第二届全国大学生数学竞赛（非数学类）决赛试题解答

吴 洁

得 分	
评阅人	

一、（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$；

（3）已知 $\begin{cases} x=\ln(1+e^{2t}) \\ y=t-\arctan e^{t}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：(1) 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\left[\dfrac{\sin x}{x}-1\right]=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\sin x-x}{x}$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=e^{-\frac{1}{3}}\quad（x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3）$$

(2) 因为 $I=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}]\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\dfrac{1}{n}$，取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$，则得被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，积分区间 $[0,1]$，于是 $I=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$。

(3)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{1+e^{2t}-e^t}{2e^{2t}}=\frac{1}{2}\left[e^{-2t}+1-e^{-t}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{\frac{1}{2}\left[-2e^{-2t}+e^{-t}\right]}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{1}{4}\left[-2e^{-4t}+e^{-3t}-2e^{-2t}+e^{-t}\right]。$$

得　分	
评阅人	

二、（本题 10 分）求方程 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 的通解.

解：所给方程改写为

$$(2xdx+ydy)+(ydx+xdy)-(4dx+dy)=0$$

即 $$d(x^2+\frac{1}{2}y^2)+d(xy)-d(4x+y)=0$$

故所求通解为

$$x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-(4x+y)=C\text{。}$$

得　分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0)$， $f'(0)$， $f''(0)$ 均不为零．证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3， 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

解　由条件 $0=\lim\limits_{h\to 0}\left[k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)\right]=(k_1+k_2+k_3-1)f(0)$，

因 $f\left(0\right)\neq 0$，所以 $k_1+k_2+k_3-1=0$ ；

又 $$0=\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}[k_1\ f'(h)+2k_2\ f'(2h)+3k_3f'(3h)]$$
$$=(k_1+2k_2+3k_3)f'(0)\text{，}$$

因 $f'\left(0\right)\neq 0$，所以 $k_1+2k_2+3k_3=0$ ；

再由 $$0=\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{k_1f'(h)+2k_2f'(2h)+3k_3f'(3h)}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[k_1f''(h)+4k_2f''(2h)+9k_3f''(3h)\right]=\frac{1}{2}\left[k_1+4k_2+9k_3\right]f''(0)\text{，}$$

因 $f''\left(0\right)\neq 0$，所以 $k_1+4k_2+9k_3=0$。因此 k_1， k_2， k_3 应满足线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3-1=0\\ k_1+2k_2+3k_3=0\\ k_1+4k_2+9k_3=0\end{cases}\text{，}$$

因其系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，所以存在唯一一组实数$k_1$，$k_2$，$k_3$，使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0 \text{。}$$

得　分	
评阅人	

四、（本题 17 分）设Σ_1：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$，其中$a > b > c > 0$，$\Sigma_2$：$z^2 = x^2 + y^2$，$\Gamma$为$\Sigma_1$和$\Sigma_2$的交线．求椭球面$\Sigma_1$在$\Gamma$上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值．

解： 椭球面Σ_1上任意一点$P(x, y, z)$处的切平面方程是

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0$$

或
$$\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = 1 \quad \text{（由} P(x, y, z) \in \Sigma_1\text{），}$$

于是它到原点的距离

$$d(x, y, z) = 1 / \sqrt{(x^2 / a^4) + (y^2 / b^4) + (z^2 / c^4)} \text{。}$$

作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + \mu(x^2 + y^2 - z^2) \text{，}$$

令

$$\begin{cases} F_x = 2\left(\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{\lambda}{a^2} + \mu\right) x = 0 \\ F_y = 2\left(\dfrac{1}{b^4} + \dfrac{\lambda}{b^2} + \mu\right) y = 0 \\ F_z = 2\left(\dfrac{1}{c^4} + \dfrac{\lambda}{c^2} - \mu\right) z = 0 \\ F_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ F_\mu = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

由第一个方程得 $x=0$，代入后两个方程得 $y=\pm z=\pm\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$；同理，由第一个方程得 $y=0$，代入后两个方程得 $x=\pm z=\pm\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$，且

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(0,\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})}=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)},$$

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}})}=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)}。$$

为比较以上两值的大小，设 $f(x)=\dfrac{x^4+c^4}{x^2c^2(x^2+c^2)}\quad(0<b<x<a)$，则

$$f'(x)=\frac{2x(x^4-2c^2x^2-c^4)}{x^4(x^2+c^2)^2}=\frac{2x(x^2-c^2)^2-2c^4}{x^4(x^2+c^2)^2}=\frac{2x(x^2-c^2+\sqrt{2}c^2)(x^2-c^2-\sqrt{2}c^2)}{x^4(x^2+c^2)^2}$$

如果要 $f'(x)>0$，须将原条件 $a>b>c>0$ 加强为 $a>b>\sqrt{1+\sqrt{2}}c$。

从而得到 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 单调增，从而 $f(a)>f(b)$，从而原问题的最大值为 $bc\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$，最小值为 $ac\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$。

注：是不是还该讨论 $f'(x)<0$ 的情形，请自己思考。

得　分	
评阅人	

五、（本题 16 分）已知 S 是空间曲线 $\begin{cases}x^2+3y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分（$z\ge 0$）（取上侧），Π 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离，λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦.

计算：（1）$\displaystyle\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；（2）$\displaystyle\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\mathrm{d}S$.

解 （1）由题设，S 的方程为

$$x^2+3y^2+z^2=1(z\geq 0)。$$

设(X,Y,Z)为切平面π上任意一点，则π的方程为$xX+3yY+zZ=1$，从而由

点到平面的距离公式以及$P(x,y,z)\in S$得

$$\rho(x,y,z)=(x^2+9y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=(1+6y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

由S为上半椭球面$z=\sqrt{1-x^2-3y^2}$知 ：

$$z_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}，\quad z_y=-\frac{3y}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}$$

于是
$$dS=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}=\frac{\sqrt{1+6y^2}}{\sqrt{1-x^2-3y^2}},$$

又S在xoy平面上的投影为$D_{xy}:x^2+3y^2\leq 1$，故

$$\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-3y^2}\cdot\frac{1}{(1+6y^2)^{-\frac{1}{2}}}\frac{\sqrt{1+6y^2}}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(1+6y^2)dxdy=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi。$$

其中，$\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$；

令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}r\sin\theta\end{cases}$（广义极坐标），则

$$\iint\limits_{D_{xy}}6y^2dxdy=6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^1\frac{1}{3}r^3dr=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\quad。$$

（2）由于S取上侧，故正法向量

$$\vec{n}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}},\frac{3y}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}\right\},$$

所以 $\lambda=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，$\mu=\dfrac{3y}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，$\upsilon=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，

$$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\upsilon z)dS=\iint\limits_S z\cdot\frac{x^2+9y^2+z^2}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}dS=\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi。$$

得　分	
评阅人	

六、(本题 12 分)设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数，且 $|f'(x)|< mf(x)$，其中 $0<m<1$．任取实数 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots$．证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛.

证：因 $|a_n-a_{n-1}|=|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})|=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_n-a_{n-1})\right|$（$\xi$ 介于 a_n,a_{n-1} 之间）

$$\le m|a_{n-1}-a_{n-2}|\le m^2|a_{n-2}-a_{n-3}|\le\cdots\le m^{n-1}|a_1-a_0|$$

而 $0<m<1$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛。

得　分	
评阅人	

七、(本题 15 分）是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$，满足 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1$？请说明理由.

解：不存在满足题设条件的函数。

以下用反证法证明。

假设在 $[0,2]$ 上连续、可微，且满足 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\le 1$，则对 $f(x)$，当 $x\in(0,1]$ 时，用拉格朗日中值定理，得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x，0<\xi_1<x，$$

即 $$f(x)=1+f'(\xi_1)x\quad(x\in(0,1])，$$

利用 $|f'(x)|\le 1$，得

$$f(x)\ge 1-x\quad(x\in(0,1])，$$

由 $f(0)=1$知， $f(x)\ge 1-x$ 在$[0,1]$上成立；

同理 $x\in[1,2)$ 时，有

$$f(2)-f(x)=f'(\xi_2)(2-x)\text{，}\ x<\xi_2<2\text{，}$$

即 $$f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2)\ \ (x\in[1,2)\text{，}$$

利用$|f'(x)|\le 1$，得

$$f(x)\ge 1+(x-2)=x-1\ (x\in[1,2))\text{，}$$

由 $f(2)=1$知， $f(x)\ge 1-x$ 在$[1,2]$上成立。所以

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx>\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx$$

$$=-\frac{1}{2}(1-x)^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2=1$$

矛盾（取严格不等号的理由见教材上册 P195）。