第八届全国大学生数学竞赛预赛(2016年非数学类)

试　　题

一、填空题(本题共5个小题,每题6分,共30分)

(1)若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,且 $f(a)\neq 0$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=$ ________.

(2)若 $f(1)=0$,$f'(1)$ 存在,求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

(3)若 $f(x)$ 有连续导数,且 $f(1)=2$,记 $z=f(e^x y^2)$,若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$,求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式.

(4)设 $f(x)=e^x\sin 2x$,求 $f^{(4)}(0)$.

(5)求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

二、(14分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0)=0$,且当 $x\in(0,1)$ 时,$0<f'(x)<1$. 试证:当 $a\in(0,1)$ 时,有

$$\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$$

三、(14分)某物体所在的空间区域为

$$\Omega:\ x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z.$$

密度函数为 $x^2+y^2+z^2$,求质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

四、(14分)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=0$,$f(1)=1$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

五、(14分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,且 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 证明:在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2,使得

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

六、(14分)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,且

$$f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3}).$$

用傅里叶级数理论证明 $f(x)$ 为常数.

参考答案

一、解 (1) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\right]^{\frac{n\left(f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{f(a)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

(2) $$I=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)\cdot3x}{x^2\cdot x}=3\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=3f'(1)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}=3f'(1)\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).$$

(3) 由题设,得$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^xy^2)\cdot\mathrm{e}^xy^2=f(\mathrm{e}^xy^2)$. 令 $\mathrm{e}^xy^2=u$,则当 $u>0$ 时,有

$$f'(u)u=f(u)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}f(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}\mathrm{d}u,$$

积分得 $\ln f(u)=\ln u+C_1$, 即 $f(u)=Cu$.

又由初值条件得 $f(u)=2u$. 所以,当 $x>0$ 时,$f(x)=2x$.

(4) 将 e^x 和 $\sin2x$ 展开为带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式,有

$$f(x)=\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right)$$

$$=1+2x+\left(2+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{2^3}{3!}\right)x^3+\left(\frac{2}{3!}-\frac{2^3}{3!}\right)x^4+o(x^4),$$

所以有$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{2}{3!}-\frac{8}{3!}=-1$, 即 $f^{(4)}(0)=-24$.

(5) 曲面在(x_0,y_0,z_0)的切平面的法向量为$(x_0,2y_0,-1)$. 又切平面与已知平面平行,从而两平面的法向量平行,所以有

$$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}.$$

从而 $x_0=2,y_0=1$,得 $z_0=3$,所以切平面方程为

$$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,\quad 即\quad 2x+2y-z=3.$$

二、证明 设 $F(x)=\left(\int_0^xf(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^xf^3(t)\mathrm{d}t$,则 $F(0)=0$,下证 $F'(x)>0$.

再设 $g(x)=2\int_0^xf(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$,则 $F'(x)=f(x)g(x)$,由于 $f'(x)>0,f(0)=0$,故 $f(x)>0$. 从而只要证明 $g(x)>0(x>0)$. 而 $g(0)=0$. 因此只要证明 $g'(x)>0(0<x<a)$. 而

$$g'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0.$$

所以 $g(x)>0,F'(x)>0,F(x)$单调增加,$F(a)>F(0)$,即

$$\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$$

三、解 由于

$$\Omega: \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 1.$$

是一个各轴长分别为 $1,1,\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭球，它的体积为 $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

做变换 $u=x-\frac{1}{2}, v=y-\frac{1}{2}, w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$，将区域变成单位球 $\Omega': u^2+v^2+w^2\leqslant 1$，而 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$\begin{aligned} M &= \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4\pi}{3}. \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

而 $\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi$. 所以 $M=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$.

四、证明 将区间 $[0,1]$ 分成 n 等份，设分点为 $x_k=\frac{k}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$，则 $\Delta x_k=\frac{1}{n}$. 且

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_k))\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^n\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\mathrm{d}x\right) \quad (\xi_k\in(x_{k-1},x_k)) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^n f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\mathrm{d}x\right) \quad (\eta_k\in(\xi_k,x_k)). \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^n f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_{k-1}-x_k)^2\right]\right) \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n f'(\eta_k)\Delta x_k\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

五、证明 设 $F(x)=\frac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0, F(1)=1$. 由介值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=\frac{1}{2}$. 在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{\xi},\quad x_1\in(0,\xi);$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\xi},\quad x_2\in(\xi,1).$$

所以

$$\frac{I}{f(x_1)}+\frac{I}{f(x_2)}=\frac{\xi}{\frac{1}{2}}+\frac{1-\xi}{\frac{1}{2}}=2,\quad 即\quad \frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

六、证明　由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$ 可知,f 是以 $2,\sqrt{3}$ 为周期的周期函数,所以,它的傅里叶系数为

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$,所以

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\mathrm{d}x\\&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\mathrm{d}t\\&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi)\mathrm{d}t\\&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故有 $a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi$;同理可得

$$b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi.$$

联立,有

$$\begin{cases}a_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi,\\ b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi,\end{cases}$$

解得 $a_n=b_n=0(n=1,2,\cdots)$.

而 $f(x)$ 可导,其傅里叶级数处处收敛于 $f(x)$,所以有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2},$$

其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 为常数.