1 Pile ou face

La loi de distribution X utilisée pour modéliser un pile ou face est appelé loi de Bernoulli. Elle dépend d'un paramètre θ qui est la probabilité qu'un événement survienne (faire pile dans notre cas) :

$$\mathbb{P}(X = x; \theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } x = P \\ 1 - \theta & \text{si } x = F \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Qu'on note aussi

$$\mathbb{P}(X = x; \theta) = \theta \mathbf{1}_{\{P\}}(x) + (1 - \theta)\mathbf{1}_{\{F\}}(x)$$

avec $\mathbf{1}_{\{P\}}(x)$ qui vaut 1 lorsque $x = P$, 0 sinon.

Dans le cas d'une analyse statistique, on dispose de n réalisations indépendantes et identiquement distribuées (iid) de pile ou face que l'on note $x_1, \ldots, x_n$. La loi ayant généré ces réalisations est inconnue, on suppose ici que c'est une loi de Bernoulli de paramètre inconnu θ. Le but est de déterminer un estimateur $\hat{\theta}$ de θ à l'aide des données. Pour cela, on va déterminer le paramètre le plus probable. On le définit comme celui maximisant la vraisemblance des données définie par :

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i; \theta)$$

Calcul de la vraisemblance

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\theta \mathbf{1}_{\{P\}}(x) + (1 - \theta)\mathbf{1}_{\{F\}}(x)\right) \\ &= \prod_{i|x_i=P} \left(\theta \mathbf{1}_{\{P\}}(x) + (1 - \theta)\mathbf{1}_{\{F\}}(x)\right) \prod_{i|x_i=F} \left(\theta \mathbf{1}_{\{P\}}(x) + (1 - \theta)\mathbf{1}_{\{F\}}(x)\right) \\ &= \prod_{i|x_i=P} \theta \prod_{i|x_i=F} (1 - \theta) \\ &= \theta^{n_P}(1 - \theta)^{n_F} \end{aligned}$$

avec n_P le nombre de piles et n_F le nombre de face. On a $n = n_P + n_F$.

On travaille généralement avec la log-vraisemblance qui est plus simple à manipuler.

$$LL(x_1, \ldots, x_n; \theta) = n_p \log(\theta) + n_f \log(1 - \theta)$$

Maximisation de la vraisemblance Pour maximiser la vraisemblance, on calcule sa dérivée par rapport à θ. Puis on cherche les valeurs de θ pour lesquelles celle-ci s'annule.

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x_1, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} &= n_p \times \frac{1}{\theta} + n_F \times \frac{-1}{1 - \theta} \\ &= \frac{n_p(1 - \theta) - \theta n_F}{\theta(1 - \theta)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial LL(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial\theta} &= 0\\
\frac{n_P(1-\theta)-\theta n_F}{\theta(1-\theta)} &= 0\\
n_P(1-\theta)-\theta n_F &= 0\\
n_P-\theta(n_F+n_P) &= 0\\
\theta = \frac{n_P}{n_P+n_F} = \frac{n_p}{n}
\end{aligned}
$$