第六届全国大学生数学竞赛预赛(2014 年非数学类)

试　　题

一、填空题(本题共 5 个小题,每题 6 分,共 30 分)

(1)已知 $y_1=\mathrm{e}^x$ 和 $y_2=x\mathrm{e}^x$ 是二阶齐次常系数线性微分方程的解,则该方程是________.

(2)设有曲面 $S:z=x^2+2y^2$ 和平面 $L:2x+2y+z=0$,则与 L 平行的 S 的切平面方程是________.

(3)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定,求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

(4)设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

(5)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$ ________.

二、(12 分)设 n 为正整数,计算 $I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$.

三、(14 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数,且有正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A$,$|f''(x)|\leqslant B$. 证明:对任意 $x\in[0,1]$,有 $|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$.

四、(14 分)(1)设一球缺高为 h,所在球的半径为 R. 证明:该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$,球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2)设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$ 被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω. 记球缺上的球冠为 Σ,方向指向球外,求第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

五、(15 分)设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续,严格单增,且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六、(15 分)设 $A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.

参 考 答 案

一、解　(1)由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根,$r=1$,故所求微分方程为 $y''-2y'+y=0$.

(2)设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上一点,则 S 在点 P_0 的切平面方程为

$$-2x_0(x-x_0)-4y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

由于该切平面与平面 L 平行,所以相应的法向量成比例,即存在常数 $k\neq 0$,使得

$$(-2x_0, -4y_0, 1) = k(2,2,1).$$

解得 $x_0=-1, y_0=-\dfrac{1}{2}, z_0=\dfrac{3}{2}$,所以所求切平面方程为

$$2x+2y+z+\frac{3}{2}=0.$$

(3)显然 $y(0)=1$,等式两端对 x 求导,得

$$1=\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\cdot(y'-1)\Rightarrow y'=\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]+1.$$

将 $x=0$ 代入可得 $y'=3$.

(4) $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=1-\frac{1}{(n+1)!}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1.$$

(5)由 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3.$$

故有 $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3+\alpha$,其中 $\alpha\to 0(x\to 0)$,即有

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x+3x}-1}{x}-1.$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x+3x}-1}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha+3)x}{x}-1=2.$$

二、解　$$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln x)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\mathrm{d}\ln x.$$

令 $\ln x=u$,则有

$$I=\int_{-2n\pi}^{0}|\sin u|\,\mathrm{d}u=\int_{0}^{2n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=4n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=4n.$$

三、证明　由泰勒公式,有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\quad \xi\in(0,x),$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\quad \eta\in(x,1).$$

上面两式相减,得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2.$$

由 $|f(x)|\leqslant A, |f''(x)|\leqslant B$,得

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}[x^2+(1-x)^2].$$

又 $x^2+(1-x)^2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 1,所以有

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}.$$

四、(1)证明　设球缺所在球表面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$,球缺的中心线为 z 轴,且设球缺所在的圆锥顶角为 2α.

记球缺的区域为 Ω，则其体积为

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_{R-h}^{R}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{R-h}^{R}\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积元素为 $\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$，所以球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh.$$

(2)**解**　记球缺的底面圆为 P_1，方向指向球缺外，且记

$$J=\iint_{P_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由高斯公式得 $I+J=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}V=3V(\Omega)$. 其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的体积.

由于平面 P 的正向单位法向量为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故

$$J=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{6}{\sqrt{3}}\sigma(P_1)=-2\sqrt{3}\sigma(P_1).$$

其中 $\sigma(P_1)$为 P_1 的面积，故

$$I=3V(\Omega)-J=3V+2\sqrt{3}\sigma(P_1).$$

由于球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$，故球缺的高度为 $h=|QD|=\sqrt{3}$，再由(1)所证并代入 $h=\sqrt{3},R=2\sqrt{3}$，得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi(2Rh-h^2)=33\sqrt{3}\pi.$$

五、解　考虑特殊情形：$a=0,b=1$. 下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

首先，$x_n\in[0,1]$. 即 $x_n\leqslant 1$，只要证明 $\forall\,\varepsilon>0(<1)$，$\exists\,N$，当 $n>N$ 时 $x_n>1-\varepsilon$. 由 f 在$[0,1]$上严格单增，就是要证明

$$f^n(1-\varepsilon)<[f(x_n)]^n=\int_0^1[f(x_n)]^n\mathrm{d}x.$$

由于 $\forall\,c\in(0,1)$，有

$$\int_c^1[f(x)]^n\mathrm{d}x>f^n(c)\cdot(1-c).$$

现取 $c=1-\frac{\varepsilon}{2}$，则 $f(1-\varepsilon)<f(c)$，即$\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0.$$

所以 $\exists\,N$，$\forall\,n>N$ 时有

$$\left[\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n<\frac{\varepsilon}{2}=1-c,$$

即

$$f^n(1-\varepsilon)<[f(c)]^n(1-c)\leqslant\int_c^1[f(x)]^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1[f(x)]^n\mathrm{d}x=f^n(x_n),$$

从而 $1-\varepsilon<x_n$，由 ε 的任意性得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

再考虑一般情形，令 $F(t)=f(a+t(b-a))$，由 f 在$[a,b]$上非负连续，严格单增，知 F 在$[0,1]$上非负连续，严格单增. 从而 $\exists\,t_n\in[0,1]$，使得 $F^n(t_n)=\int_0^1F^n(t)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$，即

$$f^n(a+t_n(b-a))=\int_0^1f^n(a+t(b-a))\mathrm{d}t.$$

记 $x_n=a+t_n(b-a)$，则有

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x, \quad 且 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a + (b-a) = b.$$

六、解 令 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,因为 $A_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}$, 所以有

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

记 $x_i = \dfrac{i}{n}$,则 $x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$,$A_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\mathrm{d}x$. 令

$$J_n = n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) = n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\mathrm{d}x,$$

由拉格朗日中值定理,$\exists\, \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$使得

$$J_n = n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)\mathrm{d}x.$$

记 m_i, M_i 分别是 $f'(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的最小值和最大值,则 $m_i \leqslant f'(\xi_i) \leqslant M_i$,故积分

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)\mathrm{d}x \text{ 介于 } m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\mathrm{d}x, M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\mathrm{d}x$$

之间,所以 $\exists\, \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)\mathrm{d}x = -f'(\eta_i)\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}.$$

于是,有 $J_n = -\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) = \lim_{n\to\infty} J_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}[f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}.$$

清华大学出版社 清华大学出版社 清华大学出版社