2014年全国大学生数学竞赛预赛试题参考答案

一 填空题(共有5小题，每小题6分,共30分)

（1） 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该方程是__________.

答案：$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

[参考解答] 由题设知该方程的特征方程有二重根 $r=1$，故所求微分方程是 $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$.

（2）设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 L：$2x+2y+z=0$，则与 L 平行的 S 的切平面方程是 .

答案：$2x+2y+z+\frac{3}{2}=0$

[参考解答] 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 S 上一点，则 S 在 P_0 的切平面方程是

$$-2x_0(x-x_0)-4y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

由于该切平面与已知平面 L 平行，则 $(-2x_0,-4y_0,1)$ 平行于 $(2,2,1)$，故存在常数 $k\neq 0$ 使得 $(-2x_0,-4y_0,1)=k(2,2,1)$，从而 $k=1$. 故得 $x_0=-1$，$y_0=\frac{-1}{2}$，这样就有 $z_0=\frac{3}{2}$. 所求切面方程是

$$2x+2y+z+\frac{3}{2}=0.$$

（3）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)dt$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$_________.

答案：$y'=3$

[参考解答] 易知在 $y(0)=1$. 对方程的两边关于 x 求导，得 $1=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1)$，于是 $y'=\csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)+1$，把 $x=0$ 代入上式，得 $y'=3$.

（4）设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$__________.

答案：1

[参考解答] $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}\to 1.$$

(5）已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$__________.

答案: 2

[参考解答] 由$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x+\dfrac{f(x)}{x})=3$,于是有$\dfrac{1}{x}\ln(1+x+\dfrac{f(x)}{x})=3+\alpha$,

其中 $\alpha\to 0(x\to 0)$, 即有 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\alpha x}{x}-1=2.$$

二 (本题满分 12 分) 设n为正整数, 计算 $I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\dfrac{d}{dx}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|dx.$

[参考解答与评分标准]

$$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln x\right)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin\ln x\right|\frac{1}{x}dx.$$ ……….….. (6 分)

令 $\ln x=u$，则有 $I=\int_{-2n\pi}^{0}\left|\sin u\right|du=\int_{0}^{2n\pi}\left|\sin t\right|dt=4n\int_{0}^{\pi/2}\left|\sin t\right|dt=4n$. ……………… (12 分)

三 (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在[0, 1]上有二阶导数，且有正常数A,B使得 $|f(x)|\le A$, $|f''(x)|\le B$. 证明：对任意 $x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\dfrac{B}{2}$.

[参考解答与评分标准] 由泰勒公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x)^2,\xi\in(0,x),$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2,\eta\in(x,1),$$ ………. (5 分)

上述两式相减，得到$f(0)-f(1)=-f'(x)-\dfrac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$, 于是

$$f'(x)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2.$$ ………… (8 分)

由条件$|f(x)|\le A$，$|f''(x)|\le B$，得到

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}\left((1-x)^2+x^2\right).$$ ………. (11 分)

因$x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$在[0,1]的最大值为 1, 故

$$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}.$$ ……….. (14 分)

四 (本题满分 14 分) **(1)**设一球缺高为h，所在球半径为R.证明该球缺的体积为$\dfrac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为$2\pi Rh$.

$\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right)^n=0$，所以$\exists N,\forall n>N$ 时有

$$\left(\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right)^n<\frac{\varepsilon}{2}=1-c. \quad \text{……….. (8 分)}$$

即 $f^n(1-\varepsilon)<f^n(c)(1-c)\le\int_c^1 f^n(x)dx\le\int_0^1 f^n(x)dx=f^n(x_n)$,从而$1-\varepsilon<x_n$. 由ε 的任意性得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1. \quad \text{…….. (10 分)}$$

再考虑一般情形. 令 $F(t)=f(a+t(b-a))$，由 f 在$[a,b]$上非负连续，严格单增知 F 在$[0,1]$上非负连续，严格单增. 从而$\exists t_n\in[0,1]$，使得$F^n(t_n)=\int_0^1F^n(t)dt$，且$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$，即

$$f^n(a+t_n(b-a))=\int_0^1 f^n(a+t(b-a))dt.$$

记 $x_n=a+t_n(b-a)$，则有

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx，且\lim_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)=b. \quad \text{………. (15 分)}$$

六 (本题满分 15 分) 设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$.

[解] 令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，因 $A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{1+i^2/n^2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$. ……… (5 分)

记 $x_i=\dfrac{i}{n}$，则 $A_n=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)dx$，故 $J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_i))dx$. ……… (8 分)

由拉格朗日中值定理，存在$\zeta_i\in(x_{i-1},x_i)$使得 $J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta_i)(x-x_i)dx$. ……… (10 分)

记 m_i 和 M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最小值和最大值，则 $m_i\le f'(\zeta_i)\le M_i$，故积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta_i)(x-x_i)dx$ 介于$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)dx$ 和$M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)dx$之间，所以存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta_i)(x-x_i)dx=-f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2/2, \quad \text{……… (12 分)}$$

于是，有 $J_n=-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^n f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2=-\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n f'(\eta_i)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\frac{1}{4}. \quad \text{……… (15 分)}$$

(2)设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$被平面$P:x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$．记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy\ .$$

[参考解答与评分标准] (1)设球缺所在的球体表面的方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$，球缺的中心线为z轴，且设球缺所在圆锥顶角为2α．记球缺的区域为Ω，则其体积为

$$\iiint_{\Omega} dv=\int_{R-h}^{R} dz\iint_{D_z} dxdy=\int_{R-h}^{R}\pi(R^2-z^2)dz=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2\ . \qquad \ldots\ldots\ (3\text{ 分})$$

由于球面的面积微元是$dS=R^2\sin\theta d\theta$，故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\alpha} R^2\sin\theta\, d\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh\ . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6\text{ 分})$$

(2)记球缺Ω的底面圆为P_1，方向指向球缺外，且记$J=\iint_{P_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$．由 Gauss 公式，有

$$I+J=\iiint_{\Omega} 3dv=3v(\Omega)\ , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9\text{ 分})$$

其中$v(\Omega)$为Ω的体积. 由于平面P的正向单位法向量为$\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,故

$$J=\frac{-1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)dS=\frac{-6}{\sqrt{3}}\sigma(P_1)=-2\sqrt{3}\sigma(P_1)\ ,$$

其中$\sigma(P_1)$是P_1的面积。故$I=3v(\Omega)-J=3v(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma(P_1)$. …………… (12 分)

因为球缺底面圆心为$Q=(2,2,2)$,而球缺的顶点为$D=(3,3,3)$,故球缺的高度$h=|QD|=\sqrt{3}$.再由(1)所证并代入$h=\sqrt{3}$和$R=2\sqrt{3}$得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi(2Rh-h^2)=33\sqrt{3}\pi\ . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (14\text{ 分})$$

五 (本题满分 15 分) 设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n dx$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明：先考虑特殊情形：$a=0,b=1$. 下证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

首先$x_n\in[0,1]$，即$x_n\le 1$，只要证明$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，$\exists N,\forall n>N$时，$1-\varepsilon<x_n$. 由$f$在$[0,1]$严格单增，就是要证明 $f^n(1-\varepsilon)<f^n(x_n)=\int_0^1 f^n(x)dx$. ………….. (3 分)

由于$\forall c\in(0,1)$，有$\int_c^1 f^n(x)dx>f^n(c)(1-c)$，现取$c=1-\frac{\varepsilon}{2}$，则$f(1-\varepsilon)<f(c)$，即