北京科技大学 2015--2016学年 第二学期

线性代数 试卷（A）

注意事项：

（1）本试卷共八道大题，共二页，请认真核对。

（2）请在答题卡上答题，在此试卷上答题无效。请认真阅读答题卡注意事项.

一、选择题（本题共15分，每小题3分）

1、设n阶方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值，则下列说法正确的是（　　）

（A）$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似　　（B）存在对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都相似于$\boldsymbol{\Lambda}$

（C）存在正交阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$　　（D）$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

2、设$\lambda=2$是可逆方阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，则$(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2)^{-1}$有一个特征值为（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

3、设三阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,-3$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$，则$r(\boldsymbol{B})$为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

4、设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，下列命题正确的是__________.

（A）若$\boldsymbol{A}$中有n阶子式不为零，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解

（B）若$\boldsymbol{A}$中有n阶子式不为零，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$必有惟一解

（C）若$\boldsymbol{A}$中有m阶子式不为零，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解

（D）若$\boldsymbol{A}$中有m阶子式不为零，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$必有惟一解。

5、下列二阶矩阵可对角化的是（　　）

（A）$\begin{bmatrix}1&1\\-4&5\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}1&-4\\1&5\end{bmatrix}$　　（C）$\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}$

二、填空题（本题共15分，每小题3分）

1、设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，则$|2\boldsymbol{A}^*|=$__________。

2、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}6\\k\\8\end{pmatrix}$线性相关，则k=__________。

3、两向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2)^T$与$\boldsymbol{\beta}=(2,2,1)^T$的夹角为__________。

4、已知3阶非零矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$，其中$\boldsymbol{A}^*$为矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^T$为矩阵$\boldsymbol{A}$的转置，

那么矩阵$\boldsymbol{A}$第一行元素的平方和$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=$________。

5、二次型$f=4x_1{}^2+4x_2{}^2+x_3{}^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2tx_2x_3$正定的充要条件是________。

三、（12分）计算下列行列式

1、$\begin{vmatrix}5&2&6&7\\8&6&7&5\\2&1&3&3\\2&2&5&0\end{vmatrix}$；　　2、$D_n=\begin{vmatrix}x_1&3&3&\cdots&3\\3&x_2&3&\cdots&3\\3&3&x_3&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\3&3&3&\cdots&x_n\end{vmatrix},x_i\neq 3,i=1,\cdots,n$

四、（10分）设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&5&4\\3&1&2\\3&4&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}$。

1、求伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$；　2、求矩阵$\boldsymbol{X}$，使得$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$。

五、（14分）设线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-kx_3=1,\\x_1+3x_2+(1-k)x_3=1,\\kx_1+x_2+x_3=-2,\end{cases}$

问k取何值时，方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？并在有无穷多解时求其通解。

六、（12分）设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\1\\6\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

求此向量组的秩及一个极大线性无关组,并将其它向量用该极大无关组线性表示。

七、（12分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$可以经过正交变换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$化为标准型$f=4y_1^2+y_2^2$，求$a$的值和正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

八、（10分）设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$为奇数阶实对称阵，且$|\boldsymbol{A}|>0$. 证明:1. $\boldsymbol{A}$必有一个正的特征值；

2. 存在非零n维向量x_0，使$x_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x_0>0$.

北京科技大学 2015-2016 学年 第 二 学期

线性代数 A 期末试卷 答案

一、 选择题（本题共 15 分，每题 3 分）

1-5　DBDAC

二、 填空题（本题共 15 分，每空 3 分）

1、72　　2、$\frac{44}{5}$　　3、$\arccos\frac{8}{9}$

4、1或 0　　5、$t\in(-1,2)$

三、 计算行列式

答案　(1) -35　　(2) $\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{x_i-3}\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-3)$

解析　略

四、 解矩阵方程

答案　(1) $\begin{pmatrix}-5 & -1 & 6\\ -3 & 0 & 4\\ 9 & -1 & -11\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

解析　略

五、 对参数分类讨论非齐次线性方程组解的情况并求通解

答案　(1) $k\neq 0,-2$ 时有唯一解

(2) $k=0$ 时无解

(3) $k=-2$ 时有无穷个解，通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},c\in R$.

解析　略

六、 求极大无关组并表示其余向量

答案　(1) $r=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$

解析　略

七、 正交变换化二次型为标准型并写正交矩阵或正交变换

答案 $a=1$ $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

解析 略

八、 证明题

证明

（1） 反证法：假设 A 没有正的特征值，则必有 $|A|\le 0$，与题设不符，矛盾

则可知假设不成立，即 A 必有一个正的特征值.

（2） 设该正的特征值为 λ_0，对应的特征向量为 x_0

则有 $x_0^T A x_0 = x_0^T \lambda_0 x_0 = \lambda_0 x_0^T x_0 > 0$

即证得 $x_0^T A x_0 > 0$.