

第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学类, 2016年10月)

一、(本题 15 分) 设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 V 的一束平行光线照射 S , 其中的部分光线与 S 相切, 它们的切点在 S 上形成一条曲线 Γ .

证明: Γ 落在一张过椭球中心的平面上.

证明 1 在空间中取直角坐标系, 记椭球面 S 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad V = (\alpha, \beta, \gamma).$$

设 $(x, y, z) \in \Gamma$, 则光束中的光线

$$\ell(t) = (x, y, z) + t(\alpha, \beta, \gamma), \quad t \in \mathbb{R}$$

是椭球面 S 的切线.

..... (8分)

由于每条切线与椭球面有且仅有一个交点, 故 $t = 0$ 是方程

$$\frac{(x + t\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + t\beta)^2}{b^2} + \frac{(z + t\gamma)^2}{c^2} = 1$$

的唯一解. 由于 $(x, y, z) \in \Gamma \subset S$, 上述方程化为

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{\alpha}{a^2} x + \frac{\beta}{b^2} y + \frac{\gamma}{c^2} z \right) t = 0.$$

这个方程只有 $t = 0$ 的唯一解, 当且仅当

$$\frac{\alpha}{a^2} x + \frac{\beta}{b^2} y + \frac{\gamma}{c^2} z = 0.$$

这是一个过原点的平面方程, 故 Γ 落在过椭球面中心的一张平面上.

.....(15分)

证明 2 在空间中做仿射变换, 将椭球面映成圆球面.

..... (5分)

这时平行光束映成平行光束, 切线映成切线, 切点映成切点, 椭球中心映成球面中心.

..... (10分)

由于平行光束照圆球面的所有切线的切点是一个大圆, 它落在过球心的平面上, 而仿射变换将平面映成平面, 故 Γ 落在一张过椭球面中心的平面上.

..... (15分)

二、(本题 15 分) 设 n 为奇数, A, B 为两个实 n 阶方阵, 且 $BA = 0$. 记 $A + J_A$ 的特征值集合为 S_1 , $B + J_B$ 的特征值集合为 S_2 , 其中 J_A, J_B 分别表示 A 和 B 的 Jordan 标准型. 求证 $0 \in S_1 \cup S_2$.

证明 由秩不等式 $\text{rank } A + \text{rank } B \leq \text{rank}(BA) + n$ 得 $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$. 结果 $\text{rank } A \leq \frac{n}{2}$ 或 $\text{rank } B \leq \frac{n}{2}$(5分)

注意到 n 为奇数, 故有 $\text{rank } A < \frac{n}{2}$ 或 $\text{rank } B < \frac{n}{2}$ 成立。(10分)

若 $\text{rank } A < \frac{n}{2}$, 则 $\text{rank}(A + J_A) \leq \text{rank } A + \text{rank } J_A < n$, 此时, $0 \in S_1$;

若 $\text{rank } B < \frac{n}{2}$, 则 $\text{rank}(B + J_B) \leq \text{rank } B + \text{rank } J_B < n$, 此时, $0 \in S_2$. 最终总有 $0 \in S_1 \cup S_2$(15分)

数学家

三、(本题 20 分) 设 A_1, \dots, A_{2017} 为 2016 阶实方阵。证明关于 x_1, \dots, x_{2017} 的方程 $\det(x_1 A_1 + \dots + x_{2017} A_{2017}) = 0$ 至少有一组非零实数解, 其中 \det 表示行列式.

证明 记

$$A_1 = (p_1^{(1)}, \dots, p_{2016}^{(1)}), \dots, A_{2017} = (p_1^{(2017)}, \dots, p_{2016}^{(2017)}).$$

.....(5分)

考虑线性方程组

$$x_1 p_1^{(1)} + \dots + x_{2017} p_1^{(2017)} = 0$$

.....(10分)

由于未知数个数大于方程个数, 故该线性方程组必有非零解 (c_1, \dots, c_{2017}) . 从而 $c_1 A_1 + \dots + c_{2017} A_{2017}$ 的第一列为 0, 更有

$$\det(c_1 A_1 + \dots + c_{2017} A_{2017}) = 0.$$

证毕。

.....(20分)

数学家

四、(本题 20 分) 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0, 1]$ 上正连续函数, 满足 $\int_0^1 f_0(x) dx \leq \int_0^1 f_1(x) dx$. 设

$$f_{n+1}(x) = \frac{2f_n^2(x)}{f_n(x) + f_{n-1}(x)}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

求证: 数列 $a_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 单调递增且收敛.

证明 因为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx - \int_0^1 \frac{f_0^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{f_1^2(x) - f_0^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx = \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 f_0(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 \int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx - \int_0^1 f_1(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx - \int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f_1^2(x) + f_0^2(x)}{(f_1(x) + f_0(x))} dx - \int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(f_1(x) - f_0(x))^2}{2(f_1(x) + f_0(x))} dx \geq 0. \end{aligned}$$

归纳地可以证明 $a_{n+1} \geq a_n$, $n = 1, 2, \dots$(5分)

由于 f_0, f_1 是正连续函数, 可取常数 $k \geq 1$ 使得 $f_1 \leq kf_0$. 设 $c_1 = k$. 根据递推关系可以归纳证明

$$f_n(x) \leq c_n f_{n-1}(x), \quad (1)$$

.....(10分)

其中 $c_{n+1} = \frac{2c_n}{c_n+1}$, $n = 0, 1, \dots$. 易证 $\{c_n\}$ 单调递减趋于 1, 且 $\frac{c_n}{c_n+1} \leq \frac{k}{k+1}$.

.....(15分)

以下证明 $\{a_n\}$ 收敛. 由 (1) 可得 $a_{n+1} \leq c_{n+1}a_n$. 因此

$$c_{n+1}a_{n+1} \leq \frac{2c_{n+1}}{c_n+1}c_na_n = \frac{4c_n}{(c_n+1)^2}c_na_n \leq c_na_n.$$

这说明 $\{c_na_n\}$ 是正单调递减数列, 因而收敛. 注意到 $\{c_n\}$ 收敛到 1, 可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq c_1a_1 = ka_1$(20分)

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$. 求证不存在 $[0, +\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) \geq f^\alpha(x), \quad x \in [0, +\infty). \quad (1)$$

证明 若 $f(x)$ 是这样的函数, 则 $f'(x) > 0$. 因此 $f(x)$ 是严格递增函数. (1) 式可表示为

$$\left(\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x \right)' \leq 0.$$

这说明 $\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x$ 是单调递减函数.(5分)

因而

$$\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x+1) + (x+1) \leq \frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x,$$

即,

$$(\alpha-1) \leq f^{1-\alpha}(x) - f^{1-\alpha}(x+1) < f^{1-\alpha}(x).$$

因此

$$f^{\alpha-1}(x) < \frac{1}{\alpha-1}.$$

于是 $f(x)$ 是有界函数.(10分)

从 $f(x)$ 的严格递增性, 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 收敛. 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geq f^\alpha(\xi) \geq f^\alpha(x) \geq f^\alpha(0) > 0.$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 上式左端趋于零, 可得矛盾!(15分)

六、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0, 1]$ 区间上的单调递增函数, 满足

$$0 \leq f(x), g(x) \leq 1, \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

求证:

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \frac{1}{2}.$$

证明 由于 f 和 g 可用单调阶梯函数逼近, 故可不妨设他们都是单调增的阶梯函数。.....(2分)

令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则对 $\forall x, y \in [0, 1]$ 有 $|h(x) - h(y)| \leq 1$(5分)
事实上, 对 $x \geq y$ 我们有

$$-1 \leq -(g(x) - g(y)) \leq h(x) - h(y) = f(x) - f(y) - (g(x) - g(y)) \leq f(x) - f(y) \leq 1;$$

对 $x < y$ 有

$$-1 \leq f(x) - f(y) \leq h(x) - h(y) \leq g(y) - g(x) \leq 1.$$

现记

$$C_1 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq g(x)\}, \quad C_2 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) < g(x)\},$$

则 C_1 与 C_2 分别为有限个互不相交区间的并, 且由 $\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx$, 有

$$\int_{C_1} h dx = - \int_{C_2} h dx.$$

让 $|C_i| (i = 1, 2)$ 表示 C_i 所含的那些区间的长度之和, 则 $|C_1| + |C_2| = 1$(7分)
于是

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 |f - g| dx &= 2 \left(\int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx \right) \\ &\leq \left(\frac{|C_2|}{|C_1|} \int_{C_1} h dx + \frac{|C_1|}{|C_2|} \int_{C_2} (-h) dx \right) + \int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx \\ &= \frac{1}{|C_1|} \int_{C_1} h dx + \frac{1}{|C_2|} \int_{C_2} (-h) dx \\ &\leq \sup_{C_1} h + \sup_{C_2} (-h) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

注意, 上式中最后一个不等式来自 $|h(x) - h(y)| \leq 1$, 另外, 若有某个 $|C_i|$ 等于 0, 则结论显然成立。.....(15分)