

# 第三届中国大学生数学竞赛赛区赛

## 试题参考答案

### (数学类, 2011)

一、(本题 15 分) 已知四点  $A(1, 2, 7)$ ,  $B(4, 3, 3)$ ,  $(5, -1, 6)$ ,  $(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$ . 试求过这四点的球面方程.

解答: 设所求球面的球心为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 则

$$\begin{aligned} & (\bar{x} - 1)^2 + (\bar{y} - 2)^2 + (\bar{z} - 7)^2 \\ &= (\bar{x} - 4)^2 + (\bar{y} - 3)^2 + (\bar{z} - 3)^2 \\ &= (\bar{x} - 5)^2 + (\bar{y} + 1)^2 + (\bar{z} - 6)^2 \\ &= (\bar{x} - \sqrt{7})^2 + (\bar{y} - \sqrt{7})^2 + \bar{z}^2. \end{aligned}$$

..... (8 分)

即

$$\begin{cases} 3\bar{x} + \bar{y} - 4\bar{z} = -10, \\ 4\bar{x} - 3\bar{y} - \bar{z} = 4, \\ (\sqrt{7} - 1)\bar{x} + (\sqrt{7} - 2)\bar{y} - 7\bar{z} = -20. \end{cases}$$

..... (10 分)

解得  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, -1, 3)$ . 而 ..... (14 分)

$$(\bar{x} - 1)^2 + (\bar{y} - 2)^2 + (\bar{z} - 7)^2 = 25.$$

于是所求球面方程为

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25.$$

..... (15 分)

二、(本题 10 分) 设  $f_1, f_2, \dots, f_n$  为  $[0, 1]$  上的非负连续函数. 求证: 存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

证明: 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x) dx, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

当某个  $a_k = 0$  时, 结论是平凡的. .... (1 分)

下设  $a_k > 0$  ( $\forall k = 1, 2, \dots, n$ ). 我们有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k} dx = 1.$$

..... (8 分)

由此立即可得存在  $\xi \in [0, 1]$  使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leq 1.$$

结论得证. .... (10 分)

□

三、(本题 15 分) 设  $F^n$  是数域  $F$  上的  $n$  维列空间,  $\sigma: F^n \rightarrow F^n$  是一个线性变换. 若  $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), (\forall \alpha \in V)$ , 证明:  $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$ , 其中  $\lambda$  是  $F$  中某个数,  $\text{id}_{F^n}$  表示恒同变换.

**证明:** 设  $\sigma$  在  $F^n$  的标准基  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  下的矩阵为  $B$ , 则  $\sigma(\alpha) = B\alpha (\forall \alpha \in F^n)$ . ..... (5 分)

由条件:  $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \forall \alpha \in F^n$ , 有  $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$ .  
故  $AB = BA, (\forall A \in M_n(F))$  ..... (10 分)

设  $B = (b_{ij})$ , 取  $A = \text{diag}(1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1)$ , 其中  $c \neq 0, 1$ , 由  $AB = BA$  可得  $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$ . 又取  $A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ , 这里  $E_{st}$  是  $(s \ t)$ - 位置为 1 其它位置为 0 的矩阵. 则由  $AB = BA$  可得  $a_{ii} = a_{jj}, (\forall i, j)$ . 取  $\lambda = a_{11}$ . 故  $B = \lambda I_n$ , 从而  $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$  ..... (15 分)

数学家

四、(本题 10 分) 对于  $\triangle ABC$ , 求  $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$  的最大值.

解答: 三角形三个角  $A, B, C$  的取值范围为

$$(A, B, C) \in D \equiv \{(\alpha, \beta, \gamma) | \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}.$$

我们首先考虑  $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$  在  $D$  的闭包

$$E = \{(\alpha, \beta, \gamma) | \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0\}$$

上的最大值. .... (1 分)

我们有

$$\begin{aligned} & \max_{(A,B,C) \in E} (3\sin A + 4\sin B + 18\sin C) \\ &= \max_{\substack{A+C \leq \pi \\ A, C \geq 0}} (3\sin A + 4\sin(A+C) + 18\sin C) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \max_{0 \leq A \leq \pi-C} \left( (3+4\cos C)\sin A + 4\sin C \cos A + 18\sin C \right) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \left( \sqrt{(3+4\cos C)^2 + 16\sin^2 C} + 18\sin C \right) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} (\sqrt{25+24\cos C} + 18\sin C). \end{aligned}$$

..... (4 分)

考虑

$$f(C) = \sqrt{25+24\cos C} + 18\sin C, \quad 0 \leq C \leq \pi.$$

易见

$$f(C) \geq f(\pi - C), \quad \forall C \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

..... (5 分)

直接计算得

$$f'(C) = 18\cos C - \frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}.$$

..... (6 分)

计算得  $f'(C) = 0$  等价于

$$(8\cos C - 1)(27\cos^2 C + 32\cos C + 4) = 0.$$

从而它在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的解为  $C = \arccos \frac{1}{8}$ . ..... (7 分)

于是

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq C \leq \pi} f(C) &= \max_{0 \leq C \leq \frac{\pi}{2}} f(C) = \max \left\{ f\left(\arccos \frac{1}{8}\right), f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{35\sqrt{7}}{4}, 7, 23 \right\} = \frac{35\sqrt{7}}{4}. \end{aligned}$$

..... (8 分)

由此可得

$$\max_{(A,B,C) \in E} (3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C) = \frac{35\sqrt{7}}{4},$$

另一方面, 不难看到  $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$  在  $E$  的边界上 ( $A, B, C$  之一为零) 的最大值为 22. .... (9 分)

所以所求最大值为  $\frac{35\sqrt{7}}{4}$ . ..... (10 分)

五、(本题 15 分) 对于任何实数  $\alpha$ , 求证存在取值于  $\{-1, 1\}$  的数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

证明: 由 Taylor 展式,  $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , 存在  $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  使得

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

..... (1 分)

从而

$$\left| \sqrt{1+x} - \left( 1 + \frac{x}{2} \right) \right| \leq x^2, \quad \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

..... (2 分)

于是当  $n \geq 2$  时, 不管我们怎么选取只取值  $\pm 1$  的数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ , 均有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} \right| \\ &= \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + \frac{a_k}{n}} - \sum_{k=1}^n \left( 1 + \frac{a_k}{2n} \right) \right| \\ &\leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{n} \right)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

..... (5 分)

可以有很多种方法选取只取值  $\pm 1$  的数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} = \alpha.$$

此时就成立

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

..... (6 分)

例如, 我们可以按以下方式选取: 取  $a_1 = 1$ , 依次定义

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^n a_k < 2\alpha\sqrt{n}, \\ -1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^n a_k \geq 2\alpha\sqrt{n}. \end{cases}$$

..... (10 分)

记

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

我们有

$$-\sqrt{n} \leq y_n \leq \sqrt{n}.$$

若  $y_n > 2\alpha$ , 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= -\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}, \end{aligned}$$

这时

$$-\frac{2}{\sqrt{n+1}} < y_{n+1} - y_n < 0;$$

..... (12 分)

而当  $y_n < 2\alpha$  时, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}; \end{aligned}$$

这时

$$0 < y_{n+1} - y_n < \frac{2}{\sqrt{n+1}};$$

于是当  $y_{n+1} - 2\alpha$  和  $y_n - 2\alpha$  同号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_n - 2\alpha|,$$

而当  $y_{n+1} - 2\alpha$  和  $y_n - 2\alpha$  异号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_{n+1} - y_n| \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq \max(|y_n - 2\alpha|, \frac{2}{\sqrt{n+1}}).$$

..... (14 分)

注意到对任何  $N > 0$ , 总有  $m \geq N$ , 使得  $y_{m+1} - 2\alpha$  和  $y_m - 2\alpha$  异号. 由上面的讨论可得到

$$|y_k - 2\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{m+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{N+1}}, \quad \forall k = m+1, m+2, \dots$$

因此,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2\alpha$ . ..... (15 分)

□

数学家



六、(本题 20 分) 设  $A$  是数域  $F$  上的  $n$  阶方阵. 证明:  $A$  相似于  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  是可逆矩阵,  $C$  是幂零阵, 即存在  $m$  使得  $C^m = 0$ .

**证明:** 设  $V$  是  $F$  上  $n$  维线性空间,  $\sigma$  是  $V$  上线性变换, 它在  $V$  的一组基下的矩阵为  $A$ . 下面证明存在  $\sigma$ -不变子空间  $V_1, V_2$  满足  $V = V_1 \oplus V_2$ , 且  $\sigma|_{V_1}$  是同构,  $\sigma|_{V_2}$  是幂零变换.

首先有子空间升链:  $\text{Ker } \sigma \subseteq \text{Ker } \sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker } \sigma^k \subseteq \cdots$  从而存在正整数  $m$  使得  $\text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{m+i}$ , ( $i = 1, 2, \cdots$ ). 进而有  $\text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{2m}$ .

(7 分)

下面证明  $V = \text{Ker } \sigma^m \oplus \text{Im } \sigma^m$ .

$\forall \alpha \in \text{Ker } \sigma^m \cap \text{Im } \sigma^m$ , 由  $\alpha \in \text{Im } \sigma^m$ , 存在  $\beta \in V$ , 使得  $\alpha = \sigma^m(\beta)$ . 由此  $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$ , 所以  $\beta \in \text{Ker } \sigma^{2m}$ , 从而  $\beta \in \text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{2m}$ . 故  $\alpha = \sigma^m(\beta) = 0$ .  $\text{Ker } \sigma^m \cap \text{Im } \sigma^m = (0)$ , 从而  $V = \text{Ker } \sigma^m \oplus \text{Im } \sigma^m$ . (12 分)

由  $\sigma(\text{Ker } \sigma^m) \subseteq \text{Ker } \sigma^m$ ,  $\sigma(\text{Im } \sigma^m) \subseteq \text{Im } \sigma^m$  知  $\text{Ker } \sigma^m, \text{Im } \sigma^m$  是  $\sigma$ -不变子空间. 又由  $\sigma^m(\text{Ker } \sigma^m) = (0)$  知  $\sigma|_{\text{Ker } \sigma^m}$  是幂零变换. 由  $\sigma(\text{Im } \sigma^m) = \text{Im } \sigma^m$  知  $\sigma|_{\text{Im } \sigma^m}$  是满线性变换, 从而可逆. .... (17 分)

从  $V_1 = \text{Im } \sigma^m, V_2 = \text{Ker } \sigma^m$  中各找一组基  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \cdots, \beta_t$ , 合并成  $V$  的一组基,  $\sigma$  在此基下的矩阵为  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  是  $\sigma|_{V_1}$  在基  $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$  下的矩阵, 从而可逆;  $C$  是  $\sigma|_{V_2}$  在基  $\beta_1, \cdots, \beta_t$  下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而  $A$  相似于  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  是可逆矩阵,  $C$  是幂零矩阵. .... (20 分)

=====

**注:** 如果视  $F$  为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可以给 10 分:

存在可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

其中  $J(\lambda_i, n_i)$  是特征值为  $\lambda_i$  的阶为  $n_i$  的若当块,  $\lambda_i \neq 0$ ;  $J(0, m_j)$  特征值为 0 的阶为  $m_j$  的若当块. .... (5 分)

令

$$B = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \dots, J(\lambda_s, n_s)),$$

$$C = \text{diag}(J(0, m_1), \dots, J(0, m_t)),$$

则  $B$  为可逆矩阵,  $C$  为幂零矩阵,  $A$  相似于  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ . .... (10 分)

数学家

七、(本题 15 分) 设  $F(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的单调递减函数,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0.$$

证明: (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$ , (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt = 0$ .

**证明:** 首先, 对任何  $x \in \mathbb{R}$ , 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到  $\int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt$  收敛. 下记

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由于  $F$  单调下降,

$$\begin{aligned} & \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi \left( F(2nk\pi + nt) - F(2nk\pi + 2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt \\ &= \int_0^{+\infty} nF(nt) \sin t dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt) \sin t dt \\ &\geq \int_0^{2\pi} nF(nt) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi n \left( F(nt) - F(2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \left( F(nt) - F(2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq n \left[ F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= n \left[ F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

..... (5 分)

结合  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$  得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[ F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] = 0.$$

..... (7 分)

这样, 任取  $\delta > 0$ , 有  $N > 0$  使得当  $n > N$  时, 有

$$n \left| F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right| \leq \delta.$$

从而对任何  $m > 0$ ,  $n > N$  有

$$\begin{aligned} 0 &\leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m n \left| F\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3^{k+1} n\pi}{2}\right) \right| + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m \frac{\delta}{3^k} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \\ &\leq \frac{3\delta}{2} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

上式中令  $m \rightarrow +\infty$ , 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$  得到

$$0 \leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq \frac{3\delta}{2}, \quad \forall n > N.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0.$$

..... (9 分)

进一步利用单调性, 当  $x > \frac{\pi}{2}$  时, 有

$$0 \leq xF(x) \leq \pi \left[ \frac{2x}{\pi} \right] F\left(\left[ \frac{2x}{\pi} \right] \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

其中  $[s]$  表示实数  $s$  的整数部分. 于是可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0.$$

..... (10 分)

从而又知  $xF(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界, 设上界为  $M \geq 0$ .

$\forall \varepsilon \in (0, \pi)$ , 当  $x > 0$  时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) = \int_0^{+\infty} x^{-1} F(x^{-1}t) \sin t \, dt \\ &\leq \int_0^{\pi} x^{-1}t H(x^{-1}t) \frac{\sin t}{t} \, dt \end{aligned}$$

..... (12 分)

$$\leq x^{-1}\varepsilon H(x^{-1}\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt + M\varepsilon, \quad \forall x > 0.$$

..... (14 分)

于是

$$0 \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq M\varepsilon.$$

由  $\varepsilon \in (0, \pi)$  的任意性, 可得  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

进而因  $f$  是奇函数推得  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ..... (15 分)

□