel on voit la Terre depuis la Lune, vaut à peine deux degrés.

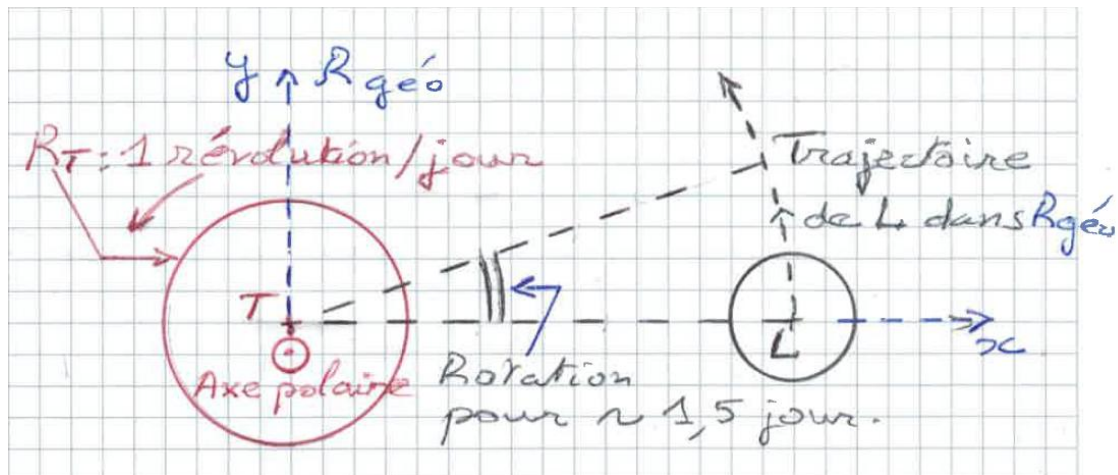
Le schéma précédent permet de comprendre qualitativement quelques caractéristiques importantes du phénomène de marées :

→ 1) Il y a toujours formation de **deux bourrelets océaniques** et aux **antipodes l'un de l'autre**, selon la direction de l'**axe** des **centres Terre-Astre**. Expliquons cela :

Le champ de pesanteur terrestre résulte de la superposition du champ de marées (en rouge sur la figure) et du terme dominant $\vec{G}_T(N) + \Omega^2 \overrightarrow{HN}$, non représenté sur la figure (champ de pesanteur si $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ galiléen). Même si l'on retient, en première approximation, que ce dernier terme produit à lui seul une surface libre des océans à symétrie quasiment sphérique, nous voyons qu'en lui superposant le terme additionnel de marées qui étire les masses terrestres, et surtout si elles sont fluides, selon l'axe Terre-Lune des centres d'inertie (axe noté $T-L$ dans la suite), les masses d'eau, faciles à déformer, adoptent une géométrie ovale, étirée selon l'axe $T-L$, et forment des bourrelets plus épais en H_1 et H_2 , alors que la hauteur d'eau est au contraire moindre selon l'axe $B_1 B_2$.

→ 2) En un lieu donné, on observe *grosso modo* **deux marées océaniques quotidiennes**.

Pour le comprendre simplement, nous allons simplifier la géométrie de la situation (cf. figure ci-dessous), en raisonnant comme si l'axe polaire terrestre était constamment orthogonal à l'axe $T-L$. En fait, ceux-ci forment un angle qui oscille entre environ 60 degrés et 120 degrés sur approximativement 28 jours, ce qui est la durée d'une révolution lunaire dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$.



Mouvement orbital de la Lune, et rotation sidérale de la Terre dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$

Tandis que le globe terrestre effectue un tour complet en seulement 24 heures environ par rapport à $\mathcal{R}_{\text{géo}}$ ou \mathcal{R}_{Cop} (plus exactement 23h56min), l'axe Terre-Lune ne tourne que d'environ 14 degrés en un jour dans ces mêmes référentiels. En conséquence, si, en première approximation, on néglige la dérive de l'axe $T-L$ sur une journée, chaque point de la surface terrestre, situé dans le plan de représentation, passe une fois en 24 heures par chacun des points H_1, B_1, H_2, B_2 de la figure, ce qui correspond à l'observation quotidienne de deux marées hautes (points H_i) et deux marées basses (points B_i).

Mais, plus exactement, si l'on tient compte du mouvement conjoint, dans $\mathcal{R}_{\text{géo}}$, de la rotation sidérale terrestre et de celle de l'axe $T-L$, deux marées hautes ou basses, successives, correspondent à une rotation de la Terre d'un demi-tour complet augmenté de l'angle dont a tourné l'axe $T-L$ entre deux traversées de cet axe par le même point de la Terre. Le calcul exact nécessite de poser les équations. Toutefois, cet angle s'évalue avec une bonne approximation, en ajoutant à l'intervalle de 12 heures correspondant à un l'axe $T-L$ fixe, la durée nécessaire pour que la Terre ait accompli un supplément de rotation de 7 degrés, puisque l'axe $T-L$ tourne d'environ 14 degrés par 24 heures. La durée correspondante est de $(7 \times 24 \times 60 / 360) = 28 \text{ minutes}$. On trouve ainsi un intervalle horaire de 12 h 28 min entre deux marées hautes ou basses, ce qui est un peu exagéré, mais plus conforme aux observations qui donnent en moyenne 12 h 25 min.

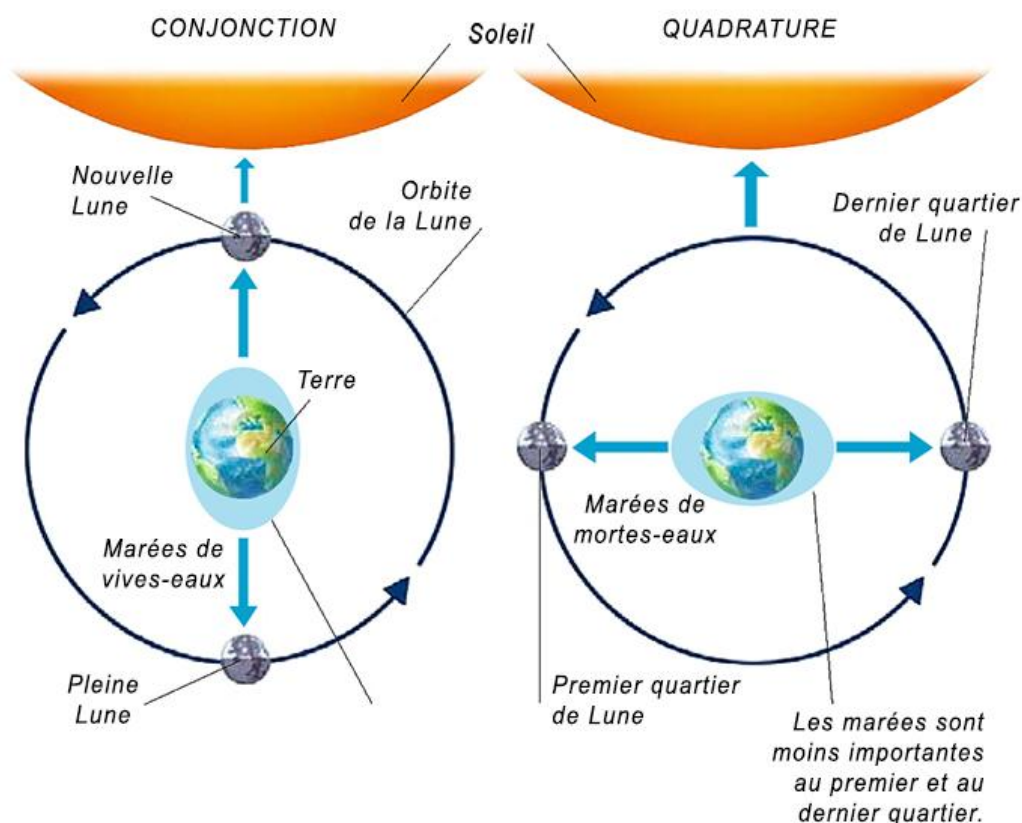
→ 3) Nous avons déjà dit que l'effet de marées est identique en deux zones antipodales (cf. figure relative aux bourrelets océaniques). Ainsi, les effets de la Lune et du Soleil se conjuguent lorsque ces astres sont alignés avec la Terre (cf. Figure gauche en bas de page), ce qui correspond à la *Nouvelle Lune* et à la *Pleine Lune*, pour lesquelles on observe des marées de *marnage* important. Le marnage désigne l'amplitude des oscillations verticales de la surface libre de l'eau, entre une marée basse et une marée haute consécutives. Les marées de *Nouvelle* et *Pleine Lune* sont qualifiées de **marées de vives-eaux**.

→ 4) Les actions conjuguées de deux astres se contrarient le plus fortement si les directions déterminées par leurs centres d'inertie respectifs avec celui de la Terre sont perpendiculaires ; c'est la situation dite de *quadrature*, représentée sur la figure droite ci-dessous, dans laquelle se trouvent Lune et Soleil aux *premiers* et *derniers quartiers*. Les marées sont alors de moindre *marnage*, et dites **marées de mortes-eaux**.

La figure ci-dessous est réalisée dans le plan de la trajectoire lunaire, vue du référentiel géocentrique. Rappelons que l'axe polaire terrestre n'est pas orthogonal à ce plan, et forme avec lui un angle qui varie entre 60° et 120° . Ce dernier point est sans importance pour l'interprétation qui nous intéresse.

En situation de conjonction (T, S, L alignés), les forces de marées lunaires et solaires se renforcent mutuellement, alors même que leurs champs gravitationnels peuvent se contrarier lors de la Pleine Lune.

En situation de quadrature ($T-S$ orthogonal à $T-L$), les forces de marées lunaires et solaires s'affaiblissent mutuellement, car les zones d'élévation d'eau suscitées par chacun des astres coïncident avec les zones d'affaissement de hauteur d'eau résultant de l'autre.



Marées de vives eaux

Marées de mortes eaux

Superposition des forces de marées lunaires et solaires

REMARQUES :

→ 1) Les forces de marées s'exercent bien sûr aussi sur les plaques continentales et le magma terrestre. Mais, tandis que les dénivellations océaniques peuvent atteindre les 4 mètres en pleine mer, celles qui affectent les plaques continentales se comptent en centimètres. Toutefois, ces dénivellations modestes ne doivent pas induire l'idée d'actions négligeables, car les forces mises en jeu sont colossales, et susceptibles de fracturer certaines zones de plaques continentales.

→ 2) Par ailleurs, on sait désormais qu'il existe aussi des marées atmosphériques, lesquelles se manifestent par des variations de la pression de l'air dont la périodicité est d'environ douze heures.

→ 3) Ce sont les forces de marées qui sont responsables de la dislocation de certains astéroïdes qui orbitent trop près de leur astre attracteur. À mesure que le rayon de l'orbite décroît, les forces de marées subies par le satellite grandissent ; ainsi, pour un satellite d'une certaine constitution, et d'une certaine dimension, il lui sera impossible d'orbiter en deçà d'une certaine distance, distance à partir de laquelle les forces de marées le fragmentent. Celle-ci est appelée *limite de ROCHE*, en l'honneur de l'astronome et mathématicien Montpelliérain Édouard ROCHE (1820 – 1883) qui, le premier, non seulement envisagea ce phénomène, mais le théorisa et proposa une expression de cette limite dans le cas de satellites constitués de masses fluides dont la cohésion est uniquement gravitationnelle.

Ce phénomène de dislocation par les forces de marées est tenu pour la cause la plus vraisemblable de la formation de certains des anneaux de Saturne.

REMARQUE :

L'avenue Roche à Toulouse, a été baptisée en l'honneur d'un homonyme de l'astronome. Il s'agit de Jean-Baptiste **ROCHE** (1861-1954), polytechnicien souvent désigné comme « le **colonel Roche** », et qui a fondé, en France, la toute première école au monde d'ingénieurs spécialisés en aéronautique. Longtemps dénommée « SupAéro », celle-ci a été récemment rebaptisée « ISAE-SUPAERO ». L'avenue du colonel Roche longe deux de ses flancs.

V.5.f – Évaluation quantitative du terme de marées

Cette dernière section est à considérer comme un exercice. Le résultat est aisé à établir et il se présente sous une forme particulièrement simple à interpréter, ce qui confortera les considérations qualitatives précédentes.

Nous souhaitons évaluer le champ de marées créé en un point N de la Terre, par un astre (\mathcal{A}) à symétrie matérielle sphérique, et de centre d'inertie A . Le repérage du point terrestre courant N sera formulé en coordonnées cartésiennes, dans le système (T, x, y, z) tel que A soit de coordonnées $(0, 0, D)$, où D est très grand devant le rayon terrestre.

□ 1 – Montrez que le champ de marées, créé par l'astre (\mathcal{A}) au point $N(x_N, y_N, z_N)$ s'écrit, au plus bas ordre en (x_N, y_N, z_N) :

$$\vec{g}_A(N) - \vec{g}_A(T) \approx \frac{G M_A}{D^3} (\overrightarrow{NT} + 3 z_N \vec{e}_z)$$

□ 2 – Dans le résultat précédent, quel est celui des deux termes effectivement responsable de la formations de marées ? Explique-t-il la symétrie antipodale du phénomène ?

Pour vérifier votre réponse : *V.m.V*

□ 3 – Compte tenu des valeurs ci-dessous, estimez la hiérarchie des effets de marées dus respectivement au Soleil, à la Lune et à Jupiter.

Astre	Masse : exprimée en nombre de masses terrestres $M_T \approx 6 \times 10^{24} kg$	Distance D en km et en nombre de rayons terrestres $R_T \approx 6400 km$
Soleil	$330\,000 M_T$	$150 \times 10^6 km \approx 23\,400 R_T$
Lune	$M_T/81$	$380\,000 km \approx 60 R_T$
Jupiter	$318 M_T$	$D_{min} \approx 630 \times 10^6 km \approx 98\,300 R_T$

Ce que vous pouvez retenir :

→ Les phénomènes de marées affectent *a priori* tous les astres ou astéroïdes.

→ Ils résultent des forces d'inertie inhérentes au caractère non galiléen du référentiel astro-centrique, en raison des interactions gravitationnelles entre l'astre concerné et les divers autres éléments du système solaire.

→ Les forces de marées sont associées à une contribution du champ de pesanteur de l'astre, et celle-ci peut analytiquement être identifiée, en un point N de l'astre, au champ différentiel :

$$\underbrace{[\vec{g}_{\neq \text{Astre}}(N) - \vec{g}_{\neq \text{Astre}}(A)]}_{\text{Terme de marées}} \quad \text{où } A \text{ est le centre d'inertie de l'astre.}$$

→ Les forces de marées dues à un seul astre, de centre d'inertie A' , sont symétriques par rapport au plan orthogonal à l'axe (AA') passant par A . Ainsi les marées terrestres sont-elles identiques en deux zones antipodales.

→ La Lune est le principal contributeur des marées terrestres, les forces de marées dues au Soleil étant environ deux fois moins intenses que celles de la Lune.

FIN