北京科技大学 2020-2021 学年 第 一 学期

概率论与数理统计 A 期末试卷（模拟）答案

填空题：

1. X的分布律为

X	-1	2	4
P	0.5	0.3	0.2

$P(-1 < X \le 3) = P(X = 2) = 0.3$

2. $F_Z(z) = P(Z \le z) = P\{min(X,\ Y) \le z\} = 1 - P(X \ge z,\ Y \ge z)$

$= 1 - P(X \ge z)P(Y \ge z) = 1 - \{1 - P(X \le z)\}\{1 - P(Y \le z)\}$

$= 1 - \{1 - F_1(z)\}\{1 - F_2(z)\}$

3. $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B) \implies P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB) \implies P(A) = P(B)$

故$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(A)\big(1 - P(A)\big) = \dfrac{3}{16} \implies P(A) = \dfrac{1}{4}$或$\dfrac{3}{4}$

又$P(A) < \dfrac{1}{2} \implies P(A) = \dfrac{1}{4}$

4. $E(X+Y) = 0$, $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\,cov(X,Y)$

$= D(X) + D(Y) + 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

$= 1 + 4 + 2 \times 0.5 \times 1 \times 2 = 3$

$P\{|X+Y-0| \ge 6\} \le \dfrac{D(X+Y)}{6^2} = \dfrac{1}{12}$

5. 设事件 A：学生知道正确答案；B：学生随机猜测；C：学生答对了

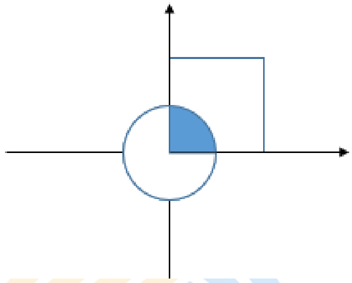
故已知$P(A) = P(B) = 0.5$，求$P(A|C)$；由全概率公式知$P(C) = P(AC) + P(BC)$

$P(C|A) = \dfrac{P(AC)}{p(A)} = 1 \implies P(AC) = 0.5$; $P(C|B) = \dfrac{P(BC)}{p(B)} = \dfrac{1}{4} \implies P(BC) = 0.125$

所以$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{0.5}{0.5+0.125}=0.8$

6. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\epsilon[0,\ 2]\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\epsilon[0,\ 2]\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x,y\epsilon[0,\ 2]\\ 0, & 其他\end{cases}$；

$$P(X^2+Y^2\le 1)=\iint\limits_{X^2+Y^2\le 1} f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}\iint\limits_{X^2+Y^2\le 1} dxdy=\frac{1}{4}S_{扇形}=\frac{\pi}{16}$$



选择题：

1. A：二维正态分布相关系数≠0，故不独立，$cov(X,\ Y)=E(XY)-EX\cdot EY\neq 0$

2. A：偶函数的对称性，$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx=\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=1-\int_{-\infty}^{a}f(x)dx$

3. B：α =P{第一类错误}=P{拒绝 H_0| H_0 真}=显著水平，0.01 的小概率拒绝原假设成功，0.05 的“大”概率必然拒绝成功，即犯错误的概率变大了，必然拒绝。

4. C：$\rho_{XZ}=\frac{cov(X,\ Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=\frac{cov\left(X,\ \frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)}{3\sqrt{D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)}}=\frac{\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}cov(X,\ Y)}{3\sqrt{\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times cov(X,\ Y)}}$

$$=\frac{3+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}}{3\sqrt{1+4+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}}}=\frac{3+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\times 3\times 4}{3\sqrt{5+\frac{1}{3}\times\frac{-1}{2}\times 3\times 4}}=0$$

5. D：$E(\hat{\theta})=E(2X_n)=2E(X_n)=2E(X)=2\times\frac{0+\theta}{2}=\theta$

6. B：$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的期望为$\frac{n}{\lambda}$，方差为$\frac{n}{\lambda^2}$，由林德贝格-莱维中心极限定理可知 B 正确

解答题：

1. $P(AC|AB\cup C)=\dfrac{P\{AC(AB\cup C)\}}{P(AB\cup C)}=\dfrac{P\{(AC\cap AB)\cup(AC\cap C)\}}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$

$$=\frac{P(ABC\cup AC)}{P(A)P(B)+P(C)}=\frac{P(AC)}{P(A)P(B)+P(C)}=\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ P(C)=\frac{1}{4}$$

2.（1）$E(Y_i)=E(X_i)-E(\overline{X})=0$

$$D(Y_i)=E(Y_i^2)=E(X_i-\overline{X})^2=D(X_i-\overline{X})+\left(E(X_i-\overline{X})\right)^2$$

$$=D(X_i-\overline{X})=D\left(X_i-\frac{1}{n}X_1-\cdots-\frac{1}{n}X_n\right)$$

$$=(\frac{n-1}{n})^2+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}$$

（2）$cov(Y_1,Y_n)=cov(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$

$$=cov(X_1,X_n)-cov(X_1,\overline{X})-cov(X_n,\overline{X})+cov(\overline{X},\overline{X}),$$

因为$cov(X_1,X_n)=0,cov(X_n,\overline{X})=\frac{1}{n}DX_n=\frac{1}{n},cov(\overline{X},\overline{X})=D\overline{X}=\frac{1}{n}$

$$cov(X_1,\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}cov(X_1,X_i)=\frac{1}{n}cov(X_1,X_1)=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}$$

故$cov(Y_1,Y_n)=-\frac{1}{n}$

3. (1)因X、Y的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<x<2\\0,\quad\quad 其他\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}1,0<y<1\\0,\quad 其他\end{cases}$$

且X和Y相互独立，故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<x<2,0<y<1\\0,\quad\quad\quad 其他\end{cases}$$

(2)$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=0$；当$z\ge 3$时，$F_Z(z)=1$

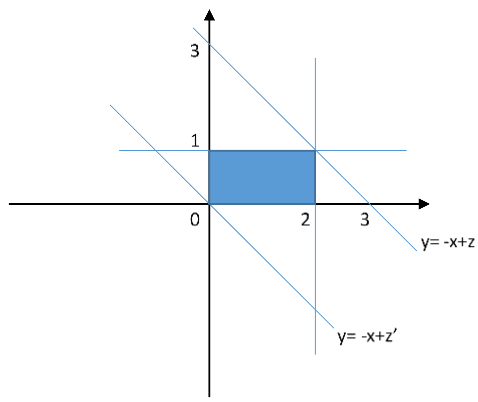
当$0<z<1$时，$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}z^2$

当 $1\le z<2$ 时， $F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\int_0^{z-1}dx\int_0^1\frac{1}{2}dy+\int_{z-1}^{z}dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy=\frac{z}{2}-\frac{1}{4}$

当 $2\le z<3$ 时， $F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\int_0^{z-1}dx\int_0^1\frac{1}{2}dy+\int_{z-1}^{2}dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy=\frac{3}{2}z-\frac{1}{4}z^2-\frac{5}{4}$

求导可得：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{2},\ 0<z<1\\ \frac{1}{2},\ 1\le z<2\\ \frac{3-z}{2},\ 2\le z<3\\ 0,\qquad 其他\end{cases}$$



4. （1）$P(T>t)=1-P(T\le t)=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

$$P(T>S+t\mid T>S)=\frac{P(T>S+t)}{P(T>S)}=\frac{1-P(T\le S+t)}{1-P(T\le S)}=\frac{1-F(S+t)}{1-F(S)}$$

$$=\frac{e^{-\left(\frac{S+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{S}{\theta}\right)^m}}=e^{\left(\frac{S}{\theta}\right)^m-\left(\frac{S+t}{\theta}\right)^m}$$

（2）$f(t)=F'(t)=\begin{cases}m\theta^{-m}t^{m-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\ge 0\\ 0, & 其他\end{cases}$

似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(t_i，\theta)=\begin{cases}m^n\theta^{-mn}(t_1\cdots t_n)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^n {t_i}^m}, & t_i\ge 0\\ 0, & 其他\end{cases}$

当$t_i\ge 0$ 时， $L(\theta)=m^n\theta^{-mn}(t_1\cdots t_n)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^n {t_i}^m}$

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\ln(t_1\cdots t_n)-\theta^{-m}\sum_{i=1}^n {t_i}^m$

求导数$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\theta^{-(m+1)}\sum_{i=1}^{n}t_i{}^m$，令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$

得$\theta=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i{}^m}$，所以极大似然估计值$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i{}^m}$。

5. (1)设该次考试的考生成绩为X，则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$由于σ^2

未知，用t检验，选用统计量$T=\frac{X-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$,

置信区间应为$(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

本题$n=36$，$\overline{X}=66.5,S=15$，$t_{0.05}(35)=1.6896$，$\alpha=0.1$

故置信区间为$(66.5-\frac{15}{\sqrt{36}}t_{0.05}(35),66.5+\frac{15}{\sqrt{36}}t_{0.05}(35))=(62.276,70.724)$

(2)设该次考试的考生成绩为X，则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,现抽取了容量为 36 的样本，

在显著性水平$\alpha=0.05$ 下检验假设H_0：$\mu=70;H_1$：$\mu\neq70$，

由于σ^2未知，用t检验，选用统计量

$T=\frac{X-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

现$\mu=70,n=36,\overline{X}=66.5,S=15,t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$.

拒绝域为$|t|=\frac{|\overline{x}-\mu|}{S}\sqrt{36}\geq2.0301$.

现$|t|=\frac{|66.5-70|}{15}\sqrt{36}=1.4<2.0301$,所以接受$H_0$.

在显著性水平$\alpha=0.05$ 下，可以认为平均成绩为 70 分。