北京科技大学 2016--2017 学年 第一学期

______线性代数试卷______ （A 卷）

院(系)________ 班级__________ 学号__________ 姓名_________

一、选择题（本题共 27 分，每小题 3 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，k 为常数，则下列说法正确的是

（A）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　　　（B）$|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$

（C）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　　　　（D）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则有

（A）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$　　　　（B）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$

（C）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$.　　　　（D）$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

3. 二次多项式 $\begin{vmatrix}2&8&5&7\\5&4&x&8\\1&x&2&3\\1&4&3&-1\end{vmatrix}$ 中 x^2 的系数为

（A）9　　（B）7　　（C）5　　（D）-7

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=1$，则必有

（A）$\left(2A^*\right)^*=2A$　　　　（B）$\left(2A^*\right)^*=\dfrac{1}{2}A$

（C）$\left(2A^*\right)^*=4A$　　　　（D）$\left(2A^*\right)^*=8A$

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则必有

（A）$\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表出　　　　（B）$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表出

（C）$\boldsymbol{\gamma}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性表出　　　　（D）$\boldsymbol{\delta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表出

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性无关的是

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ （B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ （D）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

7. 设4×5矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$基础解系中解向量的个数为

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

8. 设2为n阶可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，则矩阵$(-3\boldsymbol{A}^{-1})$必有一个特征值为

（A）$\dfrac{2}{3}$ （B）$-\dfrac{2}{3}$ （C）$\dfrac{3}{2}$ （D）$-\dfrac{3}{2}$

9. 下列矩阵不能相似对角化的是

（A）$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$

二、填空题（本题共24分，每小题3分）

1. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是4阶矩阵且$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则$|3\boldsymbol{AB}^{-1}|=$____________。

2. 四阶行列式中包含$a_{21}a_{42}$，且符号为负的项是____________。

3. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^*=$____________。

4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$____________。

5. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\k\end{pmatrix}$的秩为2，则$k=$____________。

6. 设n矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$n-1$，非零向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$满足$\boldsymbol{A\alpha}_1=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}$。则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_1$的通解为____________。

7. 与两向量$\alpha=(1,2,3)^T$、$\beta=(1,1,1)^T$均正交的单位向量为____________。

8. 若二次型$f=ax_1^2+4x_2^2+ax_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$是正定的，则$a$的取值范围是____________。

三、求解下列行列式（8 分）

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

四.（14 分）设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+(1+\lambda)\ x_3=0, \\ x_1+(1+\lambda)\ x_2+x_3=3, \\ (1+\lambda)\ x_1+x_2+x_3=\lambda, \end{cases}$

问 λ 取何值时，方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？并在有无穷多解时求其通解。

五、（10 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$，求此向量组的秩与一个极大无关组，并将其余向量用所求的极大无关组线性表示。

六、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化为标准形 $f=-2y_1^2+7y_2^2+7y_3^2$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$。

七、（7 分）若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵且 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=n$，证明向量组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关。

北京科技大学 2016-2017 学年 第 一 学期

线性代数 A 期末试卷 答案

一、 选择题（本题共 27 分，每题 3 分）

1-5 DBACD 6-9 ACDA

二、 填空题（本题共 24 分，每空 3 分）

1、54　2、$a_{21}a_{42}a_{13}a_{34}$　3、$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$　4、$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5、3　6、$k\alpha_2 + 2\alpha_1$，$k \in R$　7、$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$　8、$\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

三、 计算行列式

答案　$1+\sum_{i=1}^{n} a_i$

解析　略

四、 对参数分类讨论非齐次线性方程组解的情况并求通解

答案　(1) $\lambda = 0$ 时无解

(2) $\lambda = -3$ 时有无穷个解，通解为 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R$.

(3) 其余情况均有唯一解.

解析　略

五、 求极大无关组并表示其余向量

答案　(1) $r = 3$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$　(2) $\boldsymbol{\alpha}_4 = \frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5 = \frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$

解析　略

六、 正交变换化二次型为标准型并写正交矩阵或正交变换

答案 $Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

解析 略

七、 证明题

证明 $\left(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s\right)=A\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\right)$

$\therefore r\left(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s\right) \le \min\left\{r(A), r\left(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\right)\right\}$

则有 $r\left(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s\right) \le n$

又由 $B=A_{m\times r}K_{r\times s}$ 时，有 $r(B)+r \ge r(A)+r(K)$ 可知

$r\left(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s\right) \ge n$

即 $r\left(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s\right)=n$

则证得 $\left(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s\right)$ 线性无关.