省市______ 学校______ 准考证号______ 姓名______ 考场号______ 座位号______

密封线 答题时不要超过此线

第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

(非数学类, 2016 年 10 月)

绝密★启用前 (14 金融工程-白兔兔)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意: 1.所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2.密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3.如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一 (**填空题**, **本题满分** 30 **分**, **共** 5 **小题**, **每小题** 6 **分**)

1. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导, 且 $f(a)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=$ ______

解

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

2. 若 $f(1)=0$, $f'(1)$ 存在, 则极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=$ ______

解

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\times 3x}{x^2\times x}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}\\
&=3\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}\right)\\
&=3f'(1)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\
&=\frac{3}{2}f'(1)
\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$. 记 $z=f(e^x y^2)$, 若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$, 则当 $x>0$, $f(x)=$ ______

解 由题设得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(e^xy^2)e^xy=f(e^xy^2)$, 令 $u=e^xy^2$,

得到当 $u>0$ 有 $f'(u)u=f(u)$, 即 $\dfrac{f'(u)}{f(u)}=\dfrac{1}{u}$, 从而 $\big(\ln f(u)\big)'=(\ln u)'$

所以有 $\ln f(u)=\ln u+C_1$, $f(u)=Cu$. 再而由初始条件得 $f(u)=2u$

故当 $x>0$ 有 $f(x)=2x$

4. 设 $f(x)=e^x\sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0)=$ _________

解 由 Taylor 展开式得

$$f(x)=\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right]$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项 $\dfrac{-1}{3!}(2x)^3\times x+\dfrac{1}{3!}x^3\times(2x)=-x^4$, 从而 $\dfrac{f^{(4)}(x)}{4!}=1$,

故 $f^{(4)}(0)=24$

5. 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为 _________

解 该曲面在点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面的法向量为 $(x_0,2y_0,-1)$ 。又该切平面于已知平面平行，从而两平面法向量平行，故 $\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{-1}{-1}$

从而 $x_0=2$, $y_0=1$, 得 $z_0=\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=3$, 从而所求切平面为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

即

$$2x+2y-z=3$$

二 (**本题满分** 14 **分**)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1)$, $0<f'(x)<1$.

试证当 $a\in(0,1)$, $\left(\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\displaystyle\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 设 $F(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-\displaystyle\int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0$ 且要证明 $F'(x)>0$

设 $g(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)$, 则 $F'(x)=f(x)g(x)$

由于 $f(0)=0$, $f'(x)>0$, 故 $f(x)>0$,

从而只要证明 $g(x)>0$, $x>0$

而 $g(0)=0$, 我们只要证明 $g'(x)>0$, $0<x<a$

而 $g'(x)=2f(x)\big[1-f'(x)\big]>0$, 得证

三 (本题满分 14 分)

某物体所在的空间区域为 $\Omega:\ x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$,

密度函数为 $x^2+y^2+z^2$，求质量

$$M=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

解 由于 $\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 1$，是一个椭球

其体积为 $V=\frac{4\pi}{3}\pi$，作变换 $u=x-\frac{1}{2},v=y-\frac{1}{2},w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$
将 Ω 变为单位球 $\Sigma: u^2+v^2+w^2\leqslant 1$，而

$$J=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}$$

故 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\sqrt{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 且

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Sigma}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

因一次项积分都是 0，故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint_{\Sigma}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w+A$$

其中 $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)V=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
记

$$I=\iiint_{\Sigma}\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{5}$$

由于 u^2,v^2,w^2 在 Σ 上积分都是 $\frac{I}{3}$，故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)I+A=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$$

四 (本题满分 14 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0$, $f(1)=1$.

证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

解 n 等分区间 $[0,1]$, 分点为 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$.

记 $h=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$, 则 $x_k=0+kh=kh$, $x_k-x_{k-1}=h$, $k=1,2,\cdots,n$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} hf(x_k)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k1}}^{x_k}\big(f(x)-f(x_k)\big)\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\cdot(x-x_k)\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\cdot\int_{x_{k1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x \quad \xi_k\in(x_{k-1},x_k)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\Big(-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\Big) \quad \eta_k\in(\xi_k,x_k)\\
=&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1-0)\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)h\\
=&-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\big(f(1)-f(0)\big)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

五 (本题满分 14 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$.

证明: 在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2 使得

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}$$

证明 设 $F(x)=\dfrac{1}{I}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 则 $F(0)=0$, $F(1)=1$.

由介值定理, 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F(\xi)=\dfrac{1}{2}$
在两个子区间 $(0,\xi)$, $(\xi,1)$ 分别应用拉格朗日中值定理：

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0}=\frac{1/2}{\xi} \quad , \quad x_1\in(0,\xi)$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{1/2}{1-\xi} \quad , \quad x_2\in(0,\xi)$$

$$\frac{I}{f(x_1)}+\frac{I}{f(x_2)}=\frac{1}{F'(x_1)}+\frac{1}{F'(x_2)}=\frac{\xi}{1/2}+\frac{1-\xi}{1/2}=2$$

六 (**本题满分** 14 **分**)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且

$$f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数

证明 由 $f(x)=f(x+2)$ 知 $f(x)$ 为以 2 为周期的周期函数，
其 Fourier 系数分别为：

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x \quad b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$

由 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$ 知

$$\begin{aligned}
a_n &=\int_{-1}^{1} f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\big(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\big)\,\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

所以 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$
同理可得 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi+a_n\sin\sqrt{3}n\pi$
联立

$$\begin{cases} a_n &=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi\\ b_n &=b_n\cos\sqrt{3}n\pi+a_n\sin\sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得 $a_n = b_n = 0\ (n=1,2,\cdots)$

而 $f(x)$ 可导，其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$，所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) = \frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为常数