第七届全国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷参考解答
(数学类, 2016年3月)

一、(本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体：矩阵的每行每列只有一个非零元素，且该非零元素为 1. 则 $\sum\limits_{A\in\Gamma}|A| = \underline{0}$.

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是 $\underline{p>1}$.

(3) 设 $D: x^2+2y^2 \leqslant 2x+4y$, 则积分 $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy = \underline{3\sqrt{2}\pi}$.

(4) 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$, 则 $X = \underline{(1,0,1)}$ 或 $\underline{(-1,0,-1)}$ 或 $\underline{(1,t,-1)}$ 或 $\underline{(-1,t,1), t\in\mathbb{R}}$.

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面，它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

解: 由于形如 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 的平面与 S 只能交于直线或空集, 所以可以设平面 σ 的方程为

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma,$$

它与 S 交线为圆. 令 $x=\cos\theta$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$, 则 σ 与 S 的交线可表达为

$$\Gamma(\theta)=\left(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma\right),\ \ \theta\in[0,2\pi].$$

由于 $\Gamma(\theta)$ 是一个圆，所以它到一个定点 $P=(a,b,c)$ 的距离为常数 R. 于是有恒等式

$$(\cos\theta-a)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-b\right)^2+\left(\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma-c\right)^2=R^2.$$

.........（5分）

利用

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta),\ \ \sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

我们可以将上式写成

$$A\cos 2\theta+B\sin 2\theta+C\cos\theta+D\sin\theta+E=0,$$

其中 A, B, C, D, E 为常数. 由于这样的方程对所有 $\theta\in[0,2\pi]$ 恒成立，所以 $A=B=C=D=E=0$.

........（10分）

特别地，我们得到

$$A=\frac{1}{2}(\alpha^2+1)-\frac{1}{4}(\beta^2+1)=0,\ \ B=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta=0;$$

于是得到 $\alpha=0$, $\beta=\pm 1$, 平面 σ 的法向量为

$$(-\alpha,-\beta,1)=(0,1,1)\ or\ (0,-1,1)$$

的非零倍数.

......（15 分）

注：如果求得法向量，但没有证明这是所有可能的 σ 的法向量，扣 5 分.

三、证明题（15分）设 A, B 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $\operatorname{tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \operatorname{tr}(A^2B^2)$.

证明 存在可逆方阵 T 使得 $T^{-1}AT = \tilde{A}$ 为对角阵. 令 $T^{-1}BT = \tilde{B}$. 则 $\tilde{B}$ 为实对称方阵, 且

$$\operatorname{tr}\left((AB)^2\right) = \operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2), \quad \operatorname{tr}(A^2B^2) = \operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)$$

........(5分)

令 $\tilde{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$, $\tilde{B} = (b_{ij})_{n\times n}$. 则

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji} \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ii}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ij}^2 \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2)b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ii}^2.\end{aligned}$$

........(12分)

于是

$$\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2) - \operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) = -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_{ii} - a_{jj})^2 b_{ij}^2 \leqslant 0.$$

............(15分)

四、（本题20分）设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令 P_A,P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: $P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi$.

证明 设 Γ 的圆心为 O, $\alpha_i=\frac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1}$, $B_{n+1}=B_1$, 则 $P_A=2\sum_{i=1}^n\tan\alpha_i$, $P_B=2\sum_{i=1}^n\sin\alpha_i$.

.... (2分)

先证: 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x>x. \tag{1}$$

令 $g(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x$, 则 $g(0)=0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1\\&=\frac{2\cos^2x+1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1\\&>\frac{3\sqrt[3]{\cos^2x\cdot\cos^2x\cdot 1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1=0\end{aligned}$$

故 $g(x)$ 严格单调递增, 因而 $g(x)>g(0)=0$. (1) 式得证.

...... (10分)

$$\begin{aligned}P_A^{\frac{1}{3}}\cdot P_B^{\frac{2}{3}}&=2\left(\sum_{i=1}^n\tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^n\sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}}\\&=2\left(\sum_{i=1}^n\left(\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^n\left(\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\\&\geqslant 2\sum_{i=1}^n\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\cdot\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i\\&>2\sum_{i=1}^n\alpha_i=2\pi.\end{aligned}$$

.... (20分)

五、（本题15分）设 $a(x), f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $a(x)>0$. 已知 $\int_0^{\infty} a(x)dx=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{a(x)}=0$, $y'(x)+a(x)y(x)=f(x), x\in\mathbb{R}$.
求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

证明 令 $F(x)=\int_0^x a(t)\,dt$, 则

$$y(x)=Ce^{-F(x)}+\int_0^x f(t)e^{F(t)-F(x)}\,dt.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 x_0 当 $t\geqslant x_0$ 时, 有 $|f(t)|\leqslant\varepsilon a(t)$. ………(2分)

$$\int_0^x f(t)e^{F(t)-F(x)}\,dt=e^{-F(x)}\int_0^{x_0} f(t)e^{F(t)}\,dt+e^{-F(x)}\int_{x_0}^x f(t)e^{F(t)}\,dt.$$

注意到 …………(5分)

$$\begin{aligned}\left|e^{-F(x)}\int_{x_0}^x f(t)e^{F(t)}\,dt\right| &\leqslant e^{-F(x)}\int_{x_0}^x \varepsilon a(t)e^{F(t)}\,dt\\ &=\varepsilon e^{-F(x)}e^{F(t)}\Big|_{t=x_0}^{t=x}\\ &=\varepsilon\left(1-e^{-F(x)+F(x_0)}\right)\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 ……………(10分)

$$\varlimsup_{x\to+\infty}|y(x)|\leqslant\lim_{x\to+\infty}Ce^{-F(x)}+\lim_{x\to+\infty}e^{-F(x)}\int_0^{x_0}|f(t)|\cdot e^{-F(t)}\,dt+\varepsilon=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{x\to+\infty}|y(x)|=0$.
……………(20分)

六、（本题15分）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足方程

$$xf(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt + \frac{x^2}{4}. \tag{1}$$

求 $f(x)$.

解 令 $g(x) = f(x) - x$, 则有

$$xg(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} g(t)\,dt \tag{2}$$

...........(5分)

对于 $x > 0$, 根据积分平均值定理, 存在 $x_1 \in (0, x)$ 使得

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} g(t)\,dt = g(x_1)\frac{x}{2}.$$

因而

$$g(x) = g(x_1).$$

...........(10分)

设

$$x_0 = \inf\{t \in (0, x) \mid f(t) = f(x)\}.$$

则有 $g(x_0) = g(x)$. 若 $x_0 > 0$, 则重复上面的过程, 可知存在 $y_0 \in (0, x_0)$, 使得 $g(y_0) = g(x_0) = g(x)$. 这与 x_0 的取法矛盾. 因此, 必有 $x_0 = 0$. 这说明 $g(x) = g(0)$.

同理, 对 $x < 0$, 也可证明 $g(x) = g(0)$.

总之, $g(x)$ 是常数. 于是 $f(x) = x + C$, C 是常数. ....(15分)