北京科技大学 2014--2015 学年第一学期

线性代数 试卷（B卷）

院(系)__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												
评阅												
审核												

注意事项：

（1）本试卷共八道大题，共八页，请认真核对。

（2）正确填写学院、班级、姓名、学号等个人信息，空填或错填的试卷为无效试卷。

（3）请使用钢笔、签字笔或者圆珠笔答卷，使用铅笔答卷无效。

得 分

一、填空题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. 设 A，B 都是3阶方阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，则 $|2A^{*}B^{-1}|=$__________。

2. 设矩阵 A 满足 $A^2-A-6E=O$，则 $(A-2E)^{-1}=$__________。

3. 已知矩阵 $A_{4\times5}$ 和矩阵 $B_{5\times4}$，且 $r(A)=3$，矩阵 $B_{5\times4}$ 的列向量均是 $Ax=0$ 的解，则 $r(B)$ 的最大值为__________。

$AB=0 \quad r(A)+r(B)\le 5$

4. 设 n 阶方阵 A 与 B 相似，且 $|A-3E|=0$ 则 B^2-3E 的一个特征值为__________。

5. 若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3$ 为正定二次型，则 λ 的取值范围为__________。

得 分

二、选择题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. 如果矩阵 A，B，$A+B$，$A^{-1}+B^{-1}$ 均可逆，则 $(A+B)^{-1}=$__________。

（A）$A+B$　　（B）$B^{-1}(B^{-1}+A^{-1})^{-1}A^{-1}$　　（C）$A^{-1}+B^{-1}$　　（D）$A(B^{-1}+A^{-1})^{-1}B$

2. 设 A，B 为2阶可逆方阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} O & A \\ 2B & O \end{pmatrix}$，则 $|M|=$__________。

（A）$4ab$　　（B）$-4ab$　　（C）$2ab$　　（D）$-2ab$

3. 矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$，且$a_i \neq 0, b_i \neq 0, i=1,2,3$，则矩阵$A$的秩为________。

（A）3 （B）2 （C）1 （D）0

4. 设A为n阶矩阵$(n \geq 3)$，下列命题*正确* 的是 ________。

（A）矩阵A的两个不同的特征值可以有同一个特征向量

（B）若存在数λ和向量α，使得$A\alpha=\lambda\alpha$成立，则向量α是矩阵A的属于特征值λ的特征向量

（C）若$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是$A$的三个互不相同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$分别是矩阵$A$的属于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$必线性相关

（D）若存在数λ和非零向量α，使得$(A-\lambda E)\alpha=0$成立，则λ是矩阵A的特征值

5. 设4阶矩阵A的秩$r(A)=3$，α_1,α_2为4维非零列向量，且满足$A\alpha_1=\mathbf{0}, A\alpha_2=\alpha_2$，$k$为任意常数，则非齐次方程组$Ax=\frac{1}{2}\alpha_2$的通解为________。

（A）$k\alpha_2+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ （B）$k\alpha_2+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

（C）$k\alpha_1+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ （D）$k\alpha_1+\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$

得 分

三、（本题12分，每小题6分）

1. 计算4阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$的值

2. 计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$(a \neq x_i,\quad i=1,2,\cdots n)$的值。

得 分

四、（本题 12 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{C}^{-1}$,其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$试求矩阵$\boldsymbol{A}$。

得 分

五、（本题 12 分）已知向量组$B:\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\7\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\9\\10\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_5=\begin{pmatrix}3\\2\\7\\12\end{pmatrix}$；

（Ⅰ）试求该向量组的秩，

（Ⅱ）求向量组$\boldsymbol{B}$的一个极大线性无关组；并将向量组中的其余向量用该极大线性无关组线性表示。

得 分

六、（本题 12 分）设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2-7x_3+9x_4=-1 \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=b \end{cases}$$

当b为何值时，方程组无解？当b为何值时，方程组有无穷多解？并在有解时求出方程组的通解。

得 分

七、（本题 12 分）已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=(1-t)x_1^2+(1-t)x_2^2+2x_3^2+2(1+t)x_1x_2$ 的秩为 2，

（Ⅰ）试求 t 的值。

（Ⅱ）用正交变换化二次型为标准形，并写出所用的正交变换。

得 分

八、（本题 10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 -1，1 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$；试证明：

（Ⅰ）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。

北京科技大学 2014-2015 学年 第 一 学期

线性代数 A 期末试卷 答案

一、 填空题（本题共 15 分，每空 3 分）

1、36 　 2、$\frac{1}{4}(A+E)$ 　 3、2 　 4、6 　 5、$(18,+\infty)$

二、 选择题（本题共 15 分，每题 3 分）

1-5 　 BACDC

三、 计算行列式

答案 　 (1) 19960 　 (2) $\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)$

解析 　 略

四、 解矩阵方程

答案 　 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解析 　 略

五、 求极大无关组并表示其余向量

答案 　 (1) $r=3$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 　 (2) $\beta_3=\beta_2$， $\beta_5=2\beta_1+\beta_2-2\beta_4$

解析 　 略

六、 对参数分类讨论非齐次线性方程组解的情况并求通解

答案 　 (1) $b\neq -2$ 时无解

(2) $b=-2$ 时，有无穷个解，通解为 $X=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

解析 　 略

七、 正交变换化二次型为标准型并写正交矩阵或正交变换

答案 （1）$t=0$ （2） $f(y_1,y_2,y_3)=2y_2^2+2y_3^2$，$X=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Y$

解析 略

八、 证明题

证明

（Ⅰ）方法一：向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{A}$的分别属于特征值$-1$，1

的特征向量，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，且$\boldsymbol{A\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$

设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$ ①

两边同时乘$\boldsymbol{A}$得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\right)&=k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A\alpha}_3\\&=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\left(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\right)\\&=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k_2+k_3\right)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0\end{aligned} \quad ②$$

（Ⅰ）方法一：① － ②得$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=0$。

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关知$k_1=k_3=0$，再代入①式，可得$k_2\boldsymbol{\alpha}_2=0$，

又由于$\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，则有$k_2=0$，所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

解答： （Ⅱ）$\boldsymbol{P}=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]$，由（Ⅰ）得$\boldsymbol{P}$可逆，且

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]=\left[\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\boldsymbol{A}\alpha_3\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$