第八届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

(非数学类, 2017 年 3 月 18 日)

(14 金融工程 – 白兔兔)

绝密 ★ 启用前

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意：1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

1. 过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为__________

答案：$y-3z=0$

2. 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$, $f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(0,y+\dfrac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$ 则 $f(x,y)=$ __________

答案：$f(x,y)=e^{-x}\sin y$

3. 已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵, b 为 n 元列向量, 设 $B=\begin{pmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{rank}(B)=$ __________

答案：n

4. $\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为__________

答案：18

5. 曲线 $L_1: y=\dfrac{1}{3}x^3+2x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2: y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积__________

答案：$\dfrac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$

二、(本题满分 14 分)

设 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 证明：$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}$

证明. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}=\frac{2(x^3\cos x-\sin^3 x)}{x^3\sin^3 x} \tag{1}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

令 $\varphi(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\frac{\cos^{\frac{4}{3}} x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}} x\sin^2 x}{\cos^{\frac{2}{3}} x}-1\\&=\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}} x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}} x-1\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (6 分)

由均值不等式, 得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\cos^{\frac{2}{3}} x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{4}{3}} x&=\frac{1}{3}\left(\cos^{\frac{2}{3}} x+\cos^{\frac{2}{3}} x+\cos^{-\frac{3}{4}} x\right)\\&>\sqrt[3]{\cos^{\frac{2}{3}} x+\cos^{\frac{2}{3}} x+\cos^{-\frac{3}{4}} x}=1\end{aligned}$$

所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'(x)>0$, 从而 $\varphi(x)$ 单调递增，又 $\varphi(0)=0$, 因此 $\varphi(x)>0$, 即

$$x^3\cos x-\sin^3 x<0$$

由 (1) 式得 $f'(x)<0$ 从而 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)&=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x+x}{x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x\tan^2 x}\\&=2\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

所以 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14 分)

□

三、(本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数 且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$ 证明：当 $0\leqslant x\leqslant 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 11$$

并给出取等号的条件。

证明. 由条件 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}$$

…………………………………………(3 分)

利用离散柯西不等式, 即 $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2$, 等号当 a_i 与 b_i 对应成比例时成立. 有

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}&=1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}\\&\leqslant\sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)}=11\end{aligned}$$

…………………………………………(8 分)

且等号成立的充分必要条件是:

$$x=\frac{1}{2}(x+27)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}\ ,\quad \text{即}\ x=9$$

…………………………………………(10 分)

所以

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 11$$

特别当 $x=9$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

根据周期性, 以及 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, 有

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=11\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=11$$ …………………………(14 分)

所以取等号的充分必要条件是 $x=9$ □

四、(本题满分 14 分)

设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

解. 记球面 $\Sigma:\ x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的单位法向量为 $\vec{\boldsymbol{n}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

$\cdots\cdots$ (2 分)

考虑曲面积分等式

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \tag{2}$$

$\cdots\cdots$ (5 分)

对两边都利用高斯公式，得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S&=\oiint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\oiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=&\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\=&2\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&+\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{4}$$

$\cdots\cdots$ (10 分)

将 (3)、(4) 代入 (2) 并整理得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(1-(x^2+y^2+z^2)\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-\rho^2)\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (14 分)

$\Diamond$

五、(本题满分 14 分)

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$
证明：若存在正整数 k 使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ ($\boldsymbol{O}$ 为零矩阵), 则行列式 $|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

证明. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Longrightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 化简可得到

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$$

……………………………………………………(4 分)

(I) 若 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 得 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AB}^{-1}$, 从而 $(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^k=(\boldsymbol{B}^{-1})^k\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0，则 $\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 1, 因此

$$|\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=1|$$

$$|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$$

……………………………………………………(10 分)

(II) 若 $\boldsymbol{B}$ 不可逆, 则存在无穷多个数 t, 使 $\boldsymbol{B}_t=t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 且有 $\boldsymbol{AB}_t=\boldsymbol{B}_t\boldsymbol{A}$. 利用 (I) 的结论, 有恒等式

$$|\boldsymbol{B}_t+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}_t|$$

取 $t=0$, 得

$$|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$$

……………………………………………………(14 分)

□

六、(本题满分 14 分)

设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$

1. 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$ 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 的敛散性

解. (1) 利用不等式：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 有

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\leqslant\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=0$$

……………………………………………………(2 分)

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)\\&=1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\right]\\&\geqslant1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right]=\frac{1}{n}>0\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 .... (5 分)

(2) 显然, 以 a_n 为部分和的级数为 $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln n+\ln(n-1)\right)$, 则
该级数收敛于 C, 且 $a_n-C>0$, 用 r_n 记作该级数的余项, 则

$$a_n-C=-r_n=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln k+\ln(k-1)\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right)$$

根据泰勒公式，当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$, 所以

$$a_n-C>\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$$

.... (10 分)

记 $b_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$, 下面证明正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。因为

$$\begin{aligned}c_n &\triangleq n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2(k-1)(k-2)}\right)\\ &<nb_n<n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-2)}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

而当 $n\to\infty$ 时, $c_n=\frac{n-2}{2(n-1)}\to\frac{1}{2}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n=\frac{1}{2}$.

根据比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

因此, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 发散。 .... (14 分)

$\Diamond$