第六届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2014年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 15 分) 已知空间的两条直线

$$l_1: \quad \frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-8}{1},$$
$$l_2: \quad \frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}.$$

1）证明 l_1 和 l_2 异面;

2）求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程;

3）求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程。

(1) **证明:** l_1 上有点 $r_1=(4,3,8)$，方向向量为 $v_1=(1,-2,1)$。

l_2 上有点 $r_2=(-1,-1,-1)$，方向向量为 $v_2=(7,-6,1)$。

又

$$(r_1-r_2, v_1, v_2)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故l_1 和 l_2 异面。 (3分)

(2) l_1上的任一点 $P_1=r_1+t_1v_1$ 与 l_2上的任一点 $P_2=r_2+t_2v_2$ 的连线的方向向量为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= r_2-r_1+t_2v_2-t_1v_1 \\ &= (-5+7t_2-t_1, -4-6t_2+2t_1, -9+t_2-t_1).\end{aligned}$$

公垂线的方向向量为

$$v=v_1\times v_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix}=(4,6,8).$$

类似地, 有

$$X^l = I + (la_1)H + (la_2 + g_1(a_1))H^2 + \cdots + (la_m + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}.$$

(12分)

3) 观察下列方程组

$$\begin{cases} (n+l)a_1 = 2, \\ (n+l)a_2 + (f_1(a_1) + g_1(a_1)) = 3, \\ \cdots \\ (n+l)a_m + \big(f_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-1}) + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})\big) = m. \end{cases}$$

直接可看出该方程组有解。命题得证。 (20分)

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0,1)$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\liminf_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.

证明： 由条件可知从某项开始 $\{a_n\}$ 单调递减。因此，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0.$$

若 $a > 0$, 则当 n 充分大时，

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{1/n^\alpha} = n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) a_{n+1} = \frac{\lambda a}{2} > 0.$$

因为 $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 也发散，但此级数显然收敛到 $a_1 - a$. 这是矛盾！所以应有 $a = 0$. (10分)

令 $b_n = n^k a_n$. 则有

$$n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \left[n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - n^\alpha \left((1 + \frac{1}{n})^k - 1 \right) \right].$$

因为 $(1 + \frac{1}{n})^k - 1 \sim \frac{k}{n}$ $(n \to \infty)$, 所以由上式及条件可得

$$\liminf_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lambda, \ (n \to \infty).$$

因此由开始所证，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 即，$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$. (20分)

根据微分中值定理，对任意 x 存在 $\theta_x \in (0,1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta_x) > f'(x) > 0.$$

上式左边当 $x \to -\infty$ 时极限为 0，因而有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$. (5分)

设 $c = \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$. 则 $c > b > 0$, 且 $\frac{a}{b-c} = -c$. 于是根据条件有

$$f''(x) - cf'(x) \leqslant (b-c)f'(x) + af(x) = (b-c)(f'(x) - cf(x)).$$

这说明函数 $e^{-(b-c)x}(f'(x) - cf(x))$ 是单调递减的。注意到该函数当 $x \to -\infty$ 时极限为 0，因此有 $f'(x) - cf(x) \leqslant 0$. 即，$f'(x) \leqslant cf(x)$. (10分)

常数 c 是最佳的，这是因为对函数 $f(x) = e^{cx}$ 有 $f''(x) = af(x) + bf'(x)$. (15分)

五、 (本题 20 分) 设 m 为给定的正整数. 证明：对任何的正整数 n,l, 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n + X^l = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 1）令 $H = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则所求的方程变为

$$X^n + X^l = 2I + 2H + 3H^2 + \cdots + mH^{m-1}.$$

(3分)

2)考察形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵 X, 则有 $X = I + a_1H + a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1}$. 结果，

$$X^n = (I + a_1H + a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1})^n$$

$$= I + (na_1)H + (na_2 + f_1(a_1))H^2 + \cdots + (na_m + f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1},$$

其中 $f_1(a_1)$ 由 a_1 确定， …， $f_{m-1}(a_1,\cdots,a_{m-1})$ 由 $a_1,\cdots,a_{m-1}$ 确定.

由 f 的单调性，

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 1-\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, $\lim x_n = 1$. (15分)

三、 (本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0,1]$ 上全体实函数构成的实向量空间，其中向量加法与纯量乘法均为通常的。 $f_1,\ldots,f_n \in V$. 证明以下两条等价：

1）$f_1,\ldots,f_n$ 线性无关；

2）$\exists a_1,\ldots,a_n \in [0,1]$ 使得 $det(f_i(a_j)) \neq 0$, 这里 det 表行列式.

证明 2) $\Rightarrow$ 1). 考虑方程 $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. 将 $a_1,\ldots,a_n$ 分别代入，得方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(a_1) + \cdots + \lambda_n f_n(a_1) = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \lambda_1 f_1(a_n) + \cdots + \lambda_n f_n(a_n) = 0 \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵为 $(f_i(a_j))^T$, 因此由 $det(f_i(a_j)) \neq 0$ 直接知道 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. (6分)

1) $\Rightarrow$ 2). 用归纳法. 首先， $n=1$时，结论显然。

其次，设$n=k$时结论真。则$n=k+1$时，由$f_1,\ldots,f_{k+1}$ 线性无关知， $f_1,\ldots,f_k$ 线性无关. 因此$\exists a_1,\ldots,a_k \in [0,1]$ 使得$det(f_i(a_j))_{k\times k} \neq 0$。观察函数

$$F(x) = det\begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_k) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_k(a_1) & \cdots & f_k(a_k) & f_k(x) \\ f_{k+1}(a_1) & \cdots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x) \end{pmatrix}.$$

按最后一列展开得

$$F(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x) + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x),$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1}$均为常量。注意到 $\lambda_{k+1} \neq 0$, 因此由$f_1,\ldots,f_{k+1}$ 线性无关知 $F(x)$不恒为0, 从而$\exists a_{k+1} \in [0,1]$使得$F(a_{k+1}) \neq 0$. 亦即 $a_1,\ldots,a_{k+1} \in [0,1]$, $det(f_i(a_j)) \neq 0$. 证毕。 (15分)

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 a,b 使得 $f''(x) \leqslant af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

(i) 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$;

(ii) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leqslant cf(x)$.

(iii) 求使上面不等式成立的最小常数 c.

证明: 由条件知 f 及 f' 是单调递增的正函数，因此 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ 都存在。 (2分)

由 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 v 平行：

$$(-5+7t_2-t_1):(-4-6t_2+2t_1):(-9+t_2-t_1)=4:6:8$$

得

$$t_1=-1, t_2=0.$$

故点$r_2+0v_2=(-1,-1,-1)$在公垂线上，从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+1}{8}. \tag{9分}$$

(3) $P_1=r_1+t_1v_1$ 与 $P_2=r_2+t_2v_2$ 的中点为

$$\frac{1}{2}(3+t_1+7t_2, 2-2t_1-6t_2, 7+t_1+t_2).$$

因此中点轨迹为一个平面，平面的法向量为

$$v=v_1\times v_2=(4,6,8).$$

又点$\frac{1}{2}(3,2,7)$在平面上，故轨迹的方程为

$$4x+6y+8z-40=0. \tag{15分}$$

二、(本题 15 分) 设$f\in C[0,1]$ 是非负的严格单调增函数。

1）证明：对任意$n\in\mathbb{N}$，存在唯一的 $x_n\in[0,1]$，使得

$$\big(f(x_n)\big)^n=\int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx.$$

2）证明：$\lim_{n\to\infty}x_n=1$.

证明： 1）

$$f(0)^n\le\int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx\le f(1)^n,$$

由连续函数的介值性质得到 x_n 的存在性。 (3分)

由于 f 是严格单调函数，x_n 是唯一的。 (5分)

2）对任意的小 $\epsilon>0$, 由 f 的非负性和单调性，

$$\big(f(x_n)\big)^n\ge\int_{1-\epsilon}^1\big(f(1-\epsilon)\big)^n=\epsilon\big(f(1-\epsilon)\big)^n,$$

故

$$f(x_n)\ge\sqrt[n]{\epsilon}f(1-\epsilon),$$

从而

$$\liminf_{n\to\infty}f(x_n)\ge f(1-\epsilon).$$