北京科技大学 2014--2015 学年第二学期

工科数学分析 II 期中试卷

院(系)______ 班级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

题号	一	二	三	四	课程考核成绩
得分					

说明：1、要求正确地写出主要计算或推导过程，过程有错或只写答案者不得分；

2、考场、学院、班、学号、姓名均需写全，不写全的试卷为废卷；

3、涂改学号及姓名的试卷为废卷；

4、请在试卷上答题，在其它纸张上的解答一律无效.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

一、填空题(本题共9小题，每小题4分，满分36分)

1. 已知不共面的三向量 $\vec{a}=(1,0,-1),\vec{b}=(2,3,1),\vec{c}=(0,1,2)$ 及 $\vec{d}=(0,0,3)$，则用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的线性组合表示的向量 $\vec{d}=$________.

2. 两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积为________

3. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________

4. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$，则该向量的起点 A 的坐标为________

5. 曲面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的法线方程为________

6. 将三次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}z$ 化为在柱面坐标形式下的三次积分为________.

7. 函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$($a,b$ 为正常数)在这点的内法线方向的方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=$________

8. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$ 的值为________.

9. 若向量 $\vec{a} \neq 0$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|-\left|\vec{a}-x\vec{b}\right|}{x}=$ ________

二、单选题(本题共9小题, 每小题4分, 满分36分, 请将正确答案的字母填在题后的括号内)

10. 已知 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数存在, 则【　　　】.

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.　(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

(C) $f(x,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.　(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有任意方向的方向导数.

11. 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成区域的面积可用定积分 表示为【　　　】.

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.　(C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

12. 函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，则 $\mathrm{grad}\, f(1,-1,2)=$【　　　】.

(A) $(1,2,3)$.　(B) $(2,-2,4)$.　(C) $(1,-2,3)$.　(D) $(-2,2,4)$.

13. 曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程为【　　　】.

(A) $16x+9y-z-10=0$.　(B) $16x+9y-z-2=0$.

(C) $16x+9y-z-4=0$.　(D) $16x+9y-z-24=0$.

14. 设 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v=$【　　　】.

(A) $\dfrac{\pi}{7}$.　(B) $\dfrac{\pi}{8}$.　(C) $\dfrac{\pi}{9}$.　(D) $\dfrac{\pi}{10}$.

15. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则二次积分 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 等于【　　　】.

(A) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

16. 设 $f(x,y)=x^4\ln(y+\sqrt{1+y^2})$，且 $D=\left\{(x,y)\big|\,|x|+|y|\le 2\right\}$，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$

【　　　】.

(A) -1. (B) 1. (C) 0. (D) 2.

17. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{2x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点 $O(0,0)$ 处【　　】.

(A) 连续, 偏导数存在.　(B) 连续, 偏导数不存在.

(C) 不连续, 偏导数存在.　(D) 不连续, 偏导数不存在.

18. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$, 则二重积分 $\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$【　　】.

(A) $\dfrac{3}{4}\pi$. (B) $\dfrac{6}{7}\pi$. (C) $\dfrac{6}{5}\pi$. (D) $\dfrac{1}{2}\pi$.

三、解答题(本题共2小题, 每题10分, 满分20分)

19. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

20. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

四、综合题(满分8分)

21. 设 $f(x)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 $\Omega: 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2$ (h 为正常数)，求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$.

21. 设 $u=f(x,y,xyz)$，函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\int_{xy}^{z} g(xy+z-t)\,\mathrm{d}t=e^{xyz}$ 确定，其中 f 可微，g 连续，证明：$x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=xf_1'-yf_2'$。

证明：$\lambda=xy+z-t \quad d\lambda=-dt$

当 $t=z$ ，当 $t=xy$

$\lambda=xy \quad \lambda=z$

∴原方程变为

$$\int_{xy}^{z} g(\lambda)\,d\lambda=e^{xyz}$$

对 x, y 分别取偏导

$$g(z)\frac{\partial z}{\partial x}-yg(xy)=e^{xyz}\left(yz+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot xy\right)$$

$$g(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-xg(xy)=e^{xyz}\left(xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

整理得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(g(z)-xy\cdot e^{xyz}\right)=yg(xy)+e^{xyz}y\cdot z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(g(z)-xy\cdot e^{xyz}\right)=xg(xy)+x\cdot z\,e^{xyz}$$

$$\therefore x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\therefore f_3'x^2y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=f_3'xy^2\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=x\left[f_1'+f_3'\left(yz+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot xy\right)\right]-y\cdot\left[f_2'+f_3'\left(xz+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot xy\right)\right]$$

$$=xf_1'-yf_2'+f_3'x^2y\frac{\partial z}{\partial x}-xy^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot f_3'$$

$$=xf_1'-yf_2'$$

即原命题得证。

2014—2015 工科数学分析 II 参考答案

一、填空题

1. $2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$　　2. $16R^2$　　3. $2f_1'-f_2'+2f_{11}''+f_{12}''-f_{22}''$　　4. $(-2,3,0)$

5. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$　　6. $I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta}d\rho\int_0^{\sqrt{3}\rho}f(\sqrt{z^2+\rho^2})\rho dz$　　7. $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$

8. $e^{-\frac{1}{2}}$　　9. $\frac{2\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$

10. CABDD　BCCA

19.

解：设曲线 C 上任一点 (x,y,z)，距离 xOy 面距离 $d=|z|$

∴令 $f(x,y,z)=d^2=z^2$

约束条件为 $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2=0$

$g(x,y,z)=x+y+3z-5=0$

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda g(x,y,z)+\mu\varphi(x,y,z)$

取极值 则

$$\begin{cases}2\mu x+\lambda=0\\ 2\mu y+\lambda=0\\ 2z+3\lambda-4\mu z=0\\ x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z-5=0\end{cases}$$

① $\begin{cases}x_1=1\\ y_1=1\\ z_1=1\end{cases}$　　② $\begin{cases}x_2=-5\\ y_2=-5\\ z_2=5\end{cases}$

~~故~~ 在 $(-5,-5,5)$ 处 $f(x,y,z)$ 取极大值

在 $(1,1,1)$ 处 $f(x,y,z)$ 取极小值

∴在 C 上距离 xOy 面最远的点是 $(-5,-5,5)$

最近的点是 $(1,1,1)$

20.

解: $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+2y+3z)\,dz$.

$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(x+2y)(1-x-y)+\frac{3}{2}(1-x-y)^2\right]dy$

$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[-y^2-2y+(1-x)^2+2(1-x)\right]dy$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3-(1-x)^2+(1-x)^3+2(1-x)^2\right]dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{2}{3}(1-x)^3+(1-x)^2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{3}t^3+t^2\right)dt$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$

21.

解: 在柱坐标下进行三重积分

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left[z^2+f(x^2+y^2)\right]dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho\cdot d\rho\int_0^h\left[z^2+f(\rho^2)\right]dz$.

$=2\pi\cdot\int_0^t\rho\left[\frac{1}{3}h^3+f(\rho^2)h\right]dt$.

由变限积分求导法则

$\frac{dF}{dt}=2\pi\cdot h\,t\left[\frac{1}{3}h^2+f(t^2)\right]$

$=2\pi h t\left[\frac{1}{3}h^2+f(t^2)\right]$