试题解答

1：（ 15 分） 设 Γ 为椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2+1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

解答：设 (x,y,z) 为切锥面上的点（非原点）. 存在唯一 t 使得 $t(x,y,z)$ 落在椭圆抛物面上（ 5 分）. 于是有 $tz=(3x^2+4y^2)t^2+1$, 并且这个关于 t 的二次方程只有一个根（ 10 分）. 于是，判别式

$$\Delta=z^2-4(3x^2+4y^2)=0.$$

这就是所求的切锥面方程（ 15 分）. □

2：（ 15 分）设 Γ 为抛物线， P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明： $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

解答：不妨设抛物线方程为 $y=x^2$, $P=(x_0,y_0)$（ 1 分）. P 与焦点在抛物线的同侧，则 $y_0>x_0^2$（ 2 分）. 设 L 的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$. L 与 Γ 的交点的 x 坐标满足 $x^2=k(x-x_0)+y_0$, 有两个解 $x_1<x_2$ 满足

$$x_1+x_2=k,\ x_1x_2=kx_0-y_0$$

（ 6 分）. L 与 x 轴， $x=x_1, x=x_2$ 构成的梯形面积 $D=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)$, 抛物线与 x 轴， $x=x_1, x=x_2$ 构成区域的面积为 $\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx=\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$（ 8 分）. 于是有

$$A(L)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)=\frac{1}{6}(x_2-x_1)^3$$

$$\begin{aligned}36A(L)^2&=(x_2-x_1)^6=((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)^3=(k^2-4kx_0+4y_0)^3\\&=((k-2x_0)^2+4(y_0-x_0^2))^3\geq 64(y_0-x_0^2)^3.\end{aligned}$$

（ 12 分）, 等式成立当且仅当 $A(L)$ 取最小值, 当且仅当 $k=2x_0$, 即 $x_1+x_2=2x_0$（ 15 分）. □

3: （ 10 分）设 $f\in C^1[0,+\infty)$, $f(0)>0$, $f'(x)\geq 0\forall x\in[0,+\infty)$.
已知 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx<+\infty$, 求证： $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx<+\infty$.

解答：由于 $f'(x)\geq 0$, 有

$$0\leq\int_0^N\frac{1}{f(x)}\,dx-\int_0^N\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx=\int_0^N\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\,dx$$

（ 1 分）. 取极限

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\,dx \le \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)^2}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty}(-\frac{1}{f(x)})\mid_0^N \le \frac{1}{f(0)}$$

（ 8 分）. 故由已知条件有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx \le \int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx + \frac{1}{f(0)} < +\infty$$

（ 10 分）.

4: （ 10 分）设 A, B, C 均为实 n 阶正定矩阵， $P(t) = At^2 + Bt + C$, $f(t) = detP(t)$, 其中 t 为未定元， $detP(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 为 $f(t)$ 的根，试证明： $Re(\lambda) < 0$, 这里 $Re(\lambda)$ 表示 λ 的实部.

解答：设 λ 为 $f(t)$ 的根，则有 $detP(t) = 0$, 从而 $P(t)$ 的 n 个列线性相关. 于是存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $P(\lambda)\alpha = 0$, 进而 $\alpha^* P(\lambda)\alpha = 0$. （ 4 分）
具体地，

$$\alpha^* A\alpha\lambda^2 + \alpha^* B\alpha\lambda + \alpha^* C\alpha = 0.$$

令 $a = \alpha^* A\alpha$, $b = \alpha^* B\alpha$, $c = \alpha^* C\alpha$, 则由 A, B, C 皆为正定矩阵知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

（ 6 分）. 注意到，当 $b^2 - 4ac \ge 0$ 时， $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$, 从而

$$Re\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0;$$

（ 8 分）. 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$, 从而 $Re\lambda = -b/2a < 0$. □

5: （ 10 分）已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, |x| < 1$, n 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

解答：由于 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 恰为 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{1-x}$ 展开式中 x^{n-1} 的系数（ 2 分），而

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4} = \frac{(2-(1-x))^n}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^{n-i}(1-x)^{i-4},$$

其 x^{n-1} 项系数等于

$$2^n(1-x)^{-4}-n2^{n-1}(1-x)^{-3}+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}(1-x)^{-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数（ 6 分），也就等于

$$\frac{2^n}{3!}((1-x)^{-1})'''-\frac{n2^{n-1}}{2!}((1-x)^{-1})''$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}((1-x)^{-1})'-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数，它等于

$$\frac{2^n}{3!}(n+2)(n+1)n-\frac{n2^{n-1}}{2!}(n+1)n+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}n-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}.$$

故有

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i=\frac{n(n+2)(n+7)}{3}2^{n-4}$$

（ 10 分）. □

6: （ 15 分）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微， $f(0)=f(1),\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 且 $f'(x)\neq 1\,\forall x\in[0,1]$. 求证：对任意正整数 n, 有 $\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|<\frac{1}{2}$.

解答：由于 $f(0)=f(1)$, 故存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f'(c)=0$（ 2 分）. 又 $f'(x)\neq 1$, 由导函数介值性质恒有 $f'(x)<1$（ 4 分）. 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 为单调下降函数（ 6 分）. 故

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\int_0^1 g(x)dx+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})+1))$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})>\int_0^1 g(x)dx=-\frac{1}{2}$$

（ 12 分）. 于是有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})+\frac{n-1}{2}\right|<\frac{1}{2}\ \square$$

（ 15 分）

7: （ 25 分）已知实矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & b\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. 证明：

(1) 矩阵方程 $AX=B$ 有解但 $BY=A$ 无解的充要条件是 $a\neq 2, b=4/3$;

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $a=3, b=2/3$;

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $a<2, b=3$.

解答：(1) 矩阵方程 $AX=B$ 有解等价于 B 的列向量可由 A 的列向量线性表示，$BY=A$ 无解等价于 A 的某个列向量不能由 B 的列向量线性表示（ 2 分）. 对 (A,B) 作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 4 & b\\ 2 & a & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 2 & 4 & b\\ 0 & a-2 & -1 & 1-b\end{pmatrix}$$

知，B 的列向量组可由 A 的列向量线性表示当且仅当 $a\neq 2$（ 6 分）. 对矩阵 (B,A) 作初等行变换：

$$(B,A)=\begin{pmatrix}4 & b & 2 & 2\\ 3 & 1 & 2 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & b & 2 & 2\\ 0 & 1-3b/4 & 1/2 & a-3/2\end{pmatrix}.$$

由此知 A 的列向量组不能由 B 的列向量线性表示的充要条件是 $b=4/3$. 所以矩阵方程 $AX=B$ 有解但 $BY=A$ 无解的充要条件是 $a\neq 2, b=4/3$（ 10 分）.

(2) 若 A,B 相似，则有 $trA=trB$, 且 $|A|=|B|$, 故有 $a=3, b=2/3$（ 12 分）. 反之，若 $a=3, b=2/3$, 则有

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 2/3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

A 和 B 的特征多项式均为 $\lambda^2-5\lambda+2$. 由于 $\lambda^2-5\lambda+2=0$ 由两个不同的根，从而 A,B 都可以相似于同一对角阵. 故 A 与 B 相似（ 15 分）.

(3) 由于 A 为对称阵，若 A,B 合同，则 B 也是对称阵，故 $b=3$（ 16 分）. 矩阵 B 对应的二次型

$$g(x_1,x_2)=4x_1^2+6x_1x_2+x_2^2=(3x_1+x_2)^2-5x_1^2.$$

在可逆线性变换 $y_1=3x_1+x_2, y_2=x_1$ 下，$g(x_1,x_2)$ 变成标准型：$y_1^2-5y_2^2$（ 18 分）. 由此，B 的正，负惯性指数为 1（ 19 分）. 类似地，A 对应的二次型

$$f(x_1,x_2)=2x_1^2+4x_1x_2+ax_2^2=2(x_1+x_2)^2+(a-2)x_2^2$$

在可逆线性变换 $z_1=3x_1+x_2, z_2=x_2$ 下 $f(x_1,x_2)$ 变成标准型：$2z_1^2+(a-2)z_2^2$（ 22 分）. A,B 合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数，故 A,B 合同的充要条件是 $a<2, b=3$（ 25 分）□