自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2019–2020 学年 第 一 学期

微积分 AI 期中试卷（模拟卷解析）

院 (系) ____________ 班级 ____________ 姓名 ____________ 学号 ____________

试卷卷面成绩						课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	四	小 计			
得 分								

得分

一、填空题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

1. 函数 $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的定义域为 $\underline{\ [-1,1)\ }$.

解析 要使其有定义，只须考虑根号下非负，即 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$，可得 $x\in[-1,1)$ 故函数定义域为 $[-1,1)$. □

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\underline{\ \dfrac{1}{4}\ }$.

解析 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{2x^3}$

计算 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{2x^3}=\dfrac{1}{4}.$ □

3. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x)^{\frac{1}{\tan x\sin x}}=\underline{\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ }$.

解析 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sec x-1)^{\frac{1}{\tan x\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sec x-1)^{\frac{1}{\sec x-1}(\sec x-1)\frac{1}{\tan x\sin x}}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\sec x-1}{\tan x\sin x}}$

$=\mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$ □

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\underline{\ \dfrac{1}{2}\ }$.

解析 由于 $\dfrac{i}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{i}{n^2+n+i}\leqslant\dfrac{i}{n^2+n+1}$，故有

$$\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+n\right)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{i}}{n^2+n+i}\leqslant\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+1\right)}$$

则

$$\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+n\right)}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{i}}{n^2+n+i}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+n+1\right)}=\frac{1}{2}$$

由夹逼准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$. □

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x-1}, & x<0\\ b, & x=0\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}+a, & x>0\end{cases}$，当 $\underline{\ a=-2，b=0\ }$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解析 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则须 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(x)=b$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\cdot\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$$

而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\ln(1+2x)}{x}+a\right]=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}+a=2+a$$

因此，当 $a=-2$，$b=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. □

6. 设 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$，则 $y'=\underline{\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}\right]}$.

解析 $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1)$

则 $y'=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}\right]$. □

7. 设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\underline{\dfrac{\mathrm{e}(2\mathrm{e}-3)}{4}}$.

解析 对方程组两边分别取微分，得 $\begin{cases}\mathrm{d}x=(6t+2)\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{e}^y\sin t\,\mathrm{d}y+\mathrm{e}^y\cos t\,\mathrm{d}t-\mathrm{d}y=0\end{cases}$ 则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2\qquad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(1-\mathrm{e}^y\sin t)(6t+2)}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$
$$=\frac{(2-y)(6t+2)\left(\mathrm{e}^y\cos t\cdot y'-\mathrm{e}^y\sin t\right)-\mathrm{e}^y\cos t\left(12-6y-6ty'-2y'\right)}{(2-y)^2(6t+2)^2}\cdot\frac{1}{6t+2}$$

将 $t=0$ 带入得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{\mathrm{e}\,(2\,\mathrm{e}-3)}{4}$. □

8. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$.

解析 原式 $=x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$

$$\xlongequal{Talyor} x\left[\left(1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]=\frac{1}{3}.$$ □

9. 设 $0<x<1$，则函数 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ 的最小值是 $\underline{\ 4\ }$.

解析 $y'=\dfrac{1-2x}{x^2(1-x)^2}$，则知单调减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，单调增区间 $\left((\dfrac{1}{2},1\right)$，则知在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取最大值 4. □

10. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 的拐点为 $\underline{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)}$.

解析 $y=1-\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $y'=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，$y''=2\left[\dfrac{1}{(1+x^2)^2}-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^3}\right]$

令 $y''=0$，则知 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即拐点为 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$. □

得分

二、单项选择题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

11. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $x-[x]$ 是 【 B 】

(A) 无界函数　　(B) 周期为 1 的周期函数

(C) 单调函数　　(D) 偶函数

解析 画出函数图像，从图像可以看出图像为周期为 1 的周期函数，故选 B. □

12. 设 f 为奇函数，g 为偶函数，且他们可以构成复合函数 $f(f(x)),g(g(x))$，$f(g(x))$，$g(f(x))$，则其中为奇函数的是 【 A 】

(A) $f(f(x))$　　(B) $g(g(x))$　　(C) $f(g(x))$　　(D) $g(f(x))$

解析 由于 $f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$，故选 A 项. □

13. 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小是 【 B 】

(A) $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

解析 当 $(x\to 0^+)$ 时，$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}=[\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})]\sim\sqrt{x}$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

$\ln(1+x)\sim x$，即当 $x\to 0^+$ 时，$\ln(1+x)$ 是 x 的一阶无穷小

$-\ln(1-\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，即当 $x\to 0^+$ 时，$-\ln(1-\sqrt{x})$ 是 x 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷

几个不同阶的无穷小量的代数和其阶数由其中**阶数最低的项**来决定

另外，$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$

故应选 B. □

14. 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是 【 D 】

(A) 2　　(B) 0

(C) ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

解析　$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$

则知该极限不存在但不为 ∞，故选 D. □

15. 对于函数 $f(x)=\dfrac{k}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2-x}}}(k<0)$ 的间断点及其类型判断，下列说法正确的是 【 D 】

(A) $x=0$ 为函数第二类振荡间断点，$x=2$ 为函数第一类可去间断点

(B) $x=0$ 为函数第二类振荡间断点，$x=2$ 为函数第一类跳跃间断点

(C) $x=0$ 为函数第二类无穷间断点，$x=2$ 为函数第一类可去间断点

(D) $x=0$ 为函数第二类无穷间断点，$x=2$ 为函数第一类跳跃间断点

解析　因为使 $f(x)$ 无定义的点为 $x=0$，$x=2$

(i) 当 $x\to 0$ 时，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2-x}}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2-x}}}=\infty$

从而 $x=0$ 为无穷间断点（第二类）.

(ii) 当 $x\to 2^-$ 时，$\dfrac{x}{2-x}\to+\infty$，从而 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2-x}}\to-\infty$，$f(1^-)=0$

当 $x\to 2^+$ 时，$\dfrac{x}{2-x}\to-\infty$，从而 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{2-x}}\to 1$，$f(1^+)=1$

所以 $x=2$ 为跳跃间断点（第一类）.

故选 D. □

16. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x^{-\mathrm{n}}-x^n)(\mathrm{e}^x-1)}{(x^{-n}+x^n)\sin x}$ 在 【 B 】

(A) $x=0$ 连续，$x=\pm1$ 连续　　(B) $x=0$ 不连续，$x=\pm1$ 不连续

(C) $x=0$ 不连续，$x=\pm1$ 连续　　(D) $x=0$ 连续，$x=\pm1$ 不连续

解析　由函数形式可知 $x\neq 0$，故一定在 $x=0$ 处不连续。由题易得

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})(\mathrm{e}^x-1)}{(1+x^{2n})\sin x}, & 0<|x|<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x^{-2n}-1)(\mathrm{e}^x-1)}{(x^{-2n}+1)\sin x}, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}, & 0<|x|<1\\ -\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}, & |x|>1\end{cases}$$

可知 $f(1^+)\neq f(1^-)$，$f(-1^+)\neq f(-1^-)$，故在 $x=\pm1$ 处也不连续. □

17. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 【 D 】

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导　　(D) 可导

解析　由一元函数性质，若能首先判定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 (A), (B), (C) 均被排除

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=0$$

而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0$$

所以，$f'(0)=0$，选 D. □

18. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=1$，则 $f'(0)=$ 【 D 】

(A) $\ln 2$　　(B) $\dfrac{\ln 2}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{\ln 2}$　　(D) 0

解析　由题设，显然 $f(0)=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{(\ln 2)\,f\,(x)}=1$$

所以 $f\,(x)\sim\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\ln 2}\,(x\to0)$，故

$$f'\,(0)=\lim_{x\to0}\frac{f\,(x)-f\,(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{(2\ln 2)\,x}=0$$

故选 D. □

19. 函数 $f\,(x)=\dfrac{x^2\,(x-1)}{(x+1)^2}$ 的图形的渐近线条数为 【 B 】

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解析　因为 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2\,(x-1)}{(x+1)^2}=-\infty$，所以 $x=-1$ 是垂直渐近线；

又 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\,(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\,(x-1)}{(x+1)^2}=1$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f\,(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2\,(x-1)}{(x+1)^2}-x\right]$
$=-3$，所以 $y=x-3$ 为斜渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\,(x-1)}{(x+1)^2}=\infty$，故没有水平渐近线；

所以渐近线条数为 2 条，选 B. □

20. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ 【 D 】

(A) 不可导 (B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$

(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

解析 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，排除 (A)(B)

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$ 可知，在 $x=0$ 的某去心邻域内 $f(x)>0$（函数极限的部分保号性），即 $f(x)>f(0)$，故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，选 D. □

得分

三、计算题 (本题共 2 小题，每题 6 分，满分 12 分)

21. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+2x\arctan x}{\mathrm{e}^x-\pi x}$.

解 因为当 $x\to+\infty$ 时，$\mathrm{e}^x\to+\infty$，$\arctan x\to\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$，$\mathrm{e}^x\to 0$，$\arctan x\to-\dfrac{\pi}{2}$，所以考虑左右极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+2x\arctan x}{\mathrm{e}^x-\pi x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}}{\mathrm{e}^x-\pi}=1$$

而

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x+2x\arctan x}{\mathrm{e}^x-\pi x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x+2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}}{\mathrm{e}^x-\pi}=1$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+2x\arctan x}{\mathrm{e}^x-\pi x}=1$. □

22. 设 $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant 0\\ ax^2+bx+c, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，求 a,b,c.

解 由函数连续条件得 $\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)$，又

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)\qquad \lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}ax^2+bx+c=c$$

知 $c=f(0)$

由函数可导的充要条件得 $F'_-(0)=F'_+(0)$ 又

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx+c-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx}{x}=b$$

知 $b=f'(0)$

由函数二阶可导的充要条件得 $F''_-(0)=F''_+(0)$

$$F''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{F'_-(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$$

$$F''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F'_+(x)-F'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2ax+b-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{ax^2+bx}{x}=2a$$

知 $a=\dfrac{1}{2}f''(0)$. $\square$

得分

四、证明题 (本题满分 8 分)

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $0<a<b$, 试证明: $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{\eta^2}{b-a}\left[bf(b)-af(a)\right]=\xi^2\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right]$.

证明 构造函数 $g(x)=xf(x)$, $h(x)=\dfrac{1}{x}$, 由 Cauchy 中值定理有 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$$

即有

$$\frac{bf(b)-af(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{\frac{1}{-\xi^2}}$$

由 Lagrange 中值定理有 $\exists\eta\in(a,b)$, 使得

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{b-a}{-\eta^2}$$

整理可得

$$\frac{\eta^2}{b-a}\left[bf(b)-af(a)\right]=\xi^2\left[f(\xi)+\xi f'(\xi)\right]$$

证毕. $\square$