首届全国大学生数学竞赛预赛(2009 年非数学类)

试　　题

一、填空题(本题共 4 个小题,每题 5 分,共 20 分)

(1)计算 $\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________,其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2)设 $f(x)$ 是连续函数,且满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$,则 $f(x)=$ ________.

(3)曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是________.

(4)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 29$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq 1$,则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________.

二、(5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$,其中 n 是给定的正整数.

三、(15 分)设函数 $f(x)$ 连续,$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,$A$ 为常数,求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、(15 分)已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界,试证:

(1)$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;

(2)$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant \frac{5}{2}\pi^2$.

五、(10 分)已知

$$y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x},\quad y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x},\quad y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解,试求此微分方程.

六、(10 分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y\geqslant 0$,又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c,使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

七、(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x,\qquad n=1,2,\cdots,$$

且 $u_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$,求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

八、(10 分)求 $x\to 1^-$ 时,与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

参 考 答 案

一、(1)$\frac{16}{15}$.　(2)$3x^2-\frac{10}{3}$.　(3)$2x+2y-z-5=0$.　(4)$-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

二、解

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{\mathrm{e}}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n)}{x}\right\},$$

其中大括号内的极限是$\frac{0}{0}$型未定式,由洛必达法则,有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}(\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+\cdots+n\mathrm{e}^{nx})}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}\\&=\frac{\mathrm{e}(1+2+\cdots+n)}{n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)\mathrm{e},\end{aligned}$$

于是

$$\text{原式}=\mathrm{e}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)\mathrm{e}}.$$

三、解　由题设,知 $f(0)=0,g(0)=0$. 令 $u=xt$,得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x},x\neq 0.$$

而

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2},x\neq 0.$$

由导数的定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

另外

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0).$$

从而知 $g'(x)$在 $x=0$ 处连续.

四、证法 1　由于区域 D 为一正方形,可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1)左边 $=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$,

右边 $=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$,

所以

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}y=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(2)由泰勒公式得 $\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\geqslant 2+\sin^2 x$,故

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\geqslant\pi\int_0^\pi(2+\sin^2 x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\pi^2.$$

证法 2　(1)根据格林公式,将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma.$$

因为关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

故

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(2)由 $\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t} = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}\geqslant 2+t^2$，有

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma \geqslant \frac{5}{2}\pi^2.$$

五、解　根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知 $2y_1-y_2-y_3=\mathrm{e}^{2x}$ 与 $y_1-y_3=\mathrm{e}^{-x}$是相应齐次方程两个线性无关的解，且 $x\mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的一个特解，因此可以用下述两种解法.

解法 1　设此方程式为

$$y''-y'-2y=f(x).$$

将 $y=x\mathrm{e}^x$ 代入上式，得

$$f(x)=(x\mathrm{e}^x)''-(x\mathrm{e}^x)'-2x\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x,$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$.

解法 2　设 $y=x\mathrm{e}^x+c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-x}$是所求方程的通解，由

$$y'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+2c_1\mathrm{e}^{2x}-c_2\mathrm{e}^{-x},\qquad y''=2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+4c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-x},$$

消去 c_1,c_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x$.

六、解　因抛物线过原点，故 $c=1$. 由题设有

$$\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3},$$

即 $b=\dfrac{2}{3}(1-a)$，而

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)\\&=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}(1-a)^2\right].\end{aligned}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0,$$

得 $a=-\dfrac{5}{4}$，代入 b 的表达式得 $b=\dfrac{3}{2}$，所以 $y\geqslant 0$.

又因$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{27}\right)=\dfrac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，当 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=1$ 时，体积最小.

七、解　先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$的表达式，然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u'_n(x)-u_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 是关于 $u_n(x)$的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^x\left(\frac{x^n}{n}+c\right).$$

由条件 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x)=\dfrac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$,其收敛域为$[-1,1)$,当 $x\in(-1,1)$时,有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故

$$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x).$$

当 $x=-1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^{-1}\ln 2.$$

于是,当$-1\leqslant x<1$ 时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^{x}\ln(1-x).$$

八、解 $\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$,故有

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$