

Les transformées de Fourier

Mathématiques en technologies de l'information

Baptiste Coudray, Quentin Berthet – ITI 2 – 08.06.2020

Transformée de Fourier discrète

- Formules de base de la TFD

- 1 dimension :

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}$$

- 2 dimensions :

$$\hat{f}[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-\frac{2\pi i n_1 k_1}{N_1}} \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} f[n_1, n_2] e^{-\frac{2\pi i n_2 k_2}{N_2}} \right)$$

- On extrait la relation suivante : $W = e^{-2i\pi/n}$
- La matrice W nous permet de calculer la TFD plus simplement

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \dots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad \vec{\hat{f}} = W \cdot \vec{f}$$

Transformée de Fourier discrète inverse

- Formules de base pour la TFDI

- 1 dimension :

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

- 2 dimensions :

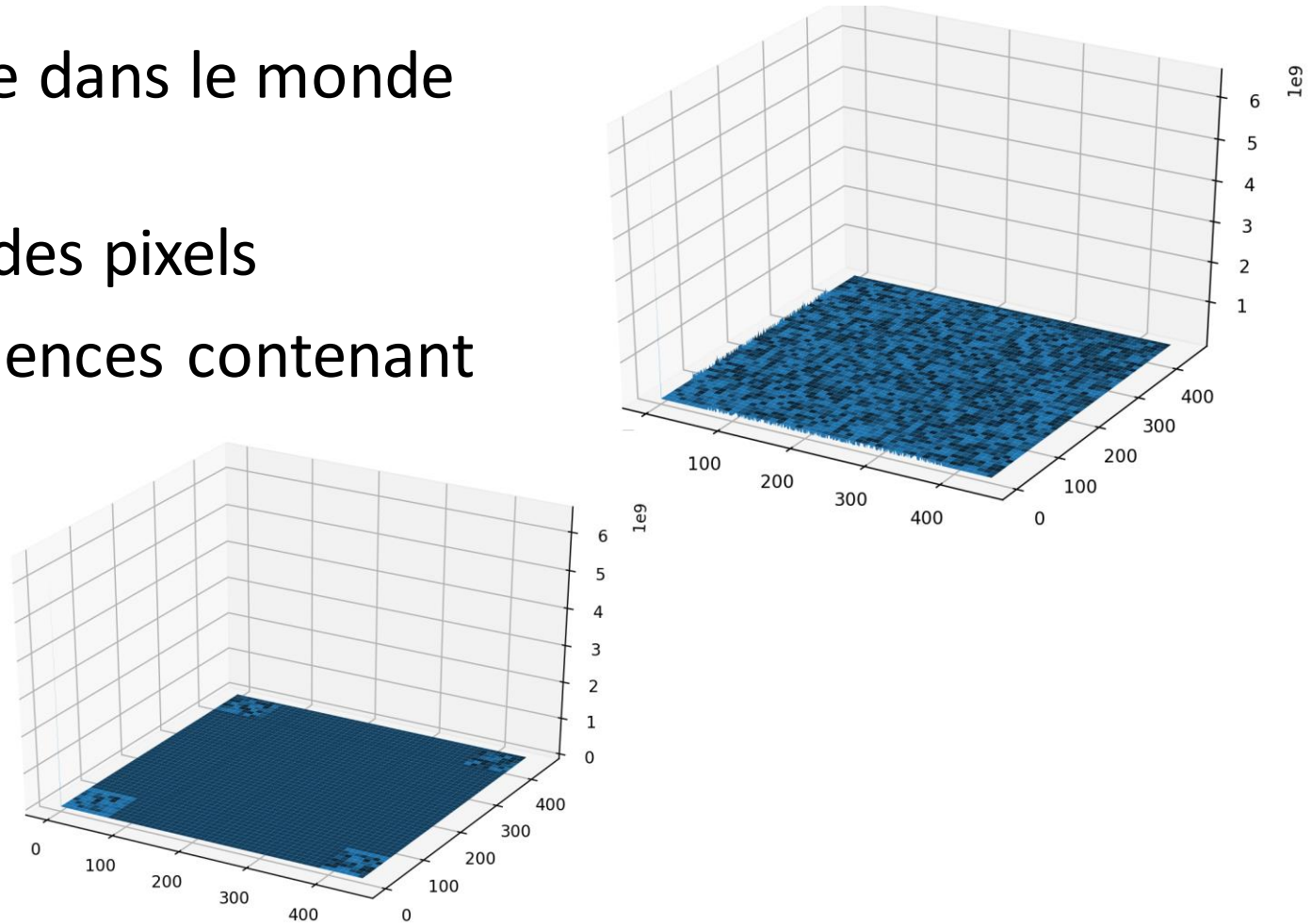
$$f[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} e^{\frac{2\pi i n_1 k_1}{N_1}} \left(\sum_{k_2=0}^{N_2-1} \hat{f}[k_1, k_2] e^{\frac{2\pi i n_2 k_2}{N_2}} \right)$$

- La matrice W^{-1} nous permet de calculer la TFD plus simplement

$$\vec{f} = W^{-1} \cdot \vec{\hat{f}}$$

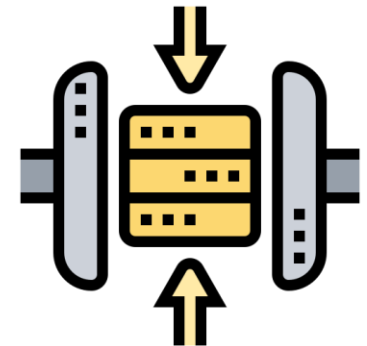
Suppression du bruit dans les images

- Conversion de l'image dans le monde spectrale
- *Plotting* de intensité des pixels
- Mise à zéro des fréquences contenant des valeurs élevées



La compression via la TFD

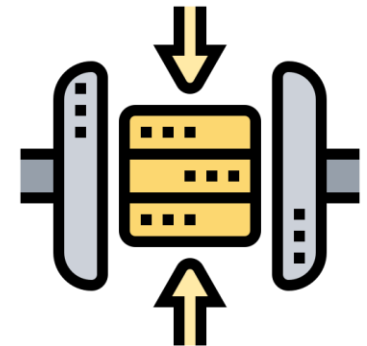
- Utilisation de la TFD pour passer l'image en fréquentielle
- Suppression de y ligne(s) et x colonne(s) suivant le degré de compression
- Enregistrement de la taille originale de l'image, le niveau de compression et les valeurs fréquentielles de l'image



Icons made by Eucalyp from
www.flaticon.com

La décompression via la TFDI

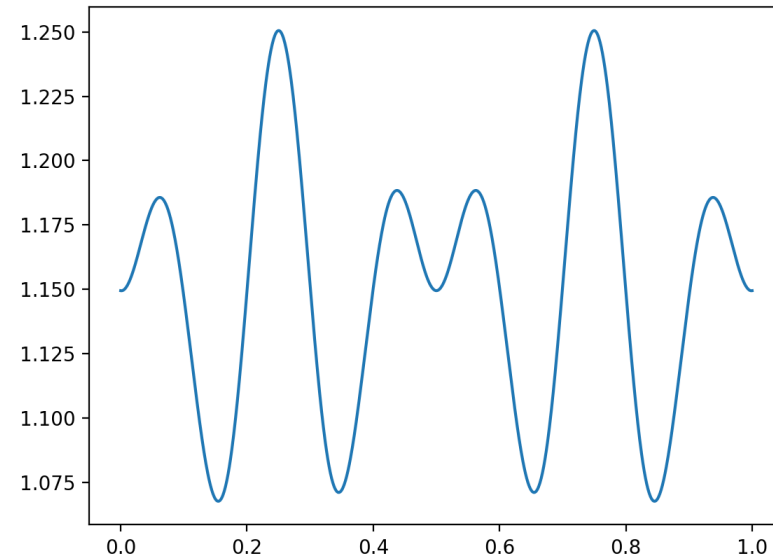
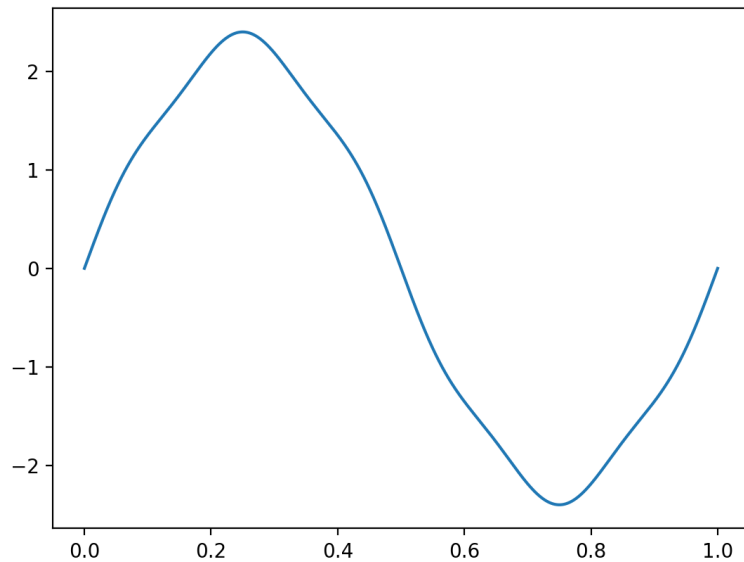
- Lecture du fichier compressé et extraction des valeurs
- Insertion de la valeur 0 dans les lignes et colonnes supprimées
- Utilisation de la TFDI pour "recréer" l'image



*Icons made by Eucalyp from
www.flaticon.com*

Analyse des différents résultats (1)

- La fonction $f(x)$ a une période de 1
- Suppression de la plus haute fréquence



Analyse des différents résultats (2)

- Débruitage de toutes les images
 - Alan Turing, Ludwig Boltzmann, Grace Hopper, Marie Curie...



Analyse des différents résultats (3)

Compression niveau 1



Compression niveau 10



Retour sur le TP

- Meilleure compréhension de la TFD(I) via des exemples concrets
- Moins sûr du résultat pour la partie compression/décompression
- TP intéressant dans l'ensemble



*Icons made by surang
from www.flaticon.com*

Questions ?

