第八届中国大学生数学竞赛决赛一、二级试卷

(数学类，2017 年 3 月 18 日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

一、填空题 (本题满分 20 分, 共 4 小题, 每小题 5 分)

1. 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}$ = ________

   答案：0

2. 设 a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足 ________

   答案：$a>27$ or $a<-37$

3. 计算曲面积分 $I=\iint_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ($a>0$ 为常数),

   其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=$ ________

   答案：$-\dfrac{\pi}{2}a^3$

4. 记两特征值为 1, 2 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素.
   则集合 $\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 = ________

   答案：$-\dfrac{1}{2}$

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 与曲线 C. 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

解. 交线为抛物线或椭圆 .... (5 分)

1) 如果平面 P 平行于 $z-$ 轴, 则相交曲线 $C=\Gamma\cap P$ 可以经过以 $z-$ 为旋转轴的旋转, 使得 P 平行于 $yz-$ 平面, C 的形状不变. 所以可不妨设 P 的方程为 $x=c$, 交线 C 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(c^2+y^2)$. 将 C 投影到 $yz-$ 平面上, 得到抛物线 $z-\dfrac{c^2}{2}=\dfrac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 $z-$ 轴, 故交线为抛物线. .... (10 分)

2) 如果平面 P 不平行于 $z-$ 轴, 我们设 P 的方程为 $z=ax+by+c$. 代入旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(c^2+y^2)$, 得到

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+2c:=\mathrm{R}^2$$

将 $C=\Gamma\cap P$ 垂直投影到 $xy-$ 平面, 得到圆周 $(x-a)^2+(y-b)^2=\mathrm{R}^2$. 令 Q 是以这个圆为底的圆柱, 则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或下放置半径为 R 的球体, 它与平面 P 相切于 F_1 和 F_2, 与圆柱 Q 相交于圆 D_1 和圆 D_2. 对 $C=\Gamma\cap P$ 上任意一点 A, 过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1, 交圆 D_2 于 B_2. 则线段 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ 为定长. 这时, 由于球的切线长相等, 得到

$$|\mathrm{AF}_1|+|\mathrm{AF}_2|=|\mathrm{AB}_1|+|\mathrm{AB}_2|=|\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2|$$

为常数, 故直线 C 为椭圆. .... (15 分)

◇

三、证明题 (本题 15 分) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: 秩 $(\boldsymbol{ABA})=$ 秩 $(\boldsymbol{B})$. 证明: $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证明设
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$
其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是可逆方阵, $\boldsymbol{B}_1$ 是 r 阶可逆方阵, 则有 .... (5 分)

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$
当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{ABA}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}_1=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$ 可得, 存在矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_1$
从而有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$

因此, $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似. .... (15 分)

$\square$

四、(本题 20 分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi(x)\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall m,k\geqslant 0$
成立 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$. 若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义 $\hat{f}(x):=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\quad(\forall x\in\mathbb{R})$.
证明: $\hat{f}(x)\in\mathscr{S}$, 且
$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

证明. 由于 $f\in\mathscr{S}$, 因此存在 $M_1>0$ 使得
$$|2\pi ixf(x)|\leqslant\frac{M_1}{x^2+1},\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
这样, $\int_{\mathbb{R}}(-2\pi iy)f(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$ 关于 $x\in\mathbb{R}$ 一致收敛 .... (2 分)
从而可得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}-2\pi iyf(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$$
.... (4 分)

同理可得
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}(-2\pi iy)^nf(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y\tag{1}$$
而利用分部积分立即得到
$$(f^{(n)})\hat{}(x)=(2\pi ix)^n\hat{f}(x),\quad\forall n\geqslant 0\tag{2}$$
结合 (1)—(2) 并利用 $f\in\mathscr{S}$, 可得对任何 $m,k\geqslant 0$.
$$x^m\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\hat{f}(x)=\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}y^m}\left((-2\pi iy)^kf(y)\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$$

在 $\mathbb{R}$ 上有界, 从而 $\hat{f}(x) \in \mathscr{S}$. 于是, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$ 收敛, 而

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y &= \int_{-A}^{A} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i(x-t)y}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-A}^{A} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{-A}^{A} f(x-t) e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(2\pi At)}{\pi t} \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At)\mathrm{d}t + f(x) \qquad (3)\end{aligned}$$

.... (15 分)

由 $f \in \mathscr{S}$ 易得积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\mathrm{d}t$ 收敛, 从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At)\mathrm{d}t = 0 \qquad (4)$$

结合 (3) 和 (4) 即得结论. .... (20 分)

□

五、(本题 15 分) 设 $n > 1$ 为正整数. 令

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

1. 证明：数列 S_n 单调增且有界, 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

证明1. 先证

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n < \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

由均值不等式

$$k+1 = \frac{k}{n} + \cdots + \frac{k}{n} + 1 > (n+1) \sqrt[n+1]{\left(\frac{k}{n}\right)^n}$$

因此

$$\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

于是

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &> \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n > S_n\end{aligned}$$

即 S_n 单调增. ······(7 分)

另一方面

$$\frac{S_n}{n} < \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

即 S_n 单调增有上界, 从而极限 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在. ······(5 分)

2. 熟知当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$, 则

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n < e^{n\cdot(-k/n)} = e^{-k}$$

从而

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n < \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} < \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant \frac{1}{e-1} \tag{5}$$

······(11 分)

另一方面, 对任意正整数 m, 取 $n > m$, 则

$$S_n \geqslant \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

两边令 $n \to \infty$ 得

$$S_n > \sum_{k=1}^{m} e^{-k}$$

令 $m \to \infty$ 得

$$\geqslant \frac{1}{e-1} \tag{6}$$

结合 (5) 式与 (6) 式, 即得 $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \dfrac{1}{e-1}$ ······(15 分)

□

六、(本题 15 分) 求证: 常微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = -y^3 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 有唯一的满足 $y(0) = y(2\pi)$ 的解.

证明. 令 $y(x, y_0)$ 为方程满足初值条件 $y(0, y_0) = y_0$ 的解.

由常微分方程解的存在唯一性定理, 这样的解局部存在唯一.

我们首先证明

引理: 对任意 $r \in \mathrm{R}$ 函数 $y(x, r)$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上有定义. 且对任意 $r \geqslant 2$ 有 $y(x, r) \leqslant r$ 和 $y(x, -r) \geqslant -r$. ······(3 分)

引理的证明: 反证法. 设存在 $x_0 \in [0, 2\pi], r \geqslant 2$, 使得 $y(x_0, r) > r$, 则 $x_0 > 0$.

记

$$t = inf\{s \in [0, x_0] | y(x, r) \geqslant r, \forall x \in [s, x_0]\}.$$

则

$$y(t, r) = r,\ y'_x(t, r) \geqslant 0.$$

但 $y'_x(t, r) = -y(t, x)^3 + \sin t < 0$. 矛盾.

同理可证, $x_0 \in [0, 2\pi], r \geqslant 2$ 有 $y(x, -r) \geqslant -r$ 故引理成立. ······(10 分)

考虑函数 $f(r)=y(2\pi,r), r\in \mathrm{R}$ 则连续函数 f 满足 $f([-2,2])\subset[-2,2]$.
故存在 $y_0\in[-2,2]$, 使得 $f(y_0)=y_0$. 对恒等式

$$\frac{\mathrm{d}y(x,r)}{\mathrm{d}x}=-y(x,r)^3+\sin x$$

两边对 r 求导, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y(x,r)}{\partial r}\right)=-3y(x,r)^2\frac{\partial y(x,r)}{\partial r}.$$

故有

$$\frac{\partial y(x,r)}{\partial r}=e^{-3\int_0^x y(s,r)^2\,\mathrm{d}x}$$

于是有

$$f'(r)=e^{-3\int_0^x y(s,r)^2\,\mathrm{d}x}<1$$

故 f 至多只有一个不动点. ……………………………………………… (15 分)
唯一性的另一种证明方法: (唯一性 5 分) 设 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程的两个满足边值条件的解.
由存在唯一性定理, $y_1(x)\neq y_2(x),\forall x\in[0,2\pi]$.
不妨 $y_1(x)>y_2(x),\forall x\in[0,2\pi]$. 令 $y=y_1-y_2>0$, 则 $y(0)=y(2\pi)$
$\dot{y}=-(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)y<0\Longrightarrow y(0)<y(2\pi)$, 矛盾 □

整理者：14 金融工程 – 白兔兔
整理时间：2017 年 3 月 25 日