第五届全国大学生数学竞赛决赛试题及参考解答
（非数学类，2014）

试　　题

一、（本题共 28 分，每小题 7 分）解答下列各题。

（1）计算积分$\int_0^{2\pi} x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$。

（2）设 $f(x)$ 是$[0,1]$上的连续函数，且满足$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 $I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$ 取得最小值。

（3）设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数，$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，曲线 Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$。记 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为 S。求 S 上过点(x_0,y_0)的切线方程。

（4）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$，其中 a 为常数，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$。若秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=3$，试求常数 a 的值。

二、（12 分）设 $f\in C^4(-\infty,+\infty)$，$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中 θ 是与 x,h 无关的常数，证明 f 是不超过三次的多项式。

三、（12 分）设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，且 $f(0)=1$，试证：当 $x\geqslant 0$ 时，有 $\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立。

四、（10 分）设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数。若对任意 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leqslant A$。证明 $I\leqslant\frac{A}{4}$。

五、（12 分）设函数 $f(x)$ 连续可导，$P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$，有向曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面，方向朝外。记第二型曲面积分 $I_t=\iint\limits_{\Sigma_t}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{I_t}{t^4}$。

六、（12 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶正定矩阵，求证 $\boldsymbol{AB}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

求极限。

七、(12 分) 假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$，且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$。证明：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$。

参考解答

一、(1) **解　方法一**　原式 $=\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t\int_0^t x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}。$$

方法二　令 $f(x)=\int_x^{2\pi}\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ 且 $f(2\pi)=0$。

$$原式=\int_0^{2\pi} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x^2 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x^2\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}。$$

(2) **解**　$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$\leqslant\left(\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2},$$

$\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{4}{\pi}$。取 $f(x)=\dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$ 即可。

(3) **解**　由两方程定义的曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切面分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0。$$

上述两切面的交线就是 Γ 在 P_0 点的切线，该切线在 xOy 面上的投影就是 S 过 (x_0,y_0) 的切线。消去 $z-z_0$，得到

$$(F_xG_z-G_xF_z)_{P_0}(x-x_0)+(F_yG_z-G_yF_z)_{P_0}(y-y_0)=0,$$

这里 $x-x_0$ 的系数是 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，故上式是一条直线的方程，就是所要求的切线。

(4) **解**　由关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}\Rightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\leqslant 3$。

因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=3$，所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=3$，

又 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant 2$，考虑到 $\boldsymbol{B}$ 非单位，所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\geqslant 1$，只有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$

$=2$。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&5&a\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-2&-5\\0&-1&a-9\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&13-2a\\0&-1&a-9\\1&2&3\end{pmatrix}\text{，从而 } a=\frac{13}{2}\text{。}$$

二、证明 由泰勒公式，有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\eta)h^4,\qquad ①$$

$$f''(x+\theta h)=f''(x)+f'''(x)\theta h+\frac{1}{2}f^{(4)}(\eta)\theta^2h^2,\qquad ②$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间，η 介于 x 与 $x+\theta h$ 之间，由式 ①、② 与已知条件

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,$$

可得
$$4(1-3\theta)f'''(x)=[6f^{(4)}(\eta)\theta^2-f^{(4)}(\xi)]h。$$

当 $\theta\neq\frac{1}{3}$ 时，令 $h\to0$ 得 $f'''(x)=0$，此时 f 是不超过二次的多项式。

当 $\theta=\frac{1}{3}$ 时，有 $\frac{2}{3}f^{(4)}(\eta)=f^{(4)}(\xi)$。

令 $h\to0$，注意到 $\xi\to x,\eta\to x$，有 $f^{(4)}(x)=0$，从而 f 是不超过三次的多项式。

三、证明 由题设知 $f'(0)=-1$，所给方程可变形为

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0,$$

两端对 x 求导并整理得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0,$$

这是一个可降价的二阶微分方程，可分离变量求得

$$f'(x)=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{1+x}。$$

由 $f'(0)=-1$ 得 $C=-1$，$f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}<0$，可见 $f(x)$ 单调减少。而 $f(0)=1$，所以当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant1$。

对 $f'(t)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}<0$ 在$[0,x]$上进行积分得

$$f(x)=f(0)-\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t\geqslant1-\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}。$$

四、证明 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}(1-x)$。对固定 y，$(1-x)f(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}=0$，由分部积分法可得

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}(1-x)=-\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x。$$

调换积分次序后可得 $I=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y$。

因为 $f(x,0)=0$，所以$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}=0$，从而$(1-y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=0}^{y=1}=0$。再由分部积分法得

$$\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}(1-y)=\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$I=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y=\iint_D(1-x)(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

因为$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leqslant A$，且$(1-x)(1-y)$在 D 上非负，故 $I\leqslant A\iint_D(1-x)(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{A}{4}$。

五、解 由高斯公式，有

$$\begin{aligned}I_t&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint_V(2xz+2yz+x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

由对称性，有$\iiint_V(2xz+2yz)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，

从而 $$\begin{aligned}I_t&=\iiint_V(x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f'(r^2z)r^3\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{I_t}{t^4}&=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'(r^2z)r^3\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z}{t^4}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^1 f'(t^2z)t^3\mathrm{d}z}{4t^3}\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi}{2}\int_0^1 f'(t^2z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}f'(0)。\end{aligned}$$

六、证明 必要性 设 $\boldsymbol{AB}$ 为两个n阶正定矩阵，从而为对称矩阵，即$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$。又 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，所以$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

充分性 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 为实对称矩阵。因为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q},\qquad 于是\quad \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}。$$

所以$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}})$，即$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵。
因此矩阵$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}$ 的特征值全为正实数，而 $\boldsymbol{AB}$ 相似于$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全为正实数。故 $\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵。

七、证明 由$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}=0$，故对于任意 $\varepsilon>0$，存在 N_1，使得当 $n>N_1$ 时，有

$$0 \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} k \mid a_k \mid}{n} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \mid a_n \mid < \frac{\varepsilon}{3}。$$

又因为$\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$,所以存在$\delta > 0$,当$1-\delta < x < 1$时,$\left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$。取$N_2$,当$n > N_2$时,$\frac{1}{n} < \delta$,从而$1-\delta < 1-\frac{1}{n}$,取$x = 1-\frac{1}{n}$,则

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}。$$

取$N = \{N_1, N_2\}$,当$n > N$时

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^{n} a_n - A \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} a_k (1-x^k) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| + \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right|,\end{aligned}$$

取$x = 1-\frac{1}{n}$,则

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^{n} a_k (1-x^k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mid a_k \mid (1-x)k = \frac{\sum_{k=0}^{n} k \mid a_k \mid}{n} < \frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} k \mid a_k \mid x^k < \frac{\varepsilon}{3n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \leqslant \frac{\varepsilon}{3n} \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3};$$

又因为$\left| \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$,则$\left| \sum\limits_{k=0}^{n} a_n - A \right| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$。证毕。