第二届全国大学生数学竞赛预赛(2010 年非数学类)

试　题

一、计算下列各题(本题共 5 个小题,每题 5 分,共 25 分)(要求写出重要步骤)

(1)设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$,其中 $|a|<1$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2)求 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3)设 $s>0$,求 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$.

(4)设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$,求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(5)求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0,\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

二、(15 分)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数,并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0,使得 $f(x_0)<0$. 证明:方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

三、(15 分)设函数 $y=f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t>-1$$

所确定,且 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数,曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\displaystyle\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

四、(15 分)设 $a_n>0$,$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$,证明:

(1)当 $\alpha>1$ 时,级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2)当 $\alpha\leqslant 1$,且 $S_n\to\infty(n\to\infty)$ 时,级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

五、(15 分)设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ)(其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线,均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$(其中 $0<c<b<a$,密度为 1)绕 l 旋转.

(1)求其转动惯量;

(2)求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

六、(15 分)设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上,曲线积分 $\displaystyle\oint_C\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1)设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明:$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$.

(2)求函数 $\varphi(x)$.

(3)设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线,求 $\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

参考答案

一、(1)解 将 x_n 恒等变形

$$
\begin{aligned}
x_n &= (1-a)\cdot(1+a)\cdot(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}\\
&=(1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}\\
&=(1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}.
\end{aligned}
$$

由于 $|a|<1$,可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^n}=0$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{1-a}$.

(2)解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}&=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\mathrm{e}^{-1}\right]^x\\
&=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]x\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]\right\}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

(3)解 因为 $s>0$ 时,$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n=0$,所以

$$
I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-sx}=-\frac{1}{s}\left[x^n\mathrm{e}^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x^n\right]=\frac{n}{s}I_{n-1},
$$

由此得到

$$
I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n=2}=\cdots=\frac{n!}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}.
$$

(4)解 因为 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$,所以

$$
\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right),
$$

利用对称性有

$$
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right).
$$

(5)解 直线 l_1 的对称式方程为 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$. 记两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{l}_1=(1,1,0)$,$\boldsymbol{l}_2=(4,-2,-1)$,两直线上的定点分别为 $P_1(0,0,0)$ 和 $P_2(2,1,3)$,$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3)$.

$\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=(-1,1,-6)$. 由向量的性质可知,两直线的距离

$$
d=\left|\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2)}{|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}.
$$

二、证法1 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha>0$ 必有一个充分大的 $a>x_0$,使得 $f'(a)>0$.

由 $f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$ 是凹函数，从而

$$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a),x>a.$$

当 $x\to+\infty$ 时

$$f(a)+f'(a)(x-a)\to+\infty,$$

故存在 $b>a$，使得

$$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0.$$

同样，由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，必有 $c<x_0$，使得 $f'(c)<0$.

由 $f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$ 是凹函数，从而

$$f(x)>f(c)+f'(c)(x-c),x<c.$$

当 $x\to-\infty$ 时

$$f(c)+f'(c)(x-c)\to+\infty,$$

故存在 $d<c$，使得

$$f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0.$$

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理，$\exists\, x_1\in(x_0,b)$，$x_2\in(d,x_0)$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根.

用反证法. 假设方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有3个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3 且 $x_1<x_2<x_3$. 用 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上分别应用罗尔定理，则各至少存在一点 $\xi_1(x_1<\xi_1<x_2)$ 和 $\xi_2(x_2<\xi_2<x_3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用罗尔定理，则至少存在一点 $\eta(\xi_1<\eta<\xi_2)$，使 $f''(\eta)=0$. 此与条件 $f''(x)>0$ 矛盾. 从而方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不能多于两个根.

证法2 先证方程 $f(x)=0$ 至少有两个实根.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$.

因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，故 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 均连续. 由拉格朗日中值定理，对于 $x>a$ 有

$$\begin{aligned}f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]&=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\\&=f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a)\\&=[f'(\xi)-f'(a)](x-a)\\&=f''(\eta)(\xi-a)(x-a),\end{aligned}$$

其中，$a<\xi<x$，$a<\eta<x$. 注意到 $f''(\eta)>0$（因为 $f''(x)>0$），则

$$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a),x>a.$$

又因 $f'(a)>0$，故存在 $b>a$，使得

$$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0.$$

又已知 $f(x_0)<0$，由连续函数的中间值定理，至少存在一点 $x_1(x_0<x_1<b)$ 使得 $f(x_1)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上至少有一个根 x_1.

同理可证方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上至少有一个根 x_2.

下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根.（以下同证法1）

三、解 因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2+2t}\cdot\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3},$$

由题设 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，故 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，从而

$$(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2,$$

即

$$\psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t).$$

设 $u=\psi'(t)$，则有 $u'-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$，故

$$\begin{aligned}u&=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}\left[\int 3(1+t)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right]\\&=(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}\mathrm{d}t+C_1\right]=(1+t)(3t+C_1),\end{aligned}$$

$$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)\mathrm{d}t=\int(3t^2+(3+C_1)t+C_1)\mathrm{d}t=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

由曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切知 $\psi(1)=\frac{3}{2\mathrm{e}}$，$\psi'(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$. 所以 $u|_{t=1}=\psi'(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$，由此知 $C_1=\frac{1}{\mathrm{e}}-3$. 由 $\psi(1)=\frac{3}{2\mathrm{e}}$，知 $C_2=2$. 于是

$$\psi(t)=t^3+\frac{1}{2\mathrm{e}}t^2+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-3\right)t+2,\ t>-1.$$

四、证　令 $f(x)=x^{1-\alpha}$，$x\in[S_{n-1},S_n]$. 将 $f(x)$ 在区间 $[S_{n-1},S_n]$ 上用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(S_{n-1},S_n)$，使

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1}),$$

即

$$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n.$$

(1) 当 $\alpha>1$ 时

$$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}}\geqslant(\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}},$$

显然 $\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$ 的前 n 项和有界，从而收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛.

(2) 当 $\alpha=1$ 时，因为 $a_n>0$，S_n 单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geqslant\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

因为 $S_n\to+\infty$，对任意 n，当 $p\in\mathbf{N}$，$\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$，从而 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geqslant\frac{1}{2}$. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

当 $\alpha<1$ 时，$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\geqslant\frac{a_n}{S_n}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

五、解　(1) 设旋转轴 l 的方向向量为 $\boldsymbol{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意一点 $P(x,y,z)$ 的径向量为 $\boldsymbol{r}$，则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$d^2=\boldsymbol{r}^2-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l})^2=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz.$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint\limits_{\Omega}(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\qquad \Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1\right\},$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4a^3bc\pi}{15},$$

$$\left(\text{或}\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4a^3bc\pi}{15}\right)$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4ab^3c\pi}{15},\qquad\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc^3\pi}{15}.$$

由转动惯量的定义

$$J_l=\iiint\limits_{\Omega}d^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc\pi}{15}[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2].$$

(2)考虑目标函数

$$V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$$

在约束 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1),$$

令

$$L_\alpha=2\alpha(\lambda-a^2)=0,\quad L_\beta=2\beta(\lambda-b^2)=0,\quad L_\gamma=2\gamma(\lambda-c^2)=0,\quad L_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0.$$

解得极值点为

$$Q_1(\pm1,0,0,a^2),\quad Q_2(0,\pm1,0,b^2),\quad Q_3(0,0,\pm1,c^2).$$

比较可知,绕 z 轴(短轴)的转动惯量最大,为 $J_{\max}=\dfrac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2)$;绕 x 轴(长轴)的转动惯量最小,为

$$J_{\min}=\frac{4abc\pi}{15}(b^2+c^2).$$

六、解　(1)设 $\oint_C \dfrac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I$,闭曲线 L 由 $L_i(i=1,2)$ 组成. 设 L_0 为不经过原点的光滑曲线,使得 $L_0\cup L_1^-$(其中 L_1^- 为 L_1 的反向曲线)和 $L_0\cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 $C_i(i=1,2)$. 由曲线积分的性质和题设条件

$$\begin{aligned}\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}&=\int_{L_1}+\int_{L_2}\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\&=\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\&=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I-I=0.\end{aligned}$$

(2)设 $P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$,$Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$. 令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,即 $\dfrac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\dfrac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$,解得 $\varphi(x)=-x^2$.

(3)设 D 为正向闭曲线 $C_\delta:x^4+y^2=\delta^2$ 所围区域,由已知条件及(2)

$$\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_\delta}\frac{2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

利用格林公式和对称性

$$\oint_{C_\delta}\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\frac{1}{\delta^2}\oint_{C_\delta}2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\delta^2}\iint_D(-4x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$