北京科技大学 2015--2016 学年第二学期

工科数学分析 II 期中试卷

院(系)______ 班级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________.

题号	一	二	21	22	课程考核成绩
得分					

说明：1、要求正确地写出主要计算或推导过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、学院、班、学号、姓名均需写全，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上答题，在其它纸张上的解答一律无效.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

一、填空题(本题共10小题，每小题4分，满分40分，小题有两个空的，每空2分)

1. 设 $F(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega} f(u,v,w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$，其中 $\Omega=\{(u,v,w)|a\le u\le x, b\le v\le y, c\le w\le z\}$，则 $\dfrac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}=$ ______

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ____________.

3. 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，且向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$，则 $\vec{a}$ 在 x 轴上的投影为______，在 y 轴上的分向量为______.

4. 设 $u=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)$，则 u 在点 $P_0(1,0,2)$ 处沿 $g(x,y,z)=xyz$ 在点 P_0 处的梯度方向的方向导数为__________.

5. 设 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，它满足关系式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u(x,2x)=x$，$u_1'(x,2x)=x^2$，则 $u_{11}''(x,2x)=$ ________，$u_{12}''(x,2x)=$ ________.

6. 设 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{2}{3}\pi$，向量 $\vec{m}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$ 与 $\vec{n}=3\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，则 $\lambda=$ ______

7. 设 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 1\}$，则二重积分 $\iint\limits_{D}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值等于________.

8. 设 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 围成的区域，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$ 的值等于____________.

9. 过直线 $L:\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程为

__________________________或__________________________.

10. 设区域 $D: x^2+y^2 \le 1$，则二重积分 $\iint\limits_{D} \sqrt[3]{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值等于____________

二、单选题(本题共10小题，每小题10分，满分40分，请将正确答案的字母填在题后的括号内)

11. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，则有【　】.

(A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)} = 3\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$.

(C) 曲线 $\begin{cases} y=0, \\ z=f(x,y) \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$.

(D) 曲线 $\begin{cases} y=0, \\ z=f(x,y) \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$.

12. 两圆柱面 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积为【　】.

(A) $15R^2$.　(B) $16R^2$.　(C) $17R^2$.　(D) $18R^2$.

13. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z=f(x\mathrm{e}^y, x, y)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$【　】.

(A) $\mathrm{e}^y f_1' + x\mathrm{e}^{2y} f_{11}'' + \mathrm{e}^y f_{13}'' + x\mathrm{e}^y f_{21}'' + f_{23}''$.

(B) $\mathrm{e}^y f_1' + \mathrm{e}^{2y} f_{11}'' + \mathrm{e}^y f_{13}'' + x\mathrm{e}^y f_{21}'' + f_{23}''$.

(C) $\mathrm{e}^y f_1' + x\mathrm{e}^{2y} f_{11}'' + \mathrm{e}^y f_{13}'' + x f_{21}'' + f_{23}''$.

(D) $\mathrm{e}^y f_1' + x f_{11}'' + \mathrm{e}^y f_{13}'' + x\mathrm{e}^y f_{21}'' + f_{23}''$.

14. 曲面 $2x^2+3y^2+4z^2=9$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法线方程为【　】.

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.　(B) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

(C) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.　(D) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

15. 设 Ω 为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}v =$【　】.

(A) $\dfrac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$.　(B) $\dfrac{\pi}{5}(\sqrt{2}-1)$.

(C) $\dfrac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)$.　　　　(D) $\dfrac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$.

16.设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于【　】.

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

17. 设有空间区域 $\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge 0\right\}$,

$\Omega_2=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\right\}$，　则有【　】.

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\,\mathrm{d}v$.　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\,\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\,\mathrm{d}v$.　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\,\mathrm{d}v$.

18. 积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}z$ 写成柱面坐标的形式为【　】.

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}r^2\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r}f(\sqrt{r^2+z^2})\mathrm{d}z$.

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r}f(\sqrt{r^2+z^2})\mathrm{d}z$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}r\,\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r}f(\sqrt{r^2+z^2})\mathrm{d}z$.

(D) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}r\,\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{3}r}f(\sqrt{r^2+z^2})\mathrm{d}z$.

19. 二次积分 $\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x=$【　】.

(A) $\int_0^a x e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x$.　(B) $\int_0^a a e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^a (a-x)e^{a(m-x)}f(x)\mathrm{d}x$.　(D) $\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x$.

20. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是【　】.

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\big(f(x,y)-f(0,0)\big)=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 或 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y]=0$.

三、解答题(本题共2小题, 每题10分, 满分20分)

21. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

22. 设 $\ln(3\sqrt{3}R^5)$ 是函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ $(x>0,y>0,z>0)$ 上的最大值，证明：对任何正数 a,b,c，有

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

2015—2016 工科数学分析 II 参考答案

一、填空题

1. $f(x,y,z)$　　2. z　　3. 13　$7\vec{j}$　　4. 0　　5. $-\frac{4}{3}x$　$\frac{5}{3}x$

6. 40　　7. $\frac{1}{6}$　　8. $\frac{1024}{3}\pi$　　9. $9x+y-z=27$　$9x+17y-17z=27$　　10. $\frac{3}{4}\pi$

二、选择题　　CBADA　BCDDC

21.

解：设该点为 $P(x,y,z)$　$d^2=x^2+y^2+z^2$.

点 P 位于 $z=x^2+y^2$ 及 $x+y+z=1$ 上

构造拉格朗日函数　设 $F(x,y,z,\lambda,u)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+u(x+y+z-1)$

$F_x=2x-2\lambda x+u=0$　　由题意，距离存在最大值与最小值

$F_y=2y-2\lambda y+u=0$　解得　$x_1=y_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　$\cancel{y=\sqrt{2}}$　$z_1=2-\sqrt{3}$　$d_1=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$

$F_z=2z+\lambda+u=0$　　$x_2=y_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$　$z_2=2+\sqrt{3}$　$d_2=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$

$F_\lambda=z-x^2-y^2=0$

$F_u=x+y+z-1=0$.　　$\therefore$ 原点到椭圆最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

22.

证明：$f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z=\ln xyz^3\le\ln(3\sqrt{3}R^5)$

即 $xyz^3\le 3\sqrt{3}R^5$　　又 $\because x^2+y^2+z^2=5R^2$

$\therefore xyz^3\le 3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$

两边同时平方得　$x^2y^2z^6\le 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5$

令 $a=x^2$，$b=y^2$，$c=z^2$　得 $abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.