第七届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案及评分标准
(数学类, 2015年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

一、(本题 15 分) 设 L_1 和L_2是空间中两异面直线.设在标准直角坐标系下直线L_1过坐标为a的点，以单位向量v为直线方向；直线L_2过坐标为b的点，以单位向量w为直线方向.

1) 证明：存在唯一点$P \in L_1$ 和$Q \in L_2$ 使得两点连线PQ 同时垂直于 L_1 和L_2.

2)求P点和Q点坐标(用a, b, v, w表示).

解： 1）过直线L_2上一点和线性无关向量 v 和w 做平面σ，则直线L_2落在平面σ上，且直线L_1平行于平面σ 。过L_1做平面τ 垂直于平面σ ，记两平面交线为L_1^*。设两直线L_1^*和L_2的交点为Q, 过Q做平面σ 的法线，交直线L_1为P, 则 PQ 同时垂直于L_1和L_2。 ......(4分)

设$X = P + sv \in L_1$ 和$Y = Q + tw \in L_2$ 也使得XY同时垂直于L_1和L_2，则有$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} - sv + tw$垂直于 v 和w ，故有 $-s + (v \cdot w)t = 0$ 和 $-s(v \cdot w) + t = 0$ 。由于$(v \cdot w)^2 < 1$ ，我们得到$s = t = 0$, 即$X = P$，$Y = Q$，这样的P和Q存在且唯一。 ......(8分)

2）设$P = a + sv \in L_1$ 和$Q = b + tw \in L_2$ 。因为$\overrightarrow{PQ} = \lambda v \times w$ ，我们得到

$$(b - a) - sv + tw = \lambda v \times w,$$

.......(11分)

于是有

$$(b - a) \cdot v - s + t(v \cdot w) = 0, (b - a) \cdot w - s(v \cdot w) + t = 0$$

故有

$$s = \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}, t = \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}$$

得到

$$P = a + \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}v, Q = b + \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}w.$$

.......(15分)

二、 (本题 20 分) A为4阶复方阵，它满足关于迹的关系式：$\mathrm{tr}A^i = i, i = 1,2,3,4$. 求$A$的行列式.

解 $|A| = \frac{1}{24}$, 过程如下：

首先，记A的4个特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, A的特征多项式为 $p(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. 则由$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$可知

$$\begin{cases} a_3 = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) \\ a_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4 \\ a_1 = -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4) \\ a_0 = |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases}$$

其次，由于迹在相似变换下保持不变，故由A的约当标准形（或Schur分解）立知

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2 = 2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3 = 3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4 = 4 \cdots\cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

......(10分)

由（1）和（2）得

$$a_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

由（1）两边立方得

$$1 = \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3+3\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+3\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)+3\lambda_3^2(\lambda_2+\lambda_1+\lambda_4)+3\lambda_4^2(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1)-6a_1$$

再由（1）（2）（3）即得

$$1 = 3+3\lambda_1^2-3\lambda_1^3+3\lambda_2^2-3\lambda_2^3+3\lambda_3^2-3\lambda_3^3+3\lambda_4^2-3\lambda_4^3-6a_1$$

$$a_1 = -\frac{1}{6}$$

最后，由$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + a_0$得

$$\begin{cases} p(\lambda_1) = 0 \\ \quad\vdots \\ p(\lambda_4) = 0 \end{cases}$$

相加得

$$4 - 3 - \frac{1}{2}\times 2 - \frac{1}{6}\times 1 + 4a_0 = 0$$

结果$a_0 = \frac{1}{24}$, 亦即A的行列式为$\frac{1}{24}$.□

......(20分)

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶实方阵，其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解。

证明 设$C = I + A$, $B = A^2$, A的n个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则$B$的$n$个特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$; C的n个特征值为 $\mu_1 = \lambda_1 + 1, \mu_2 = \lambda_2 + 1, \ldots, \mu_n = \lambda_n + 1$; C 的特征多项式为 $p_C(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\cdots(\lambda - \mu_n)$.

......(5分)

若X为$X + AX - XA^2 = 0$ 的解，则有 $CX = XB$; 进而 $C^2X = XB^2, \cdots, C^kX = XB^k \cdots$, 结果 $0 = p_C(C)X = Xp_C(B) = X(B - \mu_1 I)\cdots(B - \mu_n I)$. 注意到$B$的$n$个特征值皆为偶数，而$C$的$n$个特征值皆为奇数，故

$B - \mu_1 I, \cdots, B - \mu_n I$ 皆为可逆矩阵，结果由 $0 = X(B - \mu_1 I)\cdots(B - \mu_n I)$立得 $X = 0$.□

......(15分)

四、(本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}, a_1>0$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-n)$ 存在.

证明 $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant 2$. 若 $a_n\geqslant n$, 则

$a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-n-1=(1-\frac{1}{a_n})(a_n-n)\geqslant 0$, 故

$a_n\geqslant n, \forall n\geqslant 2$, 且$a_n-n$单调递减.

......(5分)

令 $b_n=n(a_n-n)$, 则

$b_{n+1}=(n+1)(a_{n+1}-n-1)=(n+1)(a_n+\frac{n}{a_n}-n-1)$

$=(a_n-n)(n+1)(1-\frac{1}{a_n})=(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{a_n})b_n$

$=(1+\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n})b_n=(1+R_n)b_n$, 其中 $R_n=\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n}$. 从而 $b_n=b_2\prod_{k=2}^{n-1}(1+R_k)$.

......(10分)

考察R_n.

$|R_n|\leqslant|\frac{a_n-n}{na_n}|+\frac{1}{na_n}\leqslant\frac{1+|a_2-2|}{n^2}, n\geqslant 2$.

结果由$\lim\prod_{k=2}^{n-1}(1+R_k)$存在知$\lim\ n(a_n-n)$ 存在.

......(15分)

五、(本题 15 分)设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty}|h(t)|\,dt=a<1$. 构造函数列如下: $g_0(x)=f(x)$,

$$g_n(x)=f(x)+\int_0^x h(t)g_{n-1}(t)\,dt,\quad n=1,2,\cdots \tag{1}$$

求证 $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

证明 记 $M=\sup|f(x)|$. 因而 $|g_0(x)|\leqslant M$. 假设 $|g_{n-1}(x)|\leqslant(1+a+\cdots+a^{n-1})M$. 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}|g_n(x)|&\leqslant|f(x)|+\int_0^x|h(t)|\,|g_{n-1}(t)|\,dt\\&\leqslant M+\int_0^{+\infty}|h(t)|(1+a+\cdots+a^{n-1})M\,dt\\&=M+a(1+a+\cdots+a^{n-1})M\\&=(1+a+\cdots+a^{n-1}+a^n)M.\end{aligned}$$

因此 $|g_n(x)|\leqslant\frac{1-a^{n+1}}{1-a}M$. 由 (1) 可得

$$g_n(x)-g_{n-1}(x)=\int_0^x h(t)(g_{n-1}(t)-g_{n-2}(t))\,dt,$$

由此可得

$$\sup|g_n(x)-g_{n-1}(x)|\leqslant a\,\sup|g_{n-1}(x)-g_{n-2}|.$$

从而

$$\sup|g_n(x)-g_{n-1}(x)|\leqslant a^{n-1}\sup|g_1(x)-g_0(x)|\leqslant a^nM.$$

...........5分

由于 $a\in[0,1)$, 从上面这个式子, 可知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(g_n(x)-g_{n-1}(x))$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 即函数列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 因为函数列的每一项都连续, 因而其极限函数 $g(x)$ 也是连续函数. 10分

在 (1) 的两边取极限得

$$g(x)=f(x)+\int_0^x h(t)g(t)\,dt. \tag{2}$$

记 $\psi(x)=\int_0^x h(t)g(t)\,dt$, $H(x)=\int_0^x h(t)\,dt$, 则此二函数可导, 且 $\psi'(x)=h(x)g(x)$, $H'(x)=h(x)$. 由 (2) 得

$$\psi'(x)-h(x)\psi(x)=h(x)f(x).$$

因而

$$\left(e^{-H(x)}\psi(x)\right)' = e^{-H(x)}h(x)f(x).$$

两边积分可得

$$e^{-H(x)}\psi(x) = \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

即,

$$\psi(x) = e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

将此代入 (2) 就得到

$$g(x) = f(x) + e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

..........15分

六、 (本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x)+a\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$$

为常数。求证：$f(x)$ 必为常数。

证明: 不妨设 $f(x)$ 有下界。设 $m=\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, $g(x)=f(x)-m$, 则 $g(x)$ 为非负连续函数，且

$$A=g(x)+a\int_{x-1}^{x} g(t)\,dt \tag{1}$$

为非负常数。 5分

由 (1) 知 $g(x)$ 是可微函数，且

$$g'(x)+a\big(g(x)-g(x-1)\big)=0. \tag{2}$$

由此

$$\left(e^{ax}g(x)\right)'=ae^{ax}g(x-1)\geqslant 0.$$

这说明 $e^{ax}g(x)$ 是递增函数。 10分

由 (1), 可得

$$\begin{aligned}A&=g(x)+a\int_{x-1}^{x} e^{at}g(t)e^{-at}\,dt\\&\leqslant g(x)+ae^{ax}g(x)\int_{x-1}^{x} e^{-at}\,dt\\&=g(x)+e^{ax}g(x)\big(e^{-a(x-1)}-e^{-ax}\big)\\&=e^{a}g(x).\end{aligned}$$

由此，可得

$$g(x)\geqslant Ae^{-a}.$$

...... 15分

由 $g(x)$ 的定义知，$g(x)$ 的下确界为零，因此 $A=0$. 再根据 (1) 可知 $g(x)$ 恒等于零，即 $f(x)$ 为常数。 20分