北京科技大学 2019-2020 第一学期

线性代数 A 模拟试卷 答案

一、选择题

1. 先把A的第 1 行加到第 3 行，再把所得矩阵的第 1 行与第 2 行交换得到B，由初等行变换与初等矩阵的关系，得$P_1P_2A=B$，因此选 C。

2. 按第一列展开得：$f(x)=-4x-4$，$f(x)$的一次项系数与常数项系数相等。因此选 A。

3. AB为m阶方阵，当$m>n$时，由$r(A)\leqslant n,r(B)\leqslant n$，得：$r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}\leqslant n<m$，此时$|AB|=0$，因此选 B。

4. 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，则存在不全为零得数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=O$，两边同时左乘 A，得到：$x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+\cdots+x_nA\alpha_n=O$，因此$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$线性相关。因此选 A。

5. $Q\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&t-6\\0&0&0\end{pmatrix}$，$t=6$时，$r(Q)=1$；$t\neq 6$时，$r(Q)=2$。$PQ=O$，

有$r(P)+r(Q)\leqslant 3$。因此：$t\neq 6$时，$1\leqslant r(P)\leqslant 3-r(Q)=1$，$r(P)$一定为 1；而$t=6$时，$1\leqslant r(P)\leqslant 3-r(Q)=2$，$r(P)$可能为 1 或 2。因此，选 C。

6. $A^*\neq O$，而A^*的元素均是A的代数余子式，则说明A至少有一个$n-1$阶余子式不为 0，即$r(A)\geqslant n-1$。因为$Ax=b$有解且不唯一，则$r(A)\leqslant n-1$。因此，$r(A)=n-1$，即$Ax=O$的基础解系仅含一个非零解向量。因此选 B。

7. 易知①②是正确的，现考察③④是否正确：$A^T=A,B^T=B$，$|\lambda E-AB|=|(\lambda E-AB)^T|=|\lambda E-B^TA^T|=|\lambda E-BA|$，因此$AB$和$BA$有相同的特征值，③正确；$A$是可逆矩阵，则有$A^{-1}(AB)A=BA$，则$AB\sim BA$，则$AB$

和BA有相同的特征值，④正确。因此，选 D。

8. $|\lambda E-A|=(\lambda-4)\lambda^3=0$，则$A$的特征值为$4,0,0,0$；$A$为实对称阵，故存在正交矩阵$P$，使得$P^TAP=P^{-1}AP=B$，即$A$与$B$合同且相似。因此，选 A。

9. 对 A 选项， A^*正定是A正定的必要条件，但不充分，如：

$A=-E_{3\times3}$，则$A^*=|A|A^{-1}=-(-E)^{-1}=E$，$A^*$正定，但$A$不正定。

对 C 选项，正惯性指数不一定为 n。

对 D 选项，A正定$\Leftrightarrow$存在 n 阶可逆矩阵C，使$A=C^TC$。但 D 中没有要求 C 可逆，因此 D 错误。如：

$C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A=C^TC=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$|A|=0$，A 不正定。

对于 B 选项，A 正定，且 A 为实对称阵，则有$A^T=A$，且 A 的特征值$\lambda>0$，两边求逆，得$(A^T)^{-1}=A^{-1}=(A^{-1})^T$，因此$A^{-1}$为实对称阵，且其特征值为$\dfrac{1}{\lambda}>0$，因此$A^{-1}$正定；反之，$A^{-1}$正定，故$(A^{-1})^T=A^{-1}$，且$A^{-1}$的特征值$\mu>0$。两边求逆，得$A^T=A$，因此 A 为实对称阵，且其特征值为$\dfrac{1}{\mu}>0$，因此 A 正定。即：

A 正定$\Leftrightarrow A^{-1}$正定

二、填空题

1. $AB=2A+B\Longrightarrow(A-E)B=2(A-E)+2E\Longrightarrow(A-E)(B-2E)=2E$，

因此$A-E$可逆，且$A-E=\dfrac{1}{2}B-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。

2. 由 $A_{ij}+a_{ij}=0$得$A^T=-A^*$，因此，两边同时左乘方阵A，并取行列式，得到：

$|AA^T|=|-AA^*|=-||A|E|=-|A|^3=|A|^2$，$|A|$为 0 或-1。又因为

$r(A)=r(A^T)=r(-A^*)=r(A)$和$r(A^*)=\begin{cases} n，当r(A)=n \\ 1，当r(A)=n-1 \\ 0，当r(A)\leqslant n-2 \end{cases}$，可得：

$r(A)$为 0 或 3，但A为非零矩阵，即$r(A)$不为零，即$r(A)=3$，因此：

$|A|=-1$。

3. $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & -5 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得

$a=-2$。

4. 由$BA^T=O$，得$r(B)+r(A^T)=r(B)+r(A)\leqslant 3$。因为$B\neq O$，则$r(B)\geqslant 1$，

因此$r(A)<3$，即$|A|=0$，解得$a=-\dfrac{3}{2}$。

5. 由题意可知，$Ax=b$通解结构为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$（ξ_1,ξ_2为$Ax=O$的基础解

系，η为$Ax=b$的一个特解)。$A(\eta_1-\eta_2)=O, A[3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2)]=O$，

因此$\eta_1-\eta_2, 3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2)$为$Ax=O$的解向量。

$\eta_1-\eta_2=(-1\ \ 0\ \ 3\ \ -4)^T$，$3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2)=(-1\ \ 4\ \ 3\ \ -12)^T$，易

知$\eta_1-\eta_2, 3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2)$线性无关，则$\xi_1,\xi_2$可取为

$\eta_1-\eta_2, 3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2)$。$\eta$可取$\dfrac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)$，$\eta=\left(\dfrac{3}{2}\ \ 1\ \ \dfrac{1}{2}\ \ -1\right)^T$，因

此$Ax=b$通解为$k_1(-1\ \ 0\ \ 3\ \ -4)^T+k_2(-1\ \ 4\ \ 3\ \ -12)^T+\left(\dfrac{3}{2}\ \ 1\ \ \dfrac{1}{2}\ \ -1\right)^T$，

k_1,k_2为任意常数。

6. 矩阵A与B相似，则矩阵A与B特征值相同，即矩阵B的特征值为$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}$，

因此B^{-1}的特征值为$2,3,4,5$，$B^{-1}-E$的特征值为$1,2,3,4$。

因此，$|B^{-1}-E|=1\times2\times3\times4=24$。

7. A 相似于对角矩阵，则对角矩阵的对角元素为 A 的特征值，且应存在 3 个线性无关的特征向量。$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ -x & \lambda-1 & -y\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，故无论 x,y 为何值，均有 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$。对于二重 $\lambda_1=\lambda_2=1$，应有两个线性无关的特征向量，即方程组 $(E-A)x=O$ 应有两个线性无关的解向量。

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -x-y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，当 $x+y=0$ 时，$r(E-A)=1$，

$(E-A)x=O$ 有两个线性无关的解向量，此时 A 相似于对角矩阵。

8. 二次型对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$，其各阶顺序主子式为 $\Delta_1=1$，

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2$，$\Delta_3=-5t^2-4t$。$f$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 正定 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}1-t^2>0\\ -t(5t+4)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<t<1\\ -\dfrac{4}{5}<t<0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{4}{5}<t<0$$

三、

（1）按第 4 列展开，得：

$$D_4=-a_0\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ x & -1 & 0\\ 0 & x & -1\end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & x & -1\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}x & -1 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}+(a_3+x)\begin{vmatrix}x & -1 & 0\\ 0 & x & -1\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix}$$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$

（2）利用加边法，原行列式变为：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1\end{vmatrix}\xrightarrow{(-x_i)r_1+r_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+\sum\limits_{i=2}^{n+1}x_ic_i}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}{x_i}^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2$$

四、

记其增广矩阵为(A,β)，则

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a\end{pmatrix}$$

（1）$b-3a=2-2a=0$，即$a=1,b=3$时，$r(A)=r(A,\beta)$，方程组有解。

（2）$a=1,b=3$时，$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，获得同解方程组：

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+x_5-2\\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3\end{cases}$$

令x_3,x_4,x_5为自由变量，则有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

五、

（1）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ -a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$a=0 \quad r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=1 \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，极大线性无关组为α_1（$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都可以，但一般选取表示其他向量简单的极大线性无关组）。此时：$\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_2=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_1$

(2) $a\neq 0 \quad (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

即$a=-10 \quad r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3 \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，极大线性无关组为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$。此时：$\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$

六、

（1）二次型的矩阵的秩为 2，$A=\begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，即

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a=0$$

（2）a=0 时，$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2\lambda=0$

则 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$

对于$\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组$(2E-A)x=O$

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得两个线性无关的特征向量：$\xi_1=(1\ \ 1\ \ 0)^T,\xi_2=(0\ \ 0\ \ 1)^T$

对于$\lambda_3=0$，解齐次线性方程组$-Ax=O$，解得特征向量为$\xi_3=(-1\ \ 1\ \ 0)^T$.
易知三者正交，因此将其单位化，得：

$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1\ \ 0)^T,\eta_2=(0\ \ 0\ \ 1)^T,\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1\ \ 1\ \ 0)^T$

取$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则二次型在正交变换下的标准形为$f=2{y_1}^2+2{y_2}^2$

七、

$A^2=E\Rightarrow(A+E)(A-E)=O\Rightarrow r(A+E)+r(A-E)\leqslant n$

$r(A-E)=r(-A+E)\Rightarrow r(A+E)+r(A-E)=r(A+E)+r(-A+E)$

$\Rightarrow\geqslant r(A+E-A+E)=r(2E)=n$

综上：$r(A+E)+r(A-E)=n.$

附加题

1.B 为反对称阵，即$B^T=-B$

$(\lambda E-B^2)^T=\lambda E^T-(B^2)^T=\lambda E-(B^T)^2=\lambda E-(-B)^2=\lambda E-B^2$

故$\lambda E-B^2$是对称阵；

对任意的 n 维列向量$x\neq O$，有

$x^T(\lambda E-B^2)x=x^T(\lambda E+B^TB)x=\lambda x^Tx+(Bx)^TBx$

因$\lambda>0,x\neq O$，有$\lambda x^Tx>0,(Bx)^TBx\geqslant0$，因此对任意$x\neq O$，有

$x^T(\lambda E-B^2)x=\lambda x^T x+(Bx)^T Bx>0$，因此$\lambda E-B^2$为正定矩阵。

2.实对称阵一定能对角化成对角阵，即有

$$P^T AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

设属于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量为$(x\quad y\quad z)^T$,其应与ξ_1正交,则$y+z=0$，

解得：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

因此得两个线性无关的特征向量$\xi_2=(1\quad 0\quad 0)^T,\xi_3=(0\quad -1\quad 1)^T$，且$\xi_1,\xi_2,\xi_3$

正交，令

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

因此，$A=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

3.因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，即$r(A)=3$，因此$Ax=O$的基础

解系只有一个解向量。$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$即$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=O$，即

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=O$$

因此，$Ax=O$的通解为$k(1\quad -2\quad 1\quad 0)^T$.

$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$即

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$$

得$Ax=\beta$的特解为$(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$。

因此$Ax=\beta$的通解为$x=k(1\ \ -2\ \ 1\ \ 0)^T+(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$。

4. $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}$

$$\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&6+3a&4a+2\end{pmatrix}$$

$a\neq-2,1$ $\quad r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，此时，向量组等价，可互相表示。

$a=-2$ $\quad r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$

$\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-2&-2\\0&-3&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-6\end{pmatrix}$ 两个向量组的极大线性无关组不能互相表示，则两向量组也无法互相表示。

$a=1$ $\quad r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1<r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$ 符合要求

注：一般若向量个数等于向量维数，秩相等的时候可以推出等价，其他情况下，不一定。

5. 设存在常数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=O$，即

$$(k_s+k_1)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=O$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，得

$$\begin{cases}k_s+k_1=0\\k_1+k_2=0\\\qquad\cdots\\k_{s-1}+k_s=0\end{cases}$$

其系数行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&1\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按最后一列展开}}(-1)^{1+s}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}(-1)^{s+s}\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=1+(-1)^{1+s}$$

因此：

（1）当s为奇数时，行列式的值不为零，方程组只有零解，

$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，此时$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关。

（2）当s为偶数时，行列式的值为零，方程组有非零解，，即存在$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零，使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=O$，此时$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关。