自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2016–2017 学年 第 二 学期

微积分 AII 期中试卷（A 卷）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

<table>
<tr><td colspan="5">试卷卷面成绩</td><td rowspan="2">课程考核成绩占 %</td><td rowspan="2">平时成绩占 %</td><td rowspan="2">课程考核成绩</td></tr>
<tr><td>题 号</td><td>一</td><td>二</td><td>三</td><td>小 计</td></tr>
<tr><td>得 分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

得分

一、填空题 (本题共 10 个空，每空 4 分，满分 40 分)

1. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$, 则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{b})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$ ____ .

2. 设区域 $D: 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant x$, 则积分 $\iint_D \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____ .

3. 交换积分次序
$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ ______________________ .

4. 设 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_y^{0.5(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}(x+2y+z)\,\mathrm{d}z$, 则积分区域是由 ______________ 所围成的区域.

5. 空间曲线 $\begin{cases}0.75x^2+y^2+z^2=1\\ z=0.5x\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程为 ________ , 其在点 $P_0(0,1,0)$ 处的切线方程是 ________ .

6. 二次曲面 $(x-1)^2+y^2=1$ 在点 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 处的切平面方程为 ________ .

7. 可微函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 等于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿 ____ 的方向导数.

8. 设 $u(x,y)=\dfrac{1}{4}\int_0^{x^2+y^2} f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 f 可微，则 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|=$ ________ .

9. 函数在 $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ 点 (-1，1) 处沿该函数的梯度方向的方向导数为 ____ .

得分

二、单项选择题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

10. 已知 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, 下面选项正确的是 【 】

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ (B) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

(C) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$ (D) $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}\neq 0$

11. 下列不等式正确的是 【 】

(A) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$ (B) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

(C) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$ (D) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

12. 空间几何体方程 $\begin{cases}x^2+y^2=z\\ y=1\end{cases}$ 表示 【 】

(A) 第一卦限中的一条抛物线

(B) 与 z 轴平行的个圆柱面

(C) 第一、二卦限中的条抛物线

(D) 某坐标平面上的一个半径为 1 的圆

13. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程是 【 】

(A) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$ (B) $\begin{cases}x+z=1\\ y=2\end{cases}$

(C) $-(x-1)+(z-1)=0$ (D) $x+y+z=0$

14. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的一点处的切平面与该锥面相交于 【 】

(A) 一个点 (B) 一个圆 (C) 一条直线 (D) 两条直线

15. 函数 $f(x,y)=2x^2-xy+3y^2+5$ 在原点 $(0,0)$ 处 【 】

(A) 取得极大值 (B) 取得极小值

(C) 不取极值 (D) 无法判别是否取得极值

16. 设 $z=y^x$, 则 $\left.\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{(1,1)}=$ 【 】

(A) 1 (B) 2 (C) $1+\ln 2$ (D) 0

17. 已知 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数存在，则 【 】

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续

(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微

(C) $f(x,y)$ 在 $x=x_0$ 点连续

(D) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点有任意方向的方向导数

18. 已知函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$, 则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$ 【 】

(A) $2x-2y$ (B) $2x+2y$ (C) $x+y$ (D) $x-y$

19. 圆 $\rho=1$ 之外和圆 $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ 之内的所围图形的面积 【 】

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho$ (B) $2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho$ (D) $2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho$

得分

三、计算题 (本题共 2 小题，每题 10 分，满分 20 分)

20. 将积分 $I=\int_0^{\sin\theta}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x+\int_{\sin\theta}^{2\sin\theta}\mathrm{d}y\int_{y\cot\theta}^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x$ 化为重积分，并求值.

21. 若 $u(x,y)\neq 0$，且二阶偏导数，证明:$u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充分必要条件是 $u\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2016–2017 学年 第 二 学期

微积分 AII 期中试卷（A 卷）

院 (系) ____________ 班级 ____________ 姓名 ____________ 学号 ____________

试卷卷面成绩					课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	小 计			
得 分							

得分

一、填空题 (本题共 10 个空，每空 4 分，满分 40 分)

1. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$, 则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{b})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$ ____ .

2. 设区域 $D: 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant y\leqslant x$, 则积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____ .

3. 交换积分次序

$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ ________________________________ .

4. 设 $\iiint_\Omega (x+2y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_y^{0.5(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}(x+2y+z)\,\mathrm{d}z$, 则积分区域是由 ________________________ 所围成的区域.

5. 空间曲线 $\begin{cases}0.75x^2+y^2+z^2=1\\ z=0.5x\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程为 __________ , 其在点 $P_0(0,1,0)$ 处的切线方程是 __________ .

6. 二次曲面 $(x-1)^2+y^2=1$ 在点 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 处的切平面方程为 __________ .

7. 可微函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 等于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿 ______ 的方向导数.

8. 设 $u(x,y)=\frac{1}{4}\int_0^{x^2+y^2} f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 f 可微，则 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|=$ __________ .

9. 函数在 $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ 点 (-1，1) 处沿该函数的梯度方向的方向导数为 ______ .

得分

二、单项选择题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

10. 已知 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, 下面选项正确的是 【 】

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

(B) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

(C) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$

(D) $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}\neq 0$

11. 下列不等式正确的是 【　】

(A) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

(B) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

(C) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

(D) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

12. 空间几何体方程 $\begin{cases}x^2+y^2=z\\ y=1\end{cases}$ 表示 【　】

(A) 第一卦限中的一条抛物线

(B) 与 z 轴平行的个圆柱面

(C) 第一、二卦限中的条抛物线

(D) 某坐标平面上的一个半径为 1 的圆

13. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程是 【　】

(A) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$

(B) $\begin{cases}x+z=1\\ y=2\end{cases}$

(C) $-(x-1)+(z-1)=0$

(D) $x+y+z=0$

14. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的一点处的切平面与该锥面相交于 【　】

(A) 一个点　(B) 一个圆　(C) 一条直线　(D) 两条直线

15. 函数 $f(x,y)=2x^2-xy+3y^2+5$ 在原点 $(0,0)$ 处 【　】

(A) 取得极大值

(B) 取得极小值

(C) 不取极值

(D) 无法判别是否取得极值

16. 设 $z=y^x$, 则 $\left.\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{(1,1)}=$ 【　】

(A) 1　(B) 2　(C) $1+\ln 2$　(D) 0

17. 已知 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数存在，则 【　】

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续

(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微

(C) $f(x,y)$ 在 $x=x_0$ 点连续

(D) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点有任意方向的方向导数

18. 已知函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$, 则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$ 【　】

(A) $2x-2y$　(B) $2x+2y$　(C) $x+y$　(D) $x-y$

19. 圆 $\rho=1$ 之外和圆 $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ 之内的所围图形的面积　【　】

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$　(B) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$　(D) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$

得分

三、计算题 (本题共 2 小题，每题 10 分，满分 20 分)

20. 将积分 $I=\displaystyle\int_0^{\sin\theta}\mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\sin\theta}^{2\sin\theta}\mathrm{d}\,y\int_{y\cot\theta}^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\,x$ 化为重积分，并求值.

21. 若 $u(x,y)\neq 0$，且二阶偏导数，证明:$u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充分必要条件是 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2016–2017 学年 第 二 学期

微积分 AII 期中试卷（A 卷解析）

院 (系) ______ 班级 ______ 姓名 ______ 学号 ______

试卷卷面成绩					课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	小 计			
得 分							

得分

一、填空题 (本题共 10 个空，每空 4 分，满分 40 分)

1. 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$, 则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{b})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$ $\underline{\ 4\ }$.

2. 设区域 $D:0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant x$, 则积分 $\displaystyle\iint_D\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ $\underline{\ 1\ }$.

3. 交换积分次序

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^{1+y^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x-1}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y}\ .$$

4. 设 $\displaystyle\iiint_\Omega(x+2y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_y^{0.5(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}(x+2y+z)\,\mathrm{d}z$, 则积分区域是由 $\underline{\text{三个坐标平面和平面 } x+2y+z=1}$ 所围成的区域.

5. 空间曲线 $\begin{cases}0.75x^2+y^2+z^2=1\\ z=0.5x\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\underline{\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}}$, 其在点 $P_0(0,1,0)$ 处的切线方程是 $\underline{\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}}$.

6. 二次曲面 $(x-1)^2+y^2=1$ 在点 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 处的切平面方程为 $\underline{x-1+y=\sqrt{2}}$.

7. 可微函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 等于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿 $\underline{(1,0)}$ 的方向导数.

8. 设 $u(x,y)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{x^2+y^2}f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 f 可微，则 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|=$ $\underline{xyf'\left(x^2+y^2\right)}$.

9. 函数在 $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ 点 (-1，1) 处沿该函数的梯度方向的方向导数为 $\underline{3\sqrt{2}}$.

得分

二、单项选择题 (本题共 10 小题，每题 4 分，满分 40 分)

10. 已知 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, 下面选项正确的是 【 B 】

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ (B) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

(C) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$ (D) $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}\neq 0$

11. 下列不等式正确的是 【 D 】

(A) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$ (B) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(y-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

(C) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$ (D) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1}(x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0$

12. 空间几何体方程 $\begin{cases}x^2+y^2=z\\ y=1\end{cases}$ 表示 【 C 】

(A) 第一卦限中的一条抛物线

(B) 与 z 轴平行的个圆柱面

(C) 第一、二卦限中的条抛物线

(D) 某坐标平面上的一个半径为 1 的圆

13. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程是 【 A 】

(A) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$ (B) $\begin{cases}x+z=1\\ y=2\end{cases}$

(C) $-(x-1)+(z-1)=0$ (D) $x+y+z=0$

14. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的一点处的切平面与该锥面相交于 【 C 】

(A) 一个点 (B) 一个圆 (C) 一条直线 (D) 两条直线

15. 函数 $f(x,y)=2x^2-xy+3y^2+5$ 在原点 $(0,0)$ 处 【 B 】

(A) 取得极大值 (B) 取得极小值

(C) 不取极值 (D) 无法判别是否取得极值

16. 设 $z=y^x$, 则 $\left.\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{(1,1)}=$ 【 A 】

(A) 1 (B) 2 (C) $1+\ln 2$ (D) 0

17. 已知 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的偏导数存在，则 【 C 】

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续

(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微

(C) $f(x,y)$ 在 $x=x_0$ 点连续

(D) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点有任意方向的方向导数

18. 已知函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$, 则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$ 【 C 】

(A) $2x-2y$　　(B) $2x+2y$　　(C) $x+y$　　(D) $x-y$

19. 圆 $\rho=1$ 之外和圆 $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ 之内的所围图形的面积 【 B 】

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$　　(B) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$　　(D) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}\rho\,\mathrm{d}\,\rho$

得分

三、计算题 (本题共 2 小题，每题 10 分，满分 20 分)

20. 将积分 $I=\displaystyle\int_0^{\sin\theta}\mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\sin\theta}^{2\sin\theta}\mathrm{d}\,y\int_{y\cot\theta}^{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\,x$ 化为重积分，并求值.

解　两个积分区域分别为

$$\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}0\leqslant y\leqslant\sin\theta及y\cot\theta\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},\sin\theta\leqslant y\leqslant 2\sin\theta$$

所以积分区域是第一象限 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, x 轴及直线 $y=(\tan\theta)x$ 所围

化为极坐标计算 $I=\displaystyle\iint_D\mathrm{e}^{-\left(x^2,v^2\right)}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_0^{\theta}\mathrm{d}\,\theta\int_1^2\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\,\rho=\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-4}}{2}\theta.$ □

21. 若 $u(x,y)\neq 0$，且二阶偏导数，证明:$u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充分必要条件是 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

证明　(1) 必要性: 设 $u(x,y)=f(x)g(y)$, 则有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(x)g(y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=f(x)g'(y)$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=f'(x)g'(y)$, 所以 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$

(2) 充分性: 设 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 令 $v=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 代入上式得 $u\dfrac{\partial v}{\partial y}=v\dfrac{\partial u}{\partial y}$

所以 $\dfrac{u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2}=0$, 即 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{v}{u}\right)=0$, $\dfrac{v}{u}=\varphi(x)$, 所以 $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u}=\varphi(x)$, 即 $\dfrac{\partial\ln u}{\partial x}=\varphi(x)$

所以 $\ln u=\displaystyle\int\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x+\psi(y)$, 所以 $u=e^{\int\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x}\cdot e^{\psi(p)}=f(x)g(y)$. □