自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2018–2019 学年 第 二 学期

微积分 AII 期中试卷（A 卷）

院 (系) ____________ 班级 ____________ 姓名 ____________ 学号 ____________

试卷卷面成绩						课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	四	小 计			
得 分								

得分

一、填空题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

1. 已知点 $A(0,1,2)$ 和点 $B(1,-1,0)$, 则与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\overrightarrow{AB}^0=$ ____________ .

2. 已知向量 $\vec{a}=(7,-2,5)$, 向量 $\vec{b}=(2,2,1)$, 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ _____ , $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 ___ .

3. 过点 $(2,0,-3)$ 并与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面的方程为 ____________________ .

4. 已知空间两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 $x+1=y-1=z$ 相交于一点, 则 $\lambda=$ ____ .

5. 设 $u=\ln(xy+z)$, 则 $\mathrm{d}\,u|_{(1,2,0)}=$ ________________ .

6. 设曲面 $z=f(x,y)$ 过点 $P(2,1,-3)$, 该曲面上任一点 (x,y,z) 都满足 $yf_x(x,y)+zf_y(x,y)=f(x,y)$, 且 $f_y(2,1)=2$, 则该曲面在点 P 处的切平面方程为 ____________________ .

7. 试写出求解下列条件极值问题的拉格朗日函数: 分解已知正数 a 为三个正数 x,y,z 之和使 x,y,z 的倒数之和最小 ____

8. 设 $f(x)$ 连续, D 是 xoy 平面上由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 和 $x+y\geqslant 1$ 围成的区域, 则二重积分 $I=\iint_D f(x+y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 化为极坐标系下的二次积分是 ________________________________ .

9. 圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=x$ 截下有限部分的曲面面积为 ______ .

10. 设 Ω 是球体: $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}\,v=$ _______ .

得分

二、单项选择题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

11. 锥面 $x^2+\dfrac{y^2}{16}=z^2$ 与 yoz 平面交于 【 】

(A) 椭圆 (B) 双曲线 (C) 一对相交直线 (D) 一点

12. 平面 $3x-3y-6=0$ 是 【 】

(A) 平行于 xoy 平面 (B) 平行于 z 轴, 但不通过 z 轴

(C) 垂直于 y 轴 (D) 通过 z 轴

13. 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 均为非零向量, $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$, $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 【 】

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) 0

14. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 【 】

(A) 连续, 偏导数存在 (B) 不连续, 偏导数不存在

(C) 连续, 偏导数不存在 (D) 不连续, 偏导数存在

15. 函数 $z=2x+y$ 在点 $(1,2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为 【 】

(A) 3 (B) 0 (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

16. 设函数 $z=2x^2-3y^2$, 则 【 】

(A) 函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极大值

(B) 函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极小值

(C) 点 $(0,0)$ 非函数 z 的极值点

(D) 点 $(0,0)$ 是函数 z 的最大值点或最小值点, 但不是极值点

17. 若曲线 $\begin{cases} xy+yz+zx=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的一个切向量与 oz 轴正方向成锐角) 则此切向量与 ox 轴正方向所夹角的余弦为 【 】

(A) $-\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ (B) $-\dfrac{3}{\sqrt{14}}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ (D) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

18. $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta\sigma_i$ 中 λ 是 【 】

(A) 最大小区间长 (B) 小区域最大面积

(C) 小区域直径 (D) 最大小区域直径

19. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则积分 $\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{x^2}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y+\int_1^2\mathrm{d}\,x\int_0^{2-x}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 可交换积分次序为 【 】

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_0^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

20. 由 $x^2+y^2=z$, $z=1$, $z=4$ 所围成的立体的体积是 【　】

(A) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z$

(B) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

(C) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

(D) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

得分

三、计算题 (本题满分 10 分)

21. 设 $u=f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数, $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y=\varphi(z)$ 所确定, 其中 $\varphi(z)$ 有二阶连续导数, 且 $\varphi'(z)\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

得分

四、证明题 (本题满分 10 分)

22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, a 为大于 1 的常数, 证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^x (x-y)^{a-1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{a}\int_0^1 y^a f(1-y)\,\mathrm{d}\,y.$$

23. 设 Ω 为一半椭球体 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1, z\geqslant 0$, $g(u)$ 为单调递增函数, 证明

$$\iiint_{\Omega} g\left[\left(x^2+y^2\right)z\right] dv \leqslant \frac{2\pi c}{3} g\left(\frac{2c}{3\sqrt{3}}\right).$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2018–2019 学年 第 二 学期

微积分 AII 期中试卷（A 卷）

院 (系) ____________ 班级 ____________ 姓名 ____________ 学号 ____________

试卷卷面成绩						课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	四	小 计			
得 分								

得分

一、填空题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

1. 已知点 $A(0,1,2)$ 和点 $B(1,-1,0)$, 则与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\overrightarrow{AB}^0=$ ____________ .

2. 已知向量 $\vec{a}=(7,-2,5)$, 向量 $\vec{b}=(2,2,1)$, 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ _____ , $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 ___ .

3. 过点 $(2,0,-3)$ 并与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面的方程为 ______________________ .

4. 已知空间两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 $x+1=y-1=z$ 相交于一点, 则 $\lambda=$ ____ .

5. 设 $u=\ln(xy+z)$, 则 $\mathrm{d}\,u|_{(1,2,0)}=$ __________________ .

6. 设曲面 $z=f(x,y)$ 过点 $P(2,1,-3)$, 该曲面上任一点 (x,y,z) 都满足 $yf_x(x,y)+zf_y(x,y)=f(x,y)$, 且 $f_y(2,1)=2$, 则该曲面在点 P 处的切平面方程为 ___________________ .

7. 试写出求解下列条件极值问题的拉格朗日函数: 分解已知正数 a 为三个正数 x,y,z 之和使 x,y,z 的倒数之和最小 ______________________________________

8. 设 $f(x)$ 连续, D 是 xoy 平面上由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 和 $x+y\geqslant 1$ 围成的区域, 则二重积分 $I=\iint_D f(x+y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 化为极坐标系下的二次积分是 _________________________________ .

9. 圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=x$ 截下有限部分的曲面面积为 _______ .

10. 设 Ω 是球体: $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}\,v=$ ________ .

得分

二、单项选择题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

11. 锥面 $x^2+\dfrac{y^2}{16}=z^2$ 与 yoz 平面交于 【　】

(A) 椭圆　(B) 双曲线　(C) 一对相交直线　(D) 一点

12. 平面 $3x-3y-6=0$ 是 【　】

(A) 平行于 xoy 平面　(B) 平行于 z 轴, 但不通过 z 轴

(C) 垂直于 y 轴　(D) 通过 z 轴

13. 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 均为非零向量, $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$, $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 【　】

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) 0

14. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 【　】

(A) 连续, 偏导数存在　(B) 不连续, 偏导数不存在

(C) 连续, 偏导数不存在　(D) 不连续, 偏导数存在

15. 函数 $z=2x+y$ 在点 $(1,2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为 【　】

(A) 3　(B) 0　(C) 2　(D) $\sqrt{5}$

16. 设函数 $z=2x^2-3y^2$, 则 【　】

(A) 函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极大值

(B) 函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极小值

(C) 点 $(0,0)$ 非函数 z 的极值点

(D) 点 $(0,0)$ 是函数 z 的最大值点或最小值点, 但不是极值点

17. 若曲线 $\begin{cases}xy+yz+zx=-1\\ x+y+z=2\end{cases}$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的一个切向量与 oz 轴正方向成锐角) 则此切向量与 ox 轴正方向所夹角的余弦为 【　】

(A) $-\dfrac{1}{\sqrt{14}}$　(B) $-\dfrac{3}{\sqrt{14}}$　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$　(D) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

18. $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta\sigma_i$ 中 λ 是 【　】

(A) 最大小区间长　(B) 小区域最大面积

(C) 小区域直径　(D) 最大小区域直径

19. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则积分 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y+\int_1^2 \mathrm{d}\,x\int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 可交换积分次序为 【　】

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_0^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

20. 由 $x^2+y^2=z$, $z=1$, $z=4$ 所围成的立体的体积是 【　　】

(A) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z$

(B) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

(C) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

(D) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

得分

三、计算题 (本题满分 10 分)

21. 设 $u=f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数, $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y=\varphi(z)$ 所确定, 其中 $\varphi(z)$ 有二阶连续导数, 且 $\varphi'(z)\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

得分

四、证明题 (本题满分 10 分)

22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, a 为大于 1 的常数, 证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^x (x-y)^{a-1} f(y)\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{a}\int_0^1 y^a f(1-y)\,\mathrm{d}\,y.$$

23. 设 Ω 为一半椭球体 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1, z\geqslant 0$, $g(u)$ 为单调递增函数, 证明

$$\iiint\limits_{\Omega} g\left[\left(x^2+y^2\right)z\right]dv \leqslant \frac{2\pi c}{3} g\left(\frac{2c}{3\sqrt{3}}\right).$$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2018–2019 学年 第 二 学期

微积分 AII 期中试卷（A 卷解析）

院 (系) ____________ 班级 ____________ 姓名 ____________ 学号 ____________

试卷卷面成绩						课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	四	小 计			
得 分								

得分

一、填空题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

1. 已知点 $A(0,1,2)$ 和点 $B(1,-1,0)$, 则与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量 $\overrightarrow{AB}^0 =$ $\underline{\frac{1}{3}(1,-2,-2)}$.

2. 已知向量 $\vec{a}=(7,-2,5)$, 向量 $\vec{b}=(2,2,1)$, 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\underline{15}$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 $\underline{5}$.

3. 过点 $(2,0,-3)$ 并与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面的方程为 $\underline{16x-14y-11z-65=0}$.

4. 已知空间两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 $x+1=y-1=z$ 相交于一点, 则 $\lambda=$ $\underline{\dfrac{5}{4}}$.

5. 设 $u=\ln(xy+z)$, 则 $\mathrm{d}\,u|_{(1,2,0)}=$ $\underline{\mathrm{d}\,x+\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,y+\dfrac{1}{2}\mathrm{d}\,z}$.

6. 设曲面 $z=f(x,y)$ 过点 $P(2,1,-3)$, 该曲面上任一点 (x,y,z) 都满足 $yf_x(x,y)+zf_y(x,y)=f(x,y)$, 且 $f_y(2,1)=2$, 则该曲面在点 P 处的切平面方程为 $\underline{3x+2y-z-11=0}$.

7. 试写出求解下列条件极值问题的拉格朗日函数: 分解已知正数 a 为三个正数 x,y,z 之和使 x,y,z 的倒数之和最小 $\underline{L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\lambda(x+y+z-a).}$

8. 设 $f(x)$ 连续, D 是 xoy 平面上由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 和 $x+y\geqslant 1$ 围成的区域, 则二重积分 $I=\iint_D f(x+y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 化为极坐标系下的二次积分是

$$\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\,\rho} .$$

9. 圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被柱面 $x^2+y^2=x$ 截下有限部分的曲面面积为 $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi}$.

10. 设 Ω 是球体: $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}\,v=$ $\underline{\quad \dfrac{32}{15}\pi a^5 \quad}$.

得分

二、单项选择题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

11. 锥面 $x^2+\dfrac{y^2}{16}=z^2$ 与 yoz 平面交于 【 C 】

(A) 椭圆　(B) 双曲线　(C) 一对相交直线　(D) 一点

12. 平面 $3x-3y-6=0$ 是 【 B 】

(A) 平行于 xoy 平面　(B) 平行于 z 轴, 但不通过 z 轴

(C) 垂直于 y 轴　(D) 通过 z 轴

13. 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 均为非零向量, $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$, $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 【 A 】

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) 0

14. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 【 D 】

(A) 连续, 偏导数存在　(B) 不连续, 偏导数不存在

(C) 连续, 偏导数不存在　(D) 不连续, 偏导数存在

15. 函数 $z=2x+y$ 在点 $(1,2)$ 沿各方向的方向导数的最大值为 【 D 】

(A) 3　(B) 0　(C) 2　(D) $\sqrt{5}$

16. 设函数 $z=2x^2-3y^2$, 则 【 C 】

(A) 函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极大值

(B) 函数 z 在点 $(0,0)$ 处取得极小值

(C) 点 $(0,0)$ 非函数 z 的极值点

(D) 点 $(0,0)$ 是函数 z 的最大值点或最小值点, 但不是极值点

17. 若曲线 $\begin{cases}xy+yz+zx=-1\\ x+y+z=2\end{cases}$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的一个切向量与 oz 轴正方向成锐角) 则此切向量与 ox 轴正方向所夹角的余弦为 【 B 】

(A) $-\dfrac{1}{\sqrt{14}}$　(B) $-\dfrac{3}{\sqrt{14}}$　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$　(D) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

18. $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\,\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta\sigma_i$ 中 λ 是 【 D 】

(A) 最大小区间长　(B) 小区域最大面积

(C) 小区域直径　　　　　　　　　　(D) 最大小区域直径

19. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则积分 $\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \int_1^2 \mathrm{d}\,x \int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$ 可交换积分次序为　【 C 】

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_0^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int_1^2 \mathrm{d}\,y \int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

(D) $\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

20. 由 $x^2+y^2=z$, $z=1$, $z=4$ 所围成的立体的体积是　【 B 】

(A) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z$

(B) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

(C) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

(D) $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_1^2 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_1^4 \mathrm{d}\,z + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\,\rho \int_{\rho^2}^4 \mathrm{d}\,z$

得分

三、计算题 (本题满分 10 分)

21. 设 $u=f(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数, $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y=\varphi(z)$ 所确定, 其中 $\varphi(z)$ 有二阶连续导数, 且 $\varphi'(z)\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\varphi'(z)}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\varphi''(z)}{[\varphi'(z)]^3}$, $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_3\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1+\dfrac{1}{\varphi'(z)}f_3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=f_{11}+f_{13}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left[f_{31}+f_{33}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+f_3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\\
&=f_{11}+2f_{13}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+f_{33}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+f_3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\\
&=f_{11}+\frac{2}{\varphi'(z)}f_{13}+f_{33}\frac{1}{[\varphi'(z)]^2}-\frac{\varphi''(z)}{[\varphi'(z)]^3}f_3
\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1+\dfrac{1}{\varphi'(z)}f_3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}+\dfrac{2}{\varphi'(z)}f_{13}+f_{33}\dfrac{1}{[\varphi'(z)]^2}-\dfrac{\varphi''(z)}{[\varphi'(z)]^3}f_3$.　□

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

四、证明题 (本题满分 10 分)

22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, a 为大于 1 的常数, 证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}\, x \int_0^x (x-y)^{a-1} f(y)\, \mathrm{d}\, y = \frac{1}{a}\int_0^1 y^a f(1-y)\, \mathrm{d}\, y.$$

证明 交换积分次序，左边 $= \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}\, y \int_y^1 (x-y)^{a-1} f(y)\, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{a}\int_0^1 (1-y)^a f(y)\, \mathrm{d}\, y$

令 $u=1-y$，左边 $= \displaystyle\frac{1}{a}\int_0^1 u^a f(1-u)\, \mathrm{d}\, u = \frac{1}{a}\int_0^1 y^a f(1-y)\, \mathrm{d}\, y =$ 右边. $\square$

23. 设 Ω 为一半椭球体 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1, z\geqslant 0$, $g(u)$ 为单调递增函数, 证明

$$\iiint\limits_{\Omega} g\left[\left(x^2+y^2\right)z\right] dv \leqslant \frac{2\pi c}{3} g\left(\frac{2c}{3\sqrt{3}}\right).$$

证明

$$I = \int_0^c \mathrm{d}\, z \iint_{D(z)} g\left[\left(x^2+y^2\right)z\right] \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y \leqslant \int_0^c \mathrm{d}\, z \iint_{D(z)} g\left[\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z\right] \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$$
$$= \int_0^c \pi\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) g\left[\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z\right] \mathrm{d}\, z$$

$\because$ 当 $0\geqslant z\geqslant c$ 时, $\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)z\leqslant \dfrac{2c}{3\sqrt{3}}$

$\therefore I\leqslant g\left(\dfrac{2c}{3\sqrt{3}}\right)\displaystyle\int_0^c \pi\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}\, z = \frac{2\pi c}{3} g\left(\frac{2c}{3\sqrt{3}}\right).$ $\square$