Géométrie, synthèse d'images

Généralités sur la synthèse d'images

L. GARNIER

L2 Info3B

1. Introduction
2. Eclairage
3. De l'espace $3D$ à l'écran $2D$
4. Représentation par facettes et discrétisation
   - Les objets déjà sous forme de facettes
   - Discrétisation de surfaces continues
5. Géométrie de construction de solides (C.S.G.)

Prérequis

- Œil ou caméra

Prérequis

- Œil ou caméra
- Lumières, sources lumineuses et propriétés lumineuses des objets de la scène

Prérequis

- Œil ou caméra
- Lumières, sources lumineuses et propriétés lumineuses des objets de la scène
- Projection d'un espace $3D$ sur un écran de $2D$

Prérequis

- Œil ou caméra
- Lumières, sources lumineuses et propriétés lumineuses des objets de la scène
- Projection d'un espace $3D$ sur un écran de $2D$
- Elimination des parties cachées

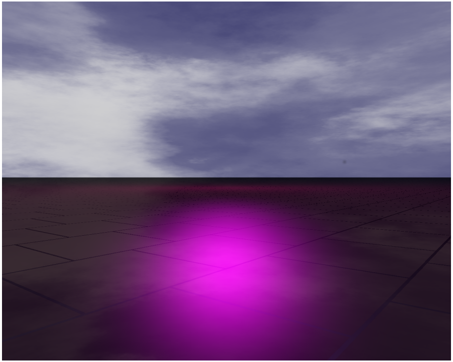
Prérequis

- Œil ou caméra
- Lumières, sources lumineuses et propriétés lumineuses des objets de la scène
- Projection d'un espace $3D$ sur un écran de $2D$
- Elimination des parties cachées
- Représentation d'objets continus

1. Introduction
2. Eclairage
3. De l'espace $3D$ à l'écran $2D$
4. Représentation par facettes et discrétisation
   - Les objets déjà sous forme de facettes
   - Discrétisation de surfaces continues
5. Géométrie de construction de solides (C.S.G.)

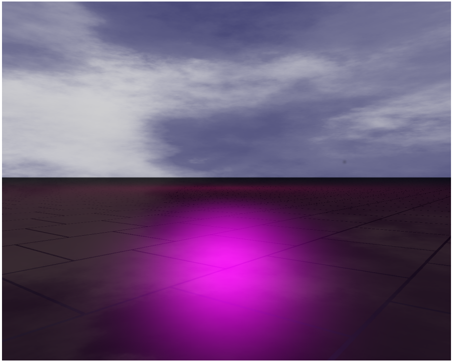
Sources lumineuses

Source pontuelle (ampoule, soleil)

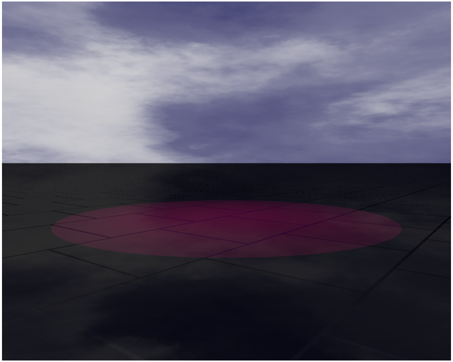


Sources lumineuses

Source pontuelle (ampoule, soleil)



Source directionnelle (spot)



Types de lumières dans une scène

Définition (Lumière ambiante)

*Le concept de **lumière ambiante** modélise un flux lumineux constant, qui n'a pas de direction spécifique. Elle semble venir de toutes les directions. Quand une lumière ambiante rencontre une surface, elle est renvoyée dans toutes les directions.*

Types de lumières dans une scène

Définition (Lumière ambiante)

*Le concept de **lumière ambiante** modélise un flux lumineux constant, qui n'a pas de direction spécifique. Elle semble venir de toutes les directions. Quand une lumière ambiante rencontre une surface, elle est renvoyée dans toutes les directions.*

Définition (Lumière diffuse)

*La **lumière diffuse** est la lumière qui vient d'une direction particulière, et qui va être plus brillante si elle arrive perpendiculairement à la surface que si elle est rasante. Par contre, après avoir rencontré la surface, elle est renvoyée uniformément dans toutes les directions.*

Types de lumières dans une scène

Définition (Lumière ambiante)

*Le concept de **lumière ambiante** modélise un flux lumineux constant, qui n'a pas de direction spécifique. Elle semble venir de toutes les directions. Quand une lumière ambiante rencontre une surface, elle est renvoyée dans toutes les directions.*

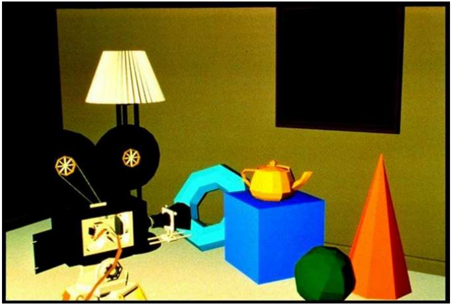
Définition (Lumière diffuse)

*La **lumière diffuse** est la lumière qui vient d'une direction particulière, et qui va être plus brillante si elle arrive perpendiculairement à la surface que si elle est rasante. Par contre, après avoir rencontré la surface, elle est renvoyée uniformément dans toutes les directions.*

Définition (Lumière spéculaire)

*La **lumière spéculaire** vient d'une direction particulière et est également renvoyée dans une direction particulière. Cette réflexion de la lumière spéculaire sur la surface d'un objet dépend de sa brillance. Elle détermine la taille et l'intensité de la tache de réflexion spéculaire.*

Illustration des types de lumières dans une scène



Lumière ambiante et diffuse

Ajout de la lumière spéculaire

Modèle de Phong

Pour chacune des lumières, il faut spécifier ses composantes en rouge, vert et bleu.

Modèle de Phong

Pour chacune des lumières, il faut spécifier ses composantes en rouge, vert et bleu. Une source lumineuse est définie par trois lumières : la lumière ambiante I_a, la lumière diffuse I_d et la lumière spéculaire I_s.

Modèle de Phong

Pour chacune des lumières, il faut spécifier ses composantes en rouge, vert et bleu. Une source lumineuse est définie par trois lumières : la lumière ambiante I_a, la lumière diffuse I_d et la lumière spéculaire I_s.

ρ_a (resp1. ρ_d) (resp2. ρ_s) précise les propriétés du matériau vis-à-vis de la lumière ambiante (resp1. diffuse) (resp2. spéculaire) ;

Modèle de Phong

Pour chacune des lumières, il faut spécifier ses composantes en rouge, vert et bleu. Une source lumineuse est définie par trois lumières : la lumière ambiante I_a, la lumière diffuse I_d et la lumière spéculaire I_s.

ρ_a (resp1. ρ_d) (resp2. ρ_s) précise les propriétés du matériau vis-à-vis de la lumière ambiante (resp1. diffuse) (resp2. spéculaire) ; Ainsi, en un point M de la surface, l'intensité lumineuse est $I^M = I_a^M + I_d^M + I_s^M$ avec :

Modèle de Phong

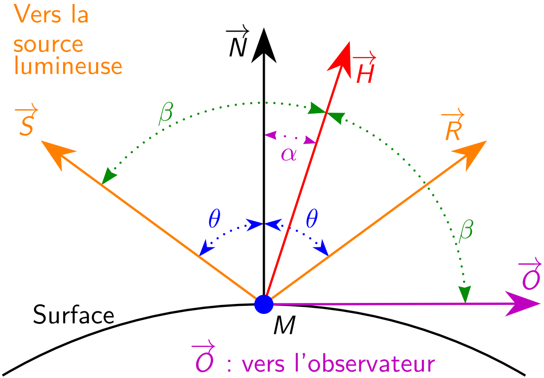
ρ_a (resp1. ρ_d) (resp2. ρ_s) précise les propriétés du matériau vis-à-vis de la lumière ambiante (resp1. diffuse) (resp2. spéculaire) ; Ainsi, en un point M de la surface, l'intensité lumineuse est $I^M = I_a^M + I_d^M + I_s^M$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_a^M & = & \rho_a I_a \\ I_d^M & = & \rho_d \; I_d \; \cos\theta \\ I_s^M & = & \rho_s \; I_s \; \cos^m \alpha \end{array} \right. \tag{1}$$

Modèle de Phong

ρ_a (resp1. ρ_d) (resp2. ρ_s) précise les propriétés du matériau vis-à-vis de la lumière ambiante (resp1. diffuse) (resp2. spéculaire) ; Ainsi, en un point M de la surface, l'intensité lumineuse est $I^M = I_a^M + I_d^M + I_s^M$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_a^M & = & \rho_a I_a \\ I_d^M & = & \rho_d\, I_d\, \cos\theta \\ I_s^M & = & \rho_s\, I_s\, \cos^m \alpha \end{array} \right. \quad (1)$$

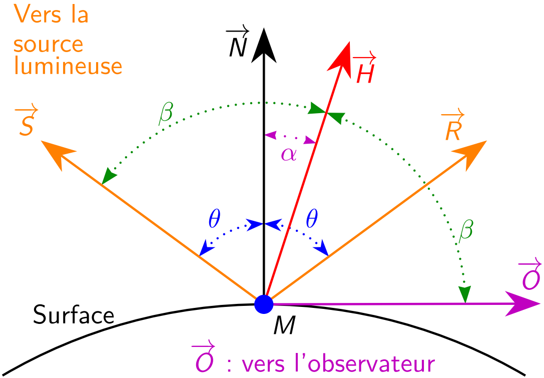


$\vec{N}$, $\vec{S}$, $\vec{R}$, $\vec{H}$ et $\vec{O}$ unitaires.

Modèle de Phong

ρ_a (resp1. ρ_d) (resp2. ρ_s) précise les propriétés du matériau vis-à-vis de la lumière ambiante (resp1. diffuse) (resp2. spéculaire) ; Ainsi, en un point M de la surface, l'intensité lumineuse est $I^M = I_a^M + I_d^M + I_s^M$ avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} I_a^M & = & \rho_a I_a \\ I_d^M & = & \rho_d\, I_d\, \cos\theta \\ I_s^M & = & \rho_s\, I_s\, \cos^m \alpha \end{array}\right. \tag{1}$$



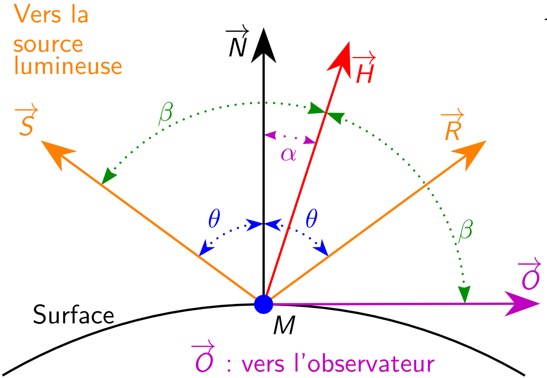
$\vec{N}$, $\vec{S}$, $\vec{R}$, $\vec{H}$ et $\vec{O}$ unitaires.

$\theta = \left(\vec{N}; \vec{S}\right)$ ne dépend que de la surface et de la source lumineuse.

Modèle de Phong

ρ_a (resp1. ρ_d) (resp2. ρ_s) précise les propriétés du matériau vis-à-vis de la lumière ambiante (resp1. diffuse) (resp2. spéculaire) ; Ainsi, en un point M de la surface, l'intensité lumineuse est $I^M = I_a^M + I_d^M + I_s^M$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_a^M & = & \rho_a I_a \\ I_d^M & = & \rho_d\, I_d\, \cos\theta \\ I_s^M & = & \rho_s\, I_s\, \cos^m \alpha \end{array} \right. \tag{1}$$



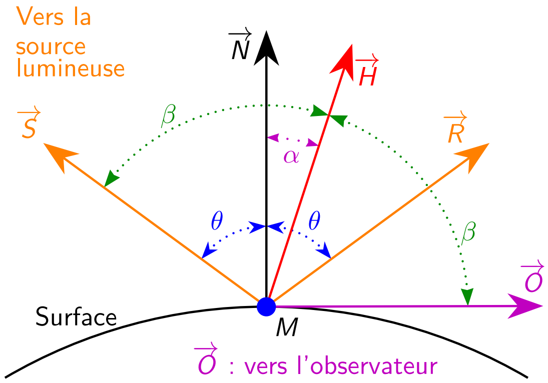
$\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{S}$, $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{O}$ unitaires.

$\theta = \left(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{S}\right)$ ne dépend que de la surface et de la source lumineuse.

$\alpha = \left(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{H}\right)$ et $\beta = \left(\overrightarrow{H}; \overrightarrow{S}\right)$ dépendent de l'observateur et de la source lumineuse.

Modèle de Phong

$$I_s^M = \rho_s \, I_s \, \cos^m \alpha$$



$\theta = \left(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{S}\right)$ ne dépend que de la surface et de la source lumineuse.

$\alpha = \left(\overrightarrow{N}; \overrightarrow{H}\right)$ et $\beta = \left(\overrightarrow{H}; \overrightarrow{S}\right)$ dépendent de l'observateur et de la source lumineuse.

$m \in \mathbb{R}^+$, propriété du matériau, présence ou non de taches plus ou moins grandes en fonction de l'angle α entre la source lumineuse et de l'œil de l'observateur.

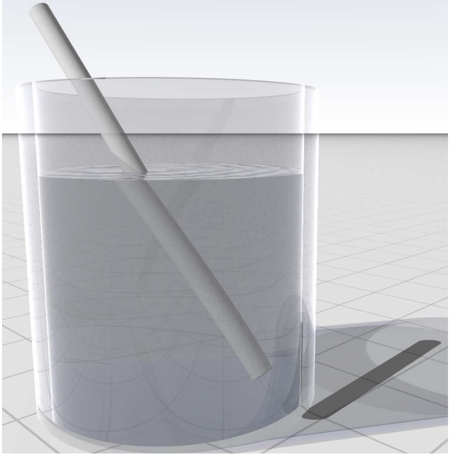
Question ?

L'ombre de la paille est-elle déformée ?

Auteur : Friedrich A. Lohmueller

Question ? Non :

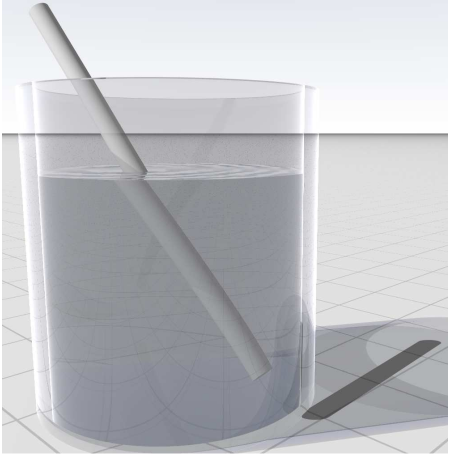
L'ombre de la paille est-elle déformée ?



Auteur : Friedrich A. Lohmueller

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes

L'ombre de la paille est-elle déformée ?



Auteur : Friedrich A. Lohmueller

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes

Définition (Plan d'incidence)

Soit un rayon lumineux arrivant en un point M *d'une surface et* $\overrightarrow{N}$ *est le vecteur normal unitaire à la surface en* M.

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes

Définition (Plan d'incidence)

Soit un rayon lumineux arrivant en un point M d'une surface et $\overrightarrow{N}$ est le vecteur normal unitaire à la surface en M.
Le plan d'incidence $\mathcal{P}_i$ est le plan déterminé par le rayon lumineux et $\overrightarrow{N}$.

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes

Définition (Plan d'incidence)

Soit un rayon lumineux arrivant en un point M d'une surface et $\overrightarrow{N}$ est le vecteur normal unitaire à la surface en M.
Le plan d'incidence $\mathcal{P}_i$ est le plan déterminé par le rayon lumineux et $\overrightarrow{N}$.

Tous les angles sont dans le plan d'incidence et sont définis à partir de $\overrightarrow{N}$.

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes

Définition (Plan d'incidence)

Soit un rayon lumineux arrivant en un point M d'une surface et $\overrightarrow{N}$ est le vecteur normal unitaire à la surface en M.
Le plan d'incidence $\mathcal{P}_i$ est le plan déterminé par le rayon lumineux et $\overrightarrow{N}$.

Tous les angles sont dans le plan d'incidence et sont définis à partir de $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Loi de Snell-Descartes)

A l'interface de deux milieux d'indices différents n_1 et n_2, un rayon lumineux arrivant avec un angle i_1 donne généralement naissance :

-
-

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes

Définition (Plan d'incidence)

Soit un rayon lumineux arrivant en un point M d'une surface et $\overrightarrow{N}$ est le vecteur normal unitaire à la surface en M.
Le plan d'incidence $\mathcal{P}_i$ est le plan déterminé par le rayon lumineux et $\overrightarrow{N}$.

Tous les angles sont dans le plan d'incidence et sont définis à partir de $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Loi de Snell-Descartes)

A l'interface de deux milieux d'indices différents n_1 et n_2, un rayon lumineux arrivant avec un angle i_1 donne généralement naissance :

- *à un rayon réfléchi d'angle $i_1' = i_1$;*
-

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes

Définition (Plan d'incidence)

Soit un rayon lumineux arrivant en un point M d'une surface et $\overrightarrow{N}$ est le vecteur normal unitaire à la surface en M.
Le plan d'incidence $\mathcal{P}_i$ est le plan déterminé par le rayon lumineux et $\overrightarrow{N}$.

Tous les angles sont dans le plan d'incidence et sont définis à partir de $\overrightarrow{N}$.

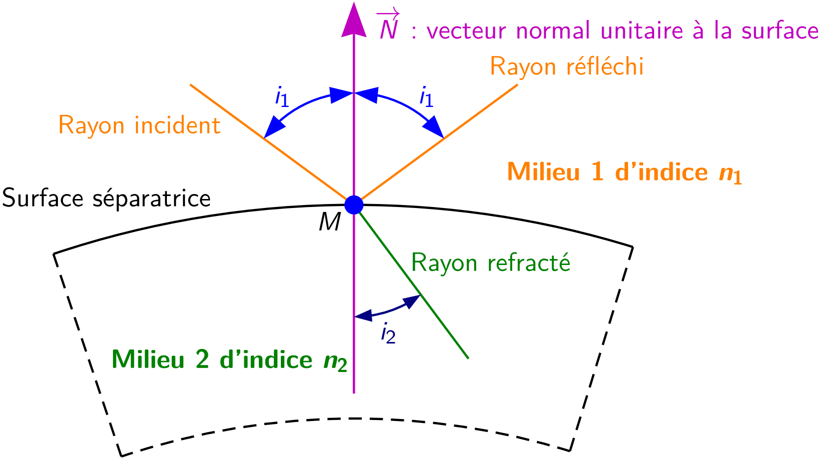
Théorème (Loi de Snell-Descartes)

A l'interface de deux milieux d'indices différents n_1 et n_2, un rayon lumineux arrivant avec un angle i_1 donne généralement naissance :

- *à un rayon réfléchi d'angle $i_1' = i_1$;*
- *à un rayon réfracté, ou transmis, situés dans le plan d'incidence $\mathcal{P}_i$, d'angle i_2 avec :*

$$\boxed{n_1 \sin\left(i_1\right) = n_2 \sin\left(i_2\right)}$$

Question ? Non : réfraction ; loi de Snell-Descartes



$$\boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$$

1 Introduction

2 Eclairage

3 De l'espace $3D$ à l'écran $2D$

4 Représentation par facettes et discrétisation
- Les objets déjà sous forme de facettes
- Discrétisation de surfaces continues

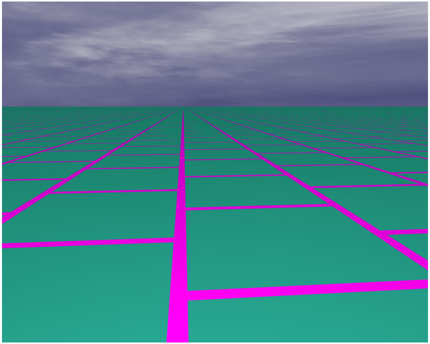
5 Géométrie de construction de solides (C.S.G.)

Projection

Quelle type de projection ?

Projection centrale

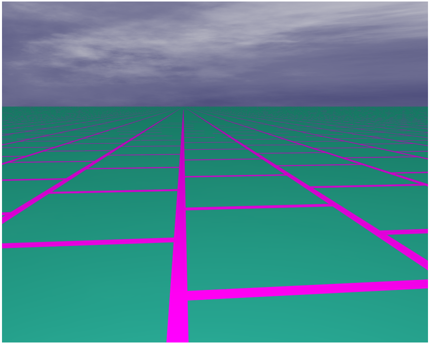
Quelle type de projection ?



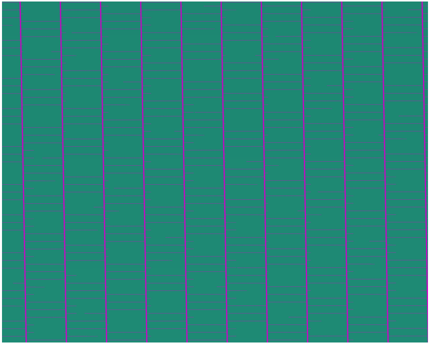
Centrale

Projection centrale ou parallèle

Quelle type de projection ?

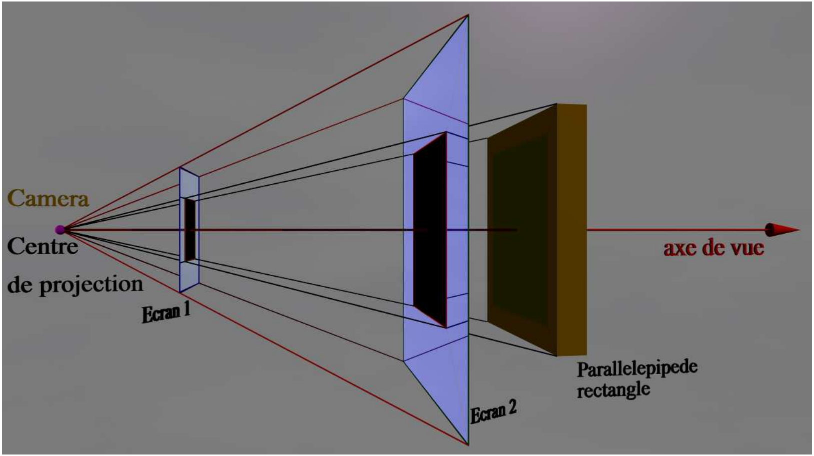


Centrale



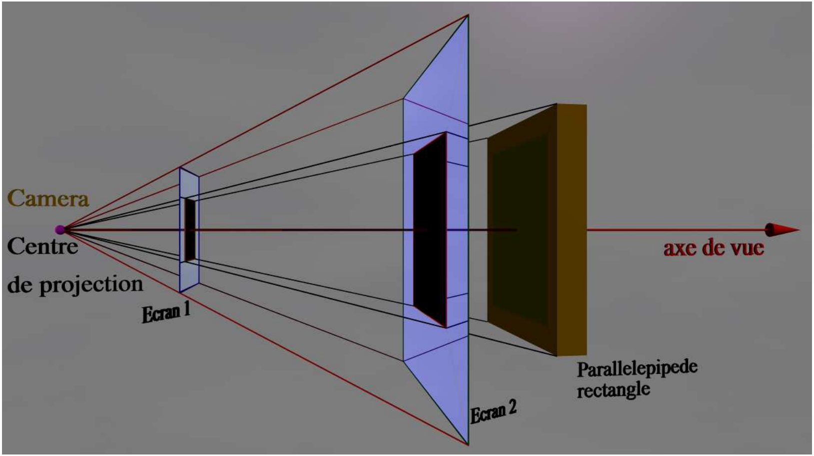
Parallèle

Ecran et lancer de rayon



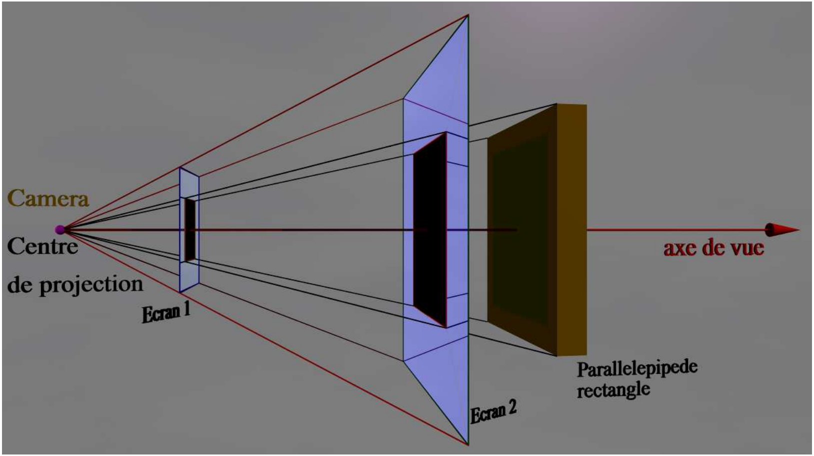
Même image sur les deux écrans, seule la résolution de l'écran change.

Ecran et lancer de rayon



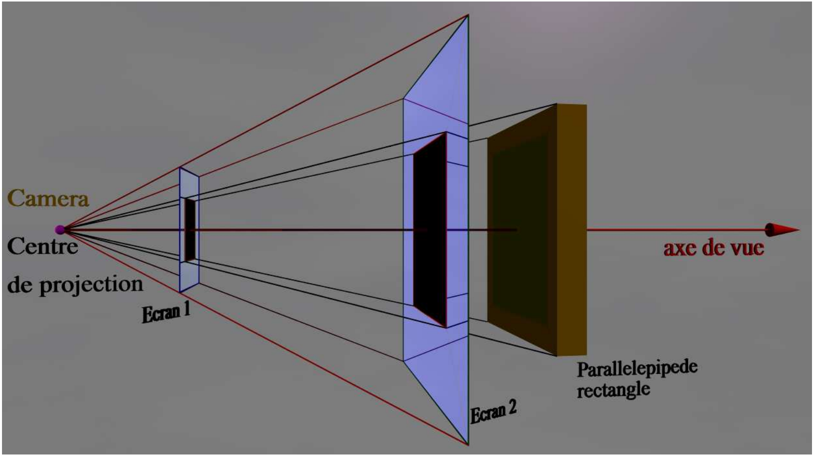
Même image sur les deux écrans, seule la résolution de l'écran change. Par chaque pixel de l'image, traçage d'une demi-droite d'origine le centre de projection,

Ecran et lancer de rayon



Même image sur les deux écrans, seule la résolution de l'écran change. Par chaque pixel de l'image, traçage d'une demi-droite d'origine le centre de projection, calcul des réflexions et réfractions sur les objets de la scène,

Ecran et lancer de rayon



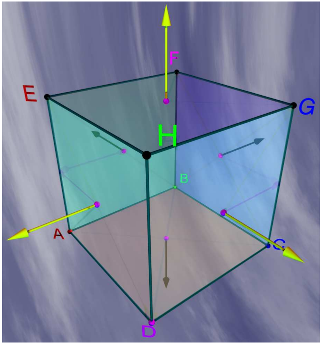
Même image sur les deux écrans, seule la résolution de l'écran change. Par chaque pixel de l'image, traçage d'une demi-droite d'origine le centre de projection, calcul des réflexions et réfractions sur les objets de la scène, détermination des rayons atteignant les sources lumineuses.

1 Introduction
2 Eclairage
3 De l'espace $3D$ à l'écran $2D$
4 Représentation par facettes et discrétisation
- Les objets déjà sous forme de facettes
- Discrétisation de surfaces continues

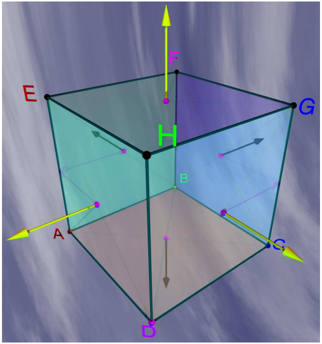
5 Géométrie de construction de solides (C.S.G.)

4. Représentation par facettes et discrétisation
   - Les objets déjà sous forme de facettes
   - Discrétisation de surfaces continues

Le cube

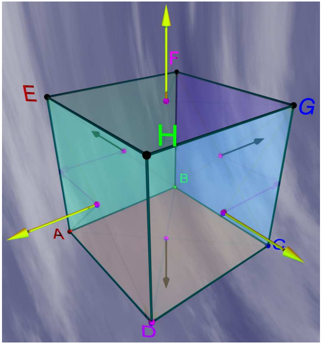


Le cube



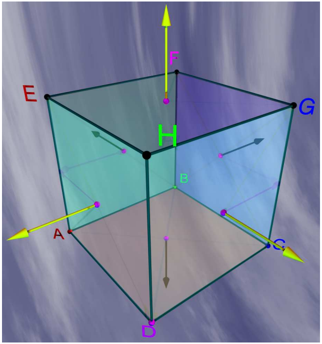
8 Sommets : A, B, C, D, E, F, G

Le cube



8 Sommets : *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*
6 Faces : *ABCD*, *ABFE*, *BCGF*, *DCGH*, *ADHE*, *EFGH*

Le cube

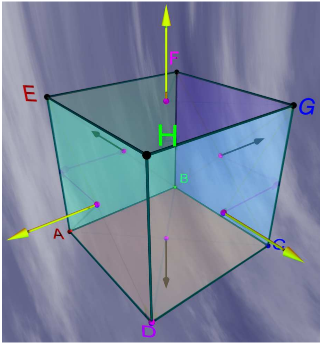


8 Sommets : A, B, C, D, E, F, G

6 Faces : $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$, $EFGH$

12 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DE]$

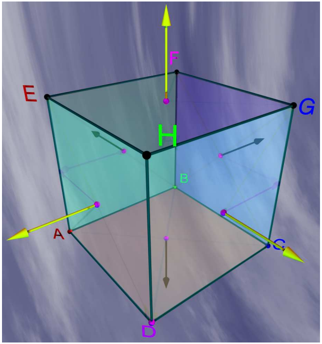
Le cube



8 Sommets : A, B, C, D, E, F, G
6 Faces : $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$, $EFGH$
12 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DE]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Le cube



8 Sommets : A, B, C, D, E, F, G

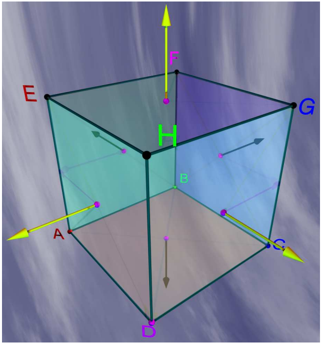
6 Faces : $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$, $EFGH$

12 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DE]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face $ADEH$ pour avoir un polygone non croisé : $ADHE$ ou $AEHD$.

Le cube



8 Sommets : A, B, C, D, E, F, G

6 Faces : $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$, $EFGH$

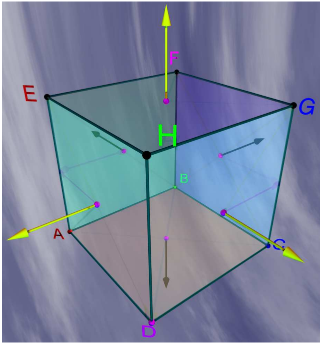
12 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DE]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face $ADEH$ pour avoir un polygone non croisé : $ADHE$ ou $AEHD$.

Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: $ADHE$ est **« direct »**, $AEHD$ est indirect

Le cube



8 Sommets : A, B, C, D, E, F, G

6 Faces : $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$, $EFGH$

12 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HE]$, $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$, $[DE]$

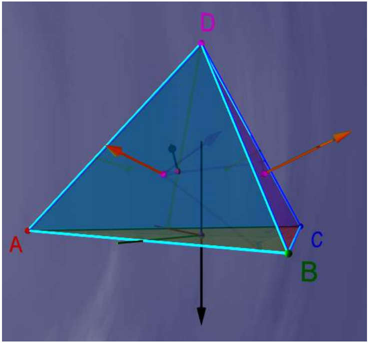
$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face $ADEH$ pour avoir un polygone non croisé : $ADHE$ ou $AEHD$.

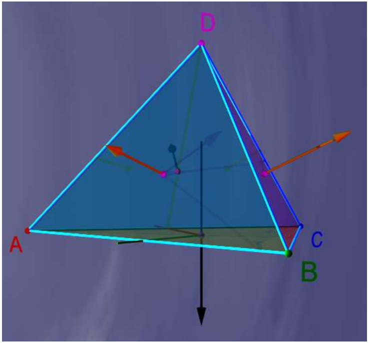
Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: $ADHE$ est **« direct »**, $AEHD$ est indirect

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AH}\right\|}\, \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AH} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AH}\right\|}\, \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AH}$$

Le tétraèdre

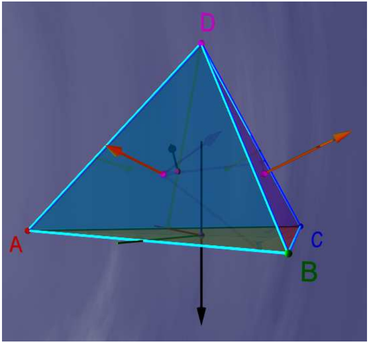


Le tétraèdre



4 Sommets : A, B, C, D

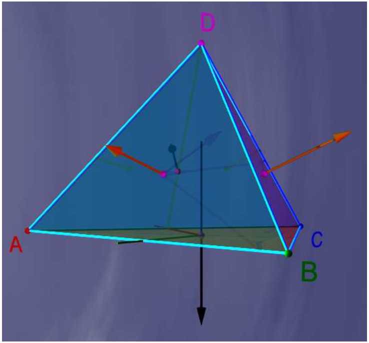
Le tétraèdre



4 Sommets : A, B, C, D

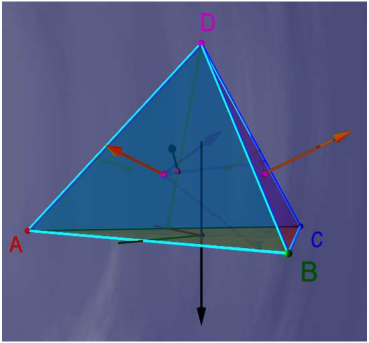
4 Faces : ABC, ABD, BCD, ACD

Le tétraèdre



4 Sommets : A, B, C, D
4 Faces : ABC, ABD, BCD, ACD
6 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$

Le tétraèdre



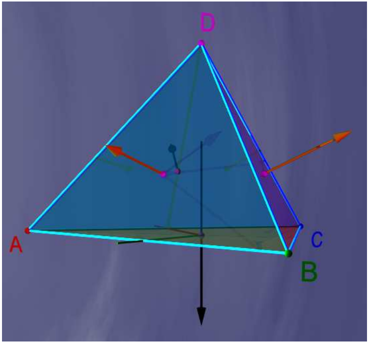
4 Sommets : A, B, C, D

4 Faces : ABC, ABD, BCD, ACD

6 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Le tétraèdre



4 Sommets : A, B, C, D

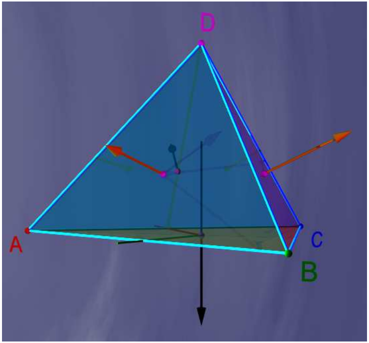
4 Faces : ABC, ABD, BCD, ACD

6 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face ABD : ABD ou ADB.

Le tétraèdre



4 Sommets : A, B, C, D

4 Faces : ABC, ABD, BCD, ACD

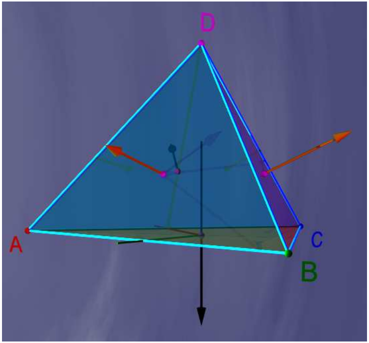
6 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face ABD : ABD ou ADB.

Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: ABD est **« direct »**, ADB est indirect

Le tétraèdre



4 Sommets : A, B, C, D
4 Faces : ABC, ABD, BCD, ACD
6 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$

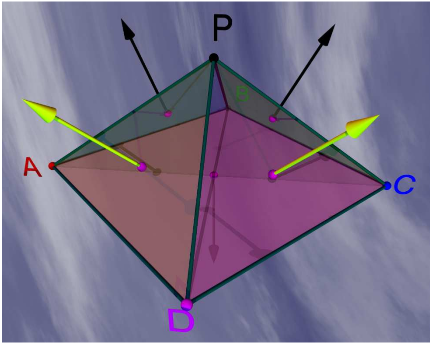
$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face ABD : ABD ou ADB.

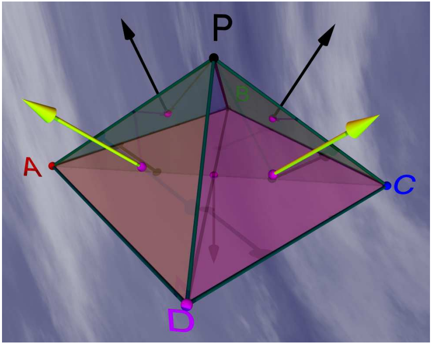
Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: ABD est **« direct »**, ADB est indirect

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\|}\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|}\,\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$$

La pyramide

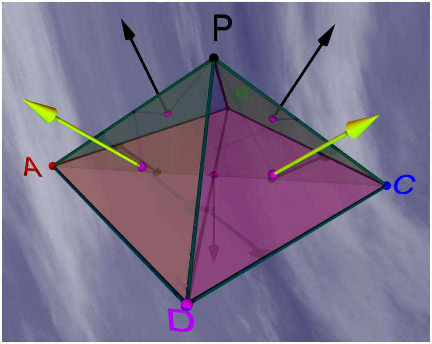


La pyramide



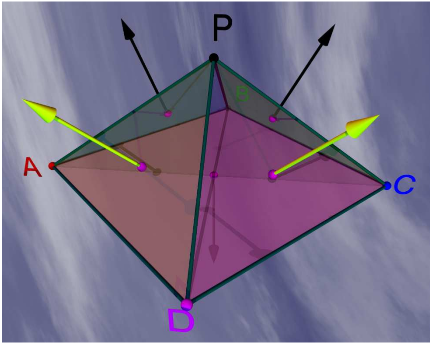
5 Sommets : A, B, C, D, P,

La pyramide



5 Sommets : *A*, *B*, *C*, *D*, *P*,
5 Faces : *ABCD*, *ABP*, *BCP*, *DCP*, *ADP*

La pyramide

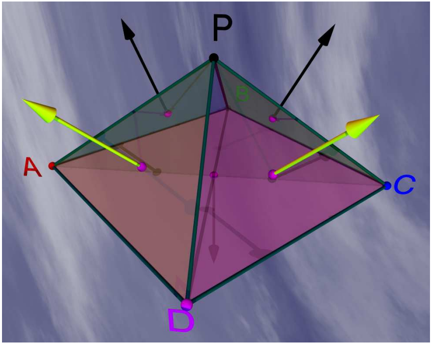


5 Sommets : A, B, C, D, P,

5 Faces : $ABCD$, ABP, BCP, DCP, ADP

8 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$, $[DP]$

La pyramide



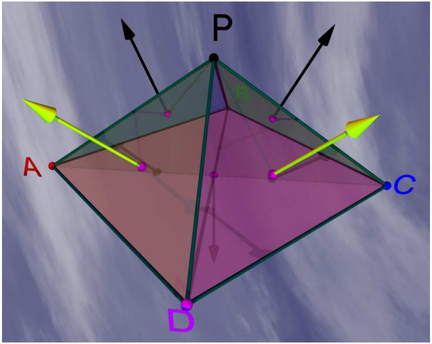
5 Sommets : A, B, C, D, P,

5 Faces : $ABCD$, ABP, BCP, DCP, ADP

8 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$, $[DP]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

La pyramide

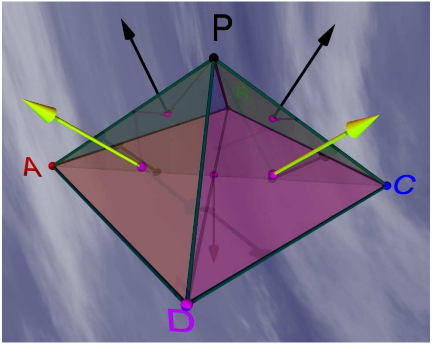


5 Sommets : A, B, C, D, P,
5 Faces : $ABCD$, ABP, BCP, DCP, ADP
8 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$, $[DP]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face ABP : APB ou ABP.

La pyramide



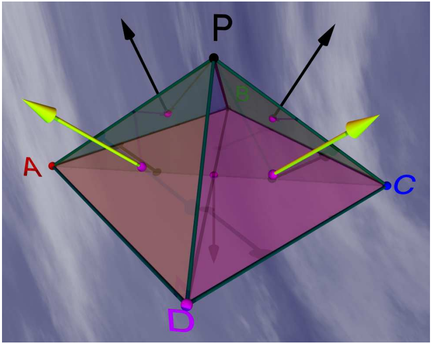
5 Sommets : A, B, C, D, P,
5 Faces : $ABCD$, ABP, BCP, DCP, ADP
8 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$, $[DP]$

$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face ABP : APB ou ABP.

Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: APB est **« direct »**, ABP est indirect

La pyramide



5 Sommets : A, B, C, D, P,
5 Faces : $ABCD$, ABP, BCP, DCP, ADP
8 Arêtes : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$, $[DP]$

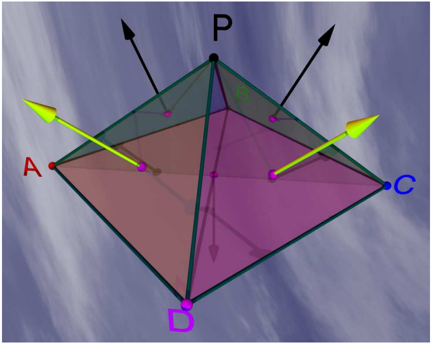
$\boxed{\#\text{Sommets} + \#\text{Faces} - \#\text{Arêtes} = 2}$

Sens de parcours de la face ABP : APB ou ABP.

Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: APB est **« direct »**, ABP est indirect

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|} \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}$$

La pyramide



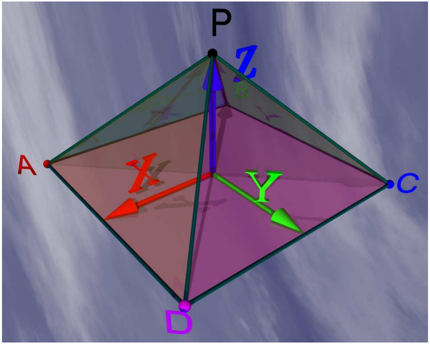
Pour le quadrilatère, $ABCD$ tourne dans le sens direct pour le vecteur normal extérieur $\overrightarrow{N}$ d'où :

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: APB est **« direct »**, ABP est indirect

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|} \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}$$

La pyramide



Pour le quadrilatère, ***ABCD*** tourne dans le sens direct pour le vecteur normal extérieur $\overrightarrow{N}$ d'où :

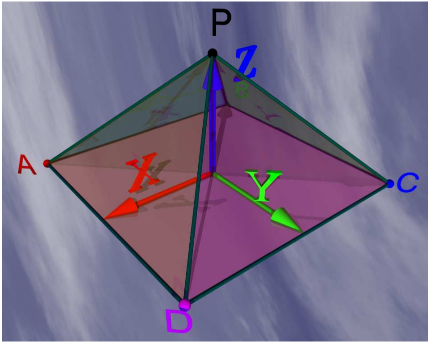
$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|}\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$

Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: APB est **« direct »**, ABP est indirect

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right\|}\,\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}\,\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}$$

La pyramide



Pour le quadrilatère, $\boldsymbol{ABCD}$ tourne dans le sens direct pour le vecteur normal extérieur $\overrightarrow{N}$ d'où :

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

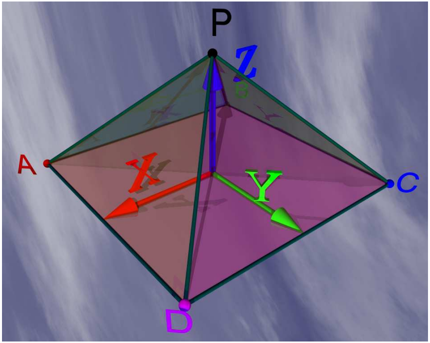
$$\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{\imath} \text{ et } \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{\imath} \times \overrightarrow{\jmath} = -4\overrightarrow{k}$$

Orientation par le vecteur normal extérieur unitaire $\overrightarrow{N}$: APB est **« direct »**, ABP est indirect

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} \right\|} \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB} \right\|} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}$$

La pyramide



Pour le quadrilatère, $\boldsymbol{ABCD}$ tourne dans le sens direct pour le vecteur normal extérieur $\overrightarrow{N}$ d'où :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N}} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} \right\|} \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

$$\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{\imath} \text{ et } \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{\imath} \times \overrightarrow{\jmath} = -4\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{k}$$

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A
Tétraèdre	Triangles équilatéraux	4	4	6

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A
Tétraèdre	Triangles équilatéraux	4	4	6
Octaèdre	Triangles équilatéraux	8	6	12

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A
Tétraèdre	Triangles équilatéraux	4	4	6
Octaèdre	Triangles équilatéraux	8	6	12
Cube	Carrés	6	8	12

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A
Tétraèdre	Triangles équilatéraux	4	4	6
Octaèdre	Triangles équilatéraux	8	6	12
Cube	Carrés	6	8	12
Dodécaèdre	Pentagones réguliers	12	20	30

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A
Tétraèdre	Triangles équilatéraux	4	4	6
Octaèdre	Triangles équilatéraux	8	6	12
Cube	Carrés	6	8	12
Dodécaèdre	Pentagones réguliers	12	20	30
Icosaèdre	Triangles équilatéraux	20	12	30

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A
Tétraèdre	Triangles équilatéraux	4	4	6
Octaèdre	Triangles équilatéraux	8	6	12
Cube	Carrés	6	8	12
Dodécaèdre	Pentagones réguliers	12	20	30
Icosaèdre	Triangles équilatéraux	20	12	30

Théorème (Formule d'Euler)

Tous les polyèdres de Platon vérifient la formule d'Euler :

Polyèdres ou solides de Platon et formule d'Euler

Polyèdre	Type des Faces	# faces F	# sommets S	# d'arêtes A
Tétraèdre	Triangles équilatéraux	4	4	6
Octaèdre	Triangles équilatéraux	8	6	12
Cube	Carrés	6	8	12
Dodécaèdre	Pentagones réguliers	12	20	30
Icosaèdre	Triangles équilatéraux	20	12	30

Théorème (Formule d'Euler)

Tous les polyèdres de Platon vérifient la formule d'Euler :

$$\boxed{\#Sommets + \#Faces - \#Arêtes = 2}$$

4. Représentation par facettes et discrétisation
   - Les objets déjà sous forme de facettes
   - Discrétisation de surfaces continues

Discrétisation d'une surface pour l'affichage

Principe (Affichage d'une surface)

Approcher une surface par un polyèdre (chaque face est plane).

Discrétisation d'une surface pour l'affichage

Principe (Affichage d'une surface)

Approcher une surface par un polyèdre (chaque face est plane).
Polygones utilisés : triangles mais aussi quadrilatères.

Discrétisation d'une surface pour l'affichage

Principe (Affichage d'une surface)

Approcher une surface par un polyèdre (chaque face est plane).
Polygones utilisés : triangles mais aussi quadrilatères.

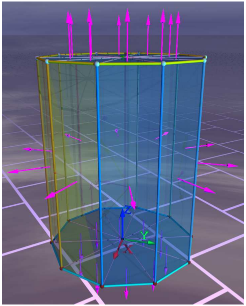
Les sommets du polygone sont sur la surface.

Discrétisation d'une surface pour l'affichage

Principe (Affichage d'une surface)

Approcher une surface par un polyèdre (chaque face est plane).
Polygones utilisés : triangles mais aussi quadrilatères.

Les sommets du polygone sont sur la surface.



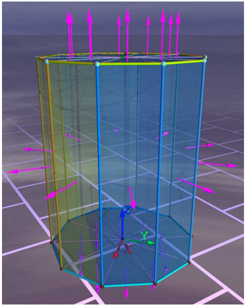
Un cylindre de révolution

Discrétisation d'une surface pour l'affichage

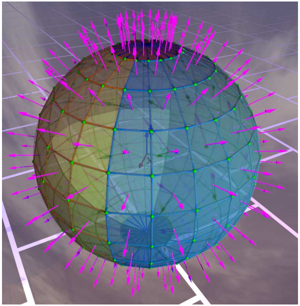
Principe (Affichage d'une surface)

Approcher une surface par un polyèdre (chaque face est plane).
Polygones utilisés : triangles mais aussi quadrilatères.

Les sommets du polygone sont sur la surface.

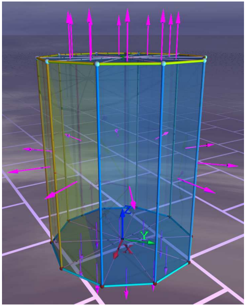


Un cylindre de révolution

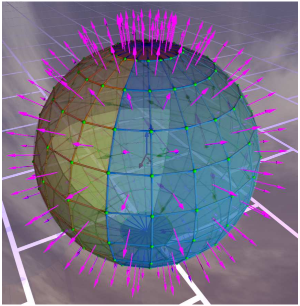


Une sphère

Discrétisation d'une surface pour l'affichage



Un cylindre de révolution



Une sphère

Principe

*Lors de la discrétisation d'une **surface fermée**, le polyèdre approchant cette dernière doit vérifier la formule d'Euler :*

$$\boxed{\#Sommets + \#Faces - \#Arêtes = 2}$$

1. Introduction
2. Eclairage
3. De l'espace $3D$ à l'écran $2D$
4. Représentation par facettes et discrétisation
   - Les objets déjà sous forme de facettes
   - Discrétisation de surfaces continues
5. Géométrie de construction de solides (C.S.G.)

Constructive Solid Geometry

Principe (Géométrie de construction de solides (C.S.G.))

La géométrie de construction de solides (CSG en anglais : "Constructive Solid Geometry") a pour but de :

-
-
-

Constructive Solid Geometry

Principe (Géométrie de construction de solides (C.S.G.))

La géométrie de construction de solides (CSG en anglais : "Constructive Solid Geometry") a pour but de :

- *construire des solides complexes à partir d´opérations élémentaires sur des solides élémentaires ;*
-
-

Constructive Solid Geometry

Principe (Géométrie de construction de solides (C.S.G.))

La géométrie de construction de solides (CSG en anglais : "Constructive Solid Geometry") a pour but de :

- *construire des solides complexes à partir d´opérations élémentaires sur des solides élémentaires ;*
- *limiter les librairies d´objets géométriques élémentaires ;*
-

Constructive Solid Geometry

Principe (Géométrie de construction de solides (C.S.G.))

La géométrie de construction de solides (CSG en anglais : "Constructive Solid Geometry") a pour but de :

- *construire des solides complexes à partir d´opérations élémentaires sur des solides élémentaires ;*
- *limiter les librairies d´objets géométriques élémentaires ;*
- *fournir des mécanismes opératoires pour la construction des solides par agglomération, intersection ou extrusion.*

Constructive Solid Geometry

Principe (Géométrie de construction de solides (C.S.G.))

La géométrie de construction de solides (CSG en anglais : "Constructive Solid Geometry") a pour but de :

- *construire des solides complexes à partir d´opérations élémentaires sur des solides élémentaires ;*
- *limiter les librairies d´objets géométriques élémentaires ;*
- *fournir des mécanismes opératoires pour la construction des solides par agglomération, intersection ou extrusion.*

Définition (Union de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface union de S_1 et S_2 est :

Constructive Solid Geometry

Principe (Géométrie de construction de solides (C.S.G.))

La géométrie de construction de solides (CSG en anglais : "Constructive Solid Geometry") a pour but de :

- *construire des solides complexes à partir d´opérations élémentaires sur des solides élémentaires ;*
- *limiter les librairies d´objets géométriques élémentaires ;*
- *fournir des mécanismes opératoires pour la construction des solides par agglomération, intersection ou extrusion.*

Définition (Union de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface union de S_1 et S_2 est :

$$S_1 \cup S_2 = \{M \in S_1 \quad ou \quad M \in S_2\}$$

Constructive Solid Geometry

Définition (Union de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface union de S_1 et S_2 est :

$$S_1 \cup S_2 = \{M \in S_1 \quad ou \quad M \in S_2\}$$

Définition (Intersection de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface intersection de S_1 et S_2 est :

Constructive Solid Geometry

Définition (Union de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface union de S_1 et S_2 est :

$$S_1 \cup S_2 = \{M \in S_1 \quad ou \quad M \in S_2\}$$

Définition (Intersection de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface intersection de S_1 et S_2 est :

$$S_1 \cap S_2 = \{M \in S_1 \quad et \quad M \in S_2\}$$

Constructive Solid Geometry

Définition (Union de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface union de S_1 et S_2 est :

$$S_1 \cup S_2 = \{M \in S_1 \quad ou \quad M \in S_2\}$$

Définition (Intersection de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface intersection de S_1 et S_2 est :

$$S_1 \cap S_2 = \{M \in S_1 \quad et \quad M \in S_2\}$$

Définition (Différence de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface différence de S_1 et S_2 est :

Constructive Solid Geometry

Définition (Union de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface union de S_1 et S_2 est :

$$S_1 \cup S_2 = \{M \in S_1 \quad ou \quad M \in S_2\}$$

Définition (Intersection de deux surfaces)

Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface intersection de S_1 et S_2 est :

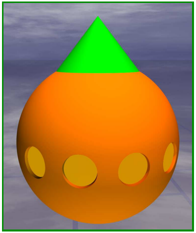
$$S_1 \cap S_2 = \{M \in S_1 \quad et \quad M \in S_2\}$$

Définition (Différence de deux surfaces)

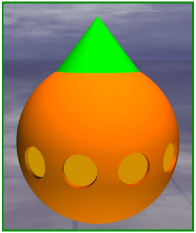
Soit S_1 et S_2 deux surfaces. La surface différence de S_1 et S_2 est :

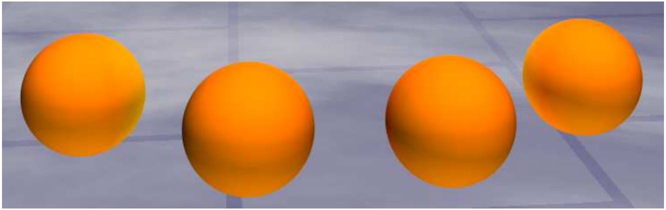
$$S_1 - S_2 = \{M \in S_1 \quad et \quad M \notin S_2\}$$

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille



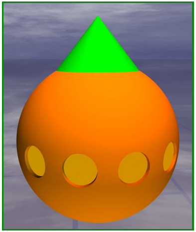
Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

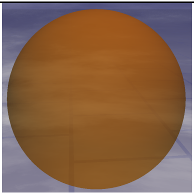




Union de quatre sphères

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

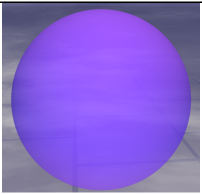




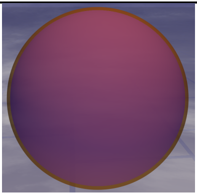
Grande sphère

Différence

$\Downarrow$

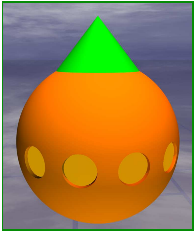


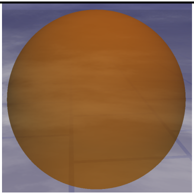
Petite sphère



Danger : l'intersection des deux sphères :

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

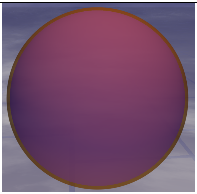


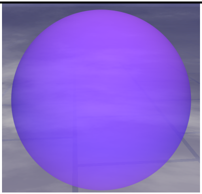


Grande sphère

Différence

⇓

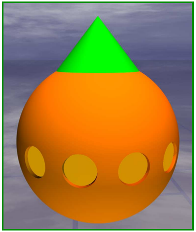


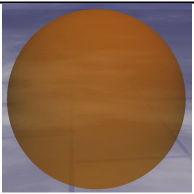


Petite sphère

Danger : l'intersection des deux sphères : $\emptyset$.

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

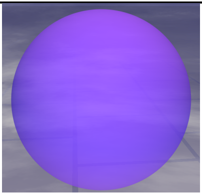




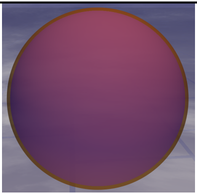
Grande sphère

Différence

⇓



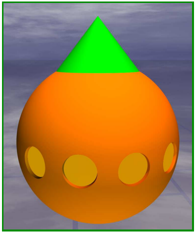
Petite sphère

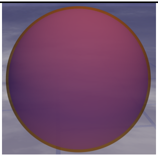


Danger : l'intersection des deux sphères : $\emptyset$.

La sphère est remplacée par la boule de même centre et de même rayon.

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

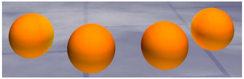




Différence

Différence

$\Downarrow$

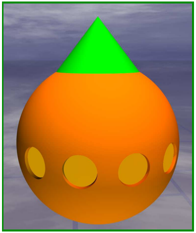


Union

Danger : l'intersection des deux sphères : $\emptyset$.

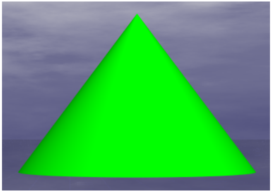
La sphère est remplacée par la boule de même centre et de même rayon.

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

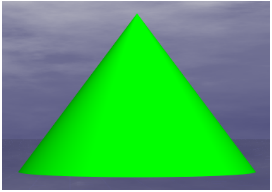


$\Longleftarrow$

Union

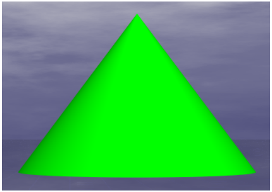


Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

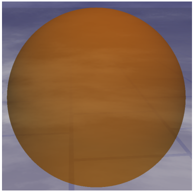


`C` : Cône de révolution

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

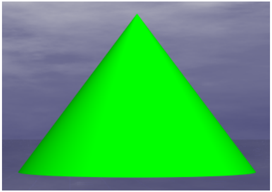


$\mathtt{C}$: Cône de révolution

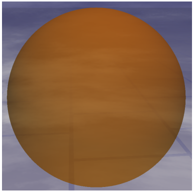


$\mathtt{S}_g$: grande sphère

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille



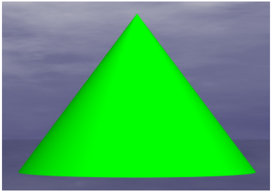
C : Cône de révolution



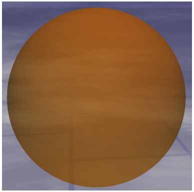
S_g : grande sphère

S_p : petite sphère

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille

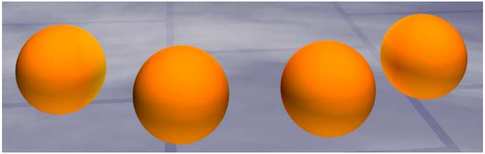


$\mathtt{C}$: Cône de révolution



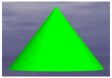
$\mathtt{S}_g$: grande sphère

$\mathtt{S}_p$: petite sphère

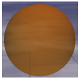


$\mathtt{S}_A$, $\mathtt{S}_B$, $\mathtt{S}_C$ et $\mathtt{S}_D$ toutes petites sphères de même rayon

Arbre C.S.G. pour faire une citrouille



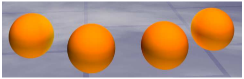
C : Cône



S_g : grande sphère

S_p : petite sphère

S_A, S_B, S_C et S_D quatre petites sphères de même rayon



- $\cup$
  - C
  - $-$
    - $-$
      - S_g
      - S_p
    - $\cup$
      - $\cup$
        - S_A
        - S_B
      - $\cup$
        - S_C
        - S_D

Arbre C.S.G.

Définition (Arbre C.S.G.)

Un arbre C.S.G. est un arbre binaire dont :

Arbre C.S.G.

Définition (Arbre C.S.G.)

Un arbre C.S.G. est un arbre binaire dont :

- *les nœuds sont des opérateurs booléens ;*

Arbre C.S.G.

Définition (Arbre C.S.G.)

Un arbre C.S.G. est un arbre binaire dont :

- *les nœuds sont des opérateurs booléens ;*
- *les feuilles sont des primitives (sphères, cône) où nous ajoutons éventuellement une transformation affine (translation, rotation...).*

Arbre C.S.G.

Définition (Arbre C.S.G.)

Un arbre C.S.G. est un arbre binaire dont :

- *les nœuds sont des opérateurs booléens ;*
- *les feuilles sont des primitives (sphères, cône) où nous ajoutons éventuellement une transformation affine (translation, rotation...).*

Remarque

Ne pas utiliser de transformation(s) affine(s) dans le cas d'une sphère

Arbre C.S.G.

Définition (Arbre C.S.G.)

Un arbre C.S.G. est un arbre binaire dont :

- *les nœuds sont des opérateurs booléens ;*
- *les feuilles sont des primitives (sphères, cône) où nous ajoutons éventuellement une transformation affine (translation, rotation...).*

Remarque

Ne pas utiliser de transformation(s) affine(s) dans le cas d'une sphère : ***modifier juste la position du centre****.*

Remarque (Nom commutativité)

$S_g - S_p \neq S_p - S_g$

Arbre C.S.G.

Définition (Arbre C.S.G.)

Un arbre C.S.G. est un arbre binaire dont :

- *les nœuds sont des opérateurs booléens ;*
- *les feuilles sont des primitives (sphères, cône) où nous ajoutons éventuellement une transformation affine (translation, rotation...).*

Remarque

Ne pas utiliser de transformation(s) affine(s) dans le cas d'une sphère : ***modifier juste la position du centre****.*

Remarque (Nom commutativité)

$S_g - S_p \neq S_p - S_g$

Remarque (Inconvénient)

Jointures G^0 *: surface obtenue non lisse, présence d'arêtes saillantes.*

Arbre C.S.G.

Définition (Arbre C.S.G.)

Un arbre C.S.G. est un arbre binaire dont :

- *les nœuds sont des opérateurs booléens ;*
- *les feuilles sont des primitives (sphères, cône) où nous ajoutons éventuellement une transformation affine (translation, rotation...).*

Remarque (Nom commutativité)

$S_g - S_p \neq S_p - S_g$

Remarque (Inconvénient)

Jointures G^0 *: surface obtenue non lisse, présence d'arêtes saillantes.*

Programmation en THREE.js