第三届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2012）

本试卷共 2 页，共 6 题。全卷满分 100 分。考试用时 150 分钟。

一、（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2 + x^2 - x^2\cos^2 x}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)(\sin x + x)}{x^4} + \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{2}{3}$$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3 + \dfrac{1}{2}x - \tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6}\right]$

解： $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3 + \dfrac{1}{2}x - \tan\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6}\right]$ （令 $t = \dfrac{1}{x}$）

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{(1+\frac{t^2}{2} - t^2\tan t)e^t - \sqrt{t^6+1}}{t^3} = \lim_{t\to 0+}\frac{(1+\frac{t^2}{2})e^t - 1 + 1 - \sqrt{t^6+1}}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\frac{(1+\frac{t^2}{2})e^t - 1}{t^3} = \lim_{t\to 0+}\frac{(2+2t+t^2)e^t}{6t^2} = +\infty$$

(3) 设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足 $f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{yy} = 0$ 且 $f_y \neq 0$，$y = y(x,z)$ 是由方程 $z = f(x,y)$ 所确定的函数. 求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

解：依题意有，y 是函数，x、z 是自变量。将方程 $z = f(x,y)$ 两边同时对 x 求导，$0 = f_x + f_y\dfrac{\partial y}{\partial x}$，则 $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{f_x}{f_y}$，于是

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) = -\frac{f_y(f_{xx} + f_{yx}\frac{\partial y}{\partial x}) - f_x(f_{yx} + f_{yy}\frac{\partial y}{\partial x})}{f_y^2}$$

$$=-\frac{f_y(f_{xx}-f_{yx}\frac{f_x}{f_y})-f_x(f_{yx}-f_{yy}\frac{f_x}{f_y})}{f_y^{\ 2}}=-\frac{f_x^{\ 2}f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}+f_y^{\ 2}f_{yy}}{f_y^{\ 3}}=0$$

(4) 求不定积分 $I=\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

解：$I=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+xde^{x+\frac{1}{x}}$

$=\int d\left(xe^{x+\frac{1}{x}}\right)=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$

(5) 求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$所围立体的表面积

解: 联立 $x^2+y^2=az$，$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$，解得两曲面的交线所在的平面为 $z=a$，它将表面分为 S_1 与 S_2 两部分，它们在 xoy 平面上的投影为 $D:x^2+y^2\le a^2$，

在 S_1 上 $dS=\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}dxdy=\sqrt{\frac{a^2+4(x^2+y^2)}{a^2}}dxdy$

在 S_2 上 $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy$

则 $S=\iint_D(\sqrt{\frac{a^2+4(x^2+y^2)}{a^2}}+\sqrt{2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{\sqrt{a^2 4r^2}}{a}rdr+\sqrt{2}\pi a^2$

$=\pi a^2(\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\sqrt{2})$

二、（本题 13 分）讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^\alpha\sin^2x}dx$ 的敛散性，其中 α 是一个实常数.

解：记 $f(x)=\frac{x}{\cos^2x+x^\alpha\sin^2x}$

① 若 $\alpha\le 0$，$f(x)\ge\frac{x}{2}\,(\forall x>1)$；则 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^\alpha\sin^2x}dx$ 发散

② 若 $0<\alpha\le 2$，则 $\alpha-1\le 1$，而 $f(x)\ge\frac{x^{1-\alpha}}{2}\,(\forall x\ge 1)$；所以

$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^\alpha\sin^2 x}dx$ 发散。

③ 若$\alpha>2$，即 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)dx$，考 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$敛散性即可

当$n\pi\le x<(n+1)\pi$时， $\frac{n\pi}{1+(n+1)^\alpha\pi^\alpha\sin^2 x}\le f(x)\le\frac{(n+1)\pi}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 x}$

对任何$b>0$，我们有

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+b\sin^2 x}=2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+b\sin^2 x}=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\cot x}{b+\csc^2 x}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{b+1+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{b+1}}$$

这样，存在 $0<A_1\le A_2$，使得 $\frac{A_1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}\le a_n\le\frac{A_2}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$.

从而可知，当$\alpha>4$，时，所讨论的积分收敛，否则发散。

三、（本题 13 分）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，并且满足:存在$M>0$，使得$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$(k=1,2,\cdots)$,且$f(\frac{1}{2^n})=0$，$(n=1,2,\cdots)$求证：在$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)\equiv 0$

证明：因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，且$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M$ $(k=1,2,\cdots)$，所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ （*）

由 $f(\frac{1}{2^n})=0$，$(n=1,2,\cdots)$， 得$f(0)=\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{2^n})=0$ ，

于是 $f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{2^n})-f(0)}{\frac{1}{2^n}}=0$

由罗尔定理，对于自然数n在$[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}]$上，存在$\xi_n^{(1)}\in(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n})$，使得

$f'(\xi_n^{(1)})=0$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\xi_n^{(1)}\to 0\,(n\to\infty)$

这里 $\xi_1^{(1)}>\xi_2^{(1)}>\xi_3^{(1)}>\cdots>\xi_n^{(1)}>\xi_{n+1}^{(1)}>\cdots$

在$[\xi_{n+1}^{(1)},\xi_n^{(1)}]$ $(n=1,2,\cdots)$上，对$f'(x)$应用罗尔定理，存在

$\xi_n^{(2)} \in (\xi_{n+1}^{(1)}, \xi_n^{(1)})$，使得 $f''(\xi_n^{(2)}) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$，且 $\xi_n^{(2)} \to 0\ (n \to \infty)$

于是 $$f''(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n^{(2)}) - f(0)}{\xi_n^{(2)}} = 0$$

类似的，对于任意的 n，有 $f^{(n)}(0) = 0$

有（*） $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$$

四、（本题共16分，第1小题6分，第2小题10分）

设 D 为椭圆形 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\ (a > b > 0)$，面密度为 ρ 的均质薄板；l 为通过椭圆焦点 $(-c, 0)$ (其中 $c^2 = a^2 - b^2$)垂直于薄板的旋转轴.

1. 求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J；

2. 对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

解：1. $J = \iint_D \left((x+c)^2 + y^2\right)\rho dxdy = \iint_D \left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right)\rho dxdy$

$$= 2\rho \iint_{D_1} \left(x^2 + y^2 + c^2\right) dxdy \qquad D_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, x \ge 0$$

$$= 4\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \left(a^2 r^2 \cos^2\theta + b^2 r^2 \sin^2\theta + c^2\right) abrdr$$

$$= 4\rho\left(a^2 \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + b^2 \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + c^2 \frac{\pi}{2}\right)ab$$

$$= \frac{1}{4}\pi\rho ab(5a^2 - 3b^2)$$

2. 设 J 固定，$b = b(a)$ 是 $J = \dfrac{1}{4}\pi\rho ab(5a^2 - 3b^2)$ 确定的隐函数，则

$b'(a) = \dfrac{3b^3 - 15a^2 b}{5a^3 - 9ab^2}$，对 $S = \pi ab(a)$ 关于 a 求导，

$$S'(a) = \pi\left(b(a) + ab'(a)\right) = \pi\left(b + \frac{3b^3 - 15a^2 b}{5a^2 - 9b^2}\right)$$

五、（本题 **12** 分）设连续可微函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$（其中 $F(u,v)=0$ 有连续的偏导数）唯一确定，**L** 为正向单位圆周．试求：

$$I=\int_L (xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx$$

解：由格林公式

$$I=\int_L (xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma$$

$$=\iint_D (z^2+2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial x})+(2x\frac{\partial z}{\partial y}+z^2+2yz\frac{\partial z}{\partial y})d\sigma=\iint_D 2z^2+2(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+2(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}d\sigma$$

又：连续可微函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$

两边同时对 x 求偏导数：$F_1(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+F_2(1-y\frac{\partial z}{\partial x})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_1+F_2}{yF_2-xF_1}$

两边同时对 y 求偏导数：$F_1(x\frac{\partial z}{\partial y}-1)+F_2(-z-y\frac{\partial z}{\partial y})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1+zF_2}{xF_1-yF_2}$

代入上式：

$$I=\iint_D 2z^2+2(xz+y)\frac{zF_1+F_2}{yF_2-xF_1}+2(x+yz)\frac{F_1+zF_2}{xF_1-yF_2}d\sigma$$

$$=2\iint_D z^2+\frac{xz^2F_1+xzF_2+yzF_1+yF_2}{yF_2-xF_1}+\frac{xF_1+xzF_2+yzF_1+yz^2F_2}{xF_1-yF_2}d\sigma$$

$$=\iint_D z^2+\frac{xz^2F_1+yF_2-xF_1-yz^2F_2}{yF_2-xF_1}d\sigma=2\iint_D z^2+\frac{(xF_1-yF_2)z^2+yF_2-xF_1}{yF_2-xF_1}d\sigma$$

$$2\iint_D d\sigma=2\pi$$

六、（本题共 **16** 分，第 **1** 小题 **6** 分，第 **2** 小题 **10** 分）

(1)求解微分方程 $\begin{cases}y'-xy=xe^{x^2}\\y(0)=1\end{cases}$

(2)如 $y=f(x)$ 为上述方程的解，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^{x^2}}{1+n^2x^2}dx$$

$$\int_0^1 \frac{ne^{x^2}}{1+n^2x^2}dx=\int_0^1 e^{x^2}d\arctan nx=e^{x^2}\arctan nx\Big|_0^1-\int_0^1 2xe^{x^2}\arctan nxdx$$

$$=e\arctan n-\arctan n\xi\int_0^1 2xe^{x^2}dx\quad 其中\xi\in[0,1]$$

$$=e\arctan n-\arctan n\xi\int_0^1 e^{x^2}dx^2=e\arctan n-\arctan n\xi\ e^{x^2}\Big|_0^1$$

$$=e\arctan n-(e-1)\arctan n\xi$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^{x^2}}{1+n^2x^2}dx==\lim_{n\to\infty}[e\arctan n-(e-1)\arctan n\xi]\ \ 其中\xi\in[0,1]$$

$$=e\frac{\pi}{2}-(e-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$