北京科技大学 2020–2021 学年 第 一 学期

微积分 AI 期末试卷（模拟卷解析）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

试卷卷面成绩						课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	四	小 计			
得 分								

得分

一、填空题 (本题共 6 小题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right]$ $\underline{\ -\dfrac{1}{6}\ }$.

解析 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}\left[\exp x \ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right) - 1\right]$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{2+\cos x+1-1}{3}\right)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left[\frac{3+(\cos x-1)}{3}\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left[1+\frac{(\cos x-1)}{3}\right]}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$ □

2. 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$ $\underline{\ 2\ }$.

解析 由于 $x \to 0$ 时，应用等价无穷小因替换与 Maclaurin 公式，有

$$\tan x - \sin x = \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x} - \frac{1}{2}x^3$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

则 $\tan(\tan x) = \tan\left(x + \dfrac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)$

$$= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)^3 + o\left(x^3\right) = x + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right),$$

$\sin(\sin x) = \sin\left(x - \dfrac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right)$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right) = x - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

于是 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right) - x + \frac{1}{3}x^3 - o\left(x^3\right)}{\frac{1}{2}x^3} = 2.$ □

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

3. 设 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right)+1, \\ y=2\arctan t-(1+t)^2 \end{cases}$ ，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}=$ $\underline{\dfrac{1+t^2}{4t}}$.

解析 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\dfrac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$,

则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right)\dfrac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}=\left(\dfrac{t}{2}\right)'\dfrac{1+t^2}{2t}=\dfrac{1+t^2}{4t}$. □

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+n\,\mathrm{e}\right)=$ $\underline{\ 1\ }$.

解析 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+n\mathrm{e}^{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{i}{n}\mathrm{e}^{i}=\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x$

$=\left[x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right]\Big|_2^1=1.$ □

5. 计算 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\sin 2x\right)|\sin x|\,\mathrm{d}\,x$ $\underline{\dfrac{16}{3}}$.

解析 易知被积函数周期为 π, 由 $\displaystyle\int_a^{a+mT}f(x)\,\mathrm{d}\,x=m\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 知

原式 $=4\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\sin 2x\right)|\sin x|\,\mathrm{d}\,x=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\sin 2x\right)|\sin x|\,\mathrm{d}\,x$

$\xlongequal{\text{偶倍奇零}}8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x\right)|\sin x|\,\mathrm{d}\,x=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,\mathrm{d}\,x\xlongequal{Wallis}8\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{3}.$ □

6. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0, \\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 则它的以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=5\pi$ 处收敛于 $\underline{\dfrac{\pi^2}{2}}$.

解析 由题意可知,$f(x)$ 在 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$ 处有间断点, 满足收敛定理,

$\therefore f(\pi)=\dfrac{1}{2}(f(\pi^+)-f(\pi^-))=\dfrac{1}{2}(-1+1+\pi^2)=\dfrac{1}{2}\pi^2.$

由周期性可知 $f(5\pi)=f(\pi)$, 即 $f(5\pi)=\dfrac{1}{2}\pi^2$. □

得分

二、单项选择题 (本题共 6 小题，每题 4 分，满分 24 分)

7. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$, 则 【 D 】

(A) $a=0,b=-2$ (B) $a=1,b=-2$ (C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$

解析 对 $\ln(1+x)$ 使用泰勒公式 $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1-a)x+\left(-\frac{1}{2}-b\right)x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=2,$$

为了极限存在，且极限值为 2：$\begin{cases}1-a=0\\ -\dfrac{1}{2}-b=2\end{cases}$，因此 $\begin{cases}a=1\\ b=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$，选 D. □

8. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且 $f'(0)=0$，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{|x|}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 【 A 】

(A) 取极大值　　(B) 取极小值

(C) 出现拐点　　(D) 既不是极值点, 也不是拐点

解析　由函数极限的部分保号性可知，当 $x\in\dot{U}(a\ \delta)$ 时 $\dfrac{f''(x)}{|x|}<0$，又 $|x|\geqslant0$，则有 $f''(x)<0$，又 $f'(0)=0$, 则由极值的第二充分条件可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，故选 A. □

9. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,\mathrm{d}\,x$, $N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3x+\cos^4x\right)\mathrm{d}\,x$,

$K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3x-\cos^4x\right)\mathrm{d}\,x$, 则有 【 C 】

(A) $M>N>K$　(B) $M>K>N$　(C) $N>M>K$　(D) $K>M>N$

解析　$M\xlongequal{\text{偶倍奇零}}0$, $N\xlongequal{\text{偶倍奇零}}2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x>0$, $K\xlongequal{\text{偶倍奇零}}2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x<0$

$\therefore K<M<N$, 故选 C. 则有 $K>M>N$. □

10. 设 $f(x)$ 有连续的一阶导数, $f(0)=0$, $f'(0)\neq0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\,\mathrm{d}\,t$, 且当 $x\to0$ 时, $F(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小, 则 $k=$ 【 B 】

(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

解析　由题须有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^k}=l$, 其中 l 为非零常数

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f(t)\,\mathrm{d}\,t}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t-\int_0^x t^2f(t)\,\mathrm{d}\,t}{x^k}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t+x^2f(x)-x^2f(x)}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t}{kx^{k-2}}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{k(k-2)x^{k-3}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)}{k(k-2)(k-3)x^{k-4}}=l\neq0\end{aligned}$$

则知 $x^{k-4}\sim x^0$, 即 $k=4$. □

11. 在曲线 $y=(x-1)^2$ 上的点 $(2,1)$ 处作曲线的法线, 由该法线、x 轴及该曲线所围成的区域为 $D(y>0)$, 则区域 D 绕 x 轴旋转一周所围成的几何体体积为

【 D 】

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{8\pi}{15}$ (D) $\frac{13\pi}{15}$

解析 该法线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2$, 该法线与 x 轴交点为 $(4,0)$

$V=\int_1^2 \pi(x-1)^4 \mathrm{d}\,x+\int_2^4\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2 \mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{3}=\frac{13\pi}{15}.$ □

12. 设 $u_n=(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 敛散性分别为 【 C 】

(A) 收敛; 收敛 (B) 发散; 发散 (C) 收敛; 发散 (D) 发散; 收敛

解析 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为交错级数, 用 Leibniz 审敛法可以知道其收敛;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 为正项级数, 用比较审敛法的极限形式可以做到其与调和级数共敛散性, 即发散. □

得分

三、计算题 (本题共 5 小题，每题 8 分，满分 40 分)

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{1+\mathrm{e}^{n(x-1)}}$, 求 $f(x)$, 并讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

解 根据题意, 有 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ \frac{a+b+1}{2}, & x=1 \\ ax+b, & x<1 \end{cases}$.

$f(x)$ 连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ 时,

即当 $a+b=\frac{1+a+b}{2}=1$ 时连续, 解得 $a+b=1$ 时 $f(x)$ 在 $x=1$ 时连续.

$f(x)$ 可导当且仅当 $f(x)$ 连续且 $f'_-(1)=f'_+(1)$ 时, 又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{a}{1}=a$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

于是仅当 $a=2, b=-1$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导. □

14. 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$, 求 $f(x)$.

解 令 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x=A,\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=B$, 则 $f(x)=x^2-Ax+2B$ 则有

$$\begin{cases}A=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}Ax^2+2Bx\Big|_0^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A+2B\\ B=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}Ax^2+2Bx\Big|_0^1=\frac{8}{3}-2A+4B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3A-6B=2\\ 3A-4B=\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}A=\dfrac{4}{3}\\ B=\dfrac{1}{3}\end{cases}$, 即 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$. □

15. 计算 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的最值.

解 $y'=\dfrac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm1$, 故在区间 $(0,+\infty)$ 上函数只有一个驻点 $x=1$

因 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 单侧极限值最小

故该函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内没有最小值.

当 $0\leqslant x<1$ 时 , $f'(x)>0$; 当 $x>1$ 时 , $f'(x)<0$, 故 $x=1$ 为函数的极大值点

因而也是函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值点，其最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$. □

16. 设 $y(x-y)^2=x$, 求积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}\,x$.

解 由于 x 和 y 都不能够进行相互表示，所以考虑引入参数方程.

令 $x-y=t$, 则由题能够很快得出 $x=\dfrac{t^3}{t^2-1},y=\dfrac{t}{t^2-1}$, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}\,x&=\int\frac{1}{\frac{t^3}{t^2-1}-\frac{3t}{t^2-1}}\,\mathrm{d}\left(\frac{t^3}{t^2-1}\right)=\int\frac{t}{t^2-1}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right|+C\end{aligned}$$

即 $\displaystyle\int\frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right|+C$. □

17. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n\,(n+1)}x^n$ 的和函数 $f(x)$.

解 首先求收敛区间:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)\,(n+2)}\cdot\frac{n\,(n+1)}{n-1}=1$$

则知, 当 $x<1$ 时, 原级数绝对收敛, 当 $x>1$ 时, 原级数发散.

当 $x=1$ 时, 级数发散, 当 $x=-1$ 时, 级数收敛, 因此收敛区间为 $[-1,1)$.

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)}x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \\
&= \frac{2}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \frac{2}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t - \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{x}\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}t^n\,\mathrm{d}t - \int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}t^{n-1}\,\mathrm{d}t + S(0) = \frac{2}{x}\int_0^x\frac{t^2}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x\frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{2}{x}\int_0^x(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^x 1\mathrm{d}t \\
&= \left(1-\tfrac{2}{x}\right)\ln(1-x) - 2, (x\in[-1,1), \text{且} x\neq 0 \text{时})
\end{aligned}
$$

另外, $S(0)=0$. □

得分

四、证明题 (本题共 2 小题，每题 6 分，满分 12 分)

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明在区间 $[0,a]$ 上存在 ξ，使

$$f(\xi)=f(\xi+a).$$

证明 作辅助函数 $\varphi(x)=f(x+a)-f(x)$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，因此 $f(x+a)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, 于是 $\varphi(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续.

$$
\begin{cases}
\varphi(0)=f(a)-f(0) \\
\varphi(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)=-\varphi(0)
\end{cases}
$$

若 $f(0)=f(a)$, 则可取 $\xi=0\in[0,a]$, 使 $f(0)=f(a)$.
若 $f(0)\neq f(a)$, 则 $\varphi(0)$ 与 $\varphi(a)$ 异号, 由零点定理, 必定存在 $\xi\in(0,a)$, 使 $\varphi(\xi)=0$, 即

$$f(\xi)=f(\xi+a)$$

证毕. □

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f(a)=a$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$, 求证: 在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1.$$

证明 由

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\Rightarrow\int_a^b(f(x)-x)\,\mathrm{d}\,x=0$$

对上面的右式应用积分中值定理, $\exists c\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b(f(x)-x)\,\mathrm{d}\,x=(f(c)-c)(b-a)=0$$

于是 $f(c)-c=0(a<c<b)$. 取辅助函数

$$F(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)-x)$$

$\exists\xi\in(a,c)\subset(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 因

$$F'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(f'(x)-1-f(x)+x\right)$$

所以 $F'(\xi)=\mathrm{e}^{-\varepsilon}\left(f'(\xi)-1-f(\xi)+\xi\right)=0$, 即

$$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

证毕. $\square$