第八届中国大学生数学竞赛决赛三、四级试卷

(数学类，2017 年 3 月 18 日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 150 分

一、填空题 (本题满分 20 分, 共 4 小题, 每小题 5 分)

1. 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 则行列式 $\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1\\\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{vmatrix}=$ __________

   答案：0

2. 设 a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足 __________

   答案：$a>27$ or $a<-37$

   解: 记: $f(x)=3x^4-8x^3-30x^2+72x+a$ 故

$$f'(x)=12x^3-24x^2-60x+72=12(x^3-2x^2-5x+6)=12(x-1)(x-3)(x+2)$$

   f 在 -2 和 -3 取得极小值 $152+a$ 和 $-27+a$, f 在 1 取得极大值 $37+a$.
   因此, 当且仅当 $a>27$ 或 $a<-37$ 时方程有虚根 ♢

3. 计算曲面积分 $I=\iint_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ($a>0$ 为常数),
   其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=$ __________

   答案：$-\dfrac{\pi}{2}a^3$

   解: 令曲面 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\ z=0\end{cases}$, 取下侧, 则 $S_1\cap S$ 为闭下半球的内侧.
   令其内部区域为 Ω, 令 D 为 xOy 平面上的圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$, 则利用高斯公式, 得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a}\left\{\iint_{S\cup S_1}-\iint_{S_1}\left[ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\right\}\\&=\frac{1}{a}\left[-\iiint_\Omega(3a+2z)\mathrm{d}v+\iint_D a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{a}\left[-2\pi a^4-2\iiint_\Omega z\mathrm{d}v+\pi a^4\right]\\&=-\pi a^3-\frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\mathrm{d}z\\&=-\frac{\pi}{2}a^3\end{aligned}$$

   ♢

4. 记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素.
   则集合 $\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 = __________

   答案：$-\dfrac{1}{2}$

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 与曲线 C. 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

解: 交线为抛物线或椭圆 ……………………………………(5 分)

1) 如果平面 P 平行于 $z-$ 轴, 则相交曲线 $C=\Gamma\cap P$ 可以经过以 $z-$ 为旋转轴的旋转, 使得 P 平行于 $yz-$ 平面, C 的形状不变. 所以可不妨设 P 的方程为 $x=c$, 交线 C 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(c^2+y^2)$. 将 C 投影到 $yz-$ 平面上, 得到抛物线 $z-\dfrac{c^2}{2}=\dfrac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 $z-$ 轴, 故交线为抛物线. ……(10 分)

2) 如果平面 P 不平行于 $z-$ 轴, 我们设 P 的方程为 $z=ax+by+c$. 代入旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(c^2+y^2)$, 得到

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+2c:=\mathrm{R}^2$$

将 $C=\Gamma\cap P$ 垂直投影到 $xy-$ 平面, 得到圆周 $(x-a)^2+(y-b)^2=\mathrm{R}^2$. 令 Q 是以这个圆为底的圆柱, 则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或下放置半径为 R 的球体, 它与平面 P 相切于 F_1 和 F_2, 与圆柱 Q 相交于圆 D_1 和圆 D_2. 对 $C=\Gamma\cap P$ 上任意一点 A, 过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1, 交圆 D_2 于 B_2. 则线段 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ 为定长. 这时, 由于球的切线长相等, 得到

$$|\mathrm{AF}_1|+|\mathrm{AF}_2|=|\mathrm{AB}_1|+|\mathrm{AB}_2|=|\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2|$$

为常数, 故直线 C 为椭圆. ……………………………………(15 分)

◇ ◇

三、**证明题** (本题 15 分) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足: 秩 $(\boldsymbol{ABA})=$ 秩 $(\boldsymbol{B})$. 证明: $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证明设

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是可逆方阵, $\boldsymbol{B}_1$ 是 r 阶可逆方阵, 则有 ……………………………………(5 分)

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\quad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$

当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{ABA}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}_1=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$ 可得, 存在矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_1$

从而有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$$

因此, $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似. ……………………………………(15 分)

□

四、(本题 20 分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi(x)\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall m,k\geqslant 0$ 成立 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$. 若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义 $\hat{f}(x):=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\quad(\forall x\in\mathbb{R})$.

证明: $\hat{f}(x)\in\mathscr{S}$, 且

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

证明. 由于 $f \in \mathscr{S}$, 因此存在 $M_1 > 0$ 使得

$$|2\pi ixf(x)| \leqslant \frac{M_1}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

这样, $\int_{\mathbb{R}} (-2\pi iy)f(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛 .... (2 分)
从而可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi iyf(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$$

.... (4 分)

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi iy)^n f(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

而利用分部积分立即得到

$$(f^{(n)})^\wedge(x) = (2\pi ix)^n\hat{f}(x), \quad \forall n \geqslant 0 \tag{2}$$

结合 (1)—(2) 并利用 $f \in \mathscr{S}$, 可得对任何 $m, k \geqslant 0$.

$$x^m\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}y^m}\left((-2\pi iy)^k f(y)\right)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$$

在 $\mathbb{R}$ 上有界, 从而 $\hat{f}(x) \in \mathscr{S}$. 于是, $\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$ 收敛, 而

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y &= \int_{-A}^{A}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{2\pi i(x-t)y}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-A}^{A}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_{-A}^{A}f(x-t)e^{2\pi ity}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\frac{\sin(2\pi At)}{\pi t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\sin(2\pi At)\mathrm{d}t + f(x)
\end{aligned} \tag{3}$$

.... (15 分)

由 $f \in \mathscr{S}$ 易得积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\mathrm{d}t$ 收敛, 从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t}\sin(2\pi At)\mathrm{d}t = 0 \tag{4}$$

结合 (3) 和 (4) 即得结论. .... (20 分)

□

五、(本题 10 分) 设 $(F, +, \cdot)$ 是特征为 $p(p \neq 0)$ 的域. 1 和 0 分别为 F 的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F, +, \cdot)$ 到其乘法半群 $(F, \cdot)$ 的同态, 即 $\forall x, y \in F$ 有 $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$.
证明: φ 要么将 F 的所有元映照为 0, 要么将 F 的所有元映照为 1

证明. 假定 φ 不恒为 0, 则 $\exists a \in F$ 使得 $\varphi(a) \neq 0$ ······(2 分)
于是由 $\varphi(0+a)=\varphi(a)$ 知 $\varphi(a)=\varphi(0)\varphi(a)$ 导致 $\varphi(0)=1$ ······(5 分)
进而 $\forall x \in F$ 有

$$1=\varphi(0)=\varphi\underbrace{(x+\cdots+x)}_{p}=(\varphi(x))^p$$

$$(\varphi(x))^p-1=0$$

注意到 $ChF=p, p$ 为素数, 故有 $\forall a,b \in F$

$$(a+b)^p=a^p+b^p$$

进而

$$(a-b)^p=a^p-b^p$$

结果由 $(\varphi(x))^p-1=0$ 立得

$$(\varphi(x)-1)^p=0$$

$\varphi(x)=1$. 证毕 ······(10 分)

□

六、(本题 10 分)

1) 设 E 是三分 $Cantor$ 集. 证明：$\chi_E(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

2) 设 $E \subset [0,1]$. 证明: $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差的充要条件是 E 的边界点集是有限集

1) **答**. $\chi_E(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.
作 $[0,1]$ 的分划 $\Delta: 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n<1$
其中: $x_0 \in E, x_2 \in E, \cdots, x_n \in E; x_1 \notin E, x_3 \notin E, \cdots, x_{n-1} \notin E$.
构造如下: $\forall n \geqslant 1$, 先取 $x_0=0,\ x_2,x_4,\cdots,x_{n-2} \in E,\ x_n=1$
由 E 的构造知: $[x_0,x_2],[x_2,x_4],\cdots,[x_{n-2},x_n]$ 中有无穷多个不属于 E 的点
取 $x_1 \in (x_0,x_2)/E, x_3 \in (x_2,x_4)/E, \cdots, x_{n-1} \in (x_{n-2},x_n)/E$. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})|=n$
当 $n \to \infty$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})| \to \infty$, 即 $\bigvee\limits_{0}^{1}(\chi_E(x))=+\infty$ ······(3 分)

□

2) **证明**. $\Rightarrow$) 反证法. 假设 E 有无穷多边界点 $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$.
$\forall n>1$, 造 $[0,1]$ 的分划 Δ 如下: 取 $x=0$, 在 $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ 中任取 n 个点按大小排列记为 $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$.
由边界点的定义: $\forall \varepsilon>0, U(c_i,\varepsilon)\cap E \neq 0$ 且 $U(c_i,\varepsilon)\cap \mathscr{C}E \neq \emptyset\,(1\leqslant i \leqslant n)$,
对 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}\min\{c_{i+1}-c_i; i=1,2,\cdots,n-1\}$,
若 $x_0 \in E$, 取 $x_1 \in (x_0,c_1+\varepsilon)\cap\mathscr{C}E, x_2 \in (x_1,c_2+\varepsilon)\cap E, x_3 \in (x_2,c_3+\varepsilon)\cap\mathscr{C}E, x_4 \in (x_3,c_4+\varepsilon)\cap E, \cdots$
若 $x_{n-2} \in \mathscr{C}E$, 则取 $x_{n-1} \in (x_{n-2},c_{n-1}+\varepsilon)\cap E,\ x_n=1$
于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})| \geqslant n-1$, 当 $n \to \infty$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})| \to \infty$,
即 $\bigvee\limits_{0}^{1}(\chi_E(x))=+\infty$, 与 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界变差矛盾, 故假设不真 ······(7 分)

$\Leftarrow$) 设 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 是 E 的边界点, m 有限.

对任意 $[0,1]$ 的分划 $\Delta: 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n<1$,
n 个小区间 $[x_i,x_{i+1}]\,(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 中至多 m 个含有 $\{c_i\}_{i=1}^m$ 的点,
也即 $[x_i,x_{i+1}]\,(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 中至多 m 个小区间中既有 E 的点同时也有 $\mathscr{C}E$ 的点.
由 $\chi_E(x)$ 的定义有

$$|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})|=\begin{cases}1\,, & x_i\in E, x_{i-1}\in\mathscr{C}E \text{ or } x_i\in\mathscr{C}E, x_{i-1}\in E,\\ 0\,, & x_i,x_{i-1}\in E \text{ or } x_i,x_{i-1}\in\mathscr{C}E.\end{cases}$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^n|\chi_E(x_i)-\chi_E(x_{i-1})|\leqslant m\Longrightarrow\bigvee\limits_0^1(\chi_E(x))\leqslant m<\infty$ .... (10 分)

□

七、(本题 10 分) 设 S 为三维欧式空间的一张连通光滑的正则曲面, 过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上.
证明: S 是平面的一部分

证明. 设 k_1 和 k_2 为曲面 S 的两个主曲率, 它对应的单位主方向为 e_1 和 e_2.
设 v 是 $p\in S$ 点处单位切向量, 它与 e_1 的夹角为 θ. 则沿 v 的方向法曲率为

$$k_n(v)=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$$

.... (3 分)

在 $p\in S$ 点记 σ 为曲面法向量 N 和 v 张成的平面，它截曲面 S 为曲线 C, C 称为 S 沿 V 方向的法截线. 则法曲率 $k_n(v)$ 等于法截线 C 在平面 σ 上 p 处的相对曲率.
因为 p 点处沿三个不同方向 v_1,v_2,v_3 的法截线 C 为直线,
故存在不同的 θ_1,θ_2 和 θ_3, $0\leqslant\theta_1,\theta_2,\theta_3<\pi$ 使得

$$\begin{aligned}k_n(v_1)&=k_1\cos^2\theta_1+k_2\sin^2\theta_1=0;\\ k_n(v_2)&=k_1\cos^2\theta_2+k_2\sin^2\theta_2=0;\\ k_n(v_3)&=k_1\cos^2\theta_3+k_2\sin^2\theta_3=0.\end{aligned}$$

.... (6 分)

如果 $(k_1,k_2)\neq(0,0)$, 则存在 $\varepsilon_1=\pm1,\varepsilon_2=\pm1$ 有

$$\begin{aligned}\sin\theta_1\cos\theta_2+\varepsilon_1\cos\theta_1\sin\theta_2&=\sin(\theta_1+\varepsilon_1\theta_2)=0;\\ \sin\theta_1\cos\theta_3+\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_3&=\sin(\theta_1+\varepsilon_2\theta_3)=0;\\ \sin\theta_2\cos\theta_3+\varepsilon_1\varepsilon_2\cos\theta_2\sin\theta_3&=\sin(\theta_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_3)=0\end{aligned}$$

由于 $0\leqslant\theta_1,\theta_2,\theta_3<\pi$, 故有

$$\theta_1+\varepsilon_1\theta_2=0,\ \theta_1+\varepsilon_2\theta_3=0,\ \theta_2-\varepsilon_1\varepsilon_2 2\theta_3=0$$

于是推出 θ_1,θ_2 和 θ_3 必有两个相同, 矛盾. 故在曲面 S 的任何点 p 有 $k_1=k_2=0$ .... (8 分)
由此推出 Weingarten 变换 $W\equiv 0$. 将曲面 S 参数化为 $x(u,v)$. 它的法向量 $N(u,v)$. 则有

$$W(x_u)=-N_u=0,\quad W(x_v)=-N_v=0$$

故法向量 N 为常向量. 再由

$$x_u \cdot N = x_v \cdot N = 0,$$

得到 $x \cdot N = c$ 为常数, 故 S 落在一张平面上. ………………………………………………… (10 分)

□

八、(本题 10 分)

考虑求解一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的 Runge–Kutta 法.

(1) 确定下列三级三阶 Runge–Kutta 法中的所有特定参数:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3)$$

其中: $K_1 = f(x_n, y_n)$, $K_2 = f(x_n + ah, y_n + b_{21}hK_1)$, $K_3 = f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)$

(2) 讨论上述 Runge–Kutta 格式的稳定性

解: 1. 对 $y' = f(x, y)$ 两边取积分得:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x$$

由 Simpson 公式有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{6}\left[f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\right] + O(h^5) \qquad (5)$$

因此可令 $c_1 = \dfrac{1}{6}, c_2 = \dfrac{4}{6}, c_3 = \dfrac{1}{6}$.

令 $y_n = y(x_n)$. 将 (??) 和 (5) 两式想减得:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} = &\frac{2h}{3}\left[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1)\right] \\ &+ \frac{h}{6}\left[f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hK_1 + b_{32}h)K_2\right] \end{aligned}$$

我们只需选取参数 a_2, a_3, b_{31}, b_{32} 使得上式右端为 $O(h^4)$

注意到 $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$, 并记 $f_n = f(x_n, y(x_n))$, 将 $y(x_n, h/2)$ 做 Tayor 展开得

$$\begin{aligned} &f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \\ &= f(x_n + h/2, y(x_n) + hf_n/2 + h^2y''(x_n)/8 + O(h^3) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \end{aligned}$$

为使上式达到要求的精度, 应取 $a_2 = \dfrac{1}{2}, b_{21} = \dfrac{1}{2}$. 于是利用 Tayor 展开有

$$f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + h/2, y_n + hK_1/2) = \frac{h^2}{8}y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3)$$

另一方面

$$\begin{aligned} &f(x_n + h, y(x_n + h)) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hf_n + b_{32}hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n)) \\ &= f(x_n + h, y(x_n) + hf_n + h^2y''(x_n)/2 + o(h^3)) \\ &- f(x_n + a_3h, y_n + (b_{31} + b_{32})hf_n + b_{32}h^2/2(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f_n) + O(h^3)) \end{aligned}$$

为使上式达到给定精度, 应令 $a_3=1, b_{31}+b_{32}=1$. 注意到 $y''(x_n)=f_x(x_n,y_n)+f_y(x_n,y_n)f_n$
再次利用 Tayor 展开得

$$\begin{aligned}&f(x_n+h,y(x_n+h))-f(x_n+a_3h,b_{31}hf_n+b_{32}hy(x_n+h/2,y_n+h/2f_n))\\&=\frac{h^2}{2}(1-b_{32})y''(x_n)y_y(x_n,y_n)+O(h^3)\end{aligned}$$

综合上式诸式得

$$y(x_n+1)-y_{n+1}=\frac{h^3}{12}(2-h_{32})y''(x_n)f_y(x_n,y_n)+O(h^4)$$

令 $h_{32}=2$, 即得到了三级三阶 Runge–Kutta 法中的所有特定参数 ………………………… (7 分)
2. 下面讨论三级三阶 Runge–Kutta 格式的稳定性, 对微分方程 $y'=\lambda y$ 应用上述 Runge–Kutta 格式得:

$$K_1=\lambda y_n,\quad K_2=\lambda\left(1+\frac{1}{2}\lambda h\right)y_n,\quad K_3=\lambda\left(1+\lambda h+(\lambda h)^2\right)y_n$$

从而有

$$y_{n+1}=\left(1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3\right)y_n$$

故格式的稳定条件是

$$\left|1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3\right|<1$$

………………………………………………… (10 分)

♢

九、(本题 10 分) 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析, 并且 $|f(z)|\leqslant M(M>0)$, M 为常数.
证明: $|f'(0)|\leqslant M-\dfrac{|f(0)|^2}{M}$

证明. 令 $w=w(z)=\dfrac{f(z)}{M}$, 做变换 $F(z)=\dfrac{w(z)-w(0)}{1-w(0)w(z)}$, 这里 $w(0)=\dfrac{f(0)}{M}$ ………………… (4 分)
则该变换把单位圆 $|w|<1$ 映射为 $F(z)<1$. 由施瓦兹引理 $|F'(0)|\leqslant 1$. ………………………… (6 分)
由于

$$F'(z)\Big|_{z=0}=\left(\frac{w(z)-w(0)}{1-\overline{w(0)}w(z)}\right)'\Bigg|_{z=0}=\frac{w'(0)}{1-|w(0)|^2}=\frac{f'(0)M}{M^2-|f(0)|^2}$$

则

$$\left|\frac{f'(0)M}{M^2-|f(0)|^2}\right|\leqslant 1,\quad |f'(0)|M\leqslant\left|M^2-|f(0)|^2\right|$$

由于在单位圆 $|z|<1$ 内 $|f(z)|\leqslant M\ (M>0)$, 特别地 $|f(0)|\leqslant M$. 于是

$$\left|M^2-|f(0)|^2\right|=M^2-|f(0)|^2$$

即

$$|f'(0)|M\leqslant M^2-|f(0)|^2$$

证毕 ……………………………… (10 分)

□

数学家 www.mathor.com 收集整理

十、(本题 10 分) 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $P(X_n=0)=P(X_n=a)=\dfrac{1}{2}$, 其中常数 $a>0$. 记 $Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{X_k}{2^k}$. 求 Y_n 的特征函数, 并证明其分布收敛于区间 $[0,a]$ 上的均匀分布

解: X_k 的特征函数为

$$f_{X_k}(t)=Ee^{itX_k}=\frac{1}{2}(e^{iat}+1)=\exp\left\{\frac{iat}{2}\right\}\cos\frac{at}{2}\quad(k=1,2,\cdots).$$

……………………………………………… (2 分)

所以 $\dfrac{X_k}{2^k}$ 的特征函数为 $f_{X_k/2^k}(t)=f_{X_k}(t/2^k)=\exp\left\{\dfrac{iat}{2^{k+1}}\right\}\cos\dfrac{at}{2^{k+1}}$, 于是应用

$$\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{at}{2}}{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}$$

得 Y_n 的特征函数为

$$\begin{aligned}f_{Y_k}(t)&=\prod_{k=1}^{n}f_{X_k/2^k}(t)\\&=\cos\frac{at}{2^2}\cos\frac{at}{2^3}\cdots\cos\frac{at}{2^{n+1}}\exp\left\{iat\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{at}{2}}{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}\exp\left\{\frac{iat}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}\end{aligned}$$

……………………………………………… (6 分)

应用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{at}{2^{n+1}}}{\frac{at}{2^{n+1}}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ 以及 $\exp\left(\dfrac{iat}{2}\right)-\exp\left(-\dfrac{iat}{2}\right)=2i\sin\dfrac{at}{2}$ 得

$$\lim_{n\to\infty}f_{Y_k}(t)=\frac{2}{at}\exp\left(\frac{iat}{2}\right)\sin\frac{at}{2}=\frac{1}{iat}\left[\exp(iat)-1\right]$$

由于区间 $[0,a]$ 上均匀分布随机变量的特征函数 $\varphi(t)=\dfrac{1}{iat}\left[\exp(iat)-1\right]$

所以 Y_n 的分布收敛于区间 $[0,a]$ 上的均匀分布. ……………………………………………… (10 分)

$\diamondsuit$

整理者：14 金融工程 – 白兔兔

整理时间：2017 年 3 月 26 日