第五届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2013年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

一、(本题 15 分) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动一周，这时, C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以P 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 R. 记 $\gamma: \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换，它将 $Q \in \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q', 满足 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$. 求证：$\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

证明 以 C_1 的圆心 O 为原点建立直角坐标系，使得初始切点 $P = (0, r)$. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动到 Q 点, 记角 $\angle POQ = \theta$, 则 $Q = (r\sin\theta, r\cos\theta)$. 令 ℓ_Q 为 C_1 在 Q 点的切线, 它的单位法向为 $\vec{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$. 这时, P 点运动到 P 关于直线 ℓ_Q 的对称点 $P' = P(\theta)$ 处. 于是, 有

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n})\vec{n}. \qquad (5分)$$

故 P 点的运动轨迹曲线(心脏线)为

$$P(\theta) = P' = (2r(1-\cos\theta)\sin\theta, r + 2r(1-\cos\theta)\cos\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi. \qquad (8分)$$

容易得到, 圆 C 的反演变换的坐标表示为

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, r) + \frac{R^2}{x^2 + (y-r)^2}(x, y-r). \qquad (11分)$$

将 $(x, y) = P(\theta)$ 代人, 得到

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{R^2\sin\theta}{2r(1-\cos\theta)}, \frac{R^2\cos\theta}{2r(1-\cos\theta)} + r\right). \qquad (13分)$$

直接计算，得到抛物线方程

$$\tilde{y} = \frac{r}{R^2}\tilde{x}^2 + (r - \frac{R^2}{4r}). \qquad (15分)$$

二、(本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t)=(b_{ij}(t))$ 和 $b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t)\\ \vdots \\ b_n(t)\end{pmatrix}$, 其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组, 试证明: $d(t), d_1(t),\cdots,d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式.

证明 设 $B(t)$ 的第 i 列为 $B_i(t), i=1,2,\cdots,n$. 断言：$t-t_0$ 是 $d(t),d_1(t),\cdots,d_n(t)$ 的公因式. 反证. 不失一般性，设 $d_1(t_0)\neq 0$，于是

秩$[B(t_0),b(t_0)]=n$, 因为 $d_1(t_0)\neq 0$. (5 分)

注意到秩$B(t_0)\leqslant n-1$, 结果

增广阵$[B(t_0),b(t_0)]$ 的秩 $\neq B(t_0)$ 的秩, (9 分)

从而 $B(t_0)X=b(t_0)$ 不相容. 矛盾. 证毕. (10 分)

六、(本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体, E_{ij} 为 (i,j) 位置元素为 1 其余位置元素为 0 的 n 阶方阵, $i,j=1,2,\cdots,n$. 让 Γ_r 为秩等于 r 的实 n 阶方阵全体, $r=0,1,2,\cdots,n$, 并让 $\phi:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足: $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B), \forall\, A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 试证明:

(1) $\forall\, A,B\in\Gamma_r$, 秩$\phi(A)=$秩$\phi(B)$.

(2) 若 $\phi(0)=0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 W 使得 $\phi(W)\neq 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$ 对一切 E_{ij} 皆成立, $i,j=1,2,\cdots,n$.

证明: (1) $A,B\in\Gamma_r$ 表明 A 可表为 $A=PBQ$, 其中 P,Q 可逆. (1 分)

结果 $\phi(A)=\phi(P)\phi(B)\phi(Q)$, 从而 秩$\phi(A)\leqslant$秩$\phi(B)$. (3 分)

对称地有 秩$\phi(B)\leqslant$秩$\phi(A)$. 即有, 秩$\phi(A)=\phi(B)$. (5 分)

(2) 考察矩阵集合 $\{\phi(E_{ij})|i,j=1,2,\cdots,n\}$. 先考察 $\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{nn})$. 由 (1) 知 $\phi(E_{ij})$ 为非零阵, 特别地, $\phi(E_{ii})$ 为非零幂等阵, 故存在单位特征向量 w_i 使得

$$\phi(E_{ii})w_i=w_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

从而得向量组: $w_1,w_2,\cdots,w_n$. (7 分)

此向量组有如下性质:

a) $\phi(E_{ii})w_k=\begin{cases}\phi(E_{ii})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ii}E_{kk})w_k=0, & k\neq i \text{ 时}\\ w_i, & k=i \text{ 时}.\end{cases}$

b) $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 线性无关, 从而构成 $\mathbb{R}^n$ 的基, 矩阵 $W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]$ 为可逆阵. 事实上, 若 $x_1w_1+\cdots+x_nw_n=0$, 则在两边用 $\phi(E_{ii})$ 作用之, 得 $x_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. (11 分)

c) 当 $k\neq j$ 时, $\phi(E_{ij})w_k=\phi(E_{ij})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ij}E_{kk})w_k=0$;

当 $k=j$ 时, 令 $\phi(E_{ij})w_k=b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n$. 两边分别用

$\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{i-1\ i-1}),\phi(E_{i+1\ i+1}),\cdots,\phi(E_{nn})$ 作用之, 得

$$\begin{aligned}
&0=\phi(E_{11}E_{ij})w_j=\phi(E_{11})\phi(E_{ij})w_k=b_{1j}w_1,\cdots,\\
&0=\phi(E_{nn}E_{ij})w_j=\phi(E_{nn})(b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n)=b_{nj}w_n,
\end{aligned}$$

即有

$$b_{1j}=\cdots=b_{i-1\ j}=b_{i+1\ j}=\cdots=b_{nj}=0.$$

从而 $\phi(E_{ij})w_j=b_{ij}w_i$, 进一步, $b_{ij}\neq 0$, 否则有 $\phi(E_{ij})[w_1,\cdots,w_n]=0$, 导致 $\phi(E_{ij})$ 为零阵, 不可能. (15 分)

这样通过计算 $\phi(E_{ij})w_j\ i,j=1,2,\cdots,n$, 我们得到 n^2 个非零的实数:

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{matrix}$$

注意到 $E_{mr}E_{rs}=E_{ms}$, 从而

$$b_{ms}w_m=\phi(E_{ms})w_s=\phi(E_{mr})\phi(E_{rs})w_s=\phi(E_{mr})b_{rs}w_r=b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有 $b_{mr}b_{rs}=b_{ms}$. (17 分)

最后, 令 $v_i=b_{i1}w_i,\ i=1,2,\cdots,n$. 则有

$$\phi(E_{ij})v_k=\begin{cases}0, & k\neq j\ \text{时}\\ \phi(E_{ij})b_{j1}w_j=b_{j1}b_{ij}w_i=b_{i1}w_i=v_i, & k=j\ \text{时}.\end{cases}\qquad(21\ 分)$$

令 $R=[v_1,\cdots,v_n]$, 则 $R=[w_1,\cdots,w_n]\begin{pmatrix}b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n1}\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 且

$$\phi(E_{ij})R=\phi(E_{ij})[v_1,\cdots,v_n]=[0,\cdots,0,v_i,0\cdots,0]=[v_1,\cdots,v_n]E_{ij}$$

即, $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$. 证毕. (25 分)

三、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

证明 (1) 由条件 $0<x_2=f(x_1)<x_1$, 归纳地可证得 $0<x_{n+1}<x_n$, 于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 x_0. 由 f 的连续性, 及 $x_{n+1}=f(x_n)$ 得 $x_0=f(x_0)$. 又因为当 $x>0$ 时, $f(x)>x$, 所以只有 $x_0=0$. 即, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. (5 分)

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}} &&(8分)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{-f''(x)}\\&=-\frac{2}{f''(0)} &&(15分)\end{aligned}$$

四、 (本题 15 分) 设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

证明 若结论不对, 则存在 $x_0>0$ 使得当 $x\geqslant x_0$ 时, 有 $f'(x)\geqslant f(ax)>0$. (5分)

于是当 $x>x_0$ 时, $f(x)$ 严格递增, 且由微分中值定理

$$\begin{aligned}f(ax)-f(x)&=f'(\xi)(a-1)x\geqslant f(a\xi)(a-1)x\\&>f(ax)(a-1)x.\end{aligned}$$

但这对于 $x>\frac{1}{a-1}$ 是不能成立的. (10分)

五、(本题 20 分) 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数, f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即对任意 $x,y\in[-1,1]$ 及 $t\in(0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证:
$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\geqslant\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\int_{-1}^{1} g(x)\,dx.$$

证明 由于 f 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)g(-x)\,dx. \qquad (2分)$$

因而

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx&=\int_{-1}^{1} f(x)(g(x)+g(-x))\,dx\\&=2\int_{0}^{1} f(x)(g(x)+g(-x))\,dx. \qquad (1)\end{aligned}$$

(7分)

因为 $g(x)$ 为凸函数, 所以函数 $h(x)=g(x)+g(-x)$ 在 $[0,1]$ 上递增. (10分)

故对任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\geqslant 0.$$

因而

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\,dxdy\geqslant 0. \qquad (15分)$$

由此可得

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1} f(x)h(x)\,dx&\geqslant 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx\cdot\int_{0}^{1} h(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1} h(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1} g(x)\,dx. \qquad (20分)\end{aligned}$$

结合 (1) 即得结论.