第五届全国大学生数学竞赛预赛试卷 评分细则

一、(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分) 解答下列各题 .

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

解 $\because \sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}$ (2 分)

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)\right]$$ (2 分)

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)=e^{\frac{1}{4}}$$ (2 分)

2 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 不是绝对收敛的.

证. 记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin x|}{x}dx$，只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. (2 分)

因为 $a_n\ge\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$. (3 分)

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. (1 分)

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定. 求 $y(x)$ 的极值.

解 方程两边对 x 求导，得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0$$ (1 分)

故 $y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=-2y$.

将 $x=0$ 和 $x=-2y$ 代入所给方程，得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}. \qquad (2 分)$$

又

$$y''=\left.\frac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)+(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}\right|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0,$$

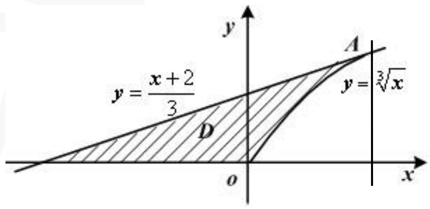
$$y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0.$$

故 $y(0)=-1$ 为极大值， $y(-2)=1$ 为极小值. (3 分)

4. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\ge 0)$ 上的点 A 作切线,使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$，求点 A 的坐标.

解 设切点 A 的坐标为 $(t,\sqrt[3]{t})$，曲线过 A 点的切线方程为

$$y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t) \qquad (2分)$$



令 $y=0$, 由上式可得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_0=-2t$

$\therefore$ 平面图形的面积 $S=\Delta Ax_0t$ 的面积 $-$ 曲边梯形 otA 的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1，\quad \therefore A 的坐标为 (1,1). \qquad (4分)$$

二、 (12 分) 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解

$$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \qquad (4 分)$$

$$=\int_0^{\pi}(\arctan e^x+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \qquad (2 分)$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \qquad (4 分)$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8} \qquad (2 分)$$

三、(12 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛.

证　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，

则 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\qquad (2\text{ 分})$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.\qquad (2\text{ 分})$$

应用罗比达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0).\qquad (3\text{ 分})$$

所以

$$\lim_{n\to 0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|.\qquad (2\text{ 分})$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.　(3 分)

四、(10 分) 设 $|f(x)|\le\pi,\ f'(x)\ge m>0\ (a\le x\le b)$，证明 $\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}$.

证 因为 $f'(x)\ge m>0\ (a\le x\le b)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增，从而有反函数.　(2 分)

设 $A=f(a)$，$B=f(b)$，φ 是 f 的反函数，则

$$0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{m},\qquad (3\text{ 分})$$

又 $|f(x)|\le\pi$，则 $-\pi\le A<B\le\pi$，所以

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\overset{x=\varphi(y)}{=\!=\!=}\left|\int_A^B\varphi'(y)\sin y\,\mathrm{d}y\right|\qquad (3\text{ 分})$$

$$\le\int_0^\pi\frac{1}{m}\sin y\,\mathrm{d}y=\frac{2}{m}\qquad (2\text{ 分})$$

五、(１４分)设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外.　给定第二型的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left(x^3-x\right)dydz+\left(2y^3-y\right)dzdx+\left(3z^3-z\right)dxdy.$$

试确定曲面 Σ，使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

解. 记 Σ 围成的立体为 V，由高斯公式,

$$I=\iiint_V\left(3x^2+6y^2+9z^2-3\right)dv=3\iiint_V\left(x^2+2y^2+3z^2-1\right)dxdydz.\qquad (３\text{ 分})$$

为了使得I达到最小，就要求V是使得$x^2+2y^2+3z^2-1\le 0$的最大空间区域，即

$$V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}. \qquad (3 分)$$

所以V是一个椭球，Σ是椭球V的表面时，积分I最小.

为求该最小值，作变换$\begin{cases} x=u \\ y=v/\sqrt{2} \\ z=w/\sqrt{3} \end{cases}$. 则$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}\left(u^2+v^2+w^2-1\right)dudvdw. \qquad (4 分)$$

使用球坐标变换，我们有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\left(r^2-1\right)r^2\sin\theta dr=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi. \qquad (4 分)$$

六、(14 分) 设$I_a(r)=\int\limits_C\dfrac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^a}$，其中$a$为常数，曲线$C$为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向. 求极限$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

解. 作变换$\begin{cases} x=(u-v)/\sqrt{2} \\ y=(u+v)/\sqrt{2} \end{cases}$,

曲线C变为uov平面上的 $\Gamma:\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$，也是取正向 (2 分)

且有 $x^2+y^2=u^2+v^2$， $ydx-xdy=vdu-udv$,

$$I_a(r)=\int\limits_\Gamma\frac{vdu-udv}{(u^2+v^2)^a}. \qquad (2 分)$$

作变换$\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta \\ v=\sqrt{2}r\sin\theta \end{cases}$，则有$vdu-udv=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}J_a,$$

其中$J_a=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta)^a}$，$0<J_a<+\infty$. (3 分)

因此当$a>1$和$a<1$，所求极限分别为 0 和$-\infty$. (2 分)

而当 $a=1$，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\pi/2}\frac{d\tan\theta}{2/3+2\tan^2\theta}=4\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2/3+2t^2}=\sqrt{3}\pi. \qquad (3分)$$

故所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0, & a>1\\ -\infty, & a<1\\ -2\pi, & a=1\end{cases}. \qquad (2分)$$

七、(14 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛，求其和.

解: (1) 记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$， $u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n=1,2,3,\cdots$.

因为 n 充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}, \qquad (3分)$$

所以 $u_n\le\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{3/2}}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. (2 分)

（2） $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\,(k=1,2,....)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right) \qquad (2分)$$

$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{n+2}a_n \qquad (2分)$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n. \qquad (2分)$$

因为 $0<a_n<1+\ln n$

所以 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$. 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$.

于是 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$. 证毕。 (3 分)