第四届全国大学生数学竞赛预赛(2012 年非数学类)

试　　题

一、解答下列各题(本题共 5 个小题,每题 6 分,共 30 分)(要求写出重要步骤)

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2,使其中一个平面过点$(4,-3,1)$.

3. 已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$,且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$,确定常数 a 和 b,使函数 $z=z(x,y)$满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

4. 设函数 $u=u(x)$连续可微,$u(2)=1$,且 $\int_L(x+2y)u\mathrm{d}x+(x+u^3)u\mathrm{d}y$ 在右半平面与路径无关,求 $u(x)$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

二、(10 分)计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mid\sin x\mid\mathrm{d}x$.

三、(10 分)求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解,精确到 0.001.

四、(12 分)设函数 $y=f(x)$的二阶导数连续,且 $f''(x)>0,f(0)=0,f'(0)=0$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$,其中 u 是曲线 $y=f(x)$在点 $P(x,f(x))$处的切线在 x 轴上的截距.

五、(12 分)求最小的实数 C,使得满足 $\int_0^1\mid f(x)\mid\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\leqslant C$.

六、(12 分)设 $F(x)$为连续函数,$t>0$. 区域 Ω 是由抛物线 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$所围起来的部分. 定义三重积分

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

求 $F(t)$的导数 $F'(t)$.

七、(14 分)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数.

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

参考答案

一、1. **解**　因为　$(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$,而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!)\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),\text{且}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0,\quad\text{故}\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1.$$

2. **解**　过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0,$$

即

$$(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0,$$

若平面 π_1 过点$(4,-3,1)$,代入得 $\lambda+\mu=0$,即 $\mu=-\lambda$,从而 π_1 的方程为

$$3x+4y-z+1=0,$$

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直,则

$$3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+1(3\lambda+4\mu)=0.$$

解得 $\lambda=-3\mu$,从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$.

3. **解**　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right]$,　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right]$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right].$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right].$$

若使$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$,只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0,$$

即 $a=b=1$.

4. **解**　由$\dfrac{\partial}{\partial x}(u(x+u^3))=\dfrac{\partial}{\partial y}((x+2y)u)$得$(x+4u^3)u'=u$,即$\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$,方程通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4u\,du+C\right)=u(2u^2+C),$$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$,故 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

5. **解**　因为当 $x>1$ 时,

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t-1}}\leqslant 2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\quad(x\to\infty),$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0$.

二、解　由于

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx,$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx=\frac{1}{5}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi}),$$

所以

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi}=\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}},$$

当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx\leqslant\int_0^{x} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx<\int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx,$$

令 $n\to\infty$,由夹逼准则,得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\,\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

注　如果最后不用夹逼准则,而用

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx=\frac{1}{5}\,\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1},$$

需先说明 $\int_0^{\infty} e^{-2x}\,|\sin x|\,dx$ 收敛.

三、解　由泰勒公式有

$$\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2,\quad 0<\theta<1,$$

令 $t=\frac{1}{x}$ 得 $\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2}$,代入原方程得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501,\text{即 } x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right),$$

由此知 $x>500$,$0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$,

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{\theta}{x}\leqslant\frac{1}{1000}=0.001,$$

所以,$x=501$ 即为满足题设条件的解.

四、解　曲线 $y=f(x)$ 在点 $p(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$,则有 $X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$,由此 $u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$,且有

$$\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{u}{x}&=1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}\\&=1-\lim_{x\to0}\frac{\frac{f''(0)}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\,\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

五、解　由于 $\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 |f(t)|\,2t\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t=2$.

另一方面，取 $f_n(x)=(n+1)x^n$，则 $\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$，而

$$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 tf_n(t)\mathrm{d}t=2\,\frac{n+1}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2\quad(n\to\infty),$$

因此最小的实数 $C=2$.

六、解法1　记 $g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则 Ω 在 xy 面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant g$.

在曲线 $S:\begin{cases}x^2+y^2=z,\\ x^2+y^2+z^2=t^2\end{cases}$ 上任取一点 (x,y,z)，则原点到该点的射线和 z 轴的夹角为 $\theta_t=\arccos\dfrac{z}{t}=\arccos\dfrac{g}{t}$. 取 $\Delta t>0$，则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$. 对于固定的 $t>0$，考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$，这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 θ_t 之间. 我们使用球坐标变换来做这个积分，由积分的连续性可知，存在 $\alpha=\alpha(\Delta t)$，$\theta_{t+\Delta t}\leqslant\alpha\leqslant\theta_t$，使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\sin\theta\mathrm{d}r,$$

这样就有 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha)\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r$. 而当 $\Delta t\to 0^+$ 时

$$\cos\alpha\to\cos\theta_t=\frac{g(t)}{t},\ \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\to t^2f(t^2).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2f(t^2)=\pi(2t+1-\sqrt{1+4t^2})tf(t^2).$$

当 $\Delta t<0$ 时，考虑 $F(t)-F(t+\Delta t)$ 可以得到同样的左导数. 因此

$$F'(t)=\pi(2t+1-\sqrt{1+4t^2})tf(t^2).$$

解法2　令

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}\qquad 则\ \Omega:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant r\leqslant a,\\ r^2\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-r^2},\end{cases}$$

其中 a 满足 $a^2+a^4=t^2$，即 $a^2=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$. 故有

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f(r^2+z^2)\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f(r^2+z^2)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r,$$

从而有

$$F'(t)=2\pi\left(a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f(a^2+z^2)\mathrm{d}z\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r\right),$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2}=a^2$，第一个积分为0，我们得到

$$F'(t)=2\pi f(t^2)t\int_0^a r\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=-\pi tf(t^2)\int_0^a\frac{\mathrm{d}(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}},$$

所以 $F'(t)=2\pi tf(t^2)(t-a^2)=\pi tf(t^2)(2t+1-\sqrt{1+4t^2})$.

七、证 (1)设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$,则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geqslant N$,有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\qquad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},\qquad a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right),$$

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$,则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geqslant N$,有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$,于是

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.