第七届全国大学生数学竞赛预赛(2015 年非数学类)

试　　题

一、计算下列各题(本题共 5 个小题,每题 6 分,共 30 分)(要求写出重要步骤)

(1)$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$________.

(2)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},\ y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定,其中 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数,且 $xF_u+yF_v\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数)

(3)曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为________.

(4)函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0),\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 内的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值为________.

(5)设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t$,则 $u(x)$ 的初等函数表达式为________.

二、(12 分)设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面,求其方程.

三、(12 分)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导,且存在常数 α,β 使得对于 $\forall x\in(a,b)$,$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$,证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

四、(14 分)求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

五、(16 分)设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续,且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$. 试证:

(1)$\exists x_0\in[0,1]$,使得 $|f(x_0)|>4$;(2)$\exists x_1\in[0,1]$,使得 $|f(x_1)|=4$.

六、(16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数,$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$. 若 $f(0,0)=0$,$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,证明 $\left|\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

参 考 答 案

一、解　(1)由于 $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=1\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

由夹逼准则,可得$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}=\dfrac{2}{\pi}$.

(2)方程两端关于 x 求偏导数,可得

$$\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}\right)F_v=0,\text{解得 }x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(zF_v-x^2F_u)}{xF_u+yF_v}.$$

类似地,对 y 求偏导数可得

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(zF_u-y^2F_v)}{xF_u+yF_v}.$$

于是,有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-xy(xF_u+yF_v)+z(xF_u+yF_v)}{xF_u+yF_v}=z-xy.$$

(3)曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$的切平面为

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\text{ 即 }\quad z=2x-2y-1.$$

联立$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\z=2x-2y-1,\end{cases}$得所围区域在 xOy 面上的投影 D 为

$$D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1\}.$$

所求体积为

$$V=\iint_D[(2x-2y-1)-(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma=\iint_D[1-(x-1)^2-(y+1)^2]\mathrm{d}\sigma.$$

令 $x-1=r\cos t,y+1=r\sin t$,则 $\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}t\mathrm{d}r,D:\begin{cases}0\leqslant t\leqslant 2\pi,\\0\leqslant r\leqslant 1.\end{cases}$所以

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

(4)由狄利克雷收敛定理,得 $S(0)=\dfrac{f_{(0-0)}+f_{(0+0)}}{2}=\dfrac{3}{2}$.

(5) $u^2(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xs^2}\mathrm{d}s=\iint_{s,t\geqslant 0}\mathrm{e}^{-x(s^2+t^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xr^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4x}$.

所以 $u(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

二、解　显然 $O(0,0,0)$为 M 的顶点,$A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,1)$在 M 上.由 A、B、C 三点决定的平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线 L 是 M 的准线.

设 $P(x,y,z)$是 M 上的点,(u,v,w)是 M 的母线 OP 与 L 的交点,则 OP 的方程为

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{1}{t},\text{ 即 }\quad u=xt,\ v=yt,\ w=zt.$$

代入准线方程,得

$$\begin{cases}(x+y+z)t=1,\\(x^2+y^2+z^2)t^2=1.\end{cases}$$

消去 t,得圆锥面 M 的方程为 $xy+yz+zx=0$.

三、证明　(1)若 $\beta=0$,则 $\forall x\in(a,b)$,有

$$f'(x)=\alpha f(x),\ f''(x)=\alpha^2 f(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x),\cdots,$$

从而 $f(x)$在(a,b)内无穷次可导.

(2)若 $\beta\neq 0$,则 $\forall x\in(a,b)$,有

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1 f'(x)+B_1 f(x), \tag{1}$$

其中 $A_1=\dfrac{1}{\beta}$, $B_1=-\dfrac{\alpha}{\beta}$.

因为(1)式右端可导,从而有

$$f'''(x)=A_1 f''(x)+B_1 f'(x).$$

设 $f^{(n)}(x)=A_1 f^{(n-1)}(x)+B_1 f^{(n-2)}(x)$, $n>1$,则

$$f^{(n+1)}(x)=A_1 f^{(n)}(x)+B_1 f^{(n-1)}(x).$$

所以,$f(x)$在(a,b)内无穷次可导.

四、解　因$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+2}{(n+1)(n^3+2)}=0$,所以收敛半径 $R=+\infty$,收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 由

$$\begin{aligned}\frac{n^3+2}{(n+1)!}&=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}\\&=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}(n\geqslant 2)\end{aligned}$$

及幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n-2)!}$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n!}$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ 的收敛域都为$(-\infty,+\infty)$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}.$$

用 $S_1(x)$,$S_2(x)$,$S_3(x)$分别表示上式右端三个幂级数的和,依据 e^x 的幂级数展开式可得到

$$\begin{aligned}&S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+2}}{n!}=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2\mathrm{e}^{x-1},\\&S_2(x)=\mathrm{e}^{x-1},\\&S_3(x)=\frac{1}{x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=\frac{\mathrm{e}^{x-1}-1}{x-1}(x\neq 1).\end{aligned}$$

综合上述讨论,可得幂级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}(\mathrm{e}^{x-1}-1), & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

五、证明　(1)反证法. 若 $\forall x\in[0,1]$, $|f(x)|\leqslant 4$,则

$$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\,|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1.$$

因此,$\int_0^1|f(x)|\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1$. 而 $4\int_0^1\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1$, 故

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)\mathrm{d}x=0.$$

所以对于任意的 $x\in[0,1]$,$|f(x)|=4$. 又由 $f(x)$的连续性知,

$$f(x)\equiv 4\quad 或\quad f(x)\equiv -4.$$

这与条件 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾. 所以 $\exists x_0\in[0,1]$,使得

$$|f(x_0)|>4.$$

(2)先证 $\exists x_2\in[0,1]$使得$|f(x_2)|<4$. 若不然,$\forall x\in[0,1]$,$|f(x)|\geqslant 4$,则 $f(x)\geqslant 4$ 或 $f(x)\leqslant -4$ 恒成立,这与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

再由 $f(x)$的连续性及(1)的结果,利用介值定理,可得 $\exists x_1\in[0,1]$使得$|f(x_1)|=4$.

六、证明 在(0,0)处展开 $f(x,y)$得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y),\ \theta\in(0,1).\end{aligned}$$

记 $(u,v,w)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y)$, 则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(ux^2+2vxy+wy^2).$$

由于 $\|(u,\sqrt{2}v,w)\|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\leqslant\sqrt{M}$以及

$$\|(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)\|=x^2+y^2,$$

于是有

$$|(u,\sqrt{2}v,w)\cdot(x^2,\sqrt{2}xy,y^2)|\leqslant\sqrt{M}(x^2+y^2),$$

即$|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M}(x^2+y^2)$,从而

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\left|\frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$