APPRENTISSAGE SUPERVISÉ

NAIVE BAYES + REGRESSION

RAPPEL

Concept de l'**apprentissage supervisé** : faire apprendre une règle à un programme à partir d'exemples.

Phase d'apprentissage : on connaît l'entrée X et la sortie/réponse Y, on cherche la fonction qui les lie Y = f (X).

Optimisation des paramètres : pendant la phase d'apprentissage, grâce à la validation croisée.

Phase de test : on fait prédire des valeurs à l'algorithme et on les compare aux vraies valeurs pour estimer sa performance.

Trois types de modèles :

- algorithmiques (chapitres précédents) ;
- probabilistes (ce chapitre) ;
- boîtes noires (ultérieurement).

Naive Bayes

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Si A et B sont deux événements, la probabilité que A se produise conditionnellement au fait que B se produise se dit **probabilité de A sachant B** s'écrit : $P(A|B)$.

Exemple 1:

A : "il pleut aujourd'hui"

B : "il pleuvait hier"

$P(A|B)$: probabilité qu'il pleut aujourd'hui sachant qu'il pleuvait hier.

$P(B|A)$: probabilité qu'il ait plu hier sachant qu'il pleut aujourd'hui.

$P(A, B) = P(A \cap B)$: **probabilité jointe** qu'il ait plu hier **et** qu'il pleuve aujourd'hui.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Si A et B sont deux événements, la probabilité que A se produise conditionnellement au fait que B se produise se dit **probabilité de A sachant B** s'écrit : P(A|B).

Exemple 2:

A : "j'achète"

B : "j'ai vu une pub"

P(A|B) : probabilité que j'achète sachant que j'ai vu une pub.

P(B|A) : probabilité que j'aie vu une pub sachant que j'ai acheté.

P(A, B) = P(A ∩ B) : **probabilité jointe** que j'aie vu une pub **et** que j'aie acheté.

CALCUL DE CES PROBABILITÉS

Si A et B sont deux événements, alors: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Hier	Pluie	Pluie	Soleil	Soleil	Pluie
Aujourd'hui	Pluie	Soleil	Soleil	Pluie	Soleil

Probabilités simples : $P(\text{pluie aujourd'hui}) = 2/5,\ P(\text{pluie hier}) = 3/5$

Probabilité jointe : $P(\text{pluie aujourd'hui} \cap \text{pluie hier}) = 1/5$

Probabilités conditionnelles :

$$P(\text{pluie auj}|\text{pluie hier}) = \frac{P(\text{pluie auj} \cap \text{pluie hier})}{P(\text{pluie hier})} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{pluie hier}|\text{pluie auj}) = \frac{P(\text{pluie hier} \cap \text{pluie auj})}{P(\text{pluie auj})} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}$$

CALCUL DE CES PROBABILITÉS

Si A et B sont deux événements, alors: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Obs	1	2	3	4	5	6	7	8
Pub	Oui	Non	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Oui
Achat	Non	Oui	Non	Oui	Non	Non	Non	Non

Probabilités simples : $P(\text{pub}) = 6/8,\ P(\text{achat}) = 2/8$

Probabilité jointe : $P(\text{pub} \cap \text{achat}) = 1/8$

Probabilités conditionnelles :

$$P(\text{pub}|\text{achat}) = \frac{P(\text{pub} \cap \text{achat})}{P(\text{achat})} = \frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{achat}|\text{pub}) = \frac{P(\text{pub} \cap \text{achat})}{P(\text{pub})} = \frac{1/8}{6/8} = \frac{1}{6}$$

THEOREME DE BAYES

Si A et B sont deux événements:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Dans une université, il y a 34% de femmes.

Parmi les étudiants en informatique, 22% sont des femmes.

Les étudiants en informatique représentent 20% de l’université.

Quelle est la proportion d’étudiantes en informatique parmi les femmes de l’université ?

THEOREME DE BAYES

Si A et B sont deux événements :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Dans une université, il y a 34% de femmes.

Parmi les étudiants en informatique, 22% sont des femmes.

Les étudiants en informatique représentent 20% de l'université.

Quelle est la proportion d'étudiantes en informatique parmi les femmes de l'université ?

On cherche : $P(\text{étudier l'informatique}|\text{être une femme})$

THEOREME DE BAYES

Si A et B sont deux événements:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Dans une université, il y a 34% de femmes.

Parmi les étudiants en informatique, 22% sont des femmes.

Les étudiants en informatique représentent 20% de l'université.

Quelle est la proportion d'étudiantes en informatique parmi les femmes de l'université ?

On cherche : $P(\text{étudier l'informatique}|\text{être une femme})$

Solution:

$$P(\text{info}|\text{femme}) = \frac{P(\text{femme}|\text{info}) \times P(\text{info})}{P(\text{femme})} = \frac{0,22 \times 0,2}{0,34} = 12,9\%$$

NAIVE BAYES

Pour chaque mot W rencontré dans l'ensemble d'apprentissage, on calcule la probabilité qu'un message soit un spam **sachant** qu'il contient le mot W (**spamicité** du mot W) :

$$P(S|W) = \frac{\overbrace{P(W|S)}^{\text{\% de spams contenant W}} \times \overbrace{P(S)}^{\text{\% de spams}}}{\underbrace{P(W)}_{\text{\% de messages contenant W}}}$$

NAIVE BAYES, GENERALISATION

On va généraliser avec n attributs : x1, x2, … , xn

On notera la classe d’appartenance : y

Le théorème de Bayes nous dit :

$$P(y \mid x_1, \ldots, x_n) = \frac{P(y)P(x_1, \ldots x_n \mid y)}{P(x_1, \ldots, x_n)}$$

Par l’hypothèse (forte) d’indépendance conditionnelle :

$$P(x_i | y, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = P(x_i | y),$$

NAIVE BAYES, GENERALISATION

On simplifie pour chaque i et on obtient :

$$P(y \mid x_1, \dots, x_n) = \frac{P(y) \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid y)}{P(x_1, \dots, x_n)}$$

Pour choisir la classe d'appartenance *y*^, il suffit de choisir :

$$\hat{y} = \arg\max_y P(y) \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid y),$$

car le dénominateur indique la probabilité qu'une certaine observation existe. Celle-ci est supposé être la même pour tous les exemples.

REMARQUES

Le modèle de *Bayes Naïf* considère que **tous les mots sont indépendants**. Autrement dit, il regarde l'effet des mots un par un, sans se soucier des autres. C'est la raison pour laquelle il est **naïf**. Et pourtant ! Existant depuis longtemps (1996) et malgré son caractère naïf, il est très utilisé, en particulier pour la classification du spam et donne de **bons résultats**.

Il est recommandé de **supprimer les mots apparaissant trop peu ou trop souvent** qui peuvent poser problème ou l'induire en erreur.

Il peut classifier les documents dans plusieurs catégories, le cas binaire du spam étant un cas particulier.

CONCLUSIONS SUR NAIVE BAYES

Avantages :

Modèle très simple.

Rapide car très peu de calculs.

Efficace dans certains cas.

Inconvénients :

Sa naïveté ne s'applique pas à tous les problèmes.

Il ne dispense pas (au contraire !) de préprocesser le texte (comme tous les algorithmes).

Régression linéaire

RÉGRESSION LINÉAIRE SIMPLE

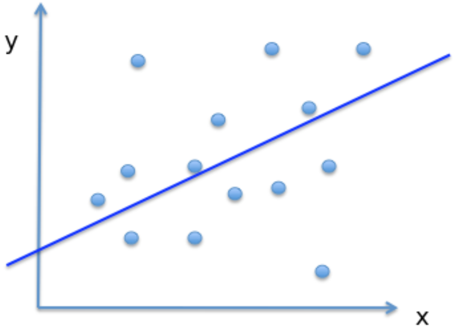
A partir de n exemples, trouver la droite qui passe en leur "centre".

β_0 : biais (valeur en x = 0)

β_1 : pente

$$\text{réponse} = \beta_0 + \beta_1 \times (\text{variable dépendante}) + \text{bruit}$$

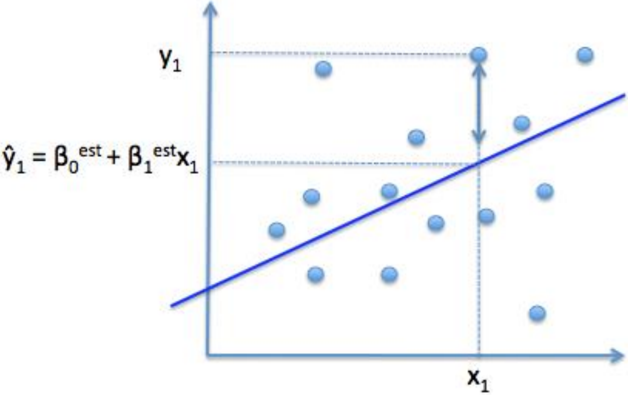
$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$



ESTIMATION

Objectif : minimiser la **variance résiduelle** (i.e. ε) trouver la meilleure droite :

$$\min \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \Leftrightarrow \min_{f} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \Leftrightarrow \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$



RÉGRESSION LINÉAIRE MULTIPLE

En ajoutant de nouvelles variables :

$$\text{réponse} = \beta_0 + \beta_1 \times \text{variable}_1 + \beta_2 \times \text{variable}_2 + \cdots + \text{bruit}$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times x_1 + \beta_2 \times x_2 + \cdots + \varepsilon$$

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j + \varepsilon = X\beta + \varepsilon$$

Solution :

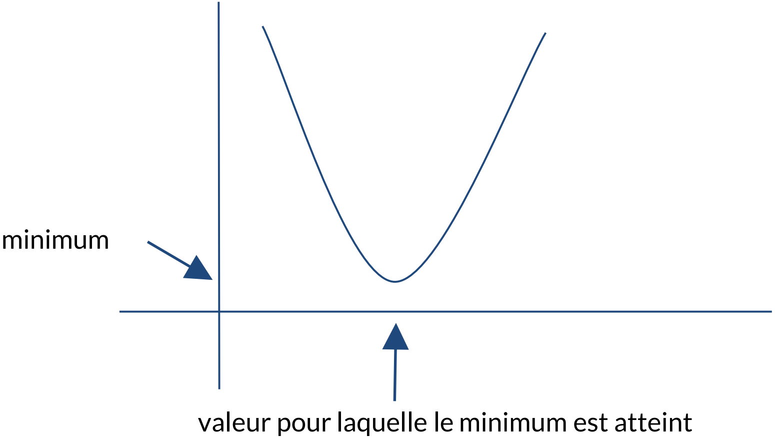
$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}) = \underbrace{\arg \min_{\beta_0 \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}^p}}_{\text{Trouver les valeurs qui minimisent}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta x_i))^2}_{\text{la fonction de coût}}$$

TROUVER LA SOLUTION

On cherche les poids qui minimisent cette fonction qui est convexe et dérivable.

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}) = \underbrace{\arg \min_{\beta_0 \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}^p}}_{\text{Trouver les valeurs qui minimisent}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta x_i))^2}_{\text{la fonction de coût}}$$

TROUVER LA SOLUTION



Le minimum est atteint lorsque la dérivée vaut 0.

TROUVER LA SOLUTION

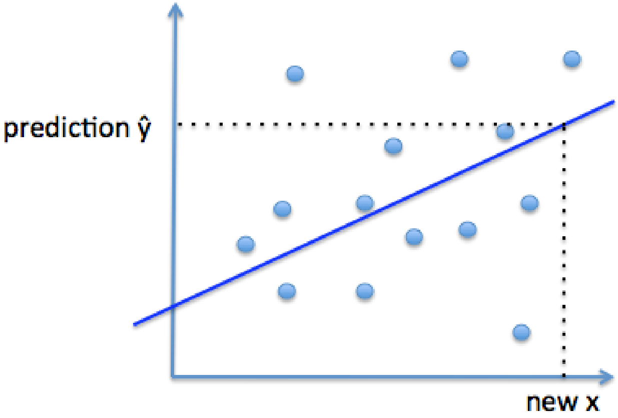
Il suffit donc de dériver la fonction par rapport aux β et de trouver la solution de l'équation dérivée = 0.

Pour la régression linéaire, on est chanceux: cette solution a une forme fermée, c'est-à-dire qu'on peut trouver la solution de cette équation à la main. Elle s'exprime de manière matricielle (pas besoin de retenir cette formule!):

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

PHASE DE TEST

Quand un nouveau point x est donné, on peut **prédire** le ŷ correspondant:



INTERPRÉTATION

Supposons un modèle :

salaire= $\beta_0 + \beta_1 \times$ expérience + $\beta_2 \times$ études + bruit

Et supposons que les résultats soient :

$\beta_0 = 900$
$\beta_1 = 100$
$\beta_2 = 200$

On interprète que :

Quelqu’un qui n’a ni études ni expérience touchera 900 # (# = devise imaginaire).

Quelqu’un qui a un Bachelor et 3 ans d’expérience touchera 1800 # en moyenne.

Une année d’expérience supplémentaire rapporte en moyenne 100 # de plus.

Une année d’études supplémentaire rapporte en moyenne 200 # de plus.

PÉNALISATION

Un modèle linéaire avec de nombreuses variables peut être parfait sur l'ensemble d'apprentissage. Mais il risque d'être **mauvais** sur de nouvelles données.

Une solution : **pénaliser** la complexité du modèle en forçant les poids à se comporter d'une certaine manière. Par exemple:

- la régression Ridge force les variables similaires à avoir des poids similaires.
- la régression Lasso force certains poids à être nuls (les variables associées ne comptent pas).

CONCLUSION SUR LA RÉGRESSION LINÉAIRE

Avantages :

Modèle simple et facile à estimer.

Interprétable.

Adapté pour les problèmes simples.

Inconvénients :

Impossible en grande dimension.
On se trouve rarement dans des situations où ce modèle est pertinent.

Régression logistique

RÉGRESSION LOGISTIQUE BINAIRE

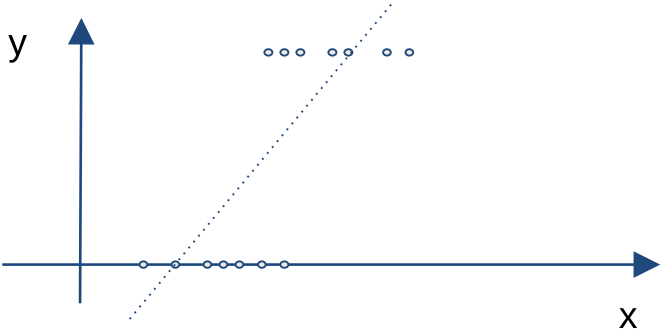
Dans la régression linéaire, on prédit une variable Y continue.

La régression logistique permet en fait de faire de la **classification**.

On considère ici la classification binaire : $Y \in \{0, 1\}$.

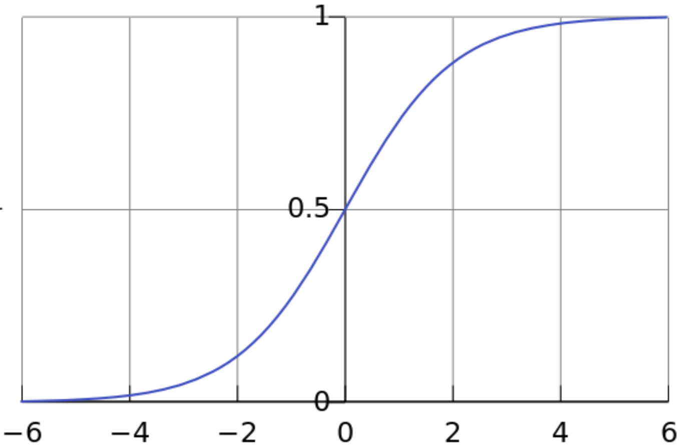
PRINCIPE

Puisque l'on a une variable à expliquer qui ne prend que les valeurs 0 et 1, un modèle linéaire n'a pas de sens.



LA FONCTION LOGIT OU SIGMOIDE

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$



Source : wikipedia.com

La régression logistique revient à appliquer cette fonction à une régression linéaire simple pour "pousser" les valeurs vers 0 et 1.

PRINCIPE

Comme d'habitude, X est l'input, Y l'output. La régression logistique binaire repose sur le modèle suivant :

$$P(Y=1|X) = \underbrace{\frac{e^{b_0+b_1x_1+\cdots+b_px_p}}{1+e^{b_0+b_1x_1+\cdots+b_px_p}}}_{\text{toujours compris entre 0 et 1}}$$

On réfléchit en termes de **rapport de probabilités** ou encore de **odd ratios** :

$$\ln \frac{P(Y=1|X)}{P(Y=0|X)} = b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_px_p$$

A noter que : *P(Y = 0 | X) = 1 – P(Y = 1 | X)*

INTERPRÉTATION

La régression logistique permet d'interpréter l'effet de chaque variable sur ce qu'on essaie d'expliquer.

Exemple fictif : on cherche à expliquer si un étudiant va valider une matière.

$$\ln \frac{P(Valider = 1|\text{travail, cadeaux, video})}{P(Valider = 0|\text{travail, cadeaux, video})} = b_0 + b_1\text{travail} + b_2\text{cadeaux} + b_3\text{video}$$

On trouve $\hat{b}_1 = 0.5, \hat{b}_2 = 1, \hat{b}_3 = -0.5$. On en déduit que:

- exp(0.5) = 1,65 : chaque unité de travail en plus multiplie par 1.65 les chances de valider.
- exp(1) = 2.7: chaque cadeau supplémentaire fait au professeur multiplie par 2.7 les chances de valider.
- exp(-0.5) = 0.6: chaque vidéo regardée pendant le cours divise par 1/0.6 = 1.65 les chances de valider.

RÉCAPITULONS

La régression logistique est le pendant de la régression linéaire pour la classification binaire.

On exprime les probabilités d'observer 1 ou 0 conditionnellement aux valeurs de x avec la fonction logit.
Nous n'avons pas vu comment déterminer les paramètres b_i; cela sera traité dans le chapitre du Perceptron.

Les poids obtenus s'interprètent comme des multiplicateurs de probabilités et permettent maintenant de prédire la valeur de y pour un nouveau x.

CONCLUSIONS SUR LA RÉGRESSION LOGISTIQUE

Avantages

Une vision probabiliste de la classification.
Interprétation de chaque variable de manière probabiliste.
Simple et rapide à estimer.

Inconvénients

Mêmes que la régression linéaire.
En particulier, mauvais résultats avec beaucoup de variables.