北京科技大学 2017--2018 学年 第一学期

线性代数试卷（A 卷）

院(系)____________班级____________学号____________姓名________

一、 选择题（本题共 27 分，每小题 3 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则必有

   （A） $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　（B） $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

   （C） $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$　　（D） $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则必有

   (A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}$　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{A}$

   (C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^3\boldsymbol{A}$　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^4\boldsymbol{A}$

3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则

   (A) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$

   (C) $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{AC}$　　(D) $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{CA}$

4. 设 3 维向量 $\alpha=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\alpha\alpha^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{AB}=$

   （A） $\boldsymbol{O}$　　(B) $-\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{E}+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则

   (A) $\boldsymbol{A}$ 中必有两行的元素对应成比例
   (B) $\boldsymbol{A}$ 中任一行向量是其余行向量的线性组合
   (C) $\boldsymbol{A}$ 中有一行向量是其余行向量的线性组合
   (D) $\boldsymbol{A}$ 中至少有一行的元素全为零

6. 对任意实数 a,b,c，都线性无关的向量组是

   (A) $(a,1,2)$, $(2,b,3)$, $(0,0,0)$

   (B) $(1,a,1,1)$, $(1,b,1,0)$, $(1,c,0,0)$

   (C) $(b,1,1)$, $(1,a,3)$, $(2,3,c)$, $(a,0,c)$

(D) $(1,1,1,a)$, $(2,2,2,b)$, $(0,0,0,c)$

7. 设有非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则

(A) $r=n$时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) $r<n$时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(C) $m=n$时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D) $r=m$时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解

8. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶非零方阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的秩

(A) 必有一个为0　　(B) 都小于n

(C) 一个小于n一个等于n　　(D) 都等于n

9. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&0\\0&-5\end{pmatrix}$，则矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似　　(B) 合同不相似

(C) 相似不合同　　(D) 不合同不相似

二、填空题（本题共24分，每小题3分）

1. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$只有最后一列不同，且$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则$|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$____。

2. 设行列式$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$中，元素$a_{ij}$的代数余子式为$A_{ij}$（$i,j=1,2,$），则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=$________。

3. 设$\boldsymbol{A}$是3阶非零矩阵，且满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$______。

4. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-4,5)^{\mathrm{T}}$，若存在不全为零的实数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，则$a=$________。

5. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个

不同的解，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为________。

6. 设 A 为 3 阶矩阵，α_i 为 3 维非零列向量，且 $A\alpha_i = i\alpha_i$，（$i=1,2,3$），则矩阵 A 的秩 $r(A)=$__________。

7. 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,3,4,5$，$\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$__________。

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围为_________。

三.（8 分）计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1^2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & (n-1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n^2 \end{vmatrix}.$$

四.（14 分）已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=4 \\ -x_1+ax_2+x_3=a^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$，当 a 满足什么条件时，（1）方程组无解？（2）方程组有唯一解？（3）方程组有无穷多解？有无穷多解时求出通解。

五.（10 分）设有向量组 $\alpha_1=(1,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(2,2,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(-1,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(-4,8,-9,7)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_5=(6,8,0,3)^{\mathrm{T}}$，求此向量组的秩与一个极大线性无关组，并将其它向量用所求的极大线性无关组表示。

六.（10 分）用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准形，并求出所做的正交变换。

七、（7 分）设向量组 α_1,α_2 线性无关，向量 β_1 可由 α_1,α_2 线性表出，向量 β_2 不能由 α_1,α_2 线性表出，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1+\beta_2$ 线性无关。