专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第九届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学类, 2017年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面Γ的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 设P为空间中的平面，它交Γ于一抛物线C. 求该平面P的法线与z-轴的夹角.

解: 设平面P上的抛物线C的顶点为$X_0=(x_0,y_0,z_0)$. 取平面P上X_0处相互正交的两单位向量$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$和 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 使得$\beta$是抛物线$C$在平面$P$上的对称轴方向. 则抛物线的参数方程为

$$X(t)=X_0+t\alpha+\lambda t^2\beta,\ \ t\in\mathbf{R},$$

λ为不等于0的常数. (5分)

记$X(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则

$$x(t)=x_0+\alpha_1 t+\lambda\beta_1 t^2,\ \ y(t)=y_0+\alpha_2 t+\lambda\beta_2 t^2,\ \ z(t)=z_0+\alpha_3 t+\lambda\beta_3 t^2.$$

因为$X(t)$落在单叶双曲面Γ上, 代入方程$x^2+y^2-z^2=1$, 我们得到对任意t要满足的方程

$$\lambda^2(\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2)t^4+2\lambda(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3)t^3+A_1t^2+A_2t+A_3=0,$$

其中A_1,A_2,A_3是与X_0,α,β相关的常数. 于是得到

$$\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2=0,\ \ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3=0.$$

(10分)

因为$\{\alpha,\beta\}$是平面P上正交的两单位向量, 则有

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1,\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

于是得到

$$\beta_1^2+\beta_2^2=\beta_3^2=\frac{1}{2},\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0,\ \alpha_3=0,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2=1;$$

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,0),\ \beta=(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_2,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_1,\beta_3),\ \varepsilon=\pm1.$$

于是得到平面P的法向量

$$n=\alpha\times\beta=(A,B,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}),$$

它与z-轴方向$e=(0,0,1)$的夹角θ满足$\cos\theta=n\cdot e=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.　（15分）

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1}?

证明　充分性: 若 $\{a_n\}$ 有界, 则可设 $a_n \leqslant M$.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1 \ln a_1} = \frac{a_{m+1}-a_1}{a_1 \ln a_1} \leqslant \frac{M}{a_1 \ln a_1}.$$

由此知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. (5分)

必要性: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. 由于

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right) \leqslant \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n},$$

所以

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}},$$

其中 $b_n = \ln a_n$. 因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}}$ 收敛. (10分)

由 Cauchy 收敛准则, 存在自然数 m, 使得对一切自然数 p, 有

$$\frac{1}{2} > \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \geqslant \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{m+p+1}} = \frac{b_{m+p+1}-b_m}{b_{m+p+1}} = 1 - \frac{b_m}{b_{m+p+1}}.$$

由此可知 $\{b_n\}$ 有界,因为p是任意的. 因而 $\{a_n\}$ 有界. (13分)

题中级数分母的 a_n 不能换成 a_{n+1}. 例如: $a_n = e^{n^2}$ 无界, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1} \ln a_{n+1}}$ 收敛. (15分)

得分	
评阅人	

三、证明题（15分）设$\Gamma = \{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$为$r$个各不相同的可逆$n$阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭(即, $\forall M, N \in \Gamma$,有$MN \in \Gamma$), 证明：$\Sigma_{i=1}^r W_i = 0$当且仅当$\Sigma_{i=1}^r tr(W_i) = 0$,其中$tr(W_i)$表示$W_i$的迹.

证明：必要性：由迹的性质直接知. (2分)

充分性：首先，对于可逆矩阵$W \in \Gamma$，有$WW_1, \ldots, WW_r$各不相同 . 故有

$$W\Gamma \equiv \{WW_1, WW_2, \ldots, WW_r\} = \{W_1, W_2, \ldots, W_r\},$$

即，$W\Gamma = \Gamma, \forall W \in \Gamma$. (7分）

记$S = \Sigma_{i=1}^r W_i$, 则 $WS = S, \forall W \in \Gamma$. 进而 $S^2 = rS$, 即， $S^2 - rS = 0$. 若λ为S的特征值，则$\lambda^2 - r\lambda = 0$, 即 $\lambda = 0$或r.

结合条件$\Sigma_{i=1}^r tr(W_i) = 0$知，$S$的特征值只能为0. 因此有$S - rI$可逆（例如取S的约当分解就可直接看出）

再次注意到 $S(S - rI) = S^2 - rS = 0$，此时右乘 $(S - rI)^{-1}$ 即得$S = 0$.证毕. (15分)

得分	
评阅人	

四、（本题20分）给定非零实数a及实n阶反对称矩阵A(即, A的转置A^T等于$-A$), 记矩阵有序对集合T为:

$$T = \{(X, Y) | X \in \mathbb{R}^{n\times n}, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}, XY = aI + A\},$$

其中I为n阶单位阵，$\mathbb{R}^{n\times n}$为所有实n阶方阵构成的集合。证明：任取T中两元：(X, Y)和(M, N), 必有$XN + Y^TM^T \neq 0$.

证明：反证. 若 $XN + Y^TM^T = 0$,则有

$$N^TX^T + MY = 0.$$

(2分)

另外，由$(X, Y) \in T$得

$$XY + (XY)^T = 2aI,$$

即

$$XY + Y^TX^T = 2aI.$$

类似有

$$MN + N^TM^T = 2aI.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

(10分)

进而

$$\frac{1}{2a}\begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

得

$$YY^T + NN^T = 0$$

所以

$$Y = 0, N = 0$$

导致$XY = 0$, 与$XY = aI + A \neq 0$矛盾.证毕. (20分)

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设 $f(x)=\arctan x$, A 为常数. 若

$$B=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)-An\Big)$$

存在, 求A,B.

解:

法 I. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)=\int_0^1 f(x)\,dx \\ &= x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

……………………………………………………………………(6 分)

对于 $x\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$, $(1\leqslant k\leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k}\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$ 使得

$$f(x)=f\big(\frac{k}{n}\big)+f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)+\frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\big(x-\frac{k}{n}\big)^2.$$

……………………………………………………………………(9 分)

于是,

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)-nA+\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)\,dx\Big| \\ =\ &\Big|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big[f\big(\frac{k}{n}\big)+f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)-f(x)\Big]\,dx\Big| \\ \leqslant\ & M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\big(x-\frac{k}{n}\big)^2\,dx=\frac{M}{3n}, \end{aligned}$$

其中 $M=\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

……………………………………………………………………(12 分)

因此,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)-An\Big)=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)\,dx \\ =\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'\big(\frac{k}{n}\big)=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx=\frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

……………………………………………………………………(15 分)

法 II. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

…………(6 分)

对于 $x \in \big(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\big)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in \big(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\big)$ 使得

$$f\Big(\frac{k}{n}\Big) = f(x) + f'(x)\Big(\frac{k}{n} - x\Big) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2.$$

…………(9 分)

于是,

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - nA - \sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\Big(\frac{k}{n} - x\Big)\,dx\Big| \\ =& \Big|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big[f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x) - f'(x)\Big(\frac{k}{n} - x\Big)\Big]\,dx\Big| \\ \leqslant& M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2\,dx = \frac{M}{3n}, \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

…………(12 分)

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - An\Big) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\Big(\frac{k}{n} - x\Big)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} nf'(\eta_{n,k})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_{n,k}) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

其中 $\eta_{n,k} \in \big(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\big)$.

…………(15 分)

法 III. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(6 分)

对于 $x \in \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)$ 使得

$$f(x) = f\big(\frac{k}{n}\big) + f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x - \frac{k}{n}\big) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\big(x - \frac{k}{n}\big)^2.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(9 分)

于是,

$$\begin{aligned}
& \Big|\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - nA - n\int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx + n\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx\Big| \\
= & \Big|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-\frac{1}{2}}{n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} \Big[f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x) + f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(\frac{k}{n} - x\big)\Big]\,dx\Big| \\
\leqslant & M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n} - x\big)^2\,dx = \frac{M}{3n},
\end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(12 分)

因此,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - An\Big) = \lim_{n\to\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx - \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx \\
= & \frac{f(1)}{2} - \frac{f(0)}{2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(15 分)

得分	
评阅人	

六、（本题20分）设 $f(x)=1-x^2+x^3 \quad (x\in[0,1])$，计算以下极限并说明理由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}.$$

解: 易见 $f(x)$ 连续. 注意到 $f(x)=1-x^2(1-x)$, 我们有

$$0<f(x)<1=f(0)=f(1),\qquad \forall x\in(0,1).$$

…………………………………………………………(3 分)

任取 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 我们有 $\eta=\eta_\delta\in(0,\delta)$ 使得

$$m_\eta\equiv\min_{x\in[0,\eta]}f(x)>M_\delta\equiv\max_{x\in[\delta,1-\delta]}f(x).$$

…………………………………………………………(6 分)

于是当 $n\geqslant\frac{1}{\delta^2}$ 时,

$$\begin{aligned}
0\leqslant\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}&=\frac{\int_{1-\delta}^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
&=\frac{\int_0^\delta\big(1-x(1-x)^2\big)^n\,dx}{\int_0^\delta\big(1-x^2(1-x)\big)^n\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
&\leqslant\frac{\int_0^\delta\big(1-\frac{x}{4}\big)^n\,dx}{\int_0^\delta\big(1-x^2\big)^n\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\eta f^n(x)\,dx}\\
&\leqslant\frac{\int_0^\delta\big(1-\frac{x}{4}\big)^n\,dx}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\big(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\big)^n\,dx}+\frac{(1-2\delta)M_\delta^n}{\eta m_\eta^n}\\
&=\frac{\frac{4}{n+1}\Big(1-\big(1-\frac{\delta}{4}\big)^{n+1}\Big)}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\Big(1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n+1}\Big)}+\frac{(1-\delta)}{\eta}\Big(\frac{M_\delta}{m_\eta^n}\Big)^n.
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0.$$

…………………………………………………………(14 分)

==

(注: 可以用多种写法说明上述极限成立. 原则上, 给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0$$

可以给 4 分, 给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{1-\delta}^{1} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0$$

给 4 分.)

==

对于 $\varepsilon\in(0,\ln\frac{5}{4})$, 取 $\delta=2(e^\varepsilon-1)$, 则 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, $\ln\frac{2+\delta}{2}=\varepsilon$.

另一方面, 由前述结论, 存在 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\leqslant\varepsilon.$$

从而又有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}-\ln 2\right|=\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\;&\frac{\int_0^\delta f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}+\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\;&\ln\frac{\delta+2}{2}+\frac{\ln 2\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\;&\varepsilon(1+\ln 2).
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}=\ln 2.$$

....(20 分)