自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

北京科技大学 2020–2021 学年 第 一 学期

微积分 AI 期末试卷（模拟卷）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

试卷卷面成绩						课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题 号	一	二	三	四	小 计			
得 分								

得分

一、填空题 (本题共 6 小题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$ ______ .

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$ ____ .

3. 设 $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right)+1,\\ y=2\arctan t-(1+t)^2\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}=$ ________ .

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+n\,\mathrm{e}\right)=$ ____ .

5. 计算 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\sin 2x\right)|\sin x|\,\mathrm{d}\,x$ ______ .

6. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 则它的以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=5\pi$ 处收敛于 ______ .

得分

二、单项选择题 (本题共 6 小题，每题 4 分，满分 24 分)

7. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$, 则 【 】

(A) $a=0,b=-2$ (B) $a=1,b=-2$ (C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$

8. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且 $f'(0)=0$，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{|x|}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 【 】

(A) 取极大值 (B) 取极小值

(C) 出现拐点 (D) 既不是极值点, 也不是拐点

9. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,\mathrm{d}\,x$, $N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^4 x\right)\mathrm{d}\,x$, $K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x-\cos^4 x\right)\mathrm{d}\,x$, 则有 【 】

(A) $M>N>K$ (B) $M>K>N$ (C) $N>M>K$ (D) $K>M>N$

10. 设 $f(x)$ 有连续的一阶导数, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\,\mathrm{d}\,t$, 且当 $x\to 0$ 时, $F(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小, 则 $k=$ 【 】

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

11. 在曲线 $y=(x-1)^2$ 上的点 $(2,1)$ 处作曲线的法线, 由该法线、x 轴及该曲线所围成的区域为 $D(y>0)$, 则区域 D 绕 x 轴旋转一周所围成的几何体体积为 【 】

(A) $\dfrac{\pi}{5}$ (B) $\dfrac{2\pi}{3}$ (C) $\dfrac{8\pi}{15}$ (D) $\dfrac{13\pi}{15}$

12. 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 敛散性分别为 【 】

(A) 收敛; 收敛 (B) 发散; 发散 (C) 收敛; 发散 (D) 发散; 收敛

得分

三、计算题 (本题共 5 小题，每题 8 分，满分 40 分)

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{1+\mathrm{e}^{n(x-1)}}$, 求 $f(x)$, 并讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

14. 设 $f(x)=x^2-x\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$, 求 $f(x)$.

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

15. 计算 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的最值.

16. 设 $y(x-y)^2=x$, 求积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x-3y}\,\mathrm{d}\,x$.

17. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n\,(n+1)}x^n$ 的和函数 $f(x)$.

得分

四、证明题 (本题共 2 小题，每题 6 分，满分 12 分)

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明在区间 $[0,a]$ 上存在 ξ ，使

$$f(\xi)=f(\xi+a).$$

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f(a)=a$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$, 求证: 在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1.$$