第三届全国大学生数学竞赛预赛(2011 年非数学类)

试　　题

一、计算下列各题(本题共 4 个小题,每题 6 分,共 24 分)(要求写出重要步骤)

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

(2)设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3)求$\iint\limits_D\operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(4)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

二、(本题两问,每问 8 分,共 16 分)设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列,a,λ 为有限数,求证:

(1)如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2)如果存在正整数 p,使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

三、(15 分)设函数 $f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数,且 $f(-1)=0$,$f(1)=1$,$f'(0)=0$.求证:在开区间$(-1,1)$内至少存在一点 x_0,使得 $f'''(x_0)=3$.

四、(15 分)在平面上,有一条从点$(a,0)$向右的射线,其线密度为 ρ.在点$(0,h)$处(其中 $h>0$)有一质量为 m 的质点.求射线对该质点的引力.

五、(15 分)设 $z=z(x,y)$是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数,且具有连续的二阶偏导数.求证:$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ 和 $x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$.

六、(15 分)设函数 $f(x)$连续,a,b,c 为常数,Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.记第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$.求证:$I=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

参 考 答 案

一、(1)解　因为

$$\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^2\ln(1+x)}{x}=\mathrm{e}^2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$$= 2\mathrm{e}^2 \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = 2\mathrm{e}^2 \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x} = -\mathrm{e}^2,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x} = 0.$$

(2)**解**　若 $\theta=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $2^n>|k|$ 时

$$\begin{aligned}
a_n &= \cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\\
&= \cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}}\\
&= \cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}}\\
&= \cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2^n}}\\
&= \frac{\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}},
\end{aligned}$$

这时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

(3)**解**　设

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant 2\right\},D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{x}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\right\},$$

$$\iint_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = 1+2\ln 2,\qquad \iint_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3-2\ln 2,$$

$$\iint_{D}\mathrm{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2-4\ln 2.$$

(4)**解**　令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，则其定义区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $\forall\, x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}.$$

于是

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$$

二、证　(1)由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists\, M>0$ 使得 $|a_n|\leqslant M$，且 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, N_1\in\mathbf{N}$，当 $n>N_1$ 时

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $\exists\, N_2>N_1$，当 $n>N_2$ 时，$\dfrac{N_1(M+|a|)}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{N_1(M+|a|)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2)对于 $i=0,1,\cdots,p-1$,令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$,易知$\{A_n^{(i)}\}$为$\{a_{n+p}-a_n\}$的子列.

由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$,知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda,$$

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$,知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\cdot\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m\in\mathbf{N}$, $\exists n,p,i\in\mathbf{N}$, $0\leqslant i\leqslant p-1$,使得 $m=np+i$,且当 $m\to\infty$时,$n\to\infty$. 所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

三、证　由麦克劳林公式,得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

η 介于 0 与 x 之间,$x\in[-1,1]$.

在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$,得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),\qquad 0<\eta_1<1,$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),\qquad -1<\eta_2<0.$$

两式相减,得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$$

由于 $f'''(x)$在闭区间$[-1,1]$上连续,因此 $f'''(x)$在闭区间$[\eta_2,\eta_1]$上有最大值 M 和最小值 m,从而

$$m\leqslant\frac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))\leqslant M.$$

再由连续函数的介值定理,至少存在一点 $x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$,使得

$$f'''(x_0)=\frac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))=3.$$

四、解　在 x 轴的 x 处取一小段 $\mathrm{d}x$,其质量是 $\rho\mathrm{d}x$,到质点的距离为 $\sqrt{h^2+x^2}$,这一小段与质点的引力是 $\mathrm{d}F=\dfrac{Gm\rho\mathrm{d}x}{h^2+x^2}$(其中 G 为万有引力常数).

这个引力在水平方向的分量为 $\mathrm{d}F_x=\dfrac{Gm\rho x\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,从而

$$F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\,\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-Gm\rho\,(h^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

而 $\mathrm{d}F$ 在竖直方向的分量为 $\mathrm{d}F_y=-\dfrac{Gm\rho h\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,故

$$F_y=\int_a^{+\infty}-\frac{Gm\rho h\,\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 t}{h^3\sec^3 t}\mathrm{d}t=-\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)=\frac{Gm\rho}{h}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}-1\right).$$

所求引力向量为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y)$.

五、解　对方程两边求导

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\right)F_1'+\frac{\partial z}{\partial x}F_2'=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}F_1'+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{y^2}\right)F_2'=0.$$

由此解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'}{x^2(F_1'+F_2')},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_2'}{y^2(F_1'+F_2')},$$

所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

将上式再求导

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2y\frac{\partial z}{\partial y},$$

相加得到

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

六、解　由Σ的面积为 4π 可见：当 a,b,c 都为零时，等式成立.

当它们不全为零时，可知：原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

设平面 $P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中 u 固定，则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而 $-1\leqslant u\leqslant 1$，被积函数取值为 $f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)$. 两平面 P_u 和 $P_{u+\mathrm{d}u}$ 截单位球 Σ 的截下的部分，这部分摊开可以看成一个细长条. 这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积是 $2\pi\mathrm{d}u$，得证.