# 第五届全国大学生数学竞赛预赛(2013年非数学类)

## 试　　题

**一、解答下列各题**(本题共4个小题,每题6分,共24分)

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$.

2. 证明广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$不是绝对收敛的.

3. 设函数$y=y(x)$由$x^3+3x^2y-2y^3=2$所确定,求$y(x)$的极值.

4. 过曲线$y=\sqrt[3]{x}(x\geqslant 0)$上的点$A$作切线,使该切线与曲线及$x$轴所围成的平面图形的面积为$\frac{3}{4}$,求$A$点的坐标.

**二、**(12分)计算定积分$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

**三、**(12分)设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数$f''(0)$,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛.

**四、**(10分)设$|f(x)|\leqslant\pi$,$f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$.证明$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}$.

**五、**(14分)设$\Sigma$是一个光滑封闭曲面,方向朝外.给定第二型的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

试确定曲面$\Sigma$,使得积分$I$的值最小,并求该最小值.

**六、**(14分)设$I_a(r)=\int_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$,其中$a$为常数,曲线$C$为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$,取正向.求极限$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

**七、**(14分)判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性,若收敛,求其和.

## 参 考 答 案

**一、1.解**　因为$\sin(\pi\sqrt{1+4n^2})=\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi)=\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}$.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)\right]$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}.$$

2. **证** 记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$,只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. 因为

$$a_n\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{(n+1)\pi},$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$ 发散,故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散.

3. **解** 方程两边对 $x$ 求导,得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0,$$

故 $y'=\frac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$,令 $y'=0$,得 $x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=-2y$.

将 $x=0$ 和 $x=-2y$ 代入所给方程,得

$$\begin{cases}x=0,\\y=-1\end{cases}\text{和}\begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$$

又

$$y''=\frac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)-(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0,\ y''\Bigg|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}>0.$$

故 $y(0)=-1$ 为极大值,$y(-2)=1$ 为极小值.

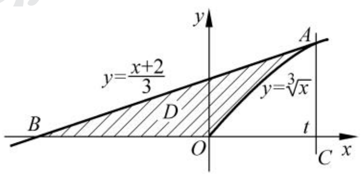
4. **解** 设切点 $A$ 的坐标为$(t,\sqrt[3]{t})$,曲线过 $A$ 点的切线方程为

$$y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t),$$

令 $y=0$,由上式可得切线与 $x$ 轴交点 $B$ 的横坐标 $x_0=-2t$. 设 $A$ 在 $x$ 轴上的投影点为 $C$. 如题 4 图所示平面图形$\triangle ABC$ 的面积$-$曲边梯形 $OCA$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1.$$

故 $A$ 的坐标为(1,1).




题 4 图

**二、解**

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^{-x}}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan\mathrm{e}^x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}(\arctan\mathrm{e}^x+\arctan\mathrm{e}^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan(\cos x)\Bigg|_0^{\pi}\\&=\frac{\pi^3}{8}.\end{aligned}$$

**三、证** 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

应用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0).$$

所以

$$\lim_{n\to0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\,|f''(0)|.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

**四、证** **解法1** 因为 $f'(x)\geqslant m>0(a\leqslant x\leqslant b)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增，从而有反函数.

设 $A=f(a)$，$B=f(b)$，$\varphi$ 是 $f$ 的反函数，则

$$0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\leqslant\frac{1}{m},$$

又 $f(x)\leqslant\pi$，则 $-\pi\leqslant A<B\leqslant\pi$，所以

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\xlongequal{x=\varphi(y)}\left|\int_A^B\varphi'(y)\sin y\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{m}\sin y\mathrm{d}y=\frac{2}{m}.$$

**解法2** $\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b\dfrac{f'(x)\sin f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{1}{m}\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}f(x)\right|=\dfrac{1}{m}\,|[-\cos f(x)]_a^b\,|\leqslant\dfrac{2}{m}.$

**五、解** 记 $\Sigma$ 围成的立体为 $V$，由高斯公式，

$$I=\iiint_V(3x^2+6y^2+9z^2-3)\mathrm{d}v=3\iiint_V(x^2+2y^2+3z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

为了使 $I$ 达到最小，就要求 $V$ 是使得 $x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant0$ 的最大空间区域，即

$$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\leqslant1\}.$$

所以 $V$ 是一个椭球，$\Sigma$ 是椭球 $V$ 的表面时，积分 $I$ 最小.

为求该最小值，作变换

$$\begin{cases}x=u,\\ y=\dfrac{v}{\sqrt{2}},\\ z=\dfrac{w}{\sqrt{3}},\end{cases}$$

则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant1}(u^2+v^2+w^2-1)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

使用球坐标变换，得

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^2-1)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi.$$

**六、解** 作变换

$$\begin{cases}x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}},\\ y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

曲线 $C$ 变为 $uOv$ 平面上的曲线 $\Gamma$: $\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2$，也是取正向，且有 $x^2+y^2=u^2+v^2$，$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v$，

$$I_a(r)=\int_\Gamma \frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}.$$

作变换

$$\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta, \\ v=\sqrt{2}r\sin\theta, \end{cases}$$

则有 $v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\mathrm{d}\theta$，

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{-2(1-a)}J_a,$$

其中 $J_a=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}$，$0<J_a<+\infty$.

因此当 $a>1$ 和 $a<1$ 时，所求极限分别为 0 和 $+\infty$.

而当 $a=1$ 时，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta\left(\frac{2}{3}+2\tan^2\theta\right)}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\frac{2}{3}+2\tan^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+t^2}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\arctan\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{3}\pi.$$

故所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0 & a>1, \\ -\infty, & a<1, \\ -2\pi, & a=1.\end{cases}$$

**七、解**　(1)记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，$n=1,2,3,\cdots$. 因为 $n$ 充分大时，

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n<\sqrt{n},$$

所以 $u_n\leqslant\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$ $(k=1,2,\cdots)$，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{n+2}a_n$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n.$$

因为 $0<a_n<1+\ln n$，所以 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$. 于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$.