2017 年数学竞赛预赛（非数学类）试题评分标准及参考答案

一 1. 已知可导函数$f(x)$满足$\cos x f(x)+2\int_0^x f(t)\sin t dt=x+1$，则 $f(x)$

解： 在方程两边求导得

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1,\ f'(x)+f(x)\tan x=\sec x.$$

从而 $f(x)=e^{-\int\tan x dx}\left(\int\sec x e^{\int\tan x dx}dx+c\right)$

$$=e^{-\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\ln\cos x}dx+c\right)=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+c\right)$$

$$=\cos x(\tan x+c)=\sin x+c\cos x$$

由于 $f(0)=1$，故 $f(x)=\sin x+\cos x$。

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解 由于 $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$$=\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)\to 1。$$

3. 设 $w=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy, v=x+cy$，其中 c 为非零常数。则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$__________。

解: $w_x=f_1+f_2$，$w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$，

$$w_y=c(f_2-f_1),$$

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial y}(f_2-f_1)=c(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22})=c^2(f_{11}-2f_{12}+f_{22})。$$

所以 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}$。

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续，且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$________

解：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，所以 $f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$。

这样 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(\xi)\sin^4 x}{2x^4}=3$。

5 不定积分 $I=\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx=$________.

解：由于

$$I=2\int\frac{e^{-\sin x}\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}dx\overset{\sin x=v}{=}2\int\frac{ve^{-v}}{(1-v)^2}dv=2\int\frac{(v-1+1)e^{-v}}{(1-v)^2}dv$$

$$=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv+2\int\frac{e^{-v}}{(v-1)^2}dv=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv-2\int e^{-v}d\frac{1}{v-1}$$

$$=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv-2\left(e^{-v}\frac{1}{v-1}+\int\frac{e^{-v}}{v-1}dv\right)=-\frac{2e^{-v}}{v-1}+C=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C。$$

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域为 V，则三重积分 $\iiint\limits_V zdxdydz=$__________.

解：使用球面坐标

$$I=\iiint\limits_V zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2=2\pi$$
。

二（本题满分 14 分）

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度 α，定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt}=0$ 且 $\frac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2}>0$. 证明 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.

解：由于 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt}=\left(f_x,f_y\right)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 α 成立，故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$，即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点. -----4 分

记 $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$，则

$$\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0.$$

-----10 分

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立，故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵，而 $f(0,0)$ 是 f 极小值. ------14 分

三 (本题满分 14 分) 设曲线 Γ 为在

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x+z=1,\quad x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

上从 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 $I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$

解：记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段，则 $x=t,y=0,z=1-t,0\le t\le 1$，

$$\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 td(1-t)=-\frac{1}{2}.$$ -----4 分

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ，方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_\Gamma+\int_{\Gamma_1}\right)ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=-\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy.$$

------8 分

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积，而 Σ 在 zx 面上投影面积为零. 故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_\Sigma dydz+dxdy.$$

曲线 Γ 在 xy 面上投影的方程为

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1.$$ ------12 分

又该投影（半个椭圆）的面积得知 $\iint_\Sigma dxdy=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理，$\iint_\Sigma dydz=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

这样就有 $I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. ------14 分

四(本题满分 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)dx\le 1$，则 $\forall a,b(a<b)$，$\int_a^b f(x)dx\le\dfrac{b-a+2}{2}$。

证. 由于 $\forall a,b(a<b)$，有

$$\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx\le\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)dx\le 1。$$

因此 $$\int_a^b dt\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx\le b-a。$$ ------4 分

然而 $$\int_a^b dt\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)dx=\int_a^b f(x)\left(\int_a^b e^{-|t-x|}dt\right)dx,$$

其中 $$\int_a^b e^{-|t-x|}dt=\int_a^x e^{t-x}dt+\int_x^b e^{x-t}dt=2-e^{a-x}-e^{x-b}.$$

这样就有 $$\int_a^b f(x)(2-e^{a-x}-e^{x-b})dx\le b-a\quad\ldots\ldots(1)$$ ------10 分

即 $$\int_a^b f(x)dx\le\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x}f(x)dx+\int_a^b e^{x-b}f(x)dx\right].$$

注意到 $\int_a^b e^{a-x}f(x)dx=\int_a^b e^{-|a-x|}f(x)dx\le 1$，和 $\int_a^b f(x)e^{x-b}dx\le 1$。-----13 分

把以上两个式子入(1)，即得结论。 ------15 分

五(本题满分 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列，p 为固定的正整数。若

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，其中 λ 为常数，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$。

证明：对于 $i=0,1,\quad,p-1$，记 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$。由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而

$$\lim_{n}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\quad+A_n^{(i)}}{n}=\lambda。$$ ------5 分

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\quad+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$。 由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}。$$ ------10 分

对正整m，设$m=np+i$，其中$0,1,\quad,p-1$，从而可以把正整数依照i分为p个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}，故\lim_{n\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}。\qquad ------15分$$