

## 第七届全国大学生数学竞赛决赛试题

## 答案（非数学类）

2016 年 3 月 27 日

## 一填空题（5×6 分=30 分）

1. 程微分方程  $y''' - (y'')^3 = 0$  的通解是\_\_\_\_\_解：令  $y' = p$ , 则  $y'' = p'$ , 则  $dp = p^3 dx$ , 积分得到  $-\frac{1}{2}p^{-2} = x - c_1$ , 即

$$p = y' = \frac{\pm 1}{\sqrt{2(c_1 - x)}}, \text{ 积分得 } y = c_2 \pm \sqrt{2(c_1 - x)} \quad (c_{1,2} \text{ 为常数}).$$

2. 设  $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , 则积分  $I = \iint_D (x + y^2) e^{-(x^2 + y^2 - 4)} dx dy$  的值是\_\_\_\_\_解：  $I = 4e^4 \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \sin^2 \theta e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} e^4 \int_1^4 u e^{-u} du = \frac{\pi}{2} (2e^3 - 5)$  (对称性和极坐标).

3. 设  $f(t)$  二阶连续可导, 且  $f(t) \neq 0$ , 若  $\begin{cases} x = \int_0^t f(s) ds \\ y = f(t) \end{cases}$ , 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$
解：  $dx = f(t) dt$ ,  $dy = f'(t) dt$ , 所以  $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{f(t)}$ , 则得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{f'(t)}{f(t)} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{f(t)f''(t) - f'(t)^2}{f^3(t)}$$

4. 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $n$  阶方阵  $A$  的特征值,  $f(x)$  为多项式, 则矩阵  $f(A)$  的行列式的值为\_\_\_\_\_

解：  $|f(A)| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$ 5. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n \sin(\pi! e)]$  的值为\_\_\_\_\_

解:  $\because \pi n!e = \pi n! \left[ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) \right] = \pi a_n + \frac{\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ ,  $a_n$  为

整数, 所以结果  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \right] = \pi$ .

编者注: 填空题考察基础, 简易, 稳扎稳打, 唾手可得!

二. (本题满分 14 分) 设  $f(u, v)$  在全平面上有连续的偏导数,

试证明: 曲面  $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$  的所有切平面都交于点  $(a, b, c)$ .

证明: 记  $F(x, y, z) = f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)$ , 求其偏导数得到其法向量:

$$(F_x, F_y, F_z) = \left( \frac{f_1}{z-c}, \frac{f_2}{z-c}, \frac{-(x-a)f_1 - (y-b)f_2}{(z-c)^2} \right) \text{ -----6 分}$$

(得分比高中数学联赛都容易)

为方便取曲面的法向量  $n = ((z-c)f_1, (z-c)f_2, -(x-a)f_1 - (y-b)f_2)$ .

记  $(x, y, z)$  为曲面上的点,  $(X, Y, Z)$  为切面上的点, 则曲面上过点  $(x, y, z)$  的切平面方程为

$$[(z-c)f_1](X-c) + [(z-c)f_2](Y-y) - [(x-a)f_1 + (y-b)f_2](Z-y) = 0 \text{ -----12 分}$$

容易验证, 对任意  $(x, y, z) (z \neq c)$ ,  $(X, Y, Z) = (a, b, c)$  都满足上述切平面方程. 结论得证.

编者注: 此题入手容易, 拿分也容易, 主要的就是一个思路, 不在于过多的计算, 恰到好处的体现了一个很浅显但用数学化的语言描述的一个证明或者定理.

三. (本题满分 14 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,

$$\text{试证明: } 2 \int_a^b f(x) \left( \int_x^b f(t) dt \right) dx = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2$$

证明:

由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 知  $f(x)$  在  $[a, b]$  可积.

令  $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ . 则  $F'(x) = -f(x)$ .-----5 分

根据要证明式的左边, 则

$$\begin{aligned} & 2 \int_a^b f(x) \left( \int_x^b f(t)dt \right) dx \\ &= 2 \int_a^b f(x) F(x) dx = -2 \int_a^b F(x) F'(x) dx = -2 \int_a^b F(x) dF(x) \\ &= -F(x)^2 \Big|_a^b = F(a)^2 = \left( \int_a^b f(x) \right)^2 \end{aligned}$$

-----14 分

得证.

编者注: 此题属于送分题, 很容易上手, 非常基础但不失大气!

四 (本题满分 14 分) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times p$  矩阵,  $C$  是  $p \times q$  矩阵, 试

证明:  $R(AB) + R(BC) - R(B) \leq R(ABC)$ , 其中  $R(X)$  表示矩阵  $R$  的秩.

证: 即证明  $R(AB) + R(BC) \leq R(ABC) + R(B) = R \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}$  -----3 分

由于  $\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_q & O \\ -C & E_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$  -----7 分

$\begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E_p \\ E_p & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}$  -----10 分

且  $\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} E_q & O \\ -C & E_p \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} O & -E_p \\ E_p & O \end{pmatrix}$  可逆,

所以

$R \begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix} \geq R(AB) + R(BC)$  -----14 分

五 (本题满分 14 分) 设  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ ,  $n$  为正整数.

(1) 若  $n \geq 2$ , 计算  $I_n + I_{n-2}$ ;

(2) 设  $p$  为实数, 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$  的绝对收敛性和条件收敛性.

编辑者注: 第一问送分题, 不予置评; 第二问就是高中的分类讨论思想, 注意其区别性, 掌握好概念, 也有放缩的意蕴, 只要基础扎实, 得满分不是问题..

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad I_n + I_{n-2} &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} x d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{n-1} \quad \text{-----6 分} \end{aligned}$$

(2) 由于  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ , 所以  $0 < \tan x < 1$ ,  $\tan^{n+2} x < \tan^n x < \tan^{n-2} x$ .

因此  $I_{n+2} < I_n < I_{n-2}$ , 于是  $I_{n+2} + I_n < 2I_n < I_{n-2} + I_n$

故  $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ , 则  $\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^p < I_n^p < \left(\frac{1}{2(n-1)}\right)^p$ .

根据  $p$  的取值不同, 分类讨论

①当  $p > 1$  时,  $\left|(-1)^n I_n^p\right| \leq I_n^p < \frac{1}{2^p(n-1)^p}, (n > 2)$

由于  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^p}$  收敛, 所以  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n I_n^p$  绝对收敛.-----10 分

②当  $0 < p \leq 1$  时, 由于  $\{I_n^p\}$  单调减少, 并趋近于 0, 由莱布尼兹判别法, 知  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n I_n^p$  收敛.

而  $I_n^p > \frac{1}{2^p(n+1)^p} \geq \frac{1}{2^p(n+1)}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^p(n+1)}$  发散, 所以  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n I_n^p$  是条件收敛的.

③当  $p \leq 0$  时, 则  $|I_n^p| \geq 1$ , 由级数收敛的必要条件可知,  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n I_n^p$  是发散的.

-----14 分

六 (本题满分 14 分)

设  $P(x, y)$  和  $R(x, y, z)$  在空间上有连续偏导数, 设上半球面

$S: z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$ , 方向向上, 若对任何点  $(x_0, y_0, z_0)$  和  $r > 0$ ,

## 第二型曲面积分

$$\iint_S Pdydz + Qdxdy = 0$$

试证明:  $\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$ .

证明: 设上半球面  $S$  的底平面为  $D$ , 方向向下,  $S$  和  $D$  围成的区域记为  $\Omega$ , 由高

斯公式得  $\left( \iint_S + \iint_D \right) Pdydz + Qdxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dv$  -----4 分

由于底平面为负面, 所以  $\iint_D Pdydz + Rdx dy = -\iint_D R d\sigma$ , 再由题设条件得

$$-\iint_D R d\sigma = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \quad (*)$$

注意到上试对任何  $r > 0$  都成立, 由此证明  $R(x_0, y_0, z_0) = 0$

反证法:

若不然, 设  $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

由于  $\iint_D R d\sigma = R(\xi, \eta, z_0) \pi r^2$ , 这里  $(\xi, \eta, z_0) \in D$ .

而当  $r \rightarrow 0^+$ ,  $R(\xi, \eta, z_0) \rightarrow R(x_0, y_0, z_0)$ , 因此  $(*)$  左端为一个二阶的无穷小.

类似地, 当  $\frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + \frac{\partial R(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \neq 0$ ,  $\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$  为一个三阶的无穷小,

而当  $\frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + \frac{\partial R(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = 0$ , 该积分趋于 0 的阶高于 3. 因此  $(*)$  式右端阶

高于左端, 从而当  $r$  很小, 则

$$\left| \iint_D R d\sigma \right| \geq \left| \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \right|,$$

这与  $(*)$  式矛盾. -----10 分

因此在任何点  $(x_0, y_0, z_0)$  都有  $R(x_0, y_0, z_0) = 0$ , 故  $R(x, y, z) = 0$ . 带入  $(*)$  式得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dv = 0$$

重复前面的证明可知  $\frac{\partial P(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = 0$ . 由  $(x_0, y_0, z_0)$  得任意性知  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ .

编辑者注：可以说这道题证明点细微，用到反证法这一重要思想，通过比较阶次的高低来比较大小，这应该是我们平常不是很注意到的，在这道题中恰恰得到了很好的体现。细致推理，拿 10 分左右不是问题，满分也未尝不可。

总：

从本届试题看出，填空题没有啥大变动之处，解答题新增了空间几何问题，题都不是很难，对于曾经参加过全国高中数学联赛的学生来说，这些题相应于一个认识阶段来看，不是很难。考察基础，但却能体现厚重基础，思维清晰的良好素养。

估计起码参加这个决赛的起码获得 70 分左右，也考虑到大学学生事情繁杂，没有多大精力在这一枯燥的学科之上，毕竟不是学数学的。分数不重要，喜欢数学就足够了，并能用于生活就行。

与君共享，喜欢数学的都是不错的！

2016 年 6 月于西安

学生编辑