北京科技大学 2012--2013 学年第一学期

线性代数 试卷（A 卷）

院（系）__________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩 70%	平时成绩占 30%	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												
评阅												
审核												

注意事项：

（1）本试卷共八道大题，共八页，请认真核对。

（2）正确填写学院、班级、姓名、学号等个人信息，空填或错填的试卷为无效试卷。

（3）请使用钢笔、签字笔或者圆珠笔答卷，使用铅笔答卷无效。

得 分

一、填空题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^T\right|=$____________________。

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{4\times3}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，且矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&0&1\\0&1&3\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=$____________________。

3. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{bmatrix}$，其中 $abc\neq0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$____________________。

4. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 若向量 $\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$ 也方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\lambda_1+\lambda_2=$____________________。

5. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1，1，2，则矩阵 $\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ 的特征值为____________________。

得 分

二、选择题（本题共 15 分，每小题 3 分）

1. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ 的充分必要条件是____________________。

(A) $AB = E$ (B) $BA = E$ (C) $AB = BA$ (D) $A = O$ 或 $B = O$

2. $\begin{vmatrix} 99 & 100 & 203 \\ 202 & 200 & 397 \\ 298 & 300 & 601 \end{vmatrix} =$____________________。

(A)2000 (B)-2000 (C)2300 (D)-2300

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有____________________。

（A） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关； （B） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关；

（C） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关； （D） $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关。

4. 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$，其中 A，B 均为 $m \times n$ 矩阵，现有四个命题：

①若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解，则秩 $(A) \geq$ 秩 (B)；

②若秩 $(A) \geq$ 秩 (B)，则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解；

③若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，则秩 $(A) =$ 秩 (B)；

④若秩 $(A) =$ 秩 (B)，则 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解。

以上命题中正确的是__________。

（A）①② （B）①③ （C）②④ （D）③④

5. 方阵 A 与 B 相似的充分必要条件是__________。

（A） A 与 B 有相同的行列式； （B）存在可逆矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP = B$

（C） A 与 B 有相同的特征值； （D）存在可逆矩阵 P，使得 $AP = PB$。

得 分

三、（本题 12 分，每小题 6 分）

1．计算行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$。

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $|\boldsymbol{A}|=\mathbf{1}$，$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3\right)$，计算$|\boldsymbol{B}|$。

得 分

四、（本题 12 分）已知 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，且满足 $2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是三阶单位矩阵。（1）证明：矩阵 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；（2）若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

得 分

五、（本题 12 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大线性无关组，并将向量组中的其余向量用该极大线性无关组线性表示。

得 分

六、（本题 12 分）设非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases},$$

a,b 取何值时，该方程组有唯一解、无解、有无穷多解？ 并在有无穷多解时，求出其通解。

得 分

七、（本题 12 分）用正交变换化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2$ 为标准形，并写出所作的正交变换。

得 分

八、（本题 10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶正交矩阵，证明：

（1）$\left|\boldsymbol{A}\right| = \pm 1$；

（2）设 $\boldsymbol{B}$ 也是 $\boldsymbol{n}$ 阶正交矩阵，若 $\left|\boldsymbol{A}\right| + \left|\boldsymbol{B}\right| = 0$，则 $\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right| = 0$。

北京科技大学 2014-2015 学年 第 一 学期

线性代数 A 期末试卷 答案

一、 填空题（本题共 15 分，每空 3 分）

1、2^{n+1}　　2、2　　3、$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$　　4、0　　5、$\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

二、 选择题（本题共 15 分，每题 3 分）

1-5　CCABD

三、 计算行列式

答案　(1) $\left(a^2-b^2\right)^2$　　(2) $|B|=\left|A\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\right|=|A|\left|\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\right|=1\times3\times\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=6.$

解析　略

四、 解矩阵方程

答案　(1) $\frac{1}{4}B$　　(2) $\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

解析　略

五、 求极大无关组并表示其余向量

答案　(1) $r=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$

解析　略

六、 对参数分类讨论非齐次线性方程组解的情况并求通解

答案　(1) $a=1,b\neq-1$时无解，$a=3,b\neq0$时无解.

(2) $a=1,b=-1$ 时有无穷解， $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$a=3,b=0$ 时有无穷解， $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-2\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$.

(3) 其余情况均只有一解.

解析　略

七、　正交变换化二次型为标准型并写正交矩阵或正交变换

答案　(1)　$f(y_1,y_2,y_3)=2y_2^2+2y_3^2$　　　(2) $x=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}y$

解析　略

八、　证明题

证明　(1)　$AA^{\mathrm{T}}=E$，则 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=|A|\left|A^T\right|=|E|=1$，又 $|A|=\left|A^T\right|$，则 $|A|=\pm1$.

(2) $|A+B|=\left|A\left(B^{-1}+A^{-1}\right)B\right|=|A|\left|\left(B^{-1}+A^{-1}\right)\right||B|$

因为 A,B 是正交矩阵，则有 $|A|=\pm1,|B|=\pm1,A^{-1}=A^T,B^{-1}=B^T$

又 $|A|+|B|=0$，则有 $|A||B|=-1$

即有 $|A+B|=-\left|B^{-1}+A^{-1}\right|=-\left|B^T+A^T\right|=-\left|(B+A)^T\right|=-|B+A|$

则证得 $|A+B|=0$.