北京科技大学 2020-2021 学年 第 一 学期

概率论与数理统计 A 期末试卷（模拟）

院（系）________班级________学号________姓名________

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.5, & -1\le x<2\\ 0.8, & 2\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$，则$P(-1<X\le 3)=$________

2. 已知X和Y是相互独立的随机变量，其分布函数分别为$F_1(x)$、$F_2(y)$，则$Z=min(X,\ Y)$的分布函数是________

3. 设事件A、B是相互独立的，且满足$P(A)<\frac{1}{2}$，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=\frac{3}{16}$，则$P(A)=$________

4. 设随机变量X和Y的数学期望分别为-2和 2，方差分别为1 和 4，而相关系数为0.5，则根据切比雪夫不等式$P\{|X+Y|\ge 6\}\le$________

5. 某同学在做一道有 4 个选项的单项选择题时，如果不知道正确答案就随机猜测，若学生知道正确答案和随机猜测的概率均为 0.5，现从卷面上看这道题答对了，则学生确实知道正确答案的概率是________

6. 设随机变量 X 与 Y 是相互独立的，且都服从区间 [0, 2] 上的均匀分布，则$P(X^2+Y^2\le 1)=$________

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设二维随机变量$(X,\ Y)\sim N(1,2,1,2,0.5)$，则下面结论正确的是（　　）

(A). X和Y一定不独立　　(B). X和Y一定相互独立

(C). X和Y一定不相关　　(D). X和Y可能独立，也可能不独立

2. 设随机变量X的概率密度函数是$f(x)$，且有$f(x)=f(-x)$，$F(x)$是X的分布函数，则对于任意的实数a，有（　）

(A). $F(-a)=1-\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$　　(B). $F(-a)=1-\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

(C). $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$　　(D). $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

3. 对正态总体的数学期望μ进行假设检验，如果在显著性水平 0.01 之下拒绝零假设H_0： $\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.05 下，下列结论成立的是（　）

(A). 必须接受H_0　　(B). 必须拒绝H_0

(C). 可能接受也可能拒绝H_0　　(D). 不接受也不拒绝H_0

4. 已知随机变量$X\sim N(1,\ 9)$，$Y\sim N(0,\ 16)$，相关系数$\rho_{XY}=-0.5$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，则$\rho_{XZ}=$（　）

(A). 1　　(B). $-\frac{1}{5}$　　(C). 0　　(D). $\frac{3}{4}$

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，$X\sim U(0,\ \theta)$，则下列估计量$\hat{\theta}$是θ的无偏估计的是（　）

(A). $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n$　　(B). $\sum_{i=1}^{n} X_n$　　(C). $\hat{\theta}=X_n$　　(D). $\hat{\theta}=2X_n$

6. X_i（$i=0,1,\dots,n$）为服从参数为λ（$\lambda>1$）的指数分布随机变量序列并且相互独立，其概率密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，下列各式与标准正态分布函数相

等的是（   ）

(A). $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right)$ (B). $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right)$

(C). $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{\lambda}} \le x\right)$ (D). $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right)$

三、解答题（共 64 分）

1.（本题 8 分） 设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，若 $BC=\emptyset$，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}$，求 $P(C)$.

2.（本题 14 分） 设X_1，X_2，$\cdots$，X_n（$n>2$）为相互独立的随机变量，且都服从$X\sim N(0,1)$，令$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Y_i=X_i-\overline{X}, i=1,2,\ldots,n$，求：

（1）Y_i的方差$D(Y_i)$ （2）$cov(Y_1,Y_n)$

3.（本题 14 分）设X和Y是两个相互独立的随机变量，$X \sim U(0,\ 2)$，$Y \sim U(0,\ 1)$.

(1)求X和Y的联合概率密度.

(2)求$Z = X + Y$的概率密度函数.

4.（本题 14 分） 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为:

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$，其中 θ，m 为参数且大于零。

（1）求概率$P(T>t)$与$P(T>S+t\,|\,T>S)$，其中$S>0$，$T>0$.

（2）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 t_1，$t_2 \dots t_n$，若m已知，求θ的极大似然估计值.

5.（本题 14 分）设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机的抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩 66.5 分，样本标准差 15 分.

（1）在置信度为 0.9 的情况下，求全体考生平均成绩的置信区间。

（2）在显著性水平为 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程。

（注：$t_{0.05}(35)=1.6896, t_{0.025}(35)=2.0301, t_{0.05}(36)=1.6883, t_{0.025}(36)=2.0281$）