北京科技大学 2013—2014 学年第一学期

线性代数 试卷（A 卷）

院（系）__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												
评阅												
审核												

注意事项：
（1）本试卷共八道大题，共八页，请认真核对。
（2）正确填写学院、班级、姓名、学号等个人信息，空填或错填的试卷为无效试卷。
（3）请使用钢笔、签字笔或者圆珠笔答卷，使用铅笔答卷无效。

一、 **填空题**（本题共 15 分，每小题 3 分）

1、 已知 AB-B=A，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\3&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix}\quad&&\quad\end{pmatrix}$。

【答案】：$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

【解析】：$AB-B=A\Rightarrow A(B-E)=B\Rightarrow A=B(B-E)^{-1}$

求（B-E）的逆矩阵得 $(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则：

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&0\\3&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}。$$

2、已知 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则：$(P_1P_2P_3)^{-1}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$。

【答案】：$\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0\end{pmatrix}$

【解析】：

$$(P_1P_2P_3)^{-1}=P_3^{-1}(P_1P_2)^{-1}=P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$

由初等矩阵求逆（课本 P35）得：，，$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\therefore (P_1P_2P_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

3、设 m 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$，而且 $r(A)=m-1$，则 a=。

【答案】：$\begin{cases}-\dfrac{1}{\mathrm{m}-1}(m\geq 3)\\ \pm 1(m=2)\end{cases}$

【解析】：(1) $m\geq 3$ 时

①当 $a=0\Rightarrow r(A)=m$；或 $a=1\Rightarrow r(A)=1$；此时 $r(A)\neq m-1$；

②当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}(m-1)a+1&(m-1)a+1&\cdots&(m-1)a+1\\a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&1\end{pmatrix}$$ (把每行都加到第一行)；

若 $(m-1)a+1\neq 0$，对上面矩阵继续进行初等变换

$$\rightarrow\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ 0 & 1\text{-}a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$

此时 $r(A)=m$;

若 $(m-1)a+1=0$，即：$a=-\dfrac{1}{m-1}$，对上面矩阵继续进行初等变换，

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1\text{-}a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=m-1;$$

(2) $m=2$ 时，若 $r(A)=m-1=1$; 令：$|A|=0\Rightarrow a=\pm1$【易验证：$a=\pm1$ 均符合条件】

综上：$a=\begin{cases} -\dfrac{1}{m-1}(m\ge3) \\ \pm1(m=2) \end{cases}$

4、 已知向量 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$,且有 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=3$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_5)=4$，则 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4+\beta_5)=$ 。

【答案】：4

【解析】：由 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_5)=4$，知 β_1,β_2,β_3 线性无关，则：由 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=3$，

可知 β_4 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示，设：

$\beta_4=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3$，而

$$k_1'\beta_1+k_2'\beta_2+k_3'\beta_3+k_4'(\beta_4+\beta_5)=0$$
$$\Rightarrow(k_1'+k_4'k_1)\beta_1+(k_2'+k_4'k_2)\beta_2+(k_3'+k_4'k_3)\beta_3+k_4'\beta_5=0$$

由于 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_5$ 线性无关，所以 $k_4'=0$，则：$k_1'=0$，$k_2'=0$，$k_3'=0$；所以

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4+\beta_5$ 线性无关，即 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4+\beta_5)=4$

5、 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可以对角化，则 y= 。

【答案】：0

【解洗】：令 $|\lambda E-A|=0$ 得：$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda & -y \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=0$,解得 $\lambda=1$或0，其中 0 是二重根，若可以对角化则当 $\lambda=0$时，应有 $r(\lambda E\text{-}A)=2$（课本 P175），则：$y=0$;

二、 选择题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=A$，则下列命题中正确的是。

(A) $A=E$； (B)若 A 可逆， $A=E$；

(C) $A=O$； (D)若 A 不可逆， A=O；

【答案】B

【解析】

若 A 不可逆，可令 $A=\begin{pmatrix}1&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix}$,此时， $A^2=A$；

故：D 错，C 错，A 错。

若 A 可逆，，B 正确

2. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=2$，则有 $|3A^*|=$。

(A) 108 (B)54 (C) 3 (D)12

【答案】A

【解析】

当 A 为 n 阶矩阵、k 为常数时，

则$|kA|=k^n|A|$

$\because AA^*=|A|E;$

$\therefore A^*=|A|A^{-1};$

$\therefore |A^*|=|A|^3|A^{-1}|;$

$\because |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|};$

$\therefore |A^*|=|A|^2=4$

$\therefore |3A^*|=3^3*4=108$

3. 设 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，但 β 不可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则下列命题正确的是：。

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

(B) α_4 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(C) α_4 不可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性表示

(D) α_4 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性表示

【答案】：D

【解析】:

A、B 推不出来

对 C、D:

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$;

$\because$ β不可由向量组α_1，α_2，α_3线性表示

$\therefore k_4 \neq 0$(否则$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$);

$\because$ $\beta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3 = k_4\alpha_4$

方程两边同除以 k_4，可得 α_4可由 α_1，α_2，α_3，β 线性表示，D 正确

4. 设η_1与η_2为非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，ξ_1与ξ_2为对应的

齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，k_1、k_2为任意常数，$Ax=b$的通解为:。

(A) $\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2\left(\xi_1+\xi_2\right)$

(B) $\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2\left(\eta_1+\eta_2\right)$

(C) $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2\left(\xi_1-\xi_2\right)$

(D) $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}+k_1\xi_1+k_2\left(\eta_1-\eta_2\right)$

【答案】C

【解析】

$A\eta_1 = b, A\eta_2 = b; \to A(\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}) = b;$

$A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0 \to A(\xi_1 - \xi_2) = 0;$

所以特解是：$\eta^* = \dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$;

$k_1\xi_1 + k_2(\xi_2 - \xi_1) = (k_1 - k_2)\xi_1 + k_2\xi_2;$

由于ξ_1与ξ_2线性无关，$k_2 = k_1 - k_2 = 0;$

所以$A\chi=0$通解是：$\xi_2 - \xi_1$与ξ_1

$A\chi = b$通解是:$\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2} + k_1\xi_1 + k_2(\xi_2 - \xi_1)$

5. 若矩阵 *A* 相似于 *B*,则下列结论***不正确***的是:。

(A) *A* 和 *B* 有相同的特征多项式　　(B) $|A|=|B|$

(C) *A* 和 *B* 有相同的特征向量　　(D) $tr\left(A\right)=tr\left(B\right)$

答：C

解:

若 A 与 B 相似，则有:

1.相同的特征多项式，相同的特征值，相同的迹;（课本 P173）

2 相同的行列式，秩相同，相同的逆矩阵;

三、（本题 12 分，每小题 6 分）

1. 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ -y_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -y_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解：将第 2 列乘以y_1后加到第 1 列上，将第 3 列乘以y_2后加到第 2 列上，……

依此类推，将第$n-1$列乘以y_{n-1}后加到第 1 列上，可得:

$$D=\begin{vmatrix} 1+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$$

2. 计算四阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$的值。

解：将行列式按照第 1 列展开可得:

$$D=a_1\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_3 & 1 \\ 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$$

再将第一个行列式按照第 1 列展开、将第二个行列式按照第 1 行展开得:

$$D=a_1\left(a_2\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_2\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1a_2+1\right)\begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a_4 \end{vmatrix}=(a_1a_2+1)(a_3a_4+1)+a_1a_4$$

$$=a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_3a_4+a_1a_4+1$$

四、（本题 12 分）已知A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，

试求矩阵B。

解：对于n阶方阵，由$AA^{*}=|A|E$可得$|AA^{*}|=|A|^{n}$，即$|A||A^{*}|=|A|^{n}$

故$|A^{*}|=|A|^{n-1}$

则$|A|=|A^{*}|=8^{-3}=2$

$$
\text{所以 } A^{-1}=\frac{|A^{*}|}{|A|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\-1&-3&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0&4\end{pmatrix}
$$

由$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$可得$B=\left[\frac{1}{3}\left(E-A^{-1}\right)\right]^{-1}$

$$
\text{又因为 } \frac{1}{3}\left(E-A^{-1}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0&0&0\\0&\frac{1}{6}&0&0\\-\frac{1}{6}&0&\frac{1}{6}&0\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&0&-1\end{pmatrix}
$$

$$
\text{所以 } B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0&0&0\\0&\frac{1}{6}&0&0\\-\frac{1}{6}&0&\frac{1}{6}&0\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=216\begin{pmatrix}\frac{1}{36}&0&0&0\\0&\frac{1}{36}&0&0\\\frac{1}{36}&0&\frac{1}{36}&0\\\frac{1}{216}&\frac{1}{72}&0&-\frac{1}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\1&3&0&-1\end{pmatrix}
$$

五、（本题 12 分）已知向量组$A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\\7\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-5\\x\\10\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\2\\4\\7\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\y\end{pmatrix}$

的秩为 2：

（Ⅰ）试求x和y的值。

（Ⅱ）求向量组A的一个极大线性无关组；并将向量组中的其余向量用该极大线性无关组表示。

（Ⅰ）解：

$$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-2&3&0\\1&-3&-5&2&-1\\1&1&x&4&1\\1&7&10&7&y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2&3&0\\0&-2&7&-1&-1\\0&0&x-1&0&0\\0&0&0&0&y-4\end{pmatrix}$$

$\because r(A)=2$

$\therefore x=1,y=2$

（Ⅱ）解：$n-r(A)=2$

取一个极大线性无关组α_1,α_2（在这种情况下，老毕建议取α₁和α₅，并利用课本 P105 定理 3.5 使用初等行变换之后的结果，而不是原矩阵。下面给出的是一般方法。）

设$\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\alpha_4=k_3\alpha_1+k_4\alpha_2,\alpha_5=k_5\alpha_1+k_6\alpha_2$

则有：

$$\begin{cases}k_1-k_2=-2\\k_1-3k_2=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-\dfrac{1}{2}\\k_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{3}{2}\alpha_2$$

$$\begin{cases}k_3-k_4=3\\k_3-3k_4=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_3=\dfrac{7}{2}\\k_4=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha_4=\frac{7}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$$

$$\begin{cases}k_5-k_6=0\\k_5-3k_6=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_5=\dfrac{1}{2}\\k_6=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha_5=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$$

六、(本题 12 分)设非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3+x_4=2\\2x_1+3x_2+x_3+4x_4=4\\3x_1+5x_2+x_3+5x_4=b+8\end{cases}$$

当 b 为何值时，方程组无解？当 b 为何值时，方程组有无穷多解？并在有无穷多解时求出方程组的通解。

解：（1）将增广矩阵进行初等变换

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&1&2\\2&3&1&4&4\\3&5&1&5&b+8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&1&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&b+1\end{pmatrix}$$

所以当$b\neq -1$时，方程组无解

所以当$b=-1$时，方程组有无穷多解

此时增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&1&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$同解方程组为:$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3+x_4=2\\x_4=0\end{cases}$

令自由变量$x_3=0,x_4=0$,得：$x_2=2,x_1=-1$

所以特解为:$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$

与导出组同解的方程组为:$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\\x_4=0\end{cases}$

令自由变量$x_3=1$,有$x_2=1,x_1=-2,x_4=0$

所以导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

所以方程组的通解为$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$（$C$为常数）

七、(本题 12 分)已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_3-x_2)^2$，

（Ⅰ）试求该二次型的矩阵与秩。

（Ⅱ）用正交变换化二次型为标准形，并写出所用的正交变换。

解：（1） 该二次型的方程组为：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

所以：该二次型的矩阵为:$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

将该矩阵进行初等变换得:$\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

所以该二次型矩阵的秩为2

（2）因为二次型矩阵A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

因为二次型矩阵A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

所以A 的特征多项式为$f(\lambda)=|\lambda E-A|=-\lambda(\lambda-3)^2$

令A的特征多项式等于0 ，得λ_1=0，λ_2=λ_3=3，其对应的特征向量为：

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，将这三个向量单位化得$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

以上面得到的三个向量为列作矩阵Q=$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,有$Q^T AQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

作正交变换$X=QY$

的二次型的标准型为：$3y_1^2+3y_2^2$

八、（本题 10 分）设矩阵 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵；

（Ⅰ）证明 $A-B^2$ 为 n 阶对称矩阵；

（Ⅱ）证明 $A-B^2$ 为正定矩阵。

解：（1）依题意得：$A^T=A, B^T=B$

所以:$\left(A-B^2\right)^T=A^T-\left(B^2\right)^T=A^T-\left(B^T\right)^2=A-(-B)^2=A-B^2$

所以，$A-B^2$为n阶对称矩阵

(2) $X^T\left(A-B^2\right)X=X^TAX-X^TB^2X=X^TAX+X^TB^TBX=X^TAX+(BX)^TBX$

因为A为n阶正定矩阵，又因为$(BX)^TBX\geq 0$

所以$X^TAX>0$

所以$X^T\left(A-B^2\right)X>0$

所以$A-B^2$为正定矩阵