第四届全国大学生数学竞赛决赛试题评分细则

（非数学类，2013）

一、（本题 25 分）简答下列各题

1、计算 $\lim\limits_{x\to 0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right],(a>1)$.

2. 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程．并求其通解．

3. 求在 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$，使 $f(x)=e^{-u(x)}$，其中 $u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. 计算不定积分 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx.$

5. 过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程.

1. 解 $\lim\limits_{x\to 0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0+}\ln\left(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}2\ln a\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}$ (4 分)

$$=\lim_{x\to 0+}\ln e^{\ln a^2}=2\ln a. \quad (1\text{ 分})$$

2. 解 $y'=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f_u(x,x)+e^{-2x}f_v(x,x)=-2y+x^2e^{-2x}$

因此，所求的一阶微分方程为

$$y'+2y=x^2e^{-2x} \quad (3\text{ 分})$$

解得 $y=e^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int x^2e^{-2x}e^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right)e^{-2x}$ （C 为任意常数） (2 分)

3. 解 由题意

$$e^{-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}=f(x)$$

即有 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\ln f(x)$ (2 分)

两边求导可得

$$f'(x)=-f^2(x)\text{，并且 } f(0)=e^0=1$$

由此可求得 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$. (3 分)

4. **解** 由于

$$\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2)=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C. \qquad (2\text{ 分})$$

则原式 $=\int \arctan x d[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2]$

$$=\frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\arctan x-\frac{1}{2}\int[\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x\left[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3\right]-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3}{2}x+C \qquad (3\text{ 分})$$

5.解 设 $F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$，则曲面法向量为

$$\vec{n}_1=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}=2\left\{3x,y,-z\right\} \qquad （1\text{ 分}）$$

过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0$，即 $(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0$

其法向量为

$$\vec{n}_2=\left\{10+\lambda,2+\lambda,-(2+\lambda)\right\} \qquad （1\text{ 分}）$$

设所求切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{10+\lambda}{3x_0}=\dfrac{2+\lambda}{y_0}=\dfrac{2+\lambda}{z_0}\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27\\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0\end{cases} \qquad （1\text{ 分}）$$

解得 $x_0=3,y_0=1,z_0=1,\lambda=-1$，或 $x_0=-3,y_0=-17,z_0=-17,\lambda=-19$

所求切平面方程为

$$9x+y-z-27=0\text{ 或 }9x+17y-17z+27=0 \qquad （2\text{ 分}）$$

二、（本题 15 分）设曲面 $\Sigma: z^2=x^2+y^2, 1\le z\le 2$，其面密度为常数 ρ. 求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力(记引力常数为 G).

解. 设引力 $F=(F_x,F_y,F_z)$. 由对称性 $F_x=0,F_y=0$. (2 分)

记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，从原点出发过点 (x,y,z) 的射线与 z 轴的夹角为 θ. 则有 $\cos\theta=\dfrac{z}{r}$.

质点和面积微元 dS 之间的引力为

$$dF=G\frac{\rho dS}{r^2}\text{，而 } dF_z=G\frac{\rho dS}{r^2}\cos\theta=G\rho\frac{z}{r^3}dS, \qquad (4\text{ 分})$$

$$F_z=\int_\Sigma G\rho\frac{z}{r^3}dS\ .$$ (2 分)

在 z 轴上的区间 $[1,2]$ 上取小区间 $[z,z+dz]$，相应于该小区间有

$$dS=2\pi z\sqrt{2}dz=2\sqrt{2}\pi zdz\ .$$ (3 分)

而 $r=\sqrt{2z^2}=\sqrt{2}z$， 就有

$$F_z=\int_1^2 G\rho\frac{2\sqrt{2}\pi z^2}{2\sqrt{2}z^3}dz=G\rho\pi\int_1^2\frac{1}{z}dz=G\rho\pi\ln 2\ .$$ (4 分)

三、（本题 15 分）设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续可导，

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

证 当 $t>0$ 时，对函数 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0,t]$ 上用拉格朗日中值定理，有

$$\ln(1+t)=\frac{t}{1+\xi},\quad 0<\xi<t\ .$$

由此得

$$\frac{t}{1+t}<\ln(1+t)<t$$

取 $t=\dfrac{1}{x}$，有

$$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$$ (5 分)

所以，当 $x\geq 1$ 时，有 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加. (1 分)

又 $$f'(x)\leq\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\leq\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x+1}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\leq\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$ (4 分)

故 $$\int_1^x f'(t)dt\leq\int_1^x\frac{1}{2\sqrt{t^3}}dt$$，所以 $f(x)-f(1)\leq 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leq 1$

即 $f(x)\leq f(1)+1$， $f(x)$ 有上界. (4 分)

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加且有上界，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. (1 分)

四、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在[-2,2]上二阶可导，且 $|f(x)|<1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 试证在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

证 在 [-2,0] 与 [0,2] 上分别对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，可知存在 $\xi_1\in(-2,0),\xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\ f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}. \qquad (4\text{ 分})$$

由于 $|f(x)|<1$，所以 $|f'(\xi_1)|\le 1, |f'(\xi_2)|\le 1$. (2 分)

设 $F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$, 则

$$|F(\xi_1)|\le 2, |F(\xi_2)|\le 2. \qquad (*) \qquad (2\text{ 分})$$

由于 $F(0)=f^2(0)+[f'(0)]^2=4,$ 且 $F(x)$ 为 $[\xi_1,\xi_2]$ 上的连续函数，应用闭区间上连续函数的最大值定理，$F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上必定能够取得最大值，设为 M. 则当 ξ 为 $F(x)$ 的最大值点时，$M=F(\xi)\ge 4,$ 由（*）式知 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$. (2 分)

所以 ξ 必是 $F(x)$ 的极大值点. 注意到 $F(x)$ 可导，由极值的必要条件可知

$$F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0 \qquad (3\text{ 分})$$

由于 $F(\xi)=f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2\ge 4, |f(\xi)|\le 1,$ 可知 $f'(\xi)\ne 0$. 由上式知

$$f(\xi)+f''(\xi)=0. \qquad (2\text{ 分})$$

五、（本题 15 分）求二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|x^2+y^2-x-y\right|dxdy$

解. 由对称性, 可以只考虑区域 $y\ge x$, 由极坐标变换得

$$I=2\int_{\pi/4}^{5\pi/4}d\varphi\int_0^1\left|r-\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right|r^2dr=2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right|r^2dr \qquad (4\text{ 分})$$

后一个积分里, (φ,r) 所在的区域为矩形: $D:0\le\varphi\le\pi, 0\le r\le 1$. 把 D 分解为 $D_1\cup D_2$, 其中

$$D_1:0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 1，\ D_2:\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi, 0\le r\le 1.$$

又记 $D_3: \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \sqrt{2}\cos\varphi \le r \le 1$，这里 D_3 是 D_1 的子集,

且记 $I_i = \iint\limits_{D_i} d\varphi dr \left| r - \sqrt{2}\cos\varphi \right| r^2, (i = 1,2,3)$，则

$$I = 2(I_1 + I_2)\,. \qquad \text{(3 分)}$$

注意到 $\left(r - \sqrt{2}\cos\varphi\right) r^2$ 在 $D_1 \setminus D_3, D_2, D_3$ 的符号分别为负,正,正. 则

$$I_3 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{\sqrt{2}\cos\varphi}^{1} \left(r - \sqrt{2}\cos\varphi\right) r^2 dr = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3}\,. \qquad \text{(3 分)}$$

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{2}\cos\varphi - r\right) r^2 d\varphi dr + 2I_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{8} + 2I_3 = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad \text{(2 分)}$$

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} \left(r - \sqrt{2}\cos\varphi\right) r^2 d\varphi dr = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3}\,. \qquad \text{(2 分)}$$

所以就有 $I = 2(I_1 + I_2) = 1 + \dfrac{3\pi}{8}$. (1 分)

六、(本题 15 分) 若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都是收敛的，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

证. 用反证法. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$， (1 分)

则存在自然数 $m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$，使得

$$\sum_{i=1}^{m_1} |a_i| \ge 1, \quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |a_i| \ge k \qquad (k = 2,3,\cdots) \qquad \text{(6 分)}$$

取 $x_i = \dfrac{1}{k}\operatorname{sgn} a_i\,(m_{k-1} \le i \le m_k)$，则

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i x_i = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{|a_i|}{k} \ge 1. \qquad \text{(6 分)}$$

由此可知，存在数列 $\{x_n\} \to 0 (n \to \infty)$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 发散，矛盾. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. (2 分)