Géométrie, synthèse d'images

Quelques rappels de Mathématiques

L. GARNIER

L2 Info3B

Points et vecteurs

Définition

Un vecteur est défini par :

1. *Une direction (Dole - Dijon) ;*
2. *Un sens (de Dole vers Dijon ou de Dijon vers Dole) ;*
3. *Une norme ou longueur (30 km, on est à Genlis ou à Auxonne).*

Points et vecteurs

Définition

Un vecteur est défini par :

1. *Une direction (Dole - Dijon) ;*
2. *Un sens (de Dole vers Dijon ou de Dijon vers Dole) ;*
3. *Une norme ou longueur (30 km, on est à Genlis ou à Auxonne).*

Soit A et B deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

1. direction : la droite (AB) ;
2. sens : de A vers B ;
3. norme : la longueur AB du segment $[AB]$.

Points et vecteurs

Définition

Un vecteur est défini par :

1. *Une direction (Dole - Dijon) ;*
2. *Un sens (de Dole vers Dijon ou de Dijon vers Dole) ;*
3. *Une norme ou longueur (30 km, on est à Genlis ou à Auxonne).*

Soit A et B deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

1. direction : la droite (AB) ;
2. sens : de A vers B ;
3. norme : la longueur AB du segment $[AB]$.

Pour tous points A, B et C, la relation de Chasles est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Points et vecteurs

Définition

Un vecteur est défini par :

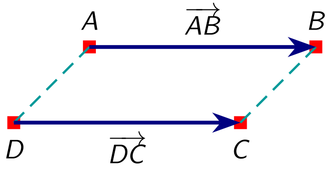
1. *Une direction (Dole - Dijon) ;*
2. *Un sens (de Dole vers Dijon ou de Dijon vers Dole) ;*
3. *Une norme ou longueur (30 km, on est à Genlis ou à Auxonne).*

Soit A et B deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

1. direction : la droite (AB) ;
2. sens : de A vers B ;
3. norme : la longueur AB du segment $[AB]$.

Pour tous points A, B et C, la relation de Chasles est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ (toutes les directions, pas de sens).

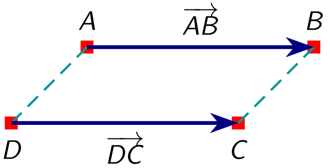
Espace affine ou espace vectoriel



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Longleftrightarrow$$

$ABCD$ est un parallélogramme

Espace affine ou espace vectoriel



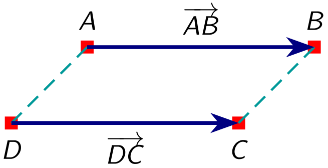
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff$

$ABCD$ est un parallélogramme

Définition (Espace affine : feuille papier ou écran d'ordinateur)

Un espace affine est un ensemble de points, le plan $\mathcal{P}$ en dimension 2 ou l'espace $\mathcal{E}_3$ en dimension 3.

Espace affine ou espace vectoriel



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Longleftrightarrow$

$ABCD$ est un parallélogramme

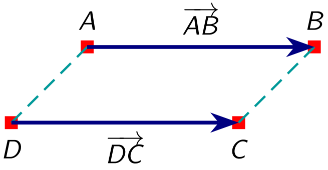
Définition (Espace affine : feuille papier ou écran d'ordinateur)

Un espace affine est un ensemble de points, le plan $\mathcal{P}$ en dimension 2 ou l'espace $\mathcal{E}_3$ en dimension 3.

Définition (Espace vectoriel)

Un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs, le plan (vectoriel) $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ en dimension 2 ou l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ en dimension 3.

Espace affine ou espace vectoriel



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff$

$ABCD$ est un parallélogramme

Définition (Espace affine : feuille papier ou écran d'ordinateur)

Un espace affine est un ensemble de points, le plan $\mathcal{P}$ en dimension 2 ou l'espace $\mathcal{E}_3$ en dimension 3.

Définition (Espace vectoriel)

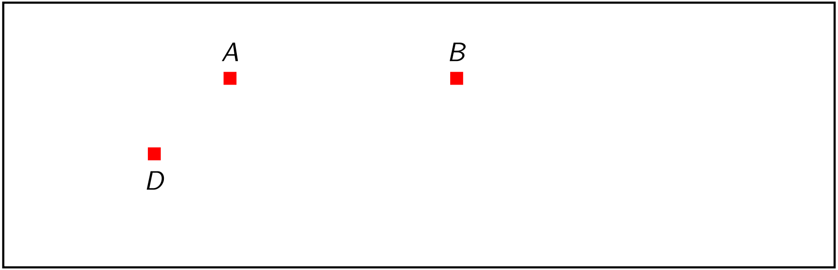
Un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs, le plan (vectoriel) $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ en dimension 2 ou l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ en dimension 3.

Danger : $(A; B) \neq (D; C)$ mais $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

Dans un espace affine, pas de multiplication, pas d'addition

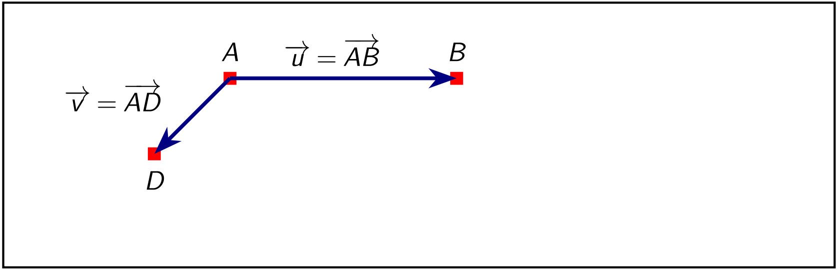
Quel sens donner à $A+B$, à $D+B$, à $3\,A$ ou à $-5\,B$?



Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

Dans un espace affine, pas de multiplication, pas d'addition

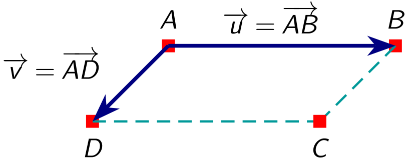
Quel sens donner à $A + B$, à $D + B$, à $3\,A$ ou à $-5\,B$?



Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

Dans un espace affine, pas de multiplication, pas d'addition

Quel sens donner à $A+B$, à $D+B$, à $3\,A$ ou à $-5\,B$?

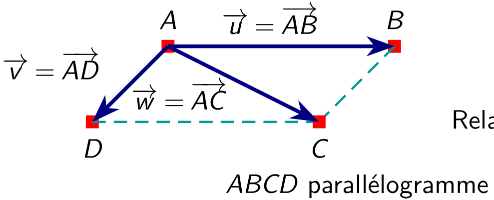


$ABCD$ parallélogramme

Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

Dans un espace affine, pas de multiplication, pas d'addition

Quel sens donner à $A+B$, à $D+B$, à $3\,A$ ou à $-5\,B$?



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w}$$

Relation du parallélogramme

Définition (Addition dans un espace vectoriel)

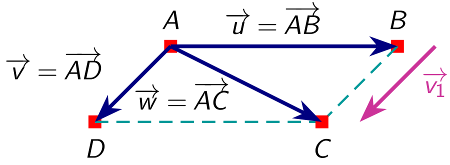
L'addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'effectue via la relation du parallélogramme et nous avons :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$$

Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

Dans un espace affine, pas de multiplication, pas d'addition

Quel sens donner à $A+B$, à $D+B$, à $3\,A$ ou à $-5\,B$?



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w}$$

Relation du parallélogramme

Définition (Addition dans un espace vectoriel)

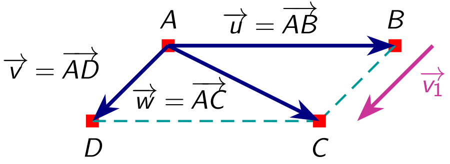
L'addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'effectue via la relation du parallélogramme et nous avons :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$$

Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

Dans un espace affine, pas de multiplication, pas d'addition

Quel sens donner à $A + B$, à $D + B$, à $3\,A$ ou à $-5\,B$?



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w}$$

Relation du parallélogramme

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w}$$

Définition (Addition dans un espace vectoriel)

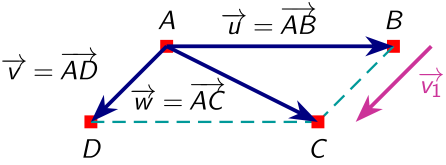
L'addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'effectue via la relation du parallélogramme et nous avons :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$$

Différence entre un espace affine et un espace vectoriel

Dans un espace affine, pas de multiplication, pas d'addition

Quel sens donner à $A+B$, à $D+B$, à $3\,A$ ou à $-5\,B$?



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{w}$$

Relation du parallélogramme

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \iff \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{w}$$

Définition (Addition dans un espace vectoriel)

L'addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'effectue via la relation du parallélogramme et nous avons :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire...

Multiplication par un scalaire

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un scalaire non nul. Le vecteur $\overrightarrow{v} = k\,.\,\overrightarrow{u}$ est défini par :

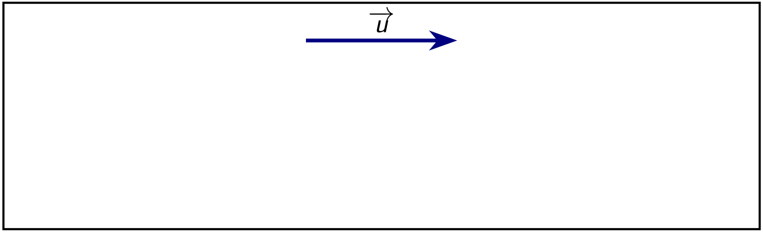
1. *La direction de $\overrightarrow{v}$ est celle de $\overrightarrow{u}$;*
2. *Le sens de $\overrightarrow{v}$ est :*
    1. *celui de $\overrightarrow{u}$ si k est positif ;*
    2. *opposé à celui de $\overrightarrow{u}$ si k est négatif ;*
3. *La norme est $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.*

Multiplication par un scalaire

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un scalaire non nul. Le vecteur $\overrightarrow{v} = k\,.\,\overrightarrow{u}$ est défini par :

1. *La direction de $\overrightarrow{v}$ est celle de $\overrightarrow{u}$;*
2. *Le sens de $\overrightarrow{v}$ est :*
   1. *celui de $\overrightarrow{u}$ si k est positif ;*
   2. *opposé à celui de $\overrightarrow{u}$ si k est négatif ;*
3. *La norme est $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.*

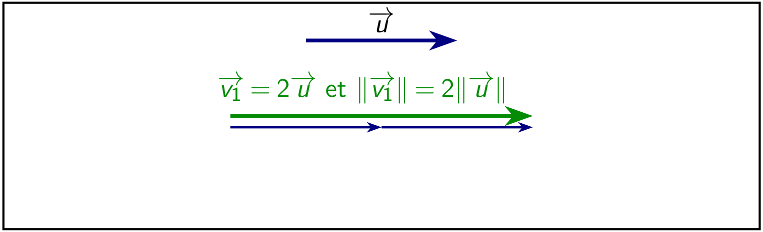


Multiplication par un scalaire

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un scalaire non nul. Le vecteur $\overrightarrow{v} = k\,.\,\overrightarrow{u}$ est défini par :

1. *La direction de $\overrightarrow{v}$ est celle de $\overrightarrow{u}$;*
2. *Le sens de $\overrightarrow{v}$ est :*
   1. *celui de $\overrightarrow{u}$ si k est positif ;*
   2. *opposé à celui de $\overrightarrow{u}$ si k est négatif ;*
3. *La norme est $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.*

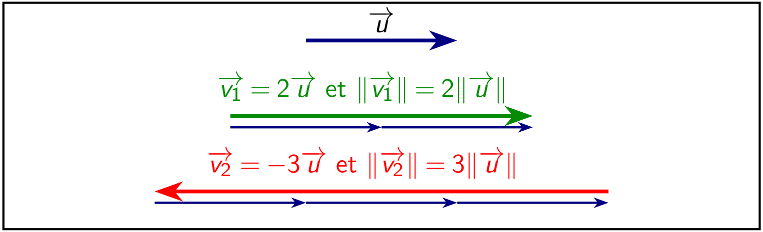


Multiplication par un scalaire

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un scalaire non nul. Le vecteur $\overrightarrow{v} = k\,.\,\overrightarrow{u}$ est défini par :

1. *La direction de $\overrightarrow{v}$ est celle de $\overrightarrow{u}$;*
2. *Le sens de $\overrightarrow{v}$ est :*
   1. *celui de $\overrightarrow{u}$ si k est positif ;*
   2. *opposé à celui de $\overrightarrow{u}$ si k est négatif ;*
3. *La norme est $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.*



Vecteurs opposés et colinéarité

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ désigne soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. (Idem pour les espaces affines)

Vecteurs opposés et colinéarité

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ désigne soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. (Idem pour les espaces affines)

Définition (Vecteurs opposés)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Vecteurs opposés et colinéarité

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ désigne soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. (Idem pour les espaces affines)

Définition (Vecteurs opposés)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs opposés alors $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Vecteurs opposés et colinéarité

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ désigne soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. (Idem pour les espaces affines)

Définition (Vecteurs opposés)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs opposés alors $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Définition (Vecteurs colinéaires)

*Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont **colinéaires** si il existe un scalaire k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*

Vecteurs opposés et colinéarité

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ désigne soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. (Idem pour les espaces affines)

Définition (Vecteurs opposés)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs opposés alors $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Définition (Vecteurs colinéaires)

*Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont **colinéaires** si il existe un scalaire k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Vecteurs opposés et colinéarité

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ désigne soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. (Idem pour les espaces affines)

Définition (Vecteurs opposés)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs opposés alors $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Définition (Vecteurs colinéaires)

*Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont **colinéaires** si il existe un scalaire k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Définition (Bases)

Une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est la donnée de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.

Vecteurs opposés et colinéarité

Dans la suite, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ désigne soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. (Idem pour les espaces affines)

Définition (Vecteurs opposés)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs opposés alors $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Définition (Vecteurs colinéaires)

*Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont **colinéaires** si il existe un scalaire k non nul tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*
Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Définition (Bases)

Une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est la donnée de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.
Une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ est la donnée de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non coplanaires i.e. :

$$\lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} + \lambda_3\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Composantes d'un vecteur

Dans la suite, une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) est constituée de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (resp. trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$).

Composantes d'un vecteur

Dans la suite, une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) est constituée de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (resp. trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$).

Définition (Composantes d'un vecteur)

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) a pour composantes $(x;y)$ (resp. $(x;y;z)$) dans la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{j}\right)$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$) si :

dans le plan :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath}$$

dans l'espace :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$$

Composantes d'un vecteur

Dans la suite, une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) est constituée de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (resp. trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$).

Définition (Composantes d'un vecteur)

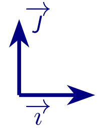
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) a pour composantes $(x;y)$ (resp. $(x;y;z)$) dans la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$) si :

dans le plan :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath}$$

dans l'espace :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$$



Composantes d'un vecteur

Dans la suite, une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) est constituée de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (resp. trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$).

Définition (Composantes d'un vecteur)

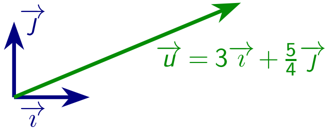
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) a pour composantes $(x; y)$ (resp. $(x; y; z)$) dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{j}\right)$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$) si :

dans le plan :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath}$$

dans l'espace :

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$$



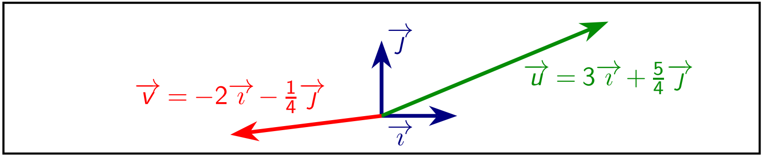
Composantes d'un vecteur

Dans la suite, une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) est constituée de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (resp. trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$).

Définition (Composantes d'un vecteur)

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) a pour composantes $(x;y)$ (resp. $(x;y;z)$) dans la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{j}\right)$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$) si :

dans le plan :	*dans l'espace :*
$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath}$	$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$



Composantes d'un vecteur

Dans la suite, une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) est constituée de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ (resp. trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$).

Définition (Composantes d'un vecteur)

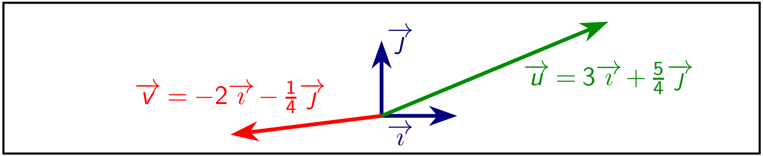
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$) a pour composantes $(x;y)$ (resp. $(x;y;z)$) dans la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{j}\right)$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$) si :

dans le plan :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$$

dans l'espace :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$$



#FF0000 : trois composantes RGB (Rouge Vert Bleu)

Points et coordonnées

Définition (Coordonnées d'un point)

Les coordonnées du point A de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}_3$) sont $(x; y)$ (resp. $(x; y; z)$) dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$),

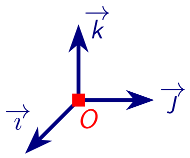
$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$$

Points et coordonnées

Définition (Coordonnées d'un point)

Les coordonnées du point A de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}_3$) sont $(x; y)$ (resp. $(x; y; z)$) dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$),

$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$$

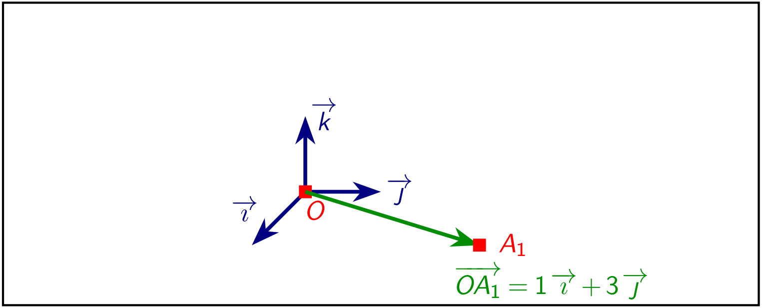


Points et coordonnées

Définition (Coordonnées d'un point)

Les coordonnées du point A de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}_3$) sont $(x; y)$ (resp. $(x; y; z)$) dans le repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ (resp. $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$),

$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$$

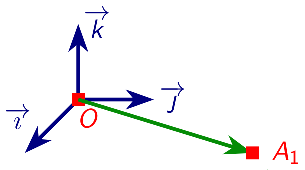


Points et coordonnées

Définition (Coordonnées d'un point)

Les coordonnées du point A de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}_3$) sont $(x;y)$ (resp. $(x;y;z)$) dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$),

$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$$



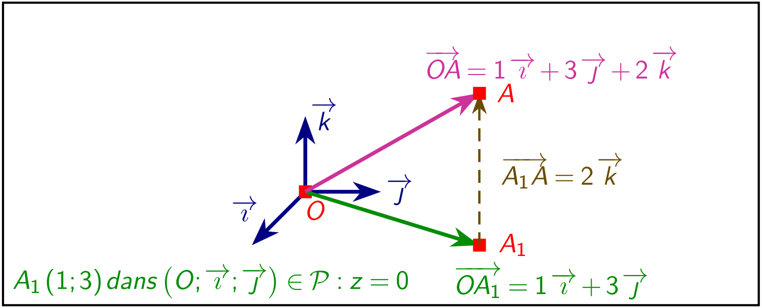
$A_1\,(1;3)\,dans\,\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right) \in \mathcal{P} : z = 0$ $\qquad \overrightarrow{OA_1} = 1\,\overrightarrow{\imath} + 3\,\overrightarrow{\jmath}$

Points et coordonnées

Définition (Coordonnées d'un point)

Les coordonnées du point A de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}_3$) sont $(x;y)$ (resp. $(x;y;z)$) dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ (resp. $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$),

$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \qquad \overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_3}$$

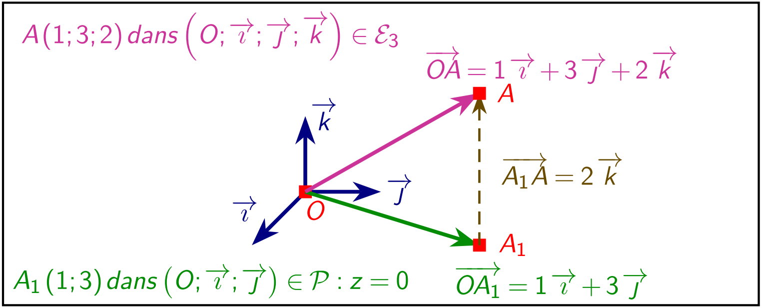


Points et coordonnées

Définition (Coordonnées d'un point)

Les coordonnées du point A de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}_3$) sont $(x; y)$ (resp. $(x; y; z)$) dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (resp. $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (resp. $\left(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$),

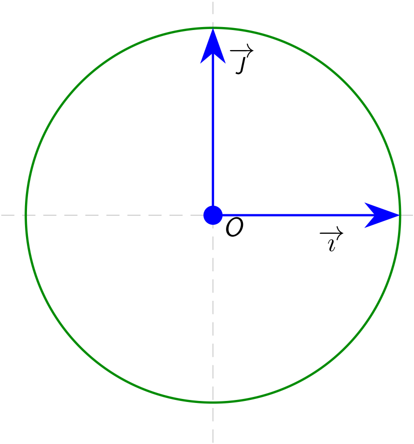
$$\overrightarrow{OA} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} \in \vec{\mathcal{P}} \qquad \overrightarrow{OA} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \in \vec{\mathcal{E}_3}$$



Fonctions trigonométriques : définition

Définition (Cercle trigonométrique $\mathcal{C}$)

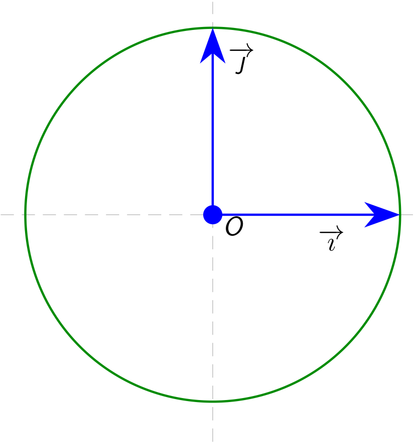
Soit $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.



Fonctions trigonométriques : définition

Définition (Cercle trigonométrique $\mathcal{C}$)

Soit $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a défini un sens de parcours.



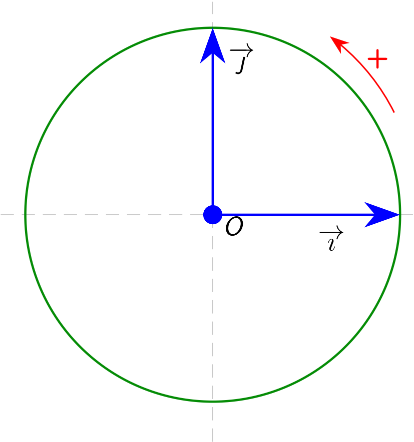
Fonctions trigonométriques : définition

Définition (Cercle trigonométrique C)

Soit $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a défini un sens de parcours.

On dit que le sens est positif si l'on se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Fonctions trigonométriques : définition

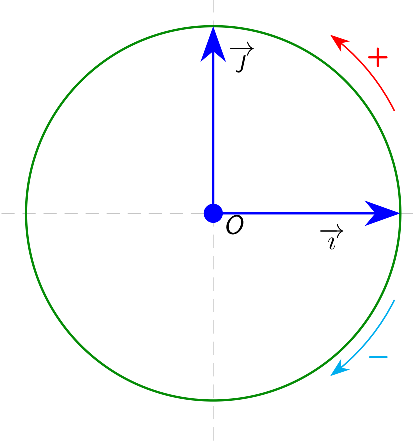
Définition (Cercle trigonométrique $\mathcal{C}$)

Soit $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a défini un sens de parcours.

On dit que le sens est positif si l'on se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre*.*

On dit que le sens est négatif si l'on se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

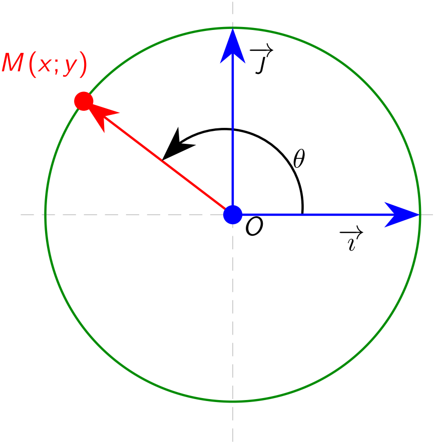


Fonctions trigonométriques : définition

Définition (Le radian)

Soit M un point du cercle.
On appelle mesure θ en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ la longueur de l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{IM}$ et on note :

$$\theta = \widehat{\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)} \tag{1}$$

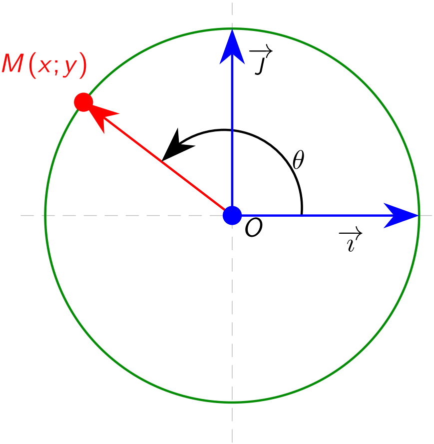


Fonctions trigonométriques : définition

Définition (Le radian)

Soit M un point du cercle.
On appelle mesure θ en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ la longueur de l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{IM}$ et on note :

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right) \tag{1}$$



Définition (Fonctions cos et sin)

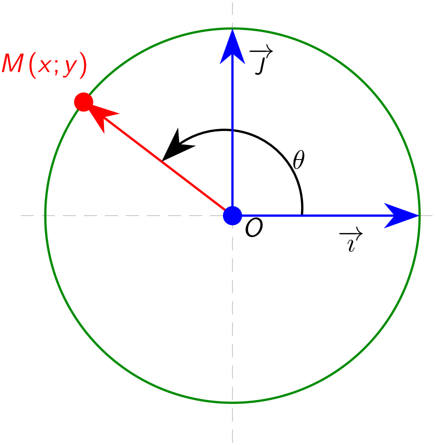
Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

Fonctions trigonométriques : définition

Définition (Le radian)

Soit M un point du cercle.
On appelle mesure θ en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ la longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$ et on note :

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right) \qquad (1)$$



Définition (Fonctions cos et sin)

Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OM}}\right)$$

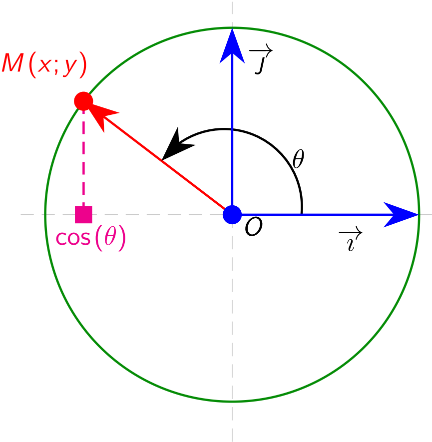
Fonctions trigonométriques : définition

Définition (Fonctions cos et sin)

Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}}\right)$$

Fonction cosinus : abscisse du point M i.e. $x = \cos(\theta)$



Fonctions trigonométriques : définition

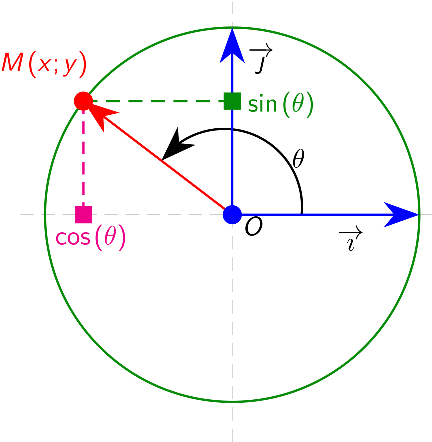
Définition (Fonctions cos et sin)

Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}}\right)$$

Fonction cosinus : abscisse du point M
i.e. $x = \cos(\theta)$

Fonction sinus : ordonnée du point M
i.e. $y = \sin(\theta)$



Fonctions trigonométriques : définition

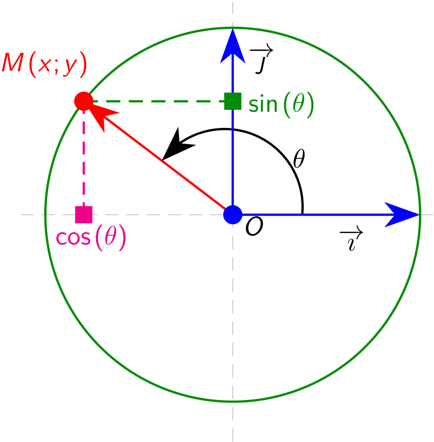
Définition (Fonctions cos et sin)

Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}}\right)$$

Fonction cosinus : abscisse du point M i.e. $x = \cos(\theta)$

Fonction sinus : ordonnée du point M i.e. $y = \sin(\theta)$



$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2=1,$$

Fonctions trigonométriques : définition

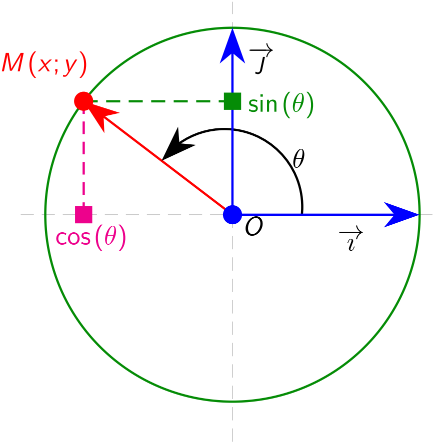
Définition (Fonctions cos et sin)

Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$$\theta = \left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}\right)$$

Fonction cosinus : abscisse du point M
i.e. $x = \cos(\theta)$

Fonction sinus : ordonnée du point M
i.e. $y = \sin(\theta)$



$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1, \quad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Fonctions trigonométriques : définition

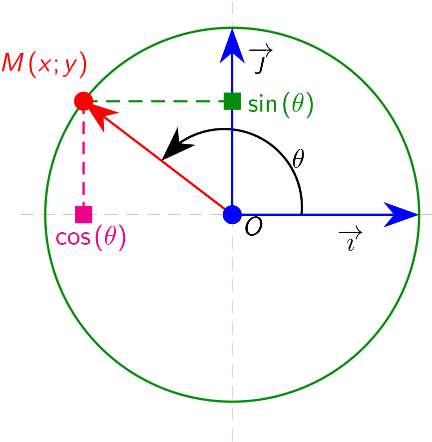
Définition (Fonctions cos et sin)

Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{OM}}\right)$

Fonction cosinus : abscisse du point M
i.e. $x = \cos(\theta)$

Fonction sinus : ordonnée du point M
i.e. $y = \sin(\theta)$



$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1}, \ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\forall \theta \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(\theta) \leq 1$

Fonctions trigonométriques : définition

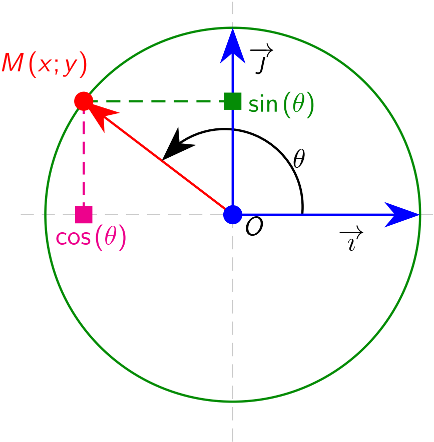
Définition (Fonctions cos et sin)

Soit $M(x;y)$ un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}}\right)$$

Fonction cosinus : abscisse du point M
i.e. $x = \cos(\theta)$

Fonction sinus : ordonnée du point M
i.e. $y = \sin(\theta)$



$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1, \quad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

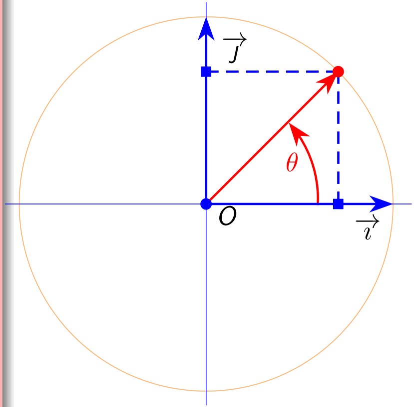
$\forall \theta \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(\theta) \leq 1, -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$

Propriétés des fonctions trigonométriques

Théorème (Relations fondamentales)

Fonctions périodiques de périodes 2π

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(\theta + 2k\pi),\, k \in \mathbb{Z} \\ \sin(\theta) &= \sin(\theta + 2k\pi),\, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{1}$$



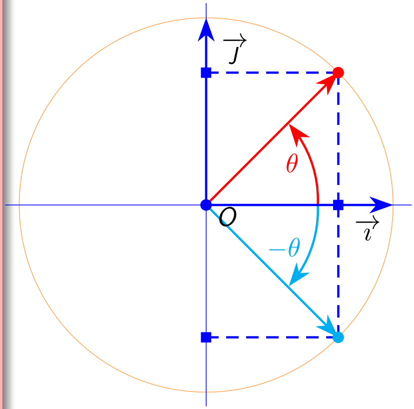
Propriétés des fonctions trigonométriques

Théorème (Relations fondamentales)

Fonctions périodiques de périodes 2π

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \\ \sin(\theta) &= \sin(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$



Propriétés des fonctions trigonométriques

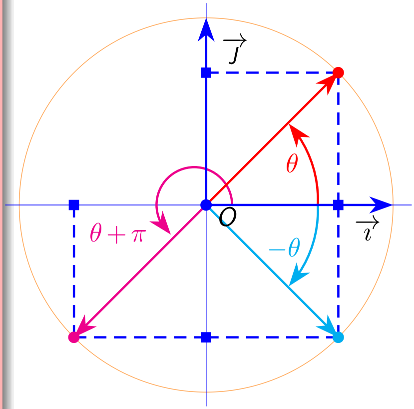
Théorème (Relations fondamentales)

Fonctions périodiques de périodes 2π

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\\ \sin(\theta) &= \sin(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\cos(-\theta) &= \cos(\theta)\\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta)\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \pi) &= -\cos(\theta)\\ \sin(\theta + \pi) &= -\sin(\theta)\end{aligned} \qquad (3)$$



Propriétés des fonctions trigonométriques

Théorème (Relations fondamentales)

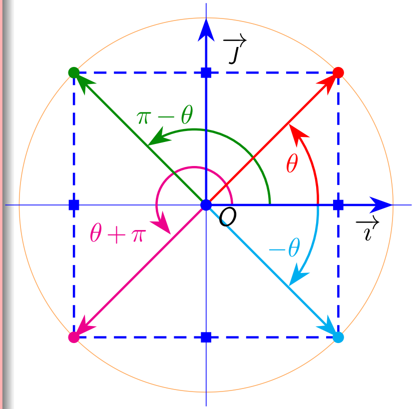
Fonctions périodiques de périodes 2π

$$\cos(\theta) = \cos(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \qquad (2)$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$$
$$\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta) \qquad (3)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \qquad (4)$$



Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
i	0	1	2	3	4	$\otimes$

Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
i	0	1	2	3	4	$\otimes$
$\sin(\theta)$	$\frac{\sqrt{i}}{2}$	$\frac{\sqrt{i}}{2}$	$\frac{\sqrt{i}}{2}$	$\frac{\sqrt{i}}{2}$	$\frac{\sqrt{i}}{2}$	$\otimes$

Etudes des fonctions trigonométriques

Pour tout réel x en radian, $\boldsymbol{\sin'(x) = \cos(x)}$

Etudes des fonctions trigonométriques

Pour tout réel x en radian, $\mathbf{\sin'(x) = \cos(x)}$

Tableau de variation de la fonction sin

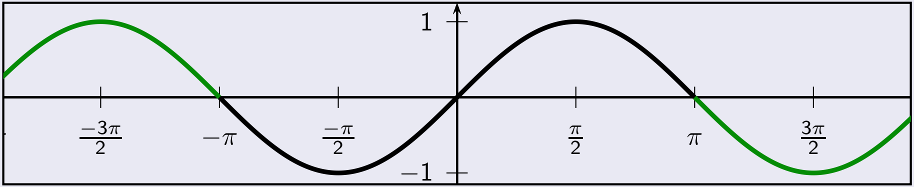
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Etudes des fonctions trigonométriques

Tableau de variation de la fonction sin

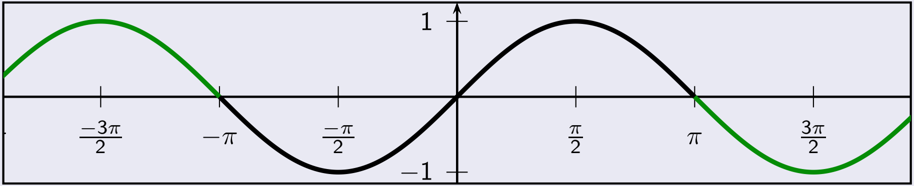
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbe représentative de la fonction sin



Etudes des fonctions trigonométriques

Courbe représentative de la fonction sin



Pour tout réel x en radian, $\mathbf{\cos'(x) = -\sin(x)}$

Etudes des fonctions trigonométriques

Pour tout réel x en radian, $\mathbf{\cos'(x) = -\sin(x)}$

Tableau de variation de la fonction cos

x	$-\pi$		0		π
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

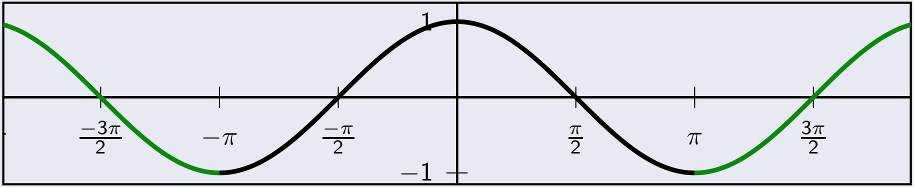
Etudes des fonctions trigonométriques

Pour tout réel x en radian, $\mathbf{\cos'(x) = -\sin(x)}$

Tableau de variation de la fonction cos

x	$-\pi$		0		π
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Courbe représentative de la fonction cos



La fonction tangente tan

Définition (Fonction tan)

$$\mathbf{tan}(x) = \frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)} \tag{5}$$

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

La fonction tangente tan

Définition (Fonction tan)

$$\mathbf{tan}(x) = \frac{\mathbf{sin}(x)}{\mathbf{cos}(x)} \tag{5}$$

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\tan(0) = 0$

La fonction tangente tan

Définition (Fonction tan)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{5}$$

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\tan(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

La fonction tangente tan

Définition (Fonction tan)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad (5)$$

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\tan(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

La fonction tangente tan

Définition (Fonction tan)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{5}$$

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\tan(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

La fonction tangente tan

Définition (Fonction tan)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{5}$$

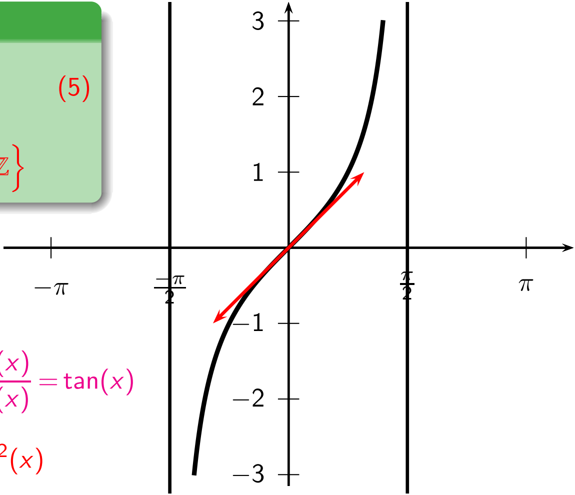
$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\tan(0) = 0$

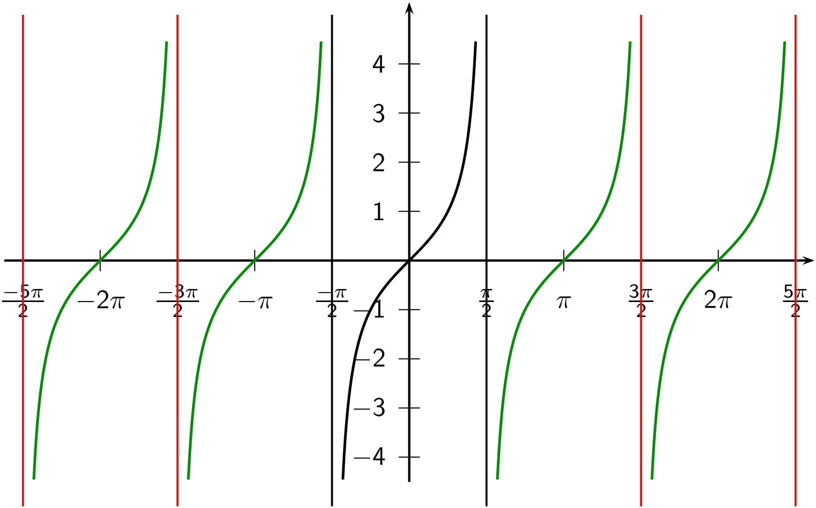
$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$



La fonction tangente tan



La fonction arctan

Définition (Fonction arctangente arctan)

La fonction arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et est la bijection réciproque de la fonction* tan *c'est-à-dire :*

$$\forall(x;y)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\times\mathbb{R},\ y=\tan(x)\Longleftrightarrow x=\arctan(y)$$

La fonction arctan

Définition (Fonction arctangente arctan)

La fonction arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et est la bijection réciproque de la fonction* tan *c'est-à-dire :*

$$\forall (x;y) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R},\ y = \tan(x) \Longleftrightarrow x = \arctan(y)$$

La fonction arctan est à la fonction tan ce que la fonction exp est à la fonction ln.

La fonction arctan

Définition (Fonction arctangente arctan)

La fonction arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et est la bijection réciproque de la fonction* tan *c'est-à-dire :*

$$\forall (x;y) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R},\ y = \tan(x) \Longleftrightarrow x = \arctan(y)$$

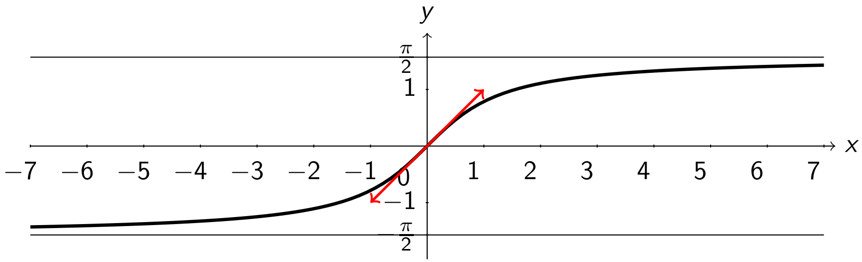
La fonction arctan est à la fonction tan ce que la fonction exp est à la fonction ln.

$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x) \neq (\tan(x))^{-1} = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan}(x)$$

La fonction arctan

$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x) \neq (\tan(x))^{-1} = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan}(x)$$

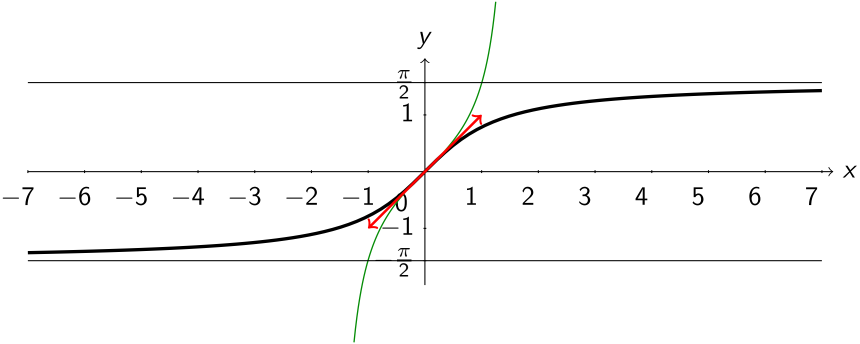
Courbe de $\arctan = \tan^{-1}$



La fonction arctan

$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x) \neq (\tan(x))^{-1} = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan}(x)$$

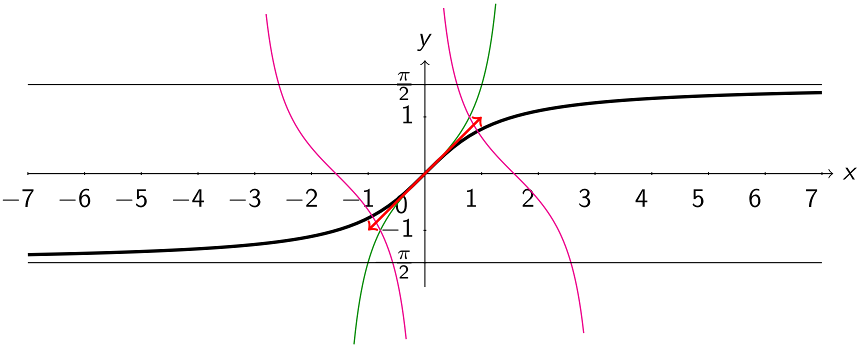
Courbe de $\arctan = \tan^{-1}$, courbe de tan,



La fonction arctan

$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x) \neq (\tan(x))^{-1} = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan}(x)$$

Courbe de arctan $= \tan^{-1}$, courbe de tan, courbe de $\dfrac{1}{\tan}$



Produit scalaire et base orthonormée

Définition (Base orthonormée)

Une base est orthonormée si tous les vecteurs sont unitaires (de norme 1*) et orthogonaux deux à deux.*

Produit scalaire et base orthonormée

Définition (Base orthonormée)

Une base est orthonormée si tous les vecteurs sont unitaires (de norme 1) et orthogonaux deux à deux.

Théorème (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ défini par :

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$	*Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$*
$\overrightarrow{u}\,(x;y)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y')$	$\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$
$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'$	$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

Produit scalaire et base orthonormée

Définition (Base orthonormée)

Une base est orthonormée si tous les vecteurs sont unitaires (de norme 1) et orthogonaux deux à deux.

Théorème (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ défini par :

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$	Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$
$\overrightarrow{u}\,(x;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x';y')$	$\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$
$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'$	$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} &= \left(x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath}\right) \bullet \left(x'\,\overrightarrow{\imath} + y'\,\overrightarrow{\jmath}\right)\\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Produit scalaire et base orthonormée

Définition (Base orthonormée)

Une base est orthonormée si tous les vecteurs sont unitaires (de norme 1*) et orthogonaux deux à deux.*

Théorème (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *est le nombre réel* $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ *défini par :*

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$	*Dans l'espace vectoriel* $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$
$\overrightarrow{u}\,(x;y)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y')$	$\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$
$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'$	$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} &= \left(x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath}\right) \bullet \left(x'\,\overrightarrow{\imath} + y'\,\overrightarrow{\jmath}\right) \\
&= x\,x'\,\underbrace{\overrightarrow{\imath}^2}_{=1} + x\,y'\,\underbrace{\overrightarrow{\imath} \bullet \overrightarrow{\jmath}}_{=0} + y\,x'\,\underbrace{\overrightarrow{\jmath} \bullet \overrightarrow{\imath}}_{=0} + y\,y'\,\underbrace{\overrightarrow{\jmath}^2}_{=1} \\
&=
\end{aligned}$$

Produit scalaire et base orthonormée

Définition (Base orthonormée)

Une base est orthonormée si tous les vecteurs sont unitaires (de norme 1) et orthogonaux deux à deux.

Théorème (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$	*Dans l'espace vectoriel* $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$
$\overrightarrow{u}\,(x;y)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y')$	$\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$
$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'$	$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} &= \left(x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath}\right) \bullet \left(x'\,\overrightarrow{\imath} + y'\,\overrightarrow{\jmath}\right) \\
&= x\,x'\,\underbrace{\overrightarrow{\imath}^2}_{=1} + x\,y'\,\underbrace{\overrightarrow{\imath} \bullet \overrightarrow{\jmath}}_{=0} + y\,x'\,\underbrace{\overrightarrow{\jmath} \bullet \overrightarrow{\imath}}_{=0} + y\,y'\,\underbrace{\overrightarrow{\jmath}^2}_{=1} \\
&= x\,x' + y\,y' \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Produit scalaire et base orthonormée

Théorème (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$	*Dans l'espace vectoriel* $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$
$\overrightarrow{u}\,(x;y)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y')$	$\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$
$\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}=x\,x'+y\,y'$	$\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}=x\,x'+y\,y'+z\,z'$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v} &= \left(x\,\overrightarrow{\imath}+y\,\overrightarrow{\jmath}\right)\bullet\left(x'\,\overrightarrow{\imath}+y'\,\overrightarrow{\jmath}\right)\\ &= x\,x'\underbrace{\overrightarrow{\imath}^{2}}_{=1}+x\,y'\underbrace{\overrightarrow{\imath}\bullet\overrightarrow{\jmath}}_{=0}+y\,x'\underbrace{\overrightarrow{\jmath}\bullet\overrightarrow{\imath}}_{=0}+y\,y'\underbrace{\overrightarrow{\jmath}^{2}}_{=1}\\ &= x\,x'+y\,y'\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Théorème (Symétrie du produit scalaire)

Pour tout couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$: $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{u}$

Norme dans une base orthonormée

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.
La norme de $\overrightarrow{u}$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}} = \sqrt{\overrightarrow{u}^2} \in \mathbb{R}^+$$

Norme dans une base orthonormée

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.
La norme de $\overrightarrow{u}$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}} = \sqrt{\overrightarrow{u}^2} \in \mathbb{R}^+$$

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

$$\boxed{\overrightarrow{u}\,(x;y),\ \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Norme dans une base orthonormée

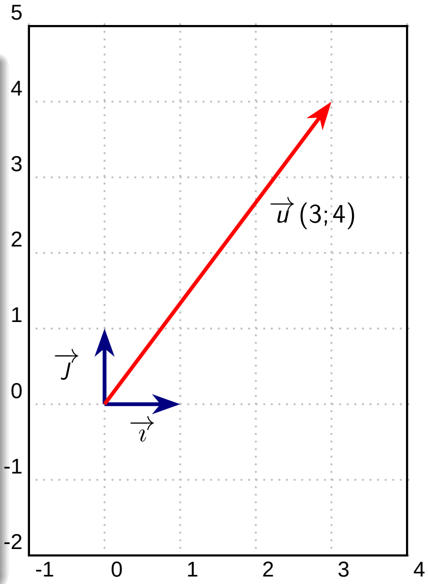
Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.
La norme de $\overrightarrow{u}$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}} = \sqrt{\overrightarrow{u}^2} \in \mathbb{R}^+$$

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

$$\overrightarrow{u}\,(x;y),\ \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$



Norme dans une base orthonormée

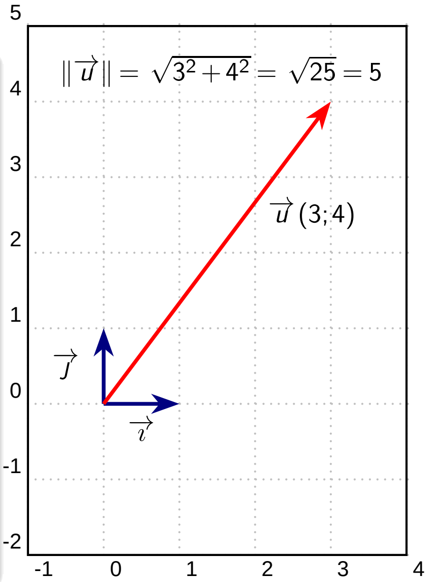
Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.
La norme de $\overrightarrow{u}$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}} = \sqrt{\overrightarrow{u}^2} \in \mathbb{R}^+$$

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

$$\overrightarrow{u}\,(x;y),\ \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$



Norme dans une base orthonormée

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.
La norme de $\overrightarrow{u}$ est :

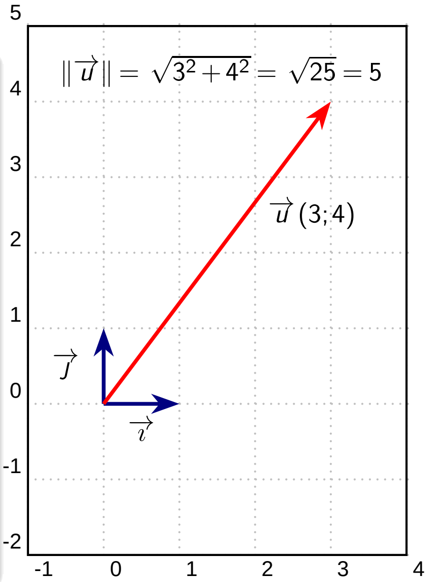
$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}} = \sqrt{\overrightarrow{u}^2} \in \mathbb{R}^+$$

Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

$$\overrightarrow{u}\,(x;y),\ \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

$$\overrightarrow{u}\,(x;y;z),\ \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



Dans la suite, les bases $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ et $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$ et repères $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ et $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$ sont orthonormés directs.

Composantes d'un vecteur

Pour tout point O, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Composantes d'un vecteur

Pour tout point O, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Proposition (Coordonnées et composantes)

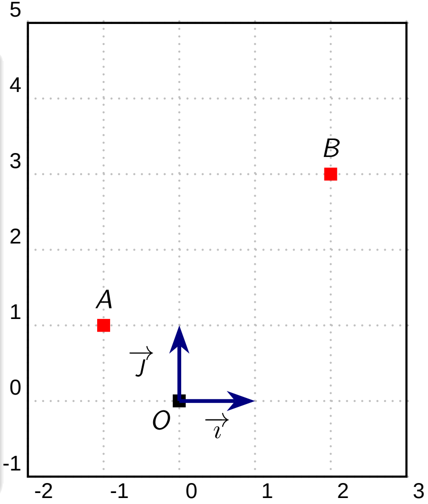
Dans le plan affine $\mathcal{P}$
$A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Composantes d'un vecteur

Pour tout point O, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Proposition (Coordonnées et composantes)

Dans le plan affine $\mathcal{P}$
$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

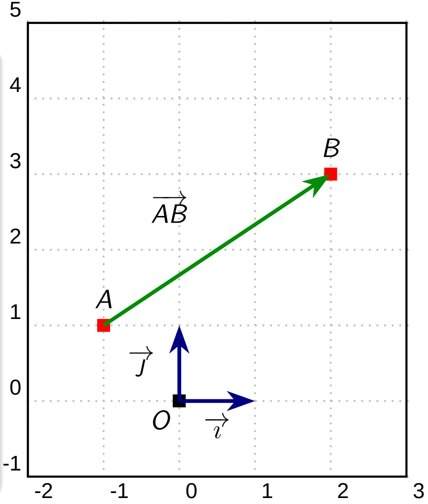


Composantes d'un vecteur

Pour tout point O, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Proposition (Coordonnées et composantes)

Dans le plan affine $\mathcal{P}$
$A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

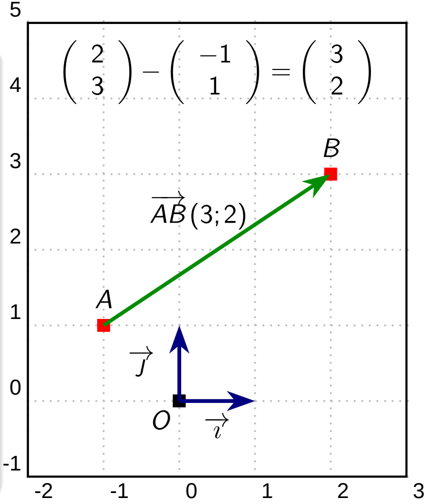


Composantes d'un vecteur

Pour tout point O, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Proposition (Coordonnées et composantes)

Dans le plan affine $\mathcal{P}$
$A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

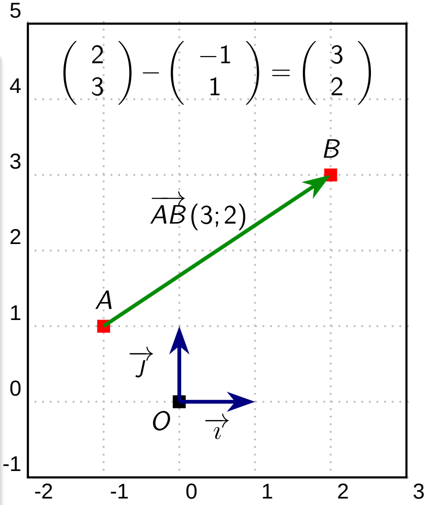


Composantes d'un vecteur

Pour tout point O, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Proposition (Coordonnées et composantes)

Dans le plan affine $\mathcal{P}$
$A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$
Dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$
$A(x_A; y_A; z_A)$ *et* $B(x_B; y_B; z_B)$
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$



Distances dans un repère orthonormé

Définition (Distance entre deux points)

Soit A et B deux points. La distance entre A et B est : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}}$

Distances dans un repère orthonormé

Définition (Distance entre deux points)

Soit A et B deux points. La distance entre A et B est : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}}$

Dans le plan affine $\mathcal{P}$

$A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Distances dans un repère orthonormé

Définition (Distance entre deux points)

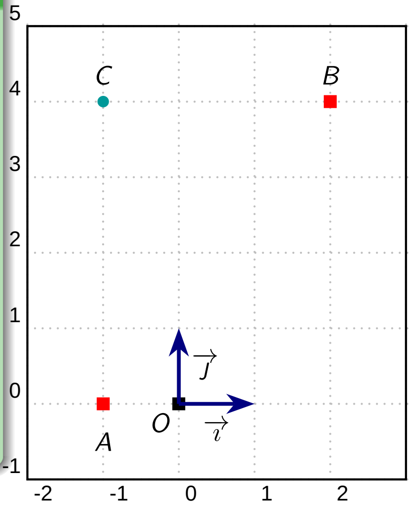
Soit A et B deux points. La distance entre A et B est : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}}$

Dans le plan affine $\mathcal{P}$

$A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Distances dans un repère orthonormé

Définition (Distance entre deux points)

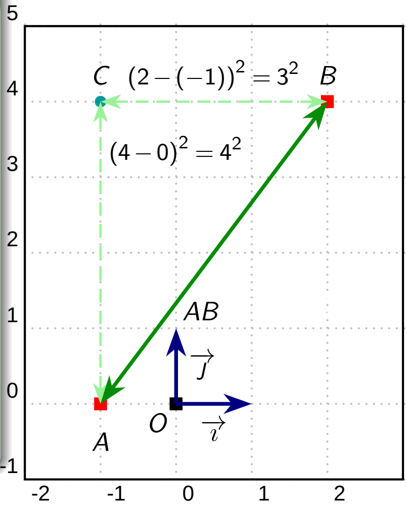
Soit A et B deux points. La distance entre A et B est : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}}$

Dans le plan affine $\mathcal{P}$

$A(x_A ; y_A)$ *et* $B(x_B ; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C

Distances dans un repère orthonormé

Définition (Distance entre deux points)

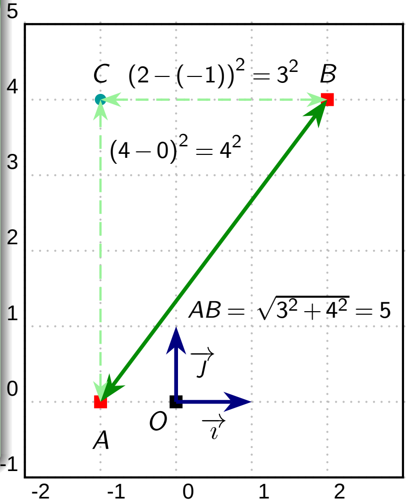
Soit A et B deux points. La distance entre A et B est : $AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}}$

Dans le plan affine $\mathcal{P}$

$A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C

Distances dans un repère orthonormé

Définition (Distance entre deux points)

Soit A et B deux points. La distance entre A et B est : $AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}}$

Dans le plan affine $\mathcal{P}$

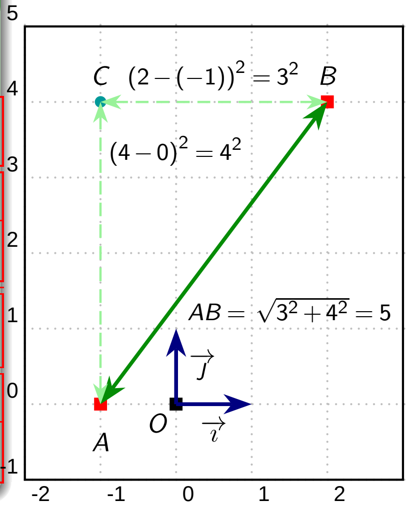
$A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$

$A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$



Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C

Vecteurs orthogonaux

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Alors :

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{u} \right\| \times \left\| \overrightarrow{v} \right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}}\right)$$

Vecteurs orthogonaux

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Alors :

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{u} \right\| \times \left\| \overrightarrow{v} \right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v}} \right)$$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ssi $\left(\widehat{\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{v}} \right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$

Vecteurs orthogonaux

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Alors :

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{u} \right\| \times \left\| \overrightarrow{v} \right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}} \right)$$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ssi $\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}} \right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0$

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0 \Longleftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}} \right) = 0 \Longleftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}} \right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Vecteurs colinéaires

Notation

Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}\left(x';y'\right)$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors :

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - x' \times y = -\det\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right)$$

Vecteurs colinéaires

Notation

Soit $\overrightarrow{u}\,(x;y)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y')$ *deux vecteurs non nuls du plan. Alors :*

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=x\times y'-x'\times y=-\det\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right)$$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls du plan. Alors :*

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\times\left\|\overrightarrow{v}\right\|\times\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$$

Vecteurs colinéaires

Notation

Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}\left(x';y'\right)$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors :

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=x\times y'-x'\times y=-\det\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right)$$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors :

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\times\left\|\overrightarrow{v}\right\|\times\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=0$ *(les composantes sont dans une situation de proportionnalité).*

Vecteurs colinéaires

Notation

Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ *et* $\overrightarrow{v}\left(x';y'\right)$ *deux vecteurs non nuls du plan. Alors :*

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=x\times y'-x'\times y=-\det\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right)$$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls du plan. Alors :*

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\times\left\|\overrightarrow{v}\right\|\times\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$$

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls du plan. Alors* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires ssi* $\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=0$ *(les composantes sont dans une situation de proportionnalité).*

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=0\Longleftrightarrow\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)=0\Longleftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)\equiv 0\ [\pi]$$

Equation de droite, un point et un vecteur directeur

Une droite est définie par deux points ou un point et un vecteur.

Equation de droite, un point et un vecteur directeur

Une droite est définie par deux points ou un point et un vecteur.

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur directeur)

Soit $A(x_A; y_A)$ *un point du plan affine et* $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ *un vecteur directeur de la droite* Δ.
Soit $M(x; y)$, *Alors* $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$.

Equation de droite, un point et un vecteur directeur

Une droite est définie par deux points ou un point et un vecteur.

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur directeur)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ un vecteur directeur de la droite Δ.
Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$.
La droite Δ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Ainsi :

Equation de droite, un point et un vecteur directeur

Une droite est définie par deux points ou un point et un vecteur.

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur directeur)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ un vecteur directeur de la droite Δ.
Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$.
La droite Δ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Ainsi :

- *Une équation paramétrique de Δ est définie par $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}$, $t \in \mathbb{R}$ i.e.*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + t\,x_u \\ y & = & y_A + t\,y_u \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

Equation de droite, un point et un vecteur directeur

Une droite est définie par deux points ou un point et un vecteur.

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur directeur)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ un vecteur directeur de la droite Δ.
Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$.
La droite Δ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Ainsi :

- *Une équation paramétrique de Δ est définie par $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}$, $t \in \mathbb{R}$ i.e.*

$$\begin{cases} x &= x_A + t\,x_u \\ y &= y_A + t\,y_u \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- *Une équation implicite (ou cartésienne) de Δ est définie par* $\det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}\right) = 0$ *i.e.*

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y_u x - x_u y - y_u x_A + x_u y_A = 0$$

Equation de droite, réduite ou non

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts. Pour déterminer une équation de la droite (AB), nous remplaçons $\overrightarrow{u}(x_u;y_u)$ par $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

Equation de droite, réduite ou non

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts. Pour déterminer une équation de la droite (AB), nous remplaçons $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ par $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Proposition

Soit l'équation

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

Equation de droite, réduite ou non

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts. Pour déterminer une équation de la droite (AB), nous remplaçons $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ par $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Proposition

Soit l'équation

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

- *Si* $b = 0$ *alors la droite est verticale et son équation est* $x = -\frac{c}{a}$ *;*
-

Equation de droite, réduite ou non

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts. Pour déterminer une équation de la droite (AB), nous remplaçons $\overrightarrow{u}(x_u; y_u)$ par $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Proposition

Soit l'équation

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a; b) \neq (0; 0)$.

- *Si $b = 0$ alors la droite est verticale et son équation est $x = -\frac{c}{a}$;*
- *Si $b \neq 0$ alors la droite n'est pas verticale et son équation réduite est $y = mx + p$ avec $m = -\dfrac{a}{b}$, appelé pente, et $p = -\dfrac{c}{b}$, appelé ordonnée à l'origine.*

Equation de droite, réduite ou non

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts. Pour déterminer une équation de la droite (AB), nous remplaçons $\overrightarrow{u}(x_u;y_u)$ par $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

Proposition

Soit l'équation

$$ax+by+c=0$$

avec $(a;b)\neq(0;0)$.

- *Si $b=0$ alors la droite est verticale et son équation est $x=-\frac{c}{a}$;*
- *Si $b\neq 0$ alors la droite n'est pas verticale et son équation réduite est $y=mx+p$ avec $m=-\dfrac{a}{b}$, appelé pente, et $p=-\dfrac{c}{b}$, appelé ordonnée à l'origine.*

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan affine. Alors :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

appelé aussi taux d'accroissement

Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite.
Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$.

Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ *un point du plan affine et* $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ *un vecteur normal à la droite.*
Soit $M(x; y)$*, Alors* $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$*. La droite* (AB) *est l'ensemble des points* M *tels que* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{N}$ *sont orthogonaux.*

Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ *un point du plan affine et* $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ *un vecteur normal à la droite. Soit* $M(x; y)$*, Alors* $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$*. La droite* (AB) *est l'ensemble des points* M *tels que* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{N}$ *sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite* (AB) *est définie par* $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ *i.e.*

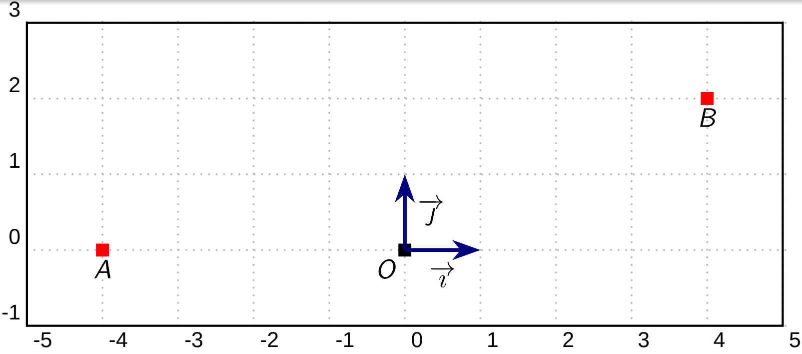
$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A;y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N;y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x;y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x-x_A)+y_N(y-y_A)=0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

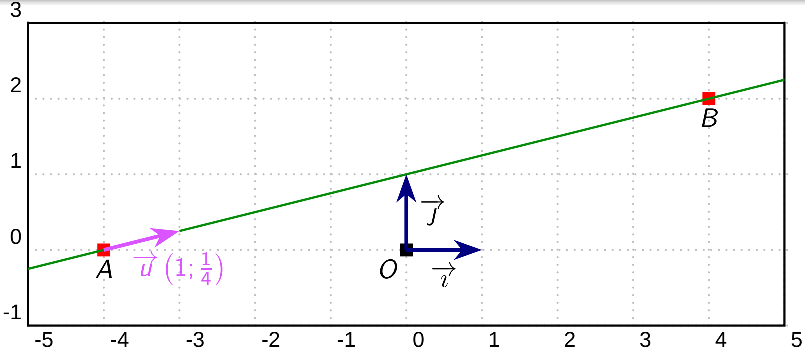


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

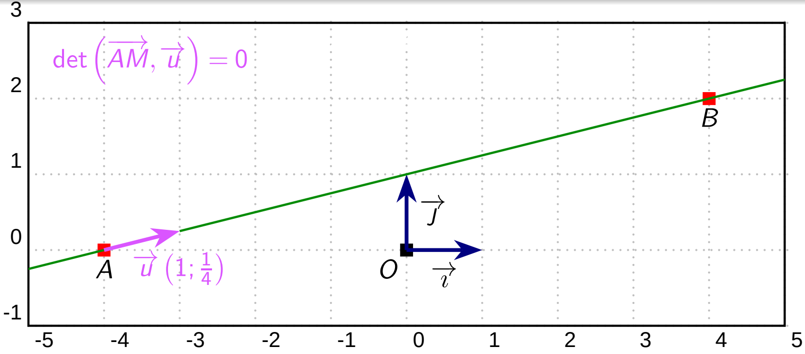


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

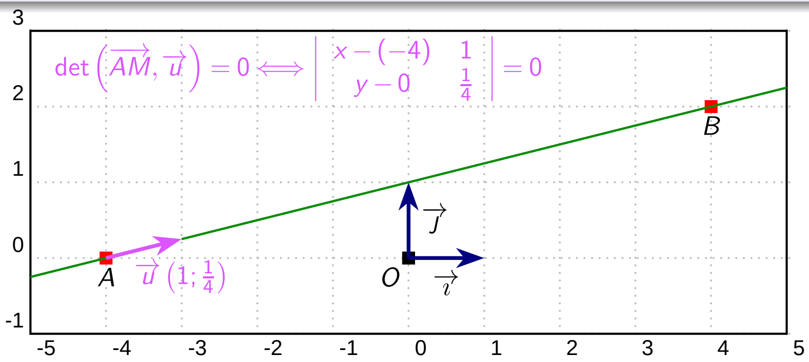


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A;y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N;y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x;y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}=0$ i.e.

$$x_N(x-x_A)+y_N(y-y_A)=0 \iff x_N x+y_N y-(x_N x_A+y_N y_A)=0$$

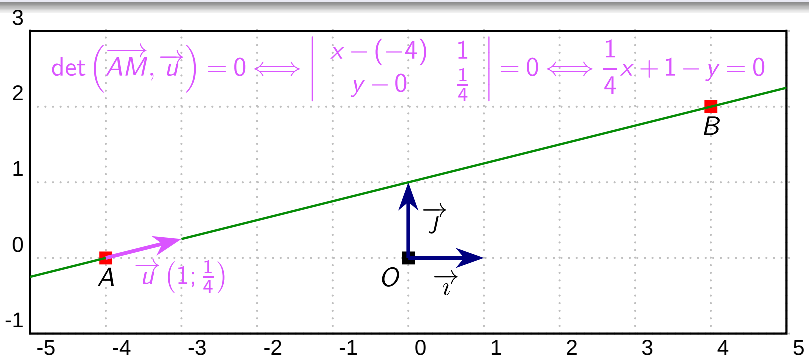


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

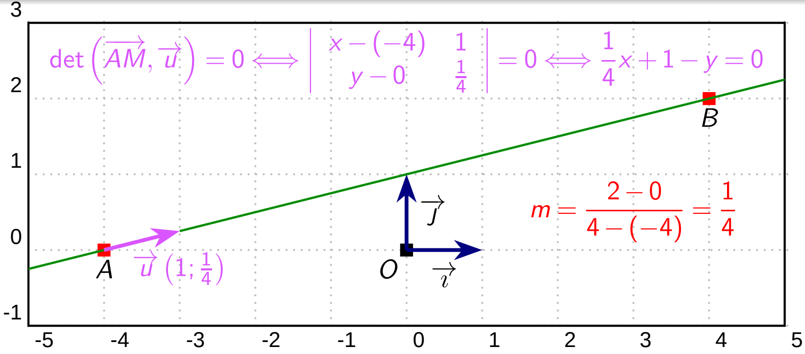


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

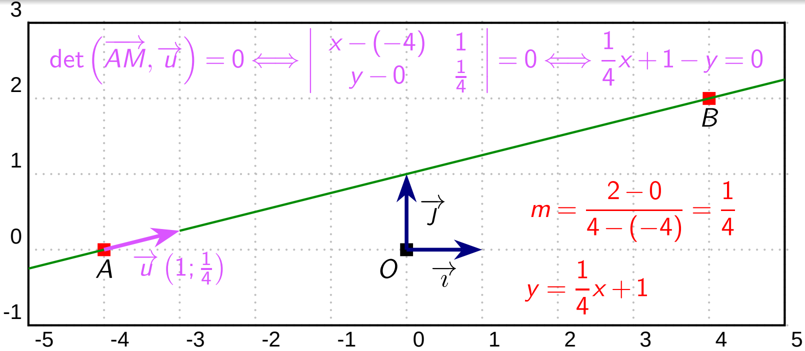


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

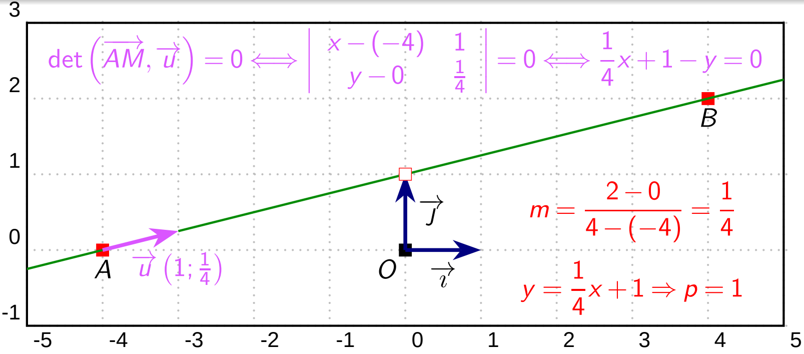


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A;y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N;y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x;y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x-x_A)+y_N(y-y_A)=0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

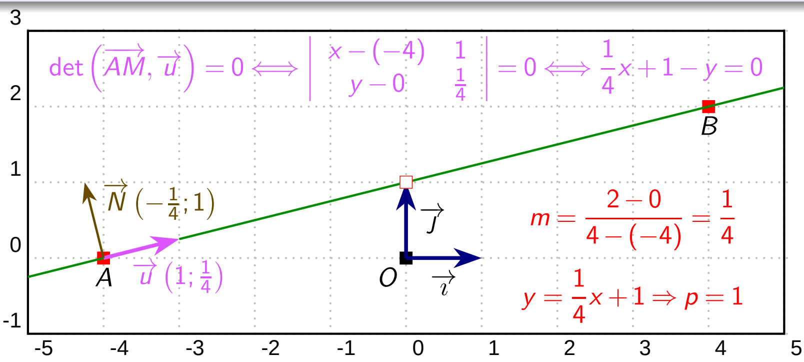


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A;y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N;y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x;y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}=0$ i.e.

$$x_N(x-x_A)+y_N(y-y_A)=0 \Longleftrightarrow x_N x+y_N y-(x_N x_A+y_N y_A)=0$$

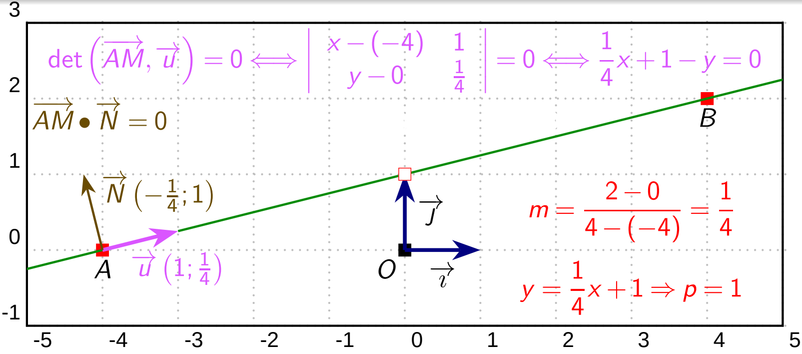


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \iff x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

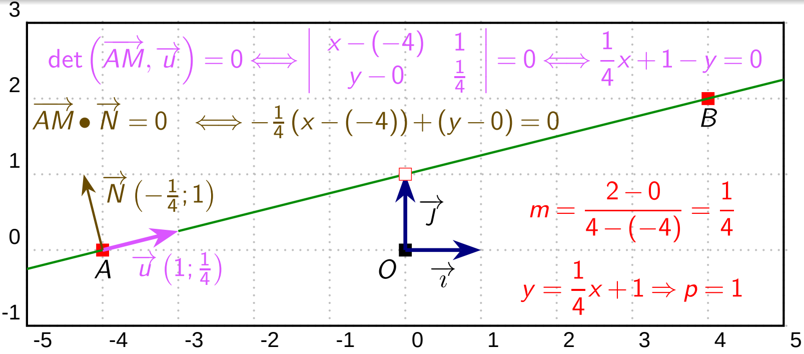


Equation de droite et vecteur normal

Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A; y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N; y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x; y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x - x_A) + y_N(y - y_A) = 0 \Longleftrightarrow x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$

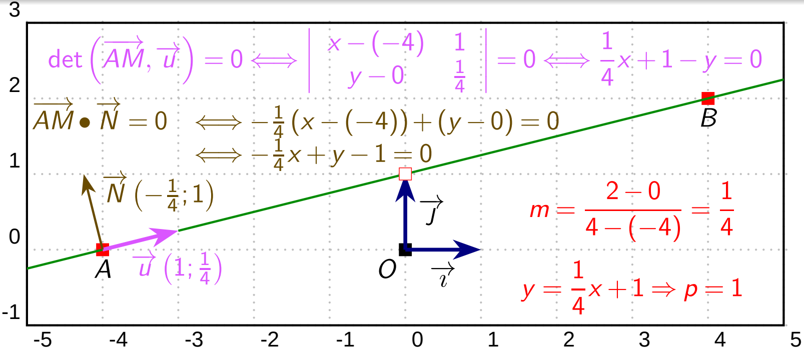


Equation de droite et vecteur normal

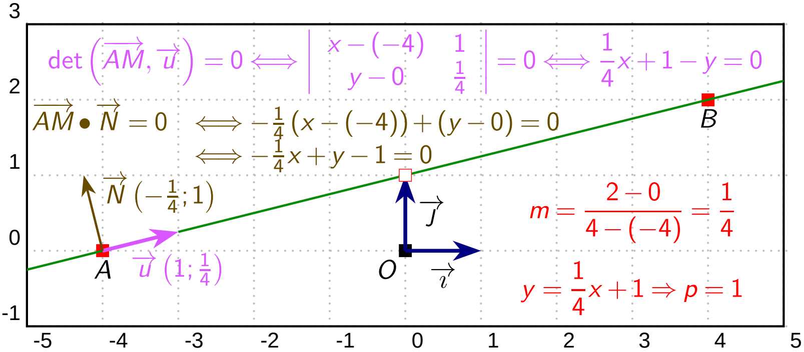
Proposition (Droite définie par un point et un vecteur normal)

Soit $A(x_A;y_A)$ un point du plan affine et $\overrightarrow{N}(x_N;y_N)$ un vecteur normal à la droite. Soit $M(x;y)$, Alors $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont orthogonaux. Une équation implicite (ou cartésienne) de la droite (AB) est définie par $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ i.e.

$$x_N(x-x_A)+y_N(y-y_A)=0 \iff x_N x + y_N y - (x_N x_A + y_N y_A) = 0$$



Equation de droite et vecteur normal

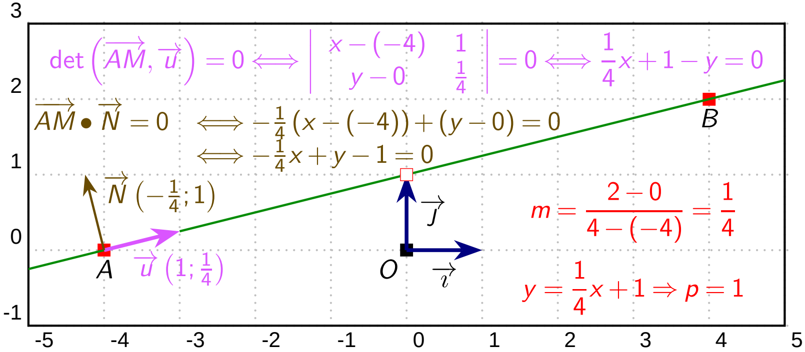


Deux équations différentes :

$$\frac{1}{4}x - y + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + y - 1 = 0$$

Equation de droite et vecteur normal



Deux équations différentes :

$$\frac{1}{4}x - y + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x + y - 1 = 0$$

Droite orientée : régionnement du plan

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

Soit Δ *la droite d'équation* $ax + by + c = 0$. *Soit* A *un point de* Δ *et* $\overrightarrow{N}(a; b)$ *le vecteur normal à la droite « induit » par son équation.*

L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$ *est le demi-plan fermé de frontière la droite* (AB) *défini par l'ensemble des points* M *tels que* $\overrightarrow{HM}$ *et* $\overrightarrow{N}$ *soient de même sens où* H *est le projeté orthogonal de* M *sur* Δ *.*

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

Soit Δ la droite d'équation $ax+by+c=0$. Soit A un point de Δ et $\overrightarrow{N}(a;b)$ le vecteur normal à la droite « induit » par son équation.

L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

Soit Δ la droite d'équation $ax+by+c=0$. Soit A un point de Δ et $\overrightarrow{N}(a;b)$ le vecteur normal à la droite « induit » par son équation.

L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

Soit Δ la droite d'équation $ax+by+c=0$. Soit A un point de Δ et $\overrightarrow{N}(a;b)$ le vecteur normal à la droite « induit » par son équation.
L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

$$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0 \iff \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$$

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

Soit Δ la droite d'équation $ax+by+c=0$. Soit A un point de Δ et $\overrightarrow{N}(a;b)$ le vecteur normal à la droite « induit » par son équation.
L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

$$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0 \iff \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\bullet\overrightarrow{N}\geq 0 \iff \underbrace{\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{N}}_{=0}+\overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0$$

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

Soit Δ la droite d'équation $ax+by+c=0$. Soit A un point de Δ et $\overrightarrow{N}(a;b)$ le vecteur normal à la droite « induit » par son équation.

L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

$$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0 \iff \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\bullet\overrightarrow{N}\geq 0 \iff \underbrace{\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{N}}_{=0}+\overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0$$

$\iff \overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires et de même sens

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

Soit Δ la droite d'équation $ax+by+c=0$. Soit A un point de Δ et $\overrightarrow{N}\,(a;b)$ le vecteur normal à la droite « induit » par son équation.
L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

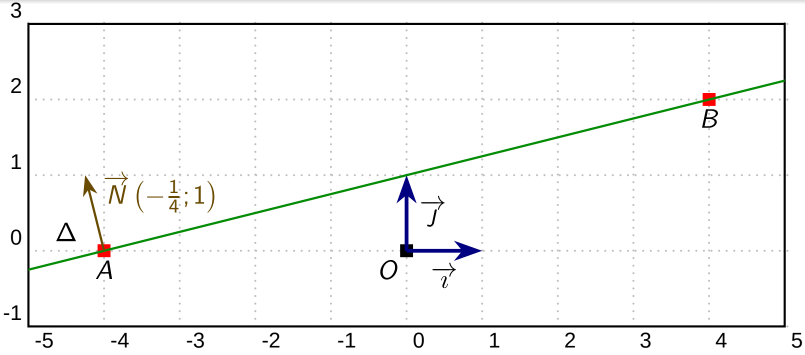
$$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0 \iff \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\bullet\overrightarrow{N}\geq 0 \iff \underbrace{\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{N}}_{=0}+\overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{N}\geq 0$$

$\iff$ $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires et de même sens
$\iff \exists k\in\mathbb{R}^+ \,|\, \overrightarrow{HM}=k\,\overrightarrow{N}$

Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

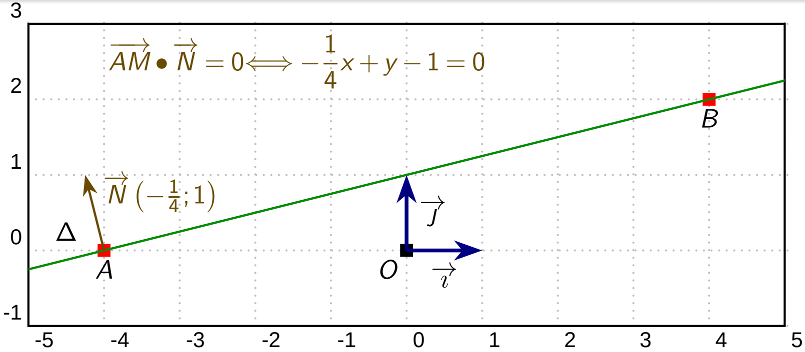
.
L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$ *est le demi-plan fermé de frontière la droite* (AB) *défini par l'ensemble des points* M *tels que* $\overrightarrow{HM}$ *et* $\overrightarrow{N}$ *soient de même sens où* H *est le projeté orthogonal de* M *sur* Δ *.*



Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

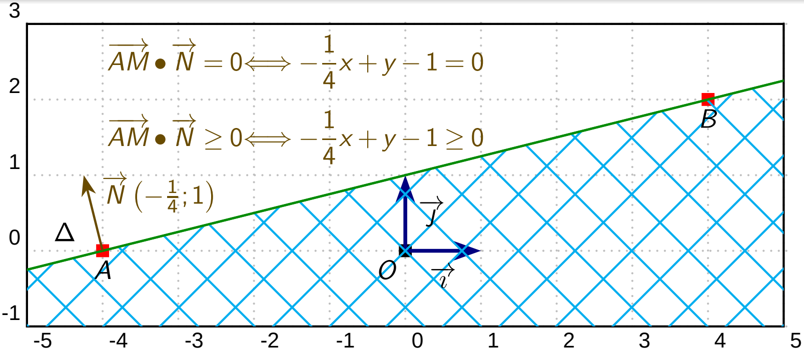
.
L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .



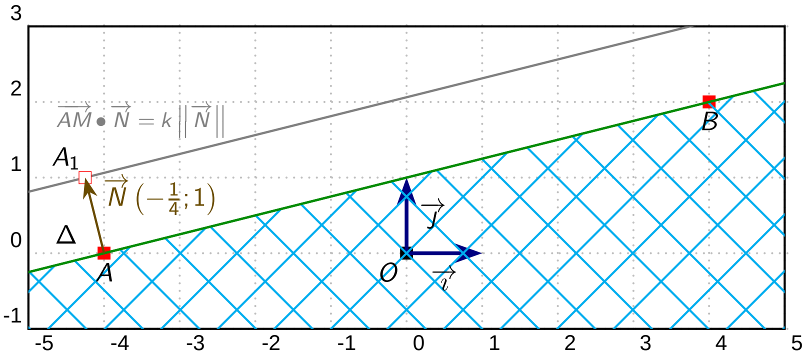
Droite orientée et régionnement du plan

Proposition (Droite orientée et demi-plan)

.
L'ensemble des points vérifiant $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} \geq 0$ est le demi-plan fermé de frontière la droite (AB) défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{N}$ soient de même sens où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .



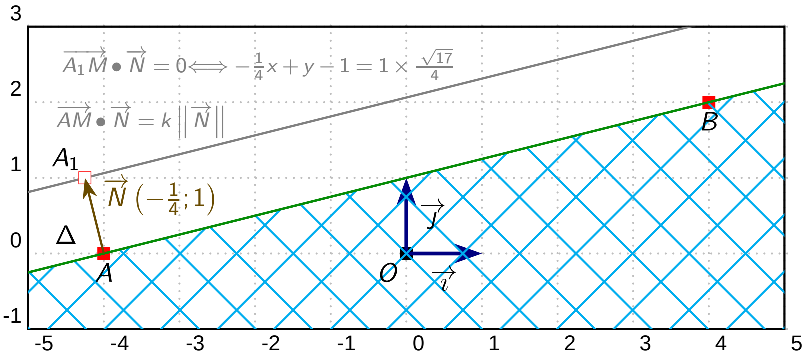
Droite orientée et régionnement du plan



Proposition (Ligne de niveau)

Soit $A \in \Delta$ et k un nombre réel. Soit A_1 le point défini par $\overrightarrow{AA_1} = k\,\overrightarrow{N}$.

Droite orientée et régionnement du plan



Proposition (Ligne de niveau)

Soit $A \in \Delta$ et k un nombre réel. Soit A_1 le point défini par $\overrightarrow{AA_1} = k\overrightarrow{N}$. Alors la droite passant par A_1 et parallèle à Δ est l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{N} = k \left\| \overrightarrow{N} \right\|$ (mais aussi $\overrightarrow{A_1M} \bullet \overrightarrow{N} = 0$ évidemment).

Définition du produit vectoriel, noté $\times$ ou $\wedge$

Ne pas remplacer $\times$ par $\bullet$ (le produit vectoriel n'est pas un produit scalaire)

Définition du produit vectoriel, noté $\times$ ou $\wedge$

Ne pas remplacer $\times$par $\bullet$ (le produit vectoriel n'est pas un produit scalaire)

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.

Définition du produit vectoriel, noté $\times$ ou $\wedge$

Ne pas remplacer $\times$par $\bullet$ (le produit vectoriel n'est pas un produit scalaire)

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.

1. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*

Définition du produit vectoriel, noté $\times$ ou $\wedge$

Ne pas remplacer $\times$par $\bullet$ (le produit vectoriel n'est pas un produit scalaire)

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.

1. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*
2. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires :*
    1. *La direction de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est la direction orthogonale au plan déterminé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Définition du produit vectoriel, noté $\times$ ou $\wedge$

Ne pas remplacer $\times$par $\bullet$ (le produit vectoriel n'est pas un produit scalaire)

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.

1. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*
2. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires :*
   1. *La direction de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est la direction orthogonale au plan déterminé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*
   2. *Le sens de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est donné par la règle de la main droite.*
   3. $\left\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right\| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)\right|$

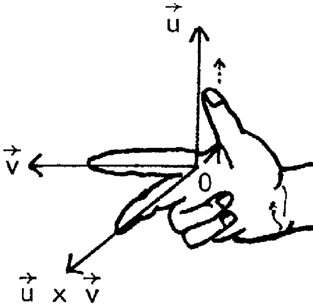


FIGURE – Règle de la main droite

Définition du produit vectoriel, noté $\times$ ou $\wedge$

Ne pas remplacer $\times$par $\bullet$ (le produit vectoriel n'est pas un produit scalaire)

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$.

1. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.*
2. *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires :*
   1. *La direction de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est la direction orthogonale au plan déterminé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*
   2. *Le sens de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est donné par la règle de la main droite.*
   3. $\left\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right\| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)\right|$

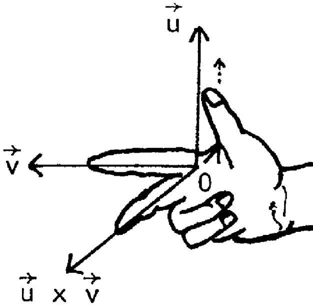


FIGURE – Règle de la main droite

$$\det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right) : \text{Canada Dry de } \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$$

Propriétés du produit vectoriel

Si la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormée directe alors $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{\imath}\times\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\imath}=\overrightarrow{\jmath}\times\overrightarrow{k}$, et $\overrightarrow{\jmath}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{\imath}$.

Propriétés du produit vectoriel

Si la base $\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$ est orthonormée directe alors $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{\imath} \times \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{\jmath} \times \overrightarrow{k}$, et $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{\imath}$.

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. Les propriétés du produit vectoriel sont :

1. *anti-commutativité : $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.*

Propriétés du produit vectoriel

Si la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormée directe alors $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{\imath}\times\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\imath}=\overrightarrow{\jmath}\times\overrightarrow{k}$, et $\overrightarrow{\jmath}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{\imath}$.

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. Les propriétés du produit vectoriel sont :

1. *anti-commutativité :* $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}$.
2. *distributivité :* $\overrightarrow{u}\times\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}$ *et* $\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)\times\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}$.

Propriétés du produit vectoriel

Si la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormée directe alors $\overrightarrow{k}=\overrightarrow{\imath}\times\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\imath}=\overrightarrow{\jmath}\times\overrightarrow{k}$, et $\overrightarrow{\jmath}=\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{\imath}$.

Proposition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. Les propriétés du produit vectoriel sont :

1. *anti-commutativité :* $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}$.
2. *distributivité :* $\overrightarrow{u}\times\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}$ *et* $\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)\times\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}$.
3. *multiplication par un scalaire :*

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{u}\times\left(\lambda.\overrightarrow{w}\right)=\left(\lambda.\overrightarrow{u}\right)\times\overrightarrow{w}=\lambda.\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}\right)$$

Produit vectoriel et déterminant

Théorème

Si, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ *orthonormée directe, nous avons* $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$*, alors :*

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right) \tag{5}$$

Produit vectoriel et déterminant

Théorème

Si, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ *orthonormée directe, nous avons* $\overrightarrow{u}\,(x;y;z)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x';y';z')$*, alors :*

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right) \tag{5}$$

Un moyen mnémotechnique est d'écrire le déterminant sous la forme d'un **déterminant** 3×3 et de le développer par rapport à la première colonne :

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & x & x' \\ \overrightarrow{\jmath} & y & y' \\ \overrightarrow{k} & z & z' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{\imath}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\overrightarrow{\jmath}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \tag{6}$$

Exemple : déterminant 3×3

On commence par la matrice de signe

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Exemple : déterminant 3×3

On commence par la matrice de signe

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

puis :

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ \boldsymbol{d} & e & f \\ \boldsymbol{g} & h & i \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - \boldsymbol{d}\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + \boldsymbol{g}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Exemple : déterminant 3×3

On commence par la matrice de signe

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

puis :

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ \boldsymbol{d} & e & f \\ \boldsymbol{g} & h & i \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - \boldsymbol{d}\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + \boldsymbol{g}\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\boldsymbol{d}\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - \boldsymbol{f}\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur unitaire du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur unitaire du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$.

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur unitaire du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$. La base $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)$ est orthonormée directe pour l'orientation du plan définie par le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur unitaire du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$. La base $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)$ est orthonormée directe pour l'orientation du plan définie par le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Corollaire (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\left\|\overrightarrow{e_1}\right\| = 1$.

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur unitaire du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$. La base $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)$ est orthonormée directe pour l'orientation du plan définie par le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Corollaire (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\left\|\overrightarrow{e_1}\right\| = 1$.
Soit $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\right\|}\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$.

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur unitaire du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$. La base $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)$ est orthonormée directe pour l'orientation du plan définie par le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Corollaire (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\left\|\overrightarrow{e_1}\right\| = 1$.
Soit $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\right\|}\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$. Soit $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$.

Orientation d'un plan de l'espace

Dans le plan, l'orientation est canonique (cf. définition du radian).
Dans l'espace, l'orientation d'un plan n'est plus intrinsèque : tout dépend de la façon dont on le regarde i.e. l'orientation d'un plan $\mathcal{P}$ est donné par un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Théorème (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur unitaire du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$. La base $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)$ est orthonormée directe pour l'orientation du plan définie par le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Corollaire (Construction d'une base directe d'un plan orienté)

Soit $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs non colinéaires du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\left\|\overrightarrow{e_1}\right\| = 1$.
Soit $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\right\|}\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$. Soit $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{e_1}$. La base $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_3}\right)$ est orthonormée directe pour l'orientation du plan définie par le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N}$.

Produit mixte

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ dans une base orthonormée.
Le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est :

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\right) \tag{7}$$

Produit mixte

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ dans une base orthonormée. Le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est :

$$\det\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\right) \tag{7}$$

Remarque

Quels que soient les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$, nous avons :

$$\overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{v} \bullet \left(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{w} \bullet \left(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right)$$

Produit mixte

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ dans une base orthonormée. Le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est :

$$\det\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\,;\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\right) \tag{7}$$

Remarque

Quels que soient les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$, nous avons :

$$\overrightarrow{u} \bullet \left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{v} \bullet \left(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{w} \bullet \left(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\right)$$

Théorème

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ssi :

$$\det\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\,;\overrightarrow{w}\right) = 0$$

Exemple

Exemple

Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$

Exemple

Exemple

Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$

Nous avons $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$. $M(x;y;z) \in \mathcal{P}$ ssi $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$

Exemple

Exemple

Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$

Nous avons $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$. $M(x;y;z) \in \mathcal{P}$ ssi $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z-1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$x+y+z-1=0$

Exemple

Exemple

Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$

Nous avons $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$. $M(x;y;z) \in \mathcal{P}$ ssi $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z-1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$x+y+z-1=0$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & -1 & -1 \\ \overrightarrow{\jmath} & 1 & 0 \\ \overrightarrow{k} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

Exemple

Exemple

Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$

Nous avons $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$. $M(x;y;z) \in \mathcal{P}$ ssi $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$

$$\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z-1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$x+y+z-1=0$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & -1 & -1 \\ \overrightarrow{\jmath} & 1 & 0 \\ \overrightarrow{k} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}(1;1;1) \rightleftharpoons x+y+z-1=0$$

Produit scalaire vs produit vectoriel

Produit scalaire (le résultat est un nombre réel) :

Produit scalaire vs produit vectoriel

Produit **scalaire (le résultat est un nombre réel)** : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} 0$;

Produit scalaire vs produit vectoriel

Produit scalaire (le résultat est un nombre réel) : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} 0$; imposer qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ soit orthogonal à un vecteur donné $\overrightarrow{u}$ via la résolution de $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{x} = 0$

Produit scalaire vs produit vectoriel

Produit scalaire (le résultat est un nombre réel) : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} 0$; imposer qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ soit orthogonal à un vecteur donné $\overrightarrow{u}$ via la résolution de $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{x} = 0$

Produit vectoriel (le résultat est un vecteur) :

Produit scalaire vs produit vectoriel

Produit scalaire (le résultat est un nombre réel) : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} 0$; imposer qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ soit orthogonal à un vecteur donné $\overrightarrow{u}$ via la résolution de $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{x} = 0$

Produit vectoriel (le résultat est un vecteur) : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{0}$;

Produit scalaire vs produit vectoriel

Produit **scalaire (le résultat est un nombre réel)** : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} 0$; imposer qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ soit orthogonal à un vecteur donné $\overrightarrow{u}$ via la résolution de $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{x} = 0$

Produit **vectoriel (le résultat est un vecteur)** : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{0}$; construire un vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires donnés via $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$

Produit scalaire vs produit vectoriel

Produit scalaire (le résultat est un nombre réel) : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} 0$; imposer qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ soit orthogonal à un vecteur donné $\overrightarrow{u}$ via la résolution de $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{x} = 0$

Produit vectoriel (le résultat est un vecteur) : vérifier que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{0}$; construire un vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires donnés via $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$

Produit mixte nul : trois vecteurs sont coplanaires

Equations de sphères

Proposition

La sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ *et de rayon* R *est l'ensemble des points* $M(x; y; z)$ *vérifiant* $\overrightarrow{\Omega M}^2 = R^2$ *et a pour équation implicite :*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

Equations de sphères

Proposition

La sphère de centre $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ *et de rayon* R *est l'ensemble des points* $M(x;y;z)$ *vérifiant* $\overrightarrow{\Omega M}^2 = R^2$ *et a pour équation implicite :*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0$$

Proposition

La sphère de centre $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ *et de diamètre* $[AB]$ *est l'ensemble des points* M *vérifiant :*

$$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$$

Equations de sphères

Proposition

La sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ *et de rayon* R *est l'ensemble des points* $M(x; y; z)$ *vérifiant* $\overrightarrow{\Omega M}^2 = R^2$ *et a pour équation implicite :*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0$$

Proposition

La sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ *et de diamètre* $[AB]$ *est l'ensemble des points* M *vérifiant :*

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$$

(Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypothénuse)

Question de synthèse

L'équation :

$$2x + y = 0$$

est l'équation de quel objet ?

Question de synthèse

L'équation :

$$2x + y = 0$$

est l'équation de quel objet ?

L'équation :

$$2x + z = 0$$

est l'équation de quel objet ?

6 Transformations géométriques

- Barycentre
- Définitions et propriétés

Définition de la notion de barycentre

Exemple

Un élève a trois notes, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ *et* $x_3 = 20$*. Les première et troisième notes comptent coefficient* 3 *tandis que la deuxième note compte coefficient* 2*. La moyenne de cet élève est :*

Définition de la notion de barycentre

Exemple

Un élève a trois notes, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ *et* $x_3 = 20$*. Les première et troisième notes comptent coefficient* 3 *tandis que la deuxième note compte coefficient* 2*. La moyenne de cet élève est :*

$$\overline{x} = \frac{3 \times 0 + 2 \times 10 + 3 \times 20}{3+2+3} = 10$$

Définition de la notion de barycentre

Exemple

Un élève a trois notes, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ *et* $x_3 = 20$. *Les première et troisième notes comptent coefficient* 3 *tandis que la deuxième note compte coefficient* 2. *La moyenne de cet élève est :*

$$\overline{x} = \frac{3 \times 0 + 2 \times 10 + 3 \times 20}{3 + 2 + 3} = 10$$

i.e. :

$$\overline{x} = \frac{3 \times x_1 + 2 \times x_2 + 3 \times x_3}{3 + 2 + 3}$$

Définition de la notion de barycentre

Exemple

Un élève a trois notes, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ *et* $x_3 = 20$. *Les première et troisième notes comptent coefficient* 3 *tandis que la deuxième note compte coefficient* 2. *La moyenne de cet élève est :*

$$\overline{x} = \frac{3 \times 0 + 2 \times 10 + 3 \times 20}{3 + 2 + 3} = 10$$

i.e. :

$$\overline{x} = \frac{3 \times x_1 + 2 \times x_2 + 3 \times x_3}{3 + 2 + 3}$$

et nous avons :

$$3 \times (0 - \overline{x}) + 2 \times (10 - \overline{x}) + 3 \times (20 - \overline{x}) = 0$$

Définition de la notion de barycentre

Exemple

Un élève a trois notes, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ *et* $x_3 = 20$*. Les première et troisième notes comptent coefficient* 3 *tandis que la deuxième note compte coefficient* 2*. La moyenne de cet élève est :*

$$\overline{x} = \frac{3 \times 0 + 2 \times 10 + 3 \times 20}{3 + 2 + 3} = 10$$

i.e. :

$$\overline{x} = \frac{3 \times x_1 + 2 \times x_2 + 3 \times x_3}{3 + 2 + 3}$$

et nous avons :

$$3 \times (0 - \overline{x}) + 2 \times (10 - \overline{x}) + 3 \times (20 - \overline{x}) = 0$$

i.e. :

$$3 \times (x_1 - \overline{x}) + 2 \times (x_2 - \overline{x}) + 3 \times (x_3 - \overline{x}) = 0$$

Définition de la notion de barycentre

Exemple

i.e. :

$$\overline{x} = \frac{3 \times x_1 + 2 \times x_2 + 3 \times x_3}{3 + 2 + 3}$$

i.e. :

$$3 \times (x_1 - \overline{x}) + 2 \times (x_2 - \overline{x}) + 3 \times (x_3 - \overline{x}) = 0$$

Définition (Définition du barycentre)

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. Soit n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \neq 0 \tag{8}$$

Définition de la notion de barycentre

Exemple

i.e. :

$$\overline{x} = \frac{3 \times x_1 + 2 \times x_2 + 3 \times x_3}{3 + 2 + 3}$$

i.e. :

$$3 \times (x_1 - \overline{x}) + 2 \times (x_2 - \overline{x}) + 3 \times (x_3 - \overline{x}) = 0$$

Définition (Définition du barycentre)

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. *Soit* n *points pondérés* $(P_i;\omega_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ *vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \neq 0 \tag{8}$$

Le barycentre des n *points pondérés* $(P_i;\omega_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ *est le point* G *défini par :*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0} \tag{9}$$

Définition de la notion de barycentre

Définition (Définition du barycentre)

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. Le barycentre des n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est le point G défini par :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0} \qquad (8)$$

Théorème (Caractérisation du barycentre)

Soit G le barycentre des n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.

Définition de la notion de barycentre

Définition (Définition du barycentre)

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. Le barycentre des n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est le point G défini par :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0} \tag{8}$$

Théorème (Caractérisation du barycentre)

Soit G le barycentre des n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$. Pour tout point Ω de $\mathcal{P}$, le point G est le seul point vérifiant :

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \overrightarrow{\Omega P_i} \tag{9}$$

Définition de la notion de barycentre

Théorème (Caractérisation du barycentre)

Soit G le barycentre des n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$. Pour tout point Ω de $\mathcal{P}$, *le point G est le seul point vérifiant :*

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\overrightarrow{\Omega P_i} \tag{8}$$

Théorème (Cas particulier sans barycentre)

Soit n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$
vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 0 \tag{9}$$

Définition de la notion de barycentre

Théorème (Caractérisation du barycentre)

Soit G le barycentre des n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$. Pour tout point Ω de $\mathcal{P}$, le point G est le seul point vérifiant :

$$\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\overrightarrow{\Omega P_i} \tag{8}$$

Théorème (Cas particulier sans barycentre)

Soit n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 0 \tag{9}$$

Alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$, indépendant du point M et vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{u} \tag{10}$$

Définition de la notion de barycentre

Théorème (Cas particulier sans barycentre)

Soit n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ *vérifiant :*

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 0 \qquad (8)$$

Alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$, *indépendant du point* M *et vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{u} \qquad (9)$$

En particulier, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est obtenu en considérant les deux points pondérés $(B;1)$ et $(A;-1)$.

Définition de la notion de barycentre

Théorème (Cas particulier sans barycentre)

Soit n points pondérés $(P_i;\omega_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 0 \tag{8}$$

Alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$, indépendant du point M et vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\,\overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{u} \tag{9}$$

En particulier, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est obtenu en considérant les deux points pondérés $(B;1)$ et $(A;-1)$.

$$\forall\Omega,\ \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega A} = \underbrace{\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}}_{\textit{Relation de Chasles}} = \overrightarrow{AB}$$

Exemples de barycentres

Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

Exemples de barycentres

Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

En prenant $\Omega = A$, nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

1. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in]0;1[$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient au segment $[AB]$ privé de A et B.

Exemples de barycentres

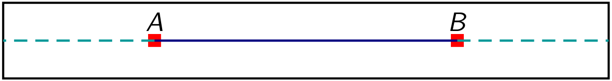
Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ le barycentre des points pondérés distincts $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ lorsque α et β sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ dans le cas général ?*

En prenant $\Omega = A$, nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

1. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in]0;1[$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient au segment $[AB]$ privé de A et B.



Exemples de barycentres

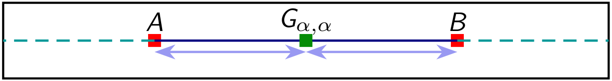
Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

En prenant $\Omega = A$, nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

1. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in]0;1[$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient au segment $[AB]$ privé de A et B.



Evidemment, $G_{\alpha,\alpha}$, de poids 2α, est le milieu de $[AB]$.

Exemples de barycentres

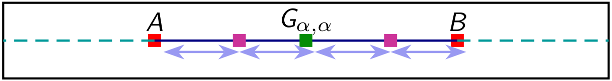
Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta)$ le barycentre des points pondérés distincts $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ lorsque α et β sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ dans le cas général ?*

En prenant $\Omega = A$, nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

1. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in \,]0;1[$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient au segment $[AB]$ privé de A et B.



Le point $G_{\alpha,3\alpha}$, de poids 4α,

Exemples de barycentres

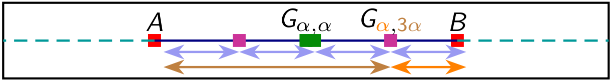
Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

En prenant $\Omega = A$, nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

1. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in]0;1[$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient au segment $[AB]$ privé de A et B.



Le point $G_{\alpha,3\alpha}$, de poids 4α, est le milieu de $[G_{\alpha,\alpha}, B]$.

Exemples de barycentres

Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

Nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$

Exemples de barycentres

Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta)$ le barycentre des points pondérés distincts $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ lorsque α et β sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ dans le cas général ?*

Nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$

2. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in \mathbb{R}$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient à la droite (AB).

Exemples de barycentres

Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ le barycentre des points pondérés distincts $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ lorsque α et β sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de $G_{\alpha,\beta}$ dans le cas général ?*

Nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$

2. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in \mathbb{R}$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient à la droite (AB).

Le point $G_{-\alpha,2\alpha}$, de poids α,

Exemples de barycentres

Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

Nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$

2. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in \mathbb{R}$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient à la droite (AB).

Le point $G_{-\alpha,2\alpha}$, de poids α, est le symétrique de A par rapport à B.

Exemples de barycentres

Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

Nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$

2. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in \mathbb{R}$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient à la droite (AB).

Le point $G_{3\alpha,-\alpha}$, de poids 2α,

Exemples de barycentres

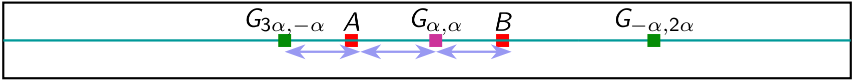
Exemple (Barycentres de deux points)

Soit $(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta)$ *le barycentre des points pondérés distincts* $(A;\alpha)$ *et* $(B;\beta)$.

1. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *lorsque* α *et* β *sont strictement positifs ?*
2. *Quel est le lieu géométrique de* $G_{\alpha,\beta}$ *dans le cas général ?*

Nous avons : $\overrightarrow{AG_{\alpha,\beta}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$

2. Nous avons $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \in \mathbb{R}$ d'où $G_{\alpha,\beta}$ appartient à la droite (AB).



Le point $G_{3\alpha,-\alpha}$, de poids 2α, est le symétrique de $G_{\alpha,\alpha}$ par rapport à A.

Barycentre et combinaison convexe

Théorème (Barycentres de deux points)

Soit α, β et λ trois réels non nuls vérifiant $\alpha+\beta \neq 0$ et A et B deux points distincts.

Barycentre et combinaison convexe

Théorème (Barycentres de deux points)

Soit α, β et λ trois réels non nuls vérifiant $\alpha+\beta \neq 0$ et A et B deux points distincts.
Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ (resp. $\left(G_{\lambda\alpha,\lambda\beta};\lambda(\alpha+\beta)\right)$) le barycentre de $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ (resp. $(A;\lambda\alpha)$ et $(B;\lambda\beta)$). Nous avons :

Barycentre et combinaison convexe

Théorème (Barycentres de deux points)

Soit α, β et λ trois réels non nuls vérifiant $\alpha+\beta \neq 0$ et A et B deux points distincts.
Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ (resp. $\left(G_{\lambda\alpha,\lambda\beta};\lambda(\alpha+\beta)\right)$) le barycentre de $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ (resp. $(A;\lambda\alpha)$ et $(B;\lambda\beta)$). Nous avons :

$$G_{\alpha,\beta} = G_{\lambda\alpha,\lambda\beta}$$

Corollaire (Barycentre et combinaison convexe)

Soit $t \in [0;1]$ et A et B deux points distincts.

Barycentre et combinaison convexe

Théorème (Barycentres de deux points)

Soit α, β et λ trois réels non nuls vérifiant $\alpha+\beta \neq 0$ et A et B deux points distincts.
Soit $(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta)$ (resp. $(G_{\lambda\alpha,\lambda\beta};\lambda(\alpha+\beta))$) le barycentre de $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ (resp. $(A;\lambda\alpha)$ et $(B;\lambda\beta)$). Nous avons :

$$G_{\alpha,\beta} = G_{\lambda\alpha,\lambda\beta}$$

Corollaire (Barycentre et combinaison convexe)

Soit $t \in [0;1]$ et A et B deux points distincts. Une combinaison convexe de A et B consiste à considérer le barycentre $(G_{t,1-t};1)$ de $(A;t)$ et $(B;1-t)$ i.e. :

Barycentre et combinaison convexe

Théorème (Barycentres de deux points)

Soit α, β et λ trois réels non nuls vérifiant $\alpha+\beta\neq 0$ et A et B deux points distincts.
Soit $(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta)$ (resp. $(G_{\lambda\alpha,\lambda\beta};\lambda(\alpha+\beta))$) le barycentre de $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ (resp. $(A;\lambda\alpha)$ et $(B;\lambda\beta)$). Nous avons :

$$G_{\alpha,\beta} = G_{\lambda\alpha,\lambda\beta}$$

Corollaire (Barycentre et combinaison convexe)

Soit $t\in[0;1]$ et A et B deux points distincts. Une combinaison convexe de A et B consiste à considérer le barycentre $(G_{t,1-t};1)$ de $(A;t)$ et $(B;1-t)$ i.e. :

$$\overrightarrow{OG_{t,1-t}} = t\,\overrightarrow{OA}+(1-t)\,\overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad G_{t,1-t}\in[AB]$$

Barycentre et combinaison convexe

Théorème (Barycentres de deux points)

Soit α, β et λ trois réels non nuls vérifiant $\alpha+\beta \neq 0$ et A et B deux points distincts.
Soit $\left(G_{\alpha,\beta};\alpha+\beta\right)$ (resp. $\left(G_{\lambda\alpha,\lambda\beta};\lambda(\alpha+\beta)\right)$) le barycentre de $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ (resp. $(A;\lambda\alpha)$ et $(B;\lambda\beta)$). Nous avons :

$$G_{\alpha,\beta} = G_{\lambda\alpha,\lambda\beta}$$

Corollaire (Barycentre et combinaison convexe)

Soit $t \in [0;1]$ et A et B deux points distincts. Une combinaison convexe de A et B consiste à considérer le barycentre $(G_{t,1-t};1)$ de $(A;t)$ et $(B;1-t)$ i.e. :

$$\overrightarrow{OG_{t,1-t}} = t\,\overrightarrow{OA} + (1-t)\,\overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad G_{t,1-t} \in [AB]$$

Remarque

Si $t \in \mathbb{R} - [0;1]$, $G_{t,1-t} \in (AB)$ mais la combinaison n'est plus convexe.

6 Transformations géométriques

- Barycentre
- Définitions et propriétés

Définitions

Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathcal{E}$.

Définition

Une transformation de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une bijection linéaire de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Une transformation affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve le barycentre.

Définitions

Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathcal{E}$.

Définition

Une transformation de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une bijection linéaire de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Une transformation affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve le barycentre.

Théorème

Par une transformation affine, l'image :

- *d'une droite est une droite ;*
- *d'un plan est un plan.*

Définitions

Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathcal{E}$.

Définition

Une transformation de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une bijection linéaire de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Une transformation affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve le barycentre.

Théorème

Par une transformation affine, l'image :

- *d'une droite est une droite ;*
- *d'un plan est un plan.*

Théorème

Une transformation affine est complètement déterminée par :

- *une transformation de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$;*
- *l'image d'un point.*

Transformations affines en C. A. O.

- Vues au collège (dans le plan) ;
  - ⋆ Symétrie centrale
  - ⋆ Symétrie axiale orthogonale (réflexion)
  - ⋆ Rotation (dont symétrie centrale)
  - ⋆ Translation
  - ⋆ Homothétie (agrandissement-réduction)

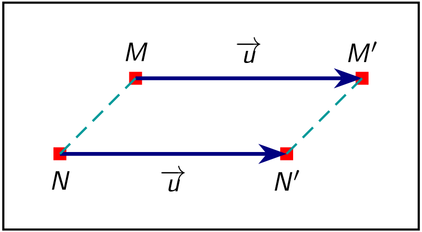
Transformations affines en C. A. O.

- Vues au collège (dans le plan) ;
  - ⋆ Symétrie centrale
  - ⋆ Symétrie axiale orthogonale (réflexion)
  - ⋆ Rotation (dont symétrie centrale)
  - ⋆ Translation
  - ⋆ Homothétie (agrandissement-réduction)
- Vues au lycée ;
  - ⋆ Réflexion par rapport à un plan
  - ⋆ Similitude (composition d'une rotation et d'une homothétie de même centre)

Transformations affines en C. A. O.

- Vues au collège (dans le plan) ;
  - ⋆ Symétrie centrale
  - ⋆ Symétrie axiale orthogonale (réflexion)
  - ⋆ Rotation (dont symétrie centrale)
  - ⋆ Translation
  - ⋆ Homothétie (agrandissement-réduction)
- Vues au lycée ;
  - ⋆ Réflexion par rapport à un plan
  - ⋆ Similitude (composition d'une rotation et d'une homothétie de même centre)
- Nouvelles ;
  - ⋆ Affinité orthogonale
  - ⋆ Mise à l'échelle

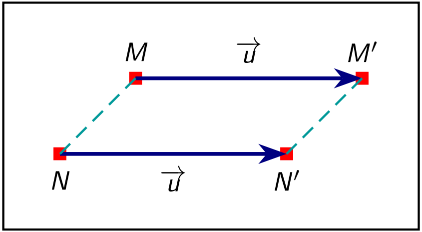
Translation (affine) de vecteur $\overrightarrow{u}$



Définition (Translation)

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$*, notée* $\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}$*, est la transformation affine qui a un point* M *associe le point* $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M)$ *défini par :* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

Translation (affine) de vecteur $\overrightarrow{u}$

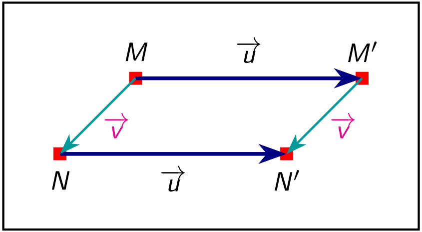


Définition (Translation)

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}$, est la transformation affine qui a un point M associe le point $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M)$ défini par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

$$\left\{\begin{array}{l} M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M) \\ N' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(N) \end{array}\right. \Longrightarrow MM'N'N \text{ parallélogramme} \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Translation (affine) de vecteur $\overrightarrow{u}$



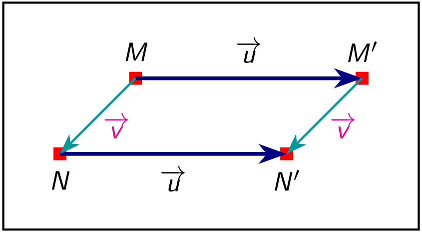
Définition (Translation)

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}$, est la transformation affine qui a un point M associe le point $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M)$ défini par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

$$\begin{cases} M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M) \\ N' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(N) \end{cases} \Longrightarrow MM'N'N \text{ parallélogramme} \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$,

Translation (affine) de vecteur $\overrightarrow{u}$



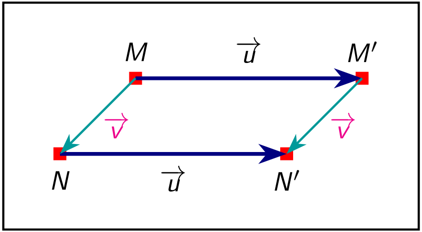
Définition (Translation)

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}$, est la transformation affine qui a un point M associe le point $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M)$ défini par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

$$\left\{ \begin{array}{l} M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M) \\ N' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(N) \end{array} \right. \Longrightarrow MM'N'N \text{ parallélogramme} \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$, la transformation de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associée à une translation est l'identité

Translation (affine) de vecteur $\overrightarrow{u}$



Définition (Translation)

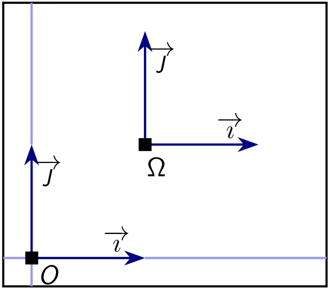
La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}$, est la transformation affine qui a un point M associe le point $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M)$ défini par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

$$\begin{cases} M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(M) \\ N' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}(N) \end{cases} \Longrightarrow MM'N'N \text{ parallélogramme} \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{\mathscr{T}_{\overrightarrow{u}}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$, la transformation de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associée à une translation est l'identité i.e. la transformation de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ associée à une translation ne modifie pas les vecteurs.

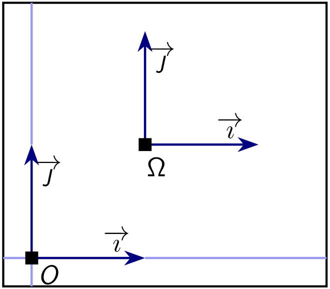
Changement de coordonnées

Soit $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\left(\Omega; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ deux repères orthonormés direct du plan.



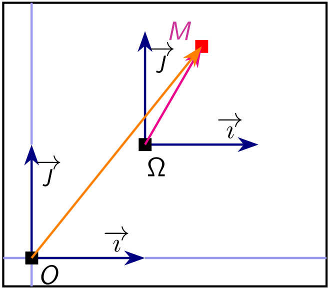
Changement de coordonnées

Soit $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ et $(\Omega; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ deux repères orthonormés direct du plan.
Soit $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ dans $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.



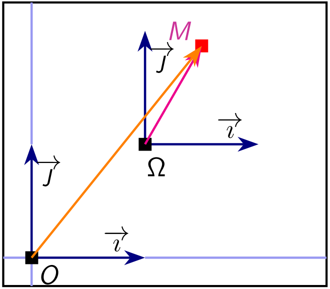
Changement de coordonnées

Soit $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\left(\Omega; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ deux repères orthonormés direct du plan.
Soit $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ dans $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit $M(x; y)$ (resp. $M(X; Y)$) dans $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ (resp. $\left(\Omega; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$).



Changement de coordonnées

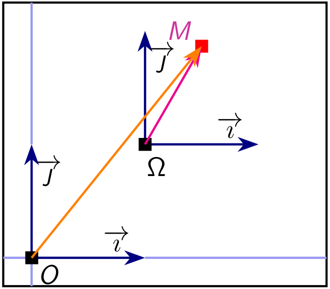
Soit $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\left(\Omega;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ deux repères orthonormés direct du plan.
Soit $\Omega\left(x_\Omega;y_\Omega\right)$ dans $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit $M(x;y)$ (resp. $M(X;Y)$) dans $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ (resp. $\left(\Omega;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$).
$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = x_\Omega\overrightarrow{\imath} + y_\Omega\overrightarrow{\jmath} + X\overrightarrow{\imath} + Y\overrightarrow{\jmath}$ d'où :



Changement de coordonnées

Soit $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\left(\Omega;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ deux repères orthonormés direct du plan.
Soit $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ dans $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit $M(x;y)$ (resp. $M(X;Y)$) dans $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ (resp. $\left(\Omega;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$).
$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = x_\Omega\overrightarrow{\imath} + y_\Omega\overrightarrow{\jmath} + X\overrightarrow{\imath} + Y\overrightarrow{\jmath}$ d'où :

$$\left\{\begin{array}{l} X = x - x_\Omega \\ Y = y - y_\Omega \end{array}\right.$$

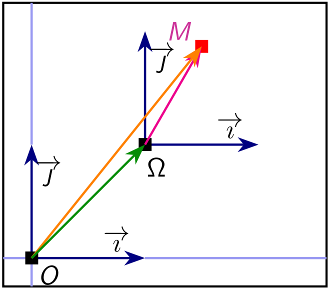


Changement de coordonnées

Soit $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ et $(\Omega; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ deux repères orthonormés direct du plan.
Soit $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
Soit $M(x;y)$ (resp. $M(X;Y)$) dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (resp. $(\Omega; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$).
$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = x_\Omega\vec{\imath} + y_\Omega\vec{\jmath} + X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$ d'où :

$$\begin{cases} X = x - x_\Omega \\ Y = y - y_\Omega \end{cases}$$

Or $\overrightarrow{O\Omega}(x_\Omega; y_\Omega)$.

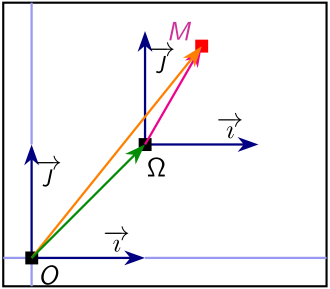


Changement de coordonnées

Soit $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\left(\Omega;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ deux repères orthonormés direct du plan.
Soit $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ dans $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Soit $M(x;y)$ (resp. $M(X;Y)$) dans $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ (resp. $\left(\Omega;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$).
$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = x_\Omega\overrightarrow{\imath} + y_\Omega\overrightarrow{\jmath} + X\overrightarrow{\imath} + Y\overrightarrow{\jmath}$ d'où :

$$\begin{cases} X = x - x_\Omega \\ Y = y - y_\Omega \end{cases}$$

Or $\overrightarrow{O\Omega}(x_\Omega;y_\Omega)$. La transformation affine $\mathscr{T}$ qui envoie le repère $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ sur le repère $\left(\Omega;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath}\right)$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$.

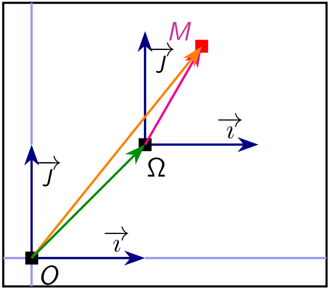


Changement de coordonnées

Soit $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ dans $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$.

$$\begin{cases} X = x - x_\Omega \\ Y = y - y_\Omega \end{cases}$$

Or $\overrightarrow{O\Omega}(x_\Omega; y_\Omega)$. La transformation affine $\mathscr{T}$ qui envoie le repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ sur le repère $\left(\Omega; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$.



Théorème (Changement de coordonnées)

Les coordonnées $(X; Y)$ du point M dans le repère $\left(\Omega; \overrightarrow{\imath_1}; \overrightarrow{\jmath_1}\right)$ sont obtenus à partir des coordonnées $(x; y)$ du point M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ en utilisant la transformation affine inverse $\mathscr{F}^{-1}$ de la transformation affine $\mathscr{F}$ permettant de passer du repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}\right)$ au repère $\left(\Omega; \overrightarrow{\imath_1}; \overrightarrow{\jmath_1}\right)$.

Rotations vectorielle et affine planes d'angle θ

Définition (Rotation vectorielle d'angle θ)

La rotation vectorielle d'angle θ, notée $\overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}$, du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est la transformation qui a tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left\|\overrightarrow{u'}\right\| & = & \left\|\overrightarrow{u}\right\| \\ \left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{u'}}\right) & = & \theta \end{array}\right.$$

Rotations vectorielle et affine planes d'angle θ

Définition (Rotation vectorielle d'angle θ)

La rotation vectorielle d'angle θ, notée $\overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}$, du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est la transformation qui a tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ défini par :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{u'}\right\| & = & \left\|\overrightarrow{u}\right\| \\ \left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{u'}}\right) & = & \theta \end{cases}$$

Définition (Rotation affine de centre Ω et d'angle θ)

La rotation affine de centre Ω et d'angle θ, notée $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$, du plan affine $\mathcal{P}$ est la transformation qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\begin{cases} \Omega M' & = & \Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) & = & \theta \end{cases}$$

Rotations vectorielle et affine planes d'angle θ

Définition (Rotation vectorielle d'angle θ)

La rotation vectorielle d'angle θ, notée $\overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}$, du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est la transformation qui a tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \left\|\overrightarrow{u'}\right\| & = & \left\|\overrightarrow{u}\right\| \\ \left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{u'}}\right) & = & \theta \end{array}\right.$$

Définition (Rotation affine de centre Ω et d'angle θ)

La rotation affine de centre Ω et d'angle θ, notée $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$, du plan affine $\mathcal{P}$ est la transformation qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Omega M' & = & \Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) & = & \theta \end{array}\right.$$

La rotation affine $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ centre Ω et d'angle θ est complètement déterminée par la rotation vectorielle $\overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}$ d'angle θ et $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}(\Omega) = \Omega$ (le point Ω est un point invariant).

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

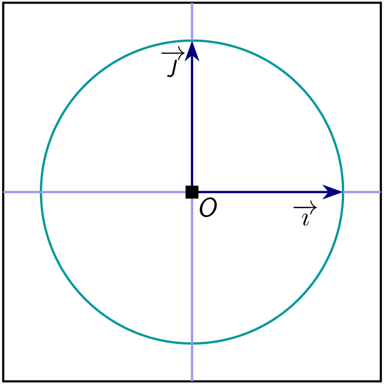
$$\cos(\theta_0+\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta_0+\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

$$\cos(\theta_0 + \theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

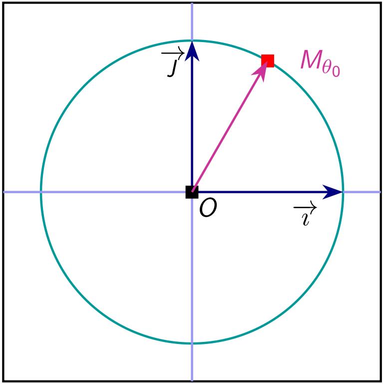
$$\sin(\theta_0 + \theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$



Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

$$\cos(\theta_0+\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta_0+\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$

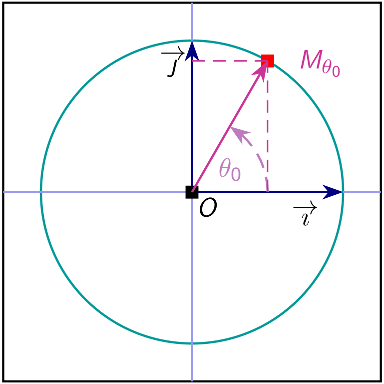


$M_{\theta_0}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))$

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

$$\cos(\theta_0+\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta_0+\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$

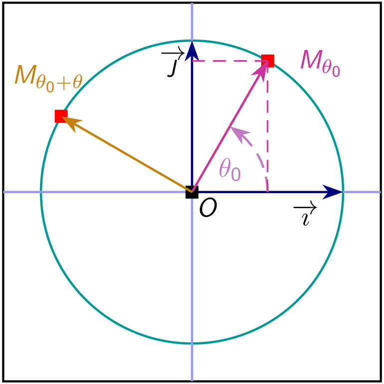


$M_{\theta_0}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))$

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

$$\cos(\theta_0+\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta_0+\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$



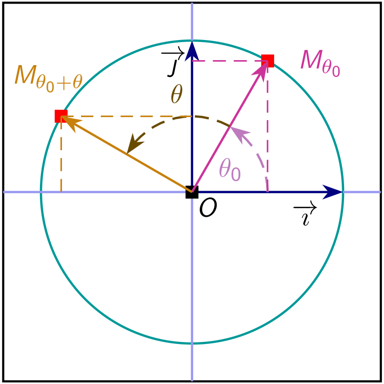
$M_{\theta_0}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))$

$M_{\theta_0+\theta}(\cos(\theta_0+\theta);\sin(\theta_0+\theta))$

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

$$\cos(\theta_0+\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta_0+\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$



$M_{\theta_0}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))$

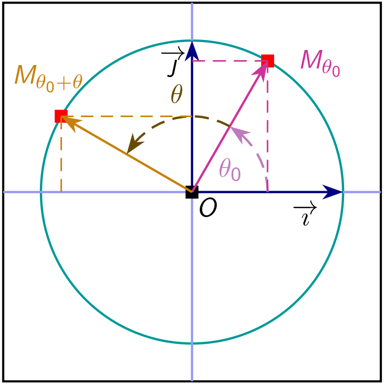
$M_{\theta_0+\theta}(\cos(\theta_0+\theta);\sin(\theta_0+\theta))$

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

$$\cos(\theta_0+\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta_0+\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$



$M_{\theta_0}\left(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0)\right)$

$M_{\theta_0+\theta}\left(\cos(\theta_0+\theta);\sin(\theta_0+\theta)\right)$

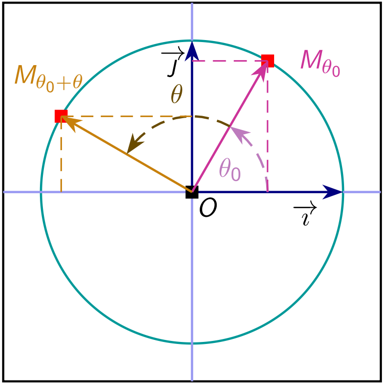
$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)\,x - \sin(\theta)\,y \\ y' = \sin(\theta)\,x + \cos(\theta)\,y \end{cases}$$

$\overrightarrow{OM_{\theta_0}}(X;Y)$ et $\overrightarrow{OM_{\theta_0+\theta}}(X';Y')$

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ

$$\cos(\theta_0+\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)$$

$$\sin(\theta_0+\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\theta) + \cos(\theta_0)\sin(\theta)$$



$$M_{\theta_0}(\cos(\theta_0);\sin(\theta_0))$$

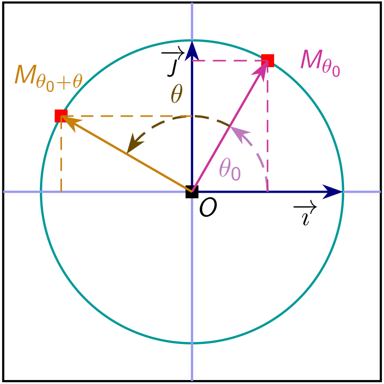
$$M_{\theta_0+\theta}(\cos(\theta_0+\theta);\sin(\theta_0+\theta))$$

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y' = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM_{\theta_0}}(X;Y) \text{ et } \overrightarrow{OM_{\theta_0+\theta}}(X';Y')$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ



$$M_{\theta_0}\left(\cos\left(\theta_0\right);\sin\left(\theta_0\right)\right)$$

$$M_{\theta_0+\theta}\left(\cos\left(\theta_0+\theta\right);\sin\left(\theta_0+\theta\right)\right)$$

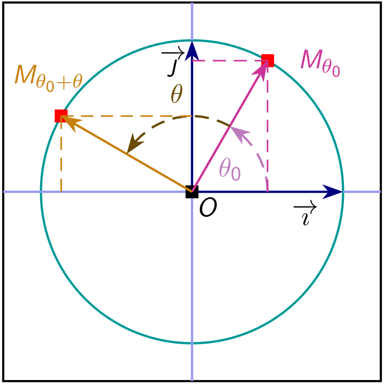
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \cos\left(\theta\right)x-\sin\left(\theta\right)y \\ y' & = & \sin\left(\theta\right)x+\cos\left(\theta\right)y \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OM_{\theta_0}}\left(X;Y\right) \text{ et } \overrightarrow{OM_{\theta_0+\theta}}\left(X';Y'\right)$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La rotation affine : $M'=\mathscr{R}_{O,\theta}\left(M\right) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ



$$M_{\theta_0}\left(\cos\left(\theta_0\right);\sin\left(\theta_0\right)\right)$$

$$M_{\theta_0+\theta}\left(\cos\left(\theta_0+\theta\right);\sin\left(\theta_0+\theta\right)\right)$$

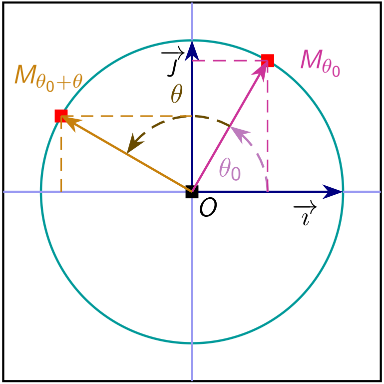
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \cos(\theta)\,x-\sin(\theta)\,y \\ y' & = & \sin(\theta)\,x+\cos(\theta)\,y \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OM_{\theta_0}}\,(X;Y) \text{ et } \overrightarrow{OM_{\theta_0+\theta}}\,(X';Y')$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{O,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_{\theta}}\left(\overrightarrow{OM}\right)$. Réciproque ?

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ



$$M_{\theta_0}\left(\cos\left(\theta_0\right);\sin\left(\theta_0\right)\right)$$

$$M_{\theta_0+\theta}\left(\cos\left(\theta_0+\theta\right);\sin\left(\theta_0+\theta\right)\right)$$

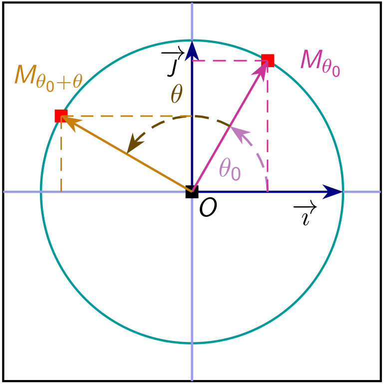
$$\begin{cases} x' &= \cos(\theta)\,x-\sin(\theta)\,y \\ y' &= \sin(\theta)\,x+\cos(\theta)\,y \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM_{\theta_0}}\,(X;Y) \text{ et } \overrightarrow{OM_{\theta_0+\theta}}\,(X';Y')$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{O,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{OM}\right)$. Réciproque ? Que nenni ! !

Rotation plane $\mathscr{R}_{O,\theta}$ de centre l'origine O et d'angle θ



$$M_{\theta_0}\left(\cos\left(\theta_0\right);\sin\left(\theta_0\right)\right)$$

$$M_{\theta_0+\theta}\left(\cos\left(\theta_0+\theta\right);\sin\left(\theta_0+\theta\right)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \cos\left(\theta\right)x-\sin\left(\theta\right)y \\ y' & = & \sin\left(\theta\right)x+\cos\left(\theta\right)y \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OM_{\theta_0}}\left(X;Y\right) \text{ et } \overrightarrow{OM_{\theta_0+\theta}}\left(X';Y'\right)$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{O,\theta}\left(M\right) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{OM}\right)$. Réciproque ? Que nenni ! !

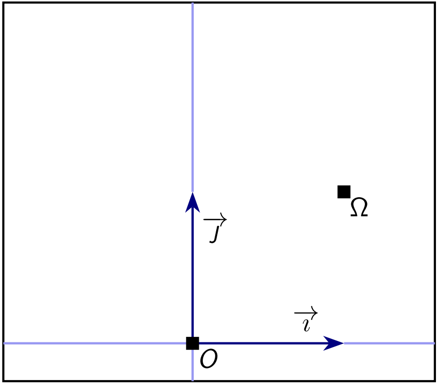
La rotation vectorielle $\overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}$ et un point invarient $\Omega \Longrightarrow$ La rotation affine : $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_{\theta}}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.

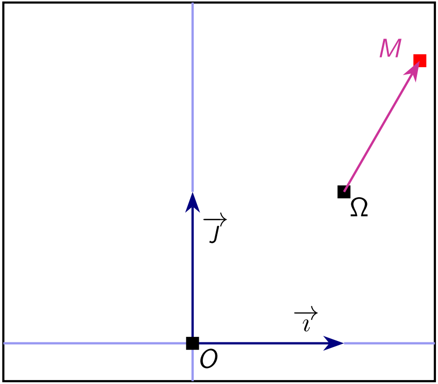
Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

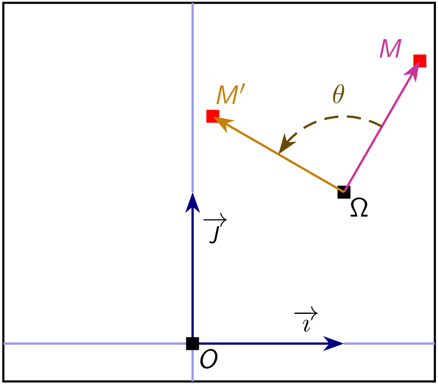
La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.

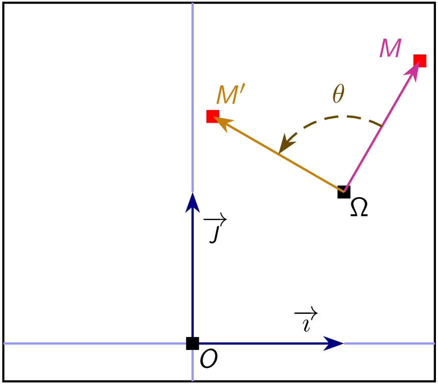


$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

$$\begin{pmatrix} x'-x_\Omega \\ y'-y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-x_\Omega \\ y-y_\Omega \end{pmatrix}$$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



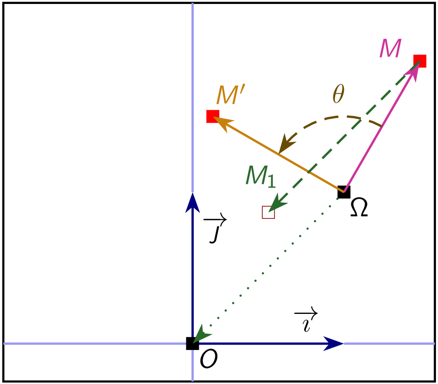
$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

$$\begin{pmatrix} x'-x_\Omega \\ y'-y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-x_\Omega \\ y-y_\Omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' &= \cos(\theta)(x-x_\Omega) - \sin(\theta)(y-y_\Omega) + x_\Omega \\ y' &= \sin(\theta)(x-x_\Omega) + \cos(\theta)(y-y_\Omega) + y_\Omega \end{cases}$$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



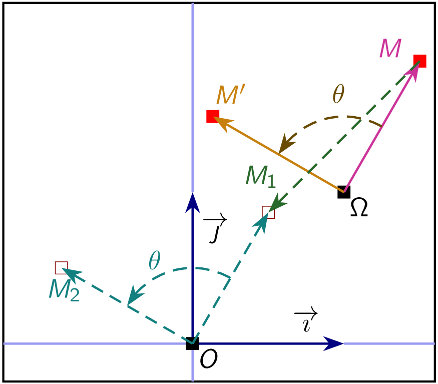
$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

1/ $M_1 = \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}(M)$ i.e. $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{\Omega O}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \cos(\theta)(x - x_\Omega) - \sin(\theta)(y - y_\Omega) + x_\Omega \\ y' & = & \sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)(y - y_\Omega) + y_\Omega \end{array}\right.$$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

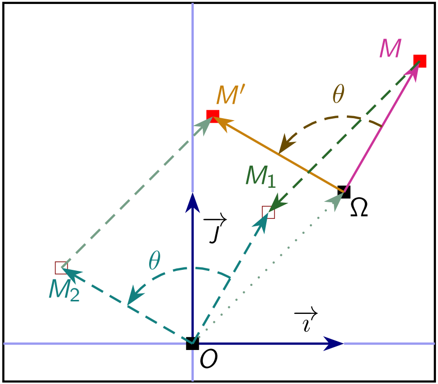
1/ $M_1 = \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}(M)$ i.e. $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{\Omega O}$

2/ $M_2 = \mathscr{R}_{O,\theta}(M_1)$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \cos(\theta)(x - x_\Omega) - \sin(\theta)(y - y_\Omega) + x_\Omega \\ y' & = & \sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)(y - y_\Omega) + y_\Omega \end{array}\right.$$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



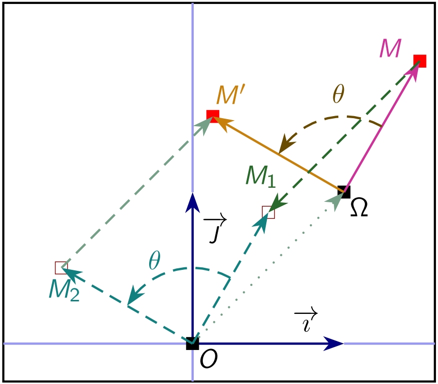
$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

1/ $M_1 = \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}(M)$ i.e. $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{\Omega O}$
2/ $M_2 = \mathscr{R}_{O,\theta}(M_1)$
3/ $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{O\Omega}}(M_2)$ i.e. $\overrightarrow{M_2M'} = \overrightarrow{O\Omega}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \cos(\theta)(x-x_\Omega)-\sin(\theta)(y-y_\Omega)+x_\Omega \\ y' & = & \sin(\theta)(x-x_\Omega)+\cos(\theta)(y-y_\Omega)+y_\Omega \end{array}\right.$$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

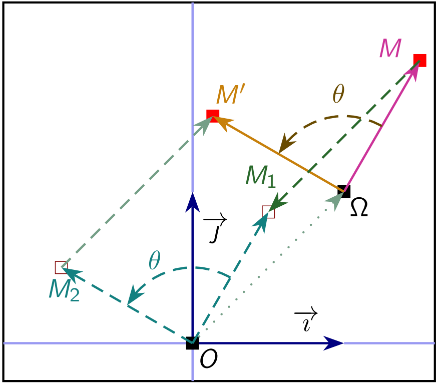
1/ $M_1 = \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}(M)$ i.e. $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{\Omega O}$
2/ $M_2 = \mathscr{R}_{O,\theta}(M_1)$
3/ $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{O\Omega}}(M_2)$ i.e. $\overrightarrow{M_2M'} = \overrightarrow{O\Omega}$

$$\mathscr{R}_{\Omega,\theta} = \mathscr{T}_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \mathscr{R}_{O,\theta} \circ \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}$$

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)(x - x_\Omega) - \sin(\theta)(y - y_\Omega) + x_\Omega \\ y' = \sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)(y - y_\Omega) + y_\Omega \end{cases}$$

Rotation $\mathscr{R}_{\Omega,\theta}$ plane de centre Ω et d'angle θ

La rotation affine : $M' = \mathscr{R}_{\Omega,\theta}(M) \Longrightarrow$ La rotation vectorielle : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\mathscr{R}_{\theta}}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$.



$M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$

1/ $M_1 = \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}(M)$ i.e. $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{\Omega O}$
2/ $M_2 = \mathscr{R}_{O,\theta}(M_1)$
3/ $M' = \mathscr{T}_{\overrightarrow{O\Omega}}(M_2)$ i.e. $\overrightarrow{M_2M'} = \overrightarrow{O\Omega}$

$$\mathscr{R}_{\Omega,\theta} = \mathscr{T}_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \mathscr{R}_{O,\theta} \circ \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{T}_{\vec{v}}} = \overrightarrow{I_d} \Rightarrow \overrightarrow{\mathscr{R}_{\Omega,\theta}} = \overrightarrow{\mathscr{T}_{\overrightarrow{O\Omega}}} \circ \overrightarrow{\mathscr{R}_{O,\theta}} \circ \overrightarrow{\mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}} = \overrightarrow{\mathscr{R}_{O,\theta}} = \overrightarrow{\mathscr{R}_{\theta}}$$

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$

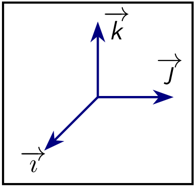
$\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$



$\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

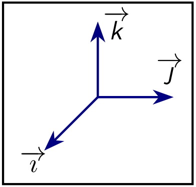
Soit $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ la rotation vectorielle, en dimension 3, d'angle θ et de direction $\overrightarrow{u}$.
La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ est donnée par :

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$



$\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

Soit $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ la rotation vectorielle, en dimension 3, d'angle θ et de direction $\overrightarrow{u}$.
La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ est donnée par :

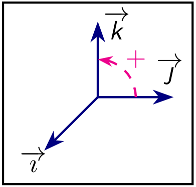
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$		

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$



$\left(\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ directe

$\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

Soit $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ la rotation vectorielle, en dimension 3, d'angle θ et de direction $\overrightarrow{u}$.
La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ est donnée par :

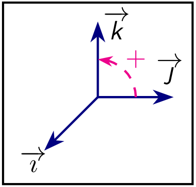
$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$		

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$



$\left(\overrightarrow{\jmath}\,;\overrightarrow{k}\right)$ directe

$\left(\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath}\,;\overrightarrow{k}\right)$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

Soit $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ la rotation vectorielle, en dimension 3, d'angle θ et de direction $\overrightarrow{u}$.
La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ est donnée par :

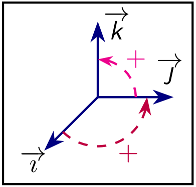
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}$		$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$



$\left(\overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ directe

$\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{j}\right)$ directe

$\left(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

Soit $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ la rotation vectorielle, en dimension 3, d'angle θ et de direction $\overrightarrow{u}$.
La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ est donnée par :

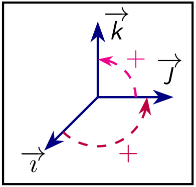
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}$		$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$



$\left(\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ directe

$\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right)$ directe

$\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k}\right)$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

Soit $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ la rotation vectorielle, en dimension 3, d'angle θ et de direction $\overrightarrow{u}$.
La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\overrightarrow{u},\theta}}$ est donnée par :

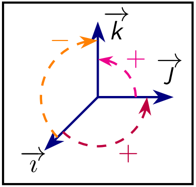
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices de rotations vectorielles dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}$, rotation vectorielle plane d'angle θ, est :

$$\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$



$(\vec{j}\,;\vec{k})$ directe

$(\vec{\imath}\,;\vec{j})$ directe

$(\vec{\imath}\,;\vec{k})$ indirecte

$(\vec{k}\,;\vec{\imath})$ directe

$(\vec{\imath}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ base directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$

Théorème

Soit $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\vec{u},\theta}}$ la rotation vectorielle, en dimension 3, d'angle θ et de direction $\vec{u}$.
La matrice $\mathcal{M}_{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\vec{u},\theta}}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{R}_{\vec{u},\theta}}$ est donnée par :

$\vec{u} = \vec{i}$	$\vec{u} = \vec{j}$	$\vec{u} = \vec{k}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Homothéties vectorielle et affine de rapport k non nul

Définition (Homothétie vectorielle de rapport k)

L'homothétie vectorielle de rapport k, notée $\overrightarrow{\mathscr{H}_k}$, de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la transformation qui a tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ défini par :

$$\overrightarrow{u'} = k\,\overrightarrow{u}$$

Homothéties vectorielle et affine de rapport k non nul

Définition (Homothétie vectorielle de rapport k)

L'homothétie vectorielle de rapport k, notée $\overrightarrow{\mathscr{H}_k}$, de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la transformation qui a tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ défini par :

$$\overrightarrow{u'} = k\,\overrightarrow{u}$$

Définition (Homothétie affine de centre Ω et de rapport k)

L'homothétie affine de centre Ω et rapport k, notée $\mathscr{H}_{\Omega,k}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

Homothéties vectorielle et affine de rapport k non nul

Définition (Homothétie vectorielle de rapport k)

L'homothétie vectorielle de rapport k, notée $\overrightarrow{\mathscr{H}_k}$, de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la transformation qui a tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ défini par :

$$\overrightarrow{u'} = k\,\overrightarrow{u}$$

Définition (Homothétie affine de centre Ω et de rapport k)

L'homothétie affine de centre Ω et rapport k, notée $\mathscr{H}_{\Omega,k}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

L'homothétie affine de centre Ω et rapport k est complètement déterminée par l'homothétie vectorielle de rapport k $\overrightarrow{\mathscr{H}_k}$ et $\mathscr{H}_{\Omega,k}(\Omega) = \Omega$ (le point Ω est un point invariant).

Homothéties vectorielle et affine de rapport k non nul

Définition (Homothétie vectorielle de rapport k)

L'homothétie vectorielle de rapport k, notée $\overrightarrow{\mathscr{H}_k}$, de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la transformation qui a tout vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ défini par :

$$\overrightarrow{u'} = k\,\overrightarrow{u}$$

Définition (Homothétie affine de centre Ω et de rapport k)

L'homothétie affine de centre Ω et rapport k, notée $\mathscr{H}_{\Omega,k}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

L'homothétie affine de centre Ω et rapport k est complètement déterminée par l'homothétie vectorielle de rapport k $\overrightarrow{\mathscr{H}_k}$ et $\mathscr{H}_{\Omega,k}(\Omega) = \Omega$ (le point Ω est un point invariant). Comme pour les rotations,

$$\mathscr{H}_{\Omega,k} = \mathscr{T}_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \mathscr{H}_{O,k} \circ \mathscr{T}_{\overrightarrow{\Omega O}}$$

où O est l'origine du repère.

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

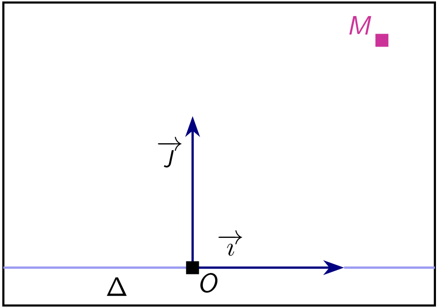
Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

où Ω_M est le projeté orthogonal de M sur Δ.



Affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$.

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

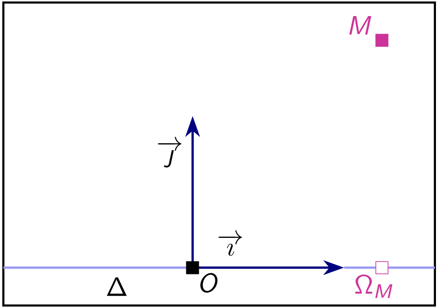
Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

où Ω_M est le projeté orthogonal de M sur Δ.



Affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$.

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

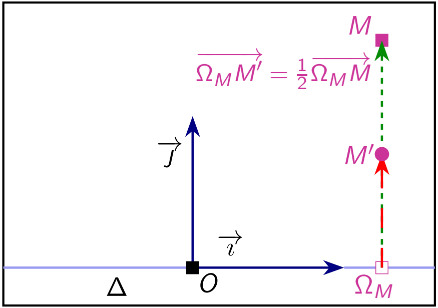
Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

où Ω_M est le projeté orthogonal de M sur Δ.



Affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$.

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

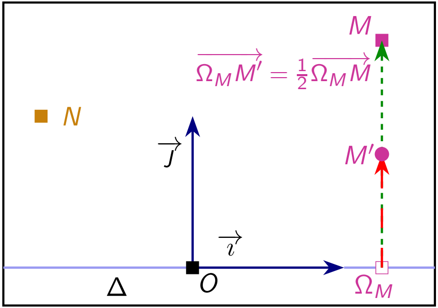
Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

où Ω_M est le projeté orthogonal de M sur Δ.



Affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$.

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

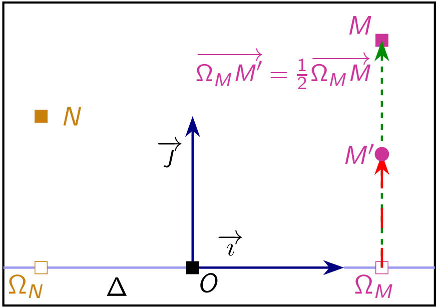
Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

où Ω_M est le projeté orthogonal de M sur Δ.



Affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$.

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

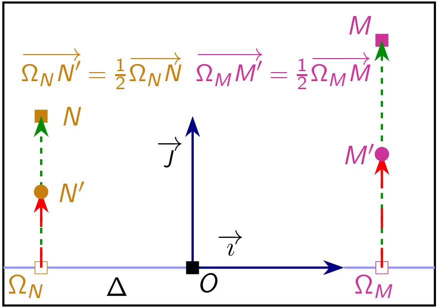
Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

où Ω_M est le projeté orthogonal de M sur Δ.



Affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$.

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

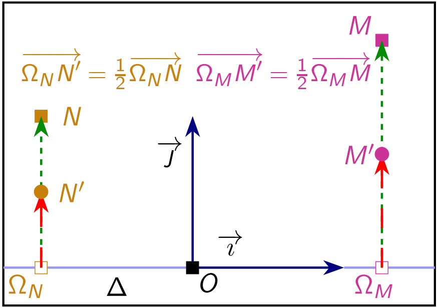
Soit Δ une droite du plan affine $\mathcal{P}$ ou un plan affine de l'espace $\mathcal{E}_3$

Définition (Affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k)

L'affinité orthogonale affine de support Δ et de rapport k, notée $\mathscr{A}$, de l'espace affine $\mathcal{E}$ est la transformation affine qui a tout point M associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = k\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

où Ω_M est le projeté orthogonal de M sur Δ.

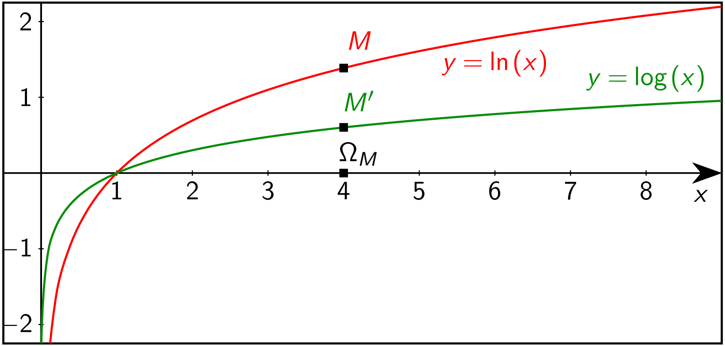


Affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{2}$.

Pour une homothétie, le centre Ω ne dépend pas du point M tandis que pour une affinité orthogonale, le point Ω_M dépend du point M.

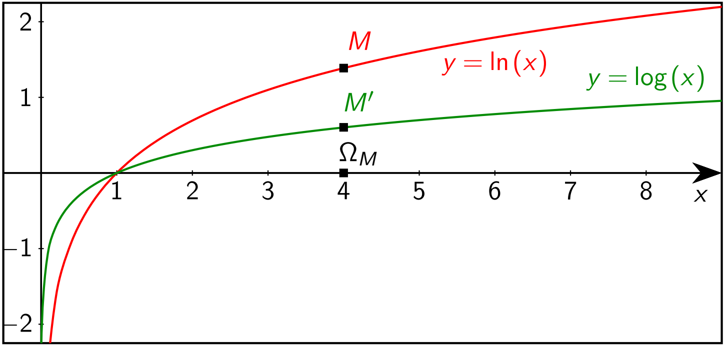
Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

Pour $x > 0$, soit $M(x;\ln(x))$, $\Omega_M(x;0)$ et $M'(x;\log(x))$.



Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

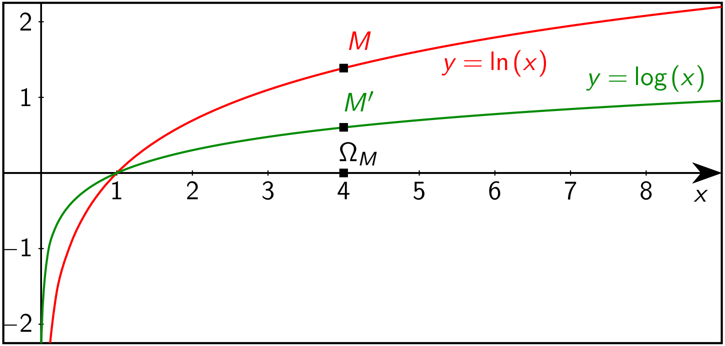
Pour $x > 0$, soit $M(x;\ln(x))$, $\Omega_M(x;0)$ et $M'(x;\log(x))$.



$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = \log(x)\,\overrightarrow{\jmath} = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\,\overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{\ln(10)}\overrightarrow{\Omega_M M}$$

Affinité orthogonale affine de support Δ de rapport $k \neq 0$

Pour $x > 0$, soit $M(x; \ln(x))$, $\Omega_M(x; 0)$ et $M'(x; \log(x))$.



$$\overrightarrow{\Omega_M M'} = \log(x)\,\overrightarrow{j} = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\,\overrightarrow{j} = \frac{1}{\ln(10)}\,\overrightarrow{\Omega_M M}$$

La courbe représentative de la fonction log est l'image de la courbe représentative de la fonction ln par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\frac{1}{\ln(10)}$.

Mise à l'échelle

Définition (Mise à l'échelle)

Une mise à l'échelle est la composé :

Dans le plan *de deux affinités orthogonales de support les axes du repère ;*

Mise à l'échelle

Définition (Mise à l'échelle)

Une mise à l'échelle est la composé :

- Dans le plan *de deux affinités orthogonales de support les axes du repère ;*
- Dans l'espace *de trois affinités orthogonales de support les plans formés à partir de deux axes du repère.*

Mise à l'échelle

Définition (Mise à l'échelle)

Une mise à l'échelle est la composé :

Dans le plan *de deux affinités orthogonales de support les axes du repère ;*

Dans l'espace *de trois affinités orthogonales de support les plans formés à partir de deux axes du repère.*

L'expression analytique d'une mise à l'échelle est :

dans le plan affine $\mathcal{P}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & k_x\, x \\ y' & = & k_y\, y \end{array} \right.$$

où les réels k_x et k_y sont appelés les rapports de la mise à l'échelle.

Mise à l'échelle

Définition (Mise à l'échelle)

Une mise à l'échelle est la composé :

Dans le plan *de deux affinités orthogonales de support les axes du repère ;*

Dans l'espace *de trois affinités orthogonales de support les plans formés à partir de deux axes du repère.*

L'expression analytique d'une mise à l'échelle est :

dans le plan affine $\mathcal{P}$

$$\begin{cases} x' & = & k_x\, x \\ y' & = & k_y\, y \end{cases}$$

où les réels k_x et k_y sont appelés les rapports de la mise à l'échelle.

dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$

$$\begin{cases} x' & = & k_x\, x \\ y' & = & k_y\, y \\ z' & = & k_z\, z \end{cases}$$

où les réels k_x, k_y et k_z sont appelés les rapports de la mise à l'échelle.

Mise à l'échelle

Définition (Mise à l'échelle)

Une mise à l'échelle est la composé :

Dans le plan *de deux affinités orthogonales de support les axes du repère ;*

Dans l'espace *de trois affinités orthogonales de support les plans formés à partir de deux axes du repère.*

L'expression analytique d'une mise à l'échelle est :

dans le plan affine $\mathcal{P}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & k_x\, x \\ y' & = & k_y\, y \end{array}\right.$$

où les réels k_x et k_y sont appelés les rapports de la mise à l'échelle.

dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & k_x\, x \\ y' & = & k_y\, y \\ z' & = & k_z\, z \end{array}\right.$$

où les réels k_x, k_y et k_z sont appelés les rapports de la mise à l'échelle.

Si tous les rapports sont égaux à k, la mise à l'échelle est une homothétie de centre l'origine du repère O et de rapport k.

Mise à l'échelle

Définition (Mise à l'échelle)

Une mise à l'échelle est la composé :

- Dans le plan *de deux affinités orthogonales de support les axes du repère ;*
- Dans l'espace *de trois affinités orthogonales de support les plans formés à partir de deux axes du repère.*

L'expression analytique d'une mise à l'échelle est :

dans le plan affine $\mathcal{P}$

$$\begin{cases} x' &= k_x\, x \\ y' &= k_y\, y \end{cases}$$

où les réels k_x et k_y sont appelés les rapports de la mise à l'échelle.

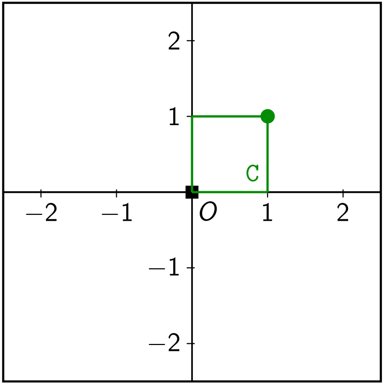
dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$

$$\begin{cases} x' &= k_x\, x \\ y' &= k_y\, y \\ z' &= k_z\, z \end{cases}$$

où les réels k_x, k_y et k_z sont appelés les rapports de la mise à l'échelle.

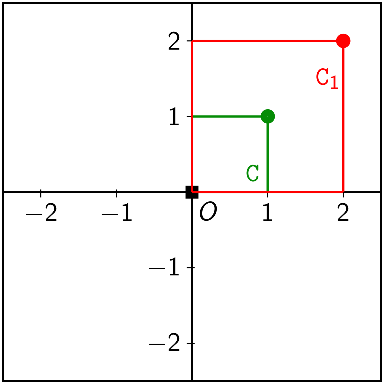
Si tous les rapports sont égaux à k, la mise à l'échelle est une homothétie de centre l'origine du repère O et de rapport k. Si un seul des rapports est différent de 1, la mise à l'échelle est une affinité orthogonale.

Homothétie et mise à l'échelle



C : carré défini par $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$

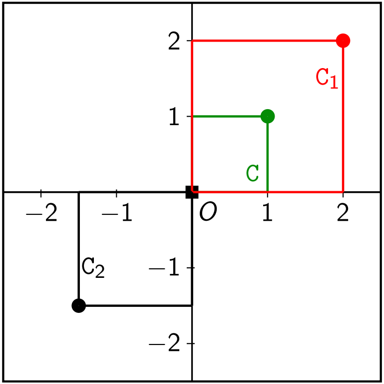
Homothétie et mise à l'échelle



C : carré défini par (0;0), (1;0), (1;1) et (0;1)

C_1 : image de C par l'homothétie de centre O et de rapport 2

Homothétie et mise à l'échelle

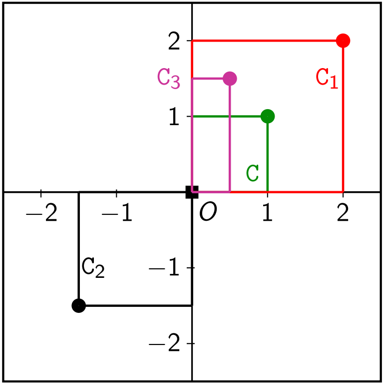


$\mathtt{C}$: carré défini par $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$

$\mathtt{C}_1$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport 2

$\mathtt{C}_2$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$

Homothétie et mise à l'échelle



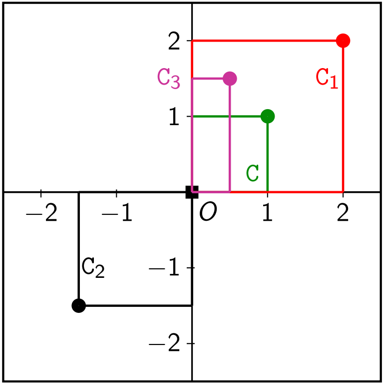
$\mathtt{C}$: carré défini par $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$

$\mathtt{C}_1$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport 2

$\mathtt{C}_2$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$

$\mathtt{C}_3$: image de $\mathtt{C}$ par la mise à l'échelle de rapports $\frac{1}{2}$ et de rapport $\frac{3}{2}$

Homothétie et mise à l'échelle



$\mathtt{C}$: carré défini par $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$

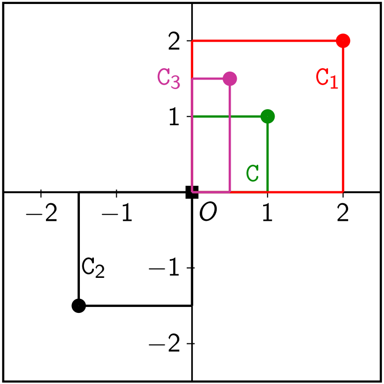
$\mathtt{C}_1$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport 2

$\mathtt{C}_2$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$

$\mathtt{C}_3$: image de $\mathtt{C}$ par la mise à l'échelle de rapports $\frac{1}{2}$ et de rapport $\frac{3}{2}$

$\mathtt{C}$: carré dont l'aire est 1 u.a.

Homothétie et mise à l'échelle



C : carré défini par (0;0), (1;0), (1;1) et (0;1)

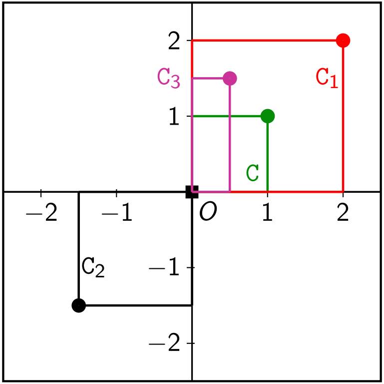
C_1 : image de C par l'homothétie de centre O et de rapport 2

C_2 : image de C par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$

C_3 : image de C par la mise à l'échelle de rapports $\frac{1}{2}$ et de rapport $\frac{3}{2}$

C : carré dont l'aire est 1 u.a.
C_1 : carré dont l'aire vaut $2^2 = 4$ u.a.

Homothétie et mise à l'échelle



C : carré défini par $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$

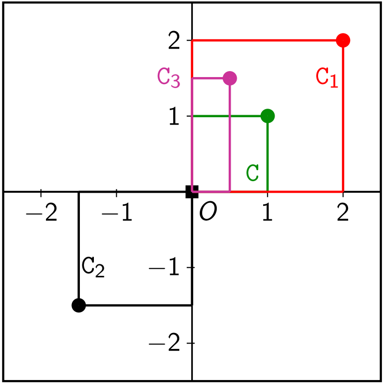
C_1 : image de C par l'homothétie de centre O et de rapport 2

C_2 : image de C par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$

C_3 : image de C par la mise à l'échelle de rapports $\frac{1}{2}$ et de rapport $\frac{3}{2}$

C : carré dont l'aire est 1 u.a.
C_1 : carré dont l'aire vaut $2^2 = 4$ u.a.
C_2 : carré dont l'aire vaut $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ u.a.

Homothétie et mise à l'échelle



$\mathtt{C}$: carré défini par $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$

$\mathtt{C}_1$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport 2

$\mathtt{C}_2$: image de $\mathtt{C}$ par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$

$\mathtt{C}_3$: image de $\mathtt{C}$ par la mise à l'échelle de rapports $\frac{1}{2}$ et de rapport $\frac{3}{2}$

$\mathtt{C}$: carré dont l'aire est 1 u.a.
$\mathtt{C}_1$: carré dont l'aire vaut $2^2 = 4$ u.a.
$\mathtt{C}_2$: carré dont l'aire vaut $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ u.a.
$\mathtt{C}_3$: `rectangle` dont l'aire vaut $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ u.a.

Transformation et angle

Définition (Isométrie)

Une isométrie est une application affine qui conserve les distances, son application linéaire associée conserve la norme.

Transformation et angle

Définition (Isométrie)

Une isométrie est une application affine qui conserve les distances, son application linéaire associée conserve la norme.

Définition (Déplacement et antidéplacement)

Soit f une transformation affine et $\mathcal{M}_{\overrightarrow{f}}$ la matrice de l'application linéaire associée à f.
La transformation f est un ***déplacement*** *(resp.* ***anti-déplacement****) ssi le déterminant de $\mathcal{M}_{\overrightarrow{f}}$ est* ***strictement positif*** *(resp.* ***strictement négatif****).*

Transformation et angle

Définition (Isométrie)

Une isométrie est une application affine qui conserve les distances, son application linéaire associée conserve la norme.

Définition (Déplacement et antidéplacement)

Soit f une transformation affine et $\mathcal{M}_{\overrightarrow{f}}$ la matrice de l'application linéaire associée à f.
La transformation f est un ***déplacement*** *(resp.* ***anti-déplacement****) ssi le déterminant de $\mathcal{M}_{\overrightarrow{f}}$ est* ***strictement positif*** *(resp.* ***strictement négatif****).*

Déplacement usuel

Rotation
Translation
Homothétie plane
Homothétie de $\mathcal{E}_3$ à rapport positif
Mise à l'échelle à rapport positif

Transformation et angle

Définition (Isométrie)

Une isométrie est une application affine qui conserve les distances, son application linéaire associée conserve la norme.

Définition (Déplacement et antidéplacement)

Soit f une transformation affine et $\mathcal{M}_{\overrightarrow{f}}$ la matrice de l'application linéaire associée à f.
*La transformation f est un **déplacement** (resp. **anti-déplacement**) ssi le déterminant de $\mathcal{M}_{\overrightarrow{f}}$ est **strictement positif** (resp. **strictement négatif**).*

Déplacement usuel	**Anti-déplacement usuel**
Rotation	
Translation	**Symétrie plane par rapport à une droite**
Homothétie plane	
Homothétie de $\mathcal{E}_3$ à rapport positif	**Symétrie par rapport à un plan**
Mise à l'échelle à rapport positif	Homothétie de $\mathcal{E}_3$ à rapport négatif

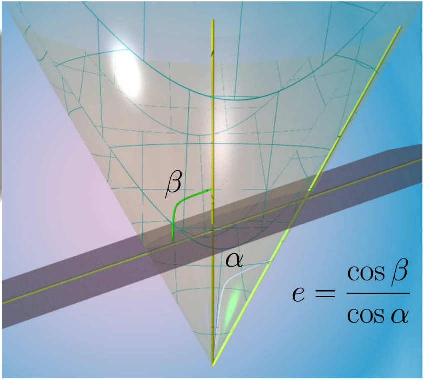
Définition

Définition

Une conique propre (ellipse, hyperbole, parabole) est la section d'un cône (de révolution) par un plan ne passant pas par son sommet.

Invariant : l'excentricité

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \in \mathbb{R}^+$$



Définition

Définition

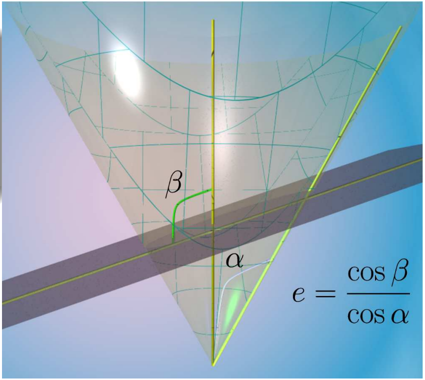
Une conique propre (ellipse, hyperbole, parabole) est la section d'un cône (de révolution) par un plan ne passant pas par son sommet.

Invariant : l'excentricité

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \in \mathbb{R}^+$$

où :

- β angle entre l'axe du cône et le plan ;
-



Définition

Définition

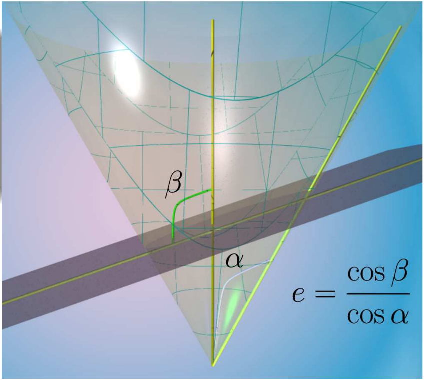
Une conique propre (ellipse, hyperbole, parabole) est la section d'un cône (de révolution) par un plan ne passant pas par son sommet.

Invariant : l'excentricité

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \in \mathbb{R}^+$$

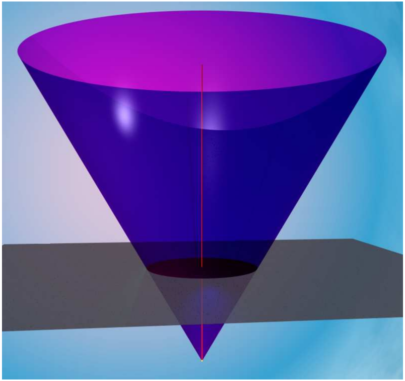
où :

- β angle entre l'axe du cône et le plan ;
- α angle entre l'axe du cône et une génératrice de ce dernier.



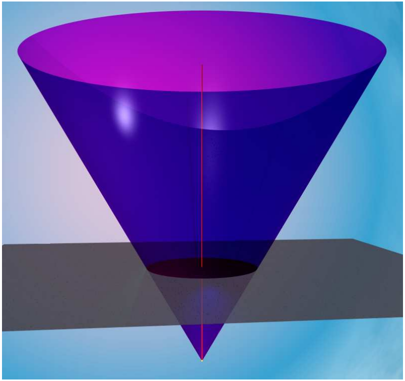
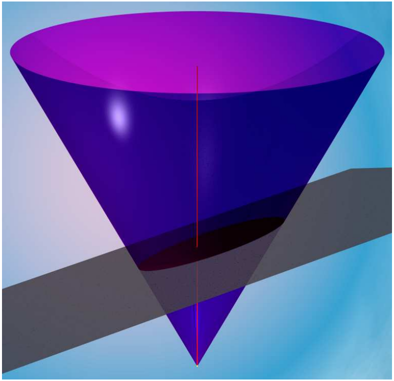
Ellipse : $0 \leq e < 1$

Cercle



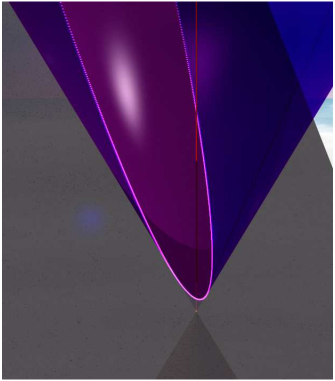
$$e = 0 \text{ i.e. } \beta = \frac{\pi}{2}$$

Ellipse : $0 \leq e < 1$

Cercle	Ellipse non circulaire
	
$e = 0$ i.e. $\beta = \dfrac{\pi}{2}$	$0 < e$

Parabole et hyperbole

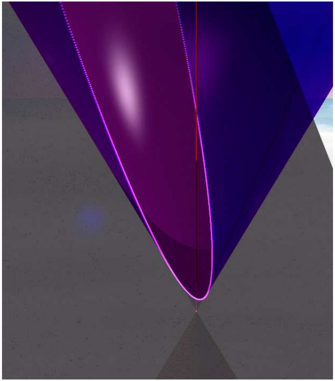
Parabole



$e = 1$ i.e. $\beta = \alpha$

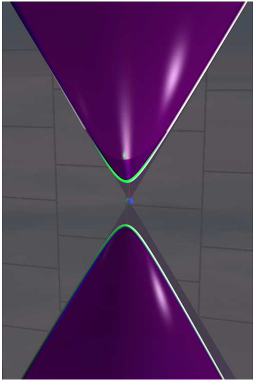
Parabole et hyperbole

Parabole



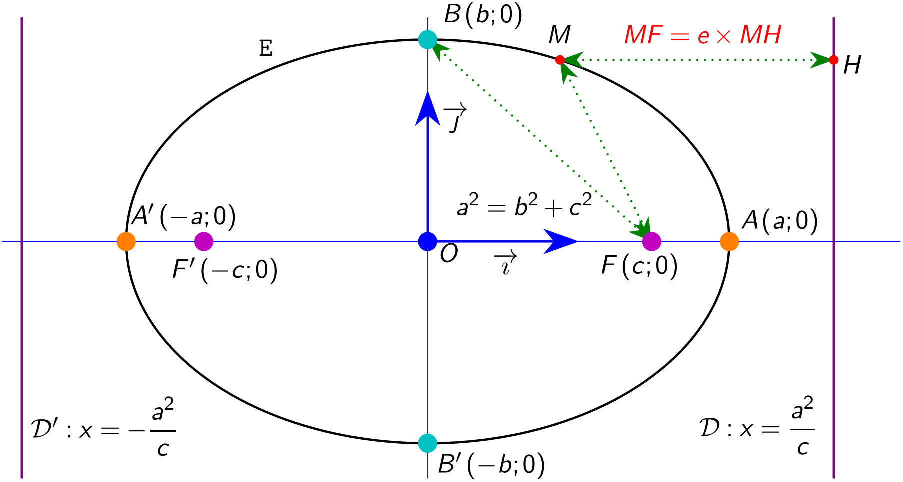
$e = 1$ i.e. $\beta = \alpha$

Hyperbole

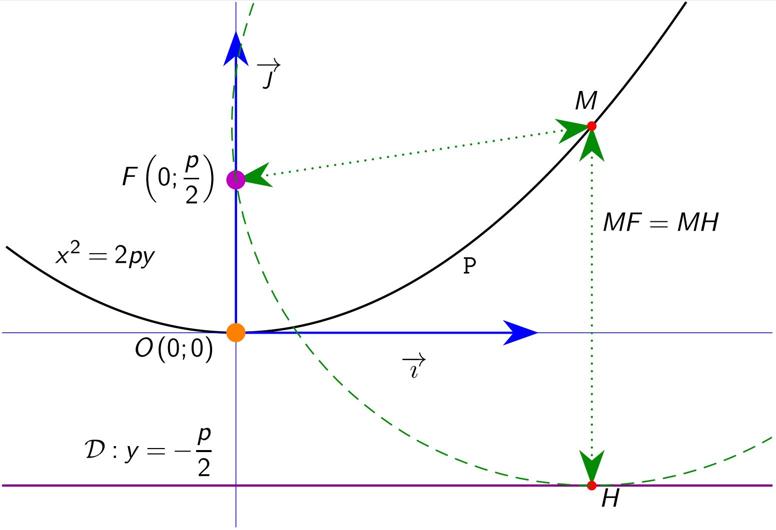


$e > 1$

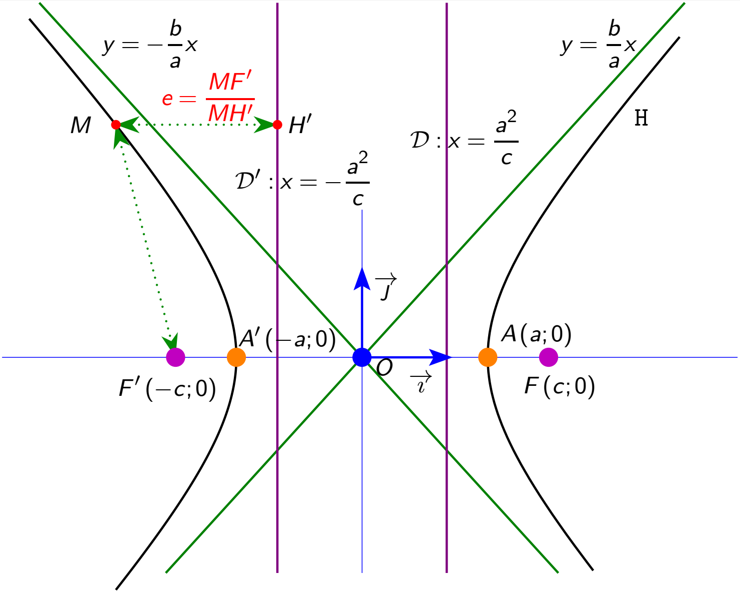
Ellipse E, définition avec directrice et foyer



Parabole P, définition avec directrice et foyer



Hyperbole H, définition avec directrice et foyer



Equations d'une courbe plane

Définition (Equations d'une courbe)

Une courbe $\mathcal{C}$ peut être définie de plusieurs façons :

Implicitement *il existe une application F de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ tel que les points M de la courbe (et seulement eux) vérifient :*

$$F(M) = 0$$

ou (par abus) :

$$F(x; y) = 0$$

Paramétriquement *il existe une application $t \mapsto \gamma(t) = (x(t); y(t))$ d'un intervalle $\mathscr{I}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}$ tel que pour tout point M de la courbe, il existe t_0 dans $\mathscr{I}$ avec $M = \gamma(t_0)$ et les coordonnées de M sont $(x(t_0); y(t_0))$*

Explicitement *la courbe est le graphe d'une fonction numérique i.e. il existe une fonction f d'une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que les points M de la courbe aient pour coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in \mathscr{D}$.*

Equations des coniques à centre

Conique	Equation implicite	Equation paramétrique
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\left\{\begin{array}{l} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{array}\right. \quad , \quad t\in[0;2\pi]$

Equations des coniques à centre

Conique	Equation implicite	Equation paramétrique
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{array} \right. \quad , \quad t \in [0;2\pi]$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{a}{\cos(t)} \\ b\tan(t) \end{array} \right. \quad , \quad t \in [0;2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$

Equations des coniques à centre

Conique	Equation implicite	Equation paramétrique
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\begin{cases} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{cases}, \quad t\in[0;2\pi]$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\begin{cases} \frac{a}{\cos(t)} \\ b\tan(t) \end{cases}, \quad t\in[0;2\pi]-\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$

Le fait qu'une courbe soit définie par une équation paramétrique ou implicite ne dépend pas du repère du plan (l'équation change évidemment en fonction du repère).

Equations des coniques à centre

Conique	Equation implicite	Equation paramétrique
Ellipse	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	$\begin{cases} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{cases}, \quad t\in[0;2\pi]$
Hyperbole	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	$\begin{cases} \dfrac{a}{\cos(t)} \\ b\tan(t) \end{cases}, \quad t\in[0;2\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

Le fait qu'une courbe soit définie par une équation paramétrique ou implicite ne dépend pas du repère du plan (l'équation change évidemment en fonction du repère). En est-il de même pour l'équation explicite ?

Equations des coniques à centre

Conique	Equation implicite	Equation paramétrique
Ellipse	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	$\begin{cases} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{cases} , \quad t\in[0;2\pi]$
Hyperbole	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	$\begin{cases} \dfrac{a}{\cos(t)} \\ b\tan(t) \end{cases} , \quad t\in[0;2\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

Le fait qu'une courbe soit définie par une équation paramétrique ou implicite ne dépend pas du repère du plan (l'équation change évidemment en fonction du repère). En est-il de même pour l'équation explicite ?

Que nenni ! !

Equations explicites des coniques à centre ?

Quel que soit le point choisi, il existe toujours une droite qui coupe une ellipse en deux points :

Equations explicites des coniques à centre ?

Quel que soit le point choisi, il existe toujours une droite qui coupe une ellipse en deux points : une ellipse ne peut pas être définie par une équation explicite.

Equations explicites des coniques à centre ?

Quel que soit le point choisi, il existe toujours une droite qui coupe une ellipse en deux points : une ellipse ne peut pas être définie par une équation explicite.

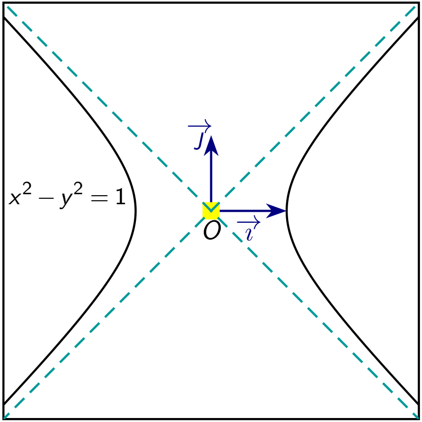
Qu'en est-il de l'hyperbole ?

Equations explicites des coniques à centre ?

Quel que soit le point choisi, il existe toujours une droite qui coupe une ellipse en deux points : une ellipse ne peut pas être définie par une équation explicite.
Qu'en est-il de l'hyperbole ?

Considérons H équilatère d'équation :

$$x^2 - y^2 = a^2$$



Equations explicites des coniques à centre ?

Considérons H équilatère d'équation :

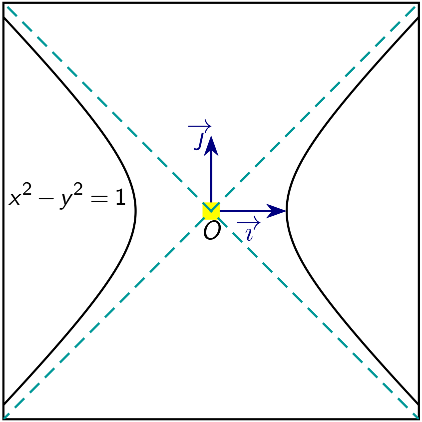
$$x^2 - y^2 = a^2$$

qui conduit à

$$X\,Y = \frac{a^2}{2}$$

après avoir posé :

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \qquad (11)$$



Equations explicites des coniques à centre ?

Considérons $\mathtt{H}$ équilatère d'équation :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

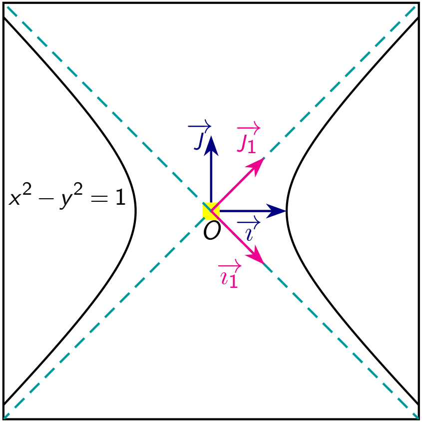
qui conduit à

$$X\,Y = \frac{a^2}{2}$$

après avoir posé :

$$\left\{\begin{array}{l} X = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{array}\right. \qquad (11)$$

La formule (11) correspond à une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, elle traduit un changement de repère via la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



Equations explicites des coniques à centre ?

Considérons H équilatère d'équation :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

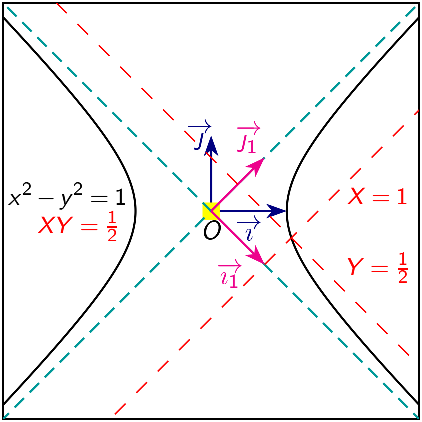
qui conduit à

$$X\,Y = \frac{a^2}{2}$$

après avoir posé :

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \qquad (11)$$

La formule (11) correspond à une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, elle traduit un changement de repère via la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



Equations explicites des coniques à centre ?

Considérons H équilatère d'équation :

$$x^2 - y^2 = a^2$$

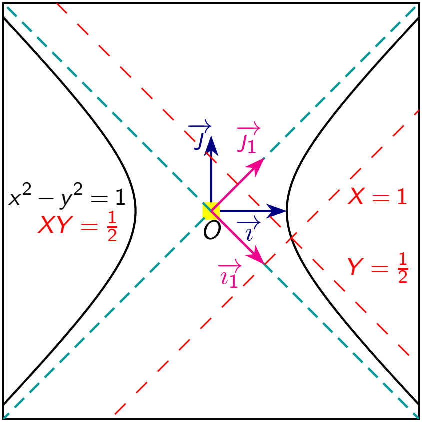
qui conduit à

$$X\,Y = \frac{a^2}{2}$$

après avoir posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{array} \right. \qquad (11)$$

La formule (11) correspond à une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, elle traduit un changement de repère via la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



Si l'hyperbole n'est pas équilatère, le nouveau repère n'est pas orthonormé.

Définition d'une primitive (surface) dans $\mathcal{E}_3$

Comme pour les courbes, il peut exister plusieurs représentations.

Définition d'une primitive (surface) dans $\mathcal{E}_3$

Comme pour les courbes, il peut exister plusieurs représentations.

Définition (Equations d'une courbe)

Une surface $\mathcal{S}$ peut être définie de plusieurs façons :

- ***Implicitement*** *: il existe une application F de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathbb{R}$ tel que les points M de la surface (et seulement eux) vérifient :*

$$F(M) = 0 \text{ ou } F(x; y; z) = 0$$

Définition d'une primitive (surface) dans $\mathcal{E}_3$

Comme pour les courbes, il peut exister plusieurs représentations.

Définition (Equations d'une courbe)

Une surface $\mathcal{S}$ peut être définie de plusieurs façons :

- ***Implicitement :*** *il existe une application F de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathbb{R}$ tel que les points M de la surface (et seulement eux) vérifient :*

$$F(M) = 0 \text{ ou } F(x;y;z) = 0$$

- ***Paramétriquement :*** *il existe une application $(u;v) \mapsto \Gamma(u;v) = (x(u;v);y(u;v);z(u;v))$ d'un pavé $[u_{min};u_{max}] \times [v_{min};v_{max}]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{E}_3$ tel que pour tout point M de la surface, il existe un couple $(u_0;v_0)$ dans $[u_{min};u_{max}] \times [v_{min};v_{max}]$ avec $M = \Gamma(u_0;v_0)$ et les coordonnées de M sont $(x(u_0;v_0);y(u_0;v_0);z(u_0;v_0))$.*

Définition d'une primitive (surface) dans $\mathcal{E}_3$

Comme pour les courbes, il peut exister plusieurs représentations.

Définition (Equations d'une courbe)

Une surface $\mathcal{S}$ peut être définie de plusieurs façons :

- **Implicitement :** *il existe une application F de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathbb{R}$ tel que les points M de la surface (et seulement eux) vérifient :*

$$F(M) = 0 \text{ ou } F(x;y;z) = 0$$

- **Paramétriquement :** *il existe une application $(u;v) \mapsto \Gamma(u;v) = (x(u;v);y(u;v);z(u;v))$ d'un pavé $[u_{min};u_{max}] \times [v_{min};v_{max}]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{E}_3$ tel que pour tout point M de la surface, il existe un couple $(u_0;v_0)$ dans $[u_{min};u_{max}] \times [v_{min};v_{max}]$ avec $M = \Gamma(u_0;v_0)$ et les coordonnées de M sont $(x(u_0;v_0);y(u_0;v_0);z(u_0;v_0))$.*
- **Explicitement :** *la courbe est le graphe d'une application f de $[x_{min};x_{max}] \times [y_{min};y_{max}]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tel que les points M de la surface aient pour coordonnées $(x;y;f(x;y))$ avec $(x;y) \in [x_{min};x_{max}] \times [y_{min};y_{max}]$.*

8 Primitives algébriques usuelles

- Les plans
- Les quadriques
- Les quartiques de révolution

Définition d'un plan

Définition (Définition d'un plan)

Soit A, B et C trois points non alignés. Le plan $\mathscr{P}$ défini par les points A, B et C est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Définition d'un plan

Définition (Définition d'un plan)

Soit A, B et C trois points non alignés. Le plan $\mathscr{P}$ défini par les points A, B et C est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Une équation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ est obtenue par la relation :

$$\overrightarrow{AM} = u\,\overrightarrow{AB} + v\,\overrightarrow{AC},\, (u;v) \in \mathbb{R}^2$$

i.e. $(1-u-v)\,\overrightarrow{AM} + u\,\overrightarrow{BM} + v\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ et $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère de $\mathscr{P}$.

Définition d'un plan

Définition (Définition d'un plan)

Soit A, B et C trois points non alignés. Le plan $\mathscr{P}$ défini par les points A, B et C est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Une équation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ est obtenue par la relation :

$$\overrightarrow{AM} = u\,\overrightarrow{AB} + v\,\overrightarrow{AC}, \, (u;v) \in \mathbb{R}^2$$

i.e. $(1-u-v)\,\overrightarrow{AM} + u\,\overrightarrow{BM} + v\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ et $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère de $\mathscr{P}$.

Une équation implicite (ou cartésienne) du plan $\mathscr{P}$ est obtenue par la relation :

$$\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

et est de la forme :

$$ax+by+cz-d=0, \, (a;b;c) \neq (0;0;0)$$

Définition d'un plan

Définition (Définition d'un plan)

Soit A, B et C trois points non alignés. Le plan $\mathscr{P}$ défini par les points A, B et C est l'ensemble des barycentres des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

Une équation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ est obtenue par la relation :

$$\overrightarrow{AM} = u\,\overrightarrow{AB} + v\,\overrightarrow{AC},\ (u;v) \in \mathbb{R}^2$$

i.e. $(1-u-v)\overrightarrow{AM} + u\,\overrightarrow{BM} + v\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ et $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère de $\mathscr{P}$.

Une équation implicite (ou cartésienne) du plan $\mathscr{P}$ est obtenue par la relation :

$$\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

et est de la forme :

$$ax + by + cz - d = 0,\ (a;b;c) \neq (0;0;0)$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

8 Primitives algébriques usuelles

- Les plans
- Les quadriques
- Les quartiques de révolution

Définition d'une quadrique

Définition (Définition d'une quadrique)

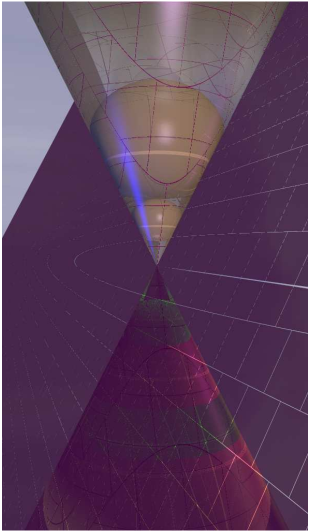
La surface $\mathcal{Q}$ est une quadrique s'il existe un polynôme Υ_3, à trois variables x, y et z, défini par :

$$\Upsilon_3(x;y;z) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + 2\beta_1 xy + 2\beta_2 xz + 2\beta_3 yz + \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z + \eta \quad (12)$$

tel que :

$$\mathcal{Q} = \{M(x;y;z) \mid \Upsilon_3(x;y;z) = 0\} \quad (13)$$

Le cône



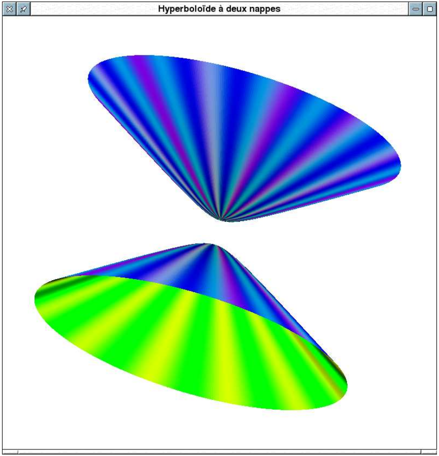
Equation implicite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Equation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} a\,v\cos(u) \\ b\,v\sin(u) \\ cv \end{pmatrix}$$
$$(u; v) \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}$$

Hyperboloïde à deux nappes



Equation implicite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

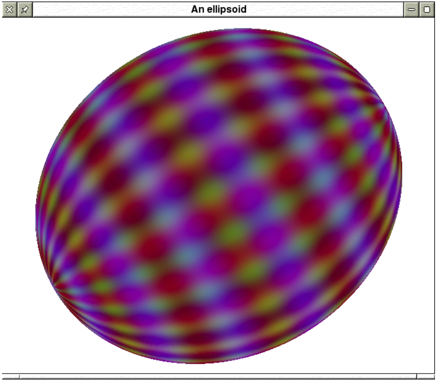
Equation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} a\cos(u)\,\mathrm{sh}(v) \\ b\sin(u)\,\mathrm{sh}(v) \\ \varepsilon c\,\mathrm{ch}(v) \end{pmatrix}$$

$$(u;v;\varepsilon) \in [0;2\pi] \times \mathbb{R} \times \{-1;1\}$$

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Ellipsoïde



Equation implicite :

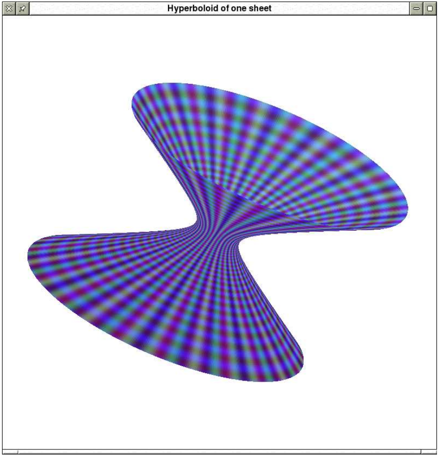
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} a\cos(u)\cos(v) \\ b\sin(u)\cos(v) \\ c\sin(v) \end{pmatrix}$$
$$(u;v) \in [0;2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

Si $a = b = c$, nous avons une sphère.

Hyperboloïde à une nappe



Equation implicite :

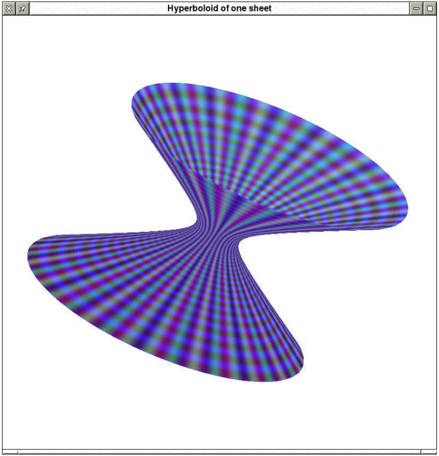
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Equation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} a\cos(u)\,\mathrm{ch}(v) \\ b\sin(u)\,\mathrm{ch}(v) \\ c\,\mathrm{sh}(v) \end{pmatrix}$$

$$(u;v) \in [0;2\pi] \times \mathbb{R}$$

Hyperboloïde à une nappe



Equation implicite :

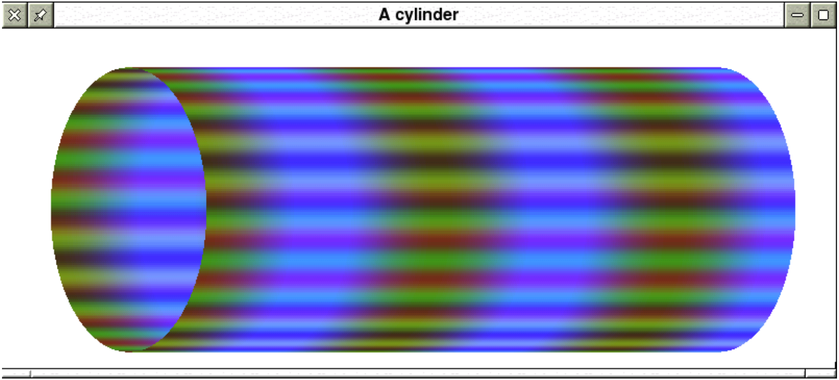
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Equation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} a\cos(u)\,\mathrm{ch}(v) \\ b\sin(u)\,\mathrm{ch}(v) \\ c\,\mathrm{sh}(v) \end{pmatrix}$$
$$(u; v) \in [0; 2\pi] \times \mathbb{R}$$

Surfaces reglées : châteaux d'eau, cheminées de centrales nucléaires

Cylindre



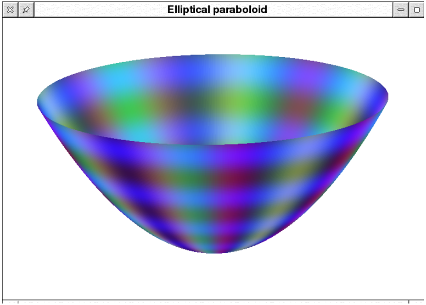
Equation implicite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} a\cos(u) \\ b\sin(u) \\ v \end{pmatrix}, \ (u;v) \in [0;2\pi] \times \mathbb{R}$$

Paraboloïde



Equation implicite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$$

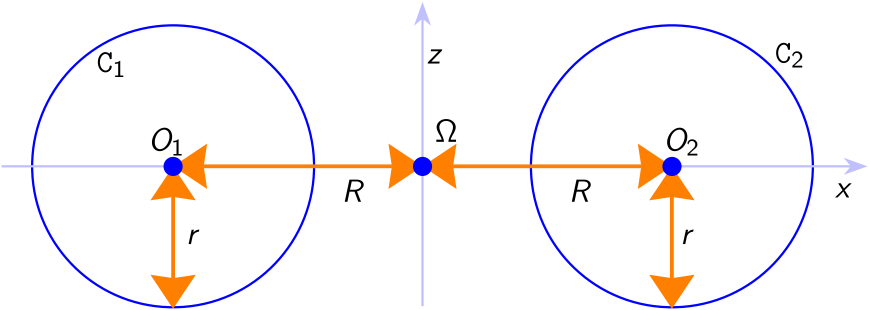
Equation paramétrique :

$$\left(\begin{array}{c} a\,t\cos(u) \\ b\,t\sin(u) \\ \dfrac{v^2}{2p} \end{array} \right), \ (u;v) \in [0;2\pi] \times \mathbb{R}$$

8 Primitives algébriques usuelles

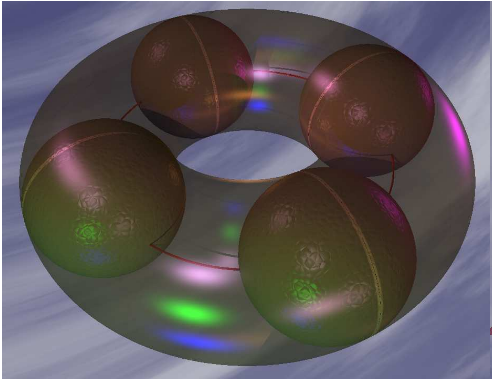
- Les plans
- Les quadriques
- Les quartiques de révolution

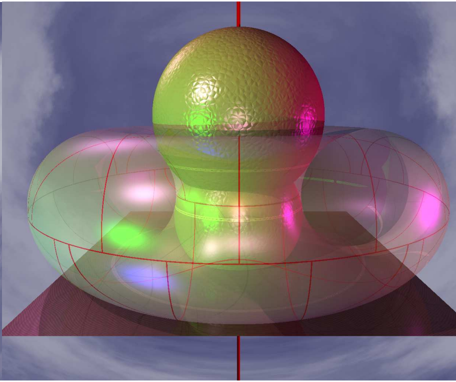
Surface de révolution : le tore (1/2)



$$\Gamma_T(\theta,\psi) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\psi \\ (R + r\cos\theta)\sin\psi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \; \theta \in [0;2\pi], \; \psi \in [0;2\pi] \tag{14}$$

Surface de révolution : le tore (2/2)





$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 - 4R^2\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

Intersection droite -sphère

Equation paramétrique de droite : $A(x_A; y_A; z_A)$, $\overrightarrow{u}(x_u; y_u; z_u)$, $\left\|\overrightarrow{u}\right\| \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x(t) & = & x_A & + & t\,x_u \\ y(t) & = & y_A & + & t\,y_u \\ z(t) & = & z_A & + & t\,z_u \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$$

Equation implicite de la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Equation paramétrique de la même sphère :

$$\begin{pmatrix} x_0 + R\cos(u)\cos(v) \\ y_0 + R\sin(u)\cos(v) \\ z_0 + R\sin(v) \end{pmatrix} (u; v) \in [0; 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Quelle équation prendre ?

Intersection droite -sphère

Equation paramétrique de droite : $A(x_A; y_A; z_A)$, $\overrightarrow{u}(x_u; y_u; z_u)$, $\left\|\overrightarrow{u}\right\| \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x(t) & = & x_A & + & t\,x_u \\ y(t) & = & y_A & + & t\,y_u \\ z(t) & = & z_A & + & t\,z_u \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}$$

Equation implicite de la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Equation paramétrique de la même sphère :

$$\left(\begin{array}{c} x_0 + R\cos(u)\cos(v) \\ y_0 + R\sin(u)\cos(v) \\ z_0 + R\sin(v) \end{array}\right) (u; v) \in [0; 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Quelle équation prendre ?

$$(x - x_A - t\,x_u)^2 + (y - y_A - t\,y_u)^2 + (z - z_A - t\,z_u)^2 = R^2$$

Intersection droite -sphère

Equation paramétrique de droite : $A(x_A; y_A; z_A)$, $\overrightarrow{u}(x_u; y_u; z_u)$, $\left\|\overrightarrow{u}\right\| \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x(t) & = & x_A & + & t\,x_u \\ y(t) & = & y_A & + & t\,y_u \\ z(t) & = & z_A & + & t\,z_u \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$$

Equation implicite de la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Equation paramétrique de la même sphère :

$$\begin{pmatrix} x_0 + R\cos(u)\cos(v) \\ y_0 + R\sin(u)\cos(v) \\ z_0 + R\sin(v) \end{pmatrix} (u; v) \in [0; 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Quelle équation prendre ?

$$(x - x_A - t\,x_u)^2 + (y - y_A - t\,y_u)^2 + (z - z_A - t\,z_u)^2 = R^2$$

$$at^2 + bt + c = 0 \text{ : 0, 1 ou 2 solutions}$$

Résolution d'une équation du second degré

Théorème

Pour résoudre l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \tag{15}$$

Résolution d'une équation du second degré

Théorème

Pour résoudre l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \tag{15}$$

on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{16}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ *admet*

Résolution d'une équation du second degré

Théorème

Pour résoudre l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \tag{15}$$

on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{16}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ *admet*

- deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *si* $\Delta > 0$.

Résolution d'une équation du second degré

Théorème

Pour résoudre l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \tag{15}$$

on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{16}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ *admet*

- deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *si* $\Delta > 0$.

- une solution réelle double $x = \dfrac{-b}{2a}$ *si* $\Delta = 0$.

Résolution d'une équation du second degré

Théorème

Pour résoudre l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \tag{15}$$

on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{16}$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ admet

- deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

- une solution réelle double $x = \dfrac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$.

- pas de solutions réelles si $\Delta < 0$.

Courbe de Bézier quadratique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 2)

Les polynômes de Bernstein de degré 2 *sont :*

$$B_0\,(t) = (1-t)^2\,, \quad B_1\,(t) = 2\,t\,(1-t)\,, \quad B_2\,(t) = t^2$$

Courbe de Bézier quadratique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 2)

Les polynômes de Bernstein de degré 2 sont :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2\,t\,(1-t), \quad B_2(t) = t^2$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

Courbe de Bézier quadratique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 2)

Les polynômes de Bernstein de degré 2 sont :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2\,t\,(1-t), \quad B_2(t) = t^2$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale quadratique de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

Courbe de Bézier quadratique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 2)

Les polynômes de Bernstein de degré 2 *sont :*

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2\,t\,(1-t), \quad B_2(t) = t^2$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale quadratique de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = B_0(t)\,\overrightarrow{OP_0} + B_1(t)\,\overrightarrow{OP_1} + B_2(t)\,\overrightarrow{OP_2} \tag{17}$$

Courbe de Bézier quadratique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 2)

Les polynômes de Bernstein de degré 2 sont :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2\,t\,(1-t), \quad B_2(t) = t^2$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale quadratique de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = B_0(t)\,\overrightarrow{OP_0} + B_1(t)\,\overrightarrow{OP_1} + B_2(t)\,\overrightarrow{OP_2} \tag{17}$$

En général, on prend t dans $[0;1]$.

Courbe de Bézier quadratique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 2)

Les polynômes de Bernstein de degré 2 sont :

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1-t), \quad B_2(t) = t^2$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale quadratique de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = B_0(t)\overrightarrow{OP_0} + B_1(t)\overrightarrow{OP_1} + B_2(t)\overrightarrow{OP_2} \tag{17}$$

En général, on prend t dans $[0;1]$.

Théorème (Courbe de Bézier polynomiale et barycentre)

Pour $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est le barycentre des points pondérés $(P_i; B_i(t))_{i\in[\![0;2]\!]}$

Courbe de Bézier rationnelle quadratique

Définition (Courbe de Bézier rationnelle)

Soit ω_0, ω_1 et ω_2 trois réels non nuls.

Courbe de Bézier rationnelle quadratique

Définition (Courbe de Bézier rationnelle)

Soit ω_0, ω_1 *et* ω_2 *trois réels non nuls.*
La courbe de Bézier rationnelle quadratique de points pondérés de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ *et* $(P_2;\omega_2)$ *est l'ensemble des points* $M(t)$

Courbe de Bézier rationnelle quadratique

Définition (Courbe de Bézier rationnelle)

Soit ω_0, ω_1 et ω_2 trois réels non nuls.
La courbe de Bézier rationnelle quadratique de points pondérés de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ est l'ensemble des points $M(t)$, barycentres des points pondérés $(P_i;\omega_i B_i(t))_{i\in[\![0;2]\!]}$.

Courbe de Bézier rationnelle quadratique

Définition (Courbe de Bézier rationnelle)

Soit ω_0, ω_1 et ω_2 trois réels non nuls.
La courbe de Bézier rationnelle quadratique de points pondérés de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ est l'ensemble des points $M(t)$, barycentres des points pondérés $(P_i;\omega_i B_i(t))_{i\in[\![0;2]\!]}$.

Théorème (Courbe de Bézier polynomiale et barycentre)

Pour $t \in \mathbb{R}$, si :

$$\sum_{i=0}^{2} \omega_i B_i(t) \neq 0$$

alors $M(t)$ est défini par :

Courbe de Bézier rationnelle quadratique

Définition (Courbe de Bézier rationnelle)

Soit ω_0, ω_1 et ω_2 trois réels non nuls.
La courbe de Bézier rationnelle quadratique de points pondérés de contrôle $(P_0;\omega_0)$, $(P_1;\omega_1)$ et $(P_2;\omega_2)$ est l'ensemble des points $M(t)$, barycentres des points pondérés $(P_i;\omega_i B_i(t))_{i\in[\![0;2]\!]}$.

Théorème (Courbe de Bézier polynomiale et barycentre)

Pour $t \in \mathbb{R}$, si :

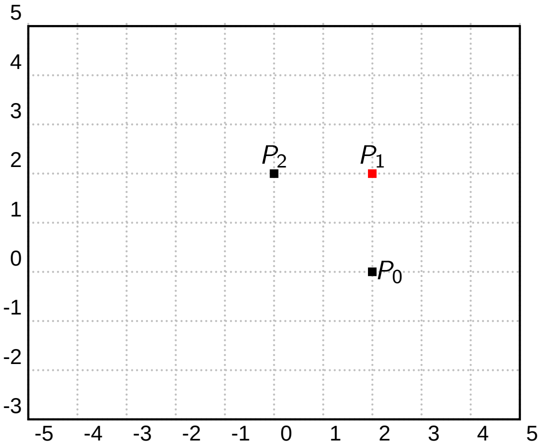
$$\sum_{i=0}^{2} \omega_i B_i(t) \neq 0$$

alors $M(t)$ est défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{2} \omega_i B_i(t)} \left(\sum_{i=0}^{2} \omega_i B_i(t) \overrightarrow{OP_i} \right)$$

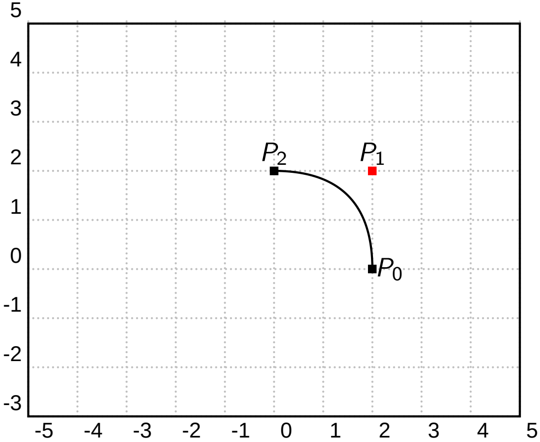
Exemple de courbes de Bézier quadratiques

Polynomiale		



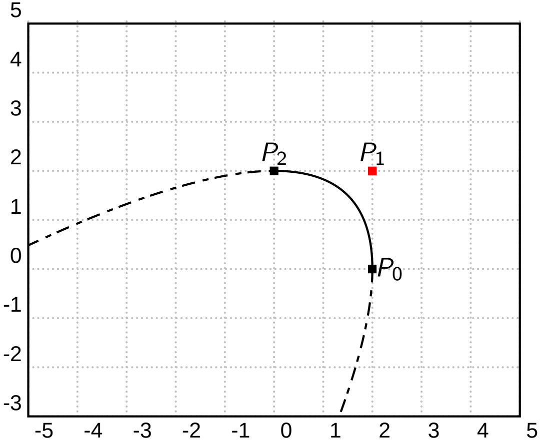
Exemple de courbes de Bézier quadratiques

Polynomiale		
Arc de parabole		



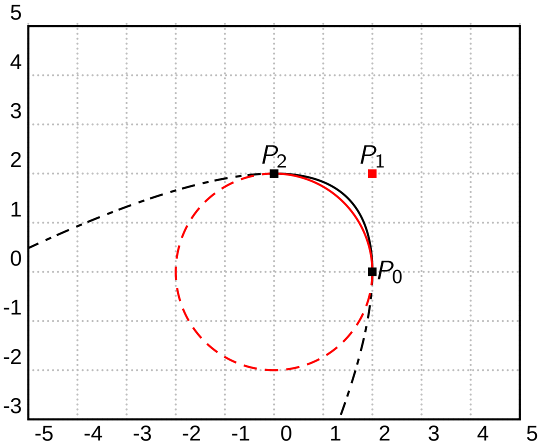
Exemple de courbes de Bézier quadratiques

Polynomiale	Rationnelle	
Arc de parabole	Arc de parabole	



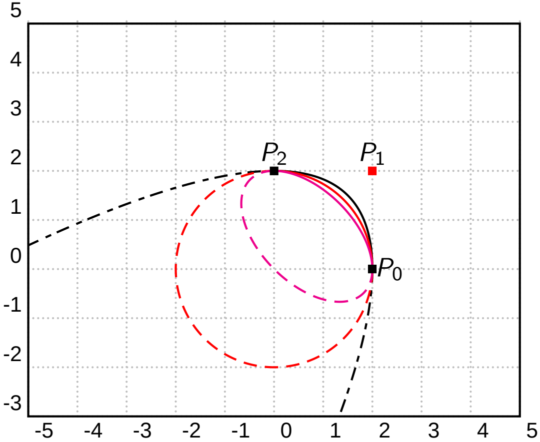
Exemple de courbes de Bézier quadratiques

Polynomiale	Rationnelle	
Arc de parabole	Arc de parabole	
	Arcs de cercle	



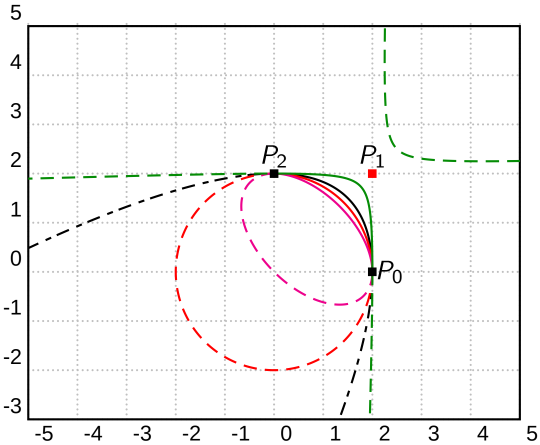
Exemple de courbes de Bézier quadratiques

Polynomiale	Rationnelle	Rationnelle
Arc de parabole	Arc de parabole	Arcs d'ellipse
	Arcs de cercle	



Exemple de courbes de Bézier quadratiques

Polynomiale	Rationnelle	Rationnelle
Arc de parabole	Arc de parabole	Arcs d'ellipse
	Arcs de cercle	Arcs d'hyperbole



Courbe de Bézier polynomiale cubique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 3)

Les polynômes de Bernstein de degré 3 sont :

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3\,t\,(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3\,t^2\,(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

Courbe de Bézier polynomiale cubique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 3)

Les polynômes de Bernstein de degré 3 sont :

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3\,t\,(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3\,t^2\,(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1, P_2 et P_3 quatre points non alignés de $\mathcal{P}$.

Courbe de Bézier polynomiale cubique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 3)

Les polynômes de Bernstein de degré 3 sont :

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3\,t\,(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3\,t^2\,(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1, P_2 et P_3 quatre points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale cubique de points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

Courbe de Bézier polynomiale cubique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 3)

Les polynômes de Bernstein de degré 3 sont :

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3\,t\,(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3\,t^2\,(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1, P_2 et P_3 quatre points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale cubique de points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = B_{0,3}(t)\,\overrightarrow{OP_0} + B_{1,3}(t)\,\overrightarrow{OP_1} + B_{2,3}(t)\,\overrightarrow{OP_2} + B_{3,3}(t)\,\overrightarrow{OP_3} \tag{18}$$

Courbe de Bézier polynomiale cubique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 3)

Les polynômes de Bernstein de degré 3 sont :

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3\,t\,(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3\,t^2\,(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1, P_2 et P_3 quatre points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale cubique de points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = B_{0,3}(t)\,\overrightarrow{OP_0} + B_{1,3}(t)\,\overrightarrow{OP_1} + B_{2,3}(t)\,\overrightarrow{OP_2} + B_{3,3}(t)\,\overrightarrow{OP_3} \qquad (18)$$

En général, on prend t dans $[0;1]$.

Courbe de Bézier polynomiale cubique

Définition (Polynômes de Berstein de degré 3)

Les polynômes de Bernstein de degré 3 sont :

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3\,t\,(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3\,t^2\,(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3$$

Définition (Courbe de Bézier polynomiale)

Soit P_0, P_1, P_2 et P_3 quatre points non alignés de $\mathcal{P}$.
La courbe de Bézier polynomiale cubique de points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 est l'ensemble des points $M(t)$ défini par :

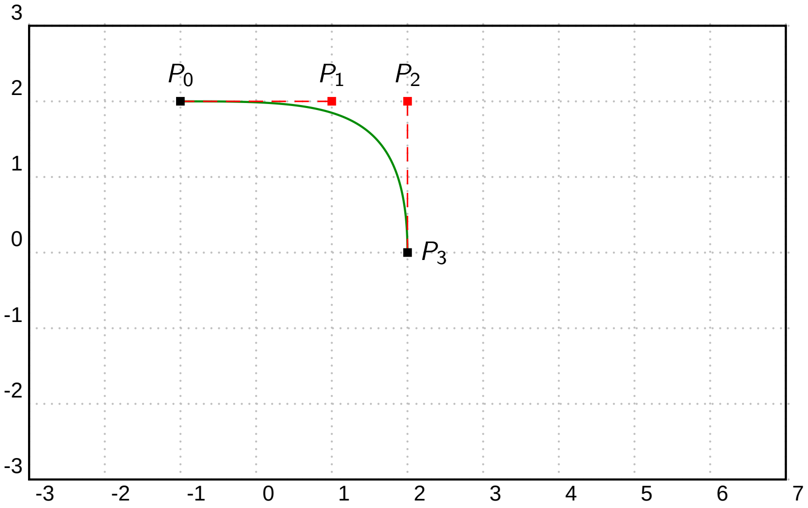
$$\overrightarrow{OM(t)} = B_{0,3}(t)\,\overrightarrow{OP_0} + B_{1,3}(t)\,\overrightarrow{OP_1} + B_{2,3}(t)\,\overrightarrow{OP_2} + B_{3,3}(t)\,\overrightarrow{OP_3} \qquad (18)$$

En général, on prend t dans $[0;1]$.

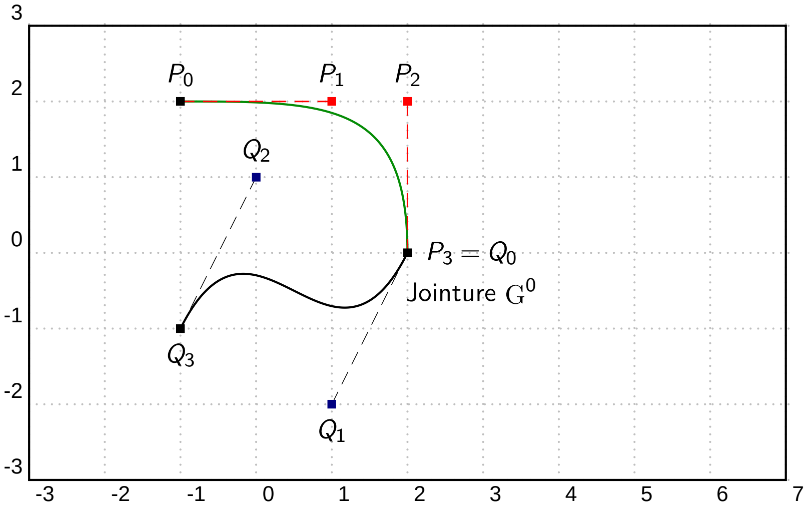
Théorème (Courbe de Bézier polynomiale et barycentre)

Pour $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est le barycentre des points pondérés $(P_i; B_{i,3}(t))_{i \in [\![0;3]\!]}$

Exemple de courbes de Bézier cubiques



Exemple de courbes de Bézier cubiques



Exemple de courbes de Bézier cubiques